

Università degli Studi di Padova – Dipartimento di Ingegneria Industriale
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

***Relazione per la prova finale
«Circular restricted three body problem:
studio e design di orbite»***

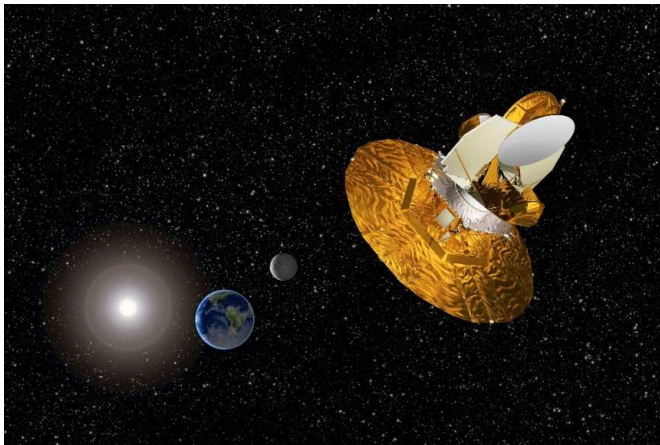
Tutor universitario: Prof. Bettanini Fecia Di Cossato Carlo

Laureando: *Tonon Lorenzo*

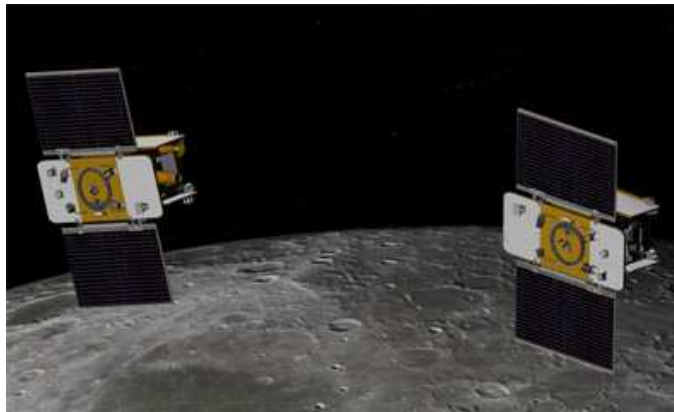
Padova, 13/09/2022

In un'epoca di forte investimento e crescita nel settore spaziale, si è cercato di raggiungere luoghi sempre più remoti nel nostro sistema solare per motivi di ricerca o possibili futuri viaggi interplanetari.

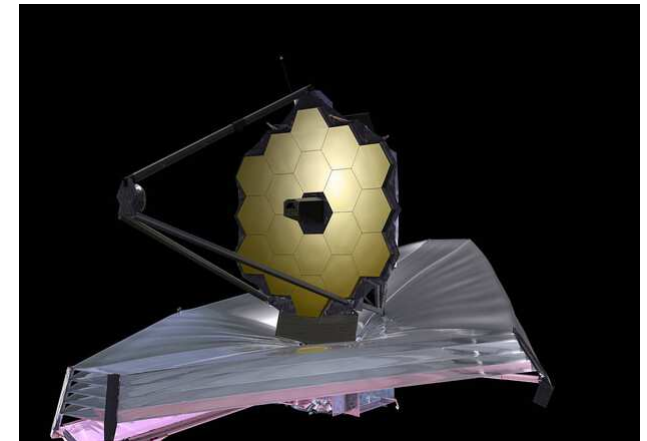
Nell'ambito dello studio dei viaggi spaziali possono essere valutate una varietà di orbite, negli ultimi decenni sono state utilizzate le orbite di terzo corpo per i loro vantaggi.



WMAP, 2001
Satellite utilizzato per la misura delle radiazioni di fondo del Big Bang [1]



GRAIL, 2011
Satellite utilizzato per la misura del campo gravitazionale lunare [2]

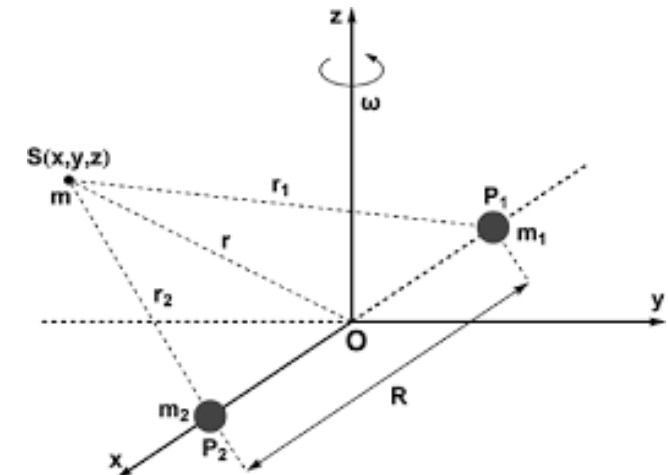


James Webb Telescope, 2021
Telescopio spaziale per l'astronomia nell'infrarosso [3]

- Ricercare le metodologie per lo studio di orbite all'interno del CRTBP
- Ricercare le metodologie per lo studio di trasferimenti a bassa energia e consumo di carburante
- Valutare vantaggi e svantaggi nel loro utilizzo per future missioni

Ipotesi del modello:

- La massa del terzo corpo è trascurabile rispetto agli altri due corpi
- I due corpi massivi viaggiano su orbite circolari
- Il sistema di riferimento ha origine nel baricentro dei due corpi massivi e ruota con la loro stessa velocità



Sistema di riferimento del problema del terzo corpo [4]

Equazioni del moto:

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x - (1 - \mu) \frac{x + \mu}{r_1^3} - \mu \frac{x - 1 + \mu}{r_2^3}$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} + y - (1 - \mu) \frac{y}{r_1^3} - \mu \frac{y}{r_2^3}$$

$$\ddot{z} = -(1 - \mu) \frac{z}{r_1^3} - \mu \frac{z}{r_2^3}$$

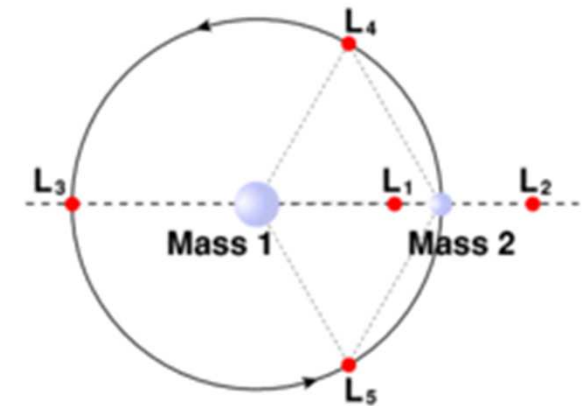
r_1 : distanza dal corpo 1

r_2 : distanza dal corpo 2

$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$: costante per normalizzare il problema

- **Punti lagrangiani:** sono punti nello spazio in cui due corpi dotati di grande massa, tramite l'interazione gravitazionale, consentono a un terzo corpo di massa molto inferiore di mantenere una posizione stabile relativamente ad essi

- **Orbite periodiche e quasi periodiche:** spostando l'origine degli assi in un punto lagrangiano e linearizzando le equazioni del moto si ottiene il sistema in diapositiva con la sua rispettiva soluzione.



Punti lagrangiani nel sistema di riferimento [5]

Le orbite si differenziano a seconda del rapporto $\frac{\lambda}{\nu}$ sono:

- **Periodiche** se il rapporto è un numero razionale
- **Semi-periodiche** se il rapporto non è razionale

Le orbite più utilizzate sono:

- **Halo:** orbite periodiche dove $\lambda = \nu$
- **Lissajous** o quasi-Halo: orbite quasi periodiche
- **Lyapunov:** orbite che giacciono in un piano con valore di $A_z = 0$

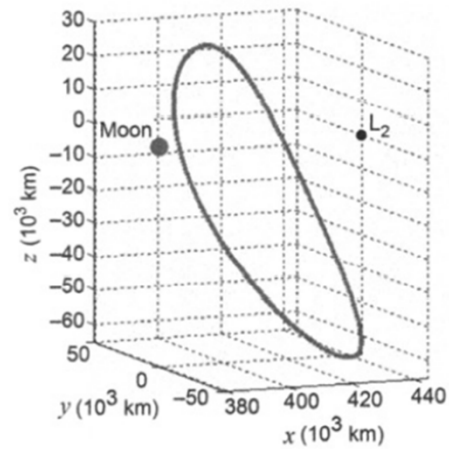
$$\begin{aligned}\ddot{x}' - 2\dot{y}' - (1 + 2c)x' &= 0 \\ \ddot{y}' + 2\dot{x}' + (c - 1)y' &= 0 \\ \ddot{z}' + cz' &= 0\end{aligned}$$



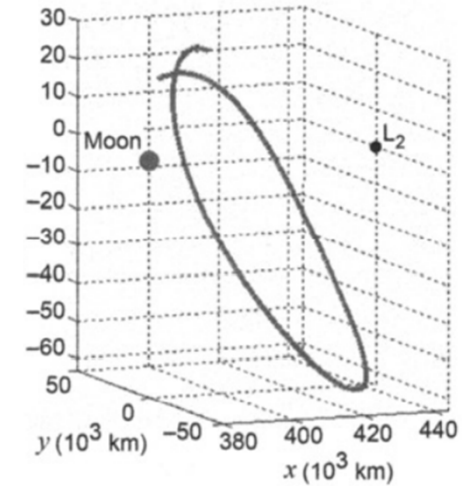
$$\begin{aligned}x' &= -A_y \cos(\lambda t + \phi) \\ y' &= A_y \sin(\lambda t + \phi) \\ z' &= A_z \sin(\nu t + \psi)\end{aligned}$$

A_y : ampiezza nel piano x-y
 A_z : ampiezza fuori dal piano x-y
 λ, ν : frequenza di oscillazione
 ϕ, ψ : angolo di fase
 c : coefficiente costante

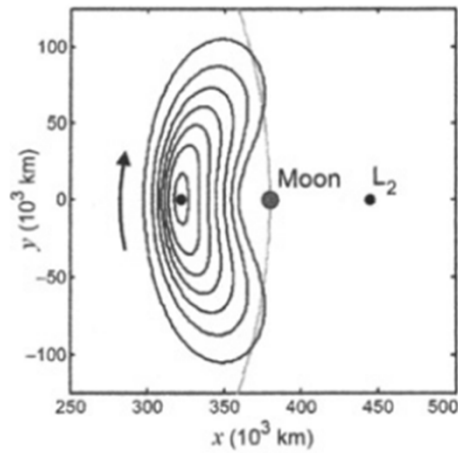
Halo



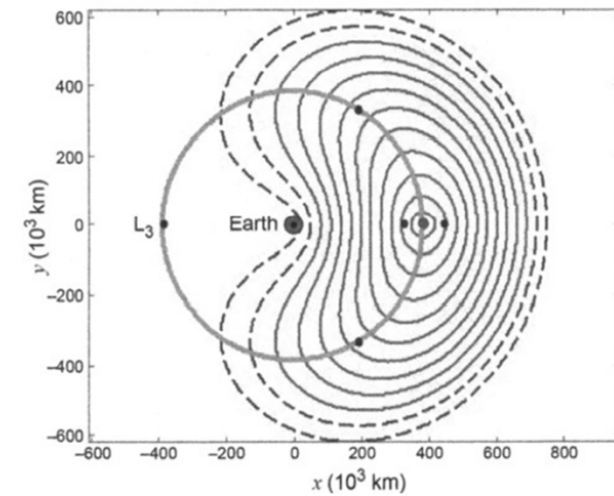
Lissajous o Quasi-Halo



Lyapunov



Distant retrograde orbit



Immagini prese da [6]

Questo è un metodo per la costruzione di orbite all'interno del CRTBP, esso prende una serie di stati e li corregge simultaneamente con la possibilità di introdurre dei vincoli

-Matrice di transizione

Per il funzionamento di questo metodo si utilizza la matrice di transizione.

Questa matrice permette di monitorare la dinamica lungo la traiettoria e ne approssima il cambiamento delle variabili lungo la stessa

$$\mathbf{X} = [x \quad y \quad z \quad \dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}]^T \quad \Phi(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{X}(t)}{\partial \mathbf{X}(t_0)}$$

Il metodo inizia con la designazione di punti caratteristici della traiettoria nello spazio e successivamente si divide in due fasi:

Fase 1: Questa fase serve per rendere la traiettoria continua e affinché la traiettoria finisca nel punto successivo ma saranno presenti delle manovre da effettuare ad ogni punto di congiunzione

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{R}_f \\ \delta \mathbf{V}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{RR}(t_f, t_0) & \Phi_{RV}(t_f, t_0) \\ \Phi_{VR}(t_f, t_0) & \Phi_{VV}(t_f, t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{R}_0 \\ \Delta \mathbf{V}_0 \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{V}_0 = [\Phi_{RV}(t_f, t_0)]^{-1} \delta \mathbf{R}_f$$

R: vettore delle posizione

V: vettore delle velocità

Col pedice 0 e f si intende rispettivamente il punto iniziale e finale

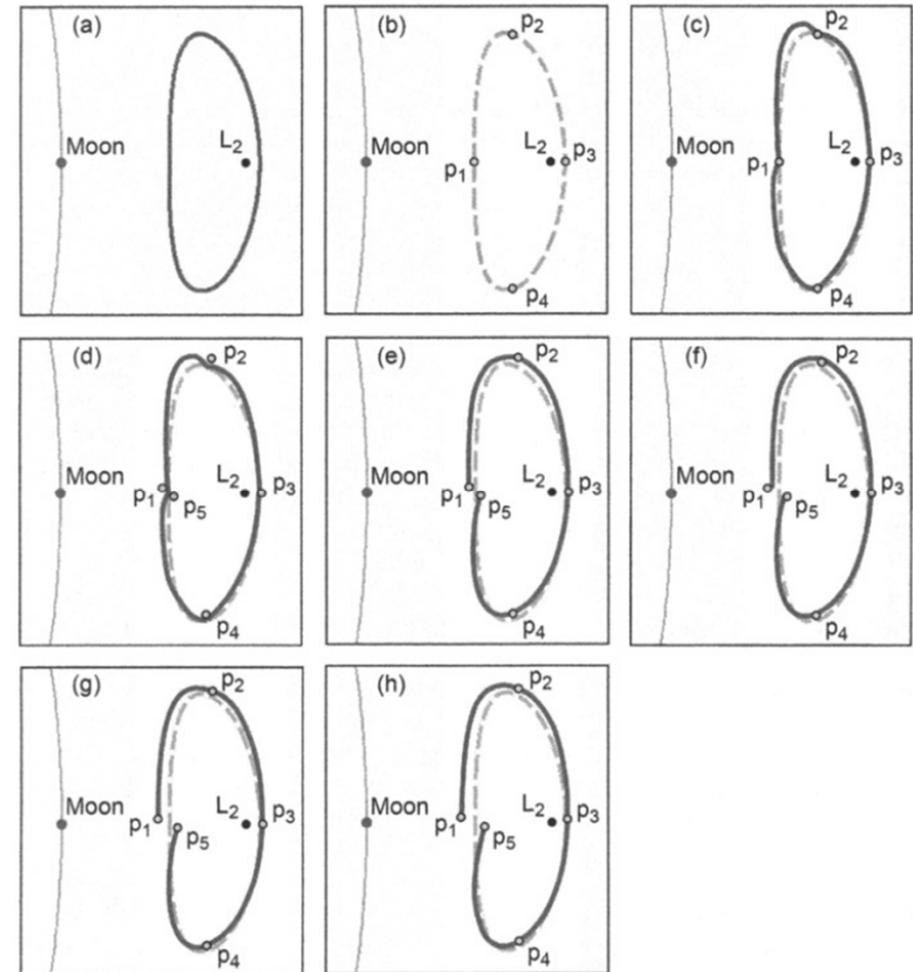
Fase 2: Le posizioni e i tempi di ciascun punto vengono aggiustate in questa fase in modo tale da ridurre il costo della manovra, questa fase crea una discontinuità nei punti

Le fasi vengono ripetute fino a che la discontinuità è sotto la tolleranza desiderata

$$[\delta \Delta \mathbf{V}_2] = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta \mathbf{V}_2}{\partial \mathbf{R}_1} & \frac{\partial \Delta \mathbf{V}_2}{\partial t_1} & \frac{\partial \Delta \mathbf{V}_2}{\partial \mathbf{R}_2} & \frac{\partial \Delta \mathbf{V}_2}{\partial t_2} & \frac{\partial \Delta \mathbf{V}_2}{\partial \mathbf{R}_3} & \frac{\partial \Delta \mathbf{V}_2}{\partial t_3} \end{bmatrix}}_{[M]} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{R}_1 \\ \delta t_1 \\ \delta \mathbf{R}_2 \\ \delta t_2 \\ \delta \mathbf{R}_3 \\ \delta t_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{R}_1 \\ \delta t_1 \\ \delta \mathbf{R}_2 \\ \delta t_2 \\ \delta \mathbf{R}_3 \\ \delta t_3 \end{bmatrix} = M^T (M M^T)^{-1} [\delta \Delta \mathbf{V}_2]$$

Con i pedici si indica l'appartenenza a un punto designato dei parametri di posizione e tempo



Correzione differenziale di un'orbita Halo visualizzata nel piano x-y [7]

- Stabilità di un'orbita:

Con il termine stabilità si intende la capacità di mantenere la traiettoria dell'orbita dopo aver subito delle perturbazioni.

Se l'orbita è instabile dopo aver subito una perturbazione lo spacecraft devierà in maniera esponenziale dall'orbita di partenza.

Lo studio avviene mediante il calcolo degli autovalori della matrice di monodromia.

La maggior parte delle orbite descritte in precedenza è instabile

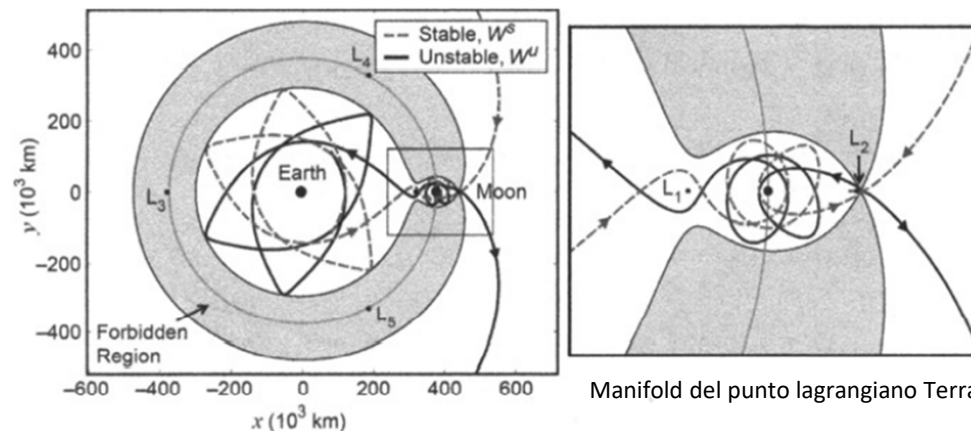
- Invariant manifold

Questi sono tutte le possibili traiettorie per arrivare o partire da elementi caratteristici del modello del terzo corpo (punti lagrangiani, orbite instabili, etc..), esse vengono percorse in modo naturale senza il bisogno di manovre data l'instabilità delle orbite.

A seconda della orbita che si sta percorrendo è possibile determinare in ogni punto le direzioni di massima instabilità e stabilità di essa.

I manifold sono divisi in due categorie:

- Instabili: traiettorie percorse dopo una perturbazione lungo un autovettore instabile di un'orbita periodica
- Stabili: traiettorie che da remoto si avvicinano asintoticamente all'orbita periodica instabile lungo le direzioni degli autovettori stabili



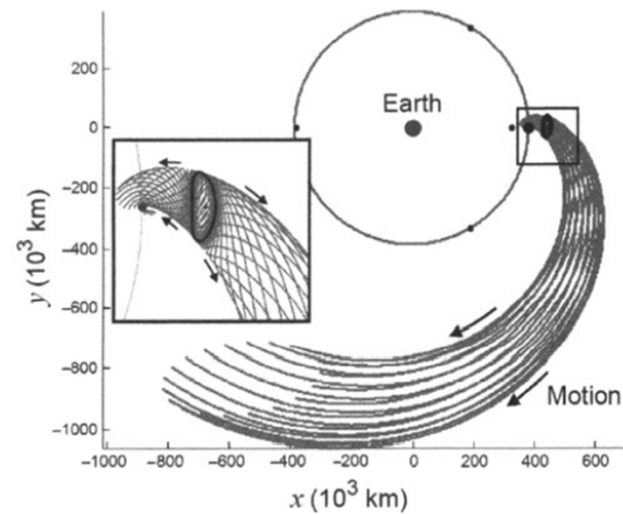
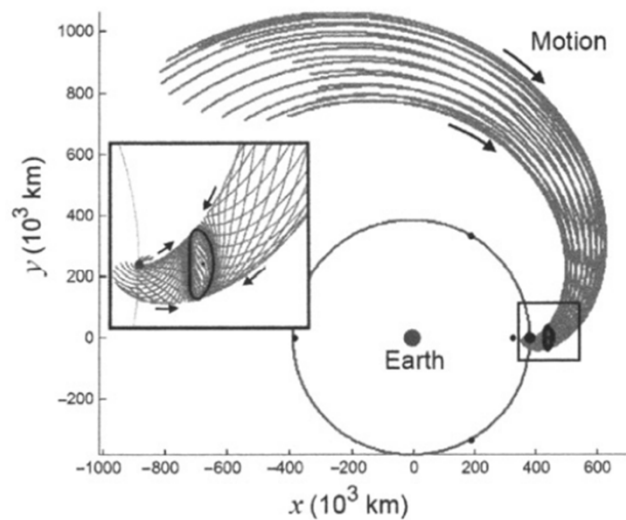
Manifold del punto lagrangiano Terra-Luna L2 [8]

Per ricavare i manifold si utilizzano le seguenti formule:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^S &= \Phi(t_i, t_0) \mathbf{v}^S \\ \mathbf{v}_i^U &= \Phi(t_i, t_0) \mathbf{v}^U \\ \mathbf{X}_i^S &= \mathbf{X}_i \pm \epsilon \frac{\mathbf{v}_i^S}{|\mathbf{v}_i^S|} \\ \mathbf{X}_i^U &= \mathbf{X}_i \pm \epsilon \frac{\mathbf{v}_i^U}{|\mathbf{v}_i^U|} \end{aligned}$$

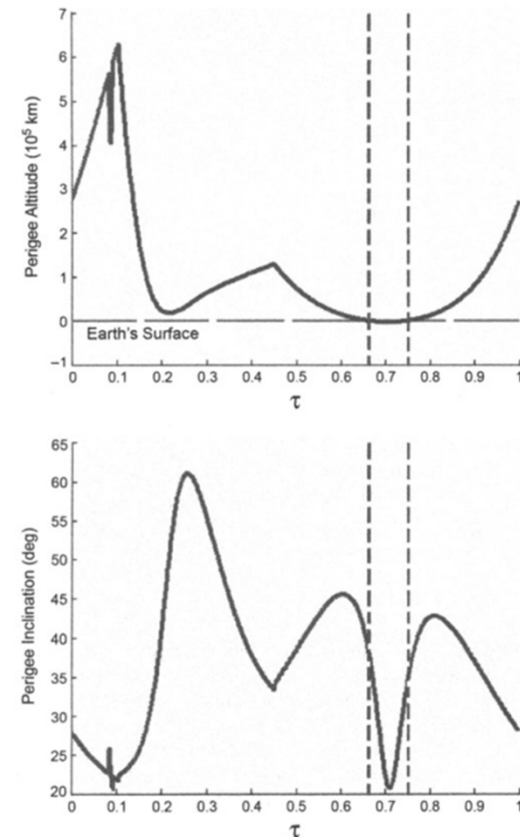
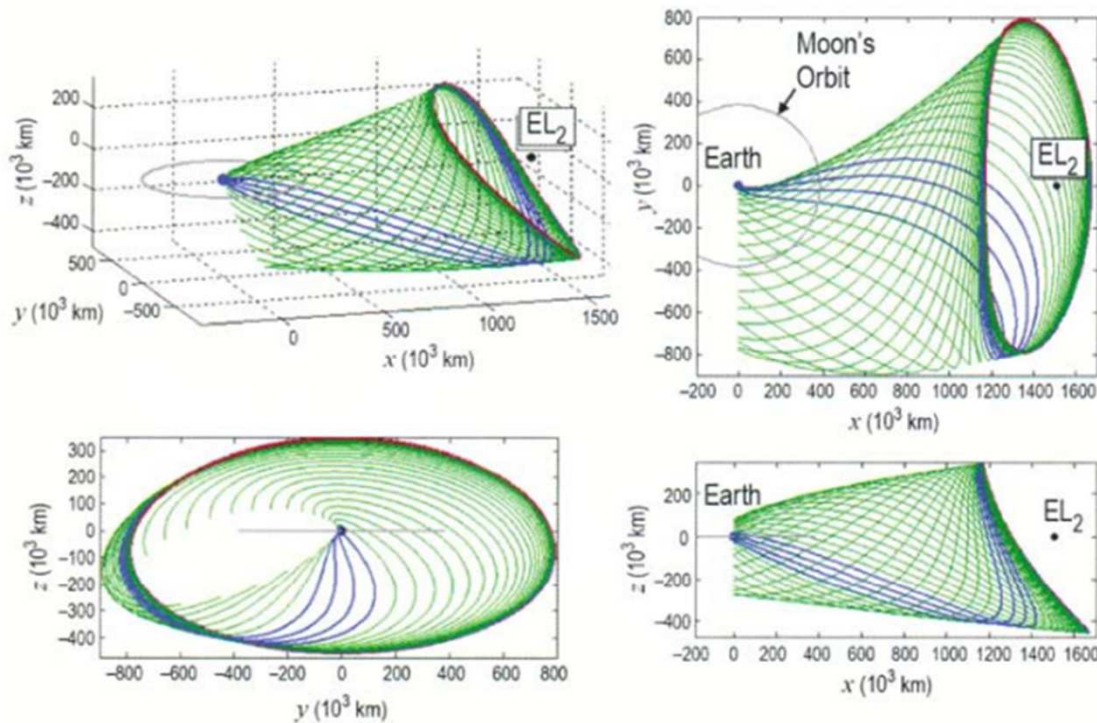
$\mathbf{v}^S$: autovettore stabile/instabile della matrice di monodromia
 Φ : matrice di transizione valutata in un punto dell'orbita al tempo t_i
 $\mathbf{v}_i^S$: vettore stabile/ instabile del punto al tempo t_i

Queste vengono propagate per tutta l'orbita periodica formando un «tubo» di traiettorie nello spazio.



Manifold stabile e instabile di un'orbita Lyapunov attorno punto L2 [7]

Esempio di studio preliminare per un trasferimento dalla Terra in una orbita Halo attorno al punto L2 [7]



τ : rappresenta il rapporto del tempo di una posizione nell'orbita Halo in rapporto col periodo della stessa

Con le seguenti metodologie è possibile costruire orbite nel problema del terzo corpo le quali rispetto alle orbite tradizionali avranno i seguenti vantaggi:

- Orbite periodiche le quali avranno meno elementi disturbanti per effettuare misure per la ricerca (atmosfera, detriti spaziali, radiazione solare)
- Basso consumo di carburante durante la missione, manovre con impulsi intorno alle centinaia di m/s
- Maggior flessibilità dell'orbita, possono raggiungere agilmente molti più punti nello spazio rispetto ai trasferimenti convenzionali

- [1] <https://www.britannica.com/topic/Wilkinson-Microwave-Anisotropy-Probe>
- [2] <https://images.immediate.co.uk/production/volatile/sites/25/2021/06/WMAP-mission-9a656de.jpeg>
- [3] https://www.ansa.it/webimages/ch_620x438/2022/6/9/5463f0a8e865da39cd09f6a36e912fe8.jpg
- [4] <https://encryptedtbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSHLjlnBPQw6JKVapoA0VFKEm6jnWHhHyjhgNksG4b6552BdW91oHI4tycRxTcHAS5qw7U&usqp=CAU>
- [5] https://www.alegsaonline.com/image/220px-Lagrange_2_mass.gif
- [6] J. S. Parker, Low-Energy Ballistic Lunar Transfers. Ph.D. thesis, University of Colorado, Boulder, Colorado, 2007
- [7] Rodney L. Anderson, J.S. Parker, Low-Energy Lunar Trajectory Design, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology
- [8] D. A. Vallado, Fundamentals of Astrodynamics and Applications, Second Edition. Microcosm Press, El Segundo, California, and Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-BostonLondon, 2001