Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Corso di Laurea Triennale in Matematica

MISURE DI HAUSDORFF: FORMULA DELL'AREA E FORMULA DI COAREA

Relatore:
Prof. Andrea Marson

Laureando:
Gabriele Favaro
Matricola: 1201406

Anno Accademico 2021-2022
21 Luglio 2022

Indice

Introduzione

Dal noto teorema di cambio di variabili sappiamo che dato $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo di classe C^1, se $E \subset \Omega$ è Lebesgue-misurabile, anche $f(E)$ è misurabile e vale la seguente formula

$$\mathscr{L}^n(f(E)) = \int_E |det(Df(x))|\, dx$$

ove si è indicata con $\mathscr{L}^n$ la misura di Lebesgue n-dimensionale.

Dal teorema di Fubini (teorema 1.5.1) sappiamo che dato $E \subset \mathbb{R}^n$, un insieme di Borel, vale la seguente formula

$$\mathscr{L}^n(E) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{L}^{n-m}(\{y\, :\, (x,y) \in E\})\, d\mathscr{L}^m(y) \quad con\ n \geq m$$

All'interno di questa tesi cercheremo di generalizzare tali formule ottenendo la *formula dell'area* che tratta il caso di funzioni lipschtziane tra spazi di dimensione diversa garantendo così dei risultati di linearizzazione (lemma 3.3.3) non immediati assumendo la sola regolarità C^1 e cercheremo di ottenere una formulazione "curvilinea" del teorema di Fubini, ovvero la *formula di coarea.*

Nel primo capitolo vengono richiamate alcune nozioni basilari di teoria della misura, tra cui la definizione della misura di Lebesgue e alcune sue proprietà. Particolare attenzione sarà data ai risultati di Caratheodory in merito alle misure esterne metriche.

Nel secondo capitolo vengono analizzate le misure introdotte nel 1918 da F. Hausdorff che sono una generalizzazione della misura di Lebesgue. Esse consentono di misurare anche gli insiemi di dimensione più piccola dello spazio in cui sono immersi, sfruttando la nozione di δ-ricoprimento, permettendo di associare ad ogni insieme un numero (non necessariamente intero), detto dimensione di Hausdorff. In questo capitolo viene inoltre presentata l'equivalenza tra la misura di Hausdorff $\mathscr{H}_n$, n-dimensionale e la misura di Lebesgue $\mathscr{L}^n$, n-dimensionale.

Il terzo è il capitolo centrale, dove vengono presentate e dimostrare le formula di area e coarea. La prima consente di uguagliare l'integrale della funzione molteplicità con l'integrale dello jacobiano n-dimensionale. La seconda formula, invece, uguaglia l'integrale della misura $n - m$-dimensionale di Hausdroff di un insieme di livello con l'integrale dello jacobiano m-dimensionale.
Inoltre, verrà presentata la formula di cambio di variabili sfruttando l'approssimazione di funzioni misurabili con successioni di funzioni caratteristiche.

Infine, nell'ultimo capitolo vengono presentati alcuni esempi di applicazioni delle formule sopra citate, tra cui il calcolo della superficie di una varietà k-dimensionale e la formula di integrazione per insiemi di livello.

Capitolo 1

Richiami di teoria della misura

In questo capitolo inseriamo alcune nozioni di teoria della misura preliminari per la teoria che verrà svolta in seguito. Alcuni risultati non saranno dimostrati.

1.1 Misura su un insieme

Definizione 1.1.1. Sia X un insieme non vuoto, $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ si dice *algebra* se è chiusa per complementazione e unioni finite, ovvero se $E \in \mathscr{A}$, allora $E^c \in \mathscr{A}$ e se $E_1, \ldots, E_n \in \mathscr{A}$, allora $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i \in \mathscr{A}$.
$\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ si dice σ*-algebra* se è chiusa per complementazione e unioni numerabili, ovvero se $E \in \mathscr{A}$, allora $E^c \in \mathscr{A}$ e se $\{E_k\}_{k\geq 1} \subset \mathscr{A}$, allora $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathscr{A}$

Definizione 1.1.2. Sia $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$, si indica con $M(\mathscr{E})$ la σ-algebra generata da $\mathscr{E}$, ovvero la più piccola σ-algebra contenente $\mathscr{E}$.

Definizione 1.1.3. Sia X uno spazio topologico, si dice σ-algebra dei boreliani e si indica con $\mathscr{B}_X$, la σ-algebra generata dagli aperti (o, equivalentemente, dai chiusi) di X.

Definizione 1.1.4. Sia X un insieme non vuoto, M una σ-algebra di X, si dice *misura* una funzione $\mu : M \mapsto [0, \infty]$ tale che:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\{E_k\}_{k\geq 1} \subset M \quad E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j, \quad \mu\left(\bigcup\limits_{k\geq 1} E_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$

(X, M) si dice quindi *spazio misurabile* e (X, M, μ) si dice spazio con misura.

Teorema 1.1.1. *Sia (X, M, μ) uno spazio con misura, allora:*

1. *Se $E, F \in M$ con $E \subset F$, allora $\mu(E) \leq \mu(F)$ (proprietà di monotonia)*
2. *Se $\{E_k\}_{k\geq 1} \in M$ allora $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$ (subadditività)*
3. *Se $\{E_k\}_{k\geq 1} \in M$ t.c. $E_k \subset E_{k+1}\ \forall\, k \geq 1$ allora $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(E_k)$ (continuità dal basso)*

4. *Se* $\{E_k\}_{k\geq 1} \in M$ *t.c.* $E_k \supset E_{k+1}\ \forall\, k \geq 1$ *e* $\mu(E_1) < \infty$ *allora* $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k)$ *(continuità dall'alto)*

1.2 Misure esterne

Definizione 1.2.1. Sia X un insieme non vuoto, si dice *misura esterna* una funzione $\mu^* : \mathscr{P}(X) \mapsto [0,\infty]$ tale che:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- Se $A \subset B$ allora $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- $\{E_k\}_{k\geq 1} \subset M \quad \mu^*\left(\bigcup_{k\geq 1} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$

Definizione 1.2.2. Sia μ^* misura esterna su X, $A \subset X$ si dice μ^*-misurabile se

$$\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \quad \forall\, E \subset X$$

Definizione 1.2.3. Sia $X \neq \emptyset$ uno spazio topologico e μ^* una misura esterna, si dice:

- *di Borel* se i boreliani sono μ^*-misurabili
- *regolare* se $\forall\, A \subset X$ esiste B un boreliano $A \subset B$ t.c. $\mu^*(A) = \mu^*(B)$

Teorema 1.2.1 (di Caratheodory)**.** *Sia X insieme non vuoto e μ^* una misura esterna su X, detto M il sottinsieme di $\mathscr{P}(X)$ contenente tutti e soli gli insiemi μ^*-misurabili, allora M è una σ-algebra e $\mu^*|_M$ è una misura completa (ovvero è una misura e i sottinsiemi di insiemi di misura nulla sono misurabili)*

1.2.1 Misure esterne metriche

Definizione 1.2.4. Sia (X,d) uno spazio metrico, una misura esterna μ^* su X, si dice *misura esterna metrica* se:

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) \quad \forall\, A\,,\, B \text{ t.c. } dist(A,B) > 0$$

Teorema 1.2.2 (criterio di Caratheodory)**.** *Siano (X,d) uno spazio metrico e μ^* una misura esterna metrica su X, allora μ^* è di Borel.*

Dimostrazione. E' sufficiente dimostrare che ogni insieme chiuso $C \subset X$ è μ^*-misurabile, poichè la σ-algebra dei boreliani è generata dagli insiemi chiusi. Si deve dunque mostrare che $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \cap C^c)\ \forall\ E\ \subset X$. Sfruttando la subadditività della misura esterna, sarà suffciente dimostrare

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \cap C^c)\ \forall\ E\ \subset X \tag{1.1}$$

Se $\mu^*(E) = \infty$ non c'è niente da dimostrare. Supponiamo allora che $\mu^*(E) < +\infty$. Definiamo

$$E_n = \left\{x \in E \cap C^c : dist(x,C) \geq \frac{1}{n}\right\} \tag{1.2}$$

è una famiglia crescente di insiemi, la cui unione è $E \cap C^c$, poichè C è chiuso. Si osserva inoltre che, per definizione di E_n, $dist(E_n, C) \geq \frac{1}{n}$. Dunque, $dist(E_n, E \cap C) \geq \frac{1}{n}(> 0)$ ed essendo μ^* una misura esterna metrica

$$\mu^*(E_n) + \mu^*(E \cap C) = \mu^*(E_n \cup (E \cap C)) \leq \mu^*(E)$$

Se $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^*(E_n) = \mu^*(E \cap C^c)$ avremmo concluso perchè, passando a limite per $n \to \infty$ otteniamo (1.1). Resta quindi da dimostrare che $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^*(E_n) = \mu^*(E \cap C^c)$. Sia

$$B_n = E_{n+1} \setminus E_n$$

allora $dist(B_{n+1}, E_n) \geq \frac{1}{n(n+1)}$. Infatti se $x \in B_{n+1}$ e $d(x, y) < \frac{1}{n(n+1)}$ allora

$$dist(y, C) \leq d(x, y) + dist(x, C) < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \Rightarrow y \in E_n^c$$

Segue che $\mu^*(B_{n+1} \cup E_n) = \mu^*(B_{n+1}) + \mu^*(E_n)$, essendo $dist(Bn + 1, E_n) > 0$. Per induzione si ottiene

$$\mu^*(E_{2k+1}) \geq \mu^*(B_{2k} \cup E_{2k-1}) = \mu^*(B_{2k}) + \mu^*(E_{2k-1}) \geq \mu^*(B_{2k}) + \mu^*(B_{2k-2} \cup E_{2k-3})$$

$$\geq \ \dots \ \geq \sum_{j=1}^{k} \mu^*(B_{2j})$$

Allora, essendo $\mu^*(E_n) \leq \mu^*(E) < \infty$, la serie $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_{2j})$ converge e, analogamente, converge anche la serie con gli indici dispari. Sfruttando la crescenza di E_n,

$$E \cap C^c = \bigcup E_n = E_n \cup \left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} B_j \right) \Rightarrow \mu^*(E \cap C^c) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu^*(E_n) + \lim_{n\to\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu^*(B_j)$$

$$\leq \mu^*(E \cap C^c) \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} \mu^*(E_n) = \mu^*(E \cap C^c)$$

□

1.3 Misura di Lebesgue

Definizione 1.3.1. Sia $E \subset \mathbb{R}$, definiamo

$$\mathscr{L}^{n*}(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} m(R_k) \ : \ R_k = \prod_{i=1}^{n} (a_{i,k}, b_{i,k}] \, t.c. \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \supset E \right\}$$

ove $m\left(\prod\limits_{i=1}^{n} (a_{i,k}, b_{i,k}] \right) = \prod\limits_{i=1}^{n} (b_{i,k} - a_{i,k}) \ \forall \, (a_{i,k}, b_{i,k}] \cap (a_{j,k}, b_{j,k}] = \emptyset \ \forall \, i \neq j$

Osservazione 1.3.1. *La funzione $\mathscr{L}^{n*}$ è una misura esterna e, per il teorema di Caratheodory, la restrizione di tale misura agli insiemi $\mathscr{L}^{n*}$-misurabili, tra cui vi sono i boreliani, è una misura che è detta misura di Lebesgue.*
Tale misura sarà indica in seguito con $\mathscr{L}^n$

1.3.1 Regolarità dall'interno e dall'esterno della misura di Lebesgue

Teorema 1.3.1. *Sia E un insieme $\mathscr{L}^n$-misurabile, allora valgono le seguenti proprietà:*

- *regolarità dall'esterno, ovvero*

$$\mathscr{L}^n(E) = \inf\{\mathscr{L}^n(U) \,:\, U\, aperto\, U \supset E\}$$

- *regolarità dall'interno, ovvero*

$$\mathscr{L}^n(E) = \sup\{\mathscr{L}^n(K) \,:\, K\, compatto\, K \subset E\}$$

1.4 Funzioni misurabili

Definizione 1.4.1. Siano (X, M) e (Y, N) due spazi misurabili, $f : X \mapsto Y$ una funzione, si dice (M, N) misurabile se

$$f^{-1}(E) \in M \quad \forall\, E \in N$$

Osservazione 1.4.1. *Sia $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ una funzione, si dice Borel-misurabile se è $(B_{\mathbb{R}^n}, B_{\mathbb{R}^m})$-misurabile.*
In generale, si può utilizzare il termine "misurabile" per una funzione, senza ulteriori specifiche, qualora la σ-algebra si possa sottintendere.

Proposizione 1.4.1. *Sia (X, M) spazio misurabile, $f : X \mapsto \mathbb{R}$ misurabile, allora*

$$f^+ = \max\{f, 0\} \quad f^- = \max\{-f, 0\} \quad |f|$$

sono misurabili

Definizione 1.4.2. Sia (X, M) spazio misurabile, $f : X \mapsto \mathbb{R}$ si dice semplice se è combinazione lineare di funzioni caratteristiche, ovvero se esistono $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ e $E_1, \ldots, E_n \in M$ t.c.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) \quad x \in X$$

Teorema 1.4.1. *Sia (X, M) spazio misurabile, $f : X \mapsto [0, +\infty]$ misurabile allora esiste $\{\phi_j\}_{j \geq 1}$ una successione crescente di funzioni semplici t.c.*

$$\phi_j \uparrow f$$

1.4.1 Teorema di Beppo-Levi e lemma di Fatou

Teorema 1.4.2 (Convergenza monotona o di Beppo-Levi)**.** *Sia (X, M, μ) spazio con misura e sia $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una successione crescente di funzioni misurabili a valori non negativi t.c.*

$$f_n(x) \mapsto f(x)\ \forall x \in X$$

allora

$$\int_X f(x)\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x)\, d\mu$$

Corollario 1.4.1 (Integrazione per serie)**.** *Sia (X, M, μ) spazio con misura e sia $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una successione di funzioni misurabili a valori non negativi, sia $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, allora*

$$\int_X f(x)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu$$

Lemma 1.4.1 (lemma di Fatou)**.** *Sia (X, M, μ) spazio con misura e sia $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una successione di funzioni misurabili a valori non negativi, allora*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu$$

1.5 Teorema di Fubini

Definizione 1.5.1. Siano X, Y due insiemi non vuoti, $E \subset X \times Y$ definiamo

- x-sezione di E l'insieme $E_x = \{y \in Y\,:\,(x, y) \in E\}$
- y-sezione di E l'insieme $E_y = \{x \in X\,:\,(x, y) \in E\}$

Sia $f\,:\,X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ una funzione, definiamo

- x-sezione di f la funzione $f_x\,:\,y \mapsto f(x, y)$
- y-sezione di f la funzione $f_y\,:\,x \mapsto f(x, y)$

Notazione: Date due σ-algebre, indichiamo con $M \bigotimes N$ la σ-algebra prodotto, ovvero la σ-algebra generata da insiemi del tipo $A \times B$ con $A \in M$ e $B \in N$.

Teorema 1.5.1. *Siano (X, M, μ) e (Y, N, ν) due spazi con misura σ-finiti, allora:*

- *Se $A \in M$ e $B \in N$ allora $A \times B$ è $\mu \times \nu$ misurabile e $\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$*
- *Se $E \in M \bigotimes N$ allora $E_y \in M$ per ogni $y \in Y$ e $E_x \in N$ per ogni $x \in X$. Inoltre le funzioni*
$$x \mapsto \nu(E_x) \quad e \quad y \mapsto \mu(E_y)$$
sono, rispettivamente, M e N misurabili e si ha
$$\mu \times \nu(E) = \int_Y \mu(E_y)\, d\nu(y) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x)$$
- *Se $f \in L^1(\mu \times \nu)$ allora*
$$y \mapsto f_x(y) \in L^1(\nu) \text{ per q.o. } x$$
$$x \mapsto f_y(x) \in L^1(\mu) \text{ per q.o. } y$$
e inoltre
$$y \mapsto \int_X f(x, y)\, d\mu(x) = \int_X f_y(x)\, d\mu(x) \quad \in L^1(\nu)$$
e
$$x \mapsto \int_Y f(x, y)\, d\nu(y) = \int_y f_x(y)\, d\nu(y) \quad \in L^1(\mu)$$
e vale che
$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_Y \int_X f(x, y)\, d\mu(x)\, \nu(y) = \int_X \int_Y f(x, y)\, d\nu(y)\, d\mu(x)$$

1.6 Teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym

Definizione 1.6.1. Sia (X, M) spazio misurabile, ν una misura con segno e μ una misura positiva X, diciamo che è *assolutamente continua* rispetto a μ e si scrive $\nu << \mu$ se

$$\forall\ E \in M\ t.c.\ \mu(E) = 0\ \Rightarrow\ \nu(E) = 0$$

Definizione 1.6.2. Sia (X, M) spazio misurabile, ν *e* μ due misure con segno su X, diciamo che sono *mutuamente singolari* e si scrive $\nu \perp \mu$ se esistono due insiemi $E, F \in M$ t.c. $E \cup F = X$, $E \cap F = \emptyset$ con E nullo per ν e F nullo per μ.

Teorema 1.6.1. *Sia (X, M) spazio misurabile e siano ν una misura con segno, σ-finita e μ una misura positiva σ-finita allora esistono due uniche misure λ e ρ t.c.*

$$\lambda \perp \mu, \quad \rho << \mu \quad e \quad \nu = \lambda + \rho$$

Inoltre esiste una funzione f, M-misurabile, unica a meno di insiemi di μ-misura nulla t.c. $d\rho = f d\mu$.

Useremo nel seguito il seguente corollario del teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym.

Corollario 1.6.1. *Sia (X, M) spazio misurabile e siano ν una misura con segno, σ-finita e μ una misura positiva σ-finita, se $\nu << \mu$ allora esiste una funzione f, misurabile, unica a meno di insiemi di μ-misura nulla t.c. $d\nu = f d\mu$, ovvero*

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu \quad \forall\ E \in M$$

Dimostrazione. Dal Teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym, esistono due uniche misure λ e ρ t.c. $\lambda \perp \mu, \quad \rho << \mu \quad e \quad \nu = \lambda + \rho$. Inoltre esiste una funzione f, misurabile, unica a meno di insiemi di μ-misura nulla t.c. $d\rho = f d\mu$. Da ciò $\nu = \lambda + f d\mu$. Essendo $\nu << \mu$ allora anche $\lambda << \mu$ ma allora $\lambda = 0$ e cioè $d\nu = f d\mu$. $\square$

Capitolo 2

Misure di Hausdorff

2.1 Costruzione delle misure di Hausdorff

Definizione 2.1.1. Sia (X, d) uno spazio metrico, $E \subset X$, $\delta > 0$, diciamo che $\{E_j\}_{j\geq 1} \subset X$ è un δ ricoprimento di E se

$$E \subset \bigcup_{j\geq 1} E_j \quad con \quad diam(E_j) < \delta$$

ove $diam(E_j) = sup\,\{d(x,y) \,:\, x, y \in E_j\}$ indica il diametro di E_j.

Definizione 2.1.2. Siano (X, d) uno spazio metrico, $p \geq 0$ e $\delta > 0$, $E \subset X$, definiamo la *pre-misura di Hausdorff*

$$\mathscr{H}_{p,\delta}(E) \;=\; \frac{\omega_p}{2^p} \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} diam(E_j)^p \;:\; E \subset \bigcup_{j\geq 1} E_j\,,\, diam(E_j) < \delta \right\}$$

con la convenzione che $diam(\emptyset) = 0$ e $\omega_p = \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2}+1)}$, con $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} s^{1-t} e^{-s}\, ds$, la funzione di Eulero.

Osservazione 2.1.1. *Gli insiemi $\{E_j\}$ che costituiscono un δ-ricoprimento possono essere equivalentemente aperti, convessi oppure chiusi in quanto i diametri non variano in tali casi. Inoltre è possibile che tali insiemi siano palle chiuse o aperte, in tal caso la premisura ottenuta dà origine alla misura di Hausdorff sferica che si può dimostrare essere equivalente alla misura di Hausdorff che si ottiene a partire dalla definizione precedente.*

Proposizione 2.1.1. *Siano $p \geq 0$ e $\delta > 0$, allora $\mathscr{H}_{p,\delta}$ è una misura esterna.*

Dimostrazione. i) $\mathscr{H}_{p,\delta}(\emptyset) = 0$ scegliendo $E_j = \emptyset$, $diam(\emptyset) = 0$.

ii) Siano ora, $A \subset B$, se $\{E_j\}_{j\geq 1}$ sono un δ-ricoprimento per B, allora sono un δ-ricoprimento per B. Dunque

$$\frac{\omega_p}{2^p} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} diam(E_j)^p \;:\; A \subset \bigcup E_j\,,\, diam(E_j) < \delta \right\} \supset$$

$$\frac{\omega_p}{2^p} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} diam(E_j)^p \;:\; B \subset \bigcup E_j\,,\, diam(E_j) < \delta \right\}$$

considerando l'estremo inferiore in entrambi, si ottiene la subadittività di $\mathscr{H}_{p,\delta}$.

iii) Siano, infine, $\{A_k\}_{k\geq 1}$, $\mathscr{H}_{p,\delta}(A_k) < \infty$ e $\epsilon > 0$ fissato t.c. $\forall\ k \geq 1\ \exists\ \{E_{j,k}\}_{j\geq 1}$ t.c.

$$A_k \subset \bigcup_{j\geq 1} E_{j,k} \quad e \quad \frac{\omega_p}{2^p}\sum_{j=1}^{\infty} diam(E_j^k)^p < \mathscr{H}_{p,\delta}(A_k) + \frac{\epsilon}{2^k}$$

Da ciò segue che

$$\bigcup_{j,k\geq 1} E_{j,k} = \bigcup_{k\geq 1}\bigcup_{j\geq 1} E_{j,k} \supset \bigcup_{k\geq 1} A_k$$

e dunque

$$\mathscr{H}_{p,\delta}\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k\right) \leq \frac{\omega_p}{2^p}\sum_{j,k=1}^{\infty} diam(E_j^k)^p = \frac{\omega_p}{2^p}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} diam(E_j^k)^p \leq \sum_{k=1}^{\infty}\mathscr{H}_{p,\delta}(A_k) + \epsilon$$

Per l'arbitrarietà di ϵ si conclude.

$\square$

Osservazione 2.1.2. *Se $\delta' < \delta$, un δ' -ricoprimento è anche un δ -ricoprimento e dunque*

$$\frac{\omega_p}{2^p}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} diam(E_j)^p\ :\ E \subset \bigcup_{j\geq 1} E_j\ ,\ diam(E_j) < \delta'\right\} \subset$$

$$\frac{\omega_p}{2^p}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} diam(E_j)^p\ :\ E \subset \bigcup_{j\geq 1} E_j\ ,\ diam(E_j) < \delta\right\}$$

e cioè $\mathscr{H}_{p,\delta}(E) \leq \mathscr{H}_{p,\delta'}(E)$. Ciò induce a dare la seguente definizione.

Definizione 2.1.3. Siano $p \geq 0$ e $E \subset X$, definiamo

$$\mathscr{H}_p(E) = \lim_{\delta\to 0}\mathscr{H}_{p,\delta}(E) = \sup_{\delta>0}\mathscr{H}_{p,\delta}(E)$$

la misura *p-dimensionale* di Hausdoff.

Osservazione 2.1.3. *La definizione di misura di Hausdorff data in un generico spazio metrico, non dipende dallo spazio in cui è definita, ovvero se (X_1, d_1) è isometricamente contenuto in (X_2, d_2), allora*

$$\mathscr{H}_p^{X_1}(E) = \mathscr{H}_p^{X_2}(E) \text{ per ogni } E \subset X_1$$

Nel seguito, la trattazione riguarderà $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea.

Proposizione 2.1.2. *Sia $p \geq 0$, allora $\mathscr{H}_p$ è una misura esterna, di Borel regolare.*

Dimostrazione. $\mathscr{H}_p$ è una misura esterna per le analoghe proprietà di $\mathscr{H}_{p,\delta}$. Per provare che è di Borel, è sufficiente dimostrare che è una misura esterna metrica e utilizzare il teorema 1.2.2. Se $\mathscr{H}_p(A \cup B) = \infty$ il caso è banale, supponiamo dunque sia finita. Siano A e B due insiemi tali che $dist(A, B) > 0$ e $0 < \delta < \frac{dist(A,B)}{4}$. Siano $\{E_k\}_{k\geq 1}$ t.c. $diam(E_k) < \delta$ e $A \cup B \subset \bigcup_{k\geq 1} E_k$.

Definiamo

$$\mathscr{A} = \{j \quad | \quad E_j \cap A \neq \emptyset\}$$

e

$$\mathscr{B} = \{j \quad | \quad E_j \cap B \neq \emptyset\}$$

$A \subset \bigcup_{j\in\mathscr{A}} E_j$ e $B \subset \bigcup_{j\in\mathscr{B}} E_j$, $E_j \cap E_i = \emptyset \, \forall i \in \mathscr{A}$ *e* $j \in \mathscr{B}$ poichè $dist(A, B) > 0$. Da ciò segue che:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_p}{2^p}\sum_{j=1}^{\infty} diam(E_j)^p &\geq \frac{\omega_p}{2^p}\sum_{j\in\mathscr{A}} diam(E_j)^p + \frac{\omega_p}{2^p}\sum_{j\in\mathscr{B}} diam(E_j)^p \\ &\geq \mathscr{H}_{p,\delta}(A) + \mathscr{H}_{p,\delta}(B) \end{aligned}$$

Segue che

$$\mathscr{H}_{p,\delta}(A) + \mathscr{H}_{p,\delta}(B) \leq \frac{\omega_p}{2^p} \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} diam(E_j)^p \,:\, A\cup B \subset \bigcup_{j\geq 1} E_j\right\} = \mathscr{H}_{p,\delta}(A\cup B)$$

Per subadditività della misura esterna, si ottiene l'uguaglianza e passando al limite per $\delta \to 0^+$ si ha

$$\mathscr{H}_p(A) + \mathscr{H}_p(B) = \mathscr{H}_p(A\cup B)$$

Resta da mostrare la regolarità. Anzitutto, per l'osservazione 2.1.1, si può supporre che gli insiemi $\{E_j\}_{j\geq 1}$ siano chiusi, in quanto $diam(E_j) = diam(\bar{E}_j)$.
Se $\mathscr{H}_p(A) = \infty$ basta porre $B = \bar{A}$. Sia, ora, A t.c. $\mathscr{H}_p(A) < \infty$ allora $\mathscr{H}_{p,\delta}(A) < \infty \, \forall \, \delta > 0$.
Dunque $\forall \, k \geq 1$ esistono $\left\{E_j^k\right\}_{j\geq 1}$ chiusi e t.c. $diam(E_j^k) \leq \frac{1}{k}$ e $A \subset \bigcup_{j\geq 1} E_j^k$ e si ha:

$$\frac{\omega_p}{2^p}\sum_{j=1}^{\infty} diam(E_j^k)^p \leq \mathscr{H}_{p,\frac{1}{k}}(A) + \frac{1}{k}.$$

Posto $A_k = \bigcup_{j\geq 1} E_j^k$ e $B = \bigcap_{k\geq 1} A_k$, $A \subset B$.

$$\mathscr{H}_{p,\frac{1}{k}}(B) \leq \frac{\omega_p}{2^p}\sum_{j=1}^{\infty} diam(E_j^k)^p \leq \mathscr{H}_{p,\frac{1}{k}}(A) + \frac{1}{k}$$

Per $k \to \infty$ si ottiene $\mathscr{H}_p(B) \leq \mathscr{H}_p(A)$ e, per subadditività, si ha l'uguaglianza. □

Corollario 2.1.1. *$\mathscr{H}_p$ è una misura sui boreliani.*

2.2 Proprietà delle misure di Hausdorff

Osservazione 2.2.1. *$\mathscr{H}_0$ è la misura che conta i punti. Infatti $\omega_0 = 1$ e $\mathscr{H}_0(x) = 1 \, \forall \, x \in \mathbb{R}^n$*

Teorema 2.2.1. *$\mathscr{H}_1 = \mathscr{L}^1$ in $\mathbb{R}$*

Dimostrazione. Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $\delta > 0$, $\mathscr{L}^1(A) = inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} diam(E_j) \,:\, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j,\ E_j intervalli\right\}$.
Poichè

$$\left\{\sum_{j=1}^{\infty} diam(E_j) \,:\, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j,\ E_j intervalli\right\} \supset \left\{\sum_{j=1}^{\infty} diam(E_j) \,:\, A \subset \bigcup_{j\geq 1} E_j \,, diam(E_j) < \delta\right\}$$

considerando l'estremo inferiore si ottiene che $\mathscr{L}^1(A) \leq \mathscr{H}_{1,\delta}(A)$.
Posto $I_k = [k\delta, (k+1)\delta]$, $diam(E_j \cap I_k) \leq \delta$, $\sum_k diam(E_j \cap I_k) \leq diam(E_j)$ e dunque

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^1(A) = inf &\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} diam(E_j) : A \subset \bigcup_j E_j,\ E_j intervalli \right\} \\
&\geq \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_k diam(E_j \cap I_k) \right) : A \subset \bigcup_j E_j, diam(E_j \cap I_k) < \delta \right\} \\
&\geq \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} diam(E_j) : A \subset \bigcup_j E_j, diam(E_j) < \delta \right\} = \mathscr{H}_{1,\delta}(A)
\end{aligned}$$

ciò vale $\forall\, \delta > 0$, passando a limite per $\delta \to 0^+$ si ottiene la tesi. □

Proposizione 2.2.1. *$\mathscr{H}_p$ è invariante per isometrie e vale che*

$$\mathscr{H}_p(\lambda E) = \lambda^p \mathscr{H}_p(E) \quad \forall\, \lambda > 0$$

Dimostrazione. L'invarianza per isometrie segue dalle analoghe proprietà della funzione $E \mapsto diam(E)$. Infatti le isometrie lasciano immutato il diametro di un insieme e $diam(\lambda E)^p = (\lambda diam(E))^p = \lambda^p diam(E)^p$. □

Proposizione 2.2.2. *Siano $p \geq 0$ e $E \subset \mathbb{R}^n$ t.c. $\mathscr{H}_{p,\delta}(E) = 0$ per qualche $0 < \delta < \infty$, allora $\mathscr{H}_p(E) = 0$.*
Inoltre, $\mathscr{H}_p = 0$ in $\mathbb{R}^n \quad \forall\, p > n$.

Dimostrazione. Per la prima parte possiamo suppore $p > 0$ in quanto la conclusione è ovvia per $p = 0$. Fissiamo $\epsilon > 0$, allora esistono degli insiemi $\{E_j\}_{j\geq 1}$ che siano un δ-ricoprimento di E e t.c.

$$\frac{\omega_p}{2^p} \sum_{j=1}^{\infty} (diam(E_j))^p \leq \epsilon$$

Segue che per ogni i

$$diam(E_i) \leq 2 \left(\frac{\epsilon}{\omega_p} \right)^{\frac{1}{p}} = \delta(\epsilon)$$

Ma allora $\mathscr{H}_{p,\delta(\epsilon)}(E) \leq \epsilon$ e se $\epsilon \mapsto 0$ avremo $\delta(\epsilon) \mapsto 0$ e cioè $\mathscr{H}_p(E) = 0$
Sia $Q = [0,1]^n$ il cubo di $\mathbb{R}^n$ e sia $m \geq 1$, un intero. Allora Q si può decomporre in m^n cubi di diametro $\sqrt{n}/m$. Perciò

$$\mathscr{H}_{p,\sqrt{n}/m}(Q) \leq \frac{\omega_p}{2^p} \sum_{j=1}^{m^n} (\sqrt{n}/m)^p = \frac{\omega_p}{2^p} n^{\frac{p}{2}} m^{n-p}$$

Se $n - p < 0$, cioè $p > n$ e $m \to \infty$ si ottiene $\mathscr{H}_p(Q) = 0$ da cui $\mathscr{H}_p(\mathbb{R}^n) = 0$ per invarianza di traslazioni. □

Lemma 2.2.1. *Valgono le seguenti due proprietà:*

- *Se $\mathscr{H}_p(E) < +\infty$ allora $\mathscr{H}_q(E) = 0$ $\forall q > p$*
- *Se $\mathscr{H}_q(E) > 0$ allora $\mathscr{H}_p(E) = +\infty$ $\forall q > p$*

Dimostrazione. Dimostriamo la prima delle due, la seconda segue dalla prima.
Se $\mathscr{H}_p(E) < +\infty$ allora $\mathscr{H}_{p,\delta}(E) < +\infty \, \forall \, \delta > 0$. Sia $\delta > 0$ allora esistono $\{E_j\}_{j \geq 1}$ t.c.

$$diam(E_j) < \delta \quad E \subset \bigcup_{j \geq 1} E_j \quad e \quad \frac{\omega_p}{2^p} \sum_{j=1}^{\infty} (diam(E_j))^p \leq \mathscr{H}_{p,\delta}(E) + \epsilon(=1) \leq$$

$$sup_{\delta > 0} \mathscr{H}_{p,\delta}(E) + 1 = \mathscr{H}_p(E) + 1$$

Se, ora $q > p$ si ottiene

$$\mathscr{H}_{q,\delta}(E) \leq \frac{\omega_q}{2^q} \sum_{j=1}^{\infty} (diam(E_j))^q = \frac{\omega_q}{2^q} \sum_{j=1}^{\infty} (diam(E_j))^p \frac{(diam(E_j))^q}{(diam(E_j))^p} \frac{\omega_p 2^p}{\omega_p 2^p} =$$

$$\frac{\omega_q 2^{p-q}}{\omega_p^2 2^p} \sum_{j=1}^{\infty} diam(E_j)^p diam(E_j)^{q-p} \leq \frac{\omega_q 2^{p-q} \delta^{q-p}}{\omega_p} \left(\mathscr{H}_{p,\delta}(E) + 1 \right).$$

Passando al limite per $\delta \to 0^+$ si ottiene $\mathscr{H}_q(E) = 0$ □

2.3 Dimensione di Hausdorff

Definizione 2.3.1 (dimensione di Hausdroff)**.** Sia $E \subset \mathbb{R}^n$, definiamo *dimensione di Hausdorff*

$$dim_{\mathscr{H}}(E) = \inf \{p \geq 0 : \mathscr{H}_p(E) = 0\} = \sup \{p \geq 0 : \mathscr{H}_p(E) = \infty\}$$

Osservazione 2.3.1. *$dim_{\mathscr{H}}(E) \leq n$ perchè se $p > n$, $\mathscr{H}_p(E) = 0$. Inoltre, per il lemma 2.2.1 $\mathscr{H}_q(E) = \infty$ se $q < dim_{\mathscr{H}}(E)$ e $\mathscr{H}_q(E) = 0$ se $q > dim_{\mathscr{H}}(E)$. Se, invece, $q = dim_{\mathscr{H}}(E)$ non si può dire nulla.*

2.4 Equivalenza tra la misura di Hausdorff e la misura di Lebesgue n-dimensionale

Prima di enunciare il teorema sull'equivalenza delle due misure, inseriamo alcuni enunciati preparatori alla dimostrazione.

2.4.1 Disuguaglianza isodiametrica

Definizione 2.4.1 (simmetrizzazione di Steiner)**.** Sia $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ e sia $A \subset \mathbb{R}^n$, definiamo simmetrizzazione di Steiner di A rispetto a π_a l'insieme

$$S_a(A) = \bigcup_{b \in \pi_a \;\; A \cap L_b^a \neq \emptyset} \left\{ b + ta \; : \; |t| \leq \frac{\mathscr{H}_1(A \cap L_b^a)}{2} \right\}$$

ove $\pi_a = a^{\perp}$ indica il piano ortogonale ad a e $L_b^a = \{b + ta \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.

Proposizione 2.4.1. *Valgono le seguenti affermazioni*

1. *$diam\,(S_a(A)) \leq diam(A)$*
2. *Sia $f \; : \; \mathbb{R}^n \mapsto [0, \infty]$ una funzione $\mathscr{L}^n$-misurabile, allora la regione al di sotto del grafico, ovvero $A = \{(x, y) \; : \; x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, \; 0 \leq y \leq f(x)\}$ è $\mathscr{L}^{n+1}$-misurabile.*

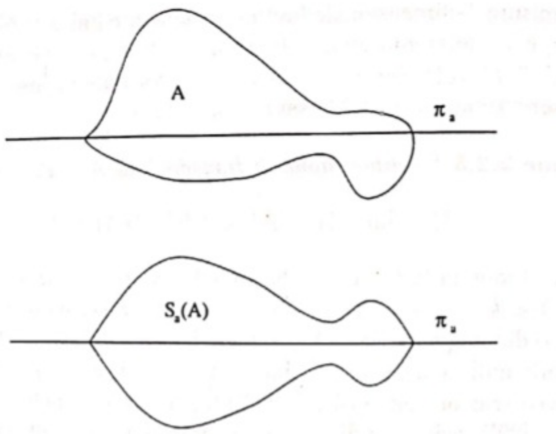

Figura 2.1: esempio di simmetrizzazione di Steiner in $\mathbb{R}^2$

3. *Se A è $\mathscr{L}^n$-misurabile, allora $S_a(A)$ è misurabile e $\mathscr{L}^n(S_a(A)) = \mathscr{L}^n(A)$.*

Dimostrazione. 1. L'asserto risulta triviale se $diam(A) = \infty$, dunque assumiamo $diam(A) < \infty$. Fissiamo $\epsilon > 0$ certamente esistono $x, y \in S_a(A)$ t.c. $diam(S_a(A)) - \epsilon \leq |x - y|$. Ponendo

$$b = x - (x \cdot a)a \quad c = y - (y \cdot a)a$$

si ha che $b, c \in \pi_a$. Definiamo ora i seguenti insiemi

$$r = \inf\{t \,|\, b + ta \in A\} \qquad s = \sup\{t \,|\, b + ta \in A\}$$

$$u = \inf\{t \,|\, c + ta \in A\} \qquad v = \sup\{t \,|\, c + ta \in A\}$$

Possiamo assumere che $v - r \geq s - u$ da cui

$$v - r \geq \frac{v - r}{2} + \frac{s - u}{2} = \frac{s - r}{2} + \frac{v - u}{2} \geq \frac{\mathscr{H}_1(A \cap L_b^a)}{2} + \frac{\mathscr{H}_1(A \cap L_c^a)}{2}$$

Notando che $|x \cdot a| \leq \frac{\mathscr{H}_1(A \cap L_b^a)}{2}$, $|y \cdot a| \leq \frac{\mathscr{H}_1(A \cap L_c^a)}{2}$ si ha

$$v - r \geq |x \cdot a| + |y \cdot a| \geq |x \cdot a - y \cdot a|$$

da cui

$$(diam(S_a(A)) - \epsilon)^2 \leq |x - y|^2 = |b - c|^2 + |x \cdot a - y \cdot a|^2 \leq |b - c|^2 + (v - r)^2 =$$

$$|(b + ra) - (c + va)|^2 \leq (diam(A))^2$$

essendo $diam(A) = diam(\bar{A})$, possiamo supporre che A sia chiuso e quindi $b + ra \in A$, $c + ra \in A$. Otteniamo quindi la tesi per l'arbitrareità di ϵ.

2. Definiamo $g(x, y) = f(x) - y$, allora è misurabile perchè lo è f. Dunque

$$A = \{(x, y) \,|\, y \geq 0\} \cap \{(x, y) \,|\, g(x, y) \geq 0\}$$

è $\mathscr{L}^{n+1}$-misurabile perchè è l'intersezione di insiemi misurabili.

3. Per l'invarianza per rotazioni della misura di Lebesgue, possiamo assumere che $a = e_n$, n-esimo vettore della base canonica. Così, $\pi_a = \mathbb{R}^{n-1}$. Definiamo
$$f(b) = \mathscr{H}_1(A \cap L_b^a) \quad b \in \mathbb{R}^{n-1}$$
allora essendo $\mathscr{H}_1 = \mathscr{L}^1$, per il teorema di Fubini anche $f : \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ è misurabile e $\mathscr{L}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(b)\, db$.
Scrivendo
$$S_a(A) = \left\{(b, y) \,|\, \frac{-f(b)}{2} \leq y \leq \frac{f(b)}{2}\right\} - \{(b, 0) \,|\, L_b^a \cap A = \emptyset\}$$
è $\mathscr{L}^n$-misurabile per il punto 2 e
$$\mathscr{L}^n(S_a(A)) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(b)\, db = \mathscr{L}^n(A).$$

□

Teorema 2.4.1 (Disuguaglianza isodiametrica)**.** *Vale la seguente disuguaglianza*
$$\mathscr{L}^n(E) \leq \frac{\omega_n}{2^n} diam(E)^n \quad \forall\ E \subset \mathbb{R}^n\,,\, E \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $diam(E) < \infty$, l'altro caso risulta triviale. Definiamo
$$E_1 = S_{e_1}(E), \ldots, E_n = S_{e_n}(E_{n-1})$$
Osserviamo che E_n risulta simmetrico rispetto all'origine. Infatti E_1 è simmetrico rispetto a π_{e_1}; sia $1 \leq k < n$ e supponiamo che E_k sia simmetrico rispetto a $\pi_{e_1} \ldots \pi_{e_k}$. Chiaramente E_{k+1} è simmetrico rispetto a $\pi_{e_{k+1}}$. Sia, ora, $1 \leq j \leq k$ e $S_j : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ la riflessione rispetto a π_{e_j}. Se $b \in \pi_{e_{k+1}}$, si ha
$$\mathscr{H}_1(E_k \cap L_b^{e_{k+1}}) = \mathscr{H}_1(E_k \cap L_{S_j b}^{e_{k+1}})$$
poichè $S_j(E_k) = E_k$, da cui
$$\{t \,|\, b + te_{k+1} \in E_{k+1}\} = \{t \,|\, S_j b + te_{k+1} \in E_{k+1}\}$$
e allora $S_j(E_{k+1}) = E_{k+1}$ e cioè E_{k+1} è simmetrico rispetto a π_{e_j} ma allora è presente anche una simmetria rispetto all'origine
Se $x \in E_n$, anche $-x \in E_n$, per quanto ossevato in precedenza. Dunque, $diam(E_n) \geq 2|x|$ e quindi $E_n \subset B(0, diam(E_n)/2)$, da cui, per il punto 1. della proposizione 2.4.1
$$B(0, diam(E_n)/2) \subset B(0, diam(E_{n-1}/2) \cdots \subset B(0, diam(E)/2)$$
Perciò, per la proprietà 3. della proposizione 2.4.1
$$\mathscr{L}^n(E) = \mathscr{L}^n(E_n) \leq \frac{\omega_n}{2^n}(diam(E))^n$$

□

Proposizione 2.4.2. *$\mathscr{H}_n$ è assolutamente continua rispetto a $\mathscr{L}^n$*

Dimostrazione. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$, allora
$$\mathscr{H}_{n,\delta}(E) \leq \frac{\omega_n}{2^n} \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} diam(Q_i)^n \,:\, Q_i \ cubi,\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i,\ diam(Q_i) < \delta\right\} =$$
$$\frac{\omega_n}{2^n}\sqrt{n}^n \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(Q_i) \,:\, Q_i \ cubi,\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i,\ diam(Q_i) < \delta\right\} = \frac{\omega_n}{2^n}\sqrt{n}^n \mathscr{L}^n(E).$$
Dunque se $\mathscr{L}^n(E) = 0$ anche $\mathscr{H}_{n,\delta}(E) = 0$ e passando a limite per $\delta \to 0^+$ anche $\mathscr{H}_n(E) = 0$ □

2.4.2 Ricoprimento di Vitali

Teorema 2.4.2 (ricoprimento di Vitali). *Sia $\mathscr{F}$ una collezione di palle chiuse in $\mathbb{R}^n$ t.c.*

$$\sup\{diam(B) \,|\, B \in \mathscr{F}\} < \infty$$

allora esiste una famiglia numerabile $\mathscr{G}$ di palle in $\mathscr{F}$ disgiunte t.c.

$$\bigcup_{B\in\mathscr{F}} \subset \bigcup_{B\in\mathscr{G}} \hat{B}$$

ove $\hat{B}$ è la palla concentrica a B con raggio quintuplo.

Dimostrazione. Sia $S = \sup\{diam(B) \,|\, B \in \mathscr{F}\}$, allora $S < \infty$ e consideriamo

$$F_j = \left\{ B \in \mathscr{F} \,|\, \frac{S}{2^j} < diam(B) \leq \frac{2S}{2^j} \right\}$$

L'insieme $\{\mathscr{G} \,|\, \mathscr{G} \, famiglia\ di\ palle\ digiunte\ contenuta\ in\ F_1\}$ è parzialmente ordinato per inclusione, in cui ogni catena ammette maggiorante (l'unione degli elementi della catena). Dunque, per il lemma di Zorn esiste G_1 elemento massimale. Procedendo induttivamente, supponiamo di aver selezionato $G_1, \ldots, G_{k-1}$; G_k sarà una sottofamiglia massimale di palle disgiunte contenute nel seguente insieme

$$\left\{ B \in F_k \,|\, B \cap B' = \emptyset \ \forall\ B' \in \bigcup_{j=1}^{k-1} G_j \right\}$$

A questo punto definiamo

$$\mathscr{G} = \bigcup_{j\geq 1} G_j$$

è una collezione numerabile di palle disgiunte contenuto in $\mathscr{F}$ ed è l'insieme cercato. Infatti sia $B \in \mathscr{F}$, allora esiste k t.c. $B \in F_k$. Se $B \notin \mathscr{G}$, essendo G_k massimale, deve esistere $B' \in \bigcup_{j=1}^{k-1} G_j$ t.c. $B \cap B' \neq \emptyset$. Osservando che $diam(B) \leq \frac{2S}{2^k}$ e $diam(B') > \frac{S}{2^k}$ segue che $diam(B) \leq 2diam(B')$. Dunque $B \subset \hat{B}'$ e cioè per ogni $B \in \mathscr{F}$ esiste $B' \in \mathscr{G}$ t.c. $B \cap B' \neq \emptyset$ e $B \subset \hat{B}'$, ossia la tesi. Se, invece, $B \in \mathscr{G}$ la conclusione è ovvia dalla definizione. $\square$

Corollario 2.4.1. *Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e $\delta > 0$. Allora esiste una collezione numerabile $\mathscr{G}$ di palle chiuse disgiunte contenute U e tali che $diam(B) \leq \delta$ per ogni $B \in \mathscr{G}$ e*

$$\mathscr{L}^n \left(U \setminus \bigcup_{B\in\mathscr{G}} B \right) = 0$$

Dimostrazione. Fissiamo ϵ t.c. $1 - 1/5^n < \epsilon < 1$ e supponiamo $\mathscr{L}^n(U) < \infty$.
Sia $\mathscr{F}_1 = \{B \,|\, B \subset U, diam(B) < \delta\}$, dal teorema precedente, esiste una famiglia numerabile di palle disgiunte $\mathscr{G}_1 \subset \mathscr{F}_1$ t.c. $U \subset \bigcup_{B\in\mathscr{G}_1} \hat{B}$. Ma allora

$$\mathscr{L}^n(U) \leq \sum_{B\in\mathscr{G}_1} \mathscr{L}^n(\hat{B}) = 5^n \sum_{B\in\mathscr{G}_1} \mathscr{L}^n(B) = 5^n \mathscr{L}^n \left(\bigcup_{B\in\mathscr{G}_1} B \right)$$

Da ciò segue dunque che

$$\mathscr{L}^n\left(U \setminus \bigcup_{B\in\mathscr{G}_1} B\right) \le \left(1-\frac{1}{5^n}\right)\mathscr{L}^n(U)$$

Essendo la famiglia numerabile, esisteranno $B_1, \dots, B_{N_1}$ palle in $\mathscr{G}_1$ t.c.

$$\mathscr{L}^n\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{N_1} B_i\right) < \epsilon\mathscr{L}^n(U)$$

Definiamo, ora, $U_2 = U \setminus \bigcup_{i=1}^{N_1} B_i$ e $\mathscr{F}_2 = \{B \,|\, B \subset U_2, diam(B) < \delta\}$; applicando quanto dimostrato sopra otterremo delle palle $B_{N_1+1}, \dots, B_{N_2}$ in $\mathscr{F}_2$ t.c.

$$\mathscr{L}^n\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{N_2} B_i\right) = \mathscr{L}^n\left(U_2 \setminus \bigcup_{i=N_1+1}^{N_2} B_i\right) < \epsilon\mathscr{L}^n(U_2) < \epsilon^2\mathscr{L}^n(U)$$

Iterando il procedimento, si ottengono delle palle $B_1, \dots, B_{N_k}$ t.c.

$$\mathscr{L}^n\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{N_k} B_i\right) < \epsilon^k\mathscr{L}^n(U)$$

Per $k \to \infty$ si ottiene quanto voluto.
Se $\mathscr{L}^n(U) = \infty$ basta considerare gli insiemi $U_m = \{x \in U \,:\, m < |x| < m+1\}$ con $m = 0, 1, \dots$ □

Teorema 2.4.3. *Per ogni $B \subset \mathbb{R}^n$ boreliano e per ogni $\delta > 0$ vale*

$$\mathscr{L}^n(B) = \mathscr{H}_{n,\delta}(B) = \mathscr{H}_n(B)$$

Dimostrazione. ($\le$) Fissiamo $\delta > 0$ e siamo $\{E_j\}_{j\ge1}$ un δ-ricoprimento di B. Per la disuguaglianza isodiametrica e per la subadditività di $\mathscr{L}^n$ si ha:

$$\mathscr{L}^n(B) \le \sum_{j=1}^{\infty}\mathscr{L}^n(E_j) \le \frac{\omega_n}{2^n}\sum_{j=1}^{\infty} diam(E_j)^n$$

Considerando l'estremo inferiore al secondo membro, si ottiene $\mathscr{L}^n(B) \le \mathscr{H}_{n,\delta}(B) \le \mathscr{H}_n(B)$.
($\ge$) Fissiamo $\delta > 0$ e $\epsilon > 0$, possiamo considerare dei cubi $\{Q_i\}_{i\ge1}$ che siano un δ-ricoprimento di B e t.c. $\sum_{j=1}^{\infty}\mathscr{L}^n(Q_i) \le \mathscr{L}^n(B) + \epsilon$. Utilizzando il corollario 2.4.1, per ogni i esistono $\{B_i^k\}_{k\ge1}$ palle chiuse disgiunte, contenute in $int(Q_i)$ t.c. $diam(B_i^k) \le \delta$ e

$$\mathscr{L}^n\left(int(Q_i) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_i^k\right) = 0$$

Segue che

$$\mathscr{H}_n\left(Q_i \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_i^k\right) = \mathscr{H}_n\left(int(Q_i) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_i^k\right) = 0$$

poichè $\mathscr{H}_n << \mathscr{L}^n$. Si ha dunque:

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}_{n,\delta}(B) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{H}_{n,\delta}(Q_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{H}_{n,\delta}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_i^k\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{H}_{n,\delta}(B_i^k) \\
&\leq \frac{\omega_n}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} diam(B_i^k)^n \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(B_i^k) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{L}^n\left(\bigcup_{K=1}^{\infty} B_i^k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(Q_i) \leq \mathscr{L}^n(B) + \epsilon
\end{aligned}$$

$\square$

Capitolo 3

Formula dell'area e formula di coarea

3.1 Richiami di algebra lineare

Utilizzeremo nel seguito alcune nozioni di algebra lineare, in particolare la decomposizione polare di una funzione lineare.

Definizione 3.1.1. Sia $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ una mappa lineare,

- T si dice *ortogonale* se $(Tx) \cdot (Ty) = x \cdot y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$
- T si dice *simmetrica* se $x \cdot (Ty) = (Tx) \cdot y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$
- l'*aggiunta* di T è una mappa lineare $T^* : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ t.c. $x \cdot (T^* y) = (Tx) \cdot y \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$

Teorema 3.1.1 (Decomposizione polare)**.** *Sia $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ una funzione lineare*

1. *se $n \leq m$ esistono una mappa simmetrica $S : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ e una ortogonale $O : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ t.c. $T = O \circ S$*
2. *se $m \leq n$ esistono una mappa simmetrica $S : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ e una ortogonale $O : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ t.c. $T = S \circ O^*$*

Definizione 3.1.2. Sia $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ una funzione lineare

1. Se $n \leq m$ definiamo *jacobiano n-dimensionale* di T la quantità
$$J_n T = \sqrt{det(T^* \circ T)}$$
2. Se $m \leq n$ definiamo *jacobiano m-dimensionale* di T la quantità
$$J_m T = \sqrt{det(T \circ T^*)}$$

Proposizione 3.1.1. *Nelle ipotesi della precedente definizione e con le notazioni del teorema 3.1.1, si ha:*

1. *Se $n \leq m$ e $T = O \circ S$*
$$J_n T = |det(S)|$$

2. *Se* $m \leq n$ *e* $T = S \circ O^*$
$$J_m T = |det(S)|$$

Inoltre, $J_n T = J_n T^*$.

Dimostrazione. Sia $n \leq m$ e $T = O \circ S$, allora $T^* = S^* \circ O^* = S \circ O^*$. Da questo $T^* \circ T = S^* \circ O^* \circ O \circ S = S^2$, dove si è usato il fatto che $O^* \circ O = I_n$ e $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$. Quindi $det(T^* \circ T) = det(S^2) = det(S)^2$.
Analogamente si prova l'altro caso □

Teorema 3.1.2 (Formula di Binet-Cauchy)**.** *Sia* $n \leq m$ *e sia* $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$*, allora*

$$J_n T = \sqrt{\sum_B det(B)^2}$$

ove B *sono le sottomatrici* $n \times n$ *della matrice associata a* T*.*

3.2 Funzioni lipschztiane

Definizione 3.2.1. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ e $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$ una funzione, diciamo che è una funzione lipschtziana e scriviamo $f \in Lip(E)$ se esiste una costante $C \geq 0$ t.c.

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \quad \forall\, x, y \in E$$

La miglior costante C con tale proprietà è detta *costante di Lipschtz* ed è pari a

$$Lip(f) = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \,:\, x, y \in E\,,\, x \neq y\right\}$$

Teorema 3.2.1 (teorema di Kirszbraun)**.** *Sia* $E \subset \mathbb{R}^n$ *e sia* $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$ *una funzione lipschtziana, allora esiste* $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *lipschtziana t.c.:*

1. $f(x) = \tilde{f}(x)\, \forall\, x \in E$

2. $Lip(f) = Lip(\tilde{f})$

Dunque d'ora in poi possiamo considerare funzioni lipschtziane definite su tutto $\mathbb{R}^n$

Lemma 3.2.1. *Sia* $f \in Lip(\mathbb{R}^n)$*, allora*

$$\mathscr{H}_p(f(E)) \leq Lip(f)^p \mathscr{H}_p(E) \quad \forall\, E \subset \mathbb{R}^n$$

Dimostrazione. Sia $\delta > 0$ e siano $\{E_j\}_{j\geq 1}$ un δ-ricoprimento di $E \subset \mathbb{R}^n$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} diam(f(E_j)) &= \sup\{|f(x) - f(y)| \,:\, x, y \in E_j\} \leq \sup\{L|x - y| \,:\, x, y \in E_j\} \\ &\leq Lip(f) \sup\{|x - y| \,:\, x, y \in E_j\} = Lip(f) diam(E_j) \end{aligned}$$

e $f(E) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} f(E_j)$. Dunque $\{f(E_j)\}_{j\geq 1}$ è un $\delta Lip(f)$-ricoprimento di $f(E)$. Da ciò segue

$$\mathscr{H}_{p,Lip(f)\delta}(f(E)) \leq \frac{\omega_p}{2^p} \sum_{j=1}^{\infty} diam(f(E_j))^p \leq \frac{Lip(f)^p \omega_p}{2^p} \sum_{j=1}^{\infty} diam(E_j)^p$$

da cui, considerando l'estremo inferiore, $\mathscr{H}_{p,Lip(f)\delta}(f(E)) \leq Lip(f)^p \mathscr{H}_{p,\delta}(E)$. Passando a limite per $\delta \to 0^+$ si ha la tesi.

□

Corollario 3.2.1. *Sia* $P : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$, $n > k$, *la proiezione,* $E \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq p < \infty$, *allora*

$$\mathscr{H}_p(P(E)) \leq \mathscr{H}_p(E)$$

Dimostrazione. Segue dal lemma precedente, con $Lip(P) = 1$ □

Proposizione 3.2.1. *Sia* $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\mathscr{L}^n(A) > 0$, *allora:*

1. $dim_{\mathscr{H}}(grf|_A) \geq n$
2. $dim_{\mathscr{H}}(grf|_A) = n$ *se* f *è una funzione lipschtziana*

Dimostrazione. Sia $P : \mathbb{R}^{n+m} \mapsto \mathbb{R}^n$ la proiezione, allora $\mathscr{H}_n(grf|_A) \geq \mathscr{H}_n(P(grf|_A)) = \mathscr{H}_n(A) > 0$ e dunque $dim_{\mathscr{H}}(grf|A) \geq n$
Sia ora f una funzione lipschtziana. Sia Q un cubo in $\mathbb{R}^n$ di lato 1 e consideriamo una sua suddivisione in k^n cubetti $Q_1, \ldots, Q_{k^n}$ di lato $1/k$. Allora $diam(Q_i) = \frac{\sqrt{n}}{k}$. Consideriamo ora

$$a_j^i = \min_{x \in Q_j} f_i(x) \quad b_j^i = \max_{x \in Q_j} f_i(x) \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, k^n$$

segue, dalla lipschtzianità,

$$|b_j^i - a_j^i| \leq Lip(f) diam(Q_j) = Lip(f) \frac{\sqrt{n}}{k}$$

Definiamo $E_j = Q_j \times \prod_{i=1}^{m} (a_j^i, b_j^i)$ allora $grf|_{A \cap Q_j} \subset E_j$ e $diam(E_j) \leq C/k$. Dunque, essendo $grf|_{A \cap Q} \subset \bigcup_{j \geq 1} E_j$, si ottiene

$$\mathscr{H}_{n,c/k}(grf|_{A \cap Q}) \leq \frac{\omega_n}{2^n} \sum_{j=1}^{k^n} diam(E_j)^n \leq k^n \frac{\omega_n}{2^n} \left(\frac{C}{k}\right)^n = \frac{\omega_n}{2^n} C^n$$

Per $k \mapsto \infty$ si ha $\mathscr{H}_n(grf|_{A \cap Q}) < \infty$ da cui $dim_{\mathscr{H}}(grf|_{A \cap Q}) \leq n$. □

Definizione 3.2.2. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ e $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$ una funzione, diciamo che è *localmente* di Lipschtz se per ogni compatto $K \subset E$ esiste una costante $C_K \geq 0$ t.c.

$$|f(x) - f(y)| \leq C_K |x - y| \quad \forall\, x, y \in K$$

Teorema 3.2.2 (Rademacher)**.** *Sia* $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *una funzione localmente lipschtziana, allora è differenziabile* $\mathscr{L}^n$*-q.o.*

Corollario 3.2.2. *Siano* $f, g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ *due funzioni localmente lipschtziane, e* $Y = \{x \in \mathbb{R}^n : g(f(x)) = x\}$, *allora*

$$Dg(f(x))Df(x) = I \quad per\, \mathscr{L}^n - q.o.\, x \in Y$$

Notazioni: sia $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ una funzione lipschtziana, denotiamo con $Df(x)$ il differenziale di f nel punto x, che sappiamo esistere $\mathscr{L}^n$-q.o., per il teorema di Rademacher.
Se $n \leq m$, indichiamo con $Jf(x) = J_n(Df(x)) = \sqrt{det(Df(x)^* \circ Df(x))}$. Con abuso di notazione, se $n \geq m$ indichiamo con $Jf(x) = J_m(Df(x)) = \sqrt{det(Df(x) \circ Df(x)^*)}$. La differenza sarà chiara dal contesto.

3.3 Formula dell'area

In questa sezione considereremo funzioni lipschtziane definite su tutto $\mathbb{R}^n$. Dimostreremo prima la formula dell'area nel caso lineare (lemma 3.3.1) per poi passare ad altri due lemmi preparatori che ci consentiranno di dimostrare la formula dell'area.

Lemma 3.3.1. *Sia $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $n \leq m$, una funzione lineare, allora per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathscr{L}^n$-misurabile si ha*

$$\mathscr{H}_n((T(A)) = (J_nT)\,\mathscr{L}^n(A)$$

Dimostrazione. Consideriamo la decomposizione polare di T, ovvero $T = O \circ S$, con O ortogonale e S simmetrica; sappiamo che $J_nT = |det(S)|$.
Se $J_nT = 0$ allora S non è invertibile, ovvero $dim(Im(S)) \leq n-1$ da cui $dim(Im(T)) \leq n-1$. Di conseguenza, per l'osservazione 2.3.1, essendo $dim_{\mathscr{H}}(Im(T)) \leq n-1 < n$, avremo che $\mathscr{H}_n(T(\mathbb{R}^n)) = 0$ e quindi l'uguaglianza risulta verificata.
Se $J_nT > 0$ allora, avremo

$$\begin{aligned}\frac{\mathscr{H}_n(T(B(x,r))}{\mathscr{L}^n(B(x,r))} &= \frac{\mathscr{L}^n(T(B(x,r))}{\mathscr{L}^n(B(x,r))} = \frac{\mathscr{L}^n(O^* \circ T(B(x,r))}{\mathscr{L}^n(B(x,r))} = \frac{\mathscr{L}^n(O^* \circ O \circ S(B(x,r))}{\mathscr{L}^n(B(x,r))}\\ &= \frac{\mathscr{L}^n(S(B(x,r))}{\mathscr{L}^n(B(x,r))} = \frac{\mathscr{L}^n(S(B(0,1))}{\mathscr{L}^n(B(0,1))} = \frac{\mathscr{L}^n(B(0,1))|detS|}{\omega_n} = |detS| = J_nT\end{aligned}$$

dove si è utilizzato il teorema di cambio di variabili, l'invarianza per similitudini e traslazioni della misura di Lebesgue e $\mathscr{L}^n(B(x,r)) = \omega_n r^n$. Definiamo ora

$$\nu(A) = \mathscr{H}_n(T(A))\,\forall A \subset \mathbb{R}^n$$

Allora $\nu << \mathscr{L}^n$ e dal corollario 1.6.1, segue che $d\nu = fd\mathscr{L}^n$ ove, per quanto visto sopra

$$f = \lim_{r\to 0}\frac{\nu(B(x,r))}{\mathscr{L}^n(B(x,r))} = J_nT$$

Da questo

$$\mathscr{H}_n(T(A)) = \nu(A) = \int_A f d\mathscr{L}^n = J_nT\mathscr{L}^n(A)$$

□

Lemma 3.3.2. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un $\mathscr{L}^n$-misurabile e $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $n \leq m$ una funzione lipschtziana, allora:*

1. *$f(A)$ è $\mathscr{H}_n$-misurabile*
2. *la funzione $y \mapsto \mathscr{H}_0(A \cap f^{-1}\{y\})$ è $\mathscr{H}_n$-misurabile*
3. $$\int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_0(A \cap f^{-1}\{y\})\,d\mathscr{H}_n \,\leq\, Lip(f)^n \mathscr{L}^n(A)$$

Dimostrazione. Supponiamo, senza perdita di generalità che A sia limitato. Il caso illimitato si deduce facilmente dalla σ-finitezza. Dalla regolarità dall'interno della misura di Lebesgue, segue che $\forall\, i \geq 1$ esistono $K_i \subset A$ compatti t.c. $\mathscr{L}^n(K_i) \geq \mathscr{L}^n(A) - \frac{1}{i}$. Possiamo supporre che $K_i \subset K_{i+1}$ ed essendo poi $\mathscr{L}^n(A) < \infty$ si ha $\mathscr{L}^n(A \setminus K_i) < \frac{1}{i}$. Inoltre, f è supposta lipschtziana e quindi è anche continua, per cui $f(K_i)$ è anch'esso compatto e $\mathscr{H}_n$-misurabile,

essendo boreliano perchè chiuso. Ma allora anche $f\left(\bigcup_{i\geq 1} K_i\right) = \bigcup_{i\geq 1} f(K_i)$ è $\mathscr{H}_n$-misurabile.
Si ottiene quindi

$$\mathscr{H}_n\left(f(A)\setminus f\left(\bigcup_{i\geq 1} K_i\right)\right) \leq \mathscr{H}_n\left(f\left(A\setminus \bigcup_{i\geq 1} K_i\right)\right) \leq Lip(f)^n \mathscr{L}^n\left(A\setminus \bigcup_{i\geq 1} K_i\right)$$
$$= Lip(f)^n \mathscr{L}^n\left(\bigcap_{i\geq 1} A\setminus K_i\right) = Lip(f)^n \lim_{i\to\infty} \mathscr{L}^n(A\setminus K_i) = 0$$

Ove si è usata la continuità dall'alto, essendo la successione $\{A\setminus K_i\}$ decrescente e $\mathscr{L}^n(A\setminus K_i) < \infty$. Ciò prova che $f(A)$ è $\mathscr{H}_n$-misurabile.
Definiamo

$$B_k = \{Q \,|\, Q = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_n, b_n] \; a_i = \frac{c_i}{k}\,,\, b_i = \frac{c_i + 1}{k}\,,\, c_i\, interi\,,\, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Per quanto dimostrato nel punto precedente,la successione

$$g_k = \sum_{Q\in B_k} \chi_{f(A\cap Q)}$$

è $\mathscr{H}_n$-misurabile. Inoltre, per come è definita, $g_k(y) =$ numero di cubi $Q \in B_k$ t.c. $\chi_{f(A\cap Q)}(y) = 1$, cioè il numero di cubi $Q \in B_k$ tali che $y \in f(A\cap Q)$, ovvero tali che $f^{-1}\{y\} \cap (A\cap Q) \neq \emptyset$. Osservando che $\mathbb{R}^n = \bigcup_{Q\in B_k} Q$ e che $\{B_k\}_k$ è crescente, avremo

$$g_k(y) \uparrow \text{numero di elementi in } A\cap f^{-1}\{y\} = \mathscr{H}_0(A\cap f^{-1}\{y\})$$

ove si è usata l'ossservazione 2.2.1. Da ciò segue 2., essendo la funzione limite puntuale di funzioni misurabili.
Utilizzando il teorema di Beppo-Levi, si avrà anche

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_0(A\cap f^{-1}\{y\})\, d\mathscr{H}_n(y) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_k\, d\mathscr{H}_n(y) = \lim_{k\to\infty} \sum_{Q\in B_k} \mathscr{H}_n f(A\cap Q)$$
$$\leq \limsup_{k\to\infty} \sum_{Q\in B_k} Lip(f)^n \mathscr{L}^n(A\cap Q) = Lip(f)^n \mathscr{L}^n(A\cap \mathbb{R}^n) = Lip(f)^n \mathscr{L}^n(A)$$

ove si è usato il lemma 3.2.1.

□

Osservazione 3.3.1. *La funzione* $y \mapsto \mathscr{H}_0(A\cap f^{-1}\{y\})$ *è detta funzione molteplicità e ciò è giustificato per l'osservazione 2.2.1.*

Lemma 3.3.3. *Sia* $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $n \leq m$ *una funzione lipschtziana,* $t > 1$ *e*

$$B = \{x \,|\, Df(x)\, esiste, Jf(x) > 0\}$$

allora esiste una famiglia numerabile $\{E_k\}_{k\geq 1}$ *di boreliani t.c.:*

1. $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$

2. *$f|_{E_k}$ è iniettiva*

3. *per ogni $k = 1, 2, \dots,$ esiste un automorfismo simmetrico $T_k : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ t.c.*

$$Lip((f|_{E_k}) \circ T_k^{-1}) \leq t, \quad Lip(T_k \circ (f|_{E_k})^{-1}) \leq t$$

$$t^{-n}|det(T_k)| \leq Jf|_{E_k} \leq t^n|det(T_k)|$$

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$ t.c. $\frac{1}{t} + \epsilon < 1 < t - \epsilon$. Sia $C \subset B$ denso e numerabile, $\mathscr{S}$ sottinsieme denso e numerabile dell'insieme degli automorfismi simmetrici di $\mathbb{R}^n$.
Per ogni $c \in C$ e $T \in \mathscr{S}$ e $i \geq 1$ definiamo $E(c, T, i)$ l'insime di tutti i $b \in B \cap B(c, \frac{1}{i})$ che soddisfano

$$\left(\frac{1}{t} + \epsilon\right)|Tv| \leq |Df(b)v| \leq (t - \epsilon)|Tv| \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

e

$$|f(a) - f(b) - Df(b) \cdot (a - b)| \leq \epsilon|T(a - b)| \quad \forall\, a \in B\left(b, \frac{2}{i}\right) \tag{3.2}$$

Essedo Df Borel-misurabile, anche $E(c, T, i)$ sarà boreliano. Dalla (3.1) con $v = a - b$ e dalla (3.2) otteniamo

$$|f(a) - f(b) - Df(b) \cdot (a - b) + Df(b) \cdot (a - b)| \leq (t - \epsilon + \epsilon)|T(a - b)|$$

e

$$\left|\left(\frac{1}{t} + \epsilon\right) T(a - b) - \epsilon T(a - b)\right| \leq |Df(b) \cdot (a - b) - f(a) - f(b) - Df(b) \cdot (a - b)|$$

Da cui

$$\frac{1}{t}|T(a - b)| \leq |f(a) - f(b)| \leq t|T(a - b)| \quad \forall b \in E(c, T, i) \text{ } e \text{ } a \in B\left(b, \frac{2}{i}\right). \tag{3.3}$$

Utilizziamo, ora, la decomposizione polare di $Df(b) = O \circ S$, con $b \in B$ e sia $T \in \mathscr{S}$ t.c.

$$Lip(T \circ S^{-1}) \leq \left(\frac{1}{t} + \epsilon\right)^{-1} \quad e \quad Lip(S \circ T^{-1}) \leq t - \epsilon$$

Siano poi $i \geq 1$ e $c \in C$ e $c \in B(b, \frac{1}{i})$ e

$$|f(a) - f(b) - Df(b) \cdot (a - b)| \leq \frac{\epsilon}{Lip(T^{-1})}|a - b| \leq \epsilon|T(a - b)| \quad \forall\, a \in B\left(b, \frac{2}{i}\right).$$

Per le scelte fatte, $b \in E(c, t, i)$. Dunque, scegliendo

$$\{E_k\}_{k \geq 1} = \{E(c, i, T) \, : \, c \in C \, , \, T \in S, i \geq 1\}$$

la prima implicazione risulta provata.
Con la scelta di $\{E_k\}$ precedente, sia $T_k = T$. Per la (3.3) abbiamo

$$\frac{1}{t}|T_k(a - b)| \leq |f(a) - f(b)| \leq t|T_k(a - b)| \quad \forall b \in E_k \text{ } e \text{ } a \in B\left(b, \frac{2}{i}\right) \tag{3.4}$$

Poichè $E_k \subset B(c, \frac{1}{i}) \subset B(c, \frac{2}{i})$, la (3.4) risulta verificata $\forall\, a\, b \in E_k$, per cui $f|_{E_k}$ è iniettiva.
Infine, (3.4) implica

$$Lip(f|_{E_k} \circ T_k^{-1}) \leq t \quad Lip(T_k \circ (f|_{E_k})^{-1}) \leq t$$

Si ha anche che

$$t^{-n}|det(T_k)| \leq J(f|_{E_k}) \leq t^n|det(T_k)|$$

Infatti se $b \in E(c,T,i)$ allora $(\frac{1}{t}+\epsilon)^n|det(T)| \leq Jf(b)| \leq (t-\epsilon)^n|det(T)|$. Usando la decomposizione polare di $Df(b) = O \circ S$, si ha $Jf(b) = |detS|$. Dalla (3.1)

$$\left(\frac{1}{t}+\epsilon\right)|Tv| \leq |(O \circ S)v| = |Sv| \leq (t-\epsilon)|Tv| \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^n$$

e dunque

$$\left(\frac{1}{t}+\epsilon\right)|v| \leq |(S \circ T^{-1})v| = \leq (t-\epsilon)|v| \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^n$$

Essendo $(S \circ T^{-1})(B(0,1)) \subset B(0, t-\epsilon)$, si ha

$$|det(S \circ T^{-1})|\omega_n \leq \mathscr{L}^n(B(0,t-\epsilon)) = \omega_n(t-\epsilon)^n$$

Da cui, $|det(S)| \leq (t-\epsilon)^n|det(T)|$. Similmente per l'altra disuguaglianza. □

Teorema 3.3.1 (Formula dell'area). *Sia $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $n \leq m$ una funzione lipschtziana, allora*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_0(A \cap f^{-1}\{y\})\, d\mathscr{H}_n(y) = \int_A Jf\, dx \quad \forall\, A \subset \mathbb{R}^n, \mathscr{L}^n - misurabile$$

Dimostrazione. Per il teorema di Rademacher, possiamo supporre che $Df(x)$ esista per ogni $x \in A$, senza perdita di generalità.
Supponiamo prima che $A \subset \{Jf > 0\}$. Fissiamo $t > 1$, esistono $\{E_k\}_{k \geq 1}$ boreliani che possiamo supporre disgiunti, che soddisfano la tesi del lemma 3.3.3. Definiamo, ora B_k come nel lemma 3.3.2, ovvero

$$B_k = \{Q \,|\, Q = (a_1,b_1] \times (a_2,b_2] \times \cdots \times (a_n,b_n]\ a_i = \frac{c_i}{k}\,,\, b_i = \frac{c_i+1}{k}\,,\, c_i\, interi\,,\, i = 1,2,\ldots,n\}$$

Siano

$$F_j^i = E_j \cap Q_i \cap A \quad con\ Q_i \in B_k\,,\, j = 1,2,\ldots$$

allora gli insiemi F_j^i sono disigunti e $A = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} F_j^i$.
Similmente al lemma 3.3.2, sia

$$g_k = \sum_{i,j=1}^{\infty} \chi_{f(F_j^i)}$$

tale funzione quantifica il numero di insiemi F_j^i tali che $F_j^i \cap f^{-1}\{y\} \neq \emptyset$. Allora $g_k(y) \uparrow \mathscr{H}_0(A \cap f^{-1}\{y\})$. Applicando il teorema di Beppo-Levi, otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_0(A \cap f^{-1}\{y\})\, d\mathscr{H}_n(y) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_k\, d\mathscr{H}_n(y) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathscr{H}_n f(F_j^i)$$

Dal lemma 3.3.3 e 3.2.1 e dal teorema 2.4.3 seguono le seguenti disuguaglianze

$$\mathscr{H}_n(f(F_j^i)) = \mathscr{H}_n(f|_{E_j} \circ T_j^{-1} \circ T_j(F_j^i)) \leq t^n \mathscr{H}_n(T_j(F_j^i)) = t^n \mathscr{L}^n(T_j(F_j^i))$$

$$\mathscr{L}^n(T_j(F_j^i)) = \mathscr{H}_n(T_j \circ (f|_{E_j})^{-1} \circ f(F_j^i)) \leq t^n \mathscr{H}_n(f(F_j^i))$$

Da cui, usando il lemma 3.3.1 e lemma 3.3.3

$$t^{-2n}\mathscr{H}_n(f(F_j^i)) \le t^{-n}\mathscr{L}^n(T_j(F_j^i)) = t^{-n}|det(T_j)|\mathscr{L}^n(F_j^i) \le \int_{F_j^I} Jf\,dx$$

$$\le t^n|det(T_j)|\mathscr{L}^n(F_j^i) = t^n\mathscr{L}^n(T_j(F_j^i)) \le t^{2n}\mathscr{H}_n(f(F_j^i))$$

Considerando la somma in i, j, si ottiene

$$t^{-2n}\sum_{i,j=1}^{\infty}\mathscr{H}_n(f(F_j^i)) \le \int_A Jf\,dx \le t^{2n}\sum_{i,j=1}^{\infty}\mathscr{H}_n(f(F_j^i))$$

passando a limite per $k \to \infty$ avremo

$$t^{-2n}\int_{\mathbb{R}^m}\mathscr{H}_0(A\cap f^{-1}\{y\}\,d\mathscr{H}_n(y) \le \int_A Jf\,dx \le t^{2n}\int_{\mathbb{R}^m}\mathscr{H}_0(A\cap f^{-1}\{y\})\,d\mathscr{H}_n(y)$$

Infine, la tesi segue, per $t \to 1^+$.
Supponiamo, ora che $A \subset \{Jf = 0\}$. Fissiamo $0 < \epsilon \le 1$. Fattorizziamo $f = p \circ g$, con

$$g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \quad g(x) = (f(x), \epsilon x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

e

$$p : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \quad p(y,z) = y \quad y \in \mathbb{R}^m,\, z \in \mathbb{R}^n$$

Da $g = (f^1, f^2, \ldots, f^m, \epsilon x_1, \ldots, \epsilon x_n)$, si ottiene $(Df(x)\,\epsilon I)^t$. Dal teorema 3.1.2

$$Jg(x)^2 = \text{somma dei minori n di } Dg(x) = \epsilon^{2n} + \{\text{termini positivi}\} \ge \epsilon^{2n} > 0$$

Da cui

$$Jg(x)^2 = Jf(x)^2(=0) + \{somma\,dei\,rimanenti\} \le C^2\epsilon^2 \quad \forall\, x \in A$$

osservando che $|Df| \le Lip(f) < \infty$. Per cui $0 < Jg(x) \le C\epsilon$, $x \in A$. Siccome p è la proiezione, avremo

$$\mathscr{H}_n(f(A)) \le \mathscr{H}_n(g(A)) \le \int_{\mathbb{R}^{n+m}}\mathscr{H}_0(A\cap g^{-1}\{y,z\})\,d\mathscr{H}_n(y,z) =$$

Usando il caso precedente

$$\int_A Jg(x)\,dx \le \epsilon C\mathscr{L}^n(A)$$

Per $\epsilon \to 0$ otteniamo $\mathscr{H}_n(f(A)) = 0$. Da ciò, essendo $Supp\left(\mathscr{H}_0(A\cap f^{-1}\{y\})\right) \subset f(A)$ segue

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathscr{H}_0(A\cap f^{-1}\{y\})\,d\mathscr{H}_n(y) = 0$$

Ma allora si ha l'uguaglianza, essendo $Jf = 0$.
Il caso generale si deduce dai casi precedenti, scrivendo $A = A_1 \cup A_2$ con $A_1 \subset \{Jf > 0\}$ e $A_2 \subset \{Jf = 0\}$. □

Osservazione 3.3.2. *Se f è iniettiva, $f^{-1}\{y\}$ è costituita da un unico elementro, dunque la formula diventa*

$$\mathscr{H}_n(f(A)) = \int_A Jf\,dx \tag{3.5}$$

In particolare, se $f \in C^1(A)$ ed è iniettiva, pensando a $Jf(x)$ come ad un "elemento infinitesimo di area", possiamo definire l'area di $M = f(A)$ nel seguente modo

$$A(M) = \int_A Jf(x)\,dx$$

Cosicchè la formula dell'area diventa

$$A(M) = \mathscr{H}_n(M)$$

Osservazione 3.3.3. *Nel caso in cui f sia un diffeomorfismo di classe $C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, dalla formula dell'area, si ottiene*

$$\mathscr{L}^n(f(A)) = \int_A |det(Df(x))|\,dx \quad A \subset \Omega \text{ un insieme } \mathscr{L}^n - misurabile$$

Infatti, dall'iniettività di f si può utilizzare la formula 3.5 ove, per la formula di Binet-Cauchy,

$$Jf(x) = J_n(Df(x)) = \sqrt{\sum_{B \text{ minore } n \times n} det(B)^2} = |det(Df(x))|$$

Corollario 3.3.1 (Formula di cambio di variabili)**.** *Sia $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $n \leq m$ una funzione lipschtziana. Se $g \in L^1(\mathscr{L}^n)$, si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x) \right) d\mathscr{H}_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) Jf(x)\,dx$$

Dimostrazione. Se $g = \chi_A$, con A misurabile, si ottiene la formula dell'area. Dunque la tesi risulta vera per funzioni caratteristiche.

Siano $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ e $E_1, \ldots, E_n$ insiemi misurabili, $g = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$ una funzione semplice. Per linearità dell'integrale avremo

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)Jf(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x) \right) Jf(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_i}(x) Jf(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_0(E_i \cap f^{-1}\{y\})\,d\mathscr{H}_n(y) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{\mathbb{R}^m} \left(\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \chi_{E_i} \right) d\mathscr{H}_n(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x) \right) \right) d\mathscr{H}_n(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x) \right) d\mathscr{H}_n(y)$$

Sia, ora, $g \geq 0$ una funzione $\mathscr{L}^n$-misurabile. Ricordando che si può approssimare con una successione di funzioni semplici crescente, per il teorema 1.4.1, sia $\{\phi_n\}_{n \geq 1}$ t.c. $\phi_n \uparrow g$. Per il teorema di Beppo-Levi si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} gJf\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_n Jf\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \left(\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \phi_n \right) d\mathscr{H}_n(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \lim_{n\to\infty} \phi_n \right) d\mathscr{H}_n(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x) \right) d\mathscr{H}_n(y)$$

Infine, se $g \in L^1(\mathscr{L}^n)$, si può scrivere $g = g^+ - g^-$ e per ciascuna di esse vale la tesi. $\square$

3.4 Formula di coarea

In questa sezione, data una funzione $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ lipschtziana, con $n \geq m$, vogliamo cercare una formula che consenta di ridurre un integrale in un insieme A in un doppio integrale: prima nell'insieme $A \cap \{x \mid f(x) = y\}$ integrato in $\mathscr{H}_{n-m}$ e il risultato integrato in $\mathscr{L}^m$.

Lemma 3.4.1. *Sia $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $n \geq m$ una funzione lineare e sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme $\mathscr{L}^n$-misurabile, allora*

1. *la funzione $y \mapsto \mathscr{H}_{n-m}(A \cap T^{-1}\{y\})$ è $\mathscr{L}^m$-misurabile*
2. $$\int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(A \cap T^{-1}\{y\})\, dy \;=\; J_m(T)\mathscr{L}^n(A)$$

Dimostrazione. **Caso 1:** $dim(Im(T)) < m$.
Sotto queste ipotesi si ha che $A \cap T^{-1}\{y\} = \emptyset$ per $\mathscr{L}^m$ q.o $y \in \mathbb{R}^m$ e dunque $\mathscr{H}_{n-m}(A \cap T^{-1}\{y\}) = 0$ $\mathscr{L}^m$ q.o. Infatti se $\mathscr{T} = \{y \in \mathbb{R}^n : A \cap T^{-1}\{y\} \neq \emptyset\}$, $\mathscr{T} \subset Im(T)$ e dunque $\mathscr{L}^m(\mathscr{T}) \leq \mathscr{L}^m(Im(T)) = \mathscr{H}_m(Im(T)) = 0$ perchè $dim_{\mathscr{H}}(Im(T)) < m$ $y \in \mathbb{R}^m$. Segue che è misurabile e utilizzando la decomposizione polare, $T = S \circ O^*$, si ha che $T(\mathbb{R}^n) = S(\mathbb{R}^m)$ e dunque $dim(Im(S)) < m$ da cui $J_mT = |det(S)| = 0$

Caso 2: $T = P =$ proiezione ortogonale.
Sotto queste ipotesi, se $y \in \mathbb{R}^m$, $P^{-1}\{y\}$ è sottospazio di dimensione $n - m$, traslazione di $P^{-1}\{0\}$. Dal teorema di Fubini la funzione $y \mapsto \mathscr{H}_{n-m}(A \cap P^{-1}\{y\})$ è $\mathscr{L}^m$-misurabile e

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(A \cap P^{-1}\{y\})\, dy \;=\; \mathscr{L}^n(A) \;=\; J_mT\mathscr{L}^n(A)$$

Caso 3: $dim(Im(T)) = m$
Possiamo utilizzare ancora la decomposizione polare, $T = S \circ O^*$ e così $J_mT = |det(S)| > 0$. $O = P \circ Q$ dove P è proiezione ortogonale e Q è ortogonale. Infatti se Q è una qualunque applicazione ortogonale da $\mathbb{R}^n$ in sè, t.c. $Q^*(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) = O(x_1, \ldots, x_m)\ \forall\, x \in \mathbb{R}^m$, osservando che $P^*(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n\ \forall\, x \in \mathbb{R}^m$ si ha $O = Q^* \circ P^*$ e dunque $O^* = P \circ Q$. Similmente al caso precedente abbiamo che $T^{-1}\{y\}$ è sottospazio di dimensione $n - m$, traslazione di $T^{-1}\{0\}$. Dal teorema di Fubini la funzione $y \mapsto \mathscr{H}_{n-m}(A \cap T^{-1}\{y\})$ è $\mathscr{L}^m$-misurabile e sfruttando il caso 2

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^n(A) = \mathscr{L}^n(Q(A)) \;&=\; \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(Q(A) \cap P^{-1}\{y\})\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}\left(Q((A \cap (Q^{-1} \circ P^{-1}\{y\}))\right)\, dy \;=\; \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(A \cap (Q^{-1} \circ P^{-1}\{y\})\, dy
\end{aligned}$$

Effettuando il cambio di coordinate, $z = Sy$ avremo $y = S^{-1}z$ e quindi $dy = \frac{dz}{|det(S)|}$ e

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(A \cap (Q^{-1} \circ P^{-1}\{y\})\, dy \;&=\; \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(A \cap (Q^{-1} \circ P^{-1} \circ S^{-1}\{z\})\, dz \\
&= \mathscr{L}^n(A)|det(S)|
\end{aligned}$$

Ma sapendo che $T = S \circ O^* = S \circ P \circ Q$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^n(A)|det(S)| = J_mT\mathscr{L}^n(A) \;&=\; \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(A \cap (Q^{-1} \circ P^{-1} \circ S^{-1}\{z\})\, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(A \cap T^{-1}\{z\})\, dz
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.4.2. *Sia $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $n \geq m$ una funzione lipschtziana e sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme $\mathscr{L}^n$-misurabile, allora*

1. *$A \cap f^{-1}\{y\}$ è $\mathscr{H}_{n-m}$-misurabile per $\mathscr{L}^m$-q.o. y*
2. *la funzione $y \mapsto \mathscr{H}_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})$ è $\mathscr{L}^m$-misurabile*
3. $$\int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\, dy \leq \frac{(\omega_{n-m})\omega_m}{\omega_n} Lip(f)^m \mathscr{L}^n(A)$$

Dimostrazione. Per ogni $j \geq 1$ consideriamo delle palle chiuse $\left\{B_i^j\right\}_{i\geq 1}$ t.c.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^j \quad diam(B_j^i) \leq \frac{1}{j} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(B_j^i) \leq \mathscr{L}^n(A) + \frac{1}{j}$$

Definiamo

$$g_i^j = \frac{\omega_{n-m}}{2^{n-m}} diam(B_i^j)^{n-m} \chi_{f(B_i^j)}$$

è misurabile perchè gli insiemi B_i^j lo sono e analogamente al lemma 3.3.2 si può dimostrare che $f(A)$ è misurabile, così anche $f(B_i^j)$ lo sono. Inoltre

$$\mathscr{H}_{n-m,\frac{1}{j}}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} g_i^j(y)$$

Utilizzando la definizione di misura di Hausdorff, la diguguaglianza isodiametrica, le proprietà delle funzioni lipschtziane oltre al lemma di Fatou si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\, dy = \int_{\mathbb{R}^m} \lim_{j\to\infty} \mathscr{H}_{n-m,\frac{1}{j}}(A \cap f^{-1}\{y\})\, dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^m} \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} g_i^j\, dy \leq \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_i^j\, dy \\
&= \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_{n-m}}{2^{n-m}} diam(B_i^j)^{n-m} \mathscr{L}^m(f(B_i^j)) \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_{n-m}}{2^{n-m}} diam(B_i^j)^{n-m} \frac{\omega_m}{2^m} diam(f(B_i^j))^m \\
&\leq \frac{\omega_{n-m}\omega_m}{\omega_n} Lip(f)^m \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \omega_n \frac{diam(B_i^j)^{n-m} diam(B_i^j)^m}{2^n} \\
&\leq \frac{\omega_{n-m}\omega_m}{\omega_n} Lip(f)^m \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \omega_n \frac{diam(B_i^j)^n}{2^n} \\
&\leq \frac{\omega_{n-m}\omega_m}{\omega_n} Lip(f)^m \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(B_i^j) \\
&\leq \frac{\omega_{n-m}\omega_m}{\omega_n} Lip(f)^m \liminf_{j\to\infty} \left(\mathscr{L}^n(A) + \frac{1}{j}\right) \\
&= \frac{\omega_{n-m}\omega_m}{\omega_n} Lip(f)^m \mathscr{L}^n(A)
\end{aligned}$$

Ciò prova 3., se si dimostra 2.. La dimostrazione di 2. si fa per casi.

Caso 1: A compatto. Fissiamo $t \geq 0$ e per ogni intero i sia U_i l'insieme di tutti i punti $y \in \mathbb{R}^m$ per cui esiste un numero finito di insiemi $S_1, \dots, S_l$ t.c,

$$A \cap f^{-1}\{y\} \subset \bigcup_{j=1}^{l} S_j, \quad diam(S_j) \leq \frac{1}{i} \quad e \quad \frac{\omega_{n-m}}{2^{n-m}} \sum_{j=1}^{l} diam(S_j)^{n-m} \leq t + \frac{1}{i}$$

allora U_i è aperto. Infatti, se $y \in U_i$, $A \cap f^{-1}\{y\} \subset \bigcup_{j=1}^{l} S_j$. Poichè f è continua, essendo lipschtziana e A è compatto, per ogni z in un intorno di y si ha $A \cap f^{-1}\{z\} \subset \bigcup_{j=1}^{l} S_j$.

Si nota inoltre che

$$\{y\,:\,\mathscr{H}_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$$

da cui segue che l'insieme descritto è un boreliano, essendo intersezione numerabile di aperti. Infatti:

($\subset$) se y è t.c. $\mathscr{H}_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t$, allora per definzione di misura di Hausdorff, si ha che $\mathscr{H}_{n-m,\delta}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t \ \forall \, \delta > 0$.

Fissato i, sia $|\delta| < \frac{1}{i}$, allora esistono degli insiemi $\{S_j\}_j$ t.c.

$$A \cap f^{-1}\{y\} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j, \quad diam(S_j) < \frac{1}{i}, \quad \frac{\omega_{n-m}}{2^{n-m}} \sum_{j=1}^{\infty} diam(S_j)^{n-m} \leq t + \frac{1}{i}$$

Possiamo assumere che gli insiemi S_i siano aperti. Poichè $A \cap f^{-1}\{y\}$ è compatto (in quanto chiuso e limitato) e $\{S_j\}$ è un suo ricoprimento, esiste un suo sottoricoprimento finito $\{S_1, \dots, S_l\}$ e quindi $y \in U_i$.

($\supset$) se $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$, dalla definizione data

$$\frac{\omega_{n-m}}{2^{n-m}} \sum_{j=1}^{l} diam(S_j)^{n-m} \leq t + \frac{1}{i} \ \text{ con } \ A \cap f^{-1}\{y\} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j, \quad diam(S_j) < \frac{1}{i}$$

Dunque

$$\mathscr{H}_{n-m,\frac{1}{i}}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t + \frac{1}{i} \quad \forall\, i \quad \Rightarrow \quad \mathscr{H}_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t$$

Segue quindi che la funzione $y \mapsto \mathscr{H}_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})$ è Borel misurabile.

Caso 2: A aperto. Esistono dei compatti $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset A$ t.c. $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. Dunque $\forall\, y \in \mathbb{R}^m$

$$\mathscr{H}_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) = \lim_{i\to\infty} \mathscr{H}_{n-m}(K_i \cap f^{-1}\{y\})$$

Dal caso precedente, $y \mapsto \mathscr{H}_{n-m}(K_i \cap f^{-1}\{y\})$ è misurabile e quindi anche $\mathscr{H}_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})$ lo è essendo limite puntuale di funzioni misurabili.

Caso 3: $\mathscr{L}^n(A) < \infty$. Per la regolarità della misura di Lebesgue, esistono degli aperti $V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset A$ t.c. $\mathscr{L}^n(V_i) < \infty$ e $\mathscr{L}^n(V_i \setminus A) < \frac{1}{i}$ per cui

$$\lim_{i\to\infty} \mathscr{L}^n(V_i \setminus A) = 0$$

Per subadditività si ha

$$\mathscr{H}_{n-m}(V_i \cap f^{-1}\{y\}) \leq \mathscr{H}_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) + \mathscr{H}_{n-m}((V_i \setminus A) \cap f^{-1}\{y\})$$

per cui

$$\begin{aligned}
&\limsup_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} |\mathscr{H}_{n-m}(V_i \cap f^{-1}\{y\}) - \mathscr{H}_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})| \, dy \\
&\leq \limsup_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}((V_i \setminus A) \cap f^{-1}\{y\}) \, dy \\
&\leq \limsup_{i\to\infty} \frac{\omega_{n-m}\omega_m}{\omega_n} (Lip(f))^m \mathscr{L}^n(V_i \setminus A) = 0
\end{aligned}$$

Da ciò

$$\mathscr{H}_{n-m}(V_i \cap f^{-1}\{y\}) \mapsto \mathscr{H}_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \quad per\ \mathscr{L}^m - q.o.\ y$$

Dal caso precedente, essendo V_i aperti, $y \mapsto \mathscr{H}_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})$ è $\mathscr{L}^m$-misurabile. Inoltre, $\mathscr{H}_{n-m}((V_i \setminus A) \cap f^{-1}\{y\}) \mapsto 0$ $\mathscr{L}^m$-q.o. e allora $A \cap f^{-1}\{y\}$ è misurabile per $\mathscr{L}^m$-q.o. y.
Caso 4: $\mathscr{L}^n(A) = \infty$. Segue dal caso finito, scrivendo A come unione di insiemi crescenti, limitati e $\mathscr{L}^n$-misurabili. □

Lemma 3.4.3. *Siano $h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ una funzione lipschtziana, $t > 1$ e*

$$B = \{x \,:\, Dh(x)\, esiste,\ Jh(x) > 0\}$$

allora esiste una famiglia numerabile $\{D_k\}_{k\geq 1}$ di insiemi boreliani t.c.

1. $\mathscr{L}^n\left(B \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k\right) = 0$
2. $h|_{D_k}$ *è iniettiva*
3. *per ogni $k = 1, 2, \ldots$, esiste un automorfismo simmetrico $S_k : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ t.c.*

$$Lip({S_k}^{-1} \circ (h|_{D_k})) \leq t, \quad Lip((h|_{D_k})^{-1} \circ S_k) \leq t$$

$$t^{-n}|det(S_k)| \leq Jh|_{D_k} \leq t^n|det(S_k)|$$

Dimostrazione. Applicando il lemma 3.3.3 con h al posto di f si trovano dei boreliani $\{E_k\}_{k\geq 1}$ e degli automorfismi simmetrici $T_k : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ t.c.

a) $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$

b) $h|_{E_k}$ è iniettiva

c)

$$Lip((h|_{E_k}) \circ T_k^{-1}) \leq t, \quad Lip(T_k \circ (h|_{E_k})^{-1}) \leq t$$

$$t^{-n}|det(T_k)| \leq Jf|_{E_k} \leq t^n|det(T_k)|$$

per c) avremo che $(h|_{E_k})^{-1}$ è lipschtziana e ad essa si può applicare il teorema 3.2.1 per estenderla a una funzione lipschtziana $h_k : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ t.c. $h_k = (h|_{E_k})^{-1}$ in $h(E_k)$.
Essendo $h_k \circ h(x) = x$ per $x \in E_k$, per il corollario al teorema di Rademacher si ottiene

$$Dh_k(h(x)) \circ Dh(x) = I \quad \mathscr{L}^n - q.o.\, in\, E_k$$

e dunque

$$Jh_k(h(x))Jh(x) = 1 \quad \mathscr{L}^n - q.o.\, in\, E_k$$

Dunque, per c) e per quanto detto sopra, $Jh_k(h(x)) > 0$ $\mathscr{L}^n$-q.o. in E_k. Da ciò si conclude che $Jh_k > 0$ $\mathscr{L}^n$-q.o. in $h(E_k)$ perchè h è lipschtziana.
Appplicando nuovamente il lemma 3.3.3 a h_k, troviamo dei boreliani $\left\{F_j^k\right\}_{j\geq 1}$ e degli automorfismi simmetrici $R_j^k : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ t.c.

d) $\mathscr{L}^n\left(h(E_k) \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j^k\right) = 0$

e) $h_k|_{F_j^k}$ è iniettiva

f)
$$Lip((h_k|_{F_j^k}) \circ (R_j^k)^{-1}) \leq t, \quad Lip(R_j^k \circ (h_k|_{F_j^k})^{-1}) \leq t$$
$$t^{-n}|det(R_j^k)| \leq Jh_k|_{F_j^k} \leq t^n|det(R_j^k)|$$

Definiamo $D_j^k = E_k \cap h^{-1}(F_j^k)$, $S_j^k = (R_j^k)^{-1}$ allora $\mathscr{L}^n\left(B \setminus \bigcup_{k,j=1}^{\infty} D_j^k\right) = 0$. Infatti notando che $h_k\left(h(E_k) \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j^k\right) = h^{-1}\left(h(E_k) \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j^k\right) = E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j^k$, dalla d) segue che $\mathscr{L}^n\left(E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j^k\right) = 0$ e dunque, per a), $\mathscr{L}^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \setminus \bigcup_{k,j=1}^{\infty} D_j^k\right) = \mathscr{L}^n\left(B \setminus \bigcup_{k,j=1}^{\infty} D_j^k\right) = 0$.
Per il punto b) si ha che $h|_{D_j^k}$ è iniettiva.
Infine si ha che per $k, j \geq 1$

$$Lip((S_j^k)^{-1} \circ (h|_{D_j^k})) \leq t, \quad Lip((h|_{D_j^k})^{-1} \circ S_j^k) \leq t$$

$$t^{-n}|det(S_j^k)| \leq Jh|_{D_j^k} \leq t^n|det(S_j^k)|$$

Infatti $Lip((S_j^k)^{-1} \circ (h|_{D_j^k})) = Lip(R_j^k \circ (h|_{D_j^k})) \leq Lip(R_j^k \circ (h_k|_{F_j^k})^{-1}) \leq^{perf)} t$ e parimente $Lip(h|_{D_j^k}^{-1} \circ (S_j^k)) = Lip((h|_{D_j^k})^{-1} \circ (R_j^k)^{-1}) \leq Lip((h_k|_{F_j^k}) \circ (R_j^k)^{-1}) \leq^{perf)} t$ Per quanto già si era notato

$$Jh_k(h(x))Jh(x) = 1 \quad \mathscr{L}^n - q.o.\, in\, D_j^k$$

Per f)

$$t^{-n}|det(S_j^k)| = t^{-n}|det(R_j^k)|^{-1} \leq Jh|_{D_j^k} \leq t^n|det(R_j^k)|^{-1} = t^n|det(S_j^k)|$$

□

Teorema 3.4.1 (Formula di coarea). *Sia $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $n \geq m$, una funzione lipschtziana, allora*

$$\int_A Jf\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\,dy \quad \forall\, A \subset \mathbb{R}^n, \mathscr{L}^n - misurabile$$

Osservazione 3.4.1. *Il lemma 3.4.1 fornisce la dimostrazione del teorema nel caso di $f = T$ lineare.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione assumiamo che $Df(x)$ e quindi poi anche $Jf(x)$, esistano $\forall\, x \in A$ e che $\mathscr{L}^n(A) < \infty$.
Caso 1: $A \subset \{Jf > 0\}$. Posto

$$\Lambda(m,n) = \{\lambda : \{1,\dots,n\} \mapsto \{1,\dots,m\} \,|\, \lambda \text{ è } crescente\} \quad n \leq m$$

e per ogni $\lambda \in \Lambda(m,n)$

$$P_\lambda : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n \quad P_\lambda(x_1,\dots,x_m) = (x_{\lambda(1)},\dots,x_{\lambda(n)})$$

Per ogni $\lambda \in \Lambda(n, n-m)$ decomponiamo $f = q \circ h_\lambda$ ove

$$h_\lambda(x) = (f(x), P_\lambda(x)) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

e

$$q(y,z) = y \quad y \in \mathbb{R}^m\; z \in \mathbb{R}^{n-m}$$

Sia ora

$$A_\lambda = \{x \in A : det(Dh_\lambda) \neq 0\} = \{x \in A : P_\lambda|_{(Df(x))^{-1}(0)} \text{ è } iniettiva\}$$

Ma allora $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda(n,n-m)} A_\lambda$ (la $\supset$ è ovvia dalla definizione di A_λ, l'altra inclusione segue dal fatto che se $x \in A$ allora $Jf(x) > 0$ e quindi esiste un λ t.c. $det(Dh_\lambda) \neq 0$)) e possiamo assumere, senza perdita di generalità che $A = A_\lambda$ per qualche λ.
Fissiamo, ora , $t > 1$ e applichiamo il lemma 3.4.3 con $h = h_\lambda$ ottendendo dei boreliani (che supponiamo disgiunti) $\{D_k\}_{k\geq 1}$ e degli automorfismi simmetici $\{S_k\}_{k\geq 1}$ t.c.

1. $\mathscr{L}^n\left(B \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k\right) = 0$
2. $h|_{D_k}$ è iniettiva
3. $$Lip({S_k}^{-1} \circ (h|_{D_k})) \leq t, \quad Lip((h|_{D_k})^{-1} \circ S_k) \leq t$$
$$t^{-n}|det(S_k)| \leq Jh|_{D_k} \leq t^n|det(S_k)|$$

Sia $G_k = A \cap D_k$, allora

$$t^{-n}J_m(q \circ S_k) \leq Jf|_{G_k} \leq t^n J_m(q \circ S_k)$$

Infatti, $f = q \circ h$ e da ciò $Df = q \circ Dh = q \circ S_k \circ S_k^{-1} \circ Dh = q \circ S_k \circ D(S_k^{-1} \circ h) = q \circ S_k \circ C$ $\mathscr{L}^n$-q.o., ove $C = D(S_k^{-1} \circ h)$. Per il lemma 3.4.3 segue

$$Lip(C) = Lip(S_k^{-1} \circ h) \leq t \quad e \quad Lip(h \circ S_k) \leq t \;\Rightarrow\; Lip(C) \geq t^{-1}$$

Da cui

$$t^{-1} \leq Lip(C) \leq t \quad in\ G_k \tag{3.6}$$

Utilizziamo ora la decomposizione polare per Df e $q \circ S_k$

$$Df = S \circ O^* \quad e \quad q \circ S_k = T \circ P^*$$

con S, T simmetrici e O, P ortogonali.

Si ottiene che $S \circ O^* = T \circ P^* \circ C$ e quindi $S = T \circ P^* \circ C \circ O$. Poichè $G_k \subset A \subset \{Jf > 0\}$, $det(S) \neq 0$ e quindi $det(T) \neq 0$

Sia $v \in \mathbb{R}^m$, allora usando la (3.6) $|T^{-1} \circ Sv| = |P^* \circ C \circ Ov| \leq |C \circ Ov| \leq t|Ov| = t|v|$ da cui $(T^{-1} \circ S)(B(0,1)) \subset B(0,t)$. Da quest'ultima inclusione si deduce che $Jf = |det(S)| \leq t^n |det(T)| = t^n J_m(q \circ S_k)$.

Similmente, essendo $S = S^{-1} = O^* \circ C^{-1} \circ P \circ T^{-1}$, $|S^{-1} \circ Tv| = |O^* \circ C^{-1} \circ Pv| \leq |C^{-1} \circ Pv| \leq t|Pv| = t|v|$ da cui $J_m(q \circ S_k) = |det(T)| \leq t^n |det(S)| = t^n Jf$.
Calcoliamo ora

$$\begin{aligned}
& t^{-3n+m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\})\, dy \\
&= t^{-3n+m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(G_k \cap (h^{-1} \circ q^{-1})\{y\})\, dy \\
&= t^{-3n+m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(h^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\}))\, dy \\
&\leq t^{-3n+m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(tS_k^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\}))\, dy \\
&\leq t^{-3n+m} t^{n-m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(S_k^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\}))\, dy \\
&\leq t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(S_k^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\}))\, dy \\
&= t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}((S_k^{-1} \circ h)(G_k) \cap (q \circ S_k)^{-1}\{y\}))\, dy \\
&= t^{-2n} J_m(q \circ S_k) \mathscr{L}^n(S_k^{-1} \circ h(G_k)) \leq t^{-2n} J_m(q \circ S_k) t^n \mathscr{L}^n(G_k) \\
&\leq t^{-n} J_m(q \circ S_k) \mathscr{L}^n(G_k) \leq Jf \mathscr{L}^n(G_k) \leq \int_{G_k} Jf(x)\, dx \\
&\leq t^n J_m(q \circ S_k) \mathscr{L}^n(G_k) \leq t^{2n} J_m(q \circ S_k) \mathscr{L}^n(S_k^{-1} \circ h(G_k)) \\
&= t^{2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}((S_k^{-1} \circ h)(G_k) \cap (q \circ S_k)^{-1}\{y\}))\, dy \\
&\leq t^{2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(S_k^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\}))\, dy \\
&\leq^{t\ 2n} t^{n-m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(h^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\}))\, dy \\
&= t^{3n-m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(h^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\}))\, dy \\
&\leq t^{3n-m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\})\, dy
\end{aligned}$$

e, sommando su k si ottiene

$$
\begin{aligned}
t^{-3n+m} \sum_k \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\})\, dy &\leq \sum_k \int_{G_k} Jf\, dx \\
&\leq t^{3n-m} \sum_k \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\})\, dy
\end{aligned}
$$

ricordando che $\mathscr{L}^n \left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \right) = 0$, per il teorema di integrazione per serie di Beppo-Levi si può scambiare la somma con l'integrale ottenendo

$$
t^{-3n+m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\, dy \leq \int_A Jf(x)\, dx \leq t^{3n-m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\, dy
$$

e quindi, con $t \to 1^+$ si ha l'uguaglianza voluta.
Caso 2: $A \subset \{Jf = 0\}$. Fissiamo $0 < \epsilon \leq 1$ e consideriamo due funzioni $g(x, y) = f(x) + \epsilon y$ e $p(x, y) = y$ con $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, allora

$$
Dg = (Df, \epsilon\, I)
$$

con un ragionamento già visto in precedenza, per la formula di Binet-Cauchy, si ottiene

$$
\epsilon^m \leq Jg = J_n(Dg) = J_n(Dg^*) \leq C\epsilon
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\, dy &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y - \epsilon w\})\, dy \\
&= \frac{1}{\omega_m} \int_{B(0,1)} \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y - \epsilon w\})\, dy\, dw
\end{aligned}
$$

Se $y \in \mathbb{R}^m$ e $w \in \mathbb{R}^m$ e $B = A \times B(0,1)$, allora

$$
B \cap g^{-1}\{y\} \cap p^1\{w\} = (A \cap f^{-1}\{y - \epsilon w\}) \times \{w\}
$$

se $w \in B(0,1)$, vuoto in caso contrario. Infatti $(x, z) \in B \cap g^{-1}\{y\} \cap p^{-1}\{w\}$ se e solo se $x \in A$, $z \in B(0,1)$, $f(x) + \epsilon z = y$ e $z = w$ e cioè se e solo se $x \in A$, $z = w \in B(0,1)$ e $f(x) = y - \epsilon w$ se e solo se $w \in B(0,1)$, $(x, z) \in (A \cap f^{-1}\{y - \epsilon w\}) x\{w\}$.
Per quanto visto abbiamo

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\, dy &= \frac{1}{\omega_m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(B \cap g^{-1}\{y\} \cap p^{-1}\{w\})\, dw\, dy \\
&\leq^{lemma 3.4.2} \frac{\omega_{n-m}}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(B \cap g^{-1}\{y\})\, dy \\
&=^{caso 1} \frac{\omega_{n-m}}{\omega_n} \int_B Jg\, dx\, dz \leq \frac{\omega_{n-m}\omega_m}{\omega_n} \mathscr{L}^n(A) \sup_B Jg \leq C \mathscr{L}^n(A)\epsilon
\end{aligned}
$$

Per $\epsilon \to 0$ otteniamo

$$
\int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\, dy = 0 = \int_A Jf(x)\, dx
$$

.
Il caso generale si riconduce ai casi precedenti, scrivendo $A = A_1 \cup A_2$ con $A_1 \subset \{Jf > 0\}$ e $A_2 \subset \{Jf = 0\}$ $\square$

Osservazione 3.4.2. *Nel caso*

$$f \, : \, \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m \quad f(x,z) = z$$

sia proiezione ortogonale e $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$*, dalla formula di coarea si ottiene la seguente formulazione del teorema di Fubini (per funzioni caratteristiche)*

$$\mathscr{L}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{L}^{n-m}(A_y)\, dy$$

Infatti $Jf(x) = det(I_{m\times m}) = 1$ *e* $A \cap f^{-1}\{y\} = A_y$.

Corollario 3.4.1 (Integrazione su insiemi di livello)**.** *Sia* $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$*,* $n \geq m$ *una funzione lipschtziana. Se* $g \in L^1(\mathscr{L}^n)$*, allora* $g|_{f^{-1}\{y\}} \in L^1(\mathscr{H}_{n-m})$ *per* $\mathscr{L}^m$ *q.o.* y *e*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{f^{-1}\{y\}} g \, d\mathscr{H}_{n-m} \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) Jf(x)\, dx$$

Dimostrazione. Se $g = \chi_A$, con A misurabile, si ottiene la formula di coarea. Dunque la tesi risulta valida per funzioni caratteristiche e, per linearità dell'integrale, per funzioni semplici che sono combinazione lineare di funzioni caratteristiche.
Sia ora $g \geq 0$, una funzione $\mathscr{L}^n$-misurabile. Ricordando che si può approssimare con una successione crescente di funzioni semplici, per il teorema 1.4.1, sia $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ t.c. $\phi_n \uparrow g$. Per il teorema di Beppo-Levi si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} gJf\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_n Jf\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{f-1\{y\}} \phi_n \, d\mathscr{H}_{n-m} \right) dy =$$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{f^{-1}\{y\}} \lim_{n\to\infty} \phi_n \, d\mathscr{H}_{n-m} \right) dy = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{f^{-1}\{y\}} g \, d\mathscr{H}_{n-m} \right) dy$$

Infine, se $g \in L^1(\mathscr{L}^n)$ si può scrivere $g = g^+ - g^-$ e per ciascuna di esse vale la tesi. $\square$

Capitolo 4

Applicazioni

In questo capitolo vedremo alcuni esempi di applicazione della teoria svolta.
Si può subito osservare che se $n = 1$ nella formula dell'area si ottiene l'usuale lunghezza di una curva.

Esempio 4.0.1 (lunghezza di una curva)**.** *Sia* $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^m$ *una funzione lipschtziana e iniettiva, allora* $D\gamma = \dot{\gamma}(t)$ *e dunque* $J\gamma = |\dot{\gamma}(t)|$*. Applicando a* $C = \gamma([a, b])$ *la formula dell'area, si ottiene* *(*$n = 1$*)*

$$\mathscr{H}_1(C) = \mathscr{H}_1(\gamma([a, b])) = \int_{[a,b]} |\dot{\gamma}(t)|\, dt = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\, dt$$

Ricordiamo ora la seguente definizione

Definizione 4.0.1. Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ un insieme, si dice *(sotto) varietà k-dimensionale,* $1 \leq k \leq n - 1$, C^1 se per ogni $x \in M$ esiste un intorno aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ di x, un aperto $U \subset \mathbb{R}^k$ e una funzione $\phi : U \mapsto \mathbb{R}^n$ di classe C^1 t.c.:

i) ϕ è iniettiva e $\phi(U) = M \cap A$

ii) ϕ è differenziabile in U e $D_x\phi$ è iniettiva $\forall\, x \in U$

iii) $\phi^{-1} : M \cap A \mapsto U$ è continua

ϕ è detta carta locale o parametrizzazione locale di M.

Esempio 4.0.2 (Iper-superficie cartesiana)**.** *Sia* $U \subset \mathbb{R}^n$ *un aperto e* $\phi : U \mapsto \mathbb{R}$ *di classe* C^1 *e consideriamo* $M = \{(x, \phi(x)),\ x \in U\}$*, allora* M *è varietà n-dimensionale* C^1*.*
Infatti sia $f : U \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$*,* $f(x) = (x, \phi(x))$ *è iniettiva e* C^1 *e*

$$Df = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

è iniettiva, avendo rango massimo. Dunque f *verifica le proprietà richieste e* M *è varietà di cui* f *è carta globale.*
Usando la formula di Binet-Cauchy

$$Jf = \sqrt{somma\, dei\, minori\, n \times n} = \sqrt{1 + |\nabla \phi|^2}$$

Supponendo che ϕ sia anche lipschtziana,applicando la formula dell'area otteniamo una formula d'integrazione per il calcolo del'area di tale iper-superificie, ovvero

$$\mathscr{H}_n(M) = \mathscr{H}_n(f(U)) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla\phi|^2}\, dx$$

Esempio 4.0.3 (Iper-superficie parametrica)**.** *Sia M una varietà n-dimensionale in $\mathbb{R}^{n+1}$ ovvero una ipersuperficie con un'unica carta globale $\phi : U \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$ ove $U \subset \mathbb{R}^n$ è aperto. Supponendo che ϕ sia lipschtziana globalmente avremo che*

$$D\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial\phi_{n+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\phi_{n+1}}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

da cui, per la formula di Binet-Cauchy

$$J\phi = \sqrt{somma\, dei\, quadrati\, dei\, minori\, n \times n} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{\partial(\phi_1, \ldots, \phi_{k-1}, \phi_{k+1}, \ldots, \phi_{n+1})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right)^2}$$

e dunque applicando la formula dell'area,

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_n(M) = \mathscr{H}_n(\phi(U)) &= \int_U \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial(\phi_1, \ldots, \phi_{k-1}, \phi_{k+1}, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right)^2}\, dx \\ &= \int_U \left| \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial\phi}{\partial x_n} \right| dx \end{aligned}$$

Osservazione 4.0.1. *Sia $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ lipschtziana e iniettiva ($n = 2$), $(u, v) \mapsto (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$, posto*

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

aplicando la formula ricavata nell'esempio precedente si ha

$$\mathscr{H}_2(f(U)) = \int_U \left| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial u} \right| dudv$$

ovvero la nota formula d'integrazione per il calcolo di una superficie in $\mathbb{R}^3$.

Esempio 4.0.4 (Varietà k-dimensionale)**.** *Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ una varietà k-dimensionale e supponiamo che $f : U \subset \mathbb{R}^k \mapsto M$ sia una sua carta, (globalmente) lipschtziana. Sia poi $A \subset f(U)$ un boreliano e $B = f^{-1}(A)$, poniamo*

$$g_{i,j} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (1 \leq i, j \leq k) \quad g = det((g_{i,j}))$$

allora

$$Jf = \sqrt{g}$$

e applicando la formula dell'area ad A si ottiene

$$\mathscr{H}_k(A) = \int_B Jf\, dx = \int_B \sqrt{g}\, dx$$

Proposizione 4.0.1 (Integrazione su insiemi di livello). *Sia $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ una funzione lipschtziana, cosideriamo $L_t = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = t\}$, l'insieme di livello, allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{H}_{n-1}(L_t)\, dt$$

Dimostrazione. $Jf = |\nabla f|$ e dunque applicando la formula di coarea con $m = 1$ si ottine

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} Jf\, dx = \int_{\mathbb{R}} \mathscr{H}_{n-1}(f^{-1}\{t\})\, dt$$

□

Proposizione 4.0.2 (coordinate polari). *Sia $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ una funzione, $g \in L^1(\mathscr{L}^n)$, allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx = \int_0^{\infty} \left(\int_{\partial B(0,r)} g(x)\, d\mathscr{H}_{n-1}(x) \right) dr$$

Dimostrazione. Sia $f(x) = |x|$, allora $Df(x) = \frac{x}{|x|}$, da cui

$$Jf(x) = 1$$

e applicando il corollario 3.4.1, con $m = 1$ si ottiene la tesi. □

Osservazione 4.0.2 (coordinate sferiche). *Applicando la proposizione precedente al caso in cui $g(x) = f(|x|)$, ovvero in presenza di simmetria sferica, si ottiene la seguente formula d'integrazione*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx = \int_0^{\infty} \int_{\partial B(0,r)} f(|x|)\, d\mathscr{H}_{n-1}(x)\, dr = \int_0^{\infty} f(r) \mathscr{H}_{n-1}(\partial B(0,r))\, dr$$
$$= \mathscr{H}_{n-1}(\partial B(0,1)) \int_0^{\infty} r^{n-1} f(r)\, dr$$

ove $\partial B(0,1) = \mathbb{S}^{n-1}$ è la sfera unitaria

Esempio 4.0.5. *Vogliamo, ora, calcolare la misura superficiale di $\mathbb{S}^{n-1}$, applicando la formula d'integrazione ricavata nell'osservazione 4.0.2. Se scegliamo $g(x) = \chi_{B(0,1)}$ otteniamo*

$$\omega_n = \mathscr{L}^n(B(0,1)) = \int_{B(0,1)} dx = \mathscr{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^1 r^{n-1}\, dr = \frac{\mathscr{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}{n}$$

Inoltre,

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\, dx = \mathscr{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-r^2}\, dr$$
$$=^{[r^2=s]} \mathscr{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^{\infty} s^{\frac{n}{2}-1} e^{-s} \frac{ds}{2}$$

Sapendo che $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-s} s^{x-1}\, ds$

$$= \mathscr{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2}$$

da cui

$$\mathscr{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} = n\omega_n = n\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

Sfruttando l'invarianza per omotetie della misura di Hausdorff si può avere una formula più generale, ossia

$$\mathscr{H}_{n-1}(\partial B(0,r)) = \frac{r^{n-1} n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

Ringraziamenti

All'interno di questo esiguo foglio non è possibile ringrazire tutte le persone che mi hanno accompagnato fin qui. Mi scuso, fin da subito, se dimenticherò qualcuno.

Ringrazio anzitutto il mio relatore, il prof. Andrea Marson, per la sua gentilezza, precisione e disponibilità nel guidarmi nella stesura di questa tesi.

Ringrazio le due persone senza le quali non sarei qui: mamma e papà. Ringrazio il mio papà Fabrizio che, da lassù, mi ha guidato e protetto da sempre e continua ancora a farlo. Ringrazio la mia mamma Erika che ha saputo crescermi, sorreggermi, supportarmi e sopportarmi ogni giorno, trasmettendomi sani ideali di cui posso andare fiero.

Ringrazio i miei quattro nonni: Ornella, Gabriela, Leo, Camillo; per i quali un unico grazie non sarebbe sufficiente. Sono stati e lo sono tuttora, i miei quattro fari nei momenti di gioia e, soprattuto, nei momenti bui del cammino fin qui. Questa occasione è per loro certamente motivo di gioia e, in particolar modo lo sarebbe per le mie care nonne; benchè non siano presenti fisicamente, il loro orgoglio non tarda ad arrivare fin quaggiù.

Voglio poi ringraziare la mia ragazza Denise, per il sostegno datomi, le parole di incoraggiamento, i suoi ragionati consigli e per tutto quello che ha fatto e fa ogni giorno per me.

Ringrazio i miei zii perchè hanno sempre mostrato verso di me affetto gratuito, aiutandomi a crescere e ad arrivare ad importanti traguardi. In particolare, ringrazio zia Doriana con zio Giovanni e gli zii Elodia e Tristano che, seppure da lontano, non si sono mai dimenticati di me.

Infine, ma non da ultimo, ringrazio tutti gli amici che ci sono stati, ci sono e ci saranno; in modo particolare mia cugina Irene, mio cugino Alessandro, Pietro, Manuel, Paolo, Andrea e Alessia.

Ringrazio poi tutti coloro che qui ho dimenticato e che ci sono stati, anche solo per un momento.

Bibliografia

[1] Ambrosio Luigi, Fusco Nicola, Pallara Diego, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford science publications.

[2] Ambrosio Luigi, *Corso introduttivo alla Teoria Geometrica della Misura e alla Superficie Minime*, Scuola Normale Superiore, 1997.

[3] Evans Lawrence C. , Gariepy Ronald F., *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press.

[4] Federer H., *Geometric Measure Theory*, Springer.

[5] Folland Gerald B., *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.*