



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

**Dipartimento di Psicologia dello sviluppo e della Socializzazione
Corso di laurea in Scienze e Tecniche Psicologiche
Elaborato finale**

**Capacità non simboliche di numerazione approssimata e di addizione in bambini
18-36 mesi: uno studio pilota**

Relatrice

Prof.ssa Daniela Lucangeli

Correlatrice

Dott.ssa Annamaria Porru

***Laureanda: Masiero Daniela Paola
Matricola: 1221583***

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Capitolo 1: <i>Number sense</i> e sistemi preverbali	1
1.1 Number Sense e sistemi preverbali	1
1.2 Giudizio di numerosità	6
1.3 Giudizio di numerosità e stimoli visivi	9
Capitolo 2: ANS e caratteristiche visive: teorie a confronto	15
2.1 Teorie a confronto	15
2.2 Studi recenti a confronto	18
Capitolo 3: La ricerca	25
3.1 Ipotesi di ricerca	25
3.2 Partecipanti e procedura sperimentale	27
3.3 Risultati	37
Capitolo 4: Discussione e conclusioni	45
Ringraziamenti	50
Bibliografia	51

"La matematica sembra dotare una persona di qualcosa come un nuovo senso"

Charles Darwin (1809 - 1882)

Capitolo 1: *Number sense* e sistemi preverbali

1.1 Number Sense e sistemi preverbali

L'essere umano condivide fin dalla nascita, in modo universale, con il regno animale la capacità innata di cogliere e discriminare la numerosità in assenza d'insegnamento formale e di conoscenza numerica simbolica (Gallistel, 1990; Feigenson, Dehaene e Spelke, 2004; Nieder & Dehaene, 2009; Dehaene, 2011). Questa capacità è definita in letteratura *Number Sense* (NS) e agisce proprio come una nuova dimensione di percezione sensoriale che rende facilmente intuibile il numero degli oggetti come se si trattasse di altre variabili sensoriali quali colore, forma o posizione nello spazio (Dehaene, 2011).

È stata ipotizzata l'esistenza di un modulo numerico pre-verbale, presente fin dalla nascita, che sarebbe alla base delle competenze numeriche dell'individuo (Butterworth 1999).

Gli studi più recenti sul cervello umano, utilizzando avanzate tecniche di *neuroimaging*, come la risonanza magnetica funzionale (fMRI), hanno individuato nella parte orizzontale del solco intraparietale (*horizontal part of the intraparietal sulcus*, hIPS), sulla superficie laterale del lobo parietale, il correlato neurale corrispondente al *Number Sense*: un'area che si attiva con qualsiasi tipo di stimolazione numerica (pattern di punti, simbolo numerico, parola-numero scritta o parlata). (Castelli et al., 2006; Piazza et al., 2006; Dehaene, 2011)

Si deve a Tobias Dantzig il primo riferimento al concetto di NS quando si riferisce a esso come ad una facoltà presente fin dalla più tenera età in tutti gli uomini, una facoltà che permette: “di riconoscere che qualcosa all'interno di un piccolo gruppo di oggetti è

cambiato quando, senza averne conoscenza diretta, un oggetto è rimosso o aggiunto al gruppo” (Tobias Dantzig, 1967).

In quegli stessi anni la teoria dominante di Piaget e Szemiska (1968) non ammetteva che bambini prima dei 6-7 anni fossero in grado di cogliere il concetto di numero, strettamente legato allo sviluppo delle abilità tipiche del pensiero operatorio. Ci volle un ventennio perché la prima intuizione di Dantzig trovasse conferma nelle evidenze sperimentali.

Attraverso il paradigma dell’abituazione-disabituazione, basato sull’ipotesi teorica che i bambini reagiscano con tempi di fissazione maggiori a stimoli percepiti come nuovi e dunque diversi, Antell e Keating (1983) dimostrarono che neonati da 1 a 12 giorni di vita erano sensibili alla quantità e in grado di discriminare quando gli stimoli disabituanti proposti contenevano un numero di item inferiori alle quattro unità. In questo caso gli stimoli visivi presentati erano pattern di punti neri su sfondo bianco, studiati proprio per evitare che il giudizio dei bambini sulla numerosità potesse essere influenzato da *cues* visivi. La capacità di discriminare la numerosità degli oggetti fin dalle prime ore di vita è confermata anche da studi successivi (Izard, Sann, Spelke, Streri, 2009).

Questa modalità di percezione intuitiva della numerosità fino ad un massimo di quattro unità è chiamata “*subitizing*” (Atkinson, Campbell e Francis, 1976) e nello studio di Starkey, Spelke e Gelman (1990) è stata confermata anche in bambini di 6-8 mesi: anche in questo caso i ricercatori avevano verificato che l’aumento di attenzione allo stimolo disabituante fosse dovuto al cambiamento nella numerosità e non ad altre caratteristiche percettive dello stimolo.

Evidenze empiriche hanno ampiamente dimostrato che fin dalla nascita i bambini hanno delle “aspettative aritmetiche” sui cambiamenti di numerosità: un esperimento condotto da Karen Wynn (1992) dimostrò che bambini di 5-6 mesi erano in grado di eseguire semplici processi di addizione (1+1) e sottrazione (2-1).

Si è visto per che in assenza di scolarizzazione, come nel caso delle tribù dei Mundurukù in Amazzonia, studiate da Pierre Pica e Peter Gordon (Pica et al. 2004; Gordon, 2004), gli adulti riescono a discriminare tra numerosità che abbiano differenze pari al 30 per cento, rispetto ad una condizione di tipicità per gli adulti in cui la soglia è pari al 15 per cento. In questo caso la performance degli adulti è paragonabile ai valori riscontrati nei bambini in età pre-scolare e questo conferma l'ipotesi che l'educazione abbia un ruolo nel processo di stima di quantità.

La competenza numerica preverbale è dunque innata e precede la competenza linguistico-simbolica: i bambini prima di conoscere le parole-numero e i numeri arabici sono in grado di cogliere la numerosità in termini di quantità continue, approssimate, di tipo analogico, non verbale.

Sistemi pre-verbali

Alla base del processo di percezione e rappresentazione della numerosità ci sono due sistemi, l'*Object Tracking System* (OTS) conosciuto anche come *Object File System* e l'*Approximate Number System* (ANS) definito anche Analog Magnitude System o sistema analogico-approssimato (Feigenson, Dehaene, Spelke, 2004).

Il primo sistema è un sistema esatto che consente il riconoscimento immediato di quantità precise ma limitato a piccole quantità di oggetti: è un meccanismo dominio-generale che agisce con un processo di *subitizing* limitato a un numero massimo di 3-4 oggetti.

Il secondo invece è un sistema veloce ma impreciso che permette di discriminare tra due quantità all'interno di un certo rapporto: si tratta di un meccanismo dominio-specifico che ci dà una rappresentazione approssimata di grandi numerosità, concepita come una distribuzione di attivazione su una linea numerica immaginaria.

I numeri piccoli da 1 a 3 sembra che possano essere rappresentati mentalmente da entrambi i sistemi attraverso processi di *subitizing* e di approssimazione.

L'ANS rappresenta numeri e grandezze in una modalità analogica e approssimata in cui la stima diventa più imprecisa al crescere della numerosità. Il tratto distintivo dell'ANS è considerato l'effetto ratio, secondo cui si ha un numero maggiore di errori e tempi di risposta più lunghi nel confronto di numeri aventi una ratio minore. La capacità di discriminare tra due numerosità viene dunque modulata dalla loro ratio numerica: l'ANS segue la legge di Weber e la performance nei compiti ANS è ratio-dipendente, aumentando in presenza di una maggiore distanza numerica e quindi di un rapporto più piccolo tra le due quantità (Dehaene, 2003; Feigenson et al., 2004).

La capacità di discriminare tra due numerosità, definita "acuità numerica" (*number acuity*), non è altro che il più piccolo cambiamento nella numerosità percepito da un individuo e cresce all'aumentare dell'età e dell'esperienza dai primi giorni di vita fino all'età adulta (Halberda, Feigenson, 2008).

I neonati e i bambini fino a 6 mesi sono in grado di discriminare insiemi di quantità con ratio di 2.0, ovvero aventi un rapporto di 1:2 (8 vs 16), ma falliscono nel distinguere 8 da 12 con ratio 2:3 (Xu e Spelke, 2000). A 10 mesi riescono facilmente con ratio 1.5 (rapporto 2:3) ma falliscono con ratio 1.25 (rapporto 4:5) (Xu e Arriga, 2007), a 6 anni l'acuità dell'ANS è pari a una ratio di 1.16 (rapporto 6:7) per arrivare agli adulti in grado di distinguere set numerici con un rapporto fino a 11:10 (Halberda e Feigenson, 2008; Libertus e Brannon, 2010).

Il dato che l'acuità numerica subisca il cambiamento più significativo verso il terzo anno di vita è stato interpretato in relazione all'apprendimento da parte del bambino, in questa fase di sviluppo, delle parole-numero: in questo senso il miglioramento nel senso numerico agirebbe come una "lente che progressivamente porta i numeri ad una messa a fuoco più nitida" (Dehaene, 2011) rendendo più semplice l'acquisizione in successione delle parole-numero "uno", "due", "tre" la cui posizione sulla linea numerica mentale diventa meno indifferenziata.

Numerosi studi hanno evidenziato il ruolo significativo dell'ANS nell'acquisizione delle competenze numeriche formali e nello sviluppo delle differenze individuali nell'apprendimento matematico e nel successo matematico nel corso di tutta la vita. Al crescere dell'acuità dell'ANS si avrebbe un successivo migliore rendimento nei test standardizzati che misurano le abilità matematiche formali (Butterworth 2010; Halberda et al. 2008; Mazzocco, Feigenson e Halberda 2001b; Starr, Libertus e Brannon, 2013; Libertus, Feigenson e Halberda 2011; Schneider et al, 2017; Wang, Halberda, Feigenson, 2020).

Studi più recenti (Scalise, Purpura, 2021) confermano il legame tra ANS e i successivi risultati nelle abilità matematiche formali ma ritengono che la relazione sia mediata in modo significativo da fattori quali la conoscenza del linguaggio matematico.

1.2 Giudizio di numerosità

Esseri umani e animali condividono anche la capacità di confrontare le numerosità per poter scegliere tra due insiemi quale sia quello più grande.

Nel giudizio di numerosità pre-simbolico possono essere presenti due tipi di effetti: l'”effetto distanza” (*Numeric Distance Effect*, NDE) e l'”effetto Stroop”. Nel primo caso i tempi di reazione e il numero di errori dipendono dalla differenza tra le quantità confrontate, rendendo più semplice il confronto di quantità numericamente distanti piuttosto che di quantità vicine. Nel secondo caso la difficoltà del compito dipende dalla possibile incongruenza tra la dimensione numerica (il numero di puntini) e la dimensione fisica (la grandezza dei puntini o l'area da essi occupata): i tempi di reazione e il numero di errori aumentano quando le due dimensioni sono in contrasto l'una con l'altra.

L'effetto distanza è accompagnato anche dall'”effetto magnitudo” che rende più difficile il confronto tra due quantità laddove la differenza tra gli elementi sia la stessa ma le quantità da confrontare siano maggiori: la distanza tra 8 e 9 non risulta uguale a quella tra 1 e 2 perché nella linea numerica immaginaria i numeri maggiori tendono ad essere compressi in uno spazio più piccolo e le differenze numeriche vengono percepite diversamente. Accuratezza e rapidità di risposta peggiorano quando i numeri diventano più grandi (Dehaene, 2011).

Tecniche di misurazione

La misurazione di questa abilità nei bambini piccoli è resa particolarmente difficile dal fatto che non sia possibile ottenere una risposta verbale esplicita e che siano molto limitati i test appropriati a questa fase evolutiva. Ciò in parte spiega perché, mentre il gruppo d'età dei bambini dai tre anni in poi sia stato ampiamente studiato, anche per le capacità di conteggio verbale (Gallistel, Gelman, 1992), gli studi sulle abilità numeriche dei *toddlers* (bambini tra i 2 e i 3 anni d'età, non ancora in grado di contare) siano meno frequenti.

Per testare questa fascia d'età sono stati usati diverse tipologie di test:

- paradigma di abituação/disabituação
- paradigma di comparazione con scelta forzata a due alternative (*two-alternative forced-choice paradigm*, 2AFC), usato ad esempio nello studio condotto da Brannon e Van de Walle (2001) in cui veniva proposto il confronto tra un numero diverso di oggetti (1 vs 2 e poi con numeri crescenti fino a 6).
- paradigma di rilevazione del cambiamento (*change detection paradigm*) (Libertus e Brannon, 2010).
- paradigma di imitazione: usato per misurare l'indice di *Spontaneous Focusing on Numerosity* (SFON), che corrisponde alla naturale predisposizione a cogliere le proprietà numeriche presenti nell'ambiente. Ai partecipanti viene chiesto di imitare il gesto dello sperimentatore che imbecca un pupazzo, di solito a forma di animale, con dei tokens colorati a forma di cibo. I bambini possono mostrare una spontanea predisposizione a ripetere, per imitazione, il numero esatto di bocconi dati al pupazzo oppure darne una quantità diversa da quella osservata. L'indice SFON è considerato un buon predittore delle competenze matematiche

nelle fasi evolutive successive. Il test con qualche modifica è stato utilizzato recentemente nello studio di Sella, Berteletti, Lucangeli e Zorzi (2016) che ha messo in evidenza come i *toddlers*, prima di acquisire le competenze di conteggio, siano in grado di aggiornare mentalmente attraverso operazioni di addizione la numerosità di set di oggetti non visibili, fino a sei unità, e di riprodurre il comportamento osservato dopo averlo tenuto in memoria.

- paradigma di confronto non simbolico di numerosità senza istruzioni verbali: nel recente studio di Lindskog e Simms (2021) è stato proposto un nuovo approccio per misurare le capacità non simboliche di confronto numerico nei *toddlers* in cui, al posto delle istruzioni verbali da parte degli sperimentatori, viene introdotta una dimostrazione pratica dove i bambini imparano ad associare una ricompensa alla scelta dell'insieme di oggetti più numeroso.

Test di confronto non simbolico di numerosità

Senza dubbio per il confronto di rappresentazioni analogiche di quantità nei bambini di età inferiore ai tre anni il test maggiormente utilizzato è il test di confronto non simbolico di numerosità (*non-symbolic numerical comparison task* o *dot comparison task*), tecnica di misurazione diretta e metodo standard di misurazione dell'acuità dell'ANS valido sia per i bambini sia per gli adulti. (Halberda e Feigenson, 2008)

Il test prevede che ad ogni prova vengano presentati velocemente su un computer touchscreen, nella parte sinistra e destra dello schermo, due insiemi di punti chiedendo ai partecipanti di indicare l'insieme con il numero maggiore di elementi toccando il lato dello schermo corrispondente. La prova si basa sull'assunto che, non potendo contare i

punti, i partecipanti utilizzino i processi di ANS per esprimere il loro giudizio di numerosità. La valutazione dell'acuità dell'ANS avviene attraverso la misurazione delle risposte esatte, dei tempi di reazione e dei fattori interni di scala dati dalla frazione di Weber (punteggi "w"), anche se questa modalità ha evidenziato una minore affidabilità Test-retest (Inglis e Gilmore, 2014).

I risultati sono influenzati anche dalla ratio tra le numerosità e dall'effetto distanza che renderà più semplice il confronto di insiemi di punti con una differenza maggiore (10 vs 30) rispetto ad una minore (9 vs 10).

Lo stimolo dei due insiemi può essere presentato simultaneamente con due stimoli affiancati, in successione o con modalità mista ma alcuni studi hanno evidenziato che le migliori tecniche di misurazione dell'ANS, considerate affidabili e valide, sono proprio quelle dirette come il *dot comparison task* nello specifico con presentazione simultanea degli stimoli (Lindskog et al. 2013).

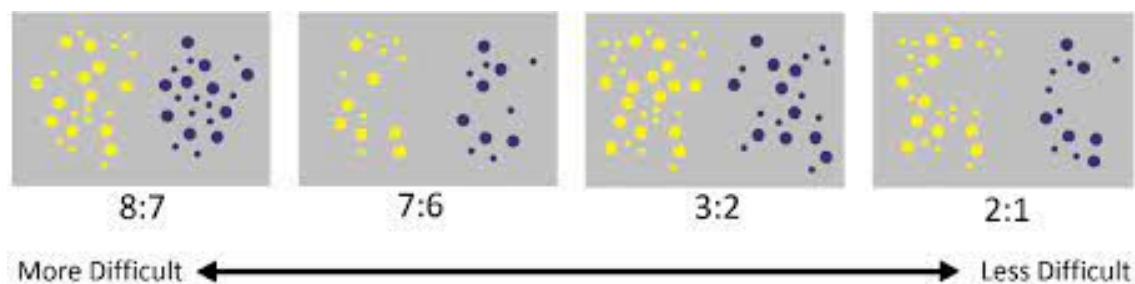


Fig. 1 Esempio di stimoli per la misurazione dell'ANS in un compito di confronto numerico non simbolico con differenti ratio a difficoltà decrescente

1.3 Giudizio di numerosità e stimoli visivi

E' ampiamente dimostrato che la performance di acuità numerica misurata con il *dot comparison task* non può essere spiegata unicamente dal ruolo dell'ANS: si devono tenere in considerazione altri fattori quali la numerosità degli insiemi di punti, la

modalità di presentazione simultanea o sequenziale, il tempo di presentazione e le tecniche di misurazione basate sull'accuratezza o sui tempi di risposta. Nello specifico è stato evidenziato il ruolo determinante delle caratteristiche visive (*visual cues*) associate agli insiemi di punti usati nel test (Clayton, Gilmore e Inglis, 2015; DeWind e Brannon 2016) nell'influenzare il risultato del test a seconda della singola caratteristica che si prenda in esame e del modo in cui questa venga controllata.

Normalmente nella fase di progettazione del test le caratteristiche visive vengono controllate creando delle prove "congruenti" ed "incongruenti", le prime in cui la *visual cue* è correlata positivamente con la numerosità dell'insieme e le seconde in cui la correlazione è negativa.

Le principali *visual cues* prese in esame sono la *surface* (superficie totale dei punti) e la *convex hull* (il più piccolo contorno che delimita l'insieme di punti).

Evidenze sperimentali hanno indicato che è più semplice rispondere in modo esatto nelle prove congruenti e ciò sarebbe dovuto al ruolo dei fattori di inibizione che interverrebbero nelle prove incongruenti per sopprimere una risposta basata sulla salienza delle caratteristiche visive piuttosto che sulla numerosità (Gilmore et al., 2016).

Inoltre la dimensione dell'effetto di facilitazione dovuta alla congruenza dipenderebbe da quali e quante *visual cues* siano state manipolate e dall'età dei partecipanti: in uno studio di Clayton e Gilmore (2015) i risultati mostrano che la performance degli adulti nel *dot comparison task* sarebbe maggiormente influenzata dalla *convex hull*, più difficile da inibire, rispetto alla *surface* mentre i bambini di 7-9 anni sarebbero ugualmente influenzati dalle due caratteristiche visive. Per ottenere negli adulti un'influenza simile anche della *surface* bisognerebbe intervenire nella progettazione del test riducendo i tempi di presentazione dello stimolo.

Quindi è la *convex hull* che risulta essere la caratteristica visiva con maggior influenza sul giudizio di numerosità in tutte le fasce d'età ed è per questo che è importante che venga adeguatamente controllata in fase di creazione degli insiemi di punti nel *dot comparison task*. Tra i principali metodi di costruzione degli insiemi di punti il protocollo Panamath (www.panamath.org), utilizzato in molteplici studi sull'ANS (Halberda e Feigenson, 2008; Mazzocco et al., 2011), controlla solo la *surface* e non la *convex hull* mentre altri protocolli (Gebuis e Reynvoet, 2011) utilizzati in altri studi controllano anche la *convex hull* (Clayton et al, 2015; DeWind e Brannon, 2016).

Il controllo della *convex hull* avviene creando il 50% delle prove in cui alla numerosità maggiore corrispondano anche *surface* e *convex hull* maggiori (prove congruenti) e l'altro 50% delle prove in cui alla numerosità maggiore siano associati *surface* e *convex hull* minori (prove incongruenti).

Come si è detto in precedenza, le performance migliori sono di solito associate alle prove congruenti che non richiedono uno sforzo di inibizione degli stimoli visivi come nel caso delle prove incongruenti.

L'uso di diversi protocolli per la creazione del *dot comparison task* sembra condurre a risultati molto distanti se non addirittura alla spiegazione di costrutti diversi: in uno studio di Clayton, Gilmore e Inglis (2015) viene dimostrato che i risultati ottenuti in un test creato con protocollo Gebuis a Reynvoet (2011) spiegano solo il 7% della varianza ottenuta con il protocollo Panamath senza significative correlazioni.

Questi dati supportano l'ipotesi teorica che le caratteristiche visive dello stimolo, in particolare la *convex hull*, possano determinare in modo significativo il giudizio di numerosità rendendo il *dot comparison task* una tecnica di misurazione non assoluta dell'ANS.

Diverse ipotesi teoriche sono state formulate nel tempo per capire se nel giudizio di numerosità, misurato attraverso il *dot comparison task*, sia prevalente la componente ANS legata alla numerosità o se prevalgano le caratteristiche visive degli stimoli.

La nostra ricerca si inserisce in questo dibattito cercando di capire se in bambini di 18-36 mesi il controllo rispettivo della *convex hull* o della *surface* renda più semplice il compito.

Test di addizione approssimata

Molti studi hanno preso in considerazione il legame tra ANS e performance matematiche formali andando a misurare l'acuità dell'ANS e quindi il grado di precisione nel fare delle stime sulla numerosità ma per una valutazione più completa è opportuno andare a valutare anche la capacità di manipolazione delle quantità numeriche approssimate.

Prove empiriche (Wynn, 1992) ci dicono che fin dalla nascita i bambini possiedono delle “aspettative aritmetiche” e sono in grado di eseguire semplici addizioni e sottrazioni. Inoltre l'essere umano condivide con gli esseri animali la capacità, fin da piccolo, di sommare e sottrarre anche un numero elevato di elementi prima che venga appresa l'abilità del conteggio (Pica et al., 2004; Barth et al., 2005; Barth, Beckmann, Spelke, 2012). Le capacità di approssimazione numerica non simbolica consentono ai bambini e agli adulti di poter sommare o sottrarre coppie di insiemi di punti e di confrontare la somma o la differenza ottenuta con un terzo insieme (Gilmore, McCarthy & Spelke, 2007).

È stato dimostrato che i bambini in età pre-scolare sono in grado di svolgere semplici operazioni aritmetiche approssimate senza che vengano usati simboli numerici e in

assenza di insegnamento matematico e questa capacità sarebbe predittiva dei successivi risultati ottenuti nella matematica formale (Gilmore et al., 2010; Libertus, Feigenson e Halberda, 2011).

Come per il confronto di numerosità anche nel caso della manipolazione di quantità non simboliche, quando si vanno a sommare o sottrarre in modo approssimativo elementi non numerici, si osservano alcune proprietà comuni (Barth et al., 2008): le prestazioni peggiorano quando la ratio delle quantità confrontate diminuisce ed è prossima al valore di 1 (Izard e Dehaene, 2008); le prestazioni di confronto e di addizione riportano livelli simili di accuratezza se le quantità presentate sono corrispondenti (Izard e Dehaene, 2008; Pica et al., 2004); i risultati sono più accurati nel confronto e nella somma di quantità non simboliche rispetto alla sottrazione (Barth et al., 2005).

Per la misurazione delle capacità ANS di manipolazione delle numerosità viene usato il test di addizione approssimata che consiste in una serie di prove in cui un numero identico di punti bianchi si muovono rispettivamente dalla sinistra e dalla destra dello schermo del computer andando a confluire in una scatola quadrata, al centro dello schermo, al cui interno non è possibile vedere il contenuto.

In un'immagine successiva vengono presentate due scatole a fondo grigio contenenti insiemi di punti bianchi corrispondenti alla somma dei punti confluiti all'interno della scatola durante la prima sequenza dinamica. Ai partecipanti viene chiesto di scegliere quale delle due scatole contiene tutti i punti che sono stati visti entrare nella scatola.

Il compito è volto a misurare la capacità di stimare la manipolazione di una quantità, in questo caso l'addizione di due insiemi, in modo approssimato ed intuitivo. La valutazione avviene calcolando il numero delle risposte esatte in ciascuna delle prove e ad ogni risposta corretta è associato un feedback visivo e sonoro positivo (ad esempio

applausi, frasi incoraggianti, coriandoli), al contrario alle risposte errate segue un feedback negativo (ad esempio suono sgradevole).

Capitolo 2: ANS e caratteristiche visive: teorie a confronto

2.1 Teorie a confronto

Gli studi sul confronto di numerosità, svolti attraverso il *dot comparison task*, sono numerosi e l'interpretazione dei risultati ottenuti è cambiata nel corso degli anni alla luce dei diversi modelli teorici proposti dagli studiosi, con una tendenza generale a prendere in esame il ruolo delle caratteristiche visive nel processo di misurazione dell'ANS.

La ricercatrice Feigenson una dei maggiori autori che hanno svolto studi sul *number sense* (Feigenson et al. 2004; Halberda, Feigenson 2008; Mazzocco, Feigenson, Halberda 2011b; Libertus, Feigenson, Halberda 2011; Libertus, Feigenson, Halberda 2013), nell'introdurre il concetto di due “sistemi centrali” alla base della rappresentazione numerica umana e del regno animale, opera indirettamente una distinzione anche rispetto a grandezze continue quali la densità di due insiemi o la loro superficie totale. Come abbiamo visto precedentemente i due sistemi OTS e ANS, il primo per numerosità ridotte inferiori a 4 e il secondo per grandi numerosità superiori a 4, hanno modi di operare molto diversi. Il sistema ANS permette di discriminare tra grandi quantità in modo approssimato attraverso delle stime che si basano sulla ratio tra le due quantità a confronto. Il sistema migliora al crescere dell'età fino a rendere possibile in età adulta la percezione di numerosità molto simili. Secondo Feigenson il sistema ANS si basa esclusivamente sulla ratio tra quantità e non prende in considerazione fattori quali le caratteristiche visive degli stimoli. Lo stesso modello tuttavia ci dice che il sistema OTS, che consente di avere un'esatta e rapida

rappresentazione di numerosità ridotte (*subitizing*), a differenza dell'ANS, non è ratio-dipendente ma risulta essere sensibile alle grandezze continue.

Secondo un'impostazione classica che fa riferimento agli studi di Barth et al. (2006) e di Halberda, Mazocco e Feigenson (2008) le differenze individuali nelle misure di accuratezza nel test non dipenderebbero in alcun modo dalle *visual cues* ma solo da diversità individuali nella capacità di cogliere le differenti numerosità, esplicitate dalle differenze individuali nella misura della frazione di Weber a seconda dell'età. Questo modello esclude come conseguenza logica che si possano osservare degli effetti di congruenza tra numerosità e caratteristiche visive quali *surface* e *convex hull*.

Rispetto al modello classico, un'interpretazione speculare di Gebuis e Reynvoet (2012) sostiene che sia improbabile l'esistenza di un *Approximate Number System* alla base dei giudizi di numerosità e che i risultati nel *dot comparison task* dipenderebbero unicamente dall'integrazione di diverse informazioni provenienti dalle molteplici caratteristiche visive degli insiemi prese in esame. In particolare gli effetti associati alle caratteristiche visive sarebbero diversi a seconda del peso diverso ad esse attribuito.

Questa teoria, che sostiene la salienza delle *visual cues* rispetto al *number sense*, è stata presa in considerazione in studi successivi per esaminare l'effetto di congruenza e il diverso ruolo di *surface* e *convex hull*. Ad esempio nello studio di Gilmore et al. (2016) che evidenzia la maggiore salienza della *convex hull* rispetto alla *surface* nel determinare l'effetto di congruenza tra numerosità e caratteristica visiva. Da questi studi risulta che l'area occupata (*surface*) sarebbe saliente solo per i bambini mentre gli adulti ne sarebbero influenzati unicamente con tempi di visualizzazione degli stimoli molto limitati.

Si deve sempre agli studi di Gilmore (Gilmore et al., 2013; Clayton e Gilmore, 2014) la formulazione di una teoria che restituisce salienza sia alle caratteristiche visive sia al *number sense* descrivendoli come due processi in competizione tra loro nel determinare l'accuratezza delle risposte. Secondo l'autrice ciò che discrimina la salienza di un processo rispetto all'altro è la presenza o meno di capacità di inibizione delle caratteristiche visive. Le risposte al *dot comparison task*, in assenza di inibizione, avverrebbero primariamente sulla base della salienza delle *visual cues* (*surface* e *convex hull*) e la salienza del *number sense* interverrebbe solo nelle risposte in cui i partecipanti sono stati in grado di inibire in modo efficace l'influenza delle caratteristiche visive. Anche la teoria di Gilmore quindi si inserisce nell'insieme di studi che sottolineano l'influenza delle caratteristiche visive quali *surface* e *convex hull* rispetto alla percezione della numerosità.

Anche questo modello teorico, come quello di Gebuis e Reynvoet (2012), risulta valido alla luce dei dati di ricerca che indicano come le capacità di inibizione delle *visual cues* nel processo di risposta si modifichino in base all'età e ai tempi di visualizzazione degli stimoli (Gilmore et al., 2016). Secondo questi studi i bambini risultano avere più difficoltà ad inibire stimoli visivi con incongruenza rispetto alla *convex hull* ma anche rispetto alla *surface*. Quest'ultima invece risulta essere un fattore facilmente sopprimibile per gli adulti e i giovani adulti, purchè abbiano a disposizione dei tempi di visualizzazione adeguati, mentre la *convex hull* si conferma come fattore più difficile da inibire a prescindere dall'età e dai tempi di visualizzazione.

Studi recenti hanno messo in discussione la natura innata del *number sense* e la capacità di percepire la numerosità indipendentemente rispetto ad altri elementi di grandezza continua quali l'area occupata, la dimensione o la densità dello stimolo, a favore della cosiddetta teoria del “senso della grandezza” presentata nella revisione di Leibovich et al. (2017). In questo studio gli autori mettono a confronto le due impostazioni teoriche passando in rassegna tutte le ricerche che sono presenti in letteratura per arrivare alla conclusione che non ci siano sufficienti evidenze scientifiche per supportare ancora la validità della teoria del Number Sense sostenendo al contrario che molti studi dimostrino che le grandezze continue siano primarie e più automatiche rispetto alla numerosità.

2.2 Studi recenti a confronto

2.2.1 Studio di Tomlinson, Brannon e DeWind (2020)

Il recente contributo di Tomlinson, DeWind e Brannon si inserisce nel dibattito teorico sulla salienza del numero *versus* altri fattori non numerici, quali le caratteristiche visive dello stimolo, prendendo come punto di partenza le conclusioni riportate nel lavoro di Leibovich et al. (2017), ovvero l'ipotesi teorica che il numero sia secondario a un “senso della grandezza” generale in grado di influenzare maggiormente le decisioni nel confronto di numerosità in quanto più difficile da inibire.

Gli autori (Tomlinson, Brannon, DeWind) decidono di mettere alla prova queste conclusioni e scelgono di abbandonare l'approccio classico di verifica dell'influenza delle grandezze non numeriche, basato sulla creazione di coppie di stimoli al 50% congruenti e al 50% incongruenti, ritenendolo non idoneo a fornire dati quantitativi

obiettivi nel confronto tra gli effetti prodotti dalle grandezze non numeriche sulla numerosità e viceversa. Il nuovo approccio si propone di svincolare gli effetti della numerosità da quelli delle caratteristiche visive fornendo delle stime indipendenti sull'acutezza e sull'errore numerico. Con il termine "acutezza" gli autori si riferiscono alla misura della precisione, o mancanza di errore, nel giudizio di numerosità e con quello di "errore" (*bias*) alla misura dell'influenza delle dimensioni rilevanti rispetto al compito in oggetto, ad esempio lo scarto sistematico rispetto alla risposta corretta sul numero dovuto alle caratteristiche visive degli stimoli. I soggetti con maggiore acutezza hanno facilità a discernere il più numeroso tra due insiemi anche in presenza di ratio basse. I soggetti che riportano livelli più elevati di errore sono quelli che scelgono l'insieme sbagliato a causa dell'incongruenza tra numerosità e visual *cues*.

Lo studio viene realizzato con soggetti adulti e con bambini di 5 anni che non hanno ancora ricevuto nozioni di matematica formale. Il presupposto teorico è che se i risultati dovessero misurare alti livelli di acutezza e bassi livelli di errore a favore del numero nel confronto tra numerosità e altri fattori non numerici, la spiegazione dovrebbe essere attribuita o all'effetto dell'educazione matematica formale o alla maggiore salienza della numerosità rispetto ad altre dimensioni non numeriche. E la prevalenza del *number sense* rispetto alle altre caratteristiche fisiche dello stimolo risulterebbe quindi più evidente in età pre-scolare, prima che l'apprendimento formale della matematica possa esercitare la sua influenza. Per questo motivo gli autori dello studio scelgono di testare le loro ipotesi teoriche oltre che sugli adulti anche su bambini di 5 anni d'età, suddividendo il campione e chiedendo a metà dei partecipanti di scegliere tra insiemi di punti differenti per numerosità e all'altra metà tra insiemi distinti per superficie totale.

Gli autori vogliono mettere alla prova la teoria del “senso di grandezza” di Leibovich et al. (2017) che postula, come abbiamo visto, la prevalenza dei fattori non numerici e si aspettano che se fosse reale la prevalenza delle caratteristiche non numeriche sulla numerosità i giudizi di numerosità dei partecipanti dovrebbero risultare maggiormente alterati dal fattore “area totale” rispetto alla situazione contraria di influenza del fattore “numero” sui giudizi di stima dell’area totale.

I risultati dello studio mostrano che, in particolare nei bambini, i giudizi sulla stima della superficie sono maggiormente influenzati dal numero rispetto alla situazione contraria e che, sia per i bambini sia per gli adulti, si hanno livelli maggiori di acutezza numerica rispetto alla precisione di risposta per la dimensione non numerica di superficie totale.

Questi dati confutano le ipotesi teoriche di Leibovich et al. (2017) e ci dicono che sia i bambini di 5 anni sia gli adulti discriminano con più facilità la numerosità rispetto alla *surface* totale.

La ricerca di Tomlinson, DeWind e Brannon (2020) risulta quindi di particolare importanza perché restituisce al fattore “numero” la prevalenza rispetto ad altri fattori, sottolineando al tempo stesso che è proprio la numerosità che interferisce con maggiore forza e che i soggetti sperimentali devono cercare di inibire nel processo di risposta. Non da ultimo lo studio pone in evidenza il dato che la numerosità, in quanto elemento prioritario ancor prima che intervenga il processo di apprendimento formale matematico, acquisisce una posizione privilegiata in quanto fattore innato e legato da processi culturali e simbolici.

2.2.2 Studio di Aulet e Lourenco (2021)

Il recente lavoro di ricerca di Aulet, che segue e completa lo studio di Tomlinson, DeWind e Brannon (2020), arriva a conclusioni diverse che rimettono in discussione la salienza del numero *versus* altre dimensioni di grandezza dello stimolo. Lo studio si propone di prendere in considerazione una possibile discrepanza tra come l'area viene percepita dai soggetti sperimentali e quella reale, partendo dal presupposto che anche in questo tipo di test possa esserci un fenomeno simile a quello che si osserva nei fenomeni di illusione percettiva. Secondo gli autori, che riprendono un suggerimento presente nelle ricerche di Yousif and Keil (2019, 2020), per cogliere al meglio la superficie totale percepita è necessario cambiare strumento di misurazione e invece di calcolare il prodotto delle dimensioni di una forma geometrica, ad esempio lunghezza per larghezza, ottenendo l'area matematica (*mathematical area*), si deve calcolare la somma delle dimensioni, ad esempio lunghezza più larghezza, per ottenere l'area cumulativa (*additive area*). Con questo nuovo e più rappresentativo indice dell'area cumulativa percepita gli autori hanno ripreso i dati dello studio di Tomlinson et al. (2020) per rianalizzarli, aspettandosi di ottenere dei risultati più accurati sulla salienza del numero e della superficie nelle diverse tappe di sviluppo. I risultati ottenuti mostrano che per quanto riguarda l'acutezza, sia nei bambini sia negli adulti i valori relativi alla numerosità e quelli relativi alla superficie sono comparabili senza differenze significative. Per ciò che concerne la misurazione del *bias*, ovvero dell'influenza di una dimensione non numerica sul numero e viceversa, si hanno risultati diversi a seconda che si tratti di bambini o di adulti. Con gli adulti i dati della ricerca non rilevano influenza della superficie sui giudizi di numerosità, confermando le conclusioni dello

studio di Tomlinson et al. (2020), ma diversamente da quest'ultimo mostrano una significativa influenza della numerosità nei giudizi sulla superficie cumulativa.

Nel caso dei bambini Aulet e Lourenco (2021) ottengono dei risultati opposti che mostrano una significativa influenza della dimensione non numerica nei giudizi di numerosità e nessuna influenza del numero nei giudizi sulla superficie.

Rispetto alle conclusioni di Tomlinson et al. (2020) si osserva un significativo cambiamento nelle tappe evolutive perché l'area risulta più saliente del numero durante l'infanzia mentre in età adulta è il numero che torna ad essere la dimensione più saliente.

Inoltre si osserva che oltre a un cambiamento nella dimensione saliente si ha anche un cambiamento nella direzione del *bias* in quanto nei bambini l'area influenza il numero con una correlazione positiva (al crescere dell'area l'insieme viene giudicato più numeroso) mentre negli adulti il numero influenza l'area percepita con una correlazione negativa (al crescere delle numerosità l'area dell'insieme viene giudicata più piccola).

Questo studio quindi suggerisce l'ipotesi che il numero non sia prioritario e che possa diventarlo in età adulta grazie all'influenza dell'educazione e della matematica formale che contribuiscono a indirizzare l'attenzione verso la numerosità.

2.2.3 Studio di Lindskog e Simms (2021)

In un recente *preprint* di Lindskog e Simms (2021) gli autori hanno ipotizzato che a fare la differenza possa essere il modo in cui viene formulata la domanda. Nella loro ricerca, su bambini tra i 2 e i 3.5 anni, adottano un'innovativa forma di *dot comparison task* in cui ai partecipanti non vengono date istruzioni verbali e non viene utilizzata la parola "più" (per chiedere di indicare quale dei due insiemi sia "più" numeroso). I bambini

semplicemente apprendono tramite l'osservazione che scegliendo l'insieme con maggiori elementi ottengono una ricompensa. Lo studio si basa sui presupposti teorici (Halberda et al., 2008) che mostrano come i bambini fino ai 3.5 anni non siano in grado di comprendere i quantificatori verbali come la parola "più" e che quindi le prestazioni poco brillanti nel *dot comparison task* tradizionale possano essere attribuite più alla mancanza di comprensione delle istruzioni rispetto a bassi livelli di capacità di confronto numerico non simbolico.

I risultati della ricerca, con prestazioni superiori alla media, sembrano indicare che le capacità numeriche non simboliche dei *toddlers* possano essere misurate anche in assenza di istruzioni verbali.

Gli autori inoltre, mettendo a confronto il *dot comparison task* con il "*Give-N*" task, sostengono che lo sviluppo del concetto di numero in quanto simbolo sia un processo indipendente dalle capacità di confronto non simbolico della numerosità e che proprio l'uso di parole indicanti la quantità, come la parola "più", possa creare una relazione artificiosa tra i due processi.

Il lavoro di Lindskog e Simms è di particolare interesse anche perché ci mostra come dato innovativo che nella fascia d'età presa in esame, dai 2 ai 3.5 anni, non sembra essere presente l'effetto-ratio che nella letteratura (Halberda et al., 2008) è indicato come una caratteristica peculiare del processo numerico non simbolico. Gli autori spiegano il risultato sostenendo in un caso che la loro versione innovativa del test non sia in grado di cogliere le capacità numeriche non simboliche oppure che l'effetto-ratio possa essere una caratteristica del processo numerico non simbolico ma non nella fascia di età 2 - 3.5 anni. Come ci dicono gli autori, non ci sono studi recenti che abbiano studiato l'effetto ratio in bambini inferiori ai 3 anni tranne il lavoro di Bonny e

Lourenco (2013) in cui l'effetto ratio è stato dimostrato raccogliendo dati relativi a bambini di 3, 4 e 5 anni ma in cui è evidente come il risultato sia fortemente influenzato dai bambini più grandi.

Capitolo 3: La ricerca

Date le precedenti premesse nasce dunque l'idea di questa ricerca che vuole verificare quale sia il ruolo delle caratteristiche visive prese in esame (*surface* e *convex hull*) sul giudizio di numerosità nei bambini 18-36 mesi.

3.1 Ipotesi di ricerca

Nello specifico si intende verificare le seguenti ipotesi:

1) E' più facile per i bambini 18-36 mesi svolgere un compito di ANS in cui è controllata la *convex hull* o dove è controllata la *surface*?

Mi aspetto che entrambe le caratteristiche non numeriche influenzino il giudizio di numerosità e in particolare la *convex hull*.

2) I risultati in entrambe le condizioni sono influenzati dalla ratio tra le numerosità proposte? Ci sono differenze tra le due condizioni di controllo?

Mi aspetto che con livelli di difficoltà crescenti ($1:2 < 2:3 < 3:4 < 4:5$) i risultati peggiorino perché la capacità di discriminare tra numerosità diventa più difficile e lenta al variare della ratio. Per il *numeric distance effect* (NDE) mi aspetto che a ratio maggiore corrisponda un risultato migliore.

Verifico l'ipotesi di Lindskog e Simms (2021) che nei bambini 18-36 possa essere assente l'effetto ratio

3) E' più semplice discriminare la numerosità in presenza di stimoli visivi congruenti o incongruenti? Ci sono differenze tra le due condizioni di controllo?

Mi aspetto che gli stimoli incongruenti creino maggiore difficoltà di risposta

4) Ci sono differenze significative rispetto all'età dei partecipanti?

Mi aspetto che i bambini più grandi abbiano risultati migliori soprattutto nella condizione di ratio maggiore

5) I risultati nel compito di addizione approssimata sono modulati dalla ratio?

Mi aspetto che sia più semplice rispondere alle prove con ratio 1:4 rispetto a ratio 1:2.

Se così fosse il risultato suggerirebbe la conclusione che sia coinvolto il sistema ANS.

3.2 Partecipanti e procedura sperimentale

Partecipanti

La ricerca ha coinvolto inizialmente 31 bambini (16 femmine), di età tra i 18 e i 36 mesi, frequentanti due asili nella città di Saronno (provincia di Varese, nord-ovest Italia). Rispettivamente 20 bambini provenienti dalla “sezione primavera” della scuola d’infanzia pubblica “Scuole dell’infanzia Don Marzorati”, classe ponte dedicata ai bambini tra i 2 e i 3 anni per favorire il collegamento tra l’asilo nido e la scuola d’infanzia, e 11 bambini frequentanti l’asilo nido privato “Giocabimbo”.

Un bambino è stato escluso perché i genitori non hanno fornito il loro consenso, cinque bambini perché o si sono rifiutati di partecipare alle prove o si sono voluti fermare durante le somministrazioni dei test e una bambina che non era in grado di comprendere le istruzioni verbali in quanto non madrelingua italiana e appena arrivata in Italia. I bambini che non hanno portato a termine le prove o non hanno voluto partecipare erano tutti inferiori ai 24 mesi di età.

Due bambini sono stati esclusi dalle analisi statistiche perché avevano rispettivamente portato a termine il primo solo il test di addizione approssimata e il secondo solo il test ANS Surface.

I bambini che effettivamente costituiscono la base numerica di questo studio pilota sono 22 (12 femmine; $M = 34,63$ mesi, $DS = 4.20$), 16 della “sezione primavera” pubblica e 6 dell’asilo nido privato. Tutti i bambini sono stati testati durante l’anno scolastico nei mesi di aprile e maggio 2022. Due bambini sono bilingui e tutti gli altri madrelingua italiani. I bambini provengono prevalentemente da famiglie con status socio-economico medio-alto.

Prima che i bambini iniziassero ad essere sottoposti ai test i genitori hanno fornito il consenso scritto alla partecipazione e al trattamento dei dati, tramite un QR code cartaceo consegnato dalle insegnanti in classe, con cui è stato possibile raccogliere anche i dati di un questionario di Home Numeracy.

Alla fine delle somministrazioni ogni bambino ha ricevuto un attestato di merito come “campione” o “campionessa” dei numeri.

Procedura

I bambini sono stati sottoposti ai test in due sessioni separate a distanza di un mese l'una dall'altra. Durante la prima sessione i bambini hanno completato il *dot comparison task* con controllo della *surface* e nella seconda sessione il *dot comparison task* con controllo della *convex hull* e in aggiunta il test di addizione approssimata.

Ogni bambino è stato testato individualmente in una zona tranquilla dell'asilo e ogni sessione ha tenuto impegnato il bambino per circa 20 minuti. Nella seconda sessione è stato mantenuto con i bambini lo stesso ordine di somministrazione adottato nella prima sessione.

Dot comparison task

I partecipanti hanno completato un *dot comparison task* su un tablet iPad (10.5", 25 x 17 cm). In ogni prova è stato chiesto loro di indicare quale fosse l'insieme di punti più numeroso tra i due visualizzati sullo schermo.

La prova era introdotta dall'immagine di un gufo che si rivolge ai bambini con il seguente messaggio: “Aiutami a scoprire chi tra orso e volpe ha più palline”. (Fig.1)

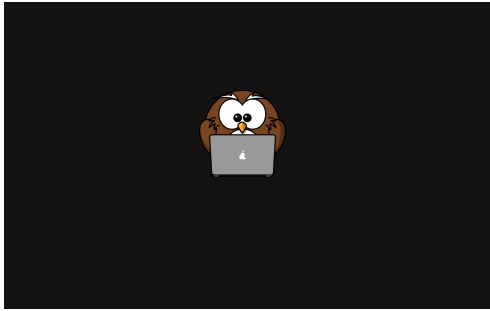


Fig. 1

I bambini dovevano indicare la loro scelta toccando sullo schermo del tablet una delle due figure animali proposte (orso e volpe), rispettivamente a sinistra e a destra dello schermo, in corrispondenza dei due insiemi di punti visti nella prima schermata. (Fig.2).

I due insiemi, formati da punti bianchi su sfondo nero, sono stati presentati simultaneamente affiancati sullo schermo, con una linea centrale verticale bianca di separazione tra la parte sinistra e destra dello schermo, contenenti ciascuna uno dei due insiemi e con la riproduzione in miniatura dell'orso e della volpe alla base di ciascun riquadro. (Fig.3)

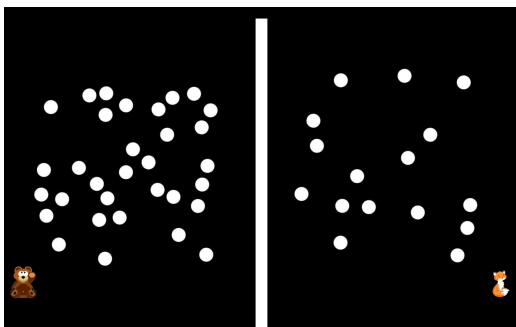


Fig. 2

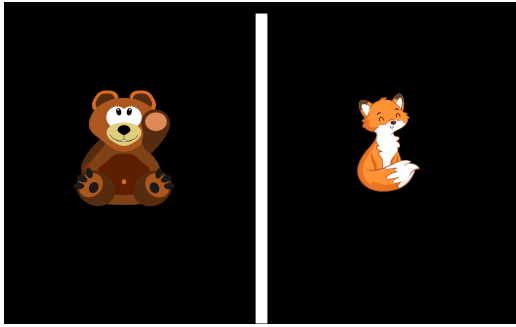


Fig. 3

Lo stimolo dei due insiemi di punti è stato presentato per un tempo prestabilito di 2500 millisecondi e una volta scomparso compariva una nuova schermata contenente la figura di un orso nella parte sinistra dello schermo e di una volpe nella parte destra. I bambini potevano indicare la loro scelta, senza limiti di tempo, solo dopo che i due insiemi di punti erano scomparsi e il tempo di presentazione degli stimoli non consentiva ai bambini di poter contare i punti.

Prima di ogni visualizzazione di insiemi di punti la voce del gufo ricordava ai bambini il compito da svolgere chiedendo: “Chi ha più palline?”. Durante l’esecuzione della prova la voce del gufo accompagnava i bambini con frasi di incoraggiamento quali “continua così, vai così” dopo le risposte corrette (a volte accompagnate anche dall’immagine di fuochi d’artificio) o “provaci ancora” dopo le risposte errate.

Al termine della prova il gufo si congedava con un’immagine di festa (Fig. 4) e il suono di applausi e voci gioiose di bambini.

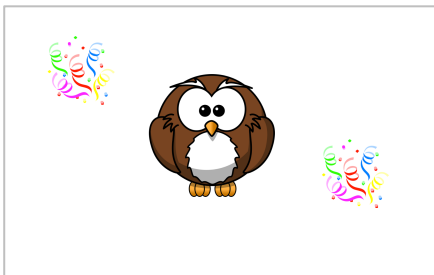


Fig. 4

Il test di confronto non simbolico di numerosità utilizzato in questo studio pilota è stato creato utilizzando l'algoritmo CUSTOM realizzato con MatLab (De Marco e Cutini, 2020), con controllo della Superficie totale a 800 pixel e della Convex hull a 60.000 pixel. Questo algoritmo assicura alti livelli di precisione nel controllo sulle caratteristiche visive degli stimoli, permette il controllo della convex hull (non presente nel protocollo Panamath) e garantisce un approccio teorico imparziale.

Gli insiemi contenevano da 8 a 30 punti con ratio numerica variabile da 1:2 a 4:5.

I partecipanti sono stati sottoposti ad una prima sessione di prove con controllo della Surface e a distanza di un mese a una seconda sessione di prove con controllo della Convex hull.

I bambini sono stati sottoposti per ogni sessione a un totale di 36 stimoli, ciascuno formato da due insiemi di punti affiancati, di cui i primi quattro di prova con ratio 1:2 e i successivi, a blocchi di otto, con ratio variabile da 1:2 (stimoli da 5 a 12), ratio 2:3 (stimoli da 13 a 20), ratio 3:4 (stimoli da 21 a 28) e ratio 4:5 (stimoli da 29 a 36).

Per ogni blocco da 8 stimoli con uguale ratio, i primi quattro stimoli erano congruenti rispetto alle caratteristiche visive rispettive di *surface* e *convex hull* e i successivi quattro incongruenti. (Fig. da 1 a 8)

Negli stimoli congruenti per surface la dimensione dei punti è identica nei due insiemi mentre negli stimoli incongruenti all'insieme di punti più numeroso corrisponde una dimensione minore dei punti, incongruente con la numerosità maggiore. (Fig. da 1 a 2)

In modo analogo negli stimoli congruenti per convex hull all'insieme più numeroso corrisponde un'area occupata maggiore mentre negli stimoli incongruenti a numerosità maggiore corrisponde un'area occupata più piccola. (Fig. da 3 a 4)

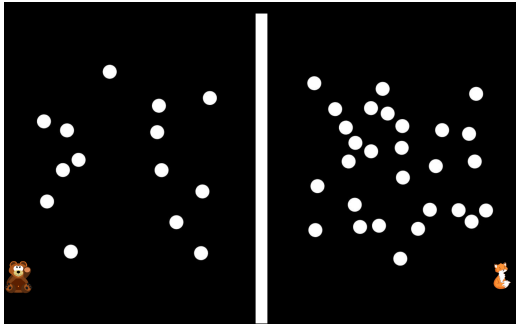


Fig. 1 (ratio 1:2, congruente surface)

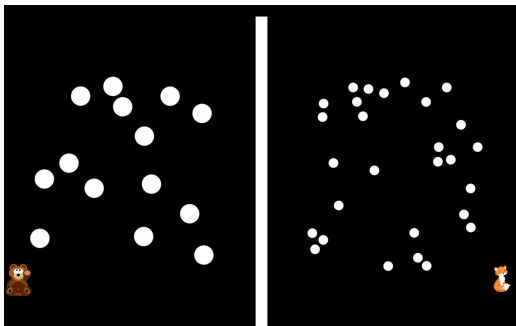


Fig. 2 (ratio 1:2, incongruente surface)

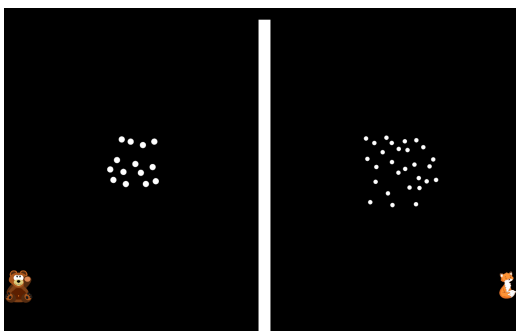


Fig. 3 (ratio 1:2, congruente convex hull)

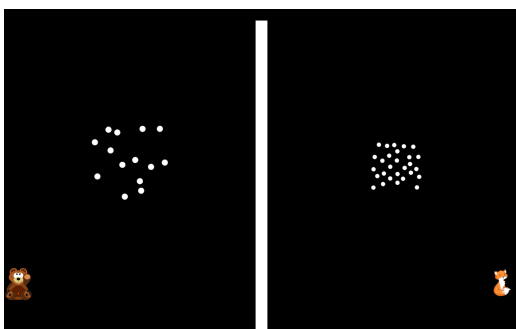


Fig. 4 (ratio 1:2, incongruente convex hull)

Test di addizione approssimata

I bambini hanno eseguito il test di addizione approssimata su un tablet iPad (10,5 “, 25 x 17 cm) durante la seconda sessione di prova, subito dopo aver svolto il *dot*

comparison task con controllo della *convex hull*. Il test è stato realizzato utilizzando sempre l'algoritmo CUSTOM (De Marco e Cutini, 2020) con controllo della convex hull.

Il test è formato da sei prove suddivise a blocchi di due per omogeneità rispetto al numero iniziale di stimoli su cui eseguire l'addizione approssimata e rispetto al colore del riquadro in cui vanno a confluire gli stimoli. La prima schermata è animata e lo stimolo consiste in uno o più (fino a quattro) pallini bianchi su sfondo nero che prima dalla parte sinistra dello schermo e poi da quella destra vanno a confluire in un quadrato colorato su sfondo nero posto al centro dello schermo in cui non è possibile vedere il contenuto per evitare che i bambini possano contare gli elementi ivi contenuti. Lo stimolo ha la durata di 3 millisecondi totali. La seconda schermata è statica e nella parte centrale dello schermo appaiono due quadrati neri uno nella porzione superiore e l'altro nella porzione inferiore su sfondo colorato (lo sfondo richiama il colore del quadrato della prima parte animata). Nei due quadrati sono contenute le opzioni di scelta per la risoluzione dell'addizione approssimata e i bambini potevano operare la loro scelta toccando lo schermo in corrispondenza del quadrato con il numero di pallini valutato corretto, senza limiti di tempo. La schermata rimaneva a disposizione fino al momento della scelta del bambino.

La schermata iniziale era preceduta dall'immagine di una volpe che si rivolgeva ai partecipanti con il seguente messaggio: "Ciao sono volpe. Mi aiuti a scoprire quanti pallini sono dentro la scatola?". (Fig. 1)



Fig. 1 (immagine iniziale)

Nelle prime due prove 1 + 1 pallini entravano in un quadrato verde e le due opzioni di scelta erano due quadrati neri su sfondo verde contenenti 2 vs. 4 pallini e 8 vs. 2 pallini. (Fig. 2).

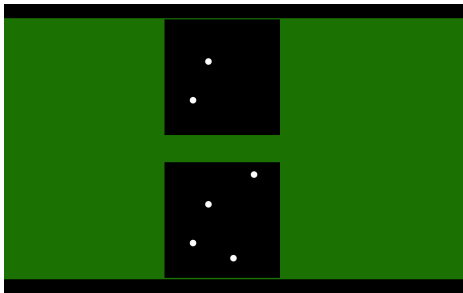


Fig. 2 (prima prova; scelta 2 vs. 4, ratio 1:2)

Nella terza e quarta prova 2 + 2 pallini entravano in un quadrato giallo e le due opzioni di scelta erano due quadrati neri su sfondo giallo contenenti 4 vs. 2 pallini e 8 vs. 4 pallini. (Fig. 3 – 4 - 5)

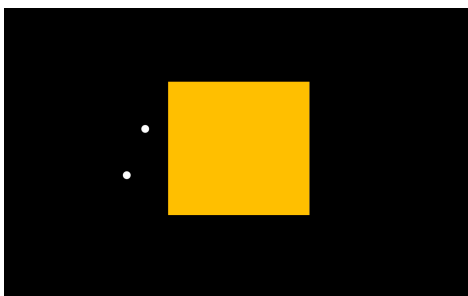


Fig. 3 (terza prova; stimolo proveniente da sinistra)



Fig. 4 (terza prova; stimolo proveniente da destra)

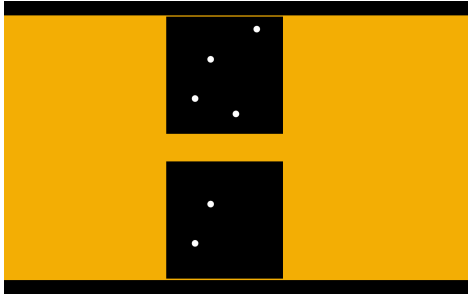


Fig. 5 (terza prova; scelta 4 vs. 2, ratio 1:2)

Infine nella quinta e sesta prova $4 + 4$ pallini entravano in un quadrato blu e le due opzioni di scelta erano due quadrati neri su sfondo blu contenenti 8 vs. 4 pallini e 2 vs. 8 pallini.

I valori corretti ed errati differivano per una ratio di 1:2 o di 1:4 e le numerosità incluse nel test erano 2, 4 o 8. Quattro prove avevano ratio 1:2 e solo due ratio 1:4.

Al termine di ogni singola prova, se la risposta era corretta il bambino riceveva un feedback positivo consistente in un'immagine festosa del gufo e il suono di voci di bambini che esultavano, in caso di risposta errata il feedback negativo era dato da un suono molto forte simile a un campanello che essendo inaspettato colpiva molto l'attenzione dei bambini. Alcuni bambini sono rimasti spaventati da questo suono mentre nella maggioranza dei casi dopo un primo attimo di stupore i bambini erano molto divertiti e continuavano il test con rinnovato entusiasmo. (Fig. 8-9)

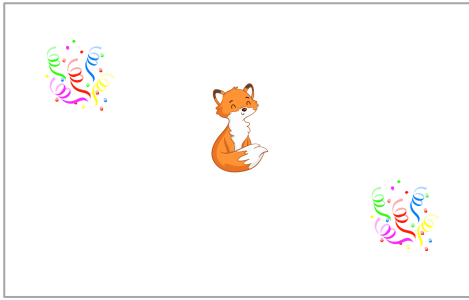


Fig. 8 (feedback positivo, con suoni di festa)

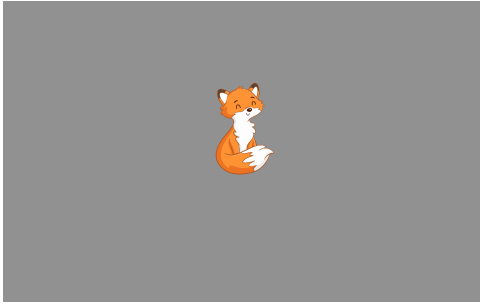


Fig. 9 (feedback negativo, con suono forte)

Al termine delle prove l'immagine di un gufo salutava i bambini dicendo: “Abbiamo finito il nostro gioco insieme. Ottimo lavoro” con applausi e voci di bambini in festa.

(Fig. 10)



Fig. 10 (immagine di chiusura del test)

3.3 Risultati

L'analisi dei dati è stata fatta tramite statistiche descrittive, correlazioni, t-test di Student a campioni appaiati e analisi della varianza *within group* tramite test ANOVA a una via. Qui di seguito vengono descritti i risultati suddivisi per ciascuna delle ipotesi di ricerca indicate.

1) ANS Surface vs. ANS Convex hull

Sono stati utilizzati uno student t-test a campioni appaiati e un test della varianza within group tramite test ANOVA per verificare se la performance dei partecipanti nel *dot comparison task* risultasse migliore nella condizione di controllo della *surface* o della *convex hull*.

Dai test non risulta esserci una diversità statisticamente significativa tra le medie delle due prove, rispettivamente *surface* e *convex hull*, rispetto alla performance di accuratezza nel compito di ANS. (Tab. 1 e 2)

$t\text{-test}(21) = .33, p = .273$, n.s.

$F(1,42) = .140, p = .71$, n.s.

t-test campioni appaiati ANS surface vs. ANS convex hull

Misura 1	Misura 2	t	df	p	M differenza	ES differenza	95% Intervallo di confidenza	
							Inferiore	Superiore
Tot_ANS_surface	Tot_ANS_convex	0.333	21	0.743	0.273	0.820	-1.432	1.977

Tab. 1. t-test di Student a campioni appaiati con confronto dei risultati di accuratezza nelle due prove con controllo della *surface* e della *convex hull*

Test ANOVA

Casi	Somma dei quadrati	df	Media quadratica	F	p
Test ANS Surface/Convex hull	0.818	1	0.818	0.140	0.710
Residuals	245.364	42	5.842		

Tab. 2. Test ANOVA a una via con confronto dei risultati di accuratezza nelle due prove con controllo della *surface* e della *convex hull*

L'analisi descrittiva (Tab. 3) ci forniva il dato di una media leggermente superiore per la condizione di controllo *surface* ma il *t*-test e l'analisi ANOVA ci hanno indicato che dobbiamo accettare l'ipotesi nulla H_0 non avendo sufficienti prove per affermare che la media delle differenze sia diversa da zero.

Analisi descrittiva

	N	Media	DS	ES
Tot_ANS_surface	22	16.500	2.483	0.529
Tot_ANS_convex	22	16.227	2.349	0.501

Tab. 3. Statistica descrittiva delle due variabili ANS surface e ANS convex hull

2) Effetto ratio nelle due condizioni di controllo

Per indagare se presente nel dot comparison task un effetto della ratio sul risultato finale di accuratezza (in termini di risposte esatte) sono stati presi in considerazione i quattro blocchi da 8 stimoli (8 stimoli per ogni tipologia di ratio) e messi a confronto tramite statistiche descrittive, *t*-test di Student a campioni appaiati e analisi ANOVA a una via. E' stata eseguita un'analisi distinta per ciascuna delle due prove di confronto di numerosità: ANS Surface e ANS Convex hull.

ANS Surface: le statistiche descrittive (Tab. 4) sembrerebbero indicare che a livelli crescenti di difficoltà della ratio ($2.0 < 1.5 < 1.3 < 1.25$) i risultati in termini di performance abbiano un lieve peggioramento (tranne che tra ratio 2.0 e 1.5 in cui le medie risultano identiche) lasciando supporre che diventi più difficile stimare le numerosità proposte.

Analisi descrittiva

Ratio surface	N	Media	DS
ratio 1.25 surface	22	3.909	0.811
ratio 1.3 surface	22	4.136	1.612
ratio 1.5 surface	22	4.227	1.445
ratio 2.0 surface	22	4.227	1.572

Tab. 4. Statistica descrittiva delle quattro tipologie di ratio nella prova ANS Surface

L'analisi con *t*-test di Student (Tab. 5a - 5b) e con test ANOVA (Tab. 6) ci indica che la differenza nelle medie è da attribuire al caso e statisticamente non significativa essendo $p > .05$.

t-test campioni appaiati

Misura 1	Misura 2	t	df	p	M differenza	ES differenza
ANS_2_surface	ANS_1.5_surface	0.000	21	1.000	0.000	0.514
ANS_1.3_surface	ANS_1.25_surface	0.547	21	0.590	0.227	0.416

Tab. 5a. *t*-test di Student con confronto tra ratio 2.0 vs. 1.5 e 1.3 vs. 1.25, condizione surface

t-test campioni appaiati

Misura 1	Misura 2	t	df	p
ANS_1.5_surface	ANS_1.3_surface	0.209	21	0.837

Tab. 5b. *t*-test di Student con confronto tra ratio 1.5 vs. 1.3, condizione surface

Test ANOVA ratio surface (2.0 – 1.5 – 1.3 – 1.25)

Casi	Somma dei quadrati	df	Media quadratica	F	p
Ratio Surface	1.489	3	0.496	0.254	0.858
Residuals	164.136	84	1.954		

Tab. 6. Test ANOVA con confronto delle ratio, condizione surface

ANS Convex hull: le statistiche in questo caso non restituiscono dei dati univocamente interpretabili perché sembra esserci una diminuzione del valore accuratezza solo con il variare della ratio da 2.0 a 1.5. (Tab. 7) e

Analisi descrittiva

Ratio convex	N	Media	DS
ratio 1.25 convex	22	3.818	1.532
ratio 1.3 convex	22	4.318	1.555
ratio 1.5 convex	22	3.773	1.270
ratio 2.0 convex	22	4.318	1.393

Tab. 7. Statistica descrittiva delle quattro tipologie di ratio, condizione *convex hull*

Abbiamo provato a testare anche eventuali differenze tra le due condizioni di controllo all'interno di una stessa ratio e il risultato dell'analisi ANOVA effettuata non ha dato valori statisticamente significativi con $F(1,42) = .041, p = .840$, n.s. (Tab. 8)

Test ANOVA ratio 2.0 Surface/Convex hull

Casi	Somma dei quadrati	df	Media quadratica	F	p
Ratio	0.091	1	0.091	0.041	0.840
Residuals	92.636	42	2.206		

Tab. 8. Test ANOVA con confronto delle due condizioni di controllo aventi la stessa ratio

3) Congruenti vs Incongruenti

Per verificare l'ipotesi teorica che sia più semplice svolgere un compito ANS in cui le caratteristiche visive dello stimolo siano congruenti con la sua numerosità siamo andati a confrontare, per ciascuna delle due prove (ANS surface e ANS convex hull), i risultati delle risposte in cui lo stimolo visivo era congruente con la numerosità con quelle in cui lo stimolo visivo era incongruente. Gli stimoli congruenti corrispondevano sempre alle prime quattro coppie (sul totale di 8 coppie) di insiemi proposti nel test, per ciascuna delle quattro tipologie di ratio per un totale di 16 stimoli congruenti vs. 16 stimoli incongruenti.

Il confronto delle medie attraverso il t-test di Student (Tab. 9 e 10), con aggiunta del test di Wilcoxon che risulta più adatto a campioni molto ridotti, e l'analisi descrittiva (Tab. 11) non ha portato conferma all'ipotesi di ricerca.

t-test di Student a campioni appaiati (Surface)

Misura 1	Misura 2	Test	Statistica	df	p	SE
Surface CONGRUENTI	Surface INCONGRUENTI	Student	0.629	21	0.536	0.134
		Wilcoxon	65.000		0.797	0.083

Tab. 9. t-test di Student a campioni appaiati, test Surface, con confronto degli stimoli congruenti vs. incongruenti

t-test di Student a campioni appaiati (Convex hull)

Misura 1	Misura 2	Test	Statistica	df	p	SE
Convex CONGRUENTI	Convex INCONGRUENTI	Student	0.650	21	0.523	0.139
		Wilcoxon	95.500		0.675	0.117

Tab. 10. t-test di Student a campioni appaiati, test convex hull, con confronto degli stimoli congruenti vs. incongruenti

Analisi descrittiva stimoli Congruenti vs. Incongruenti

	Surface		Convex	
	CONGRUENTI	INCONGRUENTI	CONGRUENTI	INCONGRUENTI
Validi	22	22	22	22
Mancanti	2	2	2	2
Media	8.455	8.045	7.864	7.545
Deviazione standard	1.683	2.214	1.612	1.765
Minimo	6.000	2.000	5.000	5.000
Massimo	12.000	13.000	12.000	11.000

Tab. 11. Analisi descrittiva delle medie con confronto nelle due prove, surface e convex hull, degli stimoli congruenti e incongruenti

4) Relazione tra età dei partecipanti e risultato nel compito ANS

Siamo andati a verificare la nostra ipotesi teorica che ci possa essere una correlazione positiva tra l'età dei partecipanti e la performance nel compito di ANS e che dunque i bambini più grandi abbiano risultati migliori.

In secondo luogo ci siamo chiesti se questo fosse particolarmente vero nel caso di uno stimolo con ratio maggiore, mettendo a confronto stimoli con ratio 2.0 e stimoli con ratio 1.25.

Abbiamo utilizzato per il confronto delle variabili sia l'indice di correlazione di Pearson che quello di Spearman (Tab.12) ma in entrambi i casi il test non ha evidenziato la presenza di relazione tra le due variabili: $r(22) = .069$ e $\rho(22) = -.091, p > .05$

Non è presente una relazione lineare tra le due variabili prese in considerazione. (Fig. n. 1)

Correlazione età partecipanti - ANS

	Pearson		Spearman	
	r	p	r	p
Età in mesi - TOT_ANS_	0.069	0.761	-0.091	0.688

Tab. 12. Correlazione tra età dei partecipanti e risultato totale di ANS

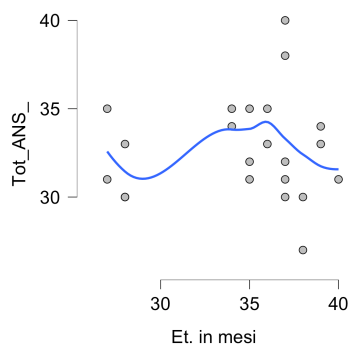


Fig. n. 1. L'immagine illustra la relazione non lineare tra le due variabili età dei partecipanti e totale ANS

Nonostante il risultato negativo della correlazione età/ANS si è voluto comunque verificare se ci fossero dati significativi riguardo ad una possibile relazione tra l'età dei partecipanti e la ratio numerica presente nella prova attraverso il calcolo degli indici di Pearson e Spearman.

In entrambi i test non è stata trovata alcuna relazione significativa (Tab. 13).

Correlazione età partecipanti e ratio numerosità nella prova surface (2.0 vs. 1.25)

	Pearson		Spearman	
	r	p	r	p
Età in mesi - ANS_2_surface	-0.088	0.698	-0.089	0.695
Età in mesi - ANS_1.25_surface	-0.206	0.359	-0.181	0.421
ANS_2_surface - ANS_1.25_surface	-0.058	0.799	0.062	0.785

Tab. 13. Tabella di correlazione tra l'età dei partecipanti e la ratio della numerosità (2.0 vs. 1.25)

5) Relazione tra addizione approssimata e ratio numerica

La presenza dell'effetto ratio è una delle caratteristiche specifiche dei processi che coinvolgono l'ANS. Per questo siamo andati a verificare nel nostro campione se nella prova di addizione approssimata, che valuta le capacità di manipolazione delle quantità numeriche non simboliche, fosse possibile riscontrare un risultato migliore in relazione alla ratio numerica maggiore. Ovvero che per i bambini fosse più facile rispondere alle prove in cui la ratio numerica tra i due insiemi di stimoli fosse 4.0 piuttosto che 2.0.

Abbiamo utilizzato una statistica descrittiva di confronto tra le medie (Tab. 14) che ha confutato la nostra ipotesi teorica restituendoci il dato di una media relativa alla ratio 2.0 ($M = 1.909$) maggiore di quella relativa alla ratio 4.0 ($M = 1.545$) come si può vedere anche nel grafico di distribuzione (Grafici n. 2 - 3)

Analisi descrittiva relazione addizione approssimata e ratio (2.0 – 4.0)

	Addizione 1:2	Addizione 1:4
Validi	22	22
Mancanti	2	2
Media	1.909	1.545
Deviazione standard	0.868	0.596
Minimo	0.000	0.000
Massimo	4.000	2.000

Tab. 14. Analisi di confronto, nella prova di addizione approssimata, tra le medie relative alla ratio numerica 2.0 vs. 4.0

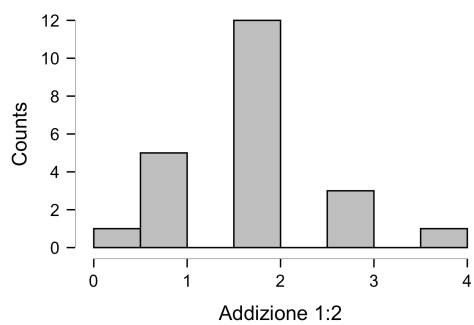


Grafico n. 2. Distribuzione delle medie nella prova di addizione approssimata con ratio 2.0

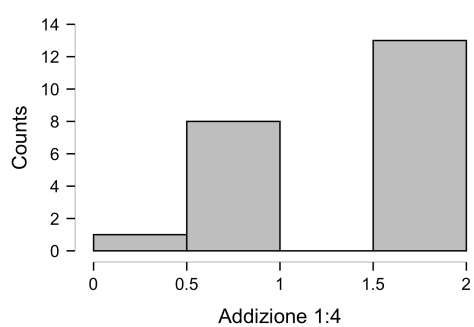


Grafico n. 3. Distribuzione delle medie nella prova di addizione approssimata con ratio 4.0

Capitolo 4: Discussione e conclusioni

La presente ricerca si inserisce nell'ampio dibattito teorico che ha visto crescere l'interesse verso il ruolo che potrebbero avere le caratteristiche visive nel processo di misurazione dell'acuità numerica non simbolica. E' stato ampiamente dimostrato che la performance nel *dot comparison task* non può essere spiegata unicamente dal ruolo dell'ANS ma che devono essere tenuti in considerazione fattori non numerici tra cui caratteristiche visive quali la *surface* e la *convex hull*.

Alcuni autori sostengono la salienza delle *visual cues* rispetto al *number sense* (Gebuis e Reynvoet, 2012; Gilmore et al., 2013) e andando nello specifico ad esaminare il diverso ruolo di *surface* e di *convex hull* arrivano a sostenere la maggiore salienza di quest'ultima, in particolare negli adulti, perché fattore più difficile da inibire. (Gilmore et al., 2016). Secondo questi studi i bambini avrebbero maggiori difficoltà rispetto agli adulti ad inibire stimoli visivi con incongruenza sia rispetto alla *convex hull* sia rispetto alla *surface*. Studi recenti si sono spinti fino a mettere in discussione la natura innata del *number sense* a favore di un "senso della grandezza" (Leibovich et al., 2017) che indicherebbe la maggiore salienza delle grandezze continue rispetto alla numerosità. Anche nel recente studio di Aulet e Lorenzo (2021) gli autori sostengono che nel caso dei bambini vi sia nei giudizi di numerosità una significativa influenza della dimensione non numerica e nessuna influenza del numero nei giudizi riguardanti la stima della superficie totale.

Diversamente altri autori restituiscono alla numerosità la prevalenza rispetto alle *visual cues*: Tomlinson, Brannon e DeWind (2020) sostengono che questo sia più evidente in età pre-scolare, prima che l'apprendimento formale della matematica possa esercitare la sua influenza

Alla luce di queste teorie contrapposte il nostro studio ha voluto indagare se e in quale misura i fattori non numerici (*visual cues*) potessero influenzare il giudizio di numerosità in un campione di bambini di età 18-36 mesi. Bisogna considerare che tra le molteplici teorie che hanno contribuito a tenere acceso il dibattito in questo campo di ricerca gli studi svolti con bambini di questa età sono di numero ridotto e ciò ha limitato la possibilità di avere un'ampia evidenza sperimentale per le ipotesi teoriche proposte.

Nello specifico ci siamo chiesti se per bambini non ancora scolarizzati, senza competenze di calcolo e nozioni di matematica simbolica, fosse più semplice svolgere un compito di ANS con controllo della *convex hull* piuttosto che della *surface* ipotizzando che ci potesse essere maggiore difficoltà in un compito in cui lo stimolo fosse incongruente rispetto alla *convex hull*, più difficile da inibire. I risultati dei test (t-test di Student a campioni appaiati e test ANOVA) non hanno evidenziato una diversità significativa tra le due condizioni di controllo: $t\text{-test } (21) = .33, p = .273, \text{ n.s.}$ e $F(1, 42) = .140, p = .71, \text{ n.s.}$ Questo dato non ci permette di confermare l'ipotesi di ricerca e di dedurre una significativa influenza delle caratteristiche visive rispetto al giudizio di numerosità.

Evidenze sperimentali (Gilmore et al., 2016) hanno indicato che è più semplice rispondere in modo esatto nelle prove congruenti rispetto a quelle incongruenti a causa di meccanismi di inibizione che interverrebbero, nel caso di stimoli incongruenti, per sopprimere risposte basate sulla salienza delle caratteristiche visive. Abbiamo verificato questa ipotesi sul nostro campione, in entrambe le condizioni di *surface* e *convex hull*, ma il risultato non è risultato statisticamente significativo ($p > .05$) e le differenze tra le medie osservate sono attribuibili al caso (M prove congruenti *surface* = 8.455, M prove

incongruenti *surface* = 8.045; M prove congruenti *convex hull* = 7.864, M prove incongruenti *convex hull* = 7.545).

Sappiamo che la capacità di discriminare tra due numerosità è modulata dalla loro ratio numerica e che la performance nei compiti ANS aumenta in presenza di un rapporto più piccolo tra due quantità (Dehaene, 2003; Feigenson et al., 2004) quindi ci aspettiamo che con livelli crescenti di difficoltà (ratio $1:2 < 2:3 < 3:4 < 4:5$) peggiorino i risultati nel test di discriminazione tra numerosità. L'analisi dei dati statistici per questa ipotesi di ricerca ci mostra che anche in questo caso la differenza nelle medie osservate (ad esempio M ratio 2.0 *surface* = 4.227 rispetto a M ratio 1.25 *surface* = 3.909) è da attribuire al caso e statisticamente non significativa essendo $p > .05$ nel t-test di Student a campioni appaiati e nel test Anova. Questo dato ci mostra che nel nostro campione non è presente l'effetto ratio anche se questo è dato come caratteristica peculiare dell'ANS. Nello studio di Lindskog e Simms (2021) i due autori ipotizzano che nei bambini di età 18-36 mesi possa essere assente l'effetto ratio o che il dot comparison task possa non essere lo strumento idoneo in questa fascia d'età per misurare l'ANS. Alla luce di questa conclusioni, che sembrano confermate dalla nostra evidenza sperimentale, possiamo condividere l'ipotesi che il dot comparison task utilizzato possa o non aver rilevato in modo corretto la presenza dell'ANS oppure che questo non sia il meccanismo di base prevalente nei bambini in età 18-36 mesi.

La nostra analisi inoltre ha cercato di indagare se ci fosse una correlazione tra l'età dei partecipanti e la performance, nello specifico considerando possibili differenze in relazione al variare della ratio numerica. Sappiamo che l'acuità numerica cresce all'aumentare dell'età (Halberda e Feigenson, 2008) e che vi è una evoluzione, parallela al crescere dell'età, nella capacità di discriminare in base alla ratio tra due

quantità a confronto (Xu e Spelke, 2000; Xu e Arriga, 2007; Halberda e Feigenson, 2008, Libertus e Brannon, 2010).

Abbiamo verificato queste ipotesi utilizzando sia l'indice di correlazione di Pearson sia quello di Spearman ma in entrambi i casi il test non ha mostrato evidenza di relazione tra le variabili considerate. Tra le due variabili "età in mesi" e "totale ANS" abbiamo ottenuto i due indici $r(22) = .069$ e $\rho(22) = .091$, non significativi perché $p > .05$.

Anche nel caso del confronto tra l'età in mesi e la ratio numerica presente nella prova abbiamo ottenuto un risultato non significativo che non ci consente di ipotizzare che ci sia un'evoluzione nella performance legata al crescere dell'età.

La letteratura ci dice che i bambini possiedono fin dalla nascita delle "aspettative numeriche" (Wynn, 1992) e che condividono con gli animali la capacità di eseguire semplici addizioni e sottrazioni, prima che venga appresa la capacità di contare (Pica et al., 2004; Barth et al., 2005; Barth, Beckmann e Spelke, 2012). La letteratura ci dice che anche nel caso della manipolazione di quantità le prestazioni peggiorano al diminuire della ratio tra le quantità confrontate (Izard e Dehaene, 2008). Nel nostro studio abbiamo voluto analizzare se i risultati nel compito di addizione approssimata fossero modulati dalla ratio e quindi legati al sistema ANS e siamo andati a verificare se per i bambini del campione i risultati fossero migliori in presenza di ratio numerica tra i due insiemi pari a 4.0 piuttosto che 2.0.

Il confronto tra le medie nelle due condizioni (ratio 4.0 e ratio 2.0) ci ha restituito un dato che confuta la nostra ipotesi teorica in quanto la media relativa alla ratio 2.0 ($M = 1.909$) risulta essere maggiore di quella relativa alla ratio 4.0 ($M = 1.545$). Anche in questo caso non sappiamo se il risultato sia da attribuire al fatto che la prova di addizione approssimata possa non essere stata strutturata nel modo corretto per farci

capire le competenze di base dei bambini o se, come per il confronto di numerosità, nella fascia d'età presa in esame possa non essere presente l'effetto ratio tipico dei processi legati all'ANS.

In conclusione, con il presente studio non siamo riusciti a dimostrare una qualche forma di prevalenza delle caratteristiche visive sul giudizio di numerosità o di una maggiore facilità di esecuzione della prova nella condizione di controllo *surface* piuttosto che *convex hull*. Questi risultati ci portano a concludere che tra spazialità e numerosità quest'ultima risulta essere il fattore con maggiore salienza nei processi ANS con bambini in età pre-scolare. Le evidenze sperimentali inoltre non ci hanno consentito di confermare la presenza dell'effetto ratio nelle prove di confronto numerico e di manipolazione delle quantità nel campione di bambini 18-36 mesi. In future attività di ricerca sarebbe interessante approfondire in che misura il *dot comparison task* risulti essere un metodo puro di misurazione dell'ANS o se con esso si vadano a rilevare altre competenze di base dei bambini.

Ringraziamenti

Ringrazio tutta la mia famiglia che mi ha supportata durante questi anni di ritorno agli studi e un grazie alle maestre Valeria (asilo “Giocabimbo”), Lidia ed Emanuela (asilo “Scuole dell’infanzia Don Marzorati”) che mi hanno accolto con entusiasmo e a tutti i bambini che hanno partecipato ai test rendendo possibile questo lavoro.

Bibliografia

Antell S.E. e Keating D.P. (1983), *Perception of numerical invariance in neonates*, “Child Development”, vol. 54, pp. 695-701.

Atkinson J., Campbell F.W. e Francis M.R. (1976), *The magic number 4 +/- 0: A new look at visual numerosity judgements*, “Perception”, vol. 5, pp. 327-334

Aulet L.S., Lourenco S.F. (2021), The relative salience of numerical and non-numerical dimensions shifts over development: A re-analysis of Tomlinson, DeWind and Brannon (2020), “Cognition”, vol. 210, 104610
<http://dx.doi.org/10.1016/j.cognition.2021.104610>

Barth H., La Mont K., Lipton J., Spelke E.S., (2005), *Abstract number and arithmetic in preschool children*, “Proceedings of the national academy of sciences”, vol. 102 (39), pp. 14116-14121 <https://doi.org/10.1073/pnas.0505512102>

Barth H., La Mont K., Lipton J., Dehaene S., Kanwisher N., Spelke E. (2006), *Non-symbolic arithmetic in adults and young children*, “Cognition”, vol. 98 (3), pp. 199-222 <http://dx.doi.org/10.1016/j.cognition.2004.09.011>

Barth H., Beckmann L., Spelke E.S (2008), *Nonsymbolic, approximate arithmetic in children: Abstract addition prior to instruction*, “Dev Psychol.”, vol. 44 (5), pp. 1466-1477 <https://doi.org/10.1037/a0013046>

Bonny J.W., Lourenco S.F. (2013), *The approximate number system and its relation to early math achievement: Evidence from the preschool years*, “Journal of

Experimental Child Psychology”, vol. 114 (3), pp.375-388
<https://doi.org/10.1016%2Fj.jecp.2012.09.015>

Brannon E.M. e Van de Walle G.A. (2001), *The developmet of ordinal numerical competence in young children*, “Cognitive Psychology”, vol. 43 (1), pp. 53-81
[https://doi.org/10.1016/0010-0277\(92\)90050-R](https://doi.org/10.1016/0010-0277(92)90050-R)

Butterworth B. (2010), *Foundational numerical capacities and the origins of dyscalculia*, “Trends in Cognitive Sciences”, vol. 14 (12), pp. 534-541
doi:10.1016/j.tics.2010.09.007

Butterworth B. (1999). *The matematical brain*, London: Macmillan

Castelli E., Glaser D., Butterworth B. (2006), *Discrete and analogue quantity processing in the parietal lobe: a functional MRI study*, “PNAS”, vol. 103 (12), pp. 4693-4698 <https://doi.org/10.1073/pnas.0600444103>

Clayton S., Gilmore C., Inglis M. (2015), *Dot comparison stimuli are not all alike. The effect of different visual controls on ANS measurement*, “Acta Psychologica”, vol. 161, pp. 78-84 <https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2015.09.007>

Clayton S., Gilmore C. (2014), *Inhibition in dot comparison tasks*, “ZDM Mathematics Education”, vol. 47, pp. 759-770 <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-014-0655-2>

Dantzig T. (1967). *Number: the Language of Science*. New York: The Free Press

Dehaene S. (2011), *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*, Revised

and Updated Edition, New York, Oxford University Press

Dehaene S. (2003), *The neural basis of the Weber-Fechner law: a logarithmic mental number line*, “Trends in Cognitive Sciences”, vol. 7 (4), pp. 145-147

DeWind N.K., Brannon E.M. (2016), *Significant inter-test reliability across approximate number system assessments*, “Frontiers in Psychology”, vol. 7 (63) <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00310>

De Marco D., Cutini S., *Introducing CUSTOM: A customized, ultraprecise, standardization-oriented, multipurpose algorithm for generating nonsymbolic number stimuli*, “Behavior Research Methods”, vol. 52 (4), pp. 1528-1537 <https://doi.org/10.3758/s13428-019-01332-z>

Feigenson L., Dehaene S., Spelke E. (2004), *Core systems of number*, “Trends in Cognitive Science”, 8, 7, pp. 307-314,

Gallistel C.R. (1990). *The organization of Learning*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press

Gallistel C.R., Gelman R. (1992), *Preverbal and verbal counting and computation*, “Cognition”, vol. 44 (1-2), pp. 43-74 [https://doi.org/10.1016/0010-0277\(92\)90050-r](https://doi.org/10.1016/0010-0277(92)90050-r)

Gebuis T., Reynvoet B. (2011), *Generating nonsymbolic number stimuli*, “Behavior Research Methods”, vol. 43, pp. 981-986 <http://dx.doi.org/10.3758/s13428-011-0097-5>

- Gebuis T., Reynvoet B. (2012), *The interplay between nonsymbolic number and its continuous visual properties*, “Journal of Experimental Psychology : General”, vol. 141(4), pp. 642-648 <http://dx.doi.org/10.1037/a0026218>
- Gilmore C. et al. (2010), *Non-symbolic arithmetic abilities and achievement in the first year of formal schooling in mathematics*, “Cognition”, vol. 115 (3), pp. 394-406 <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2010.02.002>
- Gilmore C. et al. (2013), *Individual differences in inhibitory control, not non-verbal number acuity, correlate with mathematics achievement*, PLoS One, vol. 8(6) e67374 <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0067374>
- Gilmore C., Cragg L., Hogan G., Inglis M. (2016), *Congruency effects in dot comparison tasks: convex hull is more important than dot area*, “Journal of Cognitive Psychology”, vol. 28 (8), pp. 923-931 <https://doi.org/10.1080/20445911.2016.1221828>
- Gilmore C., McCarthy S., Spelke E.S. (2007), *Symbolic arithmetic knowledge without instruction*, “Nature”, vol. 447 (7144), pp. 589-591 <https://doi.org/10.1038/nature05850>
- Gordon P. (2004), Numerical cognition without words: Evidence from Amazonia, “Science”, vol. 306, pp. 496-499
- Halberda J., Feigenson L. (2008), Developmental change in the acuity of the “number sense”: the approximate number system in 3-, 4-, 5-, and 6 –year olds and adults,

“Developmental Psychology”, vol. 44 (5), pp. 1457-1465
<https://scholar.google.it/scholar?oi=bibs&cluster=17974584705184487088&btnI=1&hl=it>

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364661304001317>

Halberda J., Mazocco M.M.M., Feigenson L. (2008), *Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievements*, “Nature”, vol. 455(7213), pp. 665-668 <https://doi.org/10.1038/nature07246>

Hannula M.M. e Lehtinen E. (2005), *Spontaneous focusing on numerosity and mathematical skills of young children*, “Learning and Instruction”, vol. 15 (3), pp. 237-256 <https://psycnet.apa.org/doi/10.1016/j.learninstruc.2005.04.005>

Inglis M., Gilmore C. (2014), *Indexing the Approximate Number System*, “Acta Psychologica”, vol. 145, pp. 147-155
<https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2013.11.009>

Izard V., Sann C., Spelke E.S., Streri A. (2009), *Newborn infants perceive abstract numbers*, “Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America”, vol. 106 (25), pp. 10382-10385
<https://doi.org/10.1073/pnas.0812142106>

Izard V., Dehaene S. (2008), *Calibrating the mental number line*, “Cognition”, vol. 106, pp. 1221-1247 <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2007.06.004>

Leibovich T., Katzin N., Harel M., Henik A. (2017), *From “sense of number” to “sense*

of magnitude”: *The role of continuous magnitudes in numerical cognition*, “The Behavioral and Brain Sciences”, vol. 40, e164
<https://doi.org/10.1080/17470218.2013.837940>

Libertus M.E., Feigenson L., Halberda J. (2011), *Preschool acuity of the approximate number system correlates with school math ability*, “Developmental Sciences”, vol. 14(6), pp. 1292-1300 <https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2011.01080.x>

Libertus M.E., Feigenson L., Halberda J. (2013), *Numerical approximation abilities correlate with and predict informal but not formal mathematics abilities*, “Journal of Experimental Child Psychology”, vol. 116 (4), pp. 829-838
<https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.08.003>

Libertus M.E. e Brannon E.M. (2010), *Stable individual differences in number discrimination in infancy*, “Developmental Science”, vol. 13 (6), pp. 900-906
<https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2009.00948.x>

Lindskog M. e Simms V. (2021, March 17), *When the word “more” doesn’t matter: Measuring toddlers non-symbolic number processing using a novel task*, “PsyArXiv”, <https://doi.org/10.31234/osf.io/v835g>

Lindskog M., Winman A., Juslin P., Poom L., (2013), *Measuring acuity of the approximate number system reliably and validly: the evaluation of an adaptive test procedure*, “Frontiers in psychology”, vol. 4 (510)
<http://dx.doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00510>

Lucangeli D., Molin P., Poli A. (2003). *L'intelligenza numerica. Abilità cognitive e metacognitive nella costruzione della conoscenza numerica dai 3 ai 6 anni*. Trento: Centro Studi Erickson

Lucangeli D., Molin S., Poli A. (2013). *Intelligenza numerica nella prima infanzia - 18-36 mesi. Attività per stimolare le potenzialità numeriche: dalla quantità alla numerosità*. Trento: Centro Studi Erickson

Mazzocco M.M.M., Feigenson L., Halberda J. (2011b), *Preschoolers' precision of the approximate number system predicts later school mathematics performance*, "PLoS ONE", vol. 6 (9), <https://psycnet.apa.org/doi/10.1371/journal.pone.0023749>

Nieder A. & Dehaene S. (2009), *Representation of number in the brain*, "Annual Review of Neuroscience", vol. 32, pp. 185-208 <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.neuro.051508.135550>

Piaget J. e Szemiska (1968), *La genesi del numero nel bambino*, Firenze, La Nuova Italia

Piazza M., Mechelli A., Price C.J., Butterworth B. (2006), *Exact and approximate judgements of visual and auditory numerosity: an fMRI study*, "Brain Research", vol. 1106 (1), pp. 177-188 <https://doi.org/10.1016/j.brainres.2006.05.104>

Pica P., Lerner C., Izard V., Dehaene S. (2004), *Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group*, "Science", vol. 306(5695), pp. 499-503

Scalise N.R., Purpura D.J. (2021), Numerical development in preschool: examining potential mediators of children's approximate number system and mathematics achievement, "Journal of Educational Psychology", vol. 114(5), pp. 1192-1204 <http://dx.doi.org/10.1037/edu0000698>

Schneider et al. (2017), *Associations of non-symbolic and symbolic numerical magnitude processing with mathematical competence: a meta-analysis*, "Developmental Science", vol, 20(3) <https://doi.org/10.1111/desc.12372>

Sella F., Berteletti I., Lucangeli D., Zorzi M. (2016), *Spontaneous non-verbal counting in toddlers*, "Developmental Science", vol. 19 (2), pp. 329-337 <https://doi.org/10.1111/desc.12299>

Starkey P., Spelke E.S. e Gelman R. (1990), *Numerical abstraction by human infants*, "Cognition", vol. 36, pp. 97-128

Starr A., Libertus M.E., Brannon E.M. (2013), *Number sense in infancy predicts mathematical abilities in childhood*, "PNAS Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America", vol. 110 (45), pp-18116-18120 <https://psycnet.apa.org/doi/10.1073/pnas.1302751110>

Tomlinson R.C., DeWind N.K., Brannon E. (2020), *Number sense biases children's area judgments*, "Cognition", vol. 204(104352) <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2020.104352>

Wang J., Halberda J., Feigenson L. (2020), *Emergence of the link between the*

approximate number system and symbolic math ability, “Child Development”, vol. 92 (2), pp. e186-e200 <https://doi.org/10.1111/cdev.13454>

Wynn K. (1992), *Addition and subtraction by human infants*, “Nature”, vol. 358, pp. 749-751

Yousif S.R., Keil F.C. (2019), *The additive-area heuristic: An efficient but illusory means of visual area approximation*, “Psychological Science”, vol. 30, pp. 495-503 <https://doi.org/10.1177/0956797619831617>

Yousif S.R., Keil F.C. (2020), *Area, not number dominates estimates of visual quantities*, “Scientific Reports”, vol. 10, pp. 1-13 <https://doi.org/10.1177/0956797619831617>

Xu F., Arriaga R.I. (2007), *Number discrimination in 10-month-old infants*, “British Journal of Developmental Psychology”, vol. 25, pp. 103-108 <http://dx.doi.org/10.1348/026151005X90704>

Xu F., Spelke E.S. (2000), *Large number discrimination in 6-month-old infants*, “Cognition”, vol. 74 (1), B1-B11 <https://www.harvardlds.org/wp-content/uploads/2017/01/xu2000b-1.pdf>