

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

**Idrodinamica quantistica e superfluidità: dall'equazione  
di Schrodinger al crossover BCS-BEC con correzione  
alla Von Weizsacker**

**Relatore**

**Prof. Luca Salasnich**

**Laureando**

**Niccolò Damian**

**Anno Accademico 2021/2022**

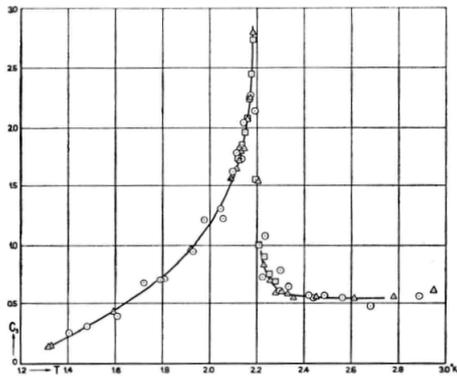
# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Equazioni dell'idrodinamica quantistica</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Densità di energia dello stato fondamentale</b>	<b>12</b>
3.1	Bosoni non interagenti . . . . .	12
3.2	Fermioni non interagenti . . . . .	13
3.3	Bosoni debolmente interagenti . . . . .	14
3.4	Fermioni debolmente interagenti . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Crossover BCS-BEC con correzione di tipo Von Weizsäcker</b>	<b>19</b>
4.1	Equazione di Guerra-Pusterla . . . . .	20
4.2	Approccio Lagrangiano . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Relazione di dispersione e valori del coefficiente <math>\lambda_W</math></b>	<b>27</b>
5.1	Spettro di Bogoliubov . . . . .	27
5.2	Valori del coefficiente di Von Weizsäcker . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>32</b>
<b>A</b>	<b>Il crossover BCS-BEC e la risonanza di Fano-Feshbach</b>	<b>33</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>36</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

È noto come i fluidi ideali siano dei sistemi fisici caratterizzati da viscosità nulla. Si potrebbe pensare che tali sistemi coincidano col concetto di superfluido, ma non è così: si può infatti definire un superfluido come una fase di un sistema (ottenuta dopo che è avvenuta la relativa transizione ad una certa temperatura critica) e la superfluidità come una proprietà macroscopica e collettiva di tale sistema, in cui un numero elevato di particelle scorre senza perdita di energia cinetica, presenta dei vortici quantizzati e ha una conducibilità termica con un andamento peculiare [1, 2].



**Figura 1.1:** Grafico del calore specifico dell'elio II, adattato dalla referenza [3].

La prima evidenza sperimentale connessa alla superfluidità si ebbe nel 1908 quando Kamerlingh Onnes fu in grado di liquefare l' $^4\text{He}$ , impiegato nel 1911 come refrigerante al fine di studiare la resistenza a bassa temperatura del mercurio; in tale circostanza Onnes notò con grande stupore come, raffreddando ulteriormente tale gas nobile, esso smettesse di bollire. Il comportamento appena descritto dell'elio fu ufficialmente interpretato come transizione di fase solo nel 1927: tale transizione avviene alla temperatura  $T_\lambda = 2.177\text{ K}$  (chiamata nel 1932 da Keesom  $\lambda$ -point osservando il grafico del calore specifico, visibile alla **Figura 1.1**) e le due fasi ad

alta e bassa temperatura sono dette *elio I* ed *elio II* rispettivamente.

Nel 1938 separatamente Kapitza [4] ed Allen e Misener [5], tramite due studi indipendenti ma simili sull'elio II, giunsero complessivamente alle conclu-

sioni che non solo quest'ultimo è caratterizzato da una viscosità estremamente bassa, ma anche che «Il tipo di flusso osservato, [...] in cui la velocità diventa praticamente indipendente dalla pressione, sicuramente non può essere trattato come laminare o neppure come un ordinario flusso turbolento» [5]; vale a dire che l'elio II si comporta come un *superfluido* (termine usato da Kapitza nella referenza [4]), con proprietà termodinamiche ben differenti da quelle dei fluidi ideali fino a quel momento concepiti, come testimonia il *fountain effect*<sup>1</sup> osservato nello stesso anno da Allen e Jones.

Un primo tentativo di spiegare teoricamente la superfluidità dell'elio (rimasto per molto tempo sinonimo di “superfluido”) fu fatto nel 1938 da London [7], che propose di usare il condensato di Bose-Einstein<sup>2</sup> per spiegare le caratteristiche dell'elio II, come la grande conducibilità termica, la piccola viscosità e il *fountain effect*; nonostante ciò egli ricondusse tale statistica ai dati sperimentali solo in relazione al primo di questi tre fenomeni.

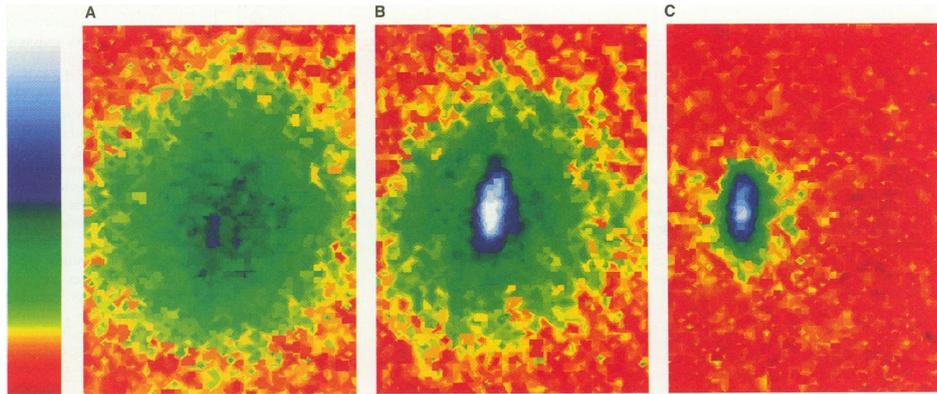
Un importante passo avanti per la comprensione teorica della superfluidità è dato dalla teoria dei due fluidi di Tisza [8] e Landau [9]: il primo si basò sulla teoria precedentemente esposta di London legata al BEC, supponendo che il superfluido possedesse una frazione di atomi condensata nel livello ad energia più bassa, che «non prende parte alla dissipazione del momento» [8] e che si comporta come un “superfluido” con viscosità nulla e moto turbolento, e la rimanente frazione distribuita su stati eccitati in base alla temperatura. Landau invece tentò di spiegare la superfluidità dell'elio II senza ricorrere al BEC. Egli infatti riteneva che l'elio liquido fosse costituito da due liquidi compenetranti: uno “superfluido”, che scorre senza viscosità, senza trasportare calore e con moto puramente “potenziale” (vale a dire con  $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$ , dove  $\vec{v}$  è velocità del fluido), ed uno “normale”; quest'ultimo è assente a temperatura nulla ed è costituito sia da eccitazioni elementari dei moti potenziali (i *fononi*, che seguono la statistica di Bose-Einstein) sia da eccitazioni dei moti “vorticosi”, ossia dei moti con  $\vec{\nabla} \times \vec{v} \neq \vec{0}$  (dette *rotoni*, che seguono la distribuzione di Boltzmann). Punto fondamentale della teoria di Landau è la presenza di un gap di energia fra i livelli associati ai moti potenziali ed a quelli vorticosi, essenziale per la superfluidità.

Oltre all'<sup>4</sup>He e al suo isotopo, l'<sup>3</sup>He, la superfluidità può essere realizzata e studiata anche con gas diluiti (vale a dire con distanza interparticellare più grande del range di interazione) ultra-freddi intrappolati. Tali sistemi furono impiegati anche per la realizzazione del primo BEC in laboratorio: nel 1995

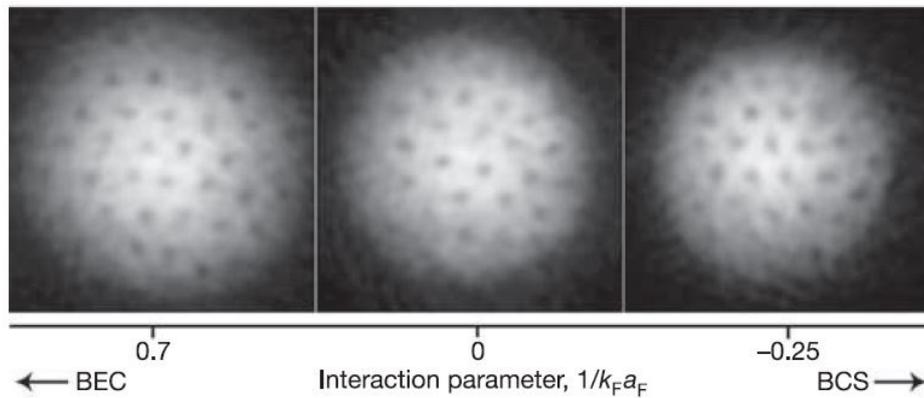
---

<sup>1</sup>È un effetto che consiste nella produzione di un getto di elio liquido, provocato da un aumento di temperatura, verso l'esterno del tubo in cui esso si trova e che perdura fintantoché tale aumento di temperatura è presente [6].

<sup>2</sup>D'ora in avanti indicato anche con la sigla inglese BEC, vale a dire *Bose-Einstein Condensate*.



(a) Distribuzione bidimensionale della velocità del vapore di  $^{87}\text{Rb}$  (A) poco prima della formazione del BEC, (B) poco dopo la sua formazione e (C) in presenza di un BEC quasi puro. Tale immagine è stata riadattata dalla referenza [10].



(b) Reticoli di vortici in un gas di Fermi fortemente interagente rotante di  $^6\text{Li}$  formati lungo il crossover BCS-BEC. L'immagine è stata presa e riadattata dalla referenza [11].

**Figura 1.2:** Immagini inerenti all'osservazione sperimentale del BEC e della superfluidità rispettivamente.

il gruppo di Cornell e Wieman (premi Nobel per la Fisica nel 2001 assieme a Ketterle) realizzarono un BEC<sup>3</sup> sfruttando atomi di <sup>87</sup>Rb confinati da dei campi magnetici e portati ad una temperatura prossima ai 170 nK [10]. Ci si può accorgere della formazione di un BEC osservando la distribuzione della velocità del vapore, visibile alla **Figura 1.2a**: si può notare come, superata la temperatura critica, vi è al centro (in blu e in bianco) la formazione di condensato (che si accresce al diminuire della temperatura), caratterizzato da una distribuzione della velocità non termica ed anisotropa; esso è circondato da una frazione di atomi non condensati con una distribuzione termica ed isotropa (come testimonia l'alone circolare verde e giallo nelle figure A e B).

Una caratteristica interessante dei gas diluiti ultra-freddi fermionici a due componenti di spin è la possibilità di passare da coppie di fermioni con spin e momenti lineari opposti, dette “Coppie di Cooper” (costituenti il cosiddetto *regime BCS*), a dimeri bosonici composti (costituenti il *regime BEC*). Il passaggio dall'uno all'altro regime è detto “Crossover BCS-BEC” ed è descritto dal parametro d'interazione inverso  $y = 1/(k_F a_F)$  (o equivalentemente dal suo reciproco  $x = k_F a_F$ ), con  $k_F$  numero d'onda di Fermi e  $a_F$  lunghezza di scattering fermionica, che è modificabile proprio grazie alla cosiddetta “Risonanza di Fano-Feshbach”:

1. per  $y \ll -1$  ci si aspetta il regime con coppie di Cooper descritte dalla teoria BCS;
2. per  $y \gg 1$  ci si aspetta il regime con dimeri bosonici descritti dalla teoria BEC;
3. per  $-1 < y < 1$  si ha il crossover e per  $y \rightarrow 0$  si ha il cosiddetto *unitary limit*.

Per maggiori informazioni sia sul crossover sia sulla lunghezza di scattering si faccia riferimento all'**Appendice A**.

Un'incontrovertibile verifica sperimentale della superfluidità è connessa proprio al crossover BCS-BEC: nel 2005 [11] si riuscì infatti a creare lungo tale crossover dei reticoli di vortici quantizzati (si veda la **Figura 1.2b**), cioè delle linee materiali  $C$ , distintive dei superfluidi, lungo le quali la circolazione  $\Gamma$  della velocità è quantizzata:

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = k \frac{2\pi\hbar}{\zeta m},$$

---

<sup>3</sup>Nello stesso anno anche il gruppo di Hulet e di Ketterle riuscirono ad ottenere un condensato con atomi di <sup>7</sup>Li e di <sup>23</sup>Na rispettivamente.

dove  $k$  è un numero intero,  $m$  è la massa delle particelle e  $\zeta$  è il *coefficiente statistico* (si faccia riferimento alla **Sezione 4.1** per maggiori dettagli) [12].

Questa tesi è così strutturata: nel **Capitolo 2** si ripercorreranno cronologicamente le equazioni della Meccanica Quantistica che nel corso del tempo sono state sviluppate per descrivere l'idrodinamica quantistica.

Nel **Capitolo 3** si ricaveranno le espressioni per la densità di energia dello stato fondamentale  $\mathcal{E}^{\text{gs}}$  e per il potenziale chimico locale  $\mu$  di sistemi fermionici e bosonici a due componenti di spin non e debolmente interagenti a temperatura nulla.

Nel **Capitolo 4** ci si concentrerà esclusivamente su un tale gas fermionico diluito e si introdurrà, al fine di studiarne in maniera più generale il comportamento lungo il crossover BCS-BEC, una correzione di gradiente di tipo Von Weizsäcker, ricercando dunque un'equazione di Schrödinger non lineare e una densità Lagrangiana estesa che permettano di ricavare le relative equazioni dell'idrodinamica a temperatura nulla in termini del coefficiente di Von Weizsäcker  $\lambda_{\text{W}}$ .

Nel **Capitolo 5** si studierà lo spettro di Bogoliubov di tale sistema e si assegneranno infine dei valori a  $\lambda_{\text{W}}$  lungo il crossover. [6]

# Capitolo 2

## Equazioni dell'idrodinamica quantistica

Nel presente capitolo si vogliono analizzare le equazioni che, nel corso dello sviluppo della Meccanica Quantistica, sono state impiegate per la descrizione dell'idrodinamica quantistica.

Al fine di studiare i problemi micro-meccanici (ai quali non è applicabile la Meccanica Classica), nel suo articolo del 1926 Schrödinger [13] introdusse la seguente equazione d'onda

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U\psi, \quad (2.1)$$

nota col nome di *equazione di Schrödinger dipendente dal tempo*. In essa  $\psi$  è la cosiddetta *funzione d'onda* che descrive lo stato del sistema, il cui modulo quadro fu interpretato nel 1926 da Born [14] in modo probabilistico col significato di densità di probabilità. All'interno della (2.1)  $U$  è l'energia potenziale esterna,  $m$  la massa,  $\hbar$  la costante di Planck ridotta ed  $i$  l'unità immaginaria; da ciò si capisce come la funzione d'onda sia complessa.

L'equazione (2.1) può anche essere ricondotta ad un'equazione agli autovalori (nota come *equazione di Schrödinger stazionaria*) per l'Hamiltoniana  $\hat{H}$  che descrive il sistema: l'energia  $E$  e la funzione d'onda  $\psi$  ne rappresentano rispettivamente gli autovalori e le autofunzioni.

Nel 1927 Madelung [15] diede un'interpretazione idrodinamica a tale equazione d'onda: partendo da  $(2.1)\psi^* - (2.1)^*\psi$ , pari a

$$i\hbar \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ (\nabla^2 \psi)\psi^* - (\nabla^2 \psi^*)\psi \right] \quad (2.2)$$

poiché in questo calcolo il contributo dell'operatore  $U$  è complessivamente nullo, e andando poi ad aggiungere e sottrarre nelle parentesi quadre a secondo

membro i termini  $\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi^*$  e a dividere per  $i\hbar$  si ottiene

$$\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ -i\frac{\hbar}{2m}(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*) \right] = 0; \quad (2.3)$$

tale equazione può essere interpretata come un'equazione di continuità per la probabilità associando a  $|\psi|^2$  il significato di densità di probabilità  $\rho$  ed a  $-i\frac{\hbar}{2m}(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*)$  il significato della relativa corrente di probabilità  $\vec{j}$ .

Introducendo dunque le variabili di Madelung  $(n(\vec{r}, t), \theta(\vec{r}, t))$ , con  $n(\vec{r}, t)$  densità numerica locale tale per cui  $\int n(\vec{r}, t)d^3\vec{r} = N$  numero totale di particelle del sistema e  $\theta(\vec{r}, t)$  fattore di fase, la funzione d'onda normalizzata risulta essere

$$\psi(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{n(\vec{r}, t)}{N}} e^{i\theta(\vec{r}, t)}. \quad (2.4)$$

Con tali variabili si ritrova

$$\begin{cases} \rho = \frac{n}{N} \\ \vec{j} = \frac{\hbar}{m}\vec{\nabla}\theta \frac{n}{N} = \rho\vec{v} \end{cases}, \quad (2.5)$$

dove  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  rappresenta la velocità locale del fluido espressa come gradiente del potenziale fluidico  $\frac{\hbar}{m}\theta$  (a meno del coefficiente statistico  $\zeta$ ).

Inserendo la parametrizzazione (2.4) nella (2.1) si ottiene<sup>1</sup>

$$m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}m\vec{\nabla}v^2 = m\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{\nabla} \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} - U \right], \quad (2.6)$$

in cui  $\frac{D}{Dt}$  è la derivata materiale definita come  $\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ ; l'equazione sopra scritta esprime la conservazione del momento lineare per il flusso irrotazionale di un fluido soggetto a forze conservative [15].

Nel 1961 Gross [16] e Pitaevskii [17] giunsero indipendentemente a formulare un'equazione che descrive un BEC puro costituito da atomi diluiti (cioè debolmente interagenti) ed ultra-freddi di massa  $m$  con lo stesso spin, nota col nome di *equazione di Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo*<sup>2</sup> (per la derivazione dettagliata di tale equazione si faccia riferimento alla **Sezione 3.3**)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r}) + (N-1)g|\psi(\vec{r}, t)|^2 \right]\psi(\vec{r}, t), \quad (2.7)$$

<sup>1</sup>Per i calcoli dettagliati si faccia riferimento alla **Sezione 4.1**, nella quale si deve sostituire  $\alpha = \beta = 1$  e  $\gamma = \sigma = 0$ .

<sup>2</sup>In verità già nel 1958 Gross [18] arrivò a formulare tale equazione, ma non arrivò ad inserire un potenziale a corto raggio come fatto successivamente nel 1961 in [16] e [17].

dove  $g$  è pari a  $\int V(\vec{r})d^3\vec{r} = \frac{4\pi\hbar^2}{m}a_B$  dalla teoria dello scattering 3D, con  $V(\vec{r})$  potenziale d'interazione interatomico espresso come *pseudo-potenziale di Fermi*  $g\delta^3(\vec{r})$  e con  $a_B$  *s-wave scattering length* dei bosoni. In questo caso, poiché si ha a che fare con un BEC puro,  $\psi(\vec{r}, t)$  rappresenta lo stato di singola particella occupato da tutti gli  $N$  bosoni identici.

Andando ad inserire all'interno della (2.7) le variabili di Madelung si ottiene<sup>3</sup> il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n\vec{v}) = 0 \\ m\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}mv^2 + U + \left(1 - \frac{1}{N}\right)g(a_B)n \right] = \vec{0} \end{cases}, \quad (2.8)$$

usato per descrivere l'idrodinamica a temperatura nulla di un gas bosonico diluito. Si tratta rispettivamente dell'equazione di continuità per la densità numerica locale  $n(\vec{r}, t)$  e dell'equazione di Eulero per un fluido inviscido ed irrotazionale, che esprime la conservazione del momento lineare. In quest'ultima il primo termine è la cosiddetta *quantum pressure* (trascurabile nel caso di sistemi con un gran numero di particelle), il secondo è l'energia cinetica, il terzo rappresenta il potenziale esterno e l'ultimo il potenziale chimico locale, che dipende dalla *s-wave scattering length*  $a_B$  bosonica; infatti il pedice  $s$  in  $a_s$ , usato per un generico sistema, verrà sostituito da  $B$  o da  $F$  quando ci si riferirà esplicitamente a bosoni o a fermioni rispettivamente.

Più in generale, nel caso di un gas diluito ultra-freddo di particelle identiche (bosoniche o fermioniche) di massa  $m$  con due componenti di spin (che indichiamo con  $\uparrow$  e  $\downarrow$ ) che si muovono in fase, cioè con  $\vec{v}_\uparrow(\vec{r}, t) = \vec{v}_\downarrow(\vec{r}, t)$ , e con le densità numeriche locali che soddisfano a  $n_\uparrow(\vec{r}, t) = n_\downarrow(\vec{r}, t) = n(\vec{r}, t)/2$ , le equazioni dell'idrodinamica quantistica del superfluido a temperatura nulla sono

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n\vec{v}) = 0 \\ m\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r}) + \mu(n; a_s) \right] = \vec{0} \end{cases}}, \quad (2.9)$$

dove  $\mu(n; a_s)$  è il potenziale chimico locale e in cui si è resa esplicita la dipendenza del potenziale esterno dalle coordinate spaziali. È importante enfatizzare come, essendo a  $T = 0\text{K}$ , tali equazioni descrivono solo la componente superfluida, poiché quella normale è assente.

Una caratteristica interessante dei sistemi con fase superfluida è che, anche se a temperatura nulla (e dunque al di sotto della temperatura critica in corrispondenza della quale avviene la transizione di fase), non è detto che

<sup>3</sup>Per il calcolo completo si veda la **Sezione 4.1**, in cui si deve porre  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ ,  $\sigma = 0$  e  $\mu(n; a_B) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)g(a_B)n$ .

tale proprietà collettiva si manifesti: secondo infatti il criterio di Landau il superfluido non subirà dissipazione della sua energia cinetica fintantoché la sua velocità è più piccola della *velocità critica di Landau*

$$v_{\text{cr}} = \min_{\vec{k}} \left( \frac{\hbar\omega(k)}{k} \right), \quad (2.10)$$

con  $k = |\vec{k}|$  e con  $\hbar\omega(k)$  che è la relazione di dispersione delle eccitazioni elementari del superfluido (per maggiori dettagli si veda la **Sezione 5.1**). Ciò significa che, anche per  $T = 0 \text{ K}$ , se il sistema si muove troppo velocemente il regime superfluido è distrutto e vi è solo la componente normale. Dunque, perché la fase superfluida sia presente, sono importanti sia la temperatura del sistema che la sua velocità.

Si può usare tale velocità critica per definire la *healing length*  $\xi = \frac{\hbar}{mv_{\text{cr}}}$ : se il sistema in analisi è macroscopico, cioè se le eccitazioni che si propagano al suo interno hanno grande lunghezza d'onda (nello specifico  $\lambda \gg \xi$ ) e anche bassa energia, allora il sistema di equazioni (2.9) descrive l'idrodinamica a temperatura nulla di tale superfluido.

Sia nel caso bosonico sia in quello fermionico il sistema (2.9) ha la stessa forma; ciò che cambia è l'espressione del potenziale chimico locale  $\mu$ , che dipende da  $a_s$  ed assume espressioni differenti a seconda del tipo di sistema e del tipo di interazioni presenti tra le particelle che lo costituiscono. Nel prossimo capitolo studieremo indirettamente le espressioni di tale grandezza nel caso di sistema non interagente e debolmente interagente. [12, 19]

# Capitolo 3

## Densità di energia dello stato fondamentale per sistemi bosonici e fermionici

Poiché, come detto nel precedente capitolo, l'espressione del potenziale chimico locale  $\mu(n; a_s)$  cambia a seconda del sistema in analisi e del tipo di interazioni interparticellari, è utile studiare preliminarmente tale grandezza nel caso di sistemi bosonici e fermionici identici a due componenti di spin non interagenti (indicati col pedice *ni*, cioè *non interacting*) e debolmente interagenti (indicati col pedice *wi*, cioè *weakly interacting*) a temperatura nulla. In questo capitolo ci concentreremo tuttavia non tanto sul potenziale chimico locale  $\mu(n; a_s)$ , quanto sulla densità di energia dello stato fondamentale  $\mathcal{E}^{\text{gs}} = E^{\text{gs}}/\Omega$  (con  $\Omega$  volume del gas): il potenziale chimico locale sarà immediatamente ricavabile usando la relazione  $\mu = \frac{\partial \mathcal{E}^{\text{gs}}}{\partial n}$ .

### 3.1 Bosoni non interagenti

In questo caso i bosoni non sono soggetti ad alcun potenziale d'interazione  $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  e (considerando il caso uniforme) dalla statistica di Bose-Einstein si ha che, per un tale gas di Bose ideale, in presenza di condensato la densità volumetrica di energia è

$$\mathcal{E}_{\text{B,ni}}^{\text{gs}}(T, n) = \frac{3}{2} P_{\text{B,ni}}(T, n) = \frac{3}{2} k_B T \frac{2}{\lambda^3(T)} g_{5/2}(1) \propto T^{5/2}. \quad (3.1)$$

Poiché stiamo considerando il caso a temperatura nulla, inferiore a quella

critica del condensato

$$T_{\text{BEC}}(n) = \frac{h^2}{2m\pi k_B [2g_{3/2}(1)]^{2/3}} n^{2/3} \quad (3.2)$$

(con  $g_{3/2}(1) = \zeta(3/2) = 2.612\dots$  funzione di Riemann), tutte le  $N$  particelle prendono parte al BEC puro (vale a dire che tutte occupano lo stesso stato di singola particella, che è quello ad energia più bassa) e  $\mathcal{E}_{\text{B,ni}}^{\text{gs}} = 0$ . Conseguentemente  $\mu_{\text{B,ni}} = 0$ .

## 3.2 Fermioni non interagenti

Un gas di fermioni è descritto dalla statistica di Fermi-Dirac, che prevede che il fattore di occupazione di un livello con energia<sup>1</sup>  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  sia

$$f_{\text{FD}}(T, k) = \frac{1}{1 + e^{\frac{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu}{k_B T}}} \stackrel{T=0\text{K}}{=} H\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \epsilon_{\text{F}}\right), \quad (3.3)$$

dove  $k$  è il vettore d'onda,  $\mu$  è il potenziale chimico del sistema in analisi,  $H(z)$  è la funzione di Heaviside e  $\epsilon_{\text{F}}$  è l'*energia di Fermi*, cioè il  $\lim_{T \rightarrow 0} \mu$ . L'energia di Fermi è definibile come il valore di energia al di sotto della quale, a temperatura nulla, tutti gli stati sono completamente occupati (ci si riferisce a ciò anche col termine *mare di Fermi*), o anche come l'energia cinetica di un fermione che ha vettore d'onda pari al *vettore d'onda di Fermi*  $k_{\text{F}}$ ,  $\epsilon_{\text{F}} = \frac{\hbar^2 k_{\text{F}}^2}{2m}$ .

È possibile trovare l'espressione di  $\epsilon_{\text{F}}$  partendo dal numero  $N$  di fermioni e considerandoli a temperatura nulla:

$$\begin{aligned} N \stackrel{T=0\text{K}}{=} 2 \sum_{\vec{k}} H\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \epsilon_{\text{F}}\right) &\xrightarrow[\text{termodinamico}]{\text{limite}} 2 \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} H\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \epsilon_{\text{F}}\right) = \\ \stackrel{\substack{\text{coordinate} \\ \text{sferiche}}}{=} 2 \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} dk k^2 4\pi H\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \epsilon_{\text{F}}\right) &= \frac{\Omega}{\pi^2} \int_0^{\sqrt{\frac{2m\epsilon_{\text{F}}}{\hbar^2}}} dk k^2 + 0 = \\ &= \frac{\Omega}{3\pi^2} \left(\frac{2m\epsilon_{\text{F}}}{\hbar^2}\right)^{3/2}, \quad (3.4) \end{aligned}$$

dove il coefficiente 2 a numeratore è legato alla molteplicità di spin.

<sup>1</sup>Poiché consideriamo il caso uniforme non interagente i fermioni si comportano come delle particelle libere.

Dalla (3.4) è possibile ricavare l'espressione per l'energia di Fermi:

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}, \quad (3.5)$$

con  $n = N/\Omega$  la densità numerica e  $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$  il già introdotto vettore d'onda di Fermi, cioè il raggio della sfera che, nello spazio dei momenti, contiene tutti gli stati occupati a temperatura nulla (la cui superficie è detta *superficie di Fermi*).

Ricordando che  $\mu = \frac{\partial \mathcal{E}^{\text{gs}}}{\partial n}$ , si può concludere dunque che a temperatura nulla  $\mu_{F,\text{ni}} = \epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$  e  $\mathcal{E}_{F,\text{ni}}^{\text{gs}} = \frac{3}{5} n \epsilon_F = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{2/3} n^{5/3}$ , entrambi indipendenti dalla lunghezza di scattering fermionica  $a_F$ .

### 3.3 Bosoni debolmente interagenti

In generale un BEC di atomi diluiti ed ultra-freddi di massa  $m$  debolmente interagenti è descritto dall'equazione di Gross-Pitaevskii, che è un'equazione di Schrödinger non lineare cubica.

Essa è ottenibile dall'Hamiltoniana quantistica di un sistema di  $N$  particelle con lo stesso spin:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + U(\vec{r}_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N V(\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad (3.6)$$

dove  $U(\vec{r})$  è il potenziale esterno e  $V(\vec{r} - \vec{r}')$  è il potenziale interatomico.

In generale l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo di un sistema multi-corpi è data da

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = \hat{H} \Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t), \quad (3.7)$$

con  $\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$  funzione d'onda multi-corpi dipendente dal tempo.

La (3.7) è l'equazione di Euler-Lagrange del funzionale d'azione (detto *azione di Dirac*)

$$\begin{aligned} S &= \int dt \int d^3\vec{r}_1 \dots d^3\vec{r}_N \Psi^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) \Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = \\ &= \int dt \left\langle \Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \left| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right| \Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.8)$$

di cui si fa la variazione rispetto al coniugato della funzione d'onda  $\Psi^*$ .

Nel caso di BEC puro (essendo appunto a temperatura nulla) si effettua la cosiddetta *approssimazione di Hartree* o *di campo medio*, ossia si assume che tutti i bosoni occupino lo stesso stato di singola particella<sup>2</sup>, descritto da  $\psi$ :

$$\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = \prod_{i=1}^N \psi(\vec{r}_i, t), \quad (3.9)$$

con le  $\psi(\vec{r}_i, t)$  normalizzate.

Inserendo tale approssimazione nella (3.8) si ottiene

$$\begin{aligned} S = & \left\{ \int dt d^3\vec{r}_1 \dots d^3\vec{r}_N \psi^*(\vec{r}_1, t) \psi^*(\vec{r}_2, t) \dots \psi^*(\vec{r}_N, t) \left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 + \dots + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_N^2 - U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) + \dots - U(\vec{r}_N) \right] \psi(\vec{r}_1, t) \psi(\vec{r}_2, t) \dots \right. \\ & \left. \dots \psi(\vec{r}_N, t) \right\} - \frac{1}{2} \int dt d^3\vec{r}_1 \dots d^3\vec{r}_N \psi^*(\vec{r}_1, t) \psi^*(\vec{r}_2, t) \dots \psi^*(\vec{r}_N, t) V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ & \psi(\vec{r}_1, t) \psi(\vec{r}_2, t) \dots \psi(\vec{r}_N, t) - \dots \quad (3.10) \end{aligned}$$

Sapendo che gli operatori  $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_k^2$  e  $U(\vec{r}_k)$  agiscono unicamente sulla  $\psi$  dipendente da  $\vec{r}_k$  e che per  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  vale la regola della derivata del prodotto di funzioni e rinominando con  $\vec{r}_1$  in ogni integrale la variabile su cui agiscono i vari operatori, gli integrali fra parentesi graffe in (3.10) divengono

$$\begin{aligned} & N \int dt d^3\vec{r}_1 \psi^*(\vec{r}_1, t) \left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - U(\vec{r}_1) \right] \psi(\vec{r}_1, t) \int d^3\vec{r}_2 |\psi(\vec{r}_2, t)|^2 \dots \\ & \dots \int d^3\vec{r}_N |\psi(\vec{r}_N, t)|^2 = N \int dt d^3\vec{r} \psi^*(\vec{r}, t) \left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}, t), \quad (3.11) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo membro si è rinominato  $\vec{r}_1$  con  $\vec{r}$  e si è usato il fatto che le funzioni d'onda di singola particella  $\psi(\vec{r}_i, t)$  sono normalizzate.

Per quel che riguarda gli integrali con integrando  $V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$  in (3.10), scambiando opportunamente le particelle in modo da eliminare il fattore  $\frac{1}{2}$  (senza introdurre alcun segno avendo a che fare con bosoni, che hanno funzione d'onda simmetrica per scambio di particelle) e usando, come prima,

---

<sup>2</sup>Si fa tale approssimazione perché, a differenza del caso non interagente, non è detto che nel caso debolmente interagente tale condizione sia completamente soddisfatta.

il fatto che funzioni d'onda non interessate dall'operatore  $V$  si combinano col loro complesso coniugato a dare il modulo quadro (che integrato sul relativo dominio dà 1), otteniamo

$$\begin{aligned}
& - \int dt d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \psi^*(\vec{r}_1, t) \psi^*(\vec{r}_2, t) V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \psi(\vec{r}_1, t) \psi(\vec{r}_2, t) + \dots + \\
& - \int dt d^3\vec{r}_{N-1} d^3\vec{r}_N \psi^*(\vec{r}_{N-1}, t) \psi^*(\vec{r}_N, t) V(\vec{r}_{N-1} - \vec{r}_N) \psi(\vec{r}_{N-1}, t) \psi(\vec{r}_N, t) = \\
& = - \int dt d^3\vec{r}_1 \psi^*(\vec{r}_1, t) \left[ \int d^3\vec{r}_2 |\psi(\vec{r}_2, t)|^2 V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right] \psi(\vec{r}_1, t) + \dots + \\
& - \int dt d^3\vec{r}_{N-1} \psi^*(\vec{r}_{N-1}, t) \left[ \int d^3\vec{r}_N |\psi(\vec{r}_N, t)|^2 V(\vec{r}_{N-1} - \vec{r}_N) \right] \psi(\vec{r}_{N-1}, t) = \\
& = - \frac{(N-1)N}{2} \int dt d^3\vec{r} \psi^*(\vec{r}, t) \left[ \int d^3\vec{r}' |\psi(\vec{r}', t)|^2 V(\vec{r} - \vec{r}') \right] \psi(\vec{r}, t),
\end{aligned} \tag{3.12}$$

dove nell'ultimo membro si sono rinominate (essendo variabili mute) le variabili di integrazione degli integrali più "interni" con  $\vec{r}'$  e di quelli più "esterni" con  $\vec{r}$ , ottenendo così  $\frac{(N-1)N}{2}$  addendi uguali.

Complessivamente si ha che

$$\begin{aligned}
S = N \int dt d^3\vec{r} \psi^*(\vec{r}, t) & \left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(\vec{r}) + \right. \\
& \left. - \frac{N-1}{2} \int d^3\vec{r}' |\psi(\vec{r}', t)|^2 V(\vec{r} - \vec{r}') \right] \psi(\vec{r}, t) = \int dt d^3\vec{r} \mathcal{L}, \tag{3.13}
\end{aligned}$$

in cui  $\mathcal{L}$  è la densità Lagrangiana legata all'azione di Dirac  $S$ .

Derivando  $\mathcal{L}$  rispetto a  $\psi^*$  ha

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = N \left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(\vec{r}) - (N-1) \int d^3\vec{r}' |\psi(\vec{r}', t)|^2 V(\vec{r} - \vec{r}') \right] \psi(\vec{r}, t), \tag{3.14}$$

e dalla relativa equazione di Euler-Lagrange di  $S$  si ottiene

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left[ - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) + (N-1) \int d^3\vec{r}' |\psi(\vec{r}', t)|^2 V(\vec{r} - \vec{r}') \right] \psi(\vec{r}, t), \tag{3.15}$$

nota come *equazione di Hartree dipendente dal tempo* per un sistema di  $N$  bosoni identici nello stato di singola particella  $\psi(\vec{r}, t)$ , che è un'equazione di Schrödinger integro-differenziale.

Avendo a che fare con un gas diluito possiamo usare lo pseudo-potenziale di Fermi  $V(\vec{r} - \vec{r}') = g\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ , con  $g = \frac{4\pi\hbar^2}{m}a_B$ , ottenendo in questo modo l'equazione di Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r}) + (N-1)g|\psi(\vec{r}, t)|^2 \right] \psi(\vec{r}, t), \quad (3.16)$$

che è l'equazione di Euler-Lagrange del funzionale d'azione di Gross-Pitaevskii

$$S_{\text{GP}} = N \int dt d^3\vec{r} \psi^*(\vec{r}, t) \left[ i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - U(\vec{r}) - \frac{(N-1)}{2}g|\psi(\vec{r}, t)|^2 \right] \psi(\vec{r}, t). \quad (3.17)$$

Nella (3.16)  $(N-1)g|\psi(\vec{r}, t)|^2$  rappresenta il potenziale chimico locale  $\mu$ , che con le variabili di Madelung è pari a  $\mu_{B,wi} = (1 - \frac{1}{N})gn = (1 - \frac{1}{N})\frac{4\pi\hbar^2}{m}na_B$ , da cui  $\mathcal{E}_{B,wi}^{\text{gs}} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{N})gn^2 = (1 - \frac{1}{N})\frac{2\pi\hbar^2}{m}n^2a_B$ .

A solo scopo di completezza, per valori del parametro d'interazione  $y$  un po' più piccoli di quelli considerati in questa discussione (e dunque per valori di  $n^{1/3}a_B$  un po' più grandi) si ritrova il risultato dato da Lee e Yang [20] per un gas di Bose debolmente interagente  $\mu_{B,Ly} = (1 - \frac{1}{N})\frac{4\pi\hbar^2}{m}na_B \left( 1 + \frac{32}{3\sqrt{\pi}}n^{1/3}a_B \right)$ .

### 3.4 Fermioni debolmente interagenti

Effettuando dei fit coi dati Monte Carlo [21] è possibile ricavare, in termini del parametro d'interazione inverso  $y^3$ , l'espressione per la densità di energia di un gas fermionico diluito a due componenti di spin a temperatura nulla debolmente interagente, data da

$$\mathcal{E}_{F,wi}^{\text{gs}} = \frac{3}{5}n\epsilon_F\epsilon(y) = \frac{3}{5}\frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2)^{2/3}n^{5/3}\epsilon(y), \quad (3.18)$$

con [20, 22]

$$\epsilon(y) = 1 + \frac{10}{9\pi}\frac{1}{y} + \frac{4(11 - 2\ln 2)}{21\pi^2}\frac{1}{y^2} + \dots \quad (3.19)$$

---

<sup>3</sup>In questa sezione si è preferito lavorare fin da subito con tale parametro invece di usare  $n$  e  $a_F$  per non appesantire eccessivamente il formalismo e per coerenza con la fonte [21].

Come già specificato, il potenziale chimico locale si può ricavare derivando la densità di energia rispetto a  $n$ :

$$\mu_{F,wi} = \frac{\partial \mathcal{E}_{F,wi}^{gs}}{\partial n} = \epsilon_F \left[ \epsilon(y) - \frac{y}{5} \epsilon'(y) \right], \quad (3.20)$$

dove  $\epsilon'(y) = -\frac{10}{9\pi} \frac{1}{y^2} - \frac{8(11-2\ln 2)}{21\pi^2} \frac{1}{y^3} + \dots$

Da ciò deriva che, in funzione di  $n$  e  $a_F$

$$\mu_{F,wi} = \epsilon_F \left[ 1 + \frac{4}{(9\pi)^{1/3}} n^{1/3} a_F + \frac{4(11-2\ln 2)}{5(3\pi^2)^{1/3}} n^{2/3} a_F^2 + \dots \right]. \quad (3.21)$$

Riassumendo, si sono ricavate le seguenti espressioni:

$$\mathcal{E}^{gs}(n; a_s) = \begin{cases} 0 & \text{nel caso B, ni} \\ \frac{3}{5} n \epsilon_F & \text{nel caso F, ni} \\ \left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{2\pi\hbar^2}{m} n^2 a_B & \text{nel caso B, wi} \\ \frac{3}{5} n \epsilon_F \left[ 1 + \frac{10}{9} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n^{1/3} a_F + \frac{4(11-2\ln 2)}{7(3\pi^2)^{1/3}} n^{2/3} a_F^2 + \dots \right] & \text{nel caso F, wi} \end{cases}, \quad (3.22)$$

e

$$\mu(n; a_s) = \begin{cases} 0 & \text{nel caso B, ni} \\ \epsilon_F & \text{nel caso F, ni} \\ \left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{4\pi\hbar^2}{m} n a_B & \text{nel caso B, wi} \\ \epsilon_F \left[ 1 + \frac{4}{(9\pi)^{1/3}} n^{1/3} a_F + \frac{4(11-2\ln 2)}{5(3\pi^2)^{1/3}} n^{2/3} a_F^2 + \dots \right] & \text{nel caso F, wi} \end{cases}. \quad (3.23)$$

È possibile notare come nel caso debolmente interagente, per  $a_B \rightarrow 0^+$  (limite *deep BEC*) e  $a_F \rightarrow 0^-$  (limite *deep BCS*), si ritrovino i risultati del caso non interagente bosonico e fermionico rispettivamente.

# Capitolo 4

## Generalizzazione del crossover BCS-BEC dipendente dal tempo con la correzione di Von Weizsäcker

Consideriamo un gas di  $N$  particelle fermioniche identiche di massa  $m$  e densità numerica  $n$  con due componenti di spin bilanciate a temperatura nulla. Come detto, in genere l'idrodinamica del relativo superfluido è descritta dal sistema (2.9), con il termine di *quantum pressure* solitamente trascurato nell'equazione di Eulero.

Al fine di trattare questo sistema in un modo più generale, vogliamo studiarne il crossover BCS-BEC dipendente dal tempo introducendo una correzione di gradiente di tipo Von Weizsäcker [23]:

$$\boxed{-\lambda_{\text{W}} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}}}, \quad (4.1)$$

dove  $\lambda_{\text{W}}$  è il *coefficiente di Von Weizsäcker*, che ci si aspetta vari lungo il crossover.

Nel presente capitolo si ricercano dunque un'equazione di Schrödinger non lineare e una densità Lagrangiana estesa  $\mathcal{L}$  che permettano di ricavare il seguente sistema di equazioni dell'idrodinamica a temperatura nulla per il superfluido nel crossover BCS-BEC in analisi:

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n\vec{v}) = 0 \\ m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left[ -\lambda_{\text{W}} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} m v^2 + U(\vec{r}) + \mu(n; a_{\text{F}}) \right] = \vec{0} \end{cases}}. \quad (4.2)$$

## 4.1 Equazione di Guerra-Pusterla per un superfluido

Una candidata equazione è l'equazione di Schrödinger non lineare del tipo Guerra-Pusterla per i superfluidi [12, 24]

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}, t) = \left[ -\alpha\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \beta U(\vec{r}) + \gamma\mu(n; a_s) + \sigma\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2|\Psi|}{|\Psi|} \right] \Psi(\vec{r}, t), \quad (4.3)$$

cioè una classe di equazioni d'onda quantistiche non lineari caratterizzate dalla presenza di un "potenziale quantistico" (cioè il quarto addendo nel membro di destra) e che hanno soluzioni per le quali è ancora possibile definire densità e correnti di probabilità e che ammettono equazioni di continuità, come nel caso lineare [24]. Al suo interno  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\sigma$  sono dei parametri reali da determinare.

Andiamo ad esprimere nella (4.3) la funzione d'onda  $\Psi$  che descrive il superfluido in termini delle variabili di Madelung

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{n(\vec{r}, t)}{N}} e^{i\theta(\vec{r}, t)}, \quad (4.4)$$

svolvendo i calcoli delle derivate presenti si trova

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \Psi \left[ \frac{1}{2n} \frac{\partial n}{\partial t} + i \frac{\partial \theta}{\partial t} \right], \quad (4.5)$$

$$\nabla^2\Psi = \Psi \left[ \frac{\nabla^2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + 2i\frac{\vec{\nabla}\sqrt{n} \cdot \vec{\nabla}\theta}{\sqrt{n}} + i\nabla^2\theta - (\vec{\nabla}\theta)^2 \right], \quad (4.6)$$

$$\frac{\nabla^2|\Psi|}{|\Psi|} = \frac{\nabla^2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}, \quad (4.7)$$

$$\vec{\nabla}\Psi = \Psi \left[ \frac{1}{2n} \vec{\nabla}n + i\vec{\nabla}\theta \right], \quad (4.8)$$

dove si è omessa la dipendenza da  $\vec{r}$  e  $t$  per non appesantire la notazione.

Per trovare la prima delle due equazioni del sistema (4.2) andiamo a calcolare  $(4.3)\Psi^* - (4.3)^*\Psi$ , che equivale a

$$i\hbar\frac{\partial|\Psi|^2}{\partial t} = -\alpha\frac{\hbar^2}{2m} \left[ (\nabla^2\Psi)\Psi^* - (\nabla^2\Psi^*)\Psi \right] \quad (4.9)$$

in quanto i contributi degli operatori  $U$ ,  $\mu$  e  $\frac{\nabla^2|\Psi|}{|\Psi|}$  sono complessivamente nulli in questo caso.

Andando poi ad aggiungere e sottrarre nelle parentesi quadre a secondo membro i termini  $\vec{\nabla}\Psi \cdot \vec{\nabla}\Psi^*$  si ottiene

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} = -\alpha \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \cdot \left[ (\vec{\nabla}\Psi)\Psi^* - (\vec{\nabla}\Psi^*)\Psi \right] \quad (4.10)$$

e sapendo che  $(\vec{\nabla}\Psi)\Psi^* = \frac{n}{N} \left[ \frac{1}{2n} \vec{\nabla}n + i\vec{\nabla}\theta \right]$  complessivamente si ha

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \alpha\zeta \vec{\nabla} \cdot (n\vec{v}) = 0. \quad (4.11)$$

In quest'ultima equazione si è introdotta la *velocità locale del fluido*<sup>1</sup>

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{\zeta m} \vec{\nabla}\theta, \quad (4.12)$$

con  $\zeta$  che è il *coefficiente statistico*. Tale coefficiente è pari ad 1 per un superfluido bosonico, mentre è pari a 2 per uno fermionico perché in tal caso ci si riferisce non ai singoli fermioni ma alle coppie di Cooper da loro formate, che hanno massa doppia e densità dimezzata rispetto a quella dei costituenti (si veda l'**Appendice A** per maggiori informazioni). Avendo a che fare con un gas di  $N$  particelle fermioniche identiche  $\zeta$  varrebbe dunque 2; tuttavia si preferisce tenere tale parametro implicito per poter fare alla fine considerazioni più generali.

Sfruttando l'identità vettoriale  $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{a}) = (\vec{\nabla}f) \cdot \vec{a} + f\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$ , è possibile riscrivere l'equazione (4.11) come

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \alpha \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}n \cdot \vec{\nabla}\theta + \alpha \frac{\hbar}{m} n \nabla^2\theta = 0. \quad (4.13)$$

Inserendo le formule fin qui ricavate nella (4.3) essa diviene

$$i\hbar \left[ \frac{1}{2n} \frac{\partial n}{\partial t} + i \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \Psi = \left\{ -\alpha \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} + 2i \frac{\vec{\nabla}\sqrt{n} \cdot \vec{\nabla}\theta}{\sqrt{n}} + i \nabla^2\theta - (\vec{\nabla}\theta)^2 \right] + \beta U + \gamma \mu + \sigma \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right\} \Psi, \quad (4.14)$$

nella quale è possibile semplificare la  $\Psi$  in quanto tutti i termini presenti fra parentesi nei due membri sono degli scalari.

<sup>1</sup>Ricordiamo che essa deve essere minore della velocità critica di Landau  $v_{cr}$  affinché si manifesti la fase superfluida.

Poiché la parte immaginaria della (4.14) altro non è che l'equazione (4.13) moltiplicata per  $\frac{\hbar}{2n}$ , se ne può considerare solo la parte reale; prendendo allora il gradiente di quest'ultima si ottiene

$$\hbar \frac{\partial \vec{\nabla} \theta}{\partial t} + \vec{\nabla} \left[ -(\alpha - \sigma) \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \alpha \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla} \theta)^2 + \beta U + \gamma \mu \right] = \vec{0}, \quad (4.15)$$

dove al primo membro si è scambiato l'ordine di derivazione nel primo addendo.

Facendo comparire la velocità locale del superfluido  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  si ha

$$m\zeta \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left[ -(\alpha - \sigma) \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \alpha \zeta^2 \frac{1}{2} m v^2 + \beta U + \gamma \mu \right] = \vec{0}. \quad (4.16)$$

In conclusione, le due equazioni che si ottengono dall'equazione di Guerra-Pusterla sono

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \alpha \zeta \vec{\nabla} \cdot (n \vec{v}) = 0 \\ m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left[ -\left(\frac{\alpha - \sigma}{\zeta}\right) \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \alpha \zeta^2 \frac{1}{2} m v^2 + \frac{\beta}{\zeta} U + \frac{\gamma}{\zeta} \mu \right] = \vec{0} \end{cases} \quad (4.17)$$

Per trovare una relazione tra i cinque parametri  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma$  e  $\zeta$  imponiamo che questo sistema coincida col sistema (4.2), ottenendo:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{\zeta} \\ \beta = \gamma = \zeta \\ \sigma = \frac{1}{\zeta} - \lambda_W \zeta \end{cases} \quad (4.18)$$

Si può dunque concludere che l'equazione di Schrödinger non lineare che permette di ottenere il sistema di equazioni (4.2) è la seguente equazione di Guerra-Pusterla:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2\zeta m} \nabla^2 + \zeta U(\vec{r}) + \zeta \mu(n; a_s) + (1 - \lambda_W \zeta^2) \frac{\hbar^2}{2\zeta m} \frac{\nabla^2 |\Psi|}{|\Psi|} \right] \Psi(\vec{r}, t). \quad (4.19)$$

Esplicitando il valore di  $\zeta$  (pari a 2 nel caso qui in analisi) si ha

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{4m} \nabla^2 + 2U(\vec{r}) + 2\mu(n; a_F) + (1 - 4\lambda_W) \frac{\hbar^2}{4m} \frac{\nabla^2 |\Psi|}{|\Psi|} \right] \Psi(\vec{r}, t)} \quad (4.20)$$

in cui è da enfatizzare che  $m$  è la massa dei singoli fermioni,  $n$  la loro densità numerica,  $a_F$  la loro lunghezza di scattering e  $\mu(n; a_F)$  il loro potenziale

chimico locale, che lungo il crossover BCS-BEC assume i seguenti valori asintotici [21]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_F \left[ 1 + \frac{4}{(9\pi)^{1/3}} n^{1/3} a_F + \frac{4(11 - 2 \ln 2)}{5(3\pi^2)^{1/3}} n^{2/3} a_F^2 + \dots \right] \quad \text{deep BCS} \quad (4.21) \\ \tilde{\xi} \epsilon_F \quad \text{unitary limit} \quad (4.22) \\ \frac{\epsilon_F}{(9\pi)^{1/3}} \frac{a_M}{a_F} n^{1/3} a_F \left[ 1 + \frac{32}{3\sqrt{2}} \left( \frac{a_M}{a_F} \right)^{3/2} (n^{1/3} a_F)^{3/2} + \dots \right] \quad \text{deep BEC} \quad (4.23) \end{array} \right.$$

con  $\tilde{\xi} = 0.42$  e con  $a_M$  che è la lunghezza di scattering delle molecole bosoniche, pari a  $2a_F$  da un calcolo di campo medio e a  $0.6a_F$  da calcoli con dati Monte Carlo.

La correttezza dei calcoli eseguiti è attestata dal fatto che l'equazione (4.20) coincide con l'equazione di Schrödinger non lineare (27) della referenza [23]. [12]

## 4.2 Approccio Lagrangiano alle equazioni dell'idrodinamica a temperatura nulla

Proviamo ora a ricavare le stesse equazioni dell'idrodinamica a temperatura nulla (4.2) usando la densità Lagrangiana estesa per un superfluido diluito ed ultra-freddo  $\mathcal{L}_{\text{par}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_W$ , nella quale

$$\mathcal{L}_0 = -\tilde{\chi} \hbar \dot{\theta} n - \tilde{\alpha} \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla} \theta)^2 n - \tilde{\beta} U(\vec{r}) n - \tilde{\gamma} \mathcal{E}^{\text{gs}}(n) \quad (4.24)$$

è la densità Lagrangiana di Popov con  $U(\vec{r})$  il potenziale esterno e  $\mathcal{E}^{\text{gs}}(n)$  la densità di energia dello stato fondamentale, e

$$\mathcal{L}_W = -\tilde{\sigma} \lambda_W \frac{\hbar^2}{8m} \frac{(\vec{\nabla} n)^2}{n} \quad (4.25)$$

è la correzione di tipo Von Weizsäcker [25].  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{\gamma}$ ,  $\tilde{\chi}$  e  $\tilde{\sigma}$  sono i parametri reali da determinare in questa sezione. Nel seguito si userà il formalismo  $\dot{a} = \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{da}{dt}$ , avendo come uniche variabili indipendenti  $\vec{r}$  e  $t$ .

In questo caso le grandezze rispetto a cui andare a calcolare le equazioni di Euler-Lagrange sono i campi scalari densità locale  $n(\vec{r}, t)$  e fase  $\theta(\vec{r}, t)$ , motivo per cui esse assumono la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{par}}}{\partial \dot{q}} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{par}}}{\partial (\vec{\nabla} q)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{par}}}{\partial q} = 0, \quad (4.26)$$

nelle quali  $q$  rappresenta il generico campo  $q(\vec{r}, t)$  e nelle quali si è usata la notazione simbolica

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{par}}}{\partial(\vec{\nabla}q)} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{par}}}{\partial(\partial_i q)}. \quad (4.27)$$

Procedendo dunque coi calcoli si trova che

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{par}}}{\partial \dot{\theta}} = -\tilde{\chi} \hbar n, \quad (4.28)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{par}}}{\partial(\vec{\nabla}\theta)} = -\tilde{\alpha} \frac{\hbar^2}{m} \left[ n \nabla^2 \theta + \vec{\nabla} \theta \cdot \vec{\nabla} n \right] = -\tilde{\alpha} \frac{\hbar^2}{m} \vec{\nabla} \cdot (n \vec{\nabla} \theta), \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{par}}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{par}}}{\partial \dot{n}} = 0, \quad (4.30)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{par}}}{\partial(\vec{\nabla}n)} = -\tilde{\sigma} \lambda_W \frac{\hbar^2}{4m} \left[ \frac{\nabla^2 n}{n} - \frac{(\vec{\nabla}n)^2}{n^2} \right], \quad (4.31)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{par}}}{\partial n} = \tilde{\alpha} \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla}\theta)^2 + \tilde{\beta} U(\vec{r}) + \tilde{\gamma} \frac{\partial \mathcal{E}^{\text{gs}}}{\partial n}(n) + \tilde{\chi} \hbar \dot{\theta} - \tilde{\sigma} \lambda_W \frac{\hbar^2}{8m} \frac{(\vec{\nabla}n)^2}{n^2}. \quad (4.32)$$

Dunque l'equazione di Euler-Lagrange per  $\theta(\vec{r}, t)$  è

$$\tilde{\chi} \frac{\partial n}{\partial t} + \tilde{\alpha} \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} \cdot (n \vec{\nabla} \theta) = 0, \quad (4.33)$$

mentre per  $n(\vec{r}, t)$  è

$$\tilde{\chi} \hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} + \tilde{\alpha} \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla}\theta)^2 + \tilde{\beta} U(\vec{r}) + \tilde{\gamma} \frac{\partial \mathcal{E}^{\text{gs}}}{\partial n}(n) - \tilde{\sigma} \lambda_W \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 0, \quad (4.34)$$

nella quale si è usato il fatto che

$$\frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \frac{\nabla^2 n}{n} - \frac{1}{4} \frac{(\vec{\nabla}n)^2}{n^2}. \quad (4.35)$$

Andando a prendere il gradiente della (4.34) e facendo emergere in queste due equazioni di Euler-Lagrange la velocità locale, che ricordiamo essere  $\vec{v} = \frac{\hbar}{\zeta m} \vec{\nabla} \theta$ , si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} \tilde{\chi} \frac{\partial n}{\partial t} + \tilde{\alpha} \zeta \vec{\nabla} \cdot (n \vec{v}) = 0 \\ \tilde{\chi} m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left[ \tilde{\alpha} \zeta \frac{1}{2} m v^2 + \tilde{\beta} U(\vec{r}) + \tilde{\gamma} \frac{\partial \mathcal{E}^{\text{gs}}}{\partial n}(n) - \tilde{\sigma} \lambda_W \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right] = \vec{0} \end{cases}, \quad (4.36)$$

nel quale il termine  $\frac{\partial \mathcal{E}^{\text{gs}}}{\partial n}(n)$  è interpretabile come un potenziale chimico locale  $\mu(n; a_s)$ , come visto nel **Capitolo 3**.

Confrontando il sistema (4.36) col sistema (4.2) si trova che sussistono le seguenti relazioni fra i sei parametri:

$$\begin{cases} \tilde{\alpha} = \frac{\tilde{\chi}}{\zeta} \\ \tilde{\beta} = \tilde{\gamma} = \tilde{\sigma} = \tilde{\chi} \zeta \end{cases}, \quad (4.37)$$

che sostituiti nella densità Lagrangiana danno

$$\mathcal{L}_{\text{par}} = -\tilde{\chi} \hbar \dot{\theta} n - \frac{\tilde{\chi}}{\zeta} \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla} \theta)^2 n - \tilde{\chi} \zeta U(\vec{r}) n - \tilde{\chi} \zeta \mathcal{E}^{\text{gs}}(n) - \tilde{\chi} \zeta \lambda_{\text{W}} \frac{\hbar^2}{8m} \frac{(\vec{\nabla} n)^2}{n}. \quad (4.38)$$

Inoltre nel caso uniforme con derivate temporali e spaziali nulle ci si aspetta di ritrovare il risultato

$$\mathcal{L}_{\text{par}} = -\mathcal{E}^{\text{gs}}(n), \quad (4.39)$$

che ci fornisce un'ulteriore condizione sui parametri:  $\tilde{\chi} \zeta = 1$ . Così facendo si trova

$$\begin{cases} \tilde{\chi} = \frac{1}{\zeta} \\ \tilde{\alpha} = \frac{1}{\zeta^2} \\ \tilde{\beta} = \tilde{\gamma} = \tilde{\sigma} = 1 \end{cases} \quad (4.40)$$

e dunque la densità Lagrangiana estesa che ammette le equazioni (4.2) come equazioni di Euler-Lagrange è

$$\mathcal{L}_{\text{par}} = -\frac{\hbar}{\zeta} \dot{\theta} n - \frac{\hbar^2}{2\zeta^2 m} (\vec{\nabla} \theta)^2 n - U(\vec{r}) n - \mathcal{E}^{\text{gs}}(n) - \lambda_{\text{W}} \frac{\hbar^2}{8m} \frac{(\vec{\nabla} n)^2}{n}. \quad (4.41)$$

Nel caso qui preso in analisi, ponendo  $\zeta = 2$ , la (4.41) diventa

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{par}} = -\frac{\hbar}{2} \dot{\theta} n - \frac{\hbar^2}{8m} (\vec{\nabla} \theta)^2 n - U(\vec{r}) n - \mathcal{E}^{\text{gs}}(n) - \lambda_{\text{W}} \frac{\hbar^2}{8m} \frac{(\vec{\nabla} n)^2}{n}}, \quad (4.42)$$

che è la stessa densità Lagrangiana presente nell'equazione (25) della referenza [23], in cui ancora una volta si sottolinea che tutte le grandezze qui presenti sono riferite ai singoli fermioni, e ciò vale nello specifico per  $\mathcal{E}^{\text{gs}}(n)$ , tale per cui  $\frac{\partial \mathcal{E}^{\text{gs}}}{\partial n}(n) = \mu(n; a_{\text{F}})$  potenziale chimico locale fermionico.

Seppur ciò vada al di fuori dei nostri scopi, si può apprezzare la generalità dell'equazione di Guerra-Pusterla (4.19) e della densità Lagrangiana estesa (4.41) notando come esse possano essere impiegate per ricavare le equazioni

dell'idrodinamica a temperatura nulla di un gas di  $N$  particelle bosoniche identiche di massa  $m_B$  ponendo  $\zeta = \lambda_W = 1^2$ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_B} \nabla^2 + U(\vec{r}) + \mu_B(n; a_B) \right] \Psi(\vec{r}, t), \quad (4.43)$$

$$\mathcal{L}_{\text{par}} = -\hbar \dot{\theta} n - \frac{\hbar^2}{2m_B} (\vec{\nabla} \theta)^2 n - U(\vec{r}) n - \mathcal{E}_B^{\text{gs}}(n) - \frac{\hbar^2}{8m_B} \frac{(\vec{\nabla} n)^2}{n}; \quad (4.44)$$

infatti così facendo le equazioni (4.2) si riconducono alle (2.9) (con  $\mu = \mu_B$ ), come ci si aspetterebbe. [23]

---

<sup>2</sup>Nel caso bosonico è necessario che  $\lambda_W = 1$  affinché il “potenziale quantistico” sia assente e dunque si possa ritrovare l'equazione di Gross-Pitaevskii nel caso debolmente interagente.

# Capitolo 5

## Spettro delle eccitazioni elementari e valori del coefficiente $\lambda_W$

In questo capitolo si vuole, partendo dal sistema (4.2), ricavare lo spettro di Bogoliubov delle eccitazioni elementari del superfluido in analisi (cioè la relazione di dispersione per i modi collettivi, che dominano alle basse energie qui considerate) e assegnare a  $\lambda_W$  i diversi valori assunti lungo il crossover BCS-BEC.

### 5.1 Spettro di Bogoliubov

Iniziamo col considerare  $n(\vec{r}, t)$  e  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  in termini di piccole variazioni  $\delta n(\vec{r}, t)$  e  $\delta \vec{v}(\vec{r}, t)$

$$\begin{cases} n(\vec{r}, t) = n_{\text{eq}} + \delta n(\vec{r}, t) \\ \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{0} + \delta \vec{v}(\vec{r}, t) \end{cases} \quad (5.1)$$

con  $n_{\text{eq}}$  densità costante e stazionaria, ed effettuiamo la linearizzazione delle (4.2) trascurando i termini quadratici in tali variazioni:

$$\vec{\nabla} \cdot (n\vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot [(n_{\text{eq}} + \delta n)\delta \vec{v}] \simeq \vec{\nabla} \cdot (n_{\text{eq}}\delta \vec{v}), \quad (5.2)$$

$$\frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{\nabla^2 \sqrt{n_{\text{eq}} + \delta n}}{\sqrt{n_{\text{eq}} + \delta n}} = \frac{\sqrt{n_{\text{eq}}} \nabla^2 \sqrt{1 + \frac{\delta n}{n_{\text{eq}}}}}{\sqrt{n_{\text{eq}}} \sqrt{1 + \frac{\delta n}{n_{\text{eq}}}}} \simeq \frac{\nabla^2 \left(1 + \frac{\delta n}{2n_{\text{eq}}}\right)}{\left(1 + \frac{\delta n}{2n_{\text{eq}}}\right)} \simeq \frac{\nabla^2 \delta n}{2n_{\text{eq}}}, \quad (5.3)$$

$$\vec{\nabla} \mu(n) = \frac{\partial \mu}{\partial n_{\text{eq}}}(n) \vec{\nabla} n_{\text{eq}} + \frac{\partial \mu}{\partial (\delta n)}(n) \vec{\nabla} \delta n = 0 + \frac{\partial \mu}{\partial (\delta n)}(n) \vec{\nabla} (\delta n) = m \frac{c_s^2}{n_{\text{eq}}} \vec{\nabla} (\delta n), \quad (5.4)$$

dove nell'ultimo membro dell'ultima equazione si è posto  $c_s = \sqrt{\frac{n_{\text{eq}}}{m} \frac{\partial \mu}{\partial (\delta n)}}(n)$ , che ha il significato di velocità del suono nel superfluido a temperatura nulla.

Così facendo, andando a trascurare il potenziale esterno  $U(\vec{r})$  (ossia andando a considerare il caso uniforme), si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \delta n + \vec{\nabla} \cdot (n_{\text{eq}} \delta \vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{v} - \lambda_W \frac{\hbar^2}{4m^2 n_{\text{eq}}} \vec{\nabla} (\nabla^2 \delta n) + \frac{c_s^2}{n_{\text{eq}}} \vec{\nabla} (\delta n) = \vec{0} \end{cases} \quad (5.5)$$

Ai nostri fini andiamo a calcolare la derivata temporale della prima equazione e la divergenza della seconda e sottraiamole, con la seconda moltiplicata per  $n_{\text{eq}}$ , avendo così

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta n - \vec{\nabla} \cdot [c_s^2 \vec{\nabla} (\delta n)] + \lambda_W \frac{\hbar^2}{4m^2} \nabla^2 [\nabla^2 (\delta n)] = 0, \quad (5.6)$$

in cui si è semplificato il termine  $n_{\text{eq}} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{v}]$ ; sviluppando poi il secondo termine si ottiene

$$\vec{\nabla} \cdot [c_s^2 \vec{\nabla} (\delta n)] = \vec{\nabla} c_s^2 \cdot \vec{\nabla} (\delta n) + c_s^2 \nabla^2 (\delta n) = \frac{n_{\text{eq}}}{m} \frac{\partial^2 \mu}{\partial (\delta n)^2} (n) [\vec{\nabla} (\delta n)]^2 + c_s^2 \nabla^2 (\delta n). \quad (5.7)$$

Andando a trascurare come detto i termini quadratici nelle variazioni (e nelle loro derivate) si ricava la seguente equazione delle onde

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 + \lambda_W \frac{\hbar^2}{4m^2} \nabla^4 \right] \delta n(\vec{r}, t) = 0. \quad (5.8)$$

Supponendo poi che la variazione di densità abbia un'andamento oscillante nel tempo e nello spazio (ossia che l'equazione (5.8) ammetta delle onde piane monocromatiche come soluzione), cioè che

$$\delta n(\vec{r}, t) = \bar{\delta} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (5.9)$$

con  $\bar{\delta}$  l'ampiezza costante e  $\vec{k}$  il vettore d'onda dell'eccitazione elementare, e sostituendo tale espressione nella (5.8), si ha

$$\left[ -\omega^2 + c_s^2 k^2 + \lambda_W \frac{\hbar^2}{4m^2} k^4 \right] \delta n(\vec{r}, t) = 0, \quad (5.10)$$

da cui si ricava la seguente relazione di dispersione delle eccitazioni elementari:

$$\boxed{\hbar \omega(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left( 2m c_s^2 + \lambda_W \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right)}}, \quad (5.11)$$

che è per l'appunto lo *spettro di Bogoliubov delle eccitazioni elementari*.

Nel limite di piccole lunghezze d'onda (ossia  $k \gg \frac{2mc_s}{\hbar}$ ) si trova che

$$\hbar\omega(k) = \sqrt{\lambda_W} \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad (5.12)$$

ossia si trova lo spettro di particella libera; tuttavia tale limite non è attendibile in questo contesto poiché le equazioni da cui lo si è ricavato valgono per grandi  $\lambda$  e dunque per piccoli  $k$ .

Nel caso invece di grandi lunghezze d'onda (e dunque  $k \ll \frac{2mc_s}{\hbar}$ ) si ottiene

$$\omega(k) = c_s k, \quad (5.13)$$

che è lo spettro dei fononi (lineare in  $k$ ), rappresentante eccitazioni che sono onde di densità sonore, in quanto si propagano con una velocità di gruppo pari alla velocità del suono nel superfluido  $c_s$ .

Andando invece ad eseguire, sempre per grandi  $\lambda$ , uno sviluppo con Taylor troncato al primo ordine si ha

$$\boxed{\omega(k) = c_s k + \lambda_W \frac{\hbar^2}{8m^2 c_s} k^3}, \quad (5.14)$$

che è sempre una relazione di dispersione dei fononi, che tiene questa volta in considerazione la diversa natura dei regimi BCS e BEC mediante il coefficiente di Von Weizsäcker  $\lambda_W$ . [12]

## 5.2 Valori del coefficiente di Von Weizsäcker

Procediamo ora con l'assegnazione dei valori a  $\lambda_W$  lungo il crossover.

Osservando l'equazione di Guerra-Pusterla (4.20) possiamo evincere che nel caso *deep BEC* il parametro di Von Weizsäcker sia pari ad  $1/4$ , come ricavato anche nella referenza [23]: ciò è infatti necessario affinché si possa ritrovare l'equazione di Gross-Pitaevskii. Una testimonianza della correttezza di tale stima è data dall'equazione (20) della referenza [26], seppur riguardi il caso stazionario:

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}) + 2U(\vec{r}) + \frac{4\pi\hbar^2 a_F}{m} |\Psi(\vec{r})|^2 \Psi(\vec{r}) = \mu_B \Psi(\vec{r}), \quad (5.15)$$

in cui si è ristabilita la costante di Planck ridotta  $\hbar$  e si sono cambiate le lettere con cui indicare la funzione d'onda e il potenziale esterno. È infatti possibile ricondurre a quest'ultima forma il caso stazionario della (4.20) con  $\lambda_W = 1/4$  nel regime BEC andandovi a inserire, come espressione del potenziale chimico

locale, la (4.23) troncata al primo addendo, sapendo che per le molecole bosoniche  $|\Psi(\vec{r})|^2 = n_M = n/2$ ,  $m_M = 2m$  e usando  $a_M = 2a_F$ <sup>1</sup>.

Andando inoltre a interpolare i punti estrapolati dalla figura 3.2 della referenza [27] e 10a della referenza [28], si ottiene la seguente funzione<sup>2</sup>

$$\lambda_W(y) \simeq -0.183 \left[ 0.5 e^{-1.7y} + \frac{4}{y + 6.8} - 0.1 \right]^{2.8} + \frac{1}{4}, \quad (5.16)$$

il cui grafico è mostrato alla **Figura 5.1**: come si può notare, per  $y \rightarrow +\infty$  (limite *deep BEC*) si ritrova il valore  $1/4$  con un errore relativo del permille.

Per il limite unitario si trovano in letteratura scientifica i valori 0.086 da un fit delle energie dello stato fondamentale con simulazioni Monte Carlo [23] e 0.02 dal fit dello spettro (5.11) dei modi collettivi bosonici [29]. In entrambi i casi si può concludere che  $\lambda_W$  assuma un valore piccolo prossimo a 0 nell'*unitary limit*, come testimoniato anche dall'espressione (5.16) per  $y \rightarrow 0$ , che restituisce 0.073.

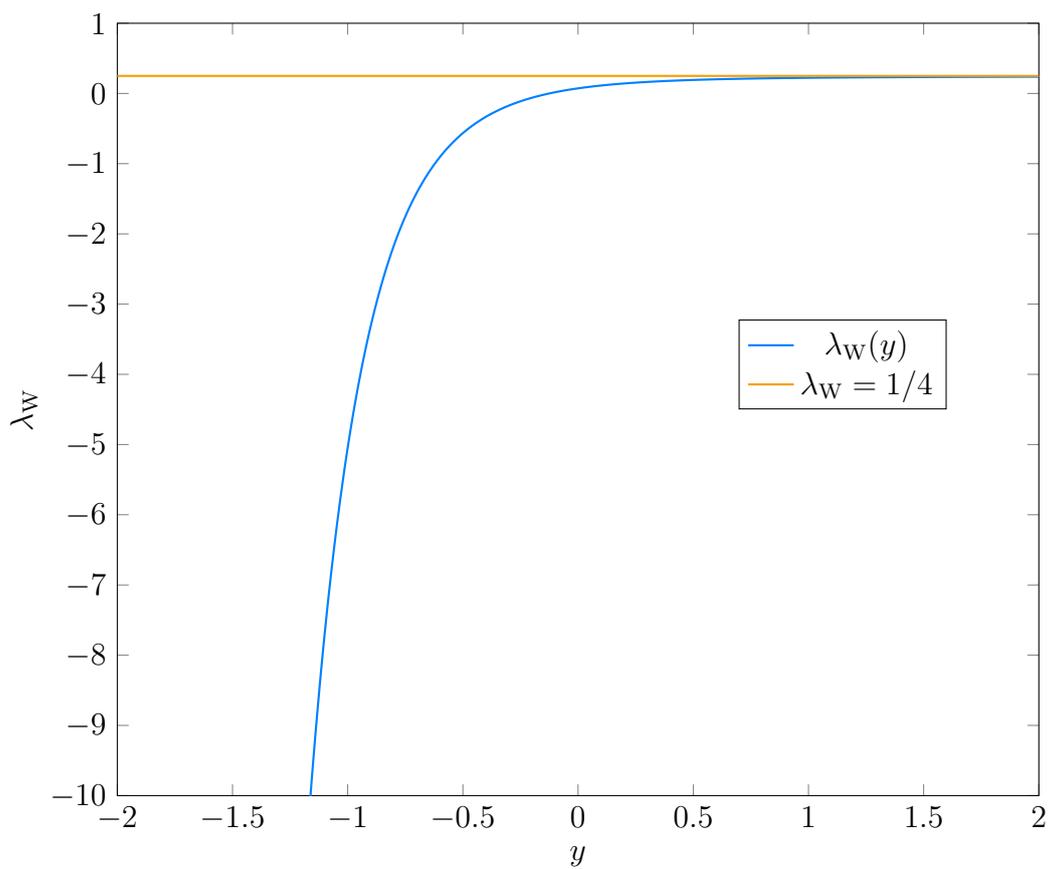
Passiamo infine al regime BCS: osservando la **Figura 5.1** e la (5.16), si può notare come nel limite *deep BCS* ( $y \rightarrow -\infty$ )  $\lambda_W$  tenda a divergere a  $-\infty$ . Inserendo tale risultato nello spettro (5.14) si ottengono valori negativi (e quindi non fisici) di  $\omega(k)$ . Per questo motivo si ritiene che la teoria qui esposta non vada più bene nel limite BCS e, affinché lo spettro di Bogoliubov ricavato dalle equazioni dell'idrodinamica (4.2) con parametro di Von Weizsäcker riproduca correttamente la relazione di dispersione in tale regime, sia necessario introdurre correzioni di tipo gradiente di ordine superiore, proporzionali ad esempio a  $(\nabla^2 \sqrt{n})^2$ .

In base ai casi considerati, possiamo quindi dire che, lungo il crossover BCS-BEC, il coefficiente di Von Weizsäcker  $\lambda_W$  assuma i seguenti valori:

$$\lambda_W = \begin{cases} 1/4 & \text{nel limite } \textit{deep BEC} \\ \ll 1 & \text{nel limite unitario} \\ \rightarrow -\infty & \text{nel limite } \textit{deep BCS} \end{cases}. \quad (5.17)$$

<sup>1</sup>Si ricorda che tale espressione deriva da un calcolo di campo medio, mentre il risultato ottenuto con dati Monte Carlo è  $a_M = 0.6a_F$ .

<sup>2</sup>Seppur interpoli bene i punti estrapolati, per le modalità con cui è stata ricavata l'equazione (5.16) essa vuole solo fornire un'indicazione dell'andamento del coefficiente di Von Weizsäcker, senza alcuna pretesa di esattezza.



**Figura 5.1:** Grafico del coefficiente di Von Weizsäcker  $\lambda_W$  in funzione del parametro d'interazione inverso  $y = 1/(k_F a_F)$ , la cui espressione è stata ricavata col programma *Gnuplot* [30].

# Capitolo 6

## Conclusioni

Si sono scritte le equazioni (2.9) solitamente usate per descrivere l'idrodinamica a temperatura nulla di un gas fermionico o bosonico diluito a due componenti di spin e si sono ricavate le espressioni (3.23) per il potenziale chimico di tali sistemi nel caso non e debolmente interagente. Una volta fatto ciò, ci si è concentrati sul crossover BCS-BEC del solo caso fermionico, introducendo nella seconda delle equazioni (2.9) la correzione di gradiente di tipo Von Weizsäcker (4.1) e ottenendo così il sistema (4.2), con cui poter effettuare uno studio più generale del crossover di questo gas.

Si è riusciti a ricavare un'equazione di Schrödinger non lineare, la (4.20), e una densità Lagrangiana estesa, la (4.42), che permettono di ricavare tali equazioni, ma che possono anche essere usate, cambiando opportunamente il valore del coefficiente statistico  $\zeta$ , per studiare il relativo sistema bosonico (equazioni (4.43) e (4.44)).

Si è successivamente ricavato e studiato lo spettro di Bogoliubov (5.11) delle eccitazioni elementari di questo sistema fermionico, scrivendone l'espansione (5.14) per grandi lunghezze d'onda in termini del coefficiente di Von Weizsäcker  $\lambda_W$ . Infine si sono assegnati, lungo il crossover BCS-BEC, i valori (5.17) a tale coefficiente, notando come il regime BCS sia aperto a nuovi studi con correzioni di gradiente di ordine superiore.

## Il crossover BCS-BEC e la risonanza di Fano-Feshbach

In questa appendice si dà una breve spiegazione dei due regimi assumibili nel crossover da un gas diluito ultra-freddo di atomi neutri fermionici con due componenti di spin e della tecnica con cui si possa passare dall'uno all'altro.

Il regime BCS degli atomi neutri è spiegato dalla teoria sviluppata nel 1957 da Bardeen, Cooper e Schrieffer (dalle cui iniziali deriva il suo nome) per gli elettroni nei metalli: al di sotto di una temperatura  $T_{\text{pair}}$  e in presenza di un potenziale debolmente attrattivo, fermioni con spin e momenti lineari opposti formano delle coppie legate, dette *coppie di Cooper*, che nello spazio dei momenti si trovano poco al di sopra della *superficie di Fermi*. In tali coppie i due costituenti sono separati da una distanza in genere maggiore della separazione media fra i fermioni del sistema ed esse sussistono grazie alla presenza di un'interazione debolmente attrattiva interparticellare (infatti gli elettroni sono elettricamente carichi e si respingono, mentre i fermioni atomici sono neutri). Nel caso di due componenti di spin bilanciate, le coppie di Cooper sono caratterizzate da una massa doppia e un numero che è la metà rispetto a quelli dei singoli fermioni. Contrariamente a quanto si possa pensare, esse non costituiscono, a causa della debole attrazione presente, una molecola di-fermionica considerabile come un bosone e infatti non obbediscono alla statistica di Bose-Einstein.

Nel caso di regime BEC coppie di fermioni vanno invece a formare dei dimeri che sono descritti dalla statistica di Bose-Einstein: si tratta di bosoni composti, caratterizzati da una massa doppia di quella dei costituenti e densità che ne è la metà. Essi possono interagire sia fra loro che con i singoli fermioni, con differente lunghezza di scattering (si veda il seguito per una sua definizione).

Quanto detto a proposito delle masse e densità numeriche di coppie di Cooper e molecole bosoniche permette di capire perché nel caso di superfluidi fermioni il coefficiente statistico  $\zeta$  valga 2.

Tra questi due regimi è in verità presente un terzo, l'*unitary limit*, caratterizzato da universalità (si veda più avanti), da coppie con dimensioni confrontabili con la distanza interparticellare e da una forte interazione nel gas.

I due regimi BCS e BEC sono connessi in modo continuo dal crossover: ad esempio le dimensioni delle coppie passano dall'essere grandi rispetto alla distanza interatomica nel regime BCS all'essere piccole in quello BEC, così come l'energia d'interazione passa in modo continuo dall'essere piccola nel primo regime all'essere elevata nel secondo.

Il passaggio da un regime all'altro è permesso dalla "Risonanza di Fano-Feshbach" (d'ora in avanti denotata anche con l'acronimo inglese FFR), che agisce sull'interazione fra gli atomi fermionici e quindi sulla *s-wave scattering length* fermionica  $a_F$ , grandezza definibile nel caso di diffusione elastica tra particelle a bassa energia: essa caratterizza nella pratica la dimensione effettiva del bersaglio ed è data da

$$a_s = - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \tan \delta_0(k), \quad (\text{A.1})$$

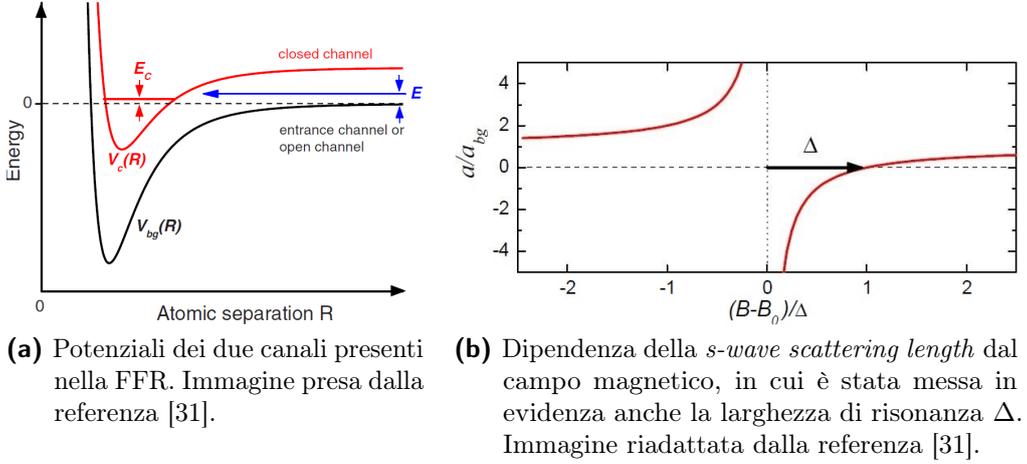
con  $\delta_0$  che è la differenza di fase fra le onde che descrivono le particelle entranti ed uscenti e con  $k$  che è il numero d'onda.

La FFR permette, agendo su un campo magnetico esterno, di modificare  $a_F$  e dunque il parametro d'interazione inverso  $y = 1/(k_F a_F)$ ; in questo modo è possibile transitare dal regime BCS a quello BEC e viceversa:

1. per  $y \ll -1$  ci si aspetta il regime con coppie di Cooper descritte dalla teoria BCS;
2. per  $y \gg 1$  ci si aspetta il regime con dimeri bosonici descritti dalla teoria BEC;
3. per  $-1 < y < 1$  si ha il crossover e per  $y \rightarrow 0$  si ha il cosiddetto *unitary limit*.

Si può quindi ben vedere perché nell'*unitary limit* si parli di universalità: essendo caratterizzato da  $y \rightarrow 0$  e dunque da  $a_F \rightarrow \infty$ , quest'ultima perde importanza e la scala della lunghezza è data solo da  $k_F^{-1}$ .

Cerchiamo ora di capire meglio come funziona questa FFR: indichiamo con *open channel* il processo di diffusione fra due atomi del gas ultra-freddo (rappresentato da un potenziale  $V_{bg}$  che asintoticamente descrive le due



**Figura A.1:** Immagini inerenti alla teoria della risonanza di Fano-Feshbach.

particelle come libere) e con *closed channel* uno stato molecolare legato di tali atomi con differente stato di spin (descritto da un potenziale  $V_c$ ); allora la FFR si ha quando l'energia  $E$  associata all'*open channel* è prossima all'energia  $E_c$  associata al *closed channel* (si veda la **Figura A.1a**). È possibile variare la differenza di energia tra i due canali se i due stati (della coppia slegata e legata) hanno differente momento magnetico, e in tal caso si parla di *magnetically tuned FFR*.

Indichiamo con  $B_0$  il valore del campo magnetico in corrispondenza del quale  $a_F$  diverge e l'energia dello stato molecolare legato passa dall'essere al di sotto della soglia energetica dell'*open channel* ad esservi al di sopra. Come mostrato nella **Figura A.1b**, grazie a questa risonanza si riesce a passare da una *scattering length* grande e positiva (quando si è al di sotto della soglia) ad una grande e negativa (quando vi si è al di sopra). La formula che descrive questo fenomeno è

$$a_F(B) = a_{bg} \left( 1 - \frac{\Delta}{B - B_0} \right), \quad (\text{A.2})$$

con  $a_{bg}$  la lunghezza di scattering in assenza di risonanza e  $\Delta$  la larghezza di risonanza. [1, 2, 19, 21, 31, 32]

# Bibliografia

- [1] A. Schmitt, Introduction to Superfluidity. Field-theoretical Approach and Applications (Springer, 2015).
- [2] C. A. R. Sá de Melo, When fermions become bosons: Pairing in ultracold gases, Proc. Roy. Acad. Amsterdam **61**, 45 (2008).
- [3] T. Sauer, A look back at the Ehrenfest classification, Eur. Phys. J. Spec. Top. **226**, 539 (2017).
- [4] P. Kapitza, Viscosity of Liquid Helium below the  $\lambda$ -Point, Nature **141**, 74 (1938).
- [5] J. F. Allen e A. D. Misener, Flow of Liquid Helium II, Nature **141**, 75 (1938).
- [6] B. V. Svistunov, E. S. Babaev e N. V. Prokof'ev, Superfluid States of Matter (CRC Press, 2015).
- [7] F. London, The  $\lambda$ -Phenomenon of Liquid Helium and the Bose-Einstein Degeneracy, Nature **141**, 643 (1938).
- [8] L. Tisza, Transport Phenomena in Helium II, Nature **141**, 913 (1938).
- [9] L. Landau, Theory of the Superfluidity of Helium II, Phys. Rev. **60**, 356 (1941).
- [10] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman e E. A. Cornell, Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor, Science **269**, 198 (1995).
- [11] M. W. Zwierlein, J. R. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C. H. Schunck e W. Ketterle, Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas, Nature **435**, 1047 (2005).

- [12] L. Salasnich, Hydrodynamics of Bose and Fermi superfluids at zero temperature: the superfluid nonlinear Schrödinger equation, *Laser Phys.* **19**, 642 (2009).
- [13] E. Schrödinger, An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules, *Phys. Rev.* **28**, 1049 (1926).
- [14] M. Born, Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge, *Z. Phys.* **37**, 836 (1926).
- [15] E. Madelung, Quantentheorie in hydrodynamischer Form, *Z. Physik* **40**, 322 (1927).
- [16] E. P. Gross, Structure of a quantized vortex in boson systems, *Nuovo Cim* **20**, 454 (1961).
- [17] L. P. Pitaevskii, Vortex lines in an imperfect Bose gas, *Sov. Phys. JETP* **13**, 451 (1961).
- [18] E. P. Gross, Classical theory of boson wave fields, *Annals of Physics* **4**, 57 (1958).
- [19] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii e S. Stringari, Theory of ultracold atomic Fermi gases, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1215 (2008).
- [20] T. D. Lee e C. N. Yang, Many-Body Problem in Quantum Mechanics and Quantum Statistical Mechanics, *Phys. Rev.* **105**, 1119 (1957).
- [21] N. Manini e L. Salasnich, Bulk and collective properties of a dilute Fermi gas in the BCS-BEC crossover, *Phys. Rev. A* **71**, 033625 (2005).
- [22] K. Huang e C. N. Yang, Quantum-Mechanical Many-Body Problem with Hard-Sphere Interaction, *Phys. Rev.* **105**, 767 (1957).
- [23] L. Salasnich e F. Toigo, Extended Thomas-Fermi density functional for the unitary Fermi gas, *Phys. Rev. A* **78**, 053626 (2008).
- [24] P. Guerra e M. Pusterla, A nonlinear schrödinger equation and its relativistic generalization from basic principles, *Lett. Nuovo Cimento* **34**, 351 (1982).
- [25] L. Salasnich, P. Comaron, M. Zambon e F. Toigo, Collective modes in the anisotropic unitary Fermi gas and the inclusion of a backflow term, *Phys. Rev. A* **33**, 033610 (2013).
- [26] G. C. Strinati e P. Pieri, Derivation of the Gross-Pitaevskii Equation for Condensed Bosons from the Bogoliubov–de Gennes Equations for Superfluid Fermions, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 030401 (2003).

- [27] M. Marini, Risultati analitici sul problema dell'evoluzione dalla superconduttività BCS alla condensazione di Bose-Einstein, Tesi di Laurea (Università di Camerino, 1998).
- [28] G. Calvanese Strinati, P. Pieri, G. Röpke, P. Schuck e M. Urban, The BCS-BEC crossover: From ultra-cold Fermi gases to nuclear systems, *Phys. Rep.* **738**, 1 (2018).
- [29] G. Bighin, A. Cappellaro e L. Salasnich, Unitary Fermi superfluid near the critical temperature: Thermodynamics and sound modes from elementary excitations, *Phys. Rev. A* **105**, 063329 (2022).
- [30] P. K. Jarnet, *Gnuplot in Action. Understanding data with graphs* (Manning, 2016).
- [31] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne e E. Tiesinga, Feshbach resonances in ultracold gases, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1225 (2010).
- [32] W. Ketterle e M. W. Zwierlein, Making, probing and understanding ultracold Fermi gases, *Riv. Nuovo Cim.* **31**, 247 (2008).