

UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA



DIPARTIMENTO  
DI INGEGNERIA  
DELL'INFORMAZIONE

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

# Controllo classico di un pendolo inverso

Relatore: Prof. Maria Elena Valcher

Laureando: Matteo Dal Nevo  
Matricola: 1167122

ANNO ACCADEMICO 2021-2022  
Data di laurea: 20/07/2022

## Abstract

L'idea principale di questa tesi è quella di descrivere un sistema consistente di un carrello con sopra incernierata un'asta, per ricavarne il modello matematico in spazio di stato, linearizzandolo attorno alla posizione di equilibrio instabile e verificarne la stabilità. Si procede successivamente con l'implementazione di un sistema di controllo che riesca a stabilizzare il pendolo nella sua posizione di equilibrio instabile mantenendo delle determinate specifiche di progetto, e si conclude infine lo sviluppo di un ulteriore controllore per poter mantenere la posizione del carrello ad un riferimento costante. Il progetto dei controllori verrà sviluppato implementando un controllore di tipo PID mediante l'analisi del luogo delle radici. Il sistema di controllo viene progettato in ambiente *MATLAB* per poi essere testato tramite delle simulazioni con *SIMULINK*.

# Indice

|          |                                                                 |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduzione</b>                                             | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Modello matematico</b>                                       | <b>2</b>  |
| 2.1      | Descrizione del Sistema . . . . .                               | 2         |
| 2.2      | Analisi del sistema - metodo di Newton . . . . .                | 3         |
| 2.2.1    | Dinamica del carrello . . . . .                                 | 3         |
| 2.2.2    | Dinamica del pendolo . . . . .                                  | 4         |
| 2.3      | Modello in spazio di stato . . . . .                            | 5         |
| 2.3.1    | Punti di equilibrio ad ingresso costante . . . . .              | 5         |
| 2.3.2    | Linearizzazione attorno ai punti di equilibrio . . . . .        | 6         |
| 2.4      | Funzione di trasferimento . . . . .                             | 6         |
| <b>3</b> | <b>Analisi in catena aperta</b>                                 | <b>7</b>  |
| 3.1      | Stabilità del sistema . . . . .                                 | 7         |
| 3.1.1    | Analisi della stabilità asintotica . . . . .                    | 7         |
| 3.1.2    | Analisi della BIBO stabilità . . . . .                          | 8         |
| 3.2      | Confronto tra modello non lineare e lineare . . . . .           | 10        |
| <b>4</b> | <b>Progetto del controllore</b>                                 | <b>11</b> |
| 4.1      | Controllo dell'angolo . . . . .                                 | 12        |
| 4.2      | Controllo della posizione del carrello . . . . .                | 19        |
| <b>5</b> | <b>Simulazioni</b>                                              | <b>23</b> |
| 5.1      | Simulazione del controllore di posizione dell'angolo . . . . .  | 23        |
| 5.2      | Simulazione del controllore di posizione del carrello . . . . . | 24        |
| 5.3      | Reiezione dei disturbi . . . . .                                | 26        |
| <b>A</b> | <b>Codice MATLAB</b>                                            | <b>28</b> |
| A.1      | Controllo del pendolo . . . . .                                 | 28        |
| A.2      | Controllo del carrello . . . . .                                | 31        |
| A.3      | Simulazioni . . . . .                                           | 34        |

# Elenco delle figure

|      |                                                                                                                    |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | Esempi pratici di applicazione . . . . .                                                                           | 1  |
| 2.1  | Sistema meccanico e forze in gioco . . . . .                                                                       | 2  |
| 2.2  | Forze agenti sul carrello . . . . .                                                                                | 3  |
| 3.1  | Autovalori della matrice $A$ . . . . .                                                                             | 8  |
| 3.2  | Risposta impulsiva di $P_x(s)$ e $P_\theta(s)$ . . . . .                                                           | 9  |
| 3.3  | Risposta al gradino di $P_x(s)$ e $P_\theta(s)$ . . . . .                                                          | 9  |
| 3.4  | Confronto evoluzione libera non-lineare / lineare . . . . .                                                        | 10 |
| 4.1  | Schema di controllo del sistema retroazionato $P_\theta(s)$ . . . . .                                              | 12 |
| 4.2  | Luogo delle radici positivo di $P_\theta(s)$ (controllore P) . . . . .                                             | 12 |
| 4.3  | Luogo delle radici negativo di $P_\theta(s)$ (controllore P) . . . . .                                             | 13 |
| 4.4  | Luogo delle radici positivo di $C_\theta P_\theta(s)$ (controllore I) . . . . .                                    | 14 |
| 4.5  | Luogo delle radici positivo di $C_\theta(s)P_\theta(s)$ con $s = -10$ (controllore PI) . . . . .                   | 15 |
| 4.6  | Luogo delle radici positivo di $C_\theta(s)P_\theta(s)$ con $(s = -1)$ (controllore PI) . . . . .                  | 15 |
| 4.7  | Luogo delle radici positivo di $C_\theta(s)P_\theta(s)$ e relativi poli di $W_\theta(s)$ . . . . .                 | 16 |
| 4.8  | Luogo delle radici positivo di $C_\theta(s)P_\theta(s)$ (controllore PID) . . . . .                                | 17 |
| 4.9  | Luogo delle radici positivo di $C_\theta(s)P_\theta(s)$ e relativi poli di $W_\theta(s)$ . . . . .                 | 17 |
| 4.10 | Schema a blocchi con ingresso $d(t)$ e uscita $\theta(t)$ . . . . .                                                | 18 |
| 4.11 | Test delle proprietà del sistema lineare . . . . .                                                                 | 18 |
| 4.12 | Schema a blocchi del sistema complessivo . . . . .                                                                 | 19 |
| 4.13 | Schema a blocchi del sistema semplificato . . . . .                                                                | 19 |
| 4.14 | Luogo delle radici positivo di $C_x(s)P_{xc}(s)$ (controllore I) . . . . .                                         | 20 |
| 4.15 | Luogo delle radici negativo di $C_x(s)P_{xc}(s)$ (controllore PI) . . . . .                                        | 20 |
| 4.16 | Luogo delle radici negativo di $C_x(s)P_{xc}(s)$ (controllore PID) . . . . .                                       | 21 |
| 4.17 | Luogo delle radici negativo di $C_x(s)P_{xc}(s)$ e poli del sistema $W_x(s)$ con $k = -300$ . . . . .              | 22 |
| 4.18 | Risposta al gradino del sistema retroazionato $W_x(s)$ . . . . .                                                   | 22 |
| 5.1  | Controllo PID ( $C_\theta$ ) del sistema non lineare pendolo inverso . . . . .                                     | 23 |
| 5.2  | Evoluzione di $x$ e $\theta$ con stato iniziale $\mathbf{x}(0) = [0, 0, \frac{\pi}{8}, 0]^T$ . . . . .             | 24 |
| 5.3  | Controllo PID ( $C_\theta$ e $C_x$ ) del sistema non lineare pendolo inverso . . . . .                             | 24 |
| 5.4  | Evoluzione di $x$ e $\theta$ con stato iniziale $\mathbf{x}(0) = [0, 0, \frac{\pi}{8}, 0]^T$ . . . . .             | 25 |
| 5.5  | Risposta di $x$ e $\theta$ alla variazione di posizione del carrello di ampiezza 1 metro . . . . .                 | 25 |
| 5.6  | Controllo PID ( $C_\theta$ e $C_x$ ) del sistema non lineare pendolo inverso con un disturbo in ingresso . . . . . | 26 |
| 5.7  | Evoluzione di $x$ e $\theta$ con un disturbo costante di 1 N . . . . .                                             | 26 |

# Capitolo 1

## Introduzione

Il pendolo inverso è un sistema intrinsecamente instabile con un'elevata dinamica non lineare e appartiene all'insieme dei sistemi meccanici che possiedono più ingressi e più uscite (MIMO). Di fatto è un sistema dinamico con 2 gradi di libertà (degrees of freedom, Dofs): la posizione  $x$  e l'angolo del pendolo  $\theta$ , figura (2.1). È di tipo sotto-attuato (under-actuated) perché l'unica variabile di controllo è la forza  $F(t)$  che viene applicata al carrello e quindi non è possibile realizzare traiettorie arbitrarie delle due variabili di stato.

Per questo motivo cercare di effettuare un controllo completo di tutte le variabili di uscita del sistema risulta assai impegnativo, rendendo quindi il pendolo inverso un sistema molto interessante per progettare, testare, valutare e comparare diverse tecniche di controllo classiche e non.

È possibile suddividere in tre differenti problematiche principali il controllo del pendolo inverso: il controllo per lo swing-up, la stabilizzazione del pendolo e l'inseguimento di un segnale di riferimento in ingresso.

Stabilizzazione e inseguimento sembrano apparentemente semplici: progettare la forza  $F(t)$  per evitare la “caduta” del pendolo in un intervallo di tempo adeguatamente lungo. Ciò significa mantenere l'angolo di inclinazione minore di un dato valore, limitando la posizione del carrello all'interno di un intervallo desiderato.

Nella teoria dei controlli riuscire a garantire la stabilità e la robustezza nei sistemi a catena chiusa (closed-loop) è sempre stato l'obiettivo principale sin dall'inizio per permettere il corretto funzionamento dei sistemi in situazioni reali. Molti dei sistemi presenti in natura sono estremamente non lineari (ad esempio, quelli missilistici, robotici, di potenza e processi industriali). Il controllo di tali sistemi è un arduo obiettivo ingegneristico.

Molti dispositivi e apparati reali possono essere ricondotti al modello del pendolo inverso.

Per esempio i Segway, il lancio e l'atterraggio dei razzi, gli edifici e la postura umana.

Qualsiasi cosa richieda una stabilizzazione verticale ha delle dinamiche simili a quelle del pendolo inverso.



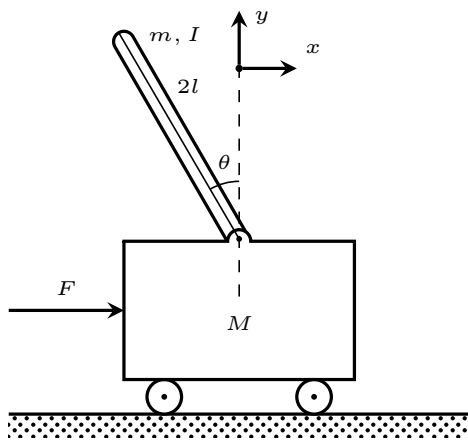
Figura 1.1: Esempi pratici di applicazione

## Capitolo 2

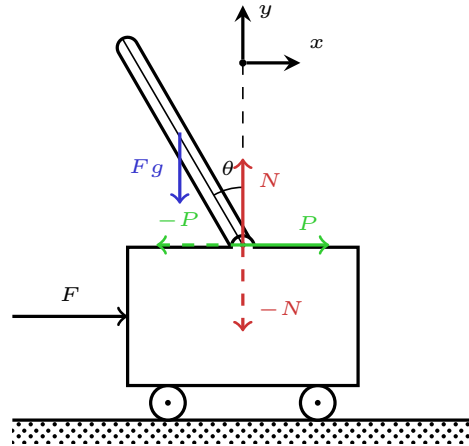
# Modello matematico

### 2.1 Descrizione del Sistema

Il sistema fisico che prendiamo in esame è costituito da un'asta capace di ruotare, incernierata al centro di un carrello mobile, rappresentato in figura (2.1).



(a) Sistema meccanico del pendolo inverso su carrello



(b) Rappresentazione delle forze in gioco nel sistema

Figura 2.1: Sistema meccanico e forze in gioco

## 2.2 Analisi del sistema - metodo di Newton

Alcune assunzioni preliminari:

- sul carrellino agisce una forza esterna  $F$ .
- il coefficiente di attrito viscoso del carrello  $b$  è supposto non trascurabile.
- l'attrito viscoso del pendolo viene supposto trascurabile.
- l'asta ha densità uniforme.

Principi della dinamica:

- Equazioni del moto dei corpi rigidi:

$$\sum_i F_i^x = ma_x, \quad \sum_i F_i^y = ma_y, \quad \sum_i \tau_i^\theta = I_{a_\theta} \quad (2.1)$$

dove

$F_i^x, F_i^y$  sono le forze agenti lungo l'asse x e y, rispettivamente

$a_x, a_y$  sono le accelerazioni del carrello lungo l'asse x e y, rispettivamente

$\tau_i^\theta$  è il momento torcente agente sulla base dell'asta

$a_\theta$  è l'accelerazione angolare dell'asta

$I$  è il momento di inerzia rispetto al centro di massa dell'asta

$x$  è la posizione del centro di massa del carrello

- Principio di azione-reazione tra corpi:  
 $N, P$  sono le forze agenti sull'asta  
 $-N, -P$  sono le reazioni vincolari agenti sul carrello

### 2.2.1 Dinamica del carrello

Il carrello può muoversi solo lungo l'asse  $x$ , nessuna rotazione o traslazione può avvenire lungo gli altri assi. La dinamica del moto del carrello è descritta dalla seguente equazione differenziale:

$$M\ddot{x} = F - P - b\dot{x} \quad (2.2)$$

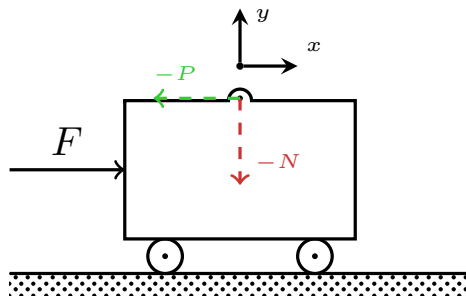


Figura 2.2: Forze agenti sul carrello

## 2.2.2 Dinamica del pendolo

Il centro di massa dell'asta può muoversi sia lungo l'asse  $x$  sia lungo  $y$  e così può ruotare. Ricaviamo dunque le equazioni rispetto al centro di massa dell'asta:

$$m\ddot{x}_{c.m.} = \sum_i F_i^x = P \quad (2.3a)$$

$$m\ddot{x}_{c.m.} = \sum_i F_i^y = N - mg \quad (2.3b)$$

$$I\ddot{\theta} = \sum_i \tau_i^\theta = Pl \cos \theta + Nl \sin \theta \quad (2.3c)$$

dove

$$\begin{aligned} x_{c.m.} &= x - l \sin \theta, \\ y_{c.m.} &= l \cos \theta \end{aligned} \quad (2.4)$$

Calcoliamo dunque le rispettive derivate prime e seconde in funzione del tempo per  $x_{c.m.}(t)$  e  $y_{c.m.}(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{c.m.}(t) &= \dot{x}(t) - l \cos(\theta(t))\dot{\theta}(t) \\ \ddot{x}_{c.m.}(t) &= \ddot{x}(t) + l \sin(\theta(t))\dot{\theta}^2(t) - l \cos(\theta(t))\ddot{\theta}(t) \\ \dot{y}_{c.m.}(t) &= -l \sin(\theta(t))\dot{\theta}(t) \\ \ddot{y}_{c.m.}(t) &= -l \cos(\theta(t))\dot{\theta}^2(t) - l \sin(\theta(t))\ddot{\theta}(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Utilizzando quindi le equazioni (2.2), (2.3a), (2.3b), (2.3c) e (2.5) possiamo ricavare le equazioni differenziali del sistema non lineare attraverso semplici passaggi.

Sostituiamo (2.2) in (2.3a), ottenendo la prima equazione utile a descrivere la dinamica del sistema

$$m \left( \ddot{x} + l \sin \theta \dot{\theta}^2 - l \cos \theta \ddot{\theta} \right) = F - b\dot{x} - M\ddot{x}$$

moltiplichiamo (2.3a) per  **$l \cos \theta$**

$$ml \cos \theta \ddot{x} + ml^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 - ml^2 \cos^2 \theta \ddot{\theta} = Pl \cos \theta$$

moltiplichiamo (2.3b) per  **$l \sin \theta$**

$$-ml^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 - ml^2 \sin^2 \theta \ddot{\theta} + mlg \sin \theta = Nl \sin \theta$$

sommiamo le due precedenti equazioni e utilizziamo (2.3c), ottenendo così la seconda equazione del sistema.

$$ml \cos \theta \ddot{x} - ml^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \ddot{\theta} + mlg \sin \theta = Pl \cos \theta + Nl \sin \theta = I\ddot{\theta}$$

Assumendo

$$\begin{aligned} I_e &:= I + ml^2 && \text{Momento d'inerzia equivalente} \\ M_e &:= m + M && \text{Massa equivalente} \end{aligned} \quad (2.6)$$

le equazioni differenziali risultanti che descrivono l'intero sistema sono:

$$\begin{cases} I_e \ddot{\theta} - ml \cos \theta \ddot{x} - mgl \sin \theta = 0 \\ -ml \cos \theta \ddot{\theta} + M_e \ddot{x} + b\dot{x} + ml \sin \theta \dot{\theta}^2 = F \end{cases} \quad (2.7)$$



## 2.3 Modello in spazio di stato

A partire dalle equazioni (2.7), esplicitando le variabili  $\ddot{x}$  e  $\ddot{\theta}$ , si ottiene:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} &= \frac{(ml \cos \theta \ddot{x} + mgl \sin \theta)}{I_e} \\ \ddot{x} &= \frac{ml \cos \theta \ddot{\theta} - b\dot{x} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + F}{M_e} \end{cases} \quad (2.8)$$

Definiamo come ingresso  $u := F$  e assumiamo come vettore di stato  $\mathbf{x} = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]^T = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ . Così facendo, possiamo ricavare un modello di stato del 4° ordine non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_c(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= f_p(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \end{cases} \quad (2.9)$$

dove  $f_c = \ddot{x}$  e  $f_p = \ddot{\theta}$ , definite in (2.8).

Questo sistema non lineare descrive il moto del pendolo inverso di figura 2.1a.

### 2.3.1 Punti di equilibrio ad ingresso costante

Per poter progettare un sistema di controllo con i metodi classici della teoria dei controlli è conveniente linearizzare le equazioni differenziali ricavate (2.9) attorno ad una soluzione di equilibrio.

Osservando il pendolo qualitativamente, si possono distinguere due punti di equilibrio: il più semplice è quando il pendolo si trova rivolto verso il basso, l'altro descrive la situazione in cui il pendolo si trova nella posizione esattamente opposta, ossia rivolto verso l'alto.

Ricaviamo analiticamente i punti di equilibrio considerando l'ingresso, ovvero la forza  $F$ , nullo.

Per fare ciò è necessario verificare quando le derivate delle soluzioni di (2.9) si annullano (per l'ingresso costante  $u = \tilde{u} = 0$ ). Si impone quindi

$$\begin{cases} 0 &= x_{e2} \\ 0 &= f_c(x_{e1}, x_{e2}, x_{e3}, x_{e4}, 0) \\ 0 &= x_{e4} \\ 0 &= f_p(x_{e1}, x_{e2}, x_{e3}, x_{e4}, 0) \end{cases} \quad (2.10)$$

Svolgendo i calcoli si ricava che l'angolo di equilibrio  $\theta_e$  deve soddisfare  $\sin(x_{e3}) = \sin \theta_e = 0$  e dunque, a conferma di quanto detto precedentemente, risultano due punti di equilibrio:  $\theta_e = 0$  quando il pendolo è rivolto verso l'alto e  $\theta_e = \pi$  quando il pendolo è rivolto verso il basso.

In entrambi i casi si ha  $x_{e2} = x_{e4} = 0$  e quindi il punto scelto è  $\mathbf{x}_e = [., 0, 0, 0]^T$  (posizione di equilibrio verticale).

Nell'intorno del punto di equilibrio  $(\mathbf{x}_e, \tilde{u})$  si faccia riferimento al corrispondente sistema linearizzato:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (2.11)$$

### 2.3.2 Linearizzazione attorno ai punti di equilibrio

Partendo dallo sviluppo in serie di Taylor, se esiste, è possibile esprimere una generica funzione  $f(x)$  nell'intorno di un punto come un polinomio con infiniti termini. Per piccoli spostamenti dal punto di equilibrio, si può sviluppare  $f(x)$  limitando lo sviluppo ai termini del 1 ordine. Ricavando lo sviluppo in serie di Taylor di  $f_i(x, u)$  con  $i = 1, \dots, 4$ , arrestandosi al primo ordine si ottiene

$$f_i(x, u) \simeq \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_e, \tilde{u})(x_1 - x_{e1}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x_e, \tilde{u})(x_2 - x_{e2}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_3}(x_e, \tilde{u})(x_3 - x_{e3}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_4}(x_e, \tilde{u})(x_4 - x_{e4})$$

Introdotte le matrici Jacobiane valutate in  $(\mathbf{x}_e, \tilde{u})$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_4(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_4(\mathbf{x})}{\partial x_4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Si ottiene dunque la seguente rappresentazione matriciale per il sistema linearizzato

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-I_e b}{M_e I_e - m^2 l^2} & \frac{m^2 l^2 g}{M_e I_e - m^2 l^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-m l b}{M_e I_e - m^2 l^2} & \frac{M_e m l g}{M_e I_e - m^2 l^2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I_e}{M_e I_e - m^2 l^2} \\ 0 \\ \frac{m l}{M_e I_e - m^2 l^2} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (2.13a)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (2.13b)$$

## 2.4 Funzione di trasferimento

Una volta ricavato il modello in spazio di stato lineare, è possibile determinare le funzioni di trasferimento ingresso-uscita del sistema, dove si considera come ingresso  $u$  e come uscite  $\theta$  e  $x$ . Le funzioni di trasferimento si calcolano direttamente come

$$\begin{bmatrix} P_x(s) \\ P_\theta(s) \end{bmatrix} = C(sI - A)^{-1} B \quad (2.14)$$

Dopo aver svolto i calcoli necessari si ricava quindi la seguente coppia di funzioni

$$\begin{cases} P_x(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{I_e s^2 - m g l}{s[(M_e I_e - m^2 l^2)s^3 + (b I_e)s^2 - (M_e m g l)s - (b m g l)]} \\ P_\theta(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{m l s}{(M_e I_e - m^2 l^2)s^3 + (b I_e)s^2 - (M_e m g l)s - (b m g l)} \end{cases} \quad (2.15)$$

## Capitolo 3

# Analisi in catena aperta

In questo capitolo verrà studiata la stabilità asintotica e BIBO del sistema lineare e verranno presentate delle simulazioni svolte a determinare il comportamento del pendolo incernierato al carrello in diverse situazioni, evidenziando le differenze tra il comportamento del sistema non lineare e lineare.

### 3.1 Stabilità del sistema

Assumiamo per le grandezze in gioco i seguenti valori

|                                 |                       |                         |
|---------------------------------|-----------------------|-------------------------|
| Massa del carrello              | $M$                   | 0.455kg                 |
| Massa del pendolo               | $m$                   | 0.21kg                  |
| Lunghezza media del pendolo     | $l$                   | 0.305m                  |
| Momento di inerzia del pendolo  | $I = \frac{1}{3}ml^2$ | 0.0065kg m <sup>2</sup> |
| Coefficiente di attrito viscoso | $b$                   | 1.0N/(m/s)              |

Tabella 3.1: Parametri nominali.

#### 3.1.1 Analisi della stabilità asintotica

Per verificare la stabilità asintotica del sistema si procede con il calcolo del polinomio caratteristico della matrice  $A$  definita in (2.13)

$$\Delta(s) = \det(sI - A) \Rightarrow \det \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s + \frac{bI_e}{M_e I_e - m^2 l^2} & -\frac{m^2 l^2 g}{M_e I_e - m^2 l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{mlb}{M_e I_e - m^2 l^2} & -\frac{M_e mlg}{M_e I_e - m^2 l^2} & s \end{pmatrix}$$

che porta al seguente risultato

$$\Delta(s) = s \left( s^3 + \frac{bI_e}{M_e I_e - m^2 l^2} s^2 - \frac{M_e mlg}{M_e I_e - m^2 l^2} s + \frac{mlbg(m^2 l^2 g - M_e I_e)}{(M_e I_e - m^2 l^2)^2} \right) \quad (3.1)$$

Applicando la regola dei segni di Cartesio ne consegue che il polinomio caratteristico  $\Delta(s)$  ha un autovalore nullo e i rimanenti zeri non possono essere tutti a parte reale negativa; infatti uno di questi è a parte reale positiva, confermando che il sistema linearizzato è instabile. Ciò permette di

concludere che nel punto di equilibrio considerato anche il sistema non lineare è instabile. Gli zeri sono rappresentati nel piano complesso in figura (3.1).

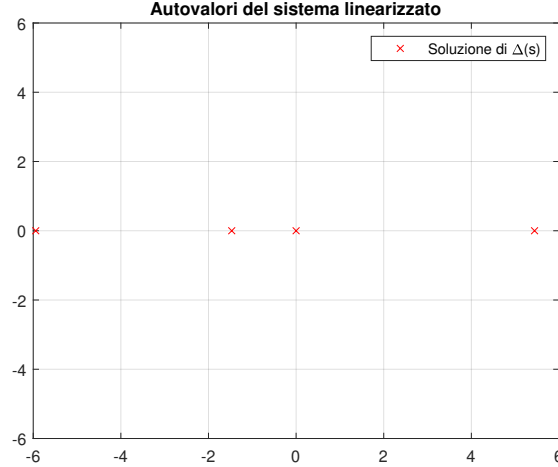


Figura 3.1: Autovalori della matrice  $A$

### 3.1.2 Analisi della BIBO stabilità

Assumendo i valori dei parametri della tabella (3.1), le funzioni di trasferimento del pendolo e del carrello calcolate precedentemente risultano

$$P_\theta(s) = \frac{4.8454s}{(s - 5.442)(s + 5.943)(s + 1.47)} \quad P_x(s) = \frac{1.9704(s - 4.912)(s + 4.912)}{s(s - 5.442)(s + 5.943)(s + 1.47)} \quad (3.2)$$

Dal punto di vista dei comandi Matlab, una volta inseriti i parametri del sistema e definito il modello di stato linearizzato  $(A, B, C, D)$ , come in (2.13), con l'ausilio del comando

$$sysP = ss(A, B, C, D) \quad (3.3)$$

si ottengono le due funzioni di trasferimento

$$sysP_x = zpks(sysP(1)) \quad sysP_\theta = zpks(sysP(2))$$

In tal modo ci si riporta alle due espressioni numeriche sopra indicate. Dato che la rappresentazione coprima, le due funzioni di trasferimento del sistema possono non avere lo stesso denominatore e di conseguenza avere poli differenti. Per valutare le radici del polinomio al denominatore di  $sysP_x$  e  $sysP_\theta$  viene utilizzato il comando *pole*. La funzione di trasferimento del pendolo non presenta un polo nell'origine a differenza di quella del carrello, a causa di un avvenuta cancellazione in quest'ultima. Si ricavano dunque i seguenti poli:

$$0 \quad 5.4424 \quad -5.9433 \quad -1.4695$$

Dato che i polinomi al denominatore non sono di Hurwitz il sistema non risulta BIBO stabile. Con i comandi

$$impulse() \quad stepplot()$$

è possibile valutare la risposta impulsiva e al gradino rispettivamente delle funzioni di trasferimento (3.2) sopra riportate.

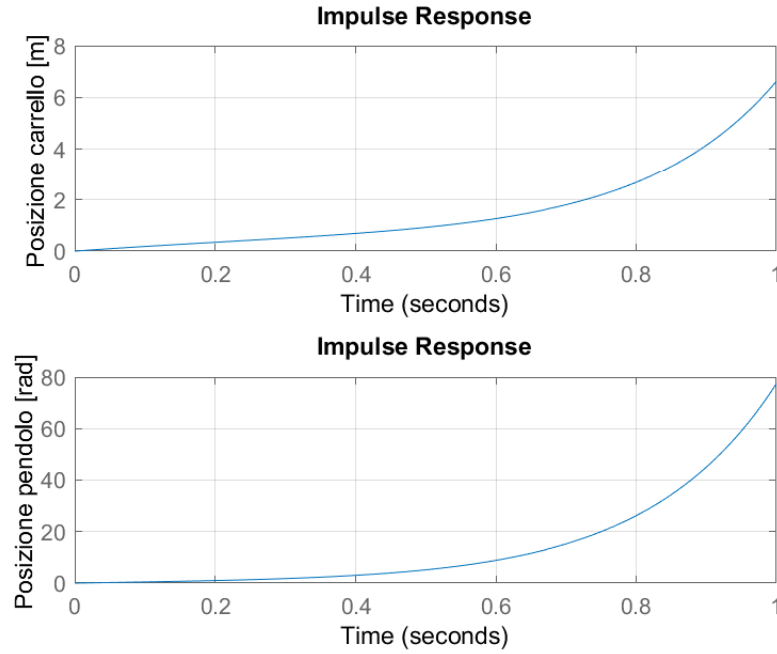


Figura 3.2: Risposta impulsiva di  $P_x(s)$  e  $P_\theta(s)$

Come è possibile notare dai grafici, la risposta del sistema è totalmente insoddisfacente. Il sistema in catena aperta non è certamente stabile: l'angolo del pendolo cresce indefinitamente e va oltre i 50 radianti (7 rivoluzioni). Il modello linearizzato infatti è da considerarsi valido solo per piccole variazioni dell'angolo  $\theta$  attorno al suo valore di equilibrio.

Si noti anche che la posizione del carrello cresce all'infinito allontanandosi dalla sua posizione di partenza; d'altronde non è stata fatta ancora nessuna assunzione sulla gestione della posizione del carrello in risposta ad un impulso in ingresso.

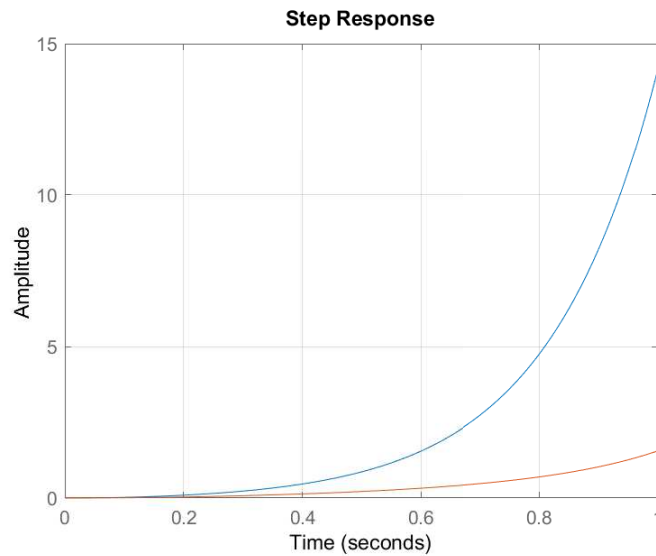


Figura 3.3: Risposta al gradino di  $P_x(s)$  e  $P_\theta(s)$

Dal momento che il sistema presenta dei poli a parte reale positiva la risposta al gradino risulta non limitata, verificando nuovamente l'instabilità del sistema. Per questo è necessario lo sviluppo di un controllore che per prima cosa stabilizzi il sistema e poi ne migliori le prestazioni. I poli del sistema oltre che a rivelare se esso è BIBO stabile danno anche importanti informazioni sul suo tempo di risposta.

### 3.2 Confronto tra modello non lineare e lineare

Una caratteristica importante che differenzia i due modelli è che per quello lineare le variabili di stato sono state definite per degli scostamenti dai valori costanti di equilibrio. Questo comporta un'approssimazione notevole della dinamica reale del sistema rispetto al sistema non lineare.

Per questa ragione ci si può aspettare che se le condizioni iniziali distano troppo dalla posizione di equilibrio instabile, il nostro modello linearizzato non è più affidabile.

Idealmente in assenza di forze in gioco, il sistema tenderebbe a rimanere immobile nella sua posizione di equilibrio verticale. Discostandosi anche di poco da questa posizione è inevitabile che il pendolo inizi ad oscillare fino a stabilizzarsi nel punto di equilibrio stabile, se presente.

Il carrello che è influenzato a sua volta dai movimenti del pendolo, in assenza di forze di controllo, non mantiene la sua posizione iniziale e si muove con moto oscillatorio tendendo a smorzarsi a causa del coefficiente di attrito.

Simulando quindi entrambi i modelli (il non lineare con *Simulink* e quello lineare con *Matlab*) e valutando l'andamento temporale delle variabili di stato del sistema con condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = [0, 0, \frac{\pi}{8}, 0]^T$ , si ottiene l'evoluzione libera ( $F = 0$ ) riportata in figura 3.4.

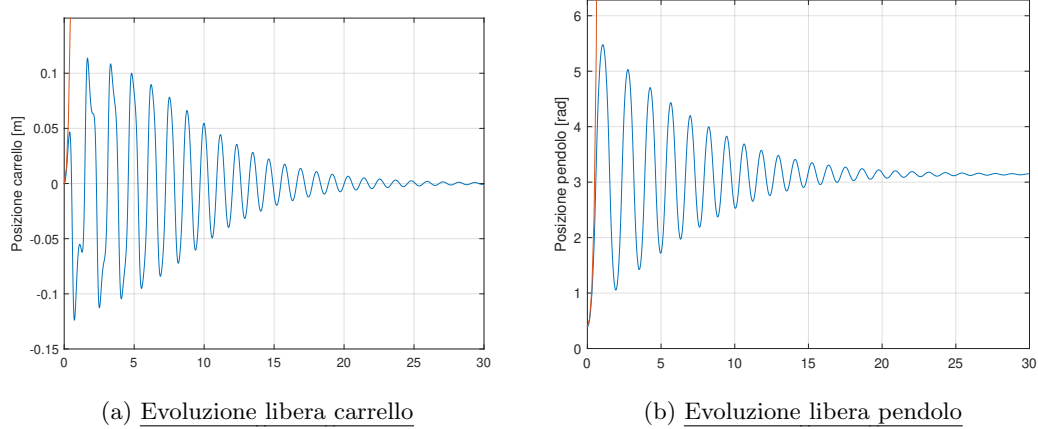


Figura 3.4: Confronto evoluzione libera non-lineare / lineare

La risposta non lineare del sistema si comporta come appena spiegato precedentemente. Questo non accade per il sistema lineare, poiché le dinamiche sono totalmente differenti. Qualsiasi condizione iniziale eccetto quella  $\mathbf{x}_{eq} = \mathbf{0}$  porta allo stesso risultato dell'esempio precedente.

## Capitolo 4

# Progetto del controllore

Lo scopo principale del capitolo è quello di sviluppare due controllori di tipo PID: uno per la posizione angolare del pendolo  $\theta$ , che deve essere in grado di mantenere il pendolo nella sua posizione verticale, e un controllore per poter gestire la posizione del carrello  $x$  per un corretto inseguimento del segnale di riferimento.

Gli obiettivi di controllo per questo sistema in risposta ad un riferimento a gradino di 1 metro per la posizione del carrello con condizione iniziale pari a  $\mathbf{x}(0) = [0, 0, 0, 0]^T$  sono i seguenti:

- Tempo di assestamento al 2% di 5 secondi per  $\theta$  e 10 secondi per  $x$ .
- Tempo di salita 5% per  $x$  minore di 1 secondo.
- Il pendolo non deve discostarsi più di 20 gradi (0.35 radianti) dalla posizione di equilibrio instabile.
- L'errore a regime per  $x$  e  $\theta$  deve essere minore del 2%.

Un'ulteriore specifica da considerare è quella di fare in modo che il sistema sia in grado di annullare un disturbo  $d(t)$  in ingresso, figura (4.1):

- L'angolo  $\theta$  soggetto ad un disturbo a gradino di 1  $N$  non deve discostarsi più di 0.05 rad dal punto di equilibrio instabile.

Nel capitolo precedente si è visto come il sistema non sia a priori BIBO stabile e presenti due uscite e un ingresso, quindi non è di tipo SISO. È necessario innanzitutto sviluppare un controllore che mantenga l'asta del carrello nella posizione di equilibrio instabile e successivamente un altro controllore in cascata per stabilizzare anche la posizione del carrello. Sarà necessario uno studio mediante il luogo delle radici per garantire la BIBO stabilità del sistema ad anello chiuso

$$W_\theta(s) = \frac{C_\theta(s)P_\theta(s)}{1 + C_\theta(s)P_\theta(s)}$$

per poi progettare un secondo controllore  $C_x(s)$  inserito in catena diretta al nuovo sistema.

$$P_{cx}(s) = \frac{P_x(s)}{1 + P_\theta(s)C_\theta(s)}$$

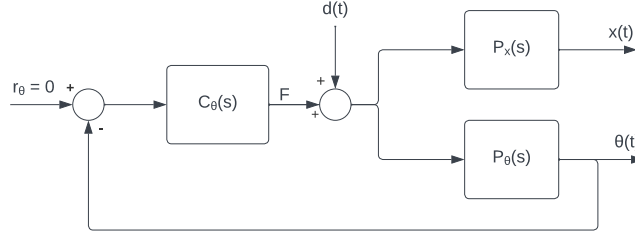


Figura 4.1: Schema di controllo del sistema retroazionato  $P_\theta(s)$

## 4.1 Controllo dell'angolo

Come anticipato prima è necessario progettare un controllore  $C_\theta(s)$  per stabilizzare l'angolo nella sua posizione di equilibrio instabile  $\theta = 0$ , trascurando la funzione di trasferimento  $P_x(s)$ . La funzione di trasferimento  $P_\theta(s)$  può essere riscritta in forma di Bode nel seguente modo

$$P_\theta(s) = K_B \frac{s}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)(1 - sT_3)}$$

dove  $T_1, T_2$  e  $T_3$  positivi, sono l'inverso (cambiato di segno) dei poli della funzione di trasferimento ricavati nel capitolo 3, mentre  $K_B$  è il guadagno di Bode e risulta negativo.

Il controllore di tipo PID invece ha la classica funzione di trasferimento

$$C_{PID}(s) = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

in cui si devono stabilire i guadagni in modo tale da soddisfare le specifiche e rendere BIBO stabile il sistema retroazionato.

### Introduzione dell'azione proporzionale (P)

Applicando la strategia precedentemente descritta si è tracciato il luogo delle radici positivo della funzione di trasferimento  $P_\theta(s)$ , riportato in figura 4.2.

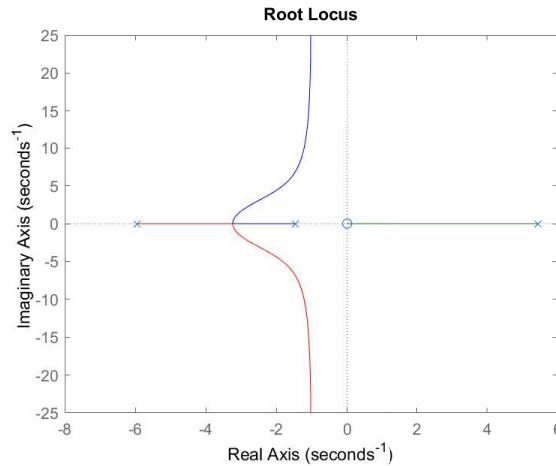


Figura 4.2: Luogo delle radici positivo di  $P_\theta(s)$  (controllore P)



Si può facilmente notare che un controllore di tipo proporzionale non è sufficiente per stabilizzare il sistema retroazionato perché nessun valore di guadagno  $k > 0$  può portare la funzione di trasferimento in catena chiusa ad avere dei poli a parte reale negativa, a causa del ramo interamente contenuto nel semipiano destro del piano complesso. È necessario eliminare lo zero nell'origine e richiamare il ramo che parte dal semipiano positivo.

In figura (4.3) è rappresentato il luogo delle radici negativo che non verrà preso in considerazione per lo studio del controllore  $C_\theta$  vista la presenza di un ramo che tende a dirigersi sempre di più verso destra, portando all'instabilità del sistema.

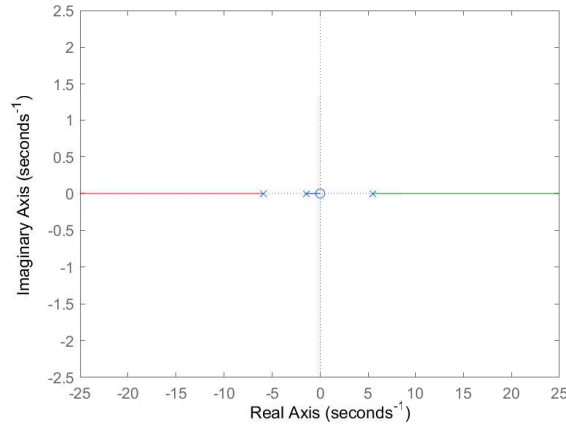


Figura 4.3: Luogo delle radici negativo di  $P_\theta(s)$  (controllore P)

### Introduzione dell'azione integrale (I)

Introducendo quindi un polo nell'origine (azione integrale), allora lo zero presente in  $P_\theta(s)$  si va a semplificare con quello appena introdotto nel controllore. Questa cancellazione zero/polo può portare a dei potenziali problemi.

Considerando quindi l'ipotesi di sostituire l'azione integrale come  $\frac{K_i}{s+\epsilon}$ , il controllore PID diventa

$$C_{PID}(s) = K_i \frac{\frac{K_d}{K_i} s^2 + \frac{K_p}{K_i} s + 1}{s + \epsilon}$$

in cui si assume che

$$\frac{K_d}{K_i} s^2 + \frac{K_p}{K_i} s + 1 = (1 + sT_1)(1 + sT_2)$$

e si ottiene dunque la seguente funzione ad anello aperto

$$L(s) = C_{PID}(s)P_\theta(s) = K_B K_i \frac{s}{(1 - sT_3)(s + \epsilon)}$$

La funzione di trasferimento ad anello chiuso risulta quindi

$$W(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{K_B K_i \frac{s}{(1 - sT_3)(s + \epsilon)}}{1 + K_B K_i \frac{s}{(1 - sT_3)(s + \epsilon)}} = \frac{K_B K_i s}{\epsilon + (K_B K_i + 1 - \epsilon T_3)s - T_3}$$

Assumendo che  $K_i > 0$  e che  $|K_B K_i| \gg 1$ , per ottenere la stabilità BIBO del sistema, secondo la regola di Cartesio, è necessario che il denominatore abbia tutti i coefficienti con lo stesso segno (negativo), per cui  $\epsilon$  deve risultare negativo. Questo equivale a richiedere che il controllore abbia

un polo positivo e quindi non sia BIBO stabile.

Dopo queste assunzioni e considerando un contributo puramente integrale, il luogo delle radici negativo è il seguente.

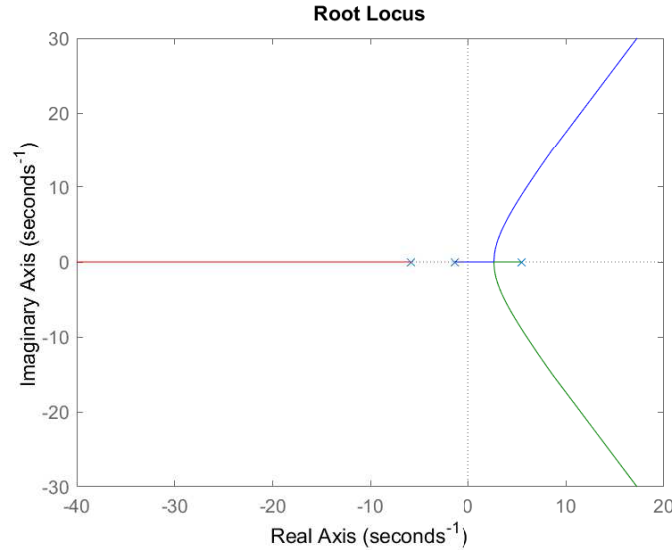


Figura 4.4: Luogo delle radici positivo di  $C_\theta P_\theta(s)$  (controllore I)

Come si può notare dalla figura 4.4 il numero di poli è 3 e quello degli zeri è 0. Questo significa che il luogo avrà 3 asintoti, uno lungo il semiasse reale negativo, e gli altri due posti a  $120^\circ$  da quest'ultimo.

Questa configurazione di controllo non è ancora soddisfacente: il sistema retroazionato risulta instabile per qualsiasi valore di  $k > 0$ , essendo presenti ancora due rami nel semipiano destro.

### Introduzione dell'azione Proporzionale-Integrale (PI)

Per fare in modo di richiamare i rami nel semipiano sinistro è necessario aggiungere degli zeri nel sistema. L'aggiunta di uno zero al controllore equivale a ridurre il numero di asintoti da 3 a 2. Questi due asintoti saranno paralleli all'asse immaginario e si porteranno verso il centro asintoti  $\alpha$  dato dalla seguente espressione

$$\alpha = \frac{\sum poli - \sum zeri}{\#poli - \#zeri} \quad (4.1)$$

Con l'inserimento di uno o più zeri nel sistema allora è possibile spostare il centro asintoti più a sinistra per rendere il sistema BIBO stabile per un dato valore di  $K$ .

Con le considerazioni fatte fin ora si ricava che

$$\alpha = \frac{-5.9433 + 5.4424 - 1.4695 - z}{3 - 1} = \frac{-1.9704 - z}{2} \quad (4.2)$$

Ne consegue che con l'aggiunta di uno zero molto piccolo ( $\simeq 0$ ) il centro asintoti risulta  $\alpha \simeq -0.98$ . Si ricordi che per un sistema del primo ordine una possibile stima del tempo di assestamento al 2% è  $T_s = 4/T_c$  [1], dove  $T_c$  è la costante di tempo del polo dominante.

Perciò è necessario fare in modo che i poli dominanti della funzione ad anello chiuso siano posizionati nel piano complesso alla sinistra di  $s = -4/5 = -0.8$  per avere un tempo di assestamento che possa soddisfare la specifiche di progetto di 5 secondi.

Si è verificato innanzitutto che il posizionamento errato di uno zero in  $s = -10$  porta il centro asintoti a spostarsi troppo alla destra del piano complesso in  $s = 5.98$ , come si nota in figura (4.5). Lo sviluppo del seguente controllore non porta certamente al risultato desiderato.

$$C_\theta(s) = k \frac{(s + 10)}{s} \quad (4.3)$$

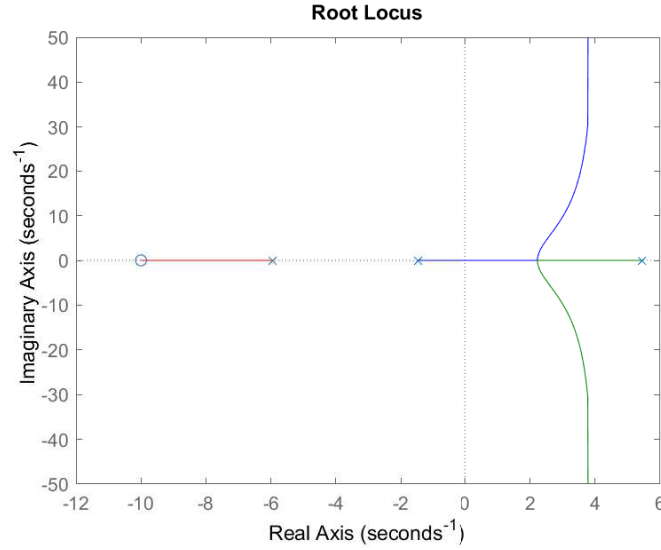


Figura 4.5: Luogo delle radici positivo di  $C_\theta(s)P_\theta(s)$  con  $s = -10$  (controllore PI)

Una prima parziale soluzione che si avvicina alle specifiche è quella di inserire uno zero minore di  $-0.8$  (quindi il suo diagramma di Bode ha pulsazione di spezzamento maggiore di 0.8), ma che allo stesso tempo che non faccia spostare il centro asintoti nel semipiano positivo. Un possibile valore è  $z = -1$ . Il luogo delle radici ottenuto dalla cascata del processo e del controllore è riportato in figura (4.6).

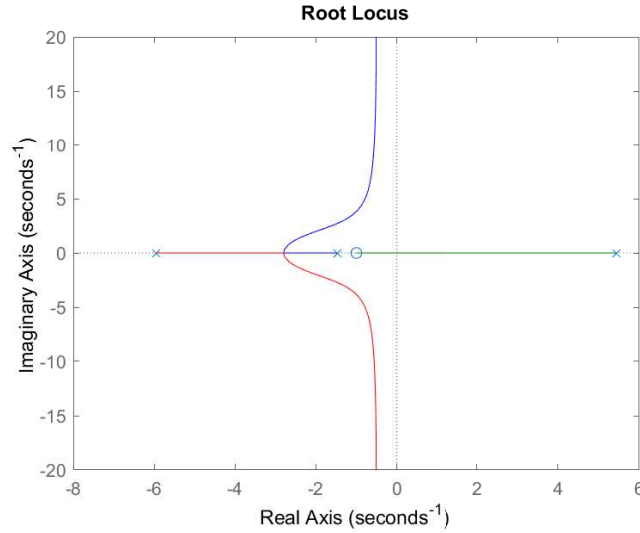


Figura 4.6: Luogo delle radici positivo di  $C_\theta(s)P_\theta(s)$  con  $(s = -1)$  (controllore PI)

Con un compensatore del tipo  $C_\theta(s) = k(s+1)/s$  il sistema retroazionato risulta stabile. È necessario scegliere un guadagno sufficientemente elevato per fare in modo di avere i poli a parte reale negativa. Un guadagno che soddisfi le specifiche è  $k = 11$ . In figura (4.7) si può vedere la posizione dei poli del sistema retroazionato, che risulta BIBO stabile.

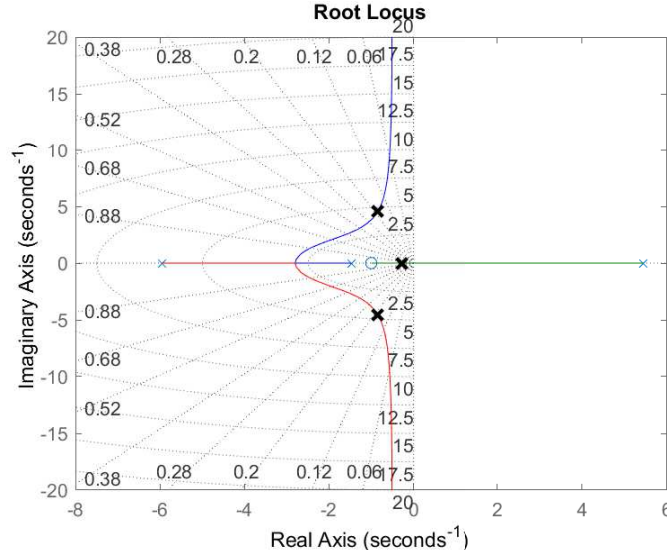


Figura 4.7: Luogo delle radici positivo di  $C_\theta(s)P_\theta(s)$  e relativi poli di  $W_\theta(s)$

Per completare il controllore di tipo PID e ottenere le caratteristiche di risposta del sistema desiderate è necessario introdurre un ulteriore zero.

### Sintesi del controllore PID

Una scelta possibile è quella di inserire uno zero in  $s = -3$ . Questo porta a ridurre il numero degli asintoti del luogo a 1, cioè un asintoto orizzontale lungo tutto l'asse delle ascisse. Analizzando il luogo delle radici in figura (4.8) un guadagno di Evans che soddisfa le specifiche è  $k = 100$ . La funzione di trasferimento è la seguente

$$C_\theta(s) = 100 \frac{(s+1)(s+3)}{s} \quad (4.4)$$

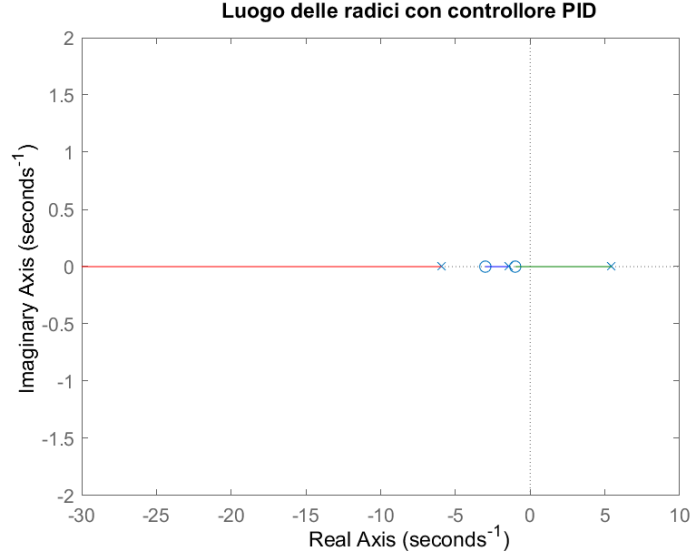


Figura 4.8: Luogo delle radici positivo di  $C_\theta(s)P_\theta(s)$  (controllore PID)

Il controllore appena progettato risulta corretto per garantire la stabilità del sistema. Tuttavia per rendere propria la funzione di trasferimento si è aggiunto un polo in  $s = -100$ , sufficientemente distante da quelli dominanti del sistema. Dal luogo delle radici riportato in figura (4.9) è possibile ricavare che un guadagno di Evans di  $k = 1000$  porta alla BIBO stabilità e a delle buone prestazioni del sistema in catena chiusa. Si ottiene così la seguente funzione di trasferimento per il controllore stabilizzante

$$C_\theta(s) = 1000 \frac{(s+1)(s+3)}{s(s+100)} \quad (4.5)$$

In figura 4.9 si può vedere la posizione dei poli del sistema retroazionato.

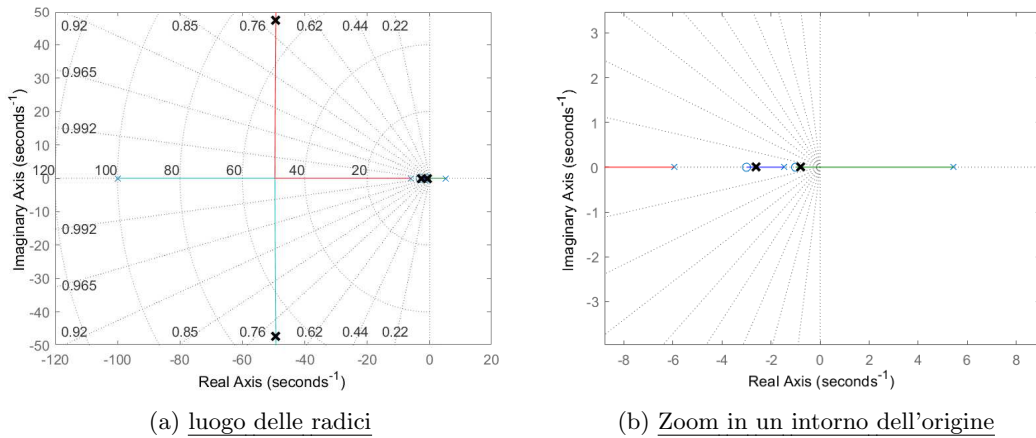


Figura 4.9: Luogo delle radici positivo di  $C_\theta(s)P_\theta(s)$  e relativi poli di  $W_\theta(s)$

Stabilizzando il sistema grazie al controllore  $C_\theta(s)$  e alla retroazione negativa si può vedere come la risposta al gradino riportata in figura (4.11a) non presenti sovra-elongazioni e presenti un tempo di assestamento al 2%,  $t_s = 2.97$  secondi. A causa della cancellazione del termine integrale tra  $P_\theta$  e  $C_\theta$  la risposta presenta un errore a regime,  $e_r = 0.48$  rad. Questo è poco rilevante ai fini ultimi del progetto visto che il riferimento per  $\theta$  risulterà sempre nullo e non è necessario cercare di ridurre ulteriormente  $e_r$ .

Risulta più interessante la figura (4.11b) dove è riportata la risposta al gradino di 1 N del sistema in catena chiusa, avente funzione di trasferimento  $T_\theta(s)$  ricavata dallo schema a blocchi in figura (4.10).

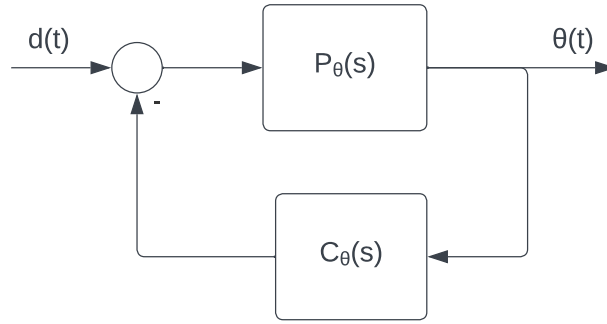
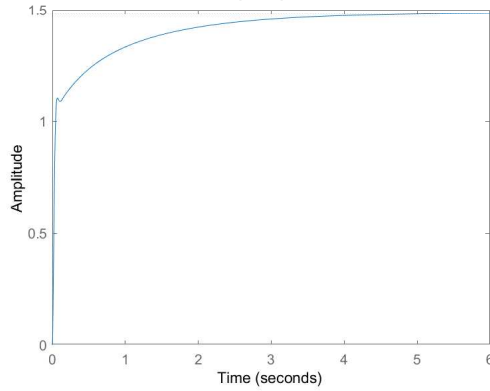


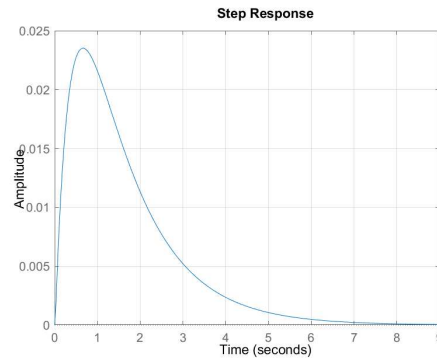
Figura 4.10: Schema a blocchi con ingresso  $d(t)$  e uscita  $\theta(t)$

$$T_\theta(s) = \frac{\Theta(s)}{D(s)} = \frac{P_\theta(s)}{1 + C_\theta(s)P_\theta(s)} \quad (4.6)$$

Si può notare che l'angolo  $\theta$  come da specifiche richieste non supera i 0.05 rad.



(a) Risposta al gradino del sistema retroazionato  $\underline{W_\theta(s)}$



(b) Risposta al gradino del sistema  $\underline{T_\theta(s)}$

Figura 4.11: Test delle proprietà del sistema lineare

## 4.2 Controllo della posizione del carrello

Per poter mantenere controllata la posizione del carrello è necessario quindi progettare il secondo compensatore. Ora che è presente anche la funzione di trasferimento del carrello  $P_x(s)$ , si deve ricavare la nuova funzione di trasferimento del sistema complessivo. Lo schema a blocchi rappresentato in figura (4.12) è il nuovo sistema da controllare  $P_{xc}$ , dall'ingresso  $F$  all'uscita  $x$

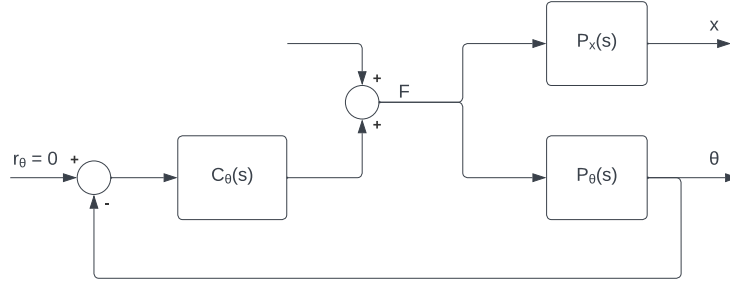


Figura 4.12: Schema a blocchi del sistema complessivo

che viene schematizzato nel modo seguente

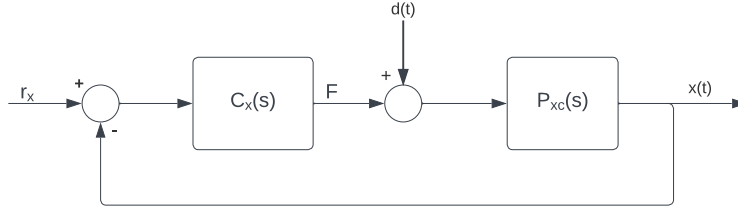


Figura 4.13: Schema a blocchi del sistema semplificato

dove  $C_x(s)$  è il controllore da progettare per rendere BIBO stabile il sistema in catena chiusa. La nuova funzione di trasferimento  $P_{xc}(s)$  è la seguente

$$P_{xc}(s) = \frac{1.9704(s + 4.912)(s - 4.912)(s + 100)}{s(s + 2.618)(s + 0.7999)(s^2 + 98.55s + 4672)} \quad (4.7)$$

### Introduzione dell'azione integrale (I)

Considerando le specifiche di progetto per il controllo di  $x$  è necessario che il sistema sia capace di inseguire un segnale di riferimento a gradino con errore nullo, ovvero il sistema retroazionato deve essere di tipo 1, e in grado reiettare eventuali disturbi costanti che entrano nell'anello di controllo. Il tutto con un tempo di assestamento al più di 10 secondi.

La prima condizione è già soddisfatta, poiché  $P_{xc}$  presenta un polo nell'origine. Al fine di soddisfare anche la seconda condizione il controllore  $C_x$  deve presentare un polo nell'origine.

Si è quindi sviluppato inizialmente un compensatore del tipo  $C_x = k/s$ , valutando di conseguenza se il sistema retroazionato ottenuto da  $C_x(s)P_{xc}$  potesse essere reso stabile da un'azione puramente integrale con l'analisi del luogo delle radici positivo.

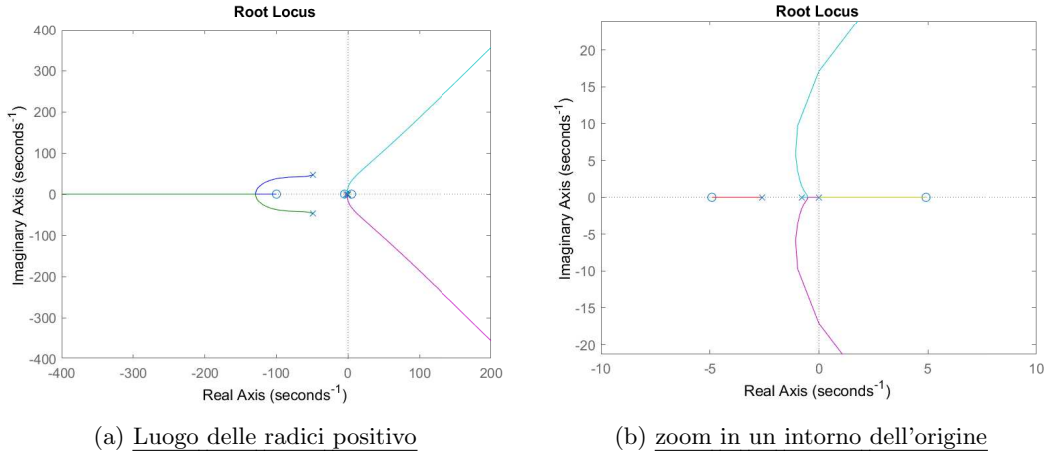


Figura 4.14: Luogo delle radici positivo di  $C_x(s)P_{xc}(s)$  (controllore I)

Come si può vedere in figura (4.14) è presente un ramo interamente contenuto nel semipiano destro del piano complesso, di conseguenza il sistema a catena chiusa presenta un polo a parte reale positiva per ogni valore di  $k > 0$ . Sono presenti due poli nell'origine: uno dei rami che parte da esso è diretto verso lo zero positivo, portando quindi all'instabilità del sistema; mentre l'altro si incontra con il polo in  $s = -0.79$  nel punto doppio in  $s = -0.512$  dirigendosi poi nel semipiano destro.

Il luogo delle radici positivo risulta particolarmente complesso visto che sono presenti due asintoti obliqui che portano i poli nel semipiano positivo al crescere di  $k > 0$ . Trovare un compensatore che stabilizzi il sistema non è semplice e un'idea è quella di valutare se il luogo delle radici negativo sia di più facile risoluzione, figura (4.15).

Anche in questo caso il luogo porta il sistema ad essere sempre instabile, a causa dei rami che si muovono verso il semipiano destro. Si può notare però che nel luogo negativo sono presenti degli asintoti obliqui, i quali conducono i rami interamente nel semipiano sinistro, a differenza del luogo positivo. Quindi si può cercare di "piegare" i rami del luogo che formano un anello nel semipiano destro verso quello sinistro, così da rendere il sistema retroazionato stabile per un determinato guadagno  $k < 0$ .

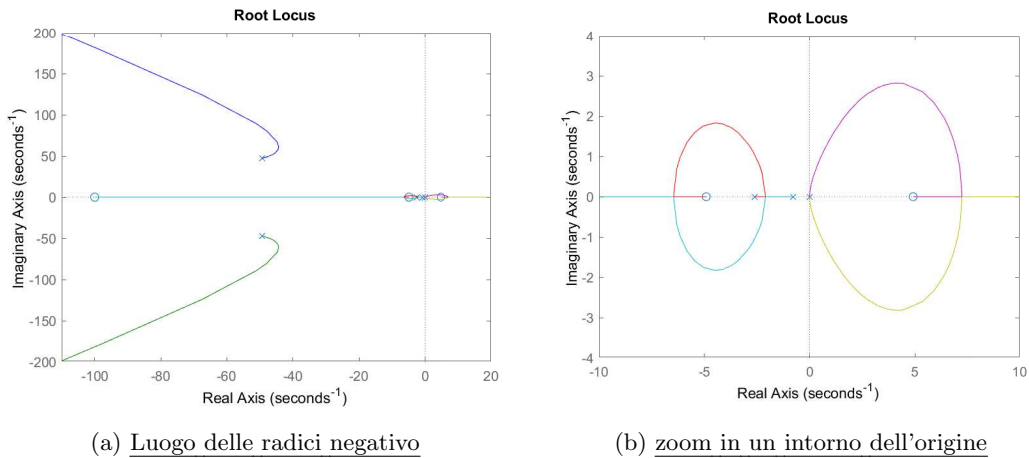


Figura 4.15: Luogo delle radici negativo di  $C_x(s)P_{xc}(s)$  (controllore PI)



### Introduzione dell'azione Proporzionale-Integrale (PI)

Seguendo il medesimo ragionamento sviluppato nel capitolo 4.1 è possibile ridurre il numero di asintoti incrementando il numero di zeri e modificando di conseguenza il baricentro degli asintoti. Considerando le specifiche di progetto, per ottenere un tempo di assestamento di 10 secondi al 2%, si è stimato che i poli dominanti della funzione ad anello chiuso debbano essere posizionati nel piano complesso alla sinistra di  $s = 4/10 = -0.4$ , secondo la formula approssimata del tempo di assestamento definita per sistemi del primo ordine  $T_s = 4/T_c$  [1].

Nel caso in esame con  $n - m = 3$  asintoti si è pensato di introdurre uno zero in  $s = -0.5$  per ridurre il numero a 2, ottenendo il seguente controllore

$$C_x(s) = k \frac{(s + 0.5)}{s} \quad (4.8)$$

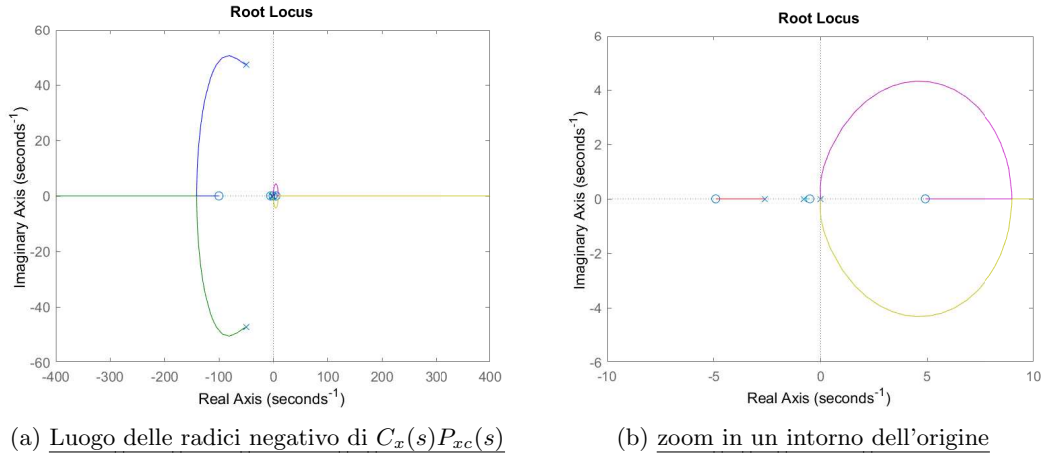


Figura 4.16: Luogo delle radici negativo di  $C_x(s)P_{xc}(s)$  (controllore PID)

Come è possibile notare in figura (4.16b) un solo zero non è sufficiente a stabilizzare il sistema in catena chiusa.

### Sintesi del controllore PID

Si considera quindi l'opzione di aggiungere un ulteriore zero in  $s = -0.5$ . Tuttavia, per mantenere la funzione di trasferimento  $C_x$  propria, è necessaria l'introduzione di un polo. Per questa ragione una scelta consona è quella di posizionarlo in  $s = -100$ .

Dal luogo delle radici riportato in figura (4.17) è possibile ricavare che un guadagno di Evans di  $k = -300$  porta alla BIBO stabilità e a delle buone prestazioni del sistema in catena chiusa.

La funzione di trasferimento risultante è la seguente

$$C_x(s) = -300 \frac{(s + 0.5)^2}{s(s + 100)} \quad (4.9)$$

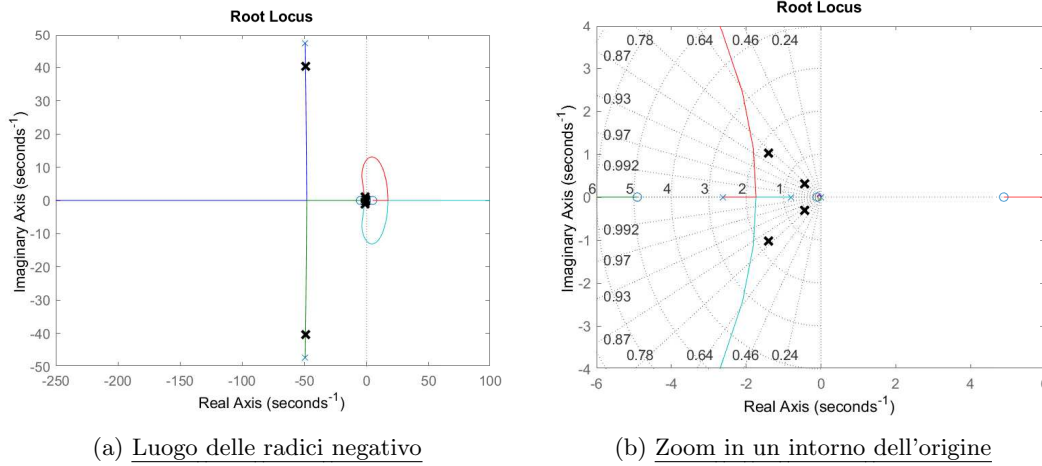


Figura 4.17: Luogo delle radici negativo di  $C_x(s)P_{xc}(s)$  e poli del sistema  $W_x(s)$  con  $k = -300$

Stabilizzando il sistema grazie al controllore  $C_x(s)$  e alla retroazione negativa si può vedere come la risposta al gradino riportata in figura (4.18) soddisfa le caratteristiche di progetto. Si può vedere una sotto-elongazione del 12.9%; questo tipo di dinamica è comune a tutti i sistemi a fase non minima ed è dovuta alla presenza di uno zero positivo nella funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa  $W(s)$ .

La risposta presenta anche una sovra-elongazione del 23% dovuta alla presenza di poli complessi e coniugati al denominatore, un tempo di salita  $t_r = 0.91$  secondi e un tempo di assestamento al 2%,  $t_s = 8.05$  secondi.

Grazie alla presenza del termine integrale in  $C_x$  la risposta presenta un errore a regime,  $e_r = 0$  metri, garantendo quindi un inseguimento al gradino perfetto.

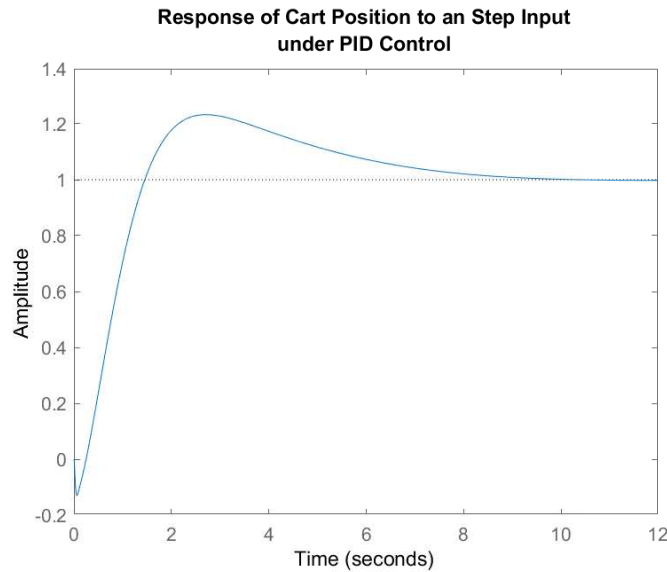


Figura 4.18: Risposta al gradino del sistema retroazionato  $W_x(s)$

## Capitolo 5

# Simulazioni

In questo capitolo si andranno ad effettuare delle simulazioni in ambiente *SIMULINK* per testare i controllori sintetizzati nel capitolo 4 considerando il sistema non lineare di partenza invece di quello linearizzato. Si mostrerà come il sistema sia in grado di mantenersi stabile nella posizione verticale grazie al controllore  $C_\theta$ , come la posizione del carrello venga gestita grazie al controllore  $C_x$  e in che modo un disturbo a gradino in ingresso possa influire sull'uscita.

### 5.1 Simulazione del controllore di posizione dell'angolo

In questo paragrafo si è testato il controllore  $C_\theta$  (4.5) usando il sistema non lineare costruito precedentemente con *Simulink*, figura (5.1), seguendo lo schema di figura (4.1).

Si è valutata la risposta del sistema con stato iniziale  $\mathbf{x}(0) = [0, 0, \frac{\pi}{8}, 0]^T$  e con un riferimento di posizione dell'angolo pari a 0 rad.

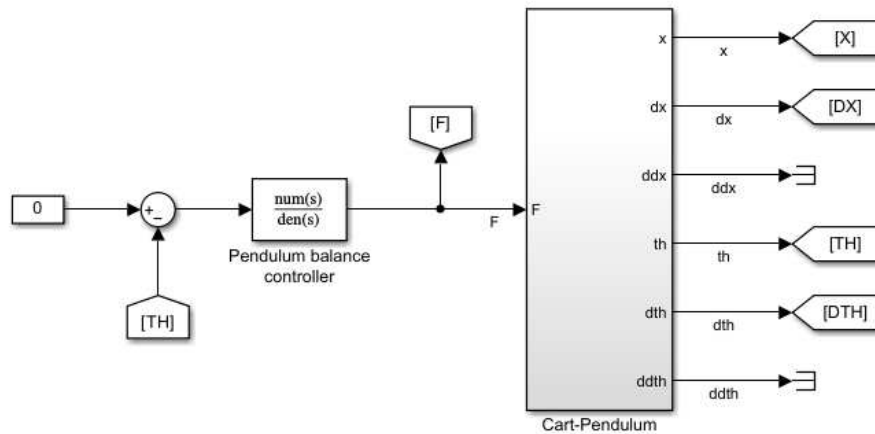


Figura 5.1: Controllo PID ( $C_\theta$ ) del sistema non lineare pendolo inverso

I risultati delle simulazioni sono mostrati in figura (5.2). Si osserva che l'angolo  $\theta$ , in rosso, risulta correttamente stabilizzato in meno di 1 secondo.

Tuttavia la posizione del carrello, in blu, cresce linearmente allontanandosi dalla sua posizione iniziale, con lo scopo di mantenere la posizione di equilibrio verticale del pendolo. Benché il controllore PID riesca a stabilizzare l'angolo del pendolo, tale progetto non è sufficiente per realizzare un sistema fisico. Ecco perché il carrello deve essere controllato e mantenuto in una posizione nota.

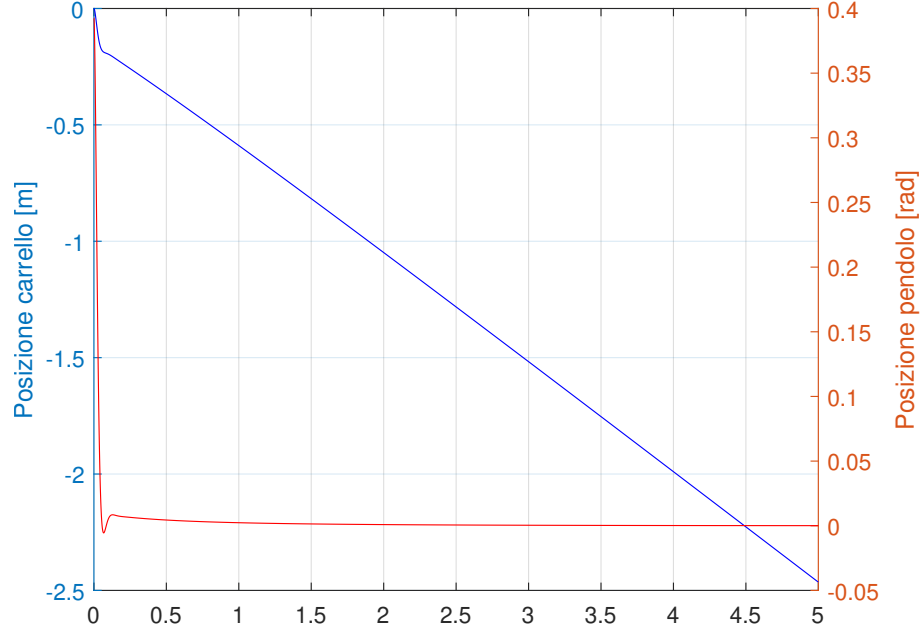


Figura 5.2: Evoluzione di  $x$  e  $\theta$  con stato iniziale  $\mathbf{x}(0) = [0, 0, \frac{\pi}{8}, 0]^T$

## 5.2 Simulazione del controllore di posizione del carrello

In questo paragrafo si è inserito anche il controllore  $C_x$  (4.8) testando il sistema non lineare costruito precedentemente con *Simulink*, figura (5.3), seguendo lo schema in figura (4.13). Si è valutata la risposta del sistema con uno stato iniziale  $\mathbf{x}(0) = [0, 0, \frac{\pi}{8}, 0]^T$ . Il riferimento di  $\theta$  e  $x$  sono entrambi fissati a 0 radianti e metri, rispettivamente.

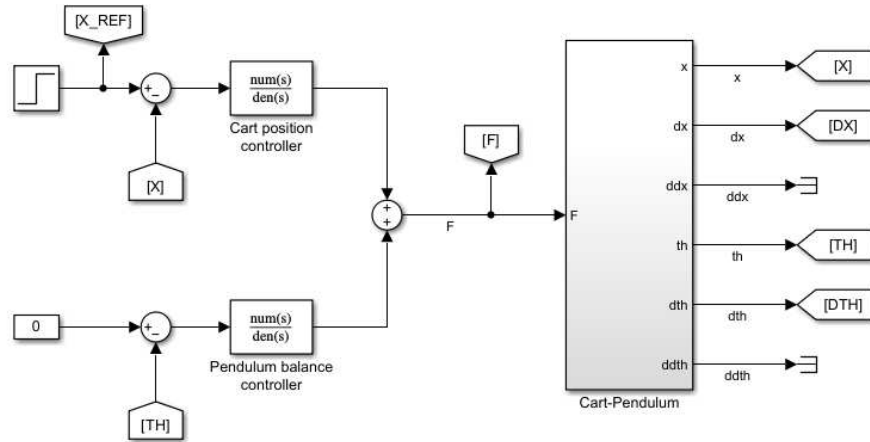


Figura 5.3: Controllo PID ( $C_\theta$  e  $C_x$ ) del sistema non lineare pendolo inverso

Come si può notare in figura (5.4) il pendolo continua ad avere le proprietà precedentemente realizzate, mantenendo la sua posizione di equilibrio instabile. Invece la posizione del carrello ora non è più divergente ma insegue correttamente il riferimento datogli in ingresso.

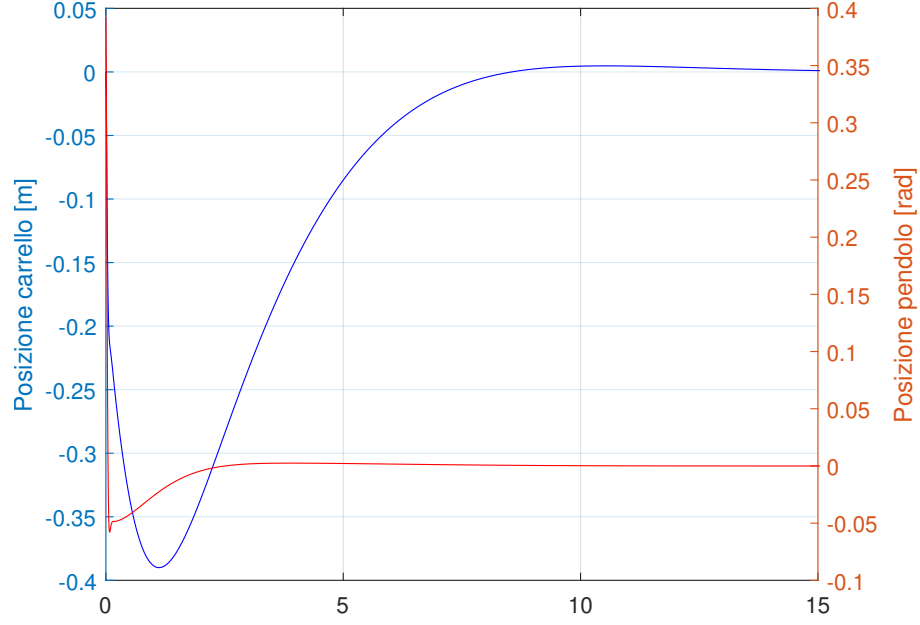


Figura 5.4: Evoluzione di  $x$  e  $\theta$  con stato iniziale  $\mathbf{x}(0) = [0, 0, \frac{\pi}{8}, 0]^T$

Per verificare le specifiche di progetto si è testato lo schema di figura (5.3) con un riferimento nullo per l'angolo  $\theta$  e un riferimento a gradino di 1 metro per la posizione  $x$ .

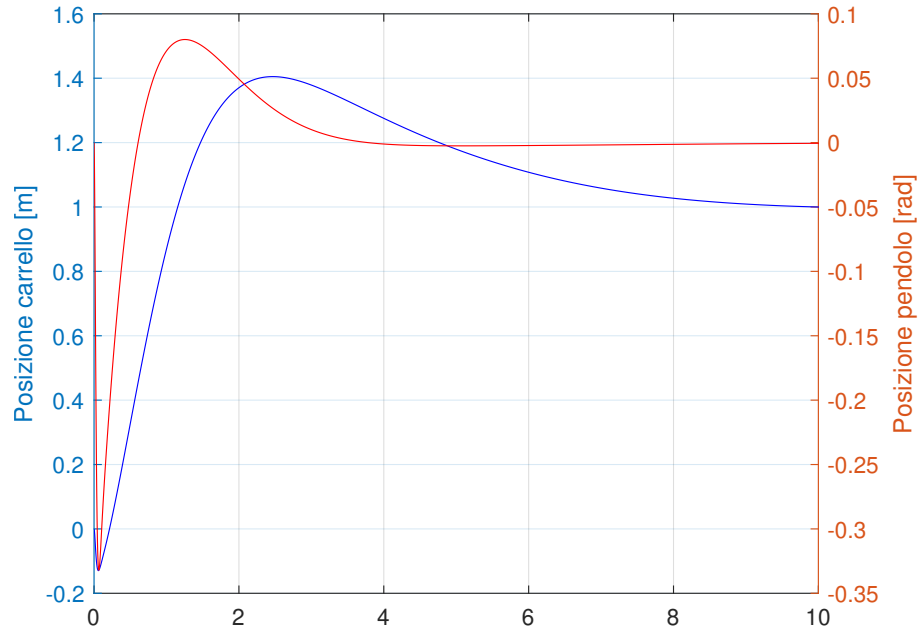


Figura 5.5: Risposta di  $x$  e  $\theta$  alla variazione di posizione del carrello di ampiezza 1 metro

Osservando la risposta del sistema in figura (5.5), in cui viene mostrato in rosso l'evoluzione dell'angolo  $\theta$  e in blu l'andamento del segnale della posizione del carrello  $x$ , la posizione del pendolo viene stabilizzata in tempi brevi,  $t_s = 3$  secondi, discostandosi al più di 0.33 radianti. La posizione del carrello, invece, presenta un tempo di salita  $t_r = 0.91$  secondi e un tempo di assestamento

$t_s = 8.3$  secondi. Ecco che le specifiche sono state raggiunte rispettando tutte le richieste, questo però a sfavore di un overshoot che raggiunge il 40% per  $x$ . È interessante notare che nelle simulazioni del sistema lineare la risposta al gradino del carrello presenta un overshoot del 20%, la metà rispetto al sistema non lineare.

### 5.3 Reiezione dei disturbi

Un ulteriore test da effettuare sui controllori è quello di valutare se siano in grado di compensare la presenza di eventuali disturbi costanti. Grazie all'azione integrale il controllore  $C_x(s)$  è in grado di sopprimere alla presenza di disturbi costanti in ingresso. In figura (5.6) lo schema relativo alla simulazione su *Simulink*.

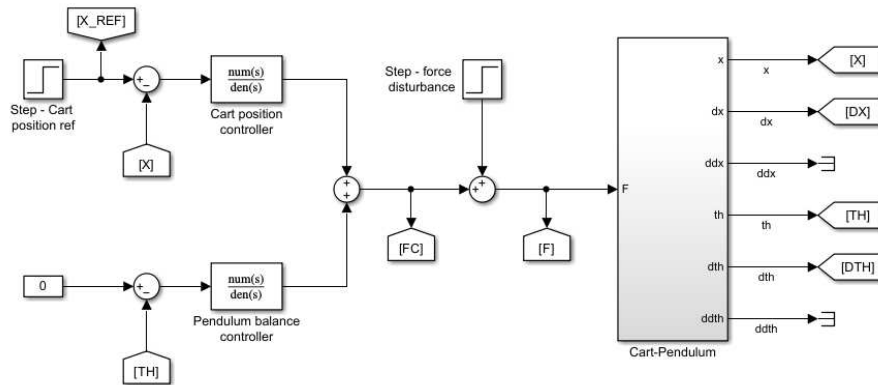


Figura 5.6: Controllo PID ( $C_\theta$  e  $C_x$ ) del sistema non lineare pendolo inverso con un disturbo in ingresso

Si è applicato un disturbo a gradino di ampiezza 1N. Dalla figura (5.7) si può notare che il sistema risponde in modo corretto alla presenza del disturbo, viene stabilizzato in circa 10s e l'angolo  $\theta$  viene mantenuto entro i 0.05 rad.

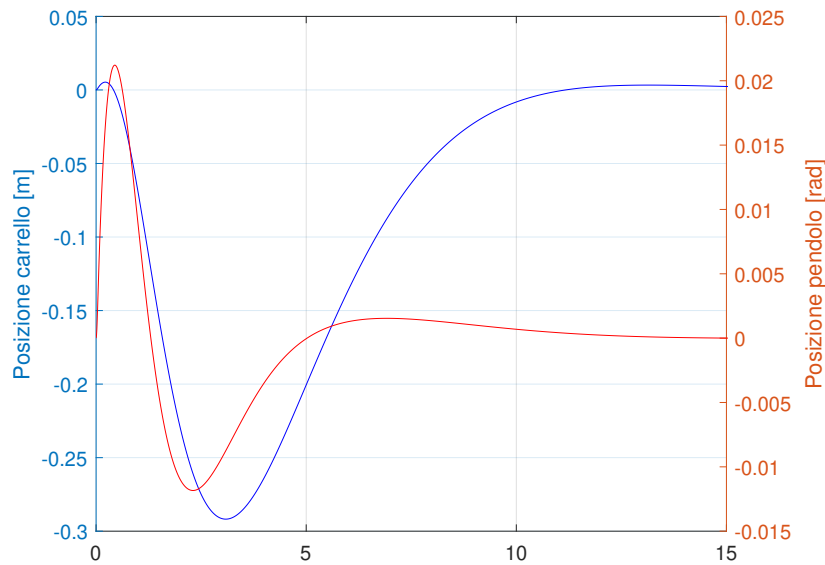


Figura 5.7: Evoluzione di  $x$  e  $\theta$  con un disturbo costante di 1 N

Alla fine l'approccio utilizzato è risultato vincente, ma ci sono delle limitazioni notevoli sullo sviluppo di controllori con questo metodo.

- Il primo controllore influenza la progettazione del secondo: se il primo viene progettato in modo poco accurato c'è la possibilità che il secondo non funzioni a dovere.
- Questo approccio qualitativo, basandosi solo sulla stabilità del sistema retroazionato mediante lo studio del luogo delle radici, porta ad uno sviluppo approssimativo delle capacità di risposta del sistema (tempo di salita, tempo di assestamento, overshoot, ...).

Con lo sviluppo di metodi di progetto più accurati sarà possibile ottenere delle specifiche prestazionali del sistema migliori.

# Appendice A

## Codice MATLAB

### A.1 Controllo del pendolo

```
1 % Cart-pendulum parameters
2 m = 0.21; % pendulum mass [kg]
3 M = 0.455; % cart mass [kg]
4 b = 1.0; % cart viscous friction coeff [N/(m/s)]
5 l = 0.61/2; % pendulum half-length [m]
6 L = 2*l; % pendulum length [m]
7 I = 1/3*m*l^2; % pendulum moment of inertia (wrt CoM) [kg*m
    ^2]
8 g = 9.81; % gravity acc [m/s^2]
9
10 Ie = I + m*l^2; % equivalent inertia at pendulum fulcrum
11 Me = M + m; % total cart+pendulum mass
12
13 gam = Me*Ie - (m*l)^2; % aux constant
14 %%
15 % *MODEL OF THE SYSTEM*
16
17 % state-space model (upward vertical position)
18 % - state = [x, dx, th, dth]^T
19 % - input = F
20 % - output = [x, th]^T
21 Au = [ ...
22     0, 1, 0, 0; ...
23     0, -b*Ie/gam, g*(m*l)^2/gam, 0; ...
24     0, 0, 0, 1; ...
25     0, -b*m*l/gam, m*g*l*Me/gam, 0 ];
26
27 Bu = [ 0; Ie/gam; 0; m*l/gam ];
28
29 Cu = [ 1, 0, 0, 0; ...
30     0, 0, 1, 0 ];
31
32 Du = [ 0; 0 ];
33
```



```

34 sysP = ss(Au, Bu, Cu, Du);
35 %%
36 sysP = tf(sysP);
37 % cart transfer function (in = F, out = x)
38 sysPx = zpk(sysP(1));
39 % pendulum transfer function (in = F, out = th)
40 sysPth = zpk(sysP(2));
41 %%
42 pole(sysPx);
43 pole(sysPth);
44 %%
45 % *PENDULUM POSITION CONTROL*
46
47 rlocus(sysPth)
48 title('Luogo delle radici positivo (Controllo Proporzionale)')
49 rlocus(-sysPth)
50 title('Luogo delle radici negativo (Controllo Proporzionale)')
51 %saveas(gcf, 'rln.pdf')
52 % eliminiamo lo zero nell'origine aggiungendo un integratore
53 sysCth1 = zpk([], 0, 1);
54 % open loop
55 sysLth1 = minreal(sysCth1*sysPth);
56 % root locus
57 rlocus(sysLth1);
58 title('Luogo delle radici con controllo integrale')
59 pole(sysLth1)
60 %%
61 % *PID CONTROL*
62
63 % aggiunta di uno zero in -10 al compensatore
64 sysCth2 = zpk(-10, 0, 1);
65 % open loop
66 sysLth2 = minreal(sysCth2*sysPth);
67 % root locus
68 rlocus(sysLth2);
69 title('Root Locus with PI Controller')
70 % spostiamo lo zero in -1
71 sysCth2 = zpk(1, 0, 1);
72 % open loop
73 sysLth2 = minreal(sysCth2*sysPth);
74 % root locus
75 rlocus(sysLth2);
76 title('Root Locus with PI Controller')
77 %%
78 % with [k, poles] = rlocfind(sysLth2) find the gain value = 20
79 sysCth2 = zpk(-1, 0, 11);
80
81 % open loop
82 sysLth2 = minreal(sysCth2*sysPth);
83
84 % closed-loop tf
85 sysTth1 = feedback(sysLth2, 1);

```

```

86
87 %   closed-loop poles
88 p = pole(sysTth1);
89
90 %   plot poles on root locus
91 hold on;
92 plot(p, 'LineStyle', 'none', 'LineWidth', 2.0, ...
93       'Marker', 'x', 'MarkerSize', 8.0, 'MarkerEdgeColor', 'k');
94
95 %   add s-grid to root locus plot
96 sgrid
97 hold off
98 %   closed-loop tf
99 sysWth1 = feedback(sysPth, sysCth2);
100 step(sysWth1)
101 title('Step Disturbance Response of Pendulum Angle under PI Control');
102 stepinfo(sysWth1)
103 %%
104 % *IMPROVING THE PERFORMANCE – PID*
105
106 %   Aggiungiamo uno zero in  $s = -3$ 
107 sysCth3 = zpk([-1 -3], 0, 1)
108 %   open loop
109 sysLth3 = minreal(sysCth3*sysPth);
110 %   root locus
111 rlocus(sysLth3);
112 title('Luogo delle radici con controllore PID')
113 % gain settings
114 K = 100;
115 sysCth3 = K*sysCth3
116 sysWth = minreal(feedback(sysPth, sysCth3))
117 step(sysWth)
118 title('Step Disturbance Response of Pendulum Angle under PID Control');
119 stepinfo(sysWth)
120 sys = minreal(feedback(sysPth*sysCth3, 1))
121 step(sys)
122 title('Step Response of Pendulum Angle under PID Control');
123 stepinfo(sys)
124 %%
125 %   aggiunta di un polo per rendere proprio il controllore  $s = -100$ 
126 K = 1e03;
127 sysCth4 = zpk([-1 -3], [0 -100], K)
128 %   open loop
129 sysLth3 = minreal(sysCth4*sysPth);
130 %   root locus
131 rlocus(sysLth3);
132 %title('Root Locus with real PID Controller')
133 sysTth2 = feedback(sysLth3, 1);
134
135 %   closed-loop poles
136 p = pole(sysTth2)
137

```

```

138 % plot poles on root locus
139 hold on;
140 plot(p, 'LineStyle', 'none', 'LineWidth', 2.0, ...
141      'Marker', 'x', 'MarkerSize', 8.0, 'MarkerEdgeColor', 'k');
142
143 % add s-grid to root locus plot
144 sgrid
145 hold off
146 %saveas(gcf,'rl12.pdf')
147 %saveas(gcf,'step1.pdf')
148 % impulse response
149 sysWth2 = minreal(feedback(sysPth,sysCth4));
150 step(sysWth2)
151 %title('Impulse Disturbance Response of Pendulum Angle under real PID
152       Control');
153
152 grid on
153 stepinfo(sysWth2)
154 %saveas(gcf,'impulse1.pdf')
155
156 sys = minreal(feedback(sysPth*sysCth4,1))
157 step(sys)
158 title('Step Response of Pendulum Angle under PID Control');
159 stepinfo(sys)
160 %%
161 % *CART POSITION CHECK*
162
163 sysLx = feedback(1,sysPth*sysCth4)*sysPx;
164 step(sysLx)
165 title({'Response of Cart Position to an step Disturbance';'under PID
166       Control'});

```

## A.2 Controllo del carrello

```

1 %%
2 % *Design of a combined balance and position controller for the cart-
3   pendulum
4 % system*
5
6 % balance loop tf
7 sysLth = minreal(sysCth*sysPth);
8
9 % force to cart position tf (with stabilized inverted pendulum)
10 sysGx = minreal(sysPx/(1+sysLth))
11
12 % transfer function poles
13 pole(sysGx)
14 zero(sysGx)
15 %%
16 % *PI CONTROL, in order to cope with constant disturbances entering at
17   the plant
18 % input*

```

```

18 % add an integrator to the controller tf
19 sysCx1 = zpk([], 0, 1);
20 %%
21 % From the root locus, it can be noticed that for any positive
    controller gain,
22 % there is always a closed-loop real pole in the open RHP.
23
24 % loop tf
25 sysLx1 = minreal(sysCx1*sysGx);
26
27 % root locus
28 figure;
29 rlocusplot(sysLx1);
30 %saveas(gcf, 'rl8a.pdf')
31 figure;
32 h = rlocusplot(sysLx1); % Use this command to return plot handle to
    programmatically customize the plot.
33 p2 = getoptions(h);
34 p2.XLim = {[−10, 10]};
35 p2.YLim = {[−21.3003, 24.0248]};
36 setoptions(h,p2);
37 %saveas(gcf, 'rl8b.pdf')
38 %%
39 % *NEGATIVE ROOT LOCUS*
40
41 % change controller sign
42 sysCx1 = zpk([], 0, −1);
43
44 % loop tf
45 sysLx1 = minreal(sysCx1*sysGx);
46
47 % root locus
48 h = rlocusplot(sysLx1); % Use this command to return plot handle to
    programmatically customize the plot.
49 p2 = getoptions(h);
50 p2.XLim = {[−110, 20]};
51 p2.YLim = {[−200, 200]};
52 setoptions(h,p2);
53 %saveas(gcf, 'rl9a.pdf')
54 figure;
55 h = rlocusplot(sysLx1); % Use this command to return plot handle to
    programmatically customize the plot.
56 p2 = getoptions(h);
57 p2.XLim = {[−10, 10]};
58 p2.YLim = {[−4, 4]};
59 setoptions(h,p2);
60 %saveas(gcf, 'rl9b.pdf')
61 %%
62 % add a zero at s=−0.5 to the controller
63 sysCx2 = zpk(−0.5, 0, −1);
64 % loop tf
65 sysLx2 = minreal(sysCx2*sysGx);

```

```

66 rlocusplot(sysLx2)
67 %saveas(gcf,'rl10a.pdf')
68 figure;
69 h = rlocusplot(sysLx2); % Use this command to return plot handle to
    programmatically customize the plot.
70 p2 = getoptions(h);
71 p2.XLim = {[−10, 10]};
72 p2.YLim = {[−6, 6]};
73 setoptions(h,p2);
74 %saveas(gcf,'rl10b.pdf')
75 % add an extra zero at s=−0.5 and a pole at $s=−100$ to the
    controller
76 sysCx3 = zpk([−0.1, −0.1], [0, −100], −1);
77 % loop tf
78 sysLx3 = minreal(sysCx3*sysGx);
79 % root locus
80 rlocusplot(sysLx3);
81 %saveas(gcf,'rl11a.pdf')
82 figure;
83 h = rlocusplot(sysLx3); % Use this command to return plot handle to
    programmatically customize the plot.
84 p2 = getoptions(h);
85 p2.XLim = {[−6, 6]};
86 p2.YLim = {[−4, 4]};
87 setoptions(h,p2);
88 %saveas(gcf,'rl11b.pdf')
89 %%
90 % adjust controller gain
91 sysCx3 = zpk([−0.5, −0.5], [0, −100], −300);
92 % loop tf
93 sysLx4 = minreal(sysCx3*sysGx);
94 % closed-loop tf
95 sysTx = feedback(sysLx4, 1);
96 % closed-loop poles
97 p = pole(sysTx);
98 % plot poles on root locus
99 hold on;
100 plot(p, 'LineStyle', 'none', 'LineWidth', 2.0, ...
    'Marker', 'x', 'MarkerSize', 8.0, 'MarkerEdgeColor', 'k');
101 % add s-grid to root locus plot
102 sgrid
103 hold off
104 %saveas(gcf,'rl12b.pdf')
105 %%
106 rlocusplot(sysLx3);
107 hold on;
108 plot(p, 'LineStyle', 'none', 'LineWidth', 2.0, ...
    'Marker', 'x', 'MarkerSize', 8.0, 'MarkerEdgeColor', 'k');
109 hold off;
110 %saveas(gcf,'rl12a.pdf')
111 sysCx = sysCx3
112 %%

```

```

115 % *CART POSITION CHECK*
116
117 %   open loop
118 sysLx = minreal(sysCx*sysGx);
119 %   closed-loop tf
120 sysTx = feedback(sysLx, 1)
121 step(sysTx);
122 title({'Response of Cart Position to an Step Input'; 'under PID Control'
        });
123 stepinfo(sysTx)
124 %saveas(gcf, 'step2.pdf')
125 %%
126 % rivedere
127 sysLx = minreal(feedback(sysGx, sysCx));
128 step(sysLx)
129 title({'Response of Cart Position to an Impulse Disturbance'; 'under PID
        Control'});
130 stepinfo(sysLx)
131 %saveas(gcf, 'impulse2.pdf')

```

### A.3 Simulazioni

```

1 %%
2 % *POSITION SIMULATION*
3
4 %   open Simulink model
5 open_system('sim1.slx');
6 %%
7 % Evaluate the natural response of balance control system designed
8 %   above for
9 % an initial state  $\mathbf{x}(0) = [0, 0, \pi/6, 0]^T$ .
10
11 %   controller tf num/den
12 [numCth, denCth] = tfdata(sysCth, 'v');
13
14 %   initial state  $\mathbf{x}(0) = [x0, dx0, th0, dth0]^T$ 
15 x0 = 0;           %   init cart position [m]
16 dx0 = 0;          %   init cart velocity [m/s]
17 th0 = pi/8;        %   init pendulum position [rad]
18 dth0 = 0;          %   init penulum velocity [rad/s]
19
20 %   run simulation
21 sim('sim1.slx');
22 %%
23 % Plot the simulation results.
24
25 %   extract simulation results
26 t = cart_state.time;
27 x = cart_state.signals(1).values;
28 dx = cart_state.signals(2).values;
29
30 th = pend_state.signals(1).values;

```

```

30 dth = pend_state.signals(2).values;
31
32 F = force.signals.values;
33 %%
34 % plot simulation result
35 figure
36 plot(t, th, 'b');
37 ylabel('Posizione pendolo [rad]');
38 xlim([0 1]);
39 grid on;
40 %saveas(gcf,'sim1a.pdf')
41 figure
42 plot(t, x, 'b');
43 ylabel('Posizione carrello [m]');
44 grid on;
45 %saveas(gcf,'sim1b.pdf')
46 %%
47 % *BASIC CONTROL*
48
49 % open Simulink model
50 open_system('sim2.slx');
51 %%
52 % controller tf num/den
53 [numCx, denCx] = tfdata(sysCx, 'v');
54
55 % initial state  $x(0) = [x0, dx0, th0, dth0]^T$ 
56 x0 = 0; % init cart position [m]
57 dx0 = 0; % init cart velocity [m/s]
58 th0 = pi/8; % init pendulum position [rad]
59 dth0 = 0; % init penulum velocity [rad/s]
60
61 % cart step position ref
62 As = 0; % amplitude [m]
63 ts = 0; % time [s]
64
65 % run simulation
66 sim('sim2.slx');
67 %%
68 % extract simulation results
69 t = cart_state.time;
70 x = cart_state.signals(1).values(:,1);
71 x_ref = cart_state.signals(1).values(:,2);
72 dx = cart_state.signals(2).values;
73
74 th = pend_state.signals(1).values;
75 dth = pend_state.signals(2).values;
76
77 F = force.signals.values;
78 %%
79 % plot simulation result
80 figure
81 plot(t, th, 'b');

```

```

82 ylabel('Posizione pendolo [rad]');
83 xlim([0 3]);
84 grid on;
85 %saveas(gcf,'sim2a.pdf')
86 figure
87 plot(t, x_ref, 'r');
88 hold on
89 plot(t, x, 'b');
90 ylabel('Posizione carrello [m]');
91 xlim([0 20]);
92 grid on;
93 %saveas(gcf,'sim2b.pdf')
94 %%
95 % *CHANGE OF STEP POSITION REFERENCE*
96
97 % open Simulink model
98 open_system('sim2.slx');
99 %%
100 % initial state x(0) = [x0, dx0, th0, dth0]^T
101 x0 = 0; % init cart position [m]
102 dx0 = 0; % init cart velocity [m/s]
103 th0 = pi/8; % init pendulum position [rad]
104 dth0 = 0; % init penulum velocity [rad/s]
105
106 % cart step position ref
107 As = 1; % amplitude [m]
108 ts = 5; % time [s]
109
110 % run simulation
111 sim('sim2.slx');
112 %%
113 % extract simulation results
114 t = cart_state.time;
115 x = cart_state.signals(1).values(:,1);
116 x_ref = cart_state.signals(1).values(:,2);
117 dx = cart_state.signals(2).values;
118
119 th = pend_state.signals(1).values;
120 dth = pend_state.signals(2).values;
121
122 F = force.signals.values;
123 %%
124 % plot simulation result
125 figure
126 plot(t, th, 'b');
127 ylabel('Posizione pendolo [rad]');
128 xlim([0 10]);
129 grid on;
130 %saveas(gcf,'sim4.pdf')
131 figure
132 plot(t, x_ref, 'r');
133 hold on

```



```

134 plot(t, x, 'b');
135 ylabel('Posizione carrello [m]');
136 xlim([0 20]);
137 grid on;
138 %saveas(gcf,'sim3.pdf')
139 %%
140 % *STEP DISTURBANCE*
141
142 % open Simulink model
143 open_system('sim3.slx');
144 %%
145 % cart step force disturbance
146 Ad = 5; % amplitude [m]
147 td = 15; % time [s]
148 % run simulation
149 sim('sim3.slx');
150 %%
151 % extract simulation results
152 t = cart_state.time;
153 x = cart_state.signals(1).values(:,1);
154 x_ref = cart_state.signals(1).values(:,2);
155 dx = cart_state.signals(2).values;
156
157 th = pend_state.signals(1).values;
158 dth = pend_state.signals(2).values;
159
160 F = force.signals.values(:,1);
161 Fc = force.signals.values(:,2);
162 %%
163 % plot simulation result
164 figure
165 plot(t, th, 'b');
166 ylabel('Posizione pendolo [rad]');
167 xlim([0 30]);
168 grid on;
169 %saveas(gcf,'sim6.pdf')
170 figure
171 plot(t, x_ref, 'r');
172 hold on
173 plot(t, x, 'b');
174 ylabel('Posizione carrello [m]');
175 xlim([0 35])
176 grid on;
177 %saveas(gcf,'sim5.pdf')
178 %%
179 % initial state  $x(0) = [x0, dx0, th0, dth0]^T$ 
180 x0 = 0; % init cart position [m]
181 dx0 = 0; % init cart velocity [m/s]
182 th0 = 0; % init pendulum position [rad]
183 dth0 = 0; % init penulum velocity [rad/s]
184
185 % cart step position ref

```

```

186 As = 0;           % amplitude [m]
187 ts = 0;           % time [s]
188
189 % cart step force disturbance
190 Ad = 1;           % amplitude [m]
191 td = 0;           % time [s]
192
193 %simulation
194 open_system('sim3.slx');
195 % run simulation
196 sim('sim3.slx');
197
198 % extract simulation results
199 t = cart_state.time;
200 x = cart_state.signals(1).values(:,1);
201 x_ref = cart_state.signals(1).values(:,2);
202 dx = cart_state.signals(2).values;
203
204 th = pend_state.signals(1).values;
205 dth = pend_state.signals(2).values;
206
207 F = force.signals.values(:,1);
208 Fc = force.signals.values(:,2);
209
210 % plot simulation result
211 figure
212 yyaxis left
213 plot(t, x, 'b');
214 ylabel('Posizione carrello [m]');
215 grid on;
216 %saveas(gcf,'sim6.pdf')
217 yyaxis right
218 plot(t, th, 'r');
219 ylabel('Posizione pendolo [rad]');
220 xlim([0 15])
221 grid on;
222 %%
223 % show cart-pendulum animation
224 show_cartpend_anim(x(1:50:end), th(1:50:end), L, ...
225     -2*L, 2*L, -2*L, 2*L);

```

# Bibliografia

- [1] M. Bisiacco and M. E. Valcher, Controlli automatici:... tutto quello che avreste voluto sapere a riguardo ma non avete mai osato chiedere. Ed. Libreria Progetto, 2015.
- [2] M. Bisiacco and G. Pillonetto, Sistemi e modelli. Società Editrice Esculapio, 2020.
- [3] L. B. Prasad, B. Tyagi, and H. O. Gupta, “Modelling and simulation for optimal control of nonlinear inverted pendulum dynamical system using pid controller and lqr,” in Proceedings of the 2012 Sixth Asia Modelling Symposium. IEEE, 2012, pp. 138–143.
- [4] —, “Optimal control of nonlinear inverted pendulum system using pid controller and lqr: performance analysis without and with disturbance input,” International Journal of Automation and Computing, vol. 11, no. 6, pp. 661–670, 2014.
- [5] M. E. Valcher, “Modellistica e controllo pid di un pendolo inverso,” 2009. [Online]. Available: <http://www.dei.unipd.it/~meme/AppuntiPendoloInv.pdf>
- [6] S. Luca and A. Riccardo, “Appunti del corso di laboratorio di automatica,” 2021. [Online]. Available: <http://control.dei.unipd.it/people/schenato/teaching/laboratorio-di-automatica.html>
- [7] Control tutorials for matlab & simulink. [Online]. Available: <https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum&section=SystemModeling>