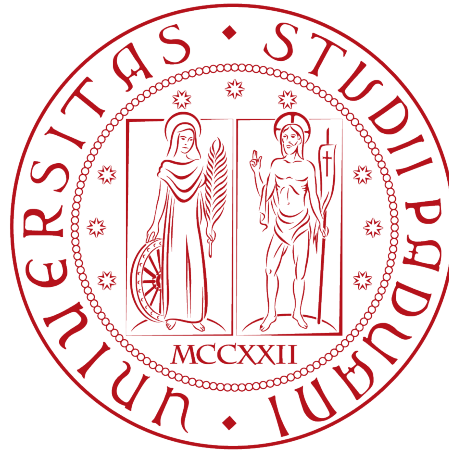




UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea

Elettrodinamica dell'assione e principi di rilevamento degli assioni solari

Relatore

Dott. Luca Di Luzio

Laureando

Andrea Incrocci

Anno Accademico 2021/2022

Indice

Introduzione	5
1 Elettrodinamica dell'assione	7
1.1 La lagrangiana per l'interazione assione-fotone	7
1.2 Le equazioni di Maxwell modificate	8
2 Oscillazione assione-fotone	11
2.1 Linearizzazione del sistema	11
2.2 Risoluzione del sistema omogeneo	13
2.3 Risoluzione del sistema non omogeneo	14
2.4 Risoluzione del sistema completo	14
2.5 Diagonalizzazione della matrice	15
2.6 Risoluzione dell'equazione di Schroedinger e calcolo della probabilità di oscillazione	16
3 Gli assioni solari e la loro rilevazione	19
3.1 La produzione di assioni nel sole	20
3.2 La rilevazione degli assioni	21
3.3 Gli elioscopi	23
3.3.1 L'esperimento CAST	23
3.3.2 L'esperimento IAXO	25
Conclusioni	27
A Il simbolo ϵ ed il tensore ε di Levi-Civita	29

Introduzione

Uno dei maggiori problemi irrisolti della fisica moderna riguarda la comprensione della vera natura della materia oscura. Molte estensioni del Modello Standard teorizzano l'esistenza di particelle poco interagenti con la materia. Tra queste, uno dei candidati maggiormente supportati dalla teoria è l'assione. Questo è una particella ipotetica che compare nelle estensioni del Modello Standard che includono il meccanismo di Peccei-Quinn [1]. Tale meccanismo, teorizzato nel 1977, è uno dei più validi candidati alla risoluzione del problema della CP forte.

Si dice che un sistema o un fenomeno fisico esibiscono simmetria CP se, effettuando sia una coniugazione di carica, scambiando quindi particelle con antiparticelle, sia una trasformazione di parità, invertendo l'orientazione degli assi del sistema di riferimento, la legge che lo descrive resta la medesima. È ormai ben noto che l'interazione elettrodebole viola la simmetria CP. Tale violazione non è stata però ancora osservata nei processi dovuti all'interazione forte, cosa invece prevista dalla cromodinamica quantistica. Nella lagrangiana della QCD sono infatti presenti termini in grado di rompere tale simmetria.

La non osservazione di violazione di CP ha quindi imposto forti restrizioni ad alcuni parametri liberi del Modello Standard, vale a dire valori non predetti dal modello stesso. Questo ha sollevato un cosiddetto problema di "fine tuning", ovverosia la necessità di dover aggiustare con estrema precisione i parametri liberi del modello al fine di accordare la teoria alle osservazioni. Questo fatto è generalmente considerato problematico in quanto incapace di spiegare come mai il parametro assuma quel determinato valore.

Il meccanismo di Peccei-Quinn fu proposto per risolvere tale problema senza richiedere alcun parametro fine-tuned. Questo comporta però la comparsa di una nuova particella, per l'appunto l'assione. Il meccanismo prevede che l'assione sia un bosone pseudoscalare neutro estremamente leggero e poco interagente con la materia ordinaria. Questa proprietà lo rende come anticipato anche un ottimo candidato a spiegare la natura della materia oscura.

La mancata rilevazione di nuove particelle presso LHC, previste da numerose estensioni del Modello Standard ha rinnovato, negli ultimi anni, l'interesse sia teorico che sperimentale nei confronti di questa ipotetica particella.

Capitolo 1

Elettrodinamica dell'assione

Il modello di Peccei-Quinn prevede che gli assioni possano interagire con i fotoni come descritto dal termine lagrangiano $\mathcal{L}_{a\gamma} = g_{a\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} a$ dove $g_{a\gamma}$ è la costante di accoppiamento tra fotoni e assioni, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ rispettivamente il campo elettrico e magnetico ed a il campo assionico. Lo scopo di questo primo capitolo è determinare le equazioni di Maxwell modificate a causa dell'interazione dei fotoni con gli assioni a partire dalla densità lagrangiana completa per l'interazione tra assione e campo EM, prestando particolare attenzione alla differenza tra simbolo e tensore di Levi-Civita, dovuta all'utilizzo della metrica di Minkowski nella formulazione covariante delle equazioni che verranno presentate. Per una discussione completa delle definizioni utilizzate nel seguito si faccia riferimento all'appendice A.

1.1 La lagrangiana per l'interazione assione-fotone

Costruiamo la densità lagrangiana in modo che contenga i termini per il campo EM libero, l'interazione campo-particella carica, il campo dell'assione e l'interazione tra campo assionico e campo EM. Otteniamo dunque ¹

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J^\nu A_\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu a \partial^\mu a - \frac{1}{2}m_a^2 a^2 - \frac{g_{a\gamma}}{4}F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}a \quad (1.1.1)$$

dove a è il campo dell'assione, m_a la sua massa, $g_{a\gamma}$ la costante di accoppiamento, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ il tensore elettromagnetico, $\tilde{F}^{\mu\nu}$ il suo duale, $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ il potenziale vettore e $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$ la quadricorrente. In particolare, il tensore duale è definito come

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \\ \tilde{F}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

dove ϵ indica il simbolo di Levi-Civita mentre ϵ il tensore. Ancora una volta si rimanda all'appendice A per una trattazione più esaustiva sulla loro differenza.

Ricordiamo le espressioni valide per le componenti di F

$$\begin{aligned} F^{i0} &:= E^i \\ F^{ij} &:= -\epsilon^{ijk}B_k = -\epsilon^{ijk}B_k \\ F_{ij} &:= -\epsilon_{ijk}B^k = \epsilon_{ijk}B^k. \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

¹Il segno del termine di accoppiamento è stato scelto in accordo con [2].

A partire da queste è possibile ottenere analoghe espressioni per il tensore duale

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{i0} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{iojk}F_{jk} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{0ijk}(\varepsilon_{jkl}B^l) = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(\varepsilon_{jkl}B^l) = \delta_l^i B^l = B^i \\ \tilde{F}^{ij} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ij0k}F_{0k} + \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk0}F_{k0} = \varepsilon^{ijk0}F_{k0} = -\varepsilon^{0ijk}F_{k0} = \varepsilon^{ijk}E_k.\end{aligned}\tag{1.1.4}$$

Vista la loro utilità nel seguito si riportano espressamente le componenti di F e $\tilde{F}$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & -E^3 & E^2 \\ B^2 & E^3 & 0 & -E^1 \\ B^3 & -E^2 & E^1 & 0 \end{pmatrix}.\tag{1.1.5}$$

1.2 Le equazioni di Maxwell modificate

A partire dalla lagrangiana è ora possibile determinare le equazioni del moto. Anche in una teoria di campo classica è infatti possibile derivare la dinamica del sistema a partire da un principio di minima azione². Si può dimostrare poi che tale principio di minima azione è equivalente alla richiesta che i campi soddisfino le equazioni di Eulero-Lagrange, che in questo particolare formalismo assumono la forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0.\tag{1.2.1}$$

Nel nostro caso abbiamo cinque campi distinti, le quattro componenti del potenziale vettore e il campo assionico. Otterremo quindi due distinti set di equazioni: le equazioni di Maxwell con sorgenti modificate per l'interazione con l'assione a partire dal potenziale vettore e l'equazione del moto per l'assione a partire dal campo assionico. Eseguiamo quindi i calcoli

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda a)} = -m_a^2 - \frac{g_{a\gamma}}{4} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\mu a = 0\tag{1.2.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_k} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda A_k)} &= -J^k - \partial_\lambda \frac{\partial}{\partial (\partial_\lambda A_k)} \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{g_{a\gamma}}{4} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} a \right] = \\ &= -J^k + \partial_\lambda \frac{\partial}{\partial (\partial_\lambda A_k)} \left[\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{g_{a\gamma}}{8} F^{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} a \right] = \\ &= -J^k + \partial_\lambda \left[\frac{1}{2} (\delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu k} - \delta^{\lambda\nu} \delta^{\mu k}) F_{\mu\nu} + \frac{g_{a\gamma}}{4} (\delta^{\mu\lambda} \delta^{k\nu} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} + \right. \\ &\quad \left. + F^{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \delta^{\rho\lambda} \delta^{k\sigma}) a \right] = \\ &= -J^k + \partial_\lambda \left[F^{\lambda k} + \frac{g_{a\gamma}}{4} (\varepsilon^{\lambda k}{}_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} + F^{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu}{}^{\lambda k}) a \right] = \\ &= -J^k + \partial_\lambda \left[F^{\lambda k} + \frac{g_{a\gamma}}{2} (\varepsilon^{\lambda k}{}_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}) a \right] = \\ &= -J^k + \partial_\lambda [F^{\lambda k} + g_{a\gamma} \tilde{F}^{\lambda k} a] = 0.\end{aligned}\tag{1.2.3}$$

A queste due equazioni aggiungiamo anche l'identità di Bianchi, che è stata assunta implicitamente per poter esprimere il tensore F in termini del potenziale vettore. Otteniamo quindi le

²Per una dimostrazione di ciò vedere [3] al cap. 4.

equazioni

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu - g_{a\gamma} \tilde{F}^{\mu\nu} \partial_\mu a \quad (1.2.4a)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_a^2) a = -\frac{g_{a\gamma}}{4} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \quad (1.2.4b)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0. \quad (1.2.4c)$$

Vorremmo ora esprimere tali equazioni in termini dei campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Per fare ciò bisogna innanzitutto determinare la contrazione $F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$ che risulta essere

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = \\ &= \frac{1}{2} \left[F^{0i} \varepsilon_{0ijk} F^{jk} + F^{i0} \varepsilon_{i0jk} F^{jk} + F^{ij} \varepsilon_{ij0k} F^{0k} + F^{ij} \varepsilon_{ijk0} F^{k0} \right] = \\ &= 2F^{0i} \varepsilon_{0ijk} F^{jk} = 2 \left(-E^i \right) \varepsilon_{ijk} \left(-\varepsilon^{ijk} B_k \right) = -4\delta_i^k E^i B_k = -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

A partire dall'eq. (1.2.4a) troviamo invece

$$\begin{aligned} \nu = 0 &\implies \partial_i F^{i0} = J^0 - g_{a\gamma} \tilde{F}^{i0} \partial_i a \\ \partial_i E^i &= J^0 - \frac{g_{a\gamma}}{2} \epsilon^{i0jk} F_{jk} \partial_i a \\ \partial_i E^i &= J^0 + \frac{g_{a\gamma}}{2} \epsilon^{0ijk} \left(-\epsilon_{jkl} B^l \right) \partial_i a \\ \partial_i E^i &= J^0 - g_{a\gamma} \delta_l^i B^l \partial_i a \\ \partial_i E^i &= J^0 - g_{a\gamma} B^i \partial_i a \\ \nu = i &\implies \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = J^i - g_{a\gamma} \tilde{F}^{0i} \partial_0 a - g_{a\gamma} \tilde{F}^{ji} \partial_j a \\ \partial_0 \left(-E^i \right) + \partial_j \left(-\epsilon^{jik} B_k \right) &= J^i - g_{a\gamma} \left(-B^i \right) \partial_0 a - g_{a\gamma} \left(\epsilon^{jik} E_k \right) \partial_j a \\ &\quad - \partial_0 E^i + \epsilon^{ijk} \partial_j B_k = J^i + g_{a\gamma} B^i \partial_0 a - g_{a\gamma} \epsilon^{ikj} E_k \partial_j a. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

In definitiva otteniamo il sistema di cinque equazioni

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho - g_{a\gamma} \mathbf{B} \cdot \nabla a \quad (1.2.7a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{J} + g_{a\gamma} (\mathbf{B} \dot{a} - \mathbf{E} \times \nabla a) \quad (1.2.7b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2.7c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0 \quad (1.2.7d)$$

$$\ddot{a} - \nabla^2 a + m_a^2 a = g_{a\gamma} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.2.7e)$$

Capitolo 2

Oscillazione assione-fotone

Nella sezione precedente abbiamo determinato le equazioni di Maxwell modificate in seguito all'interazione tra fotoni ed assioni. Scopo di questo capitolo è invece determinare una soluzione particolare di queste equazioni. Nel caso di nostro interesse ci poniamo in assenza di sorgenti e in presenza di un intenso campo magnetico esterno $\mathbf{B}_e(\mathbf{x})$ indipendente dal tempo e poco variabile nello spazio.

2.1 Linearizzazione del sistema

In tali condizioni possiamo assumere che $\mathbf{B} = \mathbf{B}_e$ e che questo sia sufficientemente intenso da poter considerare trascurabili gli altri campi, in particolare la componente elettromagnetica indotta dalla presenza dell'assione. Possiamo inoltre ipotizzare che il termine $\mathbf{E} \times \nabla a$ sia trascurabile rispetto al termine $\mathbf{B}\dot{a}$. In questo modo il sistema di equazioni da risolvere si riduce ad essere

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -g_{a\gamma} \mathbf{B}_e \cdot \nabla a \quad (2.1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \dot{\mathbf{E}} = g_{a\gamma} \mathbf{B}_e \dot{a} \quad (2.1.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0 \quad (2.1.1d)$$

$$\ddot{a} - \nabla^2 a + m_a^2 a = g_{a\gamma} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}_e). \quad (2.1.1e)$$

Le equazioni così ottenute sono lineari nelle componenti spaziali e temporali. Anche per il campo magnetico infatti, essendo pressoché costante nella zona di nostro interesse, è possibile sviluppare le sue componenti al primo ordine rispetto ad $\mathbf{x}$. Risulta quindi conveniente espandere i campi in onde piane proporzionali a $e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$ ¹.

Consideriamo ora più specificatamente il caso in cui il campo magnetico $\mathbf{B}_e$ sia perpendicolare alla direzione di propagazione degli assioni e dei fotoni, e quindi giacente sul piano x - y mentre questi ultimi si propagheranno in direzione z . Il fatto che il campo magnetico sia trasversale alla direzione di propagazione è necessario affinché possa avvenire il mixing tra fotoni ed assioni. I primi hanno $J_z = \pm 1$ mentre i secondi $J_z = 0$ ed un campo magnetico longitudinale non sarebbe in grado di indurre un cambiamento nella proiezione di J lungo z ².

Esprimiamo ora nuovamente il sistema in termini del potenziale vettore e del campo assionico, questo servirà per poter calcolare la probabilità di oscillazione tra assioni e fotoni. Ricordando l'ipotesi appena fatta riguardo la scomposizione in onde piane, utilizziamo la gauge di Lorenz

¹Si veda [2] alla sezione 2.3 per una trattazione più dettagliata in cui sono incluse le sorgenti e si considera la propagazione nei mezzi anziché nel vuoto.

²cfr. [4] cap II.

$\partial_\mu A^\mu = 0$ per rimaneggiare le equazioni (1.2.4a) e (1.2.4b). L'ipotesi che sia presente un intenso campo magnetico esterno si traduce ora nell'ipotesi che il termine $g_{a\gamma} \tilde{F}^{\mu\nu} \partial_\mu a$ possa essere approssimato con $g_{a\gamma} \tilde{F}_{ext}^{\mu\nu} \partial_\mu a$. Possiamo innanzitutto esprimere $F^{\mu\nu}$ in funzione del potenziale vettore per riscrivere (1.2.4a) come

$$\begin{aligned}\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= J^\nu - g_{a\gamma} \tilde{F}^{\mu\nu} \partial_\mu a \\ \partial_\mu \partial^\mu A^\nu &= -g_{a\gamma} \tilde{F}^{\mu\nu} \partial_\mu a\end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio si è fatto uso della gauge di Lorenz e si è usata l'ipotesi d'assenza di sorgenti. Separando ora la parte spaziale e temporale del potenziale vettore, ricordando che $\mathbf{B}_e$ è perpendicolare alla direzione di propagazione di a e che il campo elettrico esterno è considerato trascurabile otteniamo

$$\begin{aligned}\partial_\mu \partial^\mu A^0 &= -g_{a\gamma} \tilde{F}^{i0} \partial_i a = -g_{a\gamma} B^i \partial_i a = -g_{a\gamma} B^z \partial_z a = 0 \\ \square A^0 &= 0\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

$$\begin{aligned}\partial_\mu \partial^\mu A^i &= -g_{a\gamma} (\tilde{F}^{0i} \partial_0 a + \tilde{F}^{ji} \partial_j a) = g_{a\gamma} B^i \partial_0 a \\ \square \mathbf{A} &= -g_{a\gamma} \mathbf{B} \partial_0 a.\end{aligned}\tag{2.1.3}$$

Nell'ultimo passaggio dell'eq. (2.1.2) si è utilizzato il fatto che, essendo a un'onda propagantesi in direzione z , l'unica derivata che lo colpisce è quella lungo z , il prodotto scalare contiene dunque solo la componente z ma, essendo $\mathbf{B}_e$ perpendicolare a z , la sua componente lungo questa direzione è nulla. In (2.1.3) si è invece ricordata l'espressione per le componenti di $\tilde{F}$ già determinate da eq. (1.1.4). $\tilde{F}^{ji}$ è dunque uguale al campo elettrico esterno, per ipotesi trascurabile.

Sempre esprimendo il prodotto $F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$ in termini del potenziale vettore, possiamo rimaneggiarlo nel seguente modo:

$$\begin{aligned}F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = \\ &= -\frac{1}{2} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) = \\ &= -2 \partial^\mu A^\nu \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\rho A^\sigma = \\ &= -4 \left(\partial^0 A^i \epsilon_{0ijk} \partial^j A^k + \partial^i A^0 \epsilon_{i0jk} \partial^j A^k \right) = \\ &= -4 \left(\partial^0 A^i B_i + \partial^i A^0 B_i \right).\end{aligned}\tag{2.1.4}$$

Ricordando ancora una volta l'ortogonalità del campo magnetico con la direzione di propagazione di A^μ e di a , utilizzando lo stesso argomento usato in eq. (2.1.2), l'eq. (1.2.4b) diviene

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_a^2) a = g_{a\gamma} \mathbf{B} \cdot \partial_0 \mathbf{A}.\tag{2.1.5}$$

Scomponiamo ora $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ lungo la direzione ortogonale e parallela al campo magnetico esterno $\mathbf{B}_e$. Per comprendere meglio le orientazioni dei campi può essere utile fare riferimento alla figura 2.1. Così facendo otteniamo il sistema di tre equazioni

$$\square A_{\perp} = 0 \quad (2.1.6a)$$

$$\square A_{\parallel} = g_{a\gamma} B_e \partial_0 a \quad (2.1.6b)$$

$$(\square + m_a^2) a = g_{a\gamma} \mathbf{B}_e \cdot \partial_0 \mathbf{A}. \quad (2.1.6c)$$

Tale scomposizione è giustificata dal fatto che, come già spiegato in precedenza, il diverso valore della proiezione di J lungo z di assioni e fotoni non consente il mixing tra la componente del potenziale vettore perpendicolare al campo magnetico ed a .

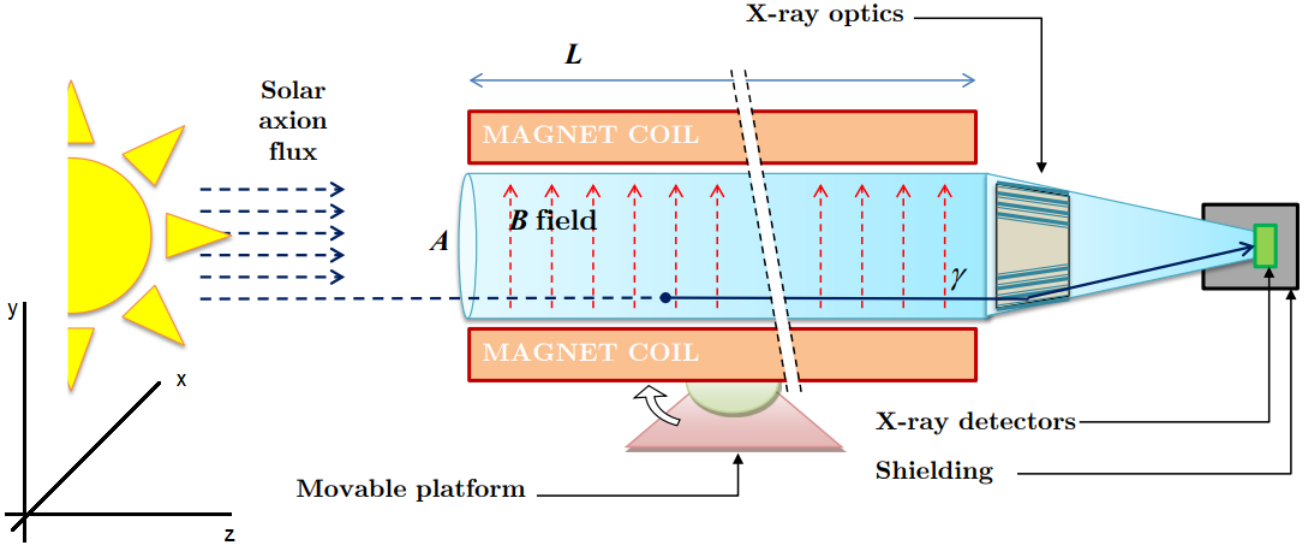


Figura 2.1: Schema dell'esperimento CAST presso il CERN. Immagine tratta da [5].

2.2 Risoluzione del sistema omogeneo

Iniziamo risolvendo il sistema omogeneo associato. Definiamo innanzitutto³

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} A_{\perp} \\ A_{\parallel} \\ a \end{pmatrix} \quad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_a^2 \end{pmatrix}$$

potendo quindi riscrivere il sistema (2.1.6) in forma compatta come

$$(\partial_0^2 - \nabla^2 + M^2) \Psi(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (2.2.1)$$

Ricordando l'assunzione di poter scomporre i campi come sovrapposizione di onde piane di frequenza fissata dirette in direzione $\hat{z}$ e quindi come sovrapposizione di $\Psi_{\omega}(z)e^{-i\omega t}$ riscriviamo l'equazione appena trovata nella forma

$$(-\omega^2 - \partial_z^2 + M^2) \Psi(t, z) = 0. \quad (2.2.2)$$

³Per maggiori dettagli si veda [6] cap 8.2.

2.3 Risoluzione del sistema non omogeneo

Esplicitiamo ora la forma delle onde piane di $\mathbf{A}$ ed a

$$A_{\perp} \propto e^{-i(\omega t - n_{\perp} \omega z)} \quad A_{\parallel} \propto e^{-i(\omega t - n_{\parallel} \omega z)} \quad a \propto e^{-i(\omega t - k_a z)} \quad (2.3.1)$$

dove si è usata la relazione di dispersione $k_i = n_i \omega$ con n_i l'indice di rifrazione. Sperimentalmente non è mai infatti possibile ottenere il vuoto assoluto e tracce di gas saranno sempre presenti nell'apparato. I valori degli indici sono diversi per le due diverse orientazioni rispetto al campo magnetico a causa dell'effetto Cotton-Mouton⁴. Sostituendo all'interno del sistema di equazioni (2.1.6) troviamo

$$\square A_{\perp} = (\partial_t^2 - \partial_z^2) A_{\perp} = (-\omega^2 + \omega^2 n_{\perp}^2) A_{\perp} = 0 \quad (2.3.2)$$

$$\begin{aligned} \square A_{\parallel} &= (\partial_t^2 - \partial_z^2) A_{\parallel} = (-\omega^2 + \omega^2 n_{\parallel}^2) A_{\parallel} \\ &= -i\omega g_{a\gamma} B_e a \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

$$\begin{aligned} (\square + m_a^2) a &= (\partial_t^2 - \partial_z^2 + m_a^2) a = (-\omega^2 + k_a^2 + m_a^2) a = 0 \\ &= -i\omega g_{a\gamma} B_e A_{\parallel} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

dove nell'ultima equazione abbiamo fatto uso della relazione di dispersione $k_a^2 = \omega^2 - m_a^2$.

Possiamo porre anche queste equazioni in forma matriciale ottenendo.

$$\left[\omega^2 \begin{pmatrix} n_{\perp}^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_{\parallel}^2 - 1 & \frac{ig_{a\gamma} B_e}{\omega} \\ 0 & \frac{ig_{a\gamma} B_e}{\omega} & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} A_{\perp} \\ A_{\parallel} \\ a \end{pmatrix} = 0. \quad (2.3.5)$$

Effettuiamo ora una trasformazione dei campi ponendo $A'_{\parallel} = e^{-i\frac{\pi}{2}} A_{\parallel}$ in maniera da rendere reali i valori complessi fuori dalla diagonale e denominando d'ora in poi semplicemente con $A_{\parallel}$ il campo modificato dall'aggiunta della fase.

Un effetto fino ad ora trascurato riguarda il possibile mixing delle componenti $A_{\perp}$ e $A_{\parallel}$, vale a dire la rotazione del piano di polarizzazione in mezzi otticamente attivi, effetto determinato dall'indice n_R . In generale ogni mezzo diviene otticamente attivo in presenza di un campo magnetico diretto nella stessa direzione di propagazione della radiazione, questo effetto è noto con il nome di effetto Faraday. Nella nostra configurazione abbiamo quindi che $n_{\perp}$ e $n_{\parallel}$ dipendono da $\mathbf{B}_e$ mentre n_R dalla componente longitudinale del campo magnetico.

2.4 Risoluzione del sistema completo

È noto che la soluzione di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti è data dalla somma algebrica della soluzione dell'equazione omogenea e della soluzione particolare, nel nostro

⁴Tale effetto si osserva quando un'onda polarizzata linearmente attraversa un mezzo immerso in un campo magnetico perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda. In questo caso l'onda passa dall'avere una polarizzazione lineare ad una ellittica.

caso prendiamo la differenza tra la particolare e l'omogenea in modo da ottenere gli stessi segni riportati in [6]. Includiamo il termine n_R discusso nella sezione precedente ottenendo

$$\left[\omega^2 + \partial_z^2 + \omega^2 \begin{pmatrix} n_\perp^2 - 1 & n_R & 0 \\ n_R & n_\parallel^2 - 1 & \frac{g_{a\gamma} B_e}{\omega} \\ 0 & \frac{g_{a\gamma} B_e}{\omega} & -\frac{m_a^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} A_\perp \\ A_\parallel \\ a \end{pmatrix} = 0. \quad (2.4.1)$$

Nella nostra configurazione possiamo assumere che la propagazione delle onde avvenga in una regione con $|n - 1| \ll 1$, questo poiché facciamo l'ipotesi che la zona in cui avviene la conversione tra assioni e fotoni sia pressoché vuota. Vale dunque $n^2 - 1 \approx 2(n - 1)$. Trascuriamo inoltre il termine n_R appena introdotto. Questo è possibile poiché l'effetto Faraday è inversamente proporzionale all'energia e completamente trascurabile già alle energie dei raggi X.⁵

$$\left[\omega^2 + \partial_z^2 + 2\omega^2 \begin{pmatrix} n_\perp - 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_\parallel - 1 & \frac{g_{a\gamma} B_e}{2\omega} \\ 0 & \frac{g_{a\gamma} B_e}{2\omega} & -\frac{m_a^2}{2\omega^2} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} A_\perp \\ A_\parallel \\ a \end{pmatrix} = 0. \quad (2.4.2)$$

Possiamo linearizzare l'equazione appena trovata. Nel limite di assioni relativistici per i quali $k_a \gg m_a$ la relazione di dispersione diviene $\omega = \sqrt{k_a^2 + m_a^2} \approx k_a$. Possiamo dunque scrivere $\omega^2 + \partial_z^2 = (\omega + i\partial_z)(\omega - i\partial_z) = (\omega + k)(\omega + i\partial_z) \approx 2\omega(\omega + i\partial_z)$ ottenendo il sistema

$$\left[\omega + \begin{pmatrix} \omega(n_\perp - 1) & 0 & 0 \\ 0 & \omega(n_\parallel - 1) & \frac{g_{a\gamma} B_e}{2} \\ 0 & \frac{g_{a\gamma} B_e}{2} & -\frac{m_a^2}{2\omega} \end{pmatrix} + i\partial_z \right] \begin{pmatrix} A_\perp \\ A_\parallel \\ a \end{pmatrix} = 0. \quad (2.4.3)$$

Definiamo $\Delta_{\perp,\parallel} = \omega(n_{\perp,\parallel} - 1)$, $\Delta_a = \frac{-m_a^2}{2\omega}$ e $\Delta_{a\gamma} = \frac{1}{2}g_{a\gamma}B_e$ e riscriviamo ancora una volta il sistema

$$\left[\omega + \begin{pmatrix} \Delta_\perp & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_\parallel & \Delta_{a\gamma} \\ 0 & \Delta_{a\gamma} & \Delta_a \end{pmatrix} + i\partial_z \right] \begin{pmatrix} A_\perp \\ A_\parallel \\ a \end{pmatrix} = 0. \quad (2.4.4)$$

Abbiamo ottenuto un'equazione analoga all'equazione di Schroedinger, con l'unica differenza di avere come variabile la coordinata spaziale z e non il tempo. Notiamo inoltre che, come atteso, la sottomatrice 2×2 inferiore rappresenta un problema di mixing. Prima di procedere alla risoluzione dell'equazione di Schroedinger ed al calcolo della probabilità di oscillazione affrontiamo la diagonalizzazione di tale matrice 2×2 per determinarne autovettori e autovalori.

2.5 Diagonalizzazione della matrice

La matrice che intendiamo ora diagonalizzare è una matrice simmetrica, sappiamo dunque grazie al teorema spettare che essa possiede sempre una base di autovettori e dunque risulta sempre diagonalizzabile. Senza entrare troppo nei dettagli⁶ è noto che una matrice 2×2 della forma

⁵Per una discussione sull'energia del flusso di assioni si rimanda al terzo capitolo, dove verrà discusso il flusso di assioni solari. Per una spiegazione più dettagliata si veda anche [7].

⁶Una trattazione completa e dettagliata può essere trovata in [8].

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

possieda gli autovalori

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[a + b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2} \right]$$

e possa essere messa in forma diagonale tramite la matrice del cambio di base e la sua inversa secondo

$$S^{-1}MS = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

dove per θ vale la relazione

$$\tan(2\theta) = \frac{2c}{a-b}. \quad (2.5.1)$$

Definiti ν_1^*, ν_2^* gli autovettori nella nuova base e ν_1, ν_2 quelli nella base di partenza vale la relazione

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \cos \theta \nu_1^* - \sin \theta \nu_2^* \\ \nu_2 &= \sin \theta \nu_1^* + \cos \theta \nu_2^*. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

2.6 Risoluzione dell'equazione di Schroedinger e calcolo della probabilità di oscillazione

Risolviamo ora l'equazione di Schroedinger riguardante $A_{\parallel}$ ed a . Definiamo

$$H = -\omega I - \begin{pmatrix} \Delta_{\parallel} & \Delta_{a\gamma} \\ \Delta_{a\gamma} & \Delta_a \end{pmatrix} \quad \Psi(t, z) = \begin{pmatrix} A_{\parallel} \\ a \end{pmatrix}$$

e riscriviamo l'equazione di Schroedinger nella sua forma canonica

$$i\partial_z \Psi(t, z) = H \Psi(t, z). \quad (2.6.1)$$

Facendo riferimento alla sezione 2.5 gli autovalori di H sono dati da

$$E_{1,2} = -\omega - \frac{1}{2} \left[\Delta_{\parallel} + \Delta_a \pm \sqrt{(\Delta_{\parallel} - \Delta_a)^2 + 4\Delta_{a\gamma}^2} \right] \quad (2.6.2)$$

mentre per θ vale la relazione

$$\tan(2\theta) = \frac{2\Delta_{a\gamma}}{\Delta_{\parallel} - \Delta_a} = \frac{2g_{a\gamma}B_e\omega}{2\omega^2(n_{\parallel} - 1) + m_a^2}. \quad (2.6.3)$$

Definiamo ora ν_{γ}, ν_a rispettivamente gli stati puri di fotone ed assione, che possono essere espressi tramite l'eq. (2.5.2) in termini degli autostati della matrice H . Essendo che fotone ed assione non sono autostati di H , non saranno neanche autostati dell'operatore di evoluzione spaziale e^{-iHz} . Partendo quindi ad esempio da un'onda inizialmente di solo fotone, osserveremo che dopo un certo intervallo spaziale l l'onda presenterà sia componente fotonica che assionica e proprio per questo fatto sarà possibile osservare l'oscillazione di fotoni in assioni e viceversa.

Procediamo quindi a determinare tale probabilità. Definiamo gli stati iniziali di fotone ed assione come

$$|\nu_\gamma(0)\rangle = \cos\theta |\nu_1\rangle - \sin\theta |\nu_2\rangle \quad (2.6.4a)$$

$$|\nu_a(0)\rangle = \sin\theta |\nu_1\rangle + \cos\theta |\nu_2\rangle. \quad (2.6.4b)$$

L'evoluto spaziale dello stato di fotone è dato invece da

$$\begin{aligned} |\nu_\gamma(z)\rangle &= e^{-iHz} |\nu_\gamma(0)\rangle = e^{-iE_1 z} \cos\theta |\nu_1\rangle - e^{-iE_2 z} \sin\theta |\nu_2\rangle \\ &= e^{-iE_1 z} \left(\cos\theta |\nu_1\rangle - e^{-i\Delta E z} \sin\theta |\nu_2\rangle \right) \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

e di conseguenza la probabilità di transizione da fotone ad assione

$$\begin{aligned} P(\gamma \rightarrow a)(z) &= |\langle \nu_\gamma(z) | \nu_a \rangle|^2 = \\ &= \left| \left(\cos\theta \langle \nu_1 | - e^{-i\Delta E z} \sin\theta \langle \nu_2 | \right) (\sin\theta |\nu_1\rangle + \cos\theta |\nu_2\rangle) \right|^2 = \\ &= \left| \cos\theta \sin\theta - \cos\theta \sin\theta e^{-i\Delta E z} \right|^2 = \\ &= (\cos\theta \sin\theta)^2 \left| 1 - e^{-i\Delta E z} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) 4 \sin^2\left(\frac{\Delta E z}{2}\right) = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta E z}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

dove abbiamo definito $\Delta E = E_2 - E_1 = \sqrt{(\Delta_\parallel - \Delta_a)^2 + 4\Delta_{a\gamma}}$.

Possiamo ora fare delle assunzioni più stringenti per riscrivere la probabilità appena trovata in forma più semplice. Assumiamo di essere nel vuoto, dunque $n_\parallel = 1$ e assumiamo anche $\frac{g_{a\gamma} B \omega}{\Delta k^2} \ll 1$, dove $\Delta k^2 = k_\gamma^2 - k_a^2$ che nel vuoto vale $\Delta k^2 = m_a^2$.

Riscriviamo dunque l'eq. 2.6.3 come

$$\frac{1}{2} \tan(2\theta) = \frac{g_{a\gamma} B \omega}{m_a^2} \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \tan(2\theta) \approx \theta = \frac{g_{a\gamma} B \omega}{m_a^2} \quad (2.6.7)$$

mentre per ΔE abbiamo

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sqrt{(\Delta_\parallel - \Delta_a)^2 + 4\Delta_{a\gamma}^2} = \sqrt{\left(\frac{m_a^2}{2\omega}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}g_{a\gamma}B\right)^2} = \\ &= \frac{m_a^2}{2\omega} \left(1 + \frac{4g_{a\gamma}^2 B^2 \omega^2}{m_a^4}\right)^{1/2} \approx \frac{m_a^2}{2\omega} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2g_{a\gamma} B \omega}{m_a^2}\right)^2\right) = \\ &= \frac{m_a^2}{2\omega} \left(1 + \frac{1}{2} (2\theta)^2\right) = \frac{m_a^2}{2\omega} (1 + 2\theta^2) \approx \frac{m_a^2}{2\omega} =: q. \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

Possiamo quindi riscrivere la probabilità di transizione

$$\begin{aligned} P(\gamma \rightarrow a)(L) &= \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{1}{2}\Delta EL\right) \approx \\ &\approx (2\theta)^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}qL\right) = \\ &= \left(\frac{2g_{a\gamma}B\omega}{m_a^2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{qL}{2}\right) = \\ &= \left(\frac{g_{a\gamma}B}{q}\right)^2 \sin^2\left(\frac{qL}{2}\right) = \\ &= \left(\frac{g_{a\gamma}BL}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{qL}\right)^2 \sin^2\left(\frac{qL}{2}\right) \\ &:= \left(\frac{g_{a\gamma}BL}{2}\right)^2 \mathcal{F}(qL). \end{aligned} \tag{2.6.9}$$

Capitolo 3

Gli assioni solari e la loro rilevazione

I metodi ad oggi teorizzati per la potenziale rilevazione degli assioni sono molteplici, alcuni fanno affidamento a sorgenti naturali quali il sole, altri invece si focalizzano su processi atti a produrre gli assioni direttamente in laboratorio. Sperimentalmente si possono poi indagare i diversi possibili accoppiamenti tra gli assioni e le particelle già note del Modello Standard quali fotoni, elettroni e nuclei atomici.

La tecnica più semplice e diretta per la produzione di assioni in laboratorio sfrutta la conversione di fotoni in assioni in presenza di un intenso campo magnetico esterno. Nella pratica la sorgente di fotoni è fornita da un laser ad alta intensità, il fascio di fotoni è poi schermato da una barriera che non ne permette il passaggio. Dall'altro capo della barriera è posto un altro campo magnetico il cui compito è quello di riconvertire gli assioni in fotoni, i quali possono poi essere rilevati direttamente. La stessa tecnica permette inoltre di indagare altri effetti previsti dall'assione di QCD quali la polarizzazione del fascio di fotoni a causa dell'accoppiamento con gli assioni.

Tale procedura ha il notevole vantaggio di non fare affidamento a sorgenti naturali, le quali per ovvie ragioni non sono conosciute con certezza e per le quali sono presenti soltanto dei modelli. Nonostante ciò questa presenta anche innumerevoli svantaggi. Dovendo sia produrre che riconvertire gli assioni direttamente in laboratorio la probabilità del processo è proporzionale a $g_{a\gamma}^4$ ed è dunque fortemente soppressa. Allo stato dell'arte attuale tali tipi di esperimenti non hanno permesso di indagare regioni dello spazio dei parametri di massa e costante di accoppiamento non già escludibili sulla base di osservazioni astrofisiche.

Sebbene come detto le sorgenti naturali dipendano in parte dai modelli, permettono dall'altro lato di avere accesso a intensi flussi di assioni e conseguentemente ad un più facile rilevamento. Le due principali sorgenti di assioni sono il Sole e l'alone di materia oscura all'interno della nostra galassia.

È infatti possibile ipotizzare che gli assioni siano un candidato per la materia oscura. Osservazioni astronomiche e simulazioni numeriche permettono di stimarne la densità attesa. Sulla base di considerazioni cosmologiche è poi ragionevole ipotizzare che gli assioni potenzialmente costituenti la materia oscura viaggino a velocità non relativistiche e che il loro spettro in energia sia essenzialmente monocromatico. La rilevazione sarebbe possibile tramite l'utilizzo di una tecnica proposta da Sikivie attraverso i cosiddetti "haloscopes"¹. Tale tecnica sfrutta ancora una volta l'accoppiamento con i fotoni e consiste nell'utilizzo di cavità risonanti a microonde per promuovere la conversione degli assioni. La risonanza è infatti raggiunta se la frequenza di risonanza della cavità e la massa dell'assione coincidono a meno di un errore dell'ordine di m_a/Q dove Q rappresenta il fattore di merito della cavità. Al fine di indagare un ampio range di masse è dunque necessario che la frequenza di risonanza dell'apparato possa essere modificata.

¹Per l'articolo originale in cui vennero proposte queste tecniche consultare [9].

La tecnica di nostro interesse riguarda però la conversione di assioni di origine solare. Analizziamo quindi ora con maggiore dettaglio tale sorgente e i modelli a nostra disposizione per determinarne lo spettro.

3.1 La produzione di assioni nel sole

I modelli teorici descriventi l'assione prevedono che questo possa essere prodotto all'interno del nucleo delle stelle. Essendo il Sole il corpo celeste più luminoso e meglio conosciuto della volta celeste, risulta una delle migliori potenziali fonti di assioni. Nel nucleo solare, le condizioni di temperatura e pressione permettono la conversione di due fotoni di energia intorno al keV in assioni. Il fotone virtuale necessario al processo è fornito dall'intenso campo elettromagnetico presente nel plasma solare. Questo processo prende il nome di effetto Primakoff. Il diagramma di Feynmann di questo effetto può essere riscritto come la relazione

$$\gamma + Ze \rightarrow Ze + a. \quad (3.1.1)$$

Altri modelli non adronici come il modello DFSZ prevedono che l'assione possa interagire anche con gli elettroni, si aprono così nuovi canali di produzione denominati complessivamente ABC (**A**tomic axio-deexcitation, **A**tomic axio-recombination, axio-**B**remsstrahlung, **C**ompton Scattering). Nel dettaglio i diagrammi di Feynmann delle reazioni possono essere riscritti come

$$\begin{aligned} \text{Scattering Compton} : \gamma + e &\rightarrow e + a \\ \text{Bremsstrahlung ione - elettrone} : e + I &\rightarrow e + I + a \\ \text{Bremsstrahlung elettrone - elettrone} : e + e &\rightarrow e + e + a \\ \text{Axio - recombination} : e + I &\rightarrow I^- + a \\ \text{Axio - deexcitation} : I^* &\rightarrow I + a \end{aligned}$$

dove e indica un elettrone, I uno ione ed I^* il suo stato eccitato. In condizioni non relativistiche l'effetto Primakoff risulta il processo più rilevante. A partire dal calcolo della sezione d'urto del processo e dalla conoscenza della struttura interna del sole è possibile calcolare il flusso atteso di assioni solari. Sulla terra questo vale approssimativamente [10]

$$\frac{d\Phi_a(E_a)}{E_a} = 4.02 \cdot 10^{10} \left(\frac{g_{a\gamma}}{10^{-10} GeV^{-1}} \right)^2 \frac{(E_a/keV)^3}{e^{(E_a/1.08keV)} - 1} [cm^{-2}s^{-1}keV^{-1}]. \quad (3.1.2)$$

Il flusso totale sulla superficie terrestre risulta essere

$$\Phi_a = 3.75 \cdot 10^{11} \left(\frac{g_{a\gamma}}{10^{-10} GeV^{-1}} \right)^2 cm^{-2}s^{-1} \quad (3.1.3)$$

mentre la luminosità

$$L_a = 1.85 \cdot 10^{-3} \left(\frac{g_{a\gamma}}{10^{-10} GeV^{-1}} \right)^2 L_\odot \quad (3.1.4)$$

dove $L_\odot$ è la luminosità solare in fotoni.

Nella figura di seguito sono riportati i flussi differenziali degli assioni solari, sia per l'effetto Primakoff che per il processo ABC

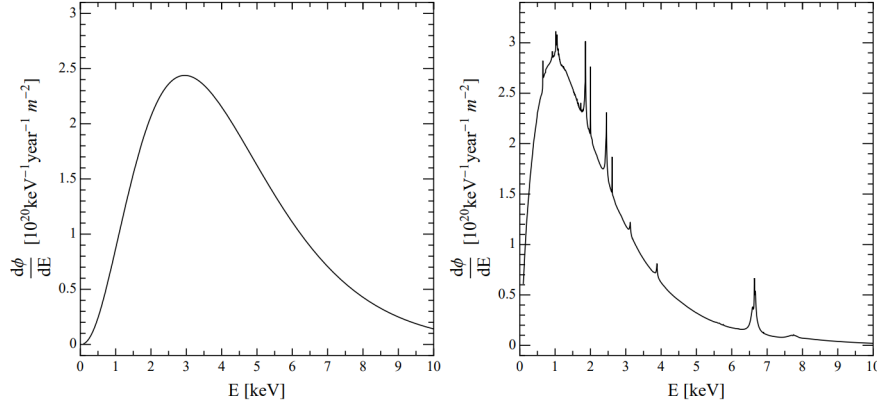


Figura 3.1: Flusso solare di assioni. A sinistra lo spettro dovuto al solo effetto Primakoff. A destra lo spettro dovuto all'effetto ABC. Gli spettri sono relativi a costanti di accoppiamento pari a $g_{a\gamma} = 10^{-12} GeV^{-1}$ e $g_{a\gamma} = 10^{-13} GeV^{-1}$ rispettivamente. Figura tratta da [11].

Si noti come per l'effetto Primakoff l'energia media degli assioni risulti essere $\langle E_a \rangle = 4.2 keV$ mentre l'energia massima sia intorno ai $3 keV$.

3.2 La rilevazione degli assioni

La rilevazione di assioni solari è ovviamente possibile solo se questi sono in grado di fuoriuscire dal Sole. Nel caso in cui il loro cammino libero medio λ_a fosse inferiore al raggio solare $R_\odot$ non sarebbe per loro possibile lasciare la nostra stella. A partire dai modelli per la struttura interna del sole e per assioni con energia intorno ai $4 keV$ si trova che [10]

$$\lambda_a \approx 6 \cdot 10^{24} \left(\frac{g_{a\gamma}}{10^{-10} GeV^{-1}} \right)^{-2} cm \approx 8 \cdot 10^{13} \left(\frac{g_{a\gamma}}{10^{-10} GeV^{-1}} \right)^{-2} R_\odot \quad (3.2.1)$$

La costante di accoppiamento dovrebbe essere quindi $\approx 10^7$ volte maggiore del limite superiore trovato da CAST² per avere riassorbimento. La rilevazione di assioni è quindi effettivamente possibile.

La ricerca degli assioni solari avviene principalmente tramite l'utilizzo dei cosiddetti elioscopi ("helioscopes" in inglese), questi sfruttano la conversione degli assioni in fotoni, in particolare raggi X, in presenza di un campo magnetico esterno. La situazione è quindi quella analizzata nella sezione 2. Se si ipotizza, come fatto in precedenza, che il campo magnetico esterno sia statico si trova che l'energia del fotone risulta uguale a quella dell'assione incidente, ci si aspetta dunque di poter osservare fotoni con energia di qualche keV . Ricordando che in unità naturali vale $1T = 1.953 \cdot 10^2 eV^2$ e $1m = 5.07 \cdot 10^6 eV^{-1}$, possiamo riscrivere la probabilità di oscillazione ricavata nel capitolo precedente data da eq. (2.6.9) come

$$P(a \rightarrow \gamma) = 2.5 \cdot 10^{-17} \left(\frac{g_{a\gamma}}{10^{-10} GeV^{-1}} \right)^2 \left(\frac{B_e}{10T} \right)^2 \left(\frac{L}{10m} \right)^2 \mathcal{F}(qL) \quad (3.2.2)$$

dove si ricorda che si è definito $\mathcal{F}(qL) = \left(\frac{2}{qL} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{qL}{2} \right)$. Da un punto di vista sperimentale è interessante studiare il caso limite in cui $qL \ll 1$ per il quale troviamo che $\mathcal{F}(qL) \approx 1$ e dunque la probabilità di oscillazione risulta massimizzata. Tale situazione prende il nome di conversione coerente. Nell'ipotesi di assioni relativistici e ipotizzando di essere nel vuoto avevamo trovato $q = k_\gamma - k_a \approx m_a^2 / 2\omega$. Data l'energia tipica degli assioni solari e ipotizzando una

²Si rimanda alla sezione successiva per una trattazione più dettagliata di tale esperimento e dei suoi risultati.

lunghezza del magnete dell'ordine della decina di metri, la condizione di coerenza è soddisfatta per una massa degli assioni $m_a \ll \sqrt{\frac{2E}{\hbar L}} \approx 10^{-2} eV$. All'aumentare della massa $\mathcal{F}$ decresce come $(2/qL)^2 \propto 1/m_a^4$ e di conseguenza anche la sensibilità dell'esperimento.

Al fine di ridurre la perdita di coerenza e poter ricercare masse più elevate, è possibile riempire la regione di conversione con un gas. Ricordiamo infatti che il momento trasferito dagli assioni ai fotoni è dato da

$$q = \frac{m_\gamma^2 - m_a^2}{2E_a} \quad (3.2.3)$$

dove m_γ indica la massa efficace del fotone, diversa da zero a causa della presenza del gas. Mentre nel vuoto i fotoni viaggiano per definizione alla velocità della luce, quando attraversano un mezzo la loro velocità diminuisce. Da un punto di vista particellare questo fenomeno può essere interpretato come l'acquisizione di massa da parte del fotone a causa dell'interazione con le particelle del mezzo. La massa efficace risulta essere data da $m_\gamma = \omega_p$ dove ω_p è la frequenza di plasma il cui quadrato vale $\omega_p^2 = 4\pi\alpha n_e/m_e$ dove n_e e m_e sono rispettivamente la densità e la massa degli elettroni. Nel caso in cui la massa dell'assione coincida con la massa efficace del fotone abbiamo $q = 0$ e dunque ritorniamo nella condizione di coerenza. Modificando la pressione del gas è perciò possibile modificare la sensibilità dell'esperimento estendendola a masse via via più elevate.

Non tutti i gas possono però essere utilizzati. Sperimentalmente è infatti necessario che la regione di conversione sia attraversata da un intenso campo magnetico, cosa attualmente possibile solo utilizzando supermagneti i quali richiedono temperature estremamente basse per funzionare, dell'ordine del paio di kelvin. A tali temperature soltanto idrogeno ed elio risultano ancora allo stato gassoso. C'è inoltre da considerare che all'aumentare del numero atomico Z aumenta anche l'assorbimento dei fotoni. L'utilizzo di elementi a basso Z è dunque a maggior ragione preferibile. Ricordando che $n_e = N_e/V$ dove N_e è il numero di elettroni per unità di volume V , possiamo esprimere la frequenza di plasma, e di conseguenza anche la massa, come

$$\omega_p^2 = 4\pi \frac{N_e}{V} r_0 \quad (3.2.4)$$

dove $r_0 = e^2/m$ indica il raggio classico dell'elettrone. Nel caso specifico dell'elio, in cui il numero di elettroni è il doppio di quello degli atomi, applicando la legge dei gas perfetti troviamo

$$\frac{N_e}{V} = \frac{2PN_A}{RT} \quad (3.2.5)$$

con P la pressione, V il volume, T la temperatura, R la costante dei gas, e N_A il numero di Avogadro. Risolvendo tutti i conti troviamo in definitiva

$$m_\gamma = 0.14 \left(\frac{P/\text{mbar}}{T/K} \right)^{1/2} eV \quad (3.2.6)$$

Possiamo in conclusione calcolare il numero atteso di fotoni misurati come

$$N_\gamma = \int_E \frac{d\Phi(E_a)}{dE_a} P_{a \rightarrow \gamma}(E_a) \epsilon(E_a) \Delta t A dE_a \quad (3.2.7)$$

dove A e $\epsilon(E_a)$ sono rispettivamente l'area del detector e la sua efficienza e Δt il tempo di esposizione

3.3 Gli elioscopi

La struttura fondamentale di un elioscopio consiste in una camera attraversata da un potente campo magnetico, alla cui estremità sono posti rilevatori a raggi X. Nelle configurazioni più moderne si è poi soliti aggiungere delle ottiche X per focalizzare i raggi X sui rilevatori e migliorare il rapporto segnale-rumore dell'esperimento. Quando l'apparecchio è orientato verso il Sole ci si aspetta, per le ragioni sopra esposte, un eccesso di raggi X sui rilevatori rispetto al fondo misurato in condizione di non allineamento. Negli anni numerosi sono stati gli esperimenti che hanno adottato tale tecnica di rilevamento. Il primo fu realizzato ai laboratori nazionali di Brookhaven (BNL) nel 1992. Questo faceva uso di un campo magnetico $B = 2.2T$ generato da un magnete dipolare lungo $L = 1.8m$. L'esperimento fu in grado di imporre un limite superiore al valore di $g_{a\gamma}$ trovando $g_{a\gamma} < 3.6 \cdot 10^{-9} GeV^{-1}$ 99% C.L., per $m_a < 0.03eV$. Tale valore fu poi raffinato dall'esperimento SUMICO condotto dall'università di Tokyo che, sfruttando un campo magnetico $B = 4T$ e lungo $L = 2.3m$ ed un sistema di inseguimento solare, fu in grado di trovare $g_{a\gamma} < 6.0 \cdot 10^{-10} GeV^{-1}$ 95% C.L., per $m_a < 0.03eV$. Al momento, il limite più stringente su $g_{a\gamma}$ è stato trovato dall'esperimento CAST, sul quale ci soffermeremo con maggiore dettaglio nella prossima sezione.

3.3.1 L'esperimento CAST

L'esperimento CAST³ (*CERN Axion Solar Telescope*) è un esperimento attivo dal 2003 volto proprio alla conversione di assioni provenienti dal nucleo solare in fotoni.

L'apparato sperimentale⁴

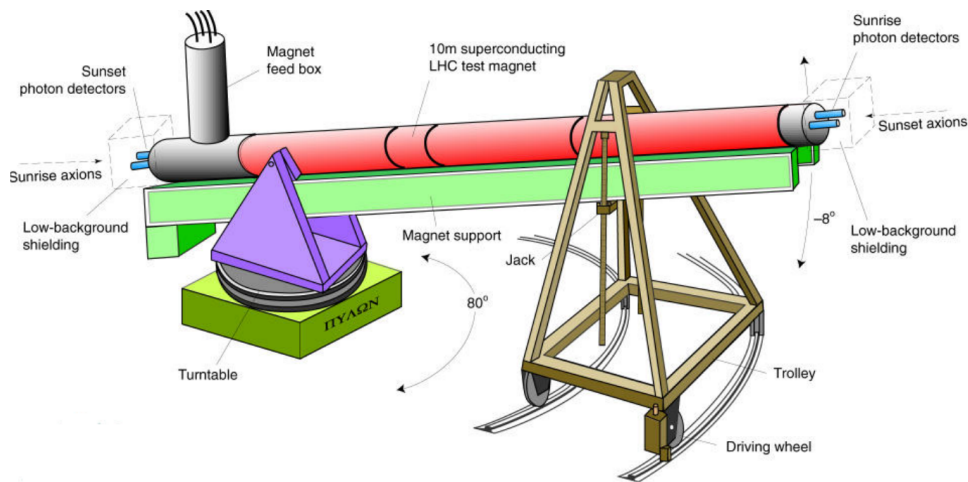


Figura 3.2: Schema semplificato dell'apparato sperimentale e del sistema di guida. Immagine tratta da [12].

CAST fa uso di un magnete dipolare utilizzato in precedenza come prototipo per LHC lungo $L = 10m$ e capace di generare un campo magnetico $B = 8.8T$. Il magnete presenta due cavità, ciascuna dal diametro di $43mm$, pensate originariamente come cavità per il passaggio dei fasci di particelle. Il magnete è posto su una montatura altazimutale che ne consente un movimento di $\pm 40^\circ$ lungo la direzione azimutale e di $\pm 8^\circ$ lungo la verticale. Ciò consente all'apparato di

³Uno schema semplificato dell'apparato sperimentale è già stato riportato in figura 2.1.

⁴Per una descrizione molto più dettagliata dell'apparato vedere [12].

inseguire il sole per circa $1.5h$ all'alba e al tramonto. Il tempo restante è dedicato alla misura del fondo. Ad entrambe le estremità sono poste delle ottiche X, riutilizzate dal programma spaziale tedesco, per focalizzare i raggi X prodotti dalla conversione di fotoni in assioni sui rilevatori; questo al fine di consentire la rilevazione sia all'alba che al tramonto. Inizialmente i rilevatori X utilizzati consistevano in una camera a proiezione temporale e in un rivelatore CCD. Successivamente questi sono stati sostituiti da strumenti con un minore rumore di fondo. In particolare il rivelatore TPC è stato sostituito dallo strumento MICROMEGAS, un rivelatore a gas sensibile in un range di energie da $1keV$ a $10keV$; il sensore CCD è stato invece sostituito da InGrid. Al fine di poter mantenere un campo da circa $9T$ il magnete necessita di essere mantenuto ad una temperatura di $1.9K$. Tale temperatura è mantenuta da un sistema ad elio liquido, anch'esso recuperato in parte da DELPHI

Le fasi operative dell'esperimento

Allo stato attuale CAST rappresenta l'apparato più sensibile al mondo per la ricerca di assioni solari. Al fine di poter sondare il range di masse più grande possibile, la vita operativa dell'esperimento è stata suddivisa in due fasi: la fase I con le cavità dei magneti poste sotto vuoto e una fase II, durante la quale la regione di conversione è stata riempita con diversi gas.

Durante la fase I è stata possibile la ricerca di assioni con massa fino a $0.02eV$. A masse più elevate la condizione di coerenza non era più soddisfatta portando ad una rapida decrescita della sensibilità dell'esperimento. Al fine di ritornare in condizione di coerenza si sono riempite le cavità dei magneti con del gas come spiegato nella sezione 3.2. Cambiando gradualmente la densità del gas a temperatura costante, controllandone la densità, sono stati studiati diversi intervalli di massa possibile.

La fase II è stata a sua volta suddivisa in due parti. Dal 2005 al 2006 è stato utilizzato 4He . Ciò ha permesso di ricercare assioni con massa fino a $0.42eV$. Successivamente, a partire dal 2008, si è utilizzato 3He raggiungendo un limite superiore di massa pari a $1.2eV$

I risultati sperimentali

Con i dati raccolti nella fase I CAST ha permesso di porre un limite superiore ai valori di massa e costante di accoppiamento, in particolare [13]

$$g_{a\gamma} < 8.8 \cdot 10^{-11} GeV^{-1} \text{ 95\% C.L per } m_a < 0.02eV \quad (3.3.1)$$

dal 2005 al 2006, con l'introduzione di 4He nelle cavità si è trovato [14]

$$g_{a\gamma} < 2.17 \cdot 10^{-10} GeV^{-1} \text{ 95\% C.L per } m_a < 0.39eV \quad (3.3.2)$$

e nel 2008 al 2011, con l'utilizzo di 3He [15]

$$g_{a\gamma} < 2.3 \cdot 10^{-10} GeV^{-1} \text{ 95\% C.L per } 0.39eV < m_a < 0.64eV \quad (3.3.3)$$

$$g_{a\gamma} < 3.3 \cdot 10^{-10} GeV^{-1} \text{ 95\% C.L per } 0.64eV < m_a < 1.17eV. \quad (3.3.4)$$

Nel 2013 CAST ha ripreso la presa dati con le cavità sotto vuoto, con migliori rilevatori e nuove ottiche X, migliorando il risultato ottenuto in precedenza e trovando

$$g_{a\gamma} < 6.6 \cdot 10^{-11} GeV^{-1} \text{ 95\% C.L per } m_a < 0.02eV. \quad (3.3.5)$$

CAST è stato il primo esperimento con una sensibilità a valori di $g_{a\gamma}$ minori di $10^{-10} GeV^{-1}$ e confrontabili perciò con i limiti imposti da osservazioni astronomiche. Per masse superiori

a 0.01eV CAST è stato inoltre in grado di entrare nella regione dello spazio dei parametri di massa-costante accoppiamento prevista dall'assione di QCD.

CAST ha anche permesso di studiare altri canali di produzione degli assioni solari diversi dal processo Primakoff e promossi dall'accoppiamento degli assioni con gli elettroni e con i nuclei. In questi casi CAST ha fornito limiti superiori al prodotto tra $g_{a\gamma}$ e la relativa costante di accoppiamento. In particolare, a partire dai dati ottenuti durante la fase I si è trovato [16]:

$$g_{a\gamma}g_{ae} < 8.1 \cdot 10^{-23} \text{GeV}^{-1} \text{ 95\% C.L per } m_a < 0.01\text{eV} \quad (3.3.6)$$

3.3.2 L'esperimento IAXO

Tutti gli esperimenti fino ad ora realizzati hanno fatto uso di strumentazione preesistente, quindi non ottimizzati per la ricerca di assioni. Al fine di migliorare i risultati ottenuti da CAST è divenuto ora necessario l'utilizzo di magneti appositamente pensati allo scopo. Guardando eq. (3.2.7) si nota che per massimizzare il numero di fotoni prodotti è necessario massimizzare la cifra di merito $f_M = B^2 L^2 \mathcal{A}$ dove B , L ed $\mathcal{A}$ sono rispettivamente il campo magnetico, la lunghezza del magnete e l'apertura del rivelatore. Il principale fattore limitante di CAST è proprio dato da quest'ultima, l'apertura vale infatti solo $3 \cdot 10^{-3} \text{m}^2$. L'intensità del campo magnetico difficilmente può essere aumentata, 9T rappresenta infatti circa il massimo valore oggi producibile, al contempo una lunghezza di 10m rappresenta già una lunghezza considerevole per una struttura che deve essere mossa con precisione per inseguire il Sole.

IAXO (**I**nternational **A**xion **O**bservatory)⁵ ricercherà, in analogia a quanto fatto da CAST, assioni di origine solare. IAXO si ripromette di migliorare il rapporto segnale-rumore rispetto a CAST di 4-5 ordini di grandezza, potendo così raggiungere una sensibilità all'accoppiamento assioni-fotoni fino a circa 10^{-12}GeV^{-1} . Tale sensibilità permetterà a questo esperimento di sondare regioni dello spazio dei parametri di massa e accoppiamento non esclusi dalle osservazioni astronomiche e ancora non indagati. IAXO sarà inoltre in grado di rilevare assioni solari prodotti da meccanismi mediati dall'accoppiamento con gli elettroni, raggiungendo per la prima volta una sensibilità a valori di g_{ae} inferiore ai limiti astronomici.

Al fine di aumentare al massimo la cifra di merito IAXO massimizzerà l'apertura dell'apparato. Verrà infatti fatto uso di 8 distinte bobine superconduttive, ciascuna larga 1m e lunga 21m , capaci di generare un campo magnetico fino a $5 - 6\text{T}$. Nel complesso, la regione occupata dal campo magnetico avrà un diametro di 5.2m e una lunghezza di 25m . Se CAST ha una cifra di merito di $21\text{T}^2 \text{m}^4$, IAXO sarà in grado di migliorare questo valore di un fattore 300.

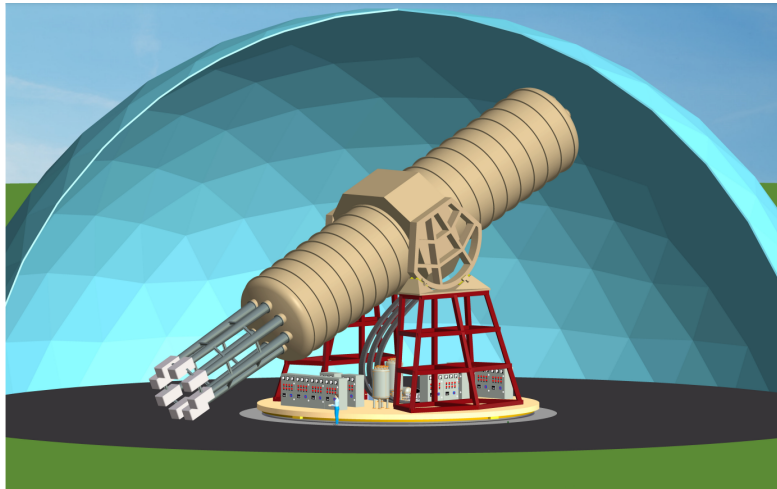


Figura 3.3: Schema della struttura di IAXO - figura tratta da [17].

⁵La lettera di intenti al Comitato SPS del CERN è reperibile in [17].

Ciascuno degli 8 magneti sarà equipaggiato con un telescopio a raggi X dal diametro di 60cm, la realizzazione di questi è basata sul telescopio spaziale NuSTAR della NASA. Le ottiche focalizzeranno i fotoni su un'area di 0.2cm^2 , in cui saranno posti rilevatori con un bassissimo rapporto segnale-rumore, nello specifico ci si attende di raggiungere un segnale di fondo inferiore a $10^{-6} \text{ eventi } \text{KeV}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$. Grazie alla riduzione del rumore e all'aumento della cifra di merito ci si aspetta che IAXO possa migliorare la sensibilità a valori di $g_{a\gamma}$ di oltre un ordine di grandezza rispetto a CAST. Anche per IAXO è prevista poi una fase di raccolta dati con l'utilizzo di gas nella cavità, questo sempre al fine di rendere l'apparato sensibile a masse più elevate.

Come primo passo verso la costruzione dell'esperimento, la collaborazione prevede la realizzazione una versione ridotta di questo, denominato BabyIAXO, il quale sarà realizzato utilizzando un solo telescopio ed un detector di dimensioni simili a quelle finali. Nonostante ciò BabyIAXO potrà comunque fornire dati di interesse per la comunità scientifica, ponendosi infatti ad un livello intermedio tra CAST e IAXO. Lo scopo principale di BabyIAXO sarà quello di fornire feedback sul design tecnico per migliorare ulteriormente la cifra di merito.

Nella figura sottostante sono riportate le regioni di $(m_a, g_{a\gamma})$ già escluse dagli elioscopi quali CAST, come anche alcune zone escludibili sulla base delle osservazioni astrofisiche. In azzurro chiaro sono invece riportate le zone che verranno sondate dai futuri esperimenti quali BabyIAXO e IAXO. Come si vede, grazie a questi esperimenti sarà possibile indagare ampie zone dello spazio dei parametri in cui ci si attende possa essere l'assione sulla base del modello di assione di QCD.

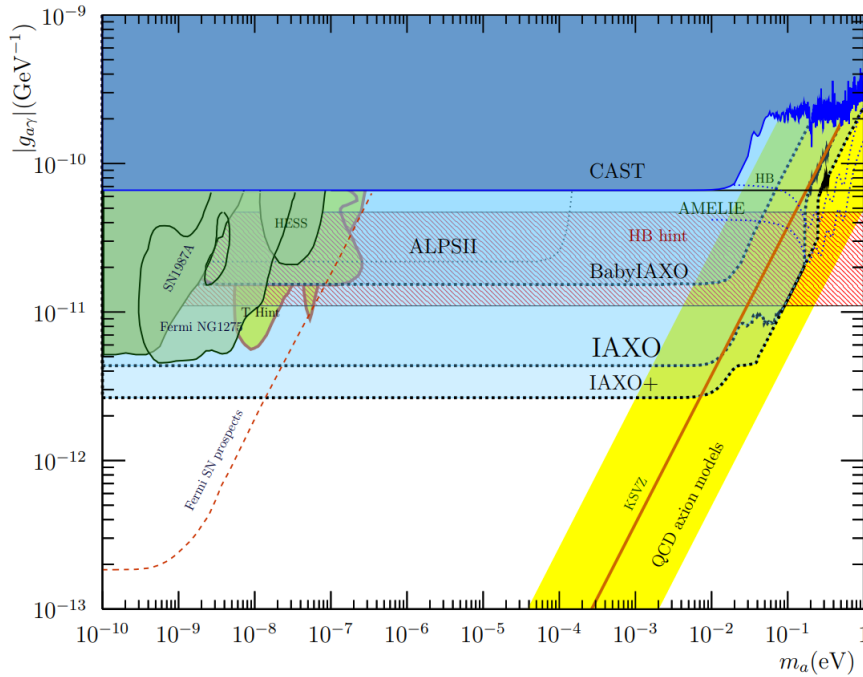


Figura 3.4: Regioni di $(g_{a\gamma}, m_a)$ escluse dagli helioscopes quali CAST. In chiaro le regioni che ci si aspetta saranno sondate dai futuri esperimenti. In giallo la regione attesa dai modelli. Figura tratta da [5].

Conclusioni

L'assione è un candidato ben motivato di fisica oltre il Modello Standard, dal momento che può fornire una soluzione sia al problema della CP forte che alla natura della materia oscura. A partire dal termine lagrangiano di accoppiamento tra assioni e fotoni abbiamo ricavato le equazioni di Maxwell modificate prestando particolare attenzione alla differente natura tra il simbolo ed il tensore di Levi-Civita. Fatto ciò le equazioni sono state risolte in un caso di interesse sperimentale, vale a dire in assenza di sorgenti ed in presenza di un campo magnetico esterno molto intenso. Queste sono infatti le condizioni in cui operano gli elioscopi. Grazie alle approssimazioni effettuate è stato possibile linearizzare il sistema risolvendolo così in termini di onde piane. Si è quindi riscritto il sistema in forma matriciale per evidenziare il mixing tra $A_{\parallel}$ e a . Nell'ipotesi di assioni relativistici, cosa giustificata a posteriori sulla base dello spettro degli assioni di origine solare, e trascurando gli effetti di polarizzazione quali l'effetto Cotton-Mouton e l'effetto Faraday, sempre a causa del valore delle energie in gioco, si è potuto riconoscere nel sistema un'equazione analoga a quella di Schroedinger. Con un formalismo adottato dall'oscillazione dei neutrini si è proceduto a calcolare la probabilità di oscillazione tra fotoni ed assioni.

Si è passati poi ad un aspetto più sperimentale, spiegando brevemente i due principali metodi ad oggi usati per la ricerca degli assioni, vale a dire gli haloscopes, per la ricerca di assioni costituenti la materia oscura, e gli elioscopi per la ricerca di assioni di origine solari. La discussione si è poi focalizzata su questi ultimi. Si sono quindi descritti i due principali meccanismi che si ipotizza possano portare alla produzione di assioni nel sole: l'effetto Primakoff e il processo ABC. Sempre per quanto riguarda gli elioscopi si è visto come sia possibile aumentare la sensibilità dello strumento a masse di assioni via via maggiori tramite l'inserimento di gas all'interno delle cavità immerse nel campo magnetico.

A questo punto si è descritto l'esperimento ad oggi più importante per la ricerca di assioni di origine solare: CAST. Dopo una breve descrizione dell'apparato ci si è soffermati sui suoi risultati. In conclusione si è parlato di IAXO, un elioscopio di nuova generazione ancora in fase di progettazione, il quale permetterà per la prima volta di indagare ampie zone dello spazio dei parametri di massa e costante di accoppiamento dove, a partire dai modelli, ci si aspetta che possa trovarsi l'assione.

Appendice A

Il simbolo ϵ ed il tensore ε di Levi-Civita

Definiamo il simbolo di Levi-Civita

$$\epsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = \epsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = \begin{cases} +1 & \text{per permutazioni pari di } \mu_1\mu_2\ldots\mu_n \\ -1 & \text{per permutazioni dispari di } \mu_1\mu_2\ldots\mu_n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (\text{A.0.1})$$

Per definizione il valore di tale simbolo è lo stesso in ogni sistema di riferimento (a patto che si tratti sempre di sistemi levogiri, in caso contrario si avrebbe un cambio di segno) e non si comporta dunque come un tensore. La sua legge di trasformazione può essere ricavata a partire dalla definizione di determinante di una matrice che, nel caso di una matrice M di ordine $n \times n$, può essere espresso come ¹

$$\epsilon_{\mu'_1\mu'_2\ldots\mu'_n} |M| = \epsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} M^{\mu_1}_{\mu'_1} M^{\mu_2}_{\mu'_2} \ldots M^{\mu_n}_{\mu'_n}. \quad (\text{A.0.2})$$

Ne segue che ponendo $M^{\mu}_{\mu'} = \partial x^{\mu} / \partial x^{\mu'}$ troviamo

$$\epsilon_{\mu'_1\mu'_2\ldots\mu'_n} = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right| \epsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial x^{\mu'_2}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\mu'_n}} \quad (\text{A.0.3})$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che la matrice $\partial x^{\mu'} / \partial x^{\mu}$ è l'inversa di $\partial x^{\mu} / \partial x^{\mu'}$ e che il determinante della matrice inversa è il reciproco del determinante della matrice. Il simbolo di Levi-Civita trasforma dunque similmente ad un tensore, eccezion fatta per il determinante dello jacobiano della trasformazione. Oggetti che trasformano in questo modo sono detti densità tensoriali. Nell'ambito di queste ultime si definisce il peso della densità come l'esponente dello jacobiano. Un altro esempio di un oggetto di notevole interesse che trasforma come una densità tensoriale è il determinante della metrica $g = |g_{\mu\nu}|$, infatti

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu} \longrightarrow g(x^{\mu'}) = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right|^{-2} g(x^{\mu}). \quad (\text{A.0.4})$$

Il determinante della metrica è quindi una densità tensoriale di peso -2 . Un metodo classico che permette di trasformare una densità tensoriale in un tensore vero e proprio consiste nel

¹Una trattazione più dettagliata può essere trovata in [18].

moltiplicare la densità per $|g|^{w/2}$ dove w indica il peso della stessa. Definiamo quindi in questo modo il tensore di Levi-Civita²

$$\varepsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} := \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} \quad (\text{A.0.5a})$$

$$\varepsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} := -\sqrt{-g} \epsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}. \quad (\text{A.0.5b})$$

Un'espressione che tornerà spesso utile nel seguito riguarda la contrazione di p indici di $\varepsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$ con $\varepsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$ ed analogamente per il simbolo di Levi-Civita

$$\varepsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p\alpha_1\ldots\alpha_{n-p}} \varepsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p\alpha_1\ldots\alpha_{n-p}} = (-1)^s p!(n-p)! \delta_{\beta_1}^{[\alpha_1} \ldots \delta_{\beta_{n-p}}^{\alpha_{n-p}]} \quad (\text{A.0.6a})$$

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p\alpha_1\ldots\alpha_{n-p}} \epsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p\alpha_1\ldots\alpha_{n-p}} = p!(n-p)! \delta_{\beta_1}^{[\alpha_1} \ldots \delta_{\beta_{n-p}}^{\alpha_{n-p}]} \quad (\text{A.0.6b})$$

dove s indica il numero di autovalori negativi della metrica (tre nel caso della metrica di Minkowski). A tal proposito si fa presente che in tutta la trattazione verrà utilizzata la segnatura $(1, 3)$. Il caso di maggior utilità è quello in cui $p = n - 1$ per il quale si ottiene

$$\varepsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n-1}\alpha} \varepsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n-1}\beta} = (-1)^s (n-1)! \delta_{\beta}^{\alpha} \quad (\text{A.0.7a})$$

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n-1}\alpha} \epsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n-1}\beta} = (n-1)! \delta_{\beta}^{\alpha}. \quad (\text{A.0.7b})$$

²Si fa presente che si sta utilizzando la convenzione opposta rispetto a quanto riportato in [19] per restare coerenti con quanto definito in [2].

Bibliografia

- [1] R. D. Peccei e Helen R. Quinn. «CP Conservation in the Presence of Pseudoparticles». In: *Phys. Rev. Lett.* 38 (25 giu. 1977), pp. 1440–1443. DOI: 10.1103/PhysRevLett.38.1440. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.38.1440>.
- [2] Alexander J. Millar et al. «Dielectric haloscopes to search for axion dark matter: theoretical foundations». In: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2017.01 (gen. 2017), pp. 061–061. DOI: 10.1088/1475-7516/2017/01/061. URL: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2017/01/061>.
- [3] K. Lechner. *Elettrodinamica Classica*. UNITEXT. Springer Milan, 2014. ISBN: 9788847052116. URL: <https://books.google.it/books?id=k3LvCAAAQBAJ>.
- [4] Georg Raffelt e Leo Stodolsky. «Mixing of the photon with low-mass particles». In: *Phys. Rev. D* 37 (5 mar. 1988), pp. 1237–1249. DOI: 10.1103/PhysRevD.37.1237. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.37.1237>.
- [5] Igor G. Irastorza e Javier Redondo. «New experimental approaches in the search for axion-like particles». In: *Progress in Particle and Nuclear Physics* 102 (2018), pp. 89–159. ISSN: 0146-6410. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2018.05.003>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S014664101830036X>.
- [6] Georg G. Raffelt. *Stars as Laboratories for Fundamental Physics*. International series of monographs on physics. University of Chicago Press, 1996. ISBN: 978-0226702728.
- [7] M. C. David Marsh et al. «Fourier formalism for relativistic axion-photon conversion with astrophysical applications». In: *Physical Review D* 105.1 (gen. 2022). DOI: 10.1103/physrevd.105.016013. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.105.016013>.
- [8] URL: http://scipp.ucsc.edu/~haber/ph116A/diag2x2_11.pdf.
- [9] P. Sikivie. «Experimental Tests of the "Invisible" Axion». In: *Phys. Rev. Lett.* 51 (16 ott. 1983), pp. 1415–1417. DOI: 10.1103/PhysRevLett.51.1415. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.51.1415>.
- [10] Julia Vogel. «Searching for Solar Axions in the eV-MassRegion with the CCD Detector at CAST». In: (gen. 2009).
- [11] Irastorza et al. *The International Axion Observatory IAXO. Letter of Intent to the CERN SPS committee*. Rapp. tecn. Geneva: CERN, ago. 2013. URL: <https://cds.cern.ch/record/1567109>.
- [12] URL: <https://inspirehep.net/files/75ae052473e09c7a442e47347a58ce98>.
- [13] K. et al. Zioutas. «First Results from the CERN Axion Solar Telescope». In: *Phys. Rev. Lett.* 94 (12 apr. 2005), p. 121301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.121301. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.94.121301>.
- [14] E Arik et al. «Probing eV-scale axions with CAST». In: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2009.02 (feb. 2009), pp. 008–008. DOI: 10.1088/1475-7516/2009/02/008. URL: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2009/02/008>.

- [15] M. et al. Arik. «Search for Solar Axions by the CERN Axion Solar Telescope with ^3He Buffer Gas: Closing the Hot Dark Matter Gap». In: *Phys. Rev. Lett.* 112 (9 mar. 2014), p. 091302. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.091302. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.091302>.
- [16] K Barth et al. «CAST constraints on the axion-electron coupling». In: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2013.05 (mag. 2013), pp. 010–010. URL: <https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2013%2F05%2F010>.
- [17] Igor G et al. Irastorza. *The International Axion Observatory IAXO. Letter of Intent to the CERN SPS committee*. Rapp. tecn. Geneva: CERN, ago. 2013. URL: <http://cds.cern.ch/record/1567109>.
- [18] Sean M. Carroll. «Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity». In: Cambridge University Press, 2019. Cap. 2.8. DOI: 10.1017/9781108770385.
- [19] L.D. Landau et al. *The Classical Theory of Fields: Volume 2*. Course of theoretical physics. Elsevier Science, 2000. ISBN: 9780750627689. URL: <https://books.google.it/books?id=X18PF4oKyrUC>.