

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Astronomia

Tesi di Laurea Triennale

Strutture cosmiche e le loro proprietà

Relatore

Prof. Alberto Franceschini

Laureando

Filippo Forcella

Anno Accademico 2021-2022

Indice

Indice	3
1 Introduzione	5
2 Modelli cosmologici standard	8
2.1 Il principio cosmologico e le sue proprietà	8
2.2 Le equazioni dinamiche	9
2.3 Il problema della costante cosmologica	12
3 Simulazioni numeriche della struttura cosmica su grande scala	14
3.1 Simulazioni cosmologiche N-corpi	14
3.2 Simulazioni di Navarro, Frenk & White	16
3.2.1 Modelli Cosmologici adottati	16
3.2.2 Simulazione a bassa risoluzione	17
3.2.3 Simulazione ad alta risoluzione	18
4 Il profilo di densità NFW	20
4.1 L'evoluzione temporale	20
4.2 Profili di densità	20
4.3 La dipendenza dalla massa nella struttura degli aloni	26
4.4 La dispersione dei risultati	35
5 Riscontri osservativi e problemi aperti	38
5.1 Confronto con lavori precedenti	38
5.1.1 Il lavoro di Roncadelli & Galanti (2021)	40
5.2 Le complessità e il profilo di Einasto	42
5.3 Conclusioni	46

Capitolo 1

Introduzione

A partire dai primi anni settanta emergono le prime evidenze secondo cui alcune tipologie di galassie sono circondate da estesi aloni composti di materia oscura. A supporto di tale ipotesi si aggiungono negli anni una grossa varietà di prove osservative, tra cui figurano lo studio degli aloni gassosi, della cinematica stellare e una migliore comprensione dell'effetto di *gravitational lensing*, che hanno così reso possibile negli anni la creazione di mappe riportanti la distribuzione di massa all'interno degli aloni.

Queste distribuzioni sono intrinsecamente legate alla natura della materia oscura, al modo in cui vengono formati gli aloni e al contesto cosmologico in cui vengono generati.

Iniziano così, a partire dalla metà degli anni ottanta, i primi studi, di natura teorica, riguardanti l'analisi di profili di densità che permettano di tracciare l'andamento della massa di aloni in Universi di Einstein-De Sitter. I primi risultati arrivarono con Fillmore & Goldreich (1984) [6] e Bertschinger (1985) [1], i quali dedussero per primi come l'andamento nelle regioni virializzate dovesse forzatamente avere un profilo a legge di potenza.

Successivamente, Hoffman & Shaham (1985) [12] estesero questi risultati a modelli di Universo aperto e li modellizzarono come spettri di perturbazioni sferiche, privi di parametri di scala definiti, a partire da una determinata densità iniziale attraverso la legge di potenza $P(k) \propto k^n$. Nella formula, k rappresenta il modulo del numero d'onda mentre n l'indice di potenza spettrale.

Hoffman & Shaham furono inoltre tra i primi a sostenere l'idea che ci si dovesse aspettare una struttura isoterma (con $\rho \propto r^{-2}$) in Universi di Einstein-De Sitter mentre vennero ipotizzati profili più ripidi per maggiori valori di n in Universi aperti.

Secondo osservazioni e teoria, l'equazione $P(k) = A_n k^n$ esprime lo spettro di potenza che meglio rappresenta le strutture su larga scala. In questa generalizzazione, le fluttuazioni vengono definite in regime lineare, e ciò permette quindi di trattarle come piccole perturbazioni del campo di densità. È importante sottolineare come l'ampiezza A_n non risulti essere un valore definibile a priori, ma piuttosto deducibile dalle osservazioni, come vedremo in seguito.

Con l'avanzare del progresso tecnologico e computazionale, che permise l'introduzione delle simulazioni numeriche a N-corpi, molte delle previsioni raggiunte analiticamente trovarono conferma. I profili a legge di potenza, infatti, fornirono una corretta rappresentazione dei profili di densità degli aloni nei diverse scenari cosmologici, mostrando tuttavia in maniera abbastanza chiara un irripidimento nei profili al crescere di n o al diminuire della densità dell'universo circostante (quindi in funzione dei parametri cosmologici).

Significanti differenze dalla legge di potenza vennero in seguito riportate da Frenk et al. (1988) [7], il quale mise in evidenza come i profili di aloni nelle simulazioni CDM (Cold Dark Matter) subissero un forte irripidimento al crescere del raggio degli stessi.

Agli inizi degli anni 80, oltre all'introduzione dell'ipotesi di universo inflazionario, muove i primi passi il modello CDM, che porterà in seguito ad un grosso sviluppo in ambito cosmologico. Secondo questa teoria, la largamente presente materia oscura, che si suppone dominare le interazioni gravitazionali su larga scala, è composta da una nuova (non barionica) particella elementare debolmente interagente. Si suppone che questo campo di particelle abbia avuto origine durante le prime fasi dell'Universo.

L'attributo fredda (*cold*) viene utilizzato poichè, secondo il modello proposto, queste particelle devono necessariamente possedere una bassa velocità casuale. (Un modello Hot Dark Matter è comunque possibile, tuttavia le prime simulazioni mostrano come la distribuzione di galassie in universo dominato da questo tipo di particelle non risulti coerente con quanto osservato dai cosmologi).

In questo contesto è importante sottolineare come, in un articolo precedente del Maggio 1996 scritto dagli stessi Navarro Frenk & White [15], vengano utilizzate simulazioni ad alta risoluzione con lo scopo di studiare la formazione degli aloni nel modello CDM. Tale lavoro mostra come il profilo di densità in equilibrio di queste strutture possa essere accuratamente descritto, su ampi range in raggio e massa, da

$$\frac{\rho(r)}{\rho_{crit}} = \frac{\delta_c}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2} \quad (1.1)$$

con r_s che rappresenta il raggio riscalato, δ_c la densità caratteristica (parametro

adimensionale) e $\rho_{crit} = 3H^2/8\pi G$ la densità critica. Il parametro H fa riferimento alla costante di Hubble, che sarà brevemente ripresa e spiegata nel corso del capitolo successivo.

In virtù della forte dipendenza tra la massa e la forma dello spettro di potenza riportata negli studi precedenti, risulta sorprendente osservare la somiglianza che si presenta tra i profili di aloni CDM con masse molto diverse. L'effettiva pendenza degli spettri CDM varia da $n_{eff} \approx -2$ su scale galattiche a $n_{eff} \approx -1$ quando ci riferiamo ad ammassi, osserveremo quindi profili più profondi e ripidi analizzando le strutture di galassie. Diversamente, vedremo in seguito come questo non venga in realtà confermato dalle simulazioni svolte, in quanto aloni di massa minore risultano essere caratterizzati da una densità maggiore rispetto agli aloni di massa più elevata.

Successivamente, anche grazie al contributo di Cole & Lacey (1996) [2], venne confermata e anzi rafforzata la forte relazione esistente tra δ_c e la massa dell'alone, già riportata da Navarro, Frenk & White. Non solo, all'interno di questi articoli viene inoltre messo in evidenza come la densità degli aloni risulti essere maggiore in corrispondenza di un indice spettrale n maggiore.

Appare quindi chiaro che uno studio relativo alla forma del profilo di densità degli aloni richieda almeno tre quantità: la massa dell'alone, lo spettro di potenza delle fluttuazioni di densità e i dettagli del processo di collasso gravitazionale nel regime non lineare.

Nelle pagine che seguono sono presentati i risultati relativi ad una ampio set di simulazione di N-corpi, all'interno della quale vengono presi in esame diversi modelli di cluster, caratterizzati da differenti valori per i parametri cosmologici Ω_0 e Λ .

In ciascun scenario cosmologico vengono studiati e analizzati aloni che variano su grandi intervalli di massa, scegliendo tuttavia accuratamente i parametri numerici al fine di garantire per ciascuna simulazione una risoluzione comparabile che faciliti in questo modo l'analisi e il confronto.

Capitolo 2

Modelli cosmologici standard

2.1 Il principio cosmologico e le sue proprietà

All'interno della descrizione dell'Universo è di primaria importanza per noi considerare alcune quantità macroscopiche misurabili, come la densità, la pressione e la temperatura, e studiarne l'evoluzione nel tempo. Per fare ciò dobbiamo tuttavia introdurre alcune definizioni di carattere generale, che permettano una migliore comprensione.

Per iniziare, immaginiamo che la materia nell'universo sia distribuita in maniera omogenea, come in un fluido: tale fluido ideale viene chiamato substrato cosmico, e risulta costituito da diverse componenti fisiche, sia relativistiche che non.

Fortemente legato a questa definizione vi è quella di osservatore fondamentale, definito come il sistema di riferimento solidale localmente con il substrato. Se il substrato è in una condizione di moto, l'osservatore fondamentale viene definito comovente (*comoving*) con il substrato.

Le due precedenti definizioni sono fondamentali poichè consentono di enunciare quello che è il concetto di modello cosmologico, definito come una descrizione formale dell'universo visto da un osservatore fondamentale.

Un ulteriore concetto interno alla descrizione dell'universo da parte di osservatori fondamentali è quello legato alla definizione di Principio Cosmologico, che definisce l'universo visto da parte di osservatori fondamentali come omogeneo e isotropo.

L'introduzione di questo termine permette di inserire due idee di forte importanza in ambito cosmologico, quali quelle di isotropia e omogeneità.

Per isotropia intendiamo come, in ogni direzione lo si guardi, l'Universo appaia essenzialmente lo stesso a tutti gli osservatori fondamentali che lo guardino ad un

determinato istante di tempo cosmico.

Per omogeneità, invece, ci riferiamo al principio secondo cui ogni osservatore fondamentale vede la stessa pittura generale dell'Universo in funzione del solo tempo cosmico. È importante sottolineare come tale principio valga solo andando a considerare grandi scale spaziali (superiori ad almeno il centinaio di Mpc) in quanto affrontando scale sensibilmente più ridotte si manifestano forti deviazioni dall'omogeneità.

Nell'ambito della presentazione delle proprietà e dei parametri associati all'osservazione dell'Universo riportiamo, per completezza, anche la metrica di Robertson-Walker, la quale rappresenta una descrizione geometrica dello stesso. Questa si basa esclusivamente sul Principio Cosmologico e quindi sulle proprietà di isotropia e omogeneità con cui l'Universo viene descritto, senza utilizzare la Relatività Generale.

Viene quindi definita come un risultato estremamente generale e non legato ad una eventuale errata descrizione fisica dell'Universo.

2.2 Le equazioni dinamiche

La metrica di RW, citata all'interno del paragrafo precedente, viene ricavata sulla base di considerazioni geometriche e di simmetria dell'universo ed è in grado di fornire, per questa ragione, solo una rappresentazione generale della metrica universale, senza determinare come questa evolve nel tempo e di che tipo di universo si stia parlando.

Per ricavare queste informazioni è necessario definire una serie di condizioni ed equazioni dinamiche. È importante sottolineare come, per giungere a tali equazioni, siano possibili diversi approcci, da quello Newtoniano più semplificato fino a quello più completo basato sulla trattazione general-relativistica a partire dalle equazioni di campo introdotte dalla Relatività di Einstein. Noi ci limiteremo a enunciarle, tralasciando le deduzioni teoriche.

Prima di introdurre queste è tuttavia necessario esplicitare un parametro di fondamentale importanza nello studio dell'evoluzione cosmica: il fattore di scala $R(t)$.

Il fattore di scala universale $R(t)$ è un parametro che, espresso in funzione del solo tempo cosmico, stabilisce come si espande o contrae l'universo in funzione dello scorrere del tempo. Nella notazione utilizzata, $R_0 \equiv R(t_0)$, dove t_0 indica il tempo cosmico attuale.

Fortemente legato a quest'ultimo vi è la costante di Hubble $H(t)$, parametro introdotto intorno al 1930 da Edwin Hubble nel corso dei propri studi. Questo viene scritto in funzione del fattore di scala come

$$H(t) = \frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} \quad (2.1)$$

ed è stato per decenni motivo di controversie in ambito cosmologico a causa del suo valore, oggi riportato pari a $71.9 \pm 7.2 \text{ km/s/Mpc}$, su cui vi erano differenti teorie.

Svolte queste doverose premesse è possibile ora enunciare la prima equazione della dinamica cosmica, che viene espressa come:

$$\ddot{R}(t) = -\frac{4\pi}{3} G \rho_0 R_0^3 R(t)^{-2} \quad (2.2)$$

e pone in relazione l'accelerazione delle particelle appartenenti al sistema con le forze presenti. Per quanto riguarda i parametri finora non specificati, G rappresenta la costante di gravitazione universale introdotta da Newton mentre ρ_0 la densità di materia al tempo cosmico attuale.

Si verifica facilmente come la seconda equazione, anche detta di Friedmann, ne sia la conseguente soluzione generale:

$$\dot{R}^2(t) = \frac{8\pi}{3R(t)} G \rho_0 R_0^3 - kc^2 \quad (2.3)$$

Diversamente dalla prima, questa formula rappresenta una condizione di conservazione dell'energia: il membro a sinistra \dot{R}^2 corrisponde all'energia cinetica del sistema mentre il primo termine a secondo membro costituisce l'energia potenziale gravitazionale (si può osservare la proporzionalità con GM/R) mentre il termine kc^2 rappresenta una costante di integrazione, dove il termine k coincide con la costante di curvatura.

Procediamo, a questo punto, con lo specificare alcune semplici soluzioni formali delle equazioni dinamiche qui sopra citate.

- **Il modello di Universo di Milne.**

Corrisponde alla tipologia di universo più semplice, caratterizzato da densità di materia nulla e parametro di curvatura $k=-1$. L'equazione di Friedmann viene riscritta quindi come

$$\dot{R}^2(t) = \frac{8\pi}{3R(t)} G \rho_0 R_0^3 - kc^2 = -kc^2 = c^2; \quad (2.4)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \pm c; \quad (2.5)$$

che ha soluzione $R(t) = \pm ct$.

Il modello di Milne impone quindi una tipologia di Universo che si espande o contrae in modo lineare e uniforme.

- **Il modello “piatto” di Einstein-De Sitter.**

Un modello di Einstein-De Sitter corrisponde al caso di uno spazio-tempo a curvatura nulla ($k=0$), quindi rappresentato da uno spazio piatto (da cui il nome) in espansione. La soluzione associata all'equazione di Friedmann è data da

$$\dot{R}^2(t) = \frac{8\pi}{3} G\rho_0 R_0^3 R^{-1}(t); \quad (2.6)$$

$$\frac{dR}{dt} = \text{cost} R^{-0.5}; \quad (2.7)$$

Fissando il termine costante, si ricava per il fattore di scala la seguente soluzione

$$R(t) = \pm R_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}. \quad (2.8)$$

È di nostro interesse, a questo punto, analizzare la derivata di $R(t)$:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{2}{3} t^{-1/3}. \quad (2.9)$$

Studiandone il limite per $t \rightarrow 0$, è possibile osservare come la derivata del fattore di scala tenda a divergere. A questo istante di tempo cosmico, definito come Big Bang, si verifica una divergenza da parte di tutti i parametri dinamici e termodinamici mentre il fattore di scala $R(t)$ va a zero (è da sottolineare come questa caratteristica sia in realtà comune a tutti i modelli riportati).

Differentemente, quando $t \rightarrow \infty$ il tasso di espansione dR/dt tende a zero, comportando un arresto nell'espansione dell'Universo, che tende quindi alla condizione di staticità.

- **Il modello aperto.**

Una tale modellizzazione corrisponde al caso di uno spazio-tempo con materia gravitante ($\rho > 0$) e $k=-1$. Analizzando l'equazione di Friedmann, è possibile osservare come la derivata mantenga lo stesso segno $\dot{R}^2(t) > 0$, generando quindi un'espansione monotona e infinita.

Al crescere del tempo, e quindi del parametro di scala $R(t)$, il termine kc^2 tende a dominare sull'equazione, determinando una tipologia di Universo che tende

all'Universo di Milne. L'espansione di questo porta quindi al crescere del tempo la densità di materia a zero, e l'autogravità dell'Universo ad annullarsi.

- **Il modello chiuso.**

Corrisponde al caso di uno spazio-tempo con materia gravitante $\rho > 0$ e $k=+1$. Studiando l'equazione di Friedmann è possibile osservare come il fattore di scala cosmico a tempi sufficientemente avanzati possieda una derivata nulla $\dot{R}^2(t) = 0$ per un determinato valore di R tale che:

$$R(t) = R_c = \frac{8\pi}{3c^2} G \rho_0 R_0^3 \quad (2.10)$$

e, poichè $\ddot{R}(t) < 0 \forall R$, una volta arrestata l'espansione dell'universo il modello ipotizza una contrazione al quale seguirà un completo collasso (*Big Crunch*).

2.3 Il problema della costante cosmologica

Il concetto di costante cosmologica Λ viene introdotto intorno al 1917 con la pubblicazione del primo modello cosmologico dinamico basato sulla Relatività Generale, teoria in quegli anni sviluppata da Albert Einstein. Il fisico tedesco, infatti, alla ricerca di soluzioni per la dinamica dell'universo nell'ipotesi di staticità, realizzò che questa non poteva essere ottenuta poichè la forza di auto-gravità avrebbe comportato un necessario collasso dell'Universo su se stesso su un tempo scala dinamico $t \sim 1/\sqrt{\rho}$.

Diversamente, è possibile realizzare formalmente un Universo statico dall'equazione della dinamica (ricavabile dalle equazioni di campo della Relatività Generale)

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) R \quad (2.11)$$

solo e solamente considerando un fluido cosmico caratterizzato da densità di energia o pressioni negative:

$$\rho < -\frac{3p}{c^2}. \quad (2.12)$$

Poichè un fluido del genere non appariva fisicamente plausibile, Einstein modificò le equazioni di campo e introdusse il termine Λ , dandogli il nome di **costante cosmologica**.

Una tale costante viene definita come universale in quanto indipendente dalla posizione spaziale e temporale, a differenza, per esempio, del parametro di scala R che possiede invece una dipendenza dal tempo.

L'introduzione della costante cosmologica ha avuto un ruolo di prima importanza nello sviluppo della cosmologia teorica. Nel corso dei decenni, tuttavia, questa è stata varie volte abbandonata (anche da parte dello stesso Einstein, in seguito alla scoperta da parte di Hubble di un Universo in espansione) e riconsiderata, sulla base per ultimo dei risultati ottenuti nel 1996 dallo studio delle curve di luce delle Supernovae Ia.

L'interpretazione più naturale della costante Λ è un termine di energia repulsiva del vuoto che si contrappone alla gravità. Questa viene infatti espressa come un termine energetico con densità di massa a riposo ρ_v . Si verifica che questo corrisponde quindi ad una pressione data da

$$p_v = -\rho_v c^2. \quad (2.13)$$

Associato al termine Λ viene in seguito introdotto il termine Ω_Λ , parametro di densità associato all'energia del vuoto.

Dallo sviluppo della teoria riguardante la costante cosmologica nasce il modello cosmologico Standard, anche chiamato modello Λ CDM, che verrà in seguito ripreso nel capitolo riguardante le simulazioni N-corpi.

Questa teoria rappresenta ad oggi il modello cosmologico che meglio interpola i dati osservati e descrive un Universo spazialmente piatto contenente materia, radiazione ed energia oscura, quest'ultima rappresentata da una costante cosmologica positiva.

Stando al modello, questo risulterebbe caratterizzato da valori per i parametri di densità pari a $\Omega_m \sim 0.3$ e $\Omega_\Lambda \sim 0.7$. Scrivendo la costante di curvatura k

$$k = \frac{\Omega_m + \Omega_\Lambda}{c^2/H_0^2} \quad (2.14)$$

si ricava, come già detto, $k=1$ e quindi un Universo piatto, caratterizzato da un tasso di espansione in accelerazione.

Secondo la teoria, che rappresenta in maniera coerente la relazione distanza di luminosità-redshift osservata, l'Universo ha iniziato la propria espansione seguendo una legge simile a quella di Einstein-De Sitter. All'aumentare del tempo, mentre la materia gravitante, di natura barionica e oscura, andava rarefacendosi e l'auto-gravità dell'Universo diminuiva, la costante cosmologica, e quindi l'energia oscura, cominciarono a dominare l'espansione.

Capitolo 3

Simulazioni numeriche della struttura cosmica su grande scala

3.1 Simulazioni cosmologiche N-corpi

In astronomia e in fisica, una simulazione N-corpi è una simulazione di un sistema dinamico di particelle, sottoposto ad un certo numero di forze. In cosmologia, in particolare, questo tipo di simulazioni vengono utilizzate per studiare i processi di formazione di strutture non lineari come i filamenti di galassie o, nel nostro caso, gli aloni di galassie.

A partire dagli anni sessanta, i ricercatori iniziano ad utilizzare la capacità di calcolo dei computer per affrontare i problemi a N-corpi. Solamente tuttavia negli anni ottanta, con l'aumento della potenza di calcolo e un importante sviluppo tecnologico, queste simulazioni si imposero come potenti strumenti nel campo dell'astrofisica.

Contemporaneamente allo sviluppo hardware, negli anni vennero implementati algoritmi di sempre maggiore efficienza, che permettessero una migliore modellizzazione dei sistemi presi in analisi contenendo, allo stesso tempo, i costi computazionali. Quelli più diffusi ad oggi sono principalmente l'algoritmo *PP*, l'algoritmo *PM* e quello usato all'interno delle simulazioni più avanti discusse, il *P³M*.

All'interno del metodo *PP* (*particle-particle*) vengono studiate e calcolate quelle che sono le forze agenti su ciascuna particella dovute all'interazione delle altre circo-

stanti. Tale metodo risulta estremamente preciso, poichè fornisce un calcolo diretto delle forze che agiscono su ciascun corpo, tuttavia presenta alcune complessità poichè un'analisi di questo tipo implica necessariamente un alto costo computazionale.

Differentemente, il metodo *PM* (*particle-mesh*), anche definito metodo con griglia, consente di ridurre in maniera considerevole il tempo di calcolo. Questo algoritmo comporta la costruzione di una griglia su cui viene risolta l'equazione di Poisson e attraverso cui viene calcolato il potenziale gravitazionale agente sulle particelle prese in esame. Di contro, questa metodologia possiede una risoluzione spaziale abbastanza limitata.

Il codice finale P^3M utilizza entrambi gli algoritmi descritti precedentemente: mantiene il codice PP per il calcolo delle interazioni tra particelle quando ci riferiamo a distanze brevi, mentre utilizza la sorgente PM per lo studio su grandi distanze. Una tale metodologia consente di ben approssimare le forze esistenti tra le particelle, pur mantenendo una buona risoluzione.

Questo tipo di simulazioni comporta tuttavia una scarsa efficienza quando vengono presi in analisi intervalli di massa molto ampi, come avviene di fatto in questo studio. Questa limitazione è principalmente legata al fatto che i sistemi più massivi, dotati quindi di un maggior numero di particelle, necessitano una maggiore risoluzione rispetto agli aloni di massa minore.

Inoltre, un'altra problematica legata alle procedure simulate è quella dovuta al *gravitational softening*, un effetto che riguarda l'interazione tra particelle poste ad una corta distanza le une dalle altre. In particolar modo, per due particelle infinitamente vicine, la simulazione tende a far divergere le forze esistenti tra queste.

Per arginare queste limitazioni viene utilizzata una procedura simulativa precedentemente definita e studiata da Navarro, Frenk & White, in un articolo pubblicato sull'*Astrophysical Journal* nel maggio del 1996. Questa procedura è composta da due simulazioni, che avvengono in fasi distinte. Entrambe le fasi saranno riprese nel dettaglio nei paragrafi successivi.

La prima parte della simulazione avviene con una bassa risoluzione, vengono identificati in primo luogo gli aloni e delimitate le zone dell'Universo contenuti questi. Queste porzioni prendono il nome di scatole (*box*) e il loro ruolo verrà successivamente ripreso e chiarito. Su questa scala l'Universo può essere considerato omogeneo ed è possibile per questo imporre condizioni al contorno.

Successivamente, ciascun alone viene considerato singolarmente e nuovamente simulato, questa volta con una maggiore risoluzione. In questa fase, i valori e i risultati ricavati durante la prima parte del processo sono utilizzati al solo scopo di rendere migliore la precisione relativa agli effetti mareali sull'alone considerato.

Una procedura di questo tipo comporta una serie di vantaggi, in particolar modo consente di simulare i diversi aloni con una risoluzione comparabile tra loro, agevolando il confronto tra i risultati. Sfortunatamente, per ogni simulazione è possibile modellizzare un singolo alone per volta e questo di conseguenza rende necessario un ampio numero di simulazioni per ricavare un campione rappresentativo.

3.2 Simulazioni di Navarro, Frenk & White

Discutiamo qui in particolare il metodo simulativo utilizzato da Navarro, Frenk e White, analizzando non solo le parti che compongono questa procedura ma anche gli scenari cosmologici in cui queste si sviluppano.

3.2.1 Modelli Cosmologici adottati

All'interno della simulazione sono stati analizzati gli aloni di materia oscura in 8 diversi modelli cosmologici.

Cinque di quelli elencati sono tipologie relative ai Modelli Cosmologici di Einstein-De Sitter. Per tale scenario sono stati ipotizzati vari profili aventi diversi spettri di potenza: quattro di questi hanno indice n rispettivamente uguale a 0, -0.5 , -1 , -1.5 mentre il quinto, identificato come *standard biased CMD spectrum* (anche noto come SCDM model) possiede come parametri cosmologici i seguenti valori: $\Omega_0 = 1$, $h = 0.5$, $\sigma_8 = 0.63$.

Il termine h viene utilizzato per parametrizzare quello che è il valore di riferimento della costante di Hubble $H_0 = 100 \text{ km/s/Mpc}$

$$h = \frac{H_0}{100 \text{ km/s/Mpc}} \quad (3.1)$$

mentre il termine σ_8 sarà preso in considerazione e giustificato nelle righe successive.

Risulta importante specificare che, nel corso dell'articolo, la costante cosmologica Λ viene espresso in unità di $3H_0^2$, dove H_0 esprime la costante di Hubble al tempo presente, posto in questo caso uguale a $H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Una tale convenzione permette così di scrivere nei modelli cosmologici rappresentanti universi con geometria piatta e a bassa densità $\Omega_\Lambda + \Omega_0 = 1$.

Per quanto concerne i restanti modelli considerati, due di questi presentano anch'essi uno spettro a legge di potenza, con indice n uguale a 0 e -1 , tuttavia considerati all'interno di un modello di Universo aperto. In questo tipo di modelli, differientemente

da quanto visto in precedenza analizzando gli universi a curvatura piatta, ci riferiamo al caso di uno spazio-tempo con materia gravitante (e quindi definito con un parametro di densità di materia $\Omega_0 > 0$) e parametro di curvatura $k=-1$.

L'ultimo dei modelli cosmologici presi in esame all'interno della simulazione è il Λ CDM (Lambda Cold Dark Matter), un modello a bassa densità caratterizzato da una geometria piatta e dai seguenti parametri cosmologici: $\Omega_0 = 0.25$, $\Lambda = 0.75$, $h = 0.75$, $\sigma_8 = 1.3$.

La normalizzazione dei modelli CDM è specificata da σ_8 , anche nota come deviazione standard, che indica quella che è la fluttuazione in massa nelle sfere di raggio $8h^{-1}\text{Mpc}$.

Per individuare lo stato evolutivo all'interno del processo di simulazione, viene inoltre introdotto un ulteriore parametro, denominato $M_*(z)$. Un tale termine viene definito dalla richiesta che la varianza della sovradensità lineare a redshift $z = 0$, sia uguale alla radice della soglia di densità critica necessaria per garantire il collasso sferico al redshift z : $\Delta_0^2 M_*(z) = \delta_{crit}^2(z, \Omega_0, \Lambda)$.

3.2.2 Simulazione a bassa risoluzione

La simulazione è stata svolta utilizzando il codice P³M di Efstathiou et al (1985) [4]. Tale codice consiste nell'unione di due algoritmi simulativi per sistemi di N-corpi: il metodo PP e il metodo PM, già brevemente riassunti nei paragrafi precedenti.

Per quanto concerne i profili a legge di potenza, quella cercata è stata generata attraverso l'utilizzo dell'approssimazione di Zel'dovich per la disposizione di particelle da un condizione iniziale uniforme. L'utilizzo di tale approssimazione permette di semplificare la dinamica della particelle prese in considerazione. All'interno di un tale sistema, infatti, la traiettoria degli elementi di massa viene definita lineare.

Per tale carico, le due conformazioni usate sono state la *glass configuration* (già utilizzata negli studi di White del 1996) oppure una seconda utilizzando una griglia cubica.

Per le simulazioni di profili a legge di potenza, l'ampiezza degli spostamenti è scelta impostando la potenza del campo di densità perturbato al livello di rumore bianco alla frequenza di Nyquist della griglia di particelle.

Le simulazioni sono svolte su sistemi costituiti da un numero di particelle intorno a 10^6 . Tali modellizzazioni vengono arrestate quando la massa non lineare M_* , di cui è stata data una definizione precedentemente, raggiunge un numero di particelle pari circa a 2000. In quel determinato istante viene identificato il tempo presente, e con tale il redshift z viene posto a zero.

È importante sottolineare come, data la diversa velocità evolutiva che gli aloni posseggono in funzione dell'indice di potenza n (gli aloni con un indice n maggiormente negativo evolvono in maniera più rapida), importante è stato modificare il fattore di espansione in virtù di questo.

Difatti, mentre per $n = -1.5$ un fattore di crescita delle perturbazioni di 9.5 è risultato sufficiente, per $n = 0$ ($\Omega_0 = 1$) questo è stato portato a 90. Lo studio dei modelli aperti, invece, ha richiesto che tale valore fosse portato oltre il 150, per $n = 0$ e $\Omega_0 = 0.1$.

3.2.3 Simulazione ad alta risoluzione

Gli aloni che verranno simulati ad alta risoluzione vengono scelti, casualmente, a redshift $z = 0$, da una lista di ammassi precedentemente definita, usando un algoritmo FoF (*Friend of Friend*).

Tale codice permette di identificare l'appartenenza di una particella ad un determinato ammasso, andando a definire la distanza massima a cui questa si deve trovare dagli altri elementi di massa del sistema. In particolare, all'interno di questo studio la distanza dalle altre particelle è stata posta intorno al 10%.

Importante risulta tuttavia sottolineare come tutte le particelle appartenenti alle zone circostanti a questo limite sono comunque prese in considerazione, mantenendo però una bassa risoluzione. Queste, infatti, serviranno per migliorare la precisione riguardante gli effetti mareali, ma non verranno poi tenute in considerazione nel corso dell'analisi.

Il risultato che emerge da questa procedura consiste in un certo numero di simulazioni, che tuttavia altro non sono che modellizzazioni a maggiore risoluzione delle zone di interesse emerse dall'analisi precedente.

Per quanto concerne invece gli intervalli di massa scelti, questi variano a seconda del modello cosmologico preso in considerazione.

Per i profili a legge di potenza, gli intervalli scelti variano in un range compreso tra $0.1-10 M_*$, mentre per le simulazioni appartenenti ai modelli cosmologici *Cold Dark Matter* tale intervallo è esteso tra $0.1-100 M_*$.

Dato che l'interesse dello studio è principalmente rivolto alle strutture degli aloni in equilibrio, risulta non di secondaria importanza evidenziare la necessità di analizzare solamente quegli aloni che non fossero eccessivamente distanti dall'equilibrio viriale.

In conclusione, viene sottoposto ad analisi ogni alone che è stato simulato ad alta risoluzione, in un intervallo temporale compreso tra redshift 0.05 e 0, quando questi tendono ad essere più vicini all'equilibrio dinamico. Nella fattispecie, questo momen-

to viene identificato come quello in cui il rapporto tra i due contributi dell'energia, cinetica e potenziale, si avvicina maggiormente al valore di 0.5 (questo per la porzione di materiale contenuta all'interno del raggio viriale).

Quando un alone viene scelto per essere risimulato, le particelle che si trovano entro il suo raggio viriale vengono riportate alle condizioni iniziali, e definito un nuovo volume con all'interno queste particelle. Questa scatola viene riempita con un numero di particelle pari a 32^3 , disposte su una griglia orientata la quale subisce una perturbazione simile a quelle utilizzata all'interno della simulazione P^3M .

La dimensione della scatola a maggiore risoluzione scala in maniera omogenea con la massa totale del sistema preso in considerazione e, come risultato di tale processo tutti gli aloni risimulati posseggono all'incirca lo stesso numero particelle entro il raggio viriale a $z = 0$, approssimativamente tra le 5000 e le 10000.

Come discusso in articoli precedenti dagli stessi Navarro, Frenk & White, essi verificarono che, per ottenere dei risultati numericamente convergenti, viene richiesto che il redshift iniziale di ciascuna simulazione z_{init} sia abbastanza elevato da poter permettere a tutte le scale risolte all'interno della box iniziale di trovarsi ancora nel regime lineare.

Affinchè questa condizione sia soddisfatta, z_{init} è stato scelto così da garantire che lo spostamento iniziale medio delle particelle poste all'interno della scatola ad alta risoluzione fosse sempre minore della separazione media tra particelle.

Capitolo 4

Il profilo di densità NFW

4.1 L'evoluzione temporale

Il grafico rappresentato da Figura 4.1 illustra l'evoluzione temporale degli aloni di diversa massa all'interno di modelli cosmologici caratterizzati da $\Omega_0 = 1$ e $n = -1$.

Nei grafici riportati il verso del tempo aumenta spostandosi dall'alto verso il basso. Similmente, la massa degli aloni rappresentati cresce da sinistra verso destra.

La dimensione di ciascuna box è stata definita per consentire che ciascuna di esse contenesse approssimativamente lo stesso numero di particelle, con un certo grado di approssimazione.

Il grafico riportato dimostra, in maniera chiara, come gli aloni di massa minore siano caratterizzati da processi di formazione che avvengono a velocità maggiore rispetto ai sistemi maggiormente massivi.

4.2 Profili di densità

Figura 4.2 esprime l'andamento dei profili di densità a redshift $z=0$ per serie rappresentanti uno degli aloni meno massivi e uno dei più massivi.

La massa di aloni associati a modelli CDM varia su oltre 4 ordini di grandezza e, all'interno di questi, le unità radiali sono definite in kpc mentre quelle di densità in unità di $10^{10} M_{\odot}/kpc^3$. Diversamente, nei restanti modelli, i sistemi riportati spaziano su circa 2 ordini di magnitudine in massa. Le unità radiali e di densità riportate sono espresse in maniera arbitraria.

La linea continua riproduce, per i dati ottenuti, l'andamento ricavato attraverso eq. (1.1) che permette di ottenere un buon riscontro per le strutture degli aloni considerando intervalli abbastanza ampi in raggio.

Come è possibile osservare, la coerenza del fit con questi dati risulta indipendente dalla massa dell'alone preso in considerazione o dal contesto cosmologico nel quale si sviluppa il sistema. Osservare un risultato di questo tipo consente di ipotizzare una grande uniformità di proprietà quando facciamo riferimento ad aloni di materia oscura in equilibrio.

All'interno di Figura 4.3 vengono mostrati gli stessi profili di densità riportati in Figura 4.2, con la differenza che in questi il raggio viene riscaldato in funzione del raggio viriale di ciascun alone. Tale operazione di riscaldamento risulta di primaria importanza poichè permette non solo di eliminare la relativa dipendenza della massa e dalla dimensione degli aloni ma, in particolar modo, di stabilire un miglior confronto con i dati.

Dalla definizione di raggio viriale r_{200} è poi possibile estrapolare il valore del parametro di concentrazione associato a ciascun alone

$$c = r_{200}/r_s \quad (4.1)$$

e la densità caratteristica δ_c . I due parametri sono legati dalla relazione

$$\delta_c = \frac{200}{3} \frac{c^3}{[\ln(1+c) - c/(1+c)]}. \quad (4.2)$$

Ne deduciamo come, per un alone di massa conosciuta (determinato da M_{200}), un solo parametro rimane libero all'intero di eq. (1.1). Questa incognità può essere rappresentata dal parametro di densità caratteristica δ_c o, alternativamente, da quello di concentrazione.

A partire da ciascun profilo di densità universale è possibile ricavare il relativo profilo di velocità circolare V_c , attraverso la relazione $V_c(r) = (GM(r)/r)^{1/2}$. Questa relazione viene riportata in Figura 4.4, all'interno della quale sono riprodotti i profili di velocità circolare per gli stessi sistemi mostrati in Figura 4.2.

Come precedentemente visto in Figura 4.3, il raggio viene espresso in unità di raggio viriale, mentre le velocità circolari sono state anch'esse normalizzate al valore del raggio viriale. Le curve relative alla velocità circolare, espresse nell'eq. (1.1), sono

$$\left(\frac{V_c(r)}{V_{200}}\right)^2 = \frac{1}{x} \frac{(\ln(1+cx) - cx)/(1+cx)}{\ln(1+c) - c/(1+c)} \quad (4.3)$$

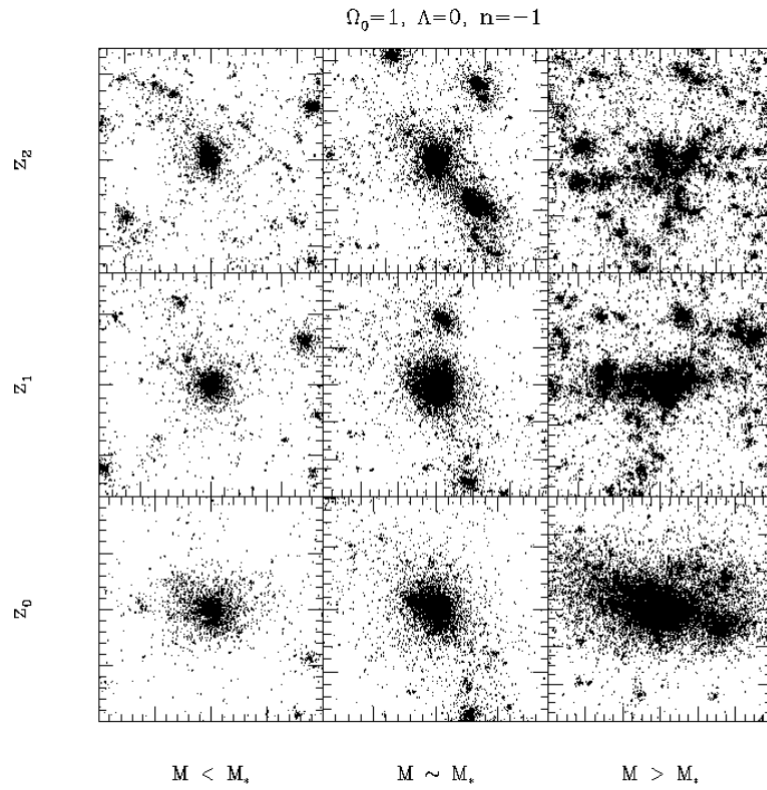


Figura 4.1: Il grafico riporta l'evoluzione temporale di aloni aventi masse diverse in universi caratterizzati da $\Omega_0=1, n=-1$. La dimensione di ciascuna box è stata selezionata affinché contenesse approssimativamente lo stesso numero di particelle rispetto alle altre. L'andamento temporale cresce dall'alto verso il basso, ad ogni rilevazione la massa M_* aumenta di un fattore 4 rispetto alla misurazione precedente. È possibile osservare come gli aloni di massa minore completino il processo di formazione più velocemente rispetto agli aloni più massivi. Grafico da Navarro, Frenk & White (1997) [16].

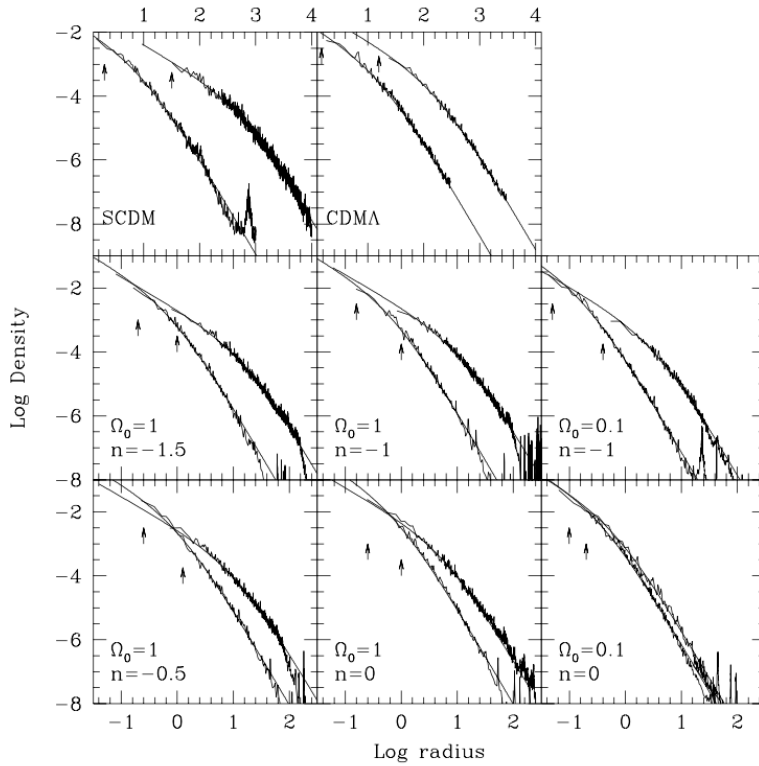


Figura 4.2: I profili di densità per uno degli aloni più massivi e per uno di quelli meno massivi in ciascuna serie. In ogni pannello l'alone meno massivo è rappresentato dalla curva più a sinistra. Nei modelli SCDM e Λ CDM, il raggio è espresso in unità di kpc mentre le densità sono riportate come $10^{10} M_{sol}/kpc^3$. In tutti gli altri pannelli riportati le unità sono arbitrarie. Il parametro di densità Ω_0 e l'indice spettrale n sono riportati in ciascun pannello. Le linee continue sono utilizzate per tracciare il profilo di densità ottenuto tramite eq. (1.1). Le frecce riportate indicano invece il valore del gravitational softening. Grafico da Navarro, Frenk & White (1997) [16].

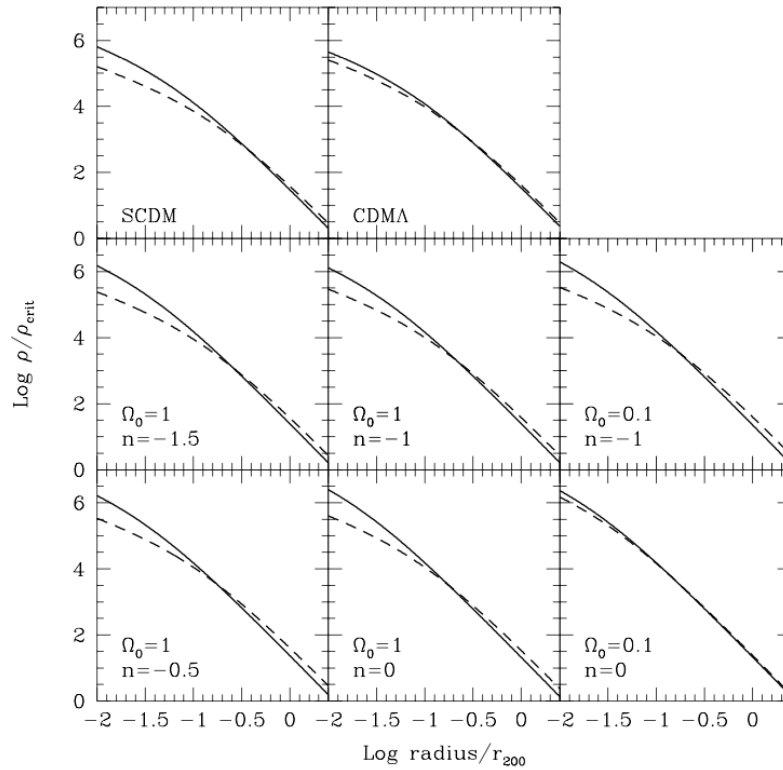


Figura 4.3: Vengono in questo grafico riportati i dati di Figura 2, riscritti al raggio viriale r_{200} per ogni sistema e alla densità critica dell'universo a redshift $z=0$. Le linee tratteggiate fanno riferimento ai sistemi più massivi, mentre le linee continue a quelli di massa minore. È importante osservare che gli aloni di massa minore presentano una maggiore densità man mano che ci spostiamo verso il centro, chiara indicazione del fatto che la densità caratteristica dell'alone aumenta al diminuire della massa dello stesso. Grafico da Navarro, Frenk & White (1997) [16].

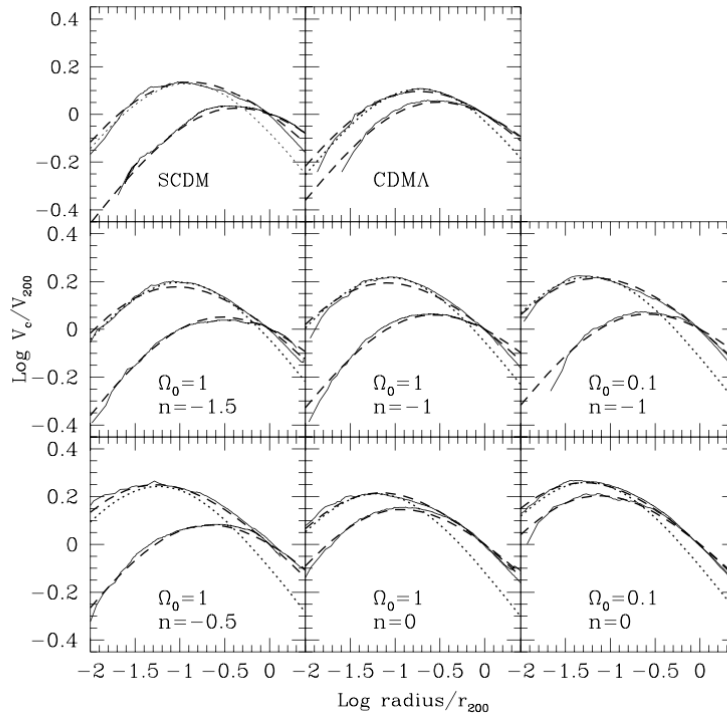


Figura 4.4: Vengono qui riportati i profili di velocità circolare associati agli aloni riportati in Figura 4.2. I raggi indicati sono espressi in unità di raggio viriale e le velocità circolari sono normalizzate al valore del raggio viriale. La linea continua mostrata indica i dati ottenuti dalla simulazione. Tutte le curve presentano una forma simile: crescono avvicinandosi verso il centro, fino al raggiungimento del valore massimo salvo poi decrescere nelle regioni più esterne. I sistemi meno massivi presentano maggiori velocità circolari nelle unità utilizzate a causa della concentrazione centrale più elevata. Le linee tratteggiate rappresentano il profilo ricavato utilizzando eq. (4.3), mentre quelle punteggiate riproducono, per gli aloni di massa minore, il profilo di Hernquist associato. Si può notare come questo modello rappresenti coerentemente le regioni interne, ma sottostimi in maniera netta la velocità circolare all'intorno del raggio viriale. Grafico da Navarro, Frenk & White (1997) [16].

dove $x = r/r_{200}$ rappresenta il raggio espresso in unità di raggio viriale.

Come si osserva, la velocità circolare cresce man mano che ci si avvicina al centro dell'alone, raggiunge un valore massimo (V_{max}) a $x_{max} \sim 2/c$ e diminuisce in maniera sensibile intorno al raggio viriale. È importante sottolineare che gli aloni più concentrati, aventi parametri δ_c e c maggiori, sono caratterizzati da rapporti V_{max}/V_{200} con valori più elevati.

Per concludere il paragrafo, analizziamo ulteriormente Figura 4.4. Le linee tratteggiate presenti all'interno del grafico sono state ricavate utilizzando il profilo di Hernquist [11], che propose nel 1990 un proprio modello legato allo studio della distribuzione di materia oscura nelle galassie.

Osservando le due curve, è possibile osservare come queste risultino estremamente simili quando ci troviamo nelle regioni più centrali, mentre, diversamente, il profilo di Hernquist sottostima abbastanza chiaramente la velocità circolare all'intorno del raggio viriale. Questa differenza appare più pronunciata quando ci riferiamo a sistemi di massa minore, dove il termine δ_c e il rapporto V_{max}/V_{200} risultano conseguentemente avere valore minori.

4.3 La dipendenza dalla massa nella struttura degli aloni

Nel grafico di Figura 4.5 viene rappresentata la relazione esistente tra la massa associata ad un sistema e la relativa densità. In particolare, questo rapporto viene espresso come δ_c su massa, con quest'ultima riportata in unità di M_* .

Similmente, il grafico in Figura 4.6 esprime la relazione tra la massa del sistema e il parametro di concentrazione c .

Risulta significativo notare come il parametro di densità associato a ciascun alone cresca al diminuire della massa, in ognuno dei modelli cosmologici presi in considerazione. Un tale risultato supporta l'idea secondo cui la relazione $M_{200} - \delta_c$ debba essere direttamente collegata al maggior redshift di collasso dei sistemi meno massivi. Questo risultato permette quindi di giungere ad un semplice modello che descriva la relazione massa-densità, qui sotto discusso.

Questo modello associa ad ogni alone di massa M , identificato a $z = 0$, uno specifico redshift di collasso, $z_{coll}(M, f)$. Tale parametro viene definito come il tempo in cui metà della massa dell'alone è stata inizialmente contenuta in progenitori più massicci di una frazione f della massa finale.

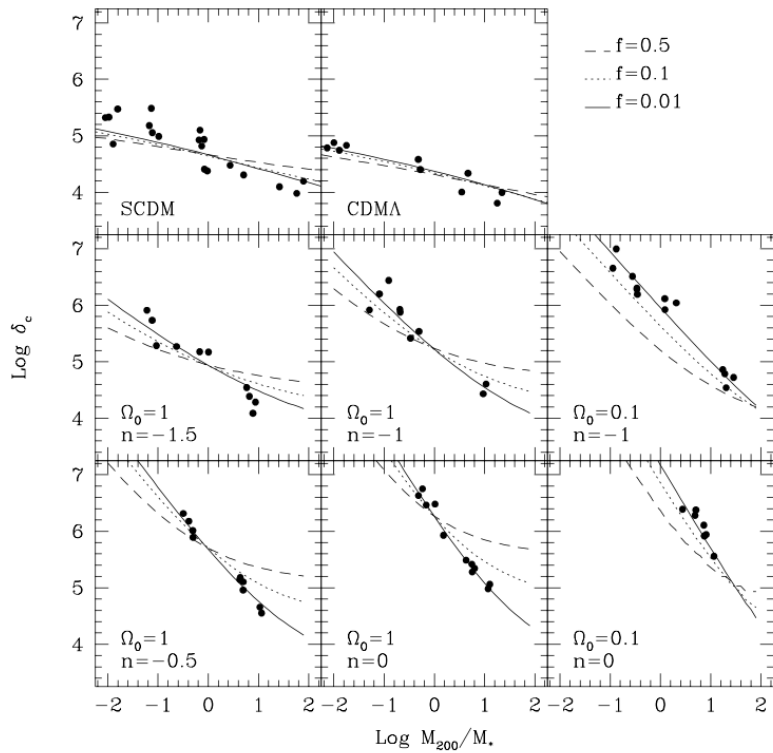


Figura 4.5: Rappresenta la relazione presente tra la massa dell'alone e la sua densità caratteristica. Il parametro di massa è definito in unità di massa non lineare M_* . Le tre curve mostrate in ogni pannello fanno riferimento ai diversi valori associati al parametro f . L'interpolazione è normalizzata così da permettere l'intersezione delle tre curve a $M_{200} = M_*$ nel caso di $\Omega=1$. Grafico da Navarro, Frenk & White (1997) [16].

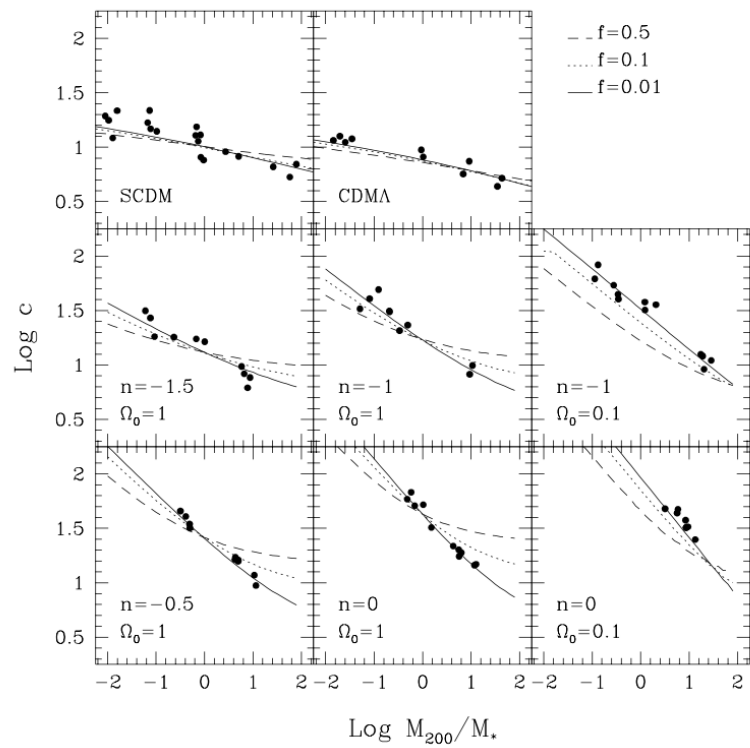


Figura 4.6: Vengono riportati gli stessi dati di Figura 4.5, ma in funzione del parametro di concentrazione c . Il parametro n fa riferimento all'indice spettrale dello spettro di potenza della struttura. Grafico da Navarro, Frenk & White (1997) [16].

Utilizzando questa definizione, z_{coll} può essere scritto, attraverso il formalismo di Press-Schechter, come

$$\text{erfc}\left(\frac{\delta_{crit}(z_{coll}) - \delta_{crit}^0}{\sqrt{2(\Delta_0^2(fM) - \Delta_0^2(M))}}\right) = \frac{1}{2} \quad (4.4)$$

con $\Delta_0^2(M)$ a rappresentare la varianza lineare dello spettro di potenza a redshift $z=0$, livellata con un filtro *top-hat* di massa M , mentre invece $\delta_{crit}(z)$ esprime quello che è il parametro di soglia della densità per il collasso sferico a redshift z e $\delta_{crit}^0 = \delta_{crit}(0)$.

Inoltre, se assumiamo come è lecito fare che la densità caratteristica di un alone sia proporzionale alla densità dell'universo al corrispondente redshift di collasso z_{coll} , questo permette di scrivere

$$\delta_c(M|f) = C\Omega_0(1 + z_{coll}(M, f))^3 \quad (4.5)$$

con C costante di proporzionalità che potrebbe, in linea di principio, dipendere da f e dallo spettro di potenza.

Vedremo successivamente che, per ottenere un buon fit con i dati ricavati dalle simulazioni, sarà necessario imporre $f \ll 1$. In questa approssimazione, infatti, $\Delta_0^2(fM) \gg \Delta_0^2(M)$ e ciò permette quindi di riscrivere l'eq. (4.4) in forma semplificata come

$$\delta_{crit}(z_{coll}) = \delta_{crit}^0 + C'\Delta_0(fM) \quad (4.6)$$

con $C' \approx 0.7$. Ponendo inoltre $f \ll 1$, si ricava $\delta_{crit}(z_{coll}) \gg \delta_{crit}^0$ per tutti i range di massa presi in considerazione, così da avere $\delta_{crit}(z_{coll}) \propto \Delta_0(fM)$.

Dato che $M_*(z_{coll})$ è definito attraverso il parametro $\Delta_0(M_*(z_{coll})) = \delta_{crit}(z_{coll})$, questa equazione permette di definire la densità caratteristica di un determinato alone come direttamente proporzionale alla densità media dell'universo che lo circonda al tempo in cui $M_* \approx fM$, cioè all'istante in cui la massa caratteristica *non-lineare* corrisponde ad una piccola frazioni fissata della massa dell'alone finale.

Il grafico di Figura 4.5 mostra le curve associate a eq. (4.5) per tre diversi valori del parametro f : 0.5, 0.1 e 0.01. Il valore della costante di proporzionalità $C(f)$ è stato scelto al fine di garantire coerenza con i risultati delle simulazioni di Einstein-De Sitter per $M = M_*$. I valori utilizzati vengono riportati in Tabella 1.

Diversi risultati di interesse emergono tuttavia dall'analisi di Figura 4.5 e di Tabella 1.1.

- (i) Si osserva una forte coerenza tra la relazione massa-densità, data da eq. (4.5), e i risultati emergenti dalle simulazioni nei modelli di Einstein-De Sitter, specie

al diminuire del valore di f . Inoltre, una volta fissata la costante $C(f)$, lo stesso valore per questo parametro fornisce dei buoni risultati per i modelli a bassa densità se e solo se $f \leq 0.01$.

- (ii) La densità caratteristica di M_* negli aloni diminuisce in maniera sistematica man mano che si considerano indici spettrali n più negativi. Nell'intorno di M_* , gli aloni che appartengono al modello SCDM sono i meno densi (per la serie con $\Omega_0 = 1$), e appaiono inoltre meno concentrati anche rispetto al corrispondente modello con $n = -1.5$. Un risultato di questo tipo è coerente con l'andamento osservato poichè la densità caratteristica degli aloni di massa M_* risulta essere controllata in primis dalla forma dello spettro di potenza riscaldato attraverso fM_* . Tale parametro risulta essere dell'ordine di $\sim 10^{11} M_\odot$ per $f \approx 0.01$. Se ne ricava quindi che l'effettiva pendenza dello spettro CDM per questa massa è $n_{eff} \sim -2$.
- (iii) Per i profili a legge di potenza aventi indice spettrale $n = 0$ e $n = -1$, la densità caratteristica, una volta fissato il rapporto M/M_* aumenta al decrescere di Ω_0 . Un andamento di questo tipo risulta plausibile in virtù del fatto che ci aspettiamo che il redshift di collasso z_{coll} di un determinato alone aumenti al diminuire di Ω_0 .

Contemporaneamente, gli aloni formati nei modelli a bassa densità Λ CDM risultano meno densi rispetto a quelli appartenenti a Universi SCDM. Ciò è dovuto al fatto che, in questo tipo di simulazioni, δ_c non dipende esclusivamente dal redshift di collasso ma anche da Ω_0 (come si può vedere da eq. (4.6)).

Sebbene il diminuire del parametro Ω_0 aumenti il valore del redshift di collasso, l'aumento di δ_c da $(1 + z_{coll})^3$ viene controbilanciato dal cambio nel valore di Ω_0 . Nei modelli Λ CDM i due effetti riportati possono combinarsi, facendo in modo che δ_c decresca al diminuire di Ω_0 .

- (iv) Ad ogni alone è associata una massima velocità circolare caratteristica V_{max} (come si ricava da eq. (4.3)), che risulta essere fortemente legata alla massa dello stesso. Questa relazione viene mostrata in Figura 4.7, dove viene inoltre riportata la relazione $M_{200} \propto V_{max}^2$ per ogni serie presa in analisi. Coerentemente con quanto mostrato in Figura 4.5 e Figura 4.6, tale rapporto si irripidisce al crescere di n ; vengono ricavati come valori $\alpha \sim 3.2 - 3.3$ per i modelli CDM e $\alpha > 5$ per $n=0$.

Il rapporto V_{max}/V_{200} presenta una crescita logaritmica in funzione della concentrazione centrale dell'alone, e cambia quindi solamente di un fattore due quando

δ_c varia su quattro ordini di magnitudine tra 10^3 e 10^7 . Come risultato di ciò, la relazione $M_{200} - V_{max}$ non si allontana molto dalla relazione $M_{200} - V_{200}$, che per definizione ha uno scatter pari a zero.

I risultati esposti nelle Figure 4.5-4.6-4.7 supportano l'idea secondo cui la densità caratteristica di un alone è principalmente controllata dalla densità media di materia nell'Universo al tempo del collasso. Un importante test da questo punto di vista è quello relativo alla misurazione in maniera diretta all'interno della simulazione del redshift di collasso z_{coll} , da poi confrontare con il risultato ricavato da eq. (4.5).

La dipendenza tra δ_c/Ω_c e il fattore $(1 + z_{coll})^3$ ottenuta attraverso questo tipo di misurazione è riportata in Figura 4.8. Gli aloni appartenenti a Universi di Einstein-De Sitter sono indicati con dei cerchi pieni, sono utilizzati dei cerchi vuoti per quelli all'interno di Universi aperti mentre gli asterischi fanno riferimento ai modelli Λ CDM. La linea continua rappresenta la relazione di eq. (4.5) per $C = 5 \times 10^3$. Questo risultato offre un'ottima approssimazione ai risultati delle simulazioni numeriche, fornendo inoltre un'ulteriore conferma del fatto che la densità media della materia al tempo del collasso sia effettivamente il fattore principale determinante la densità caratteristica di un alone.

È importante sottolineare che il valore della costante di proporzionalità è di poco inferiore rispetto al valore riportato in Tabella 1 per $f=0.1$. Questa differenza viene tuttavia compensata dal leggero bias presente nei redshift più elevati, introdotto dalla procedura numerica scelta.

Un riassunto dei risultati ottenuti è presentato in Figura 4.9. I pannelli di sinistra si riferiscono alla dipendenza della massa dai parametri δ_c e c nei modelli di Universo di Einstein-De Sitter (per $f=0.01$). Diversamente, i pannelli di destra confrontano i risultati dei modelli di Einstein-De Sitter con i modelli a bassa densità. Come più volte sottolineato, la densità tipica degli aloni di massa M_* cresce all'aumentare del valore dell'indice spettrale n .

Ciò nonostante, la differenza tra modelli risulta meno pronunciata man mano che ci spostiamo verso masse superiori, e diventa quasi trascurabile per $M \geq M_*$.

Si noti che tutte le curve rappresentate utilizzando lo stesso valore per f , come già detto $f=0.01$, e essenzialmente lo stesso valore per la costante di proporzionalità $C = 3 \times 10^3$.

Di conseguenza, una volta "calibrate" per un Universo di Einstein-De Sitter, è possibile applicare eq. (4.4) e eq. (4.5) per determinare la densità caratteristica di un alone venutosi a creare in un differente scenario cosmologico.

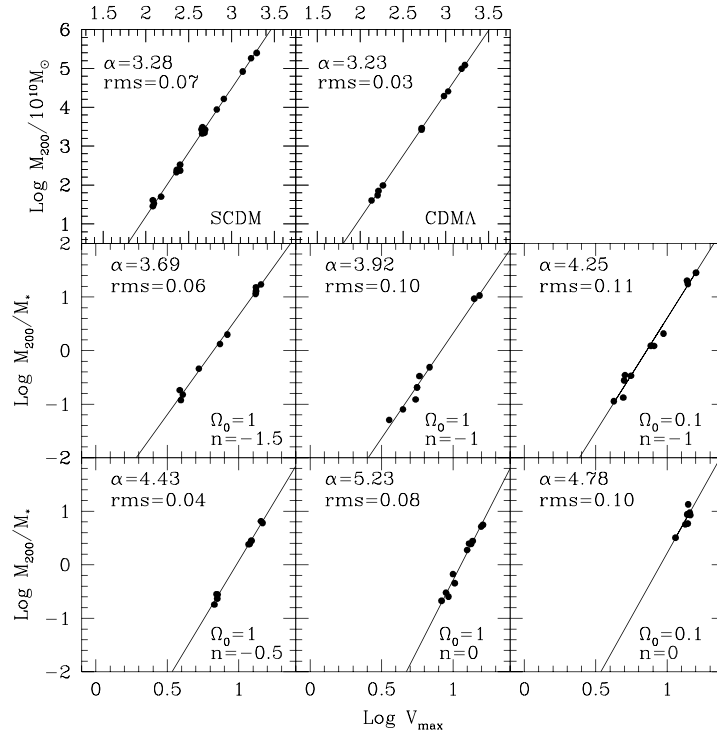


Figura 4.7: Il grafico riporta la relazione tra la massa di un alone e la sua massima velocità circolare V_{max} . Nei profili a legge di potenza le unità relative alla velocità sono arbitrarie, mentre la massa viene espressa in unità di M_* . Diversamente, nei modelli CDM la velocità è rappresentata in kms^{-1} e la massa degli aloni in unità di $10^{10}M_\odot$. La dipendenza espressa è della forma $M \propto V_{\text{max}}^\alpha$, con α e la deviazione standard in massa che vengono riportate in ogni pannello. È significativo sottolineare come la dipendenza $M - V_{\text{max}}$ aumenti la propria pendenza per maggiori valori dell'indice spettrale n . Gli effetti dei parametri cosmologici su α sono invece significativamente minori. Grafico da Navarro, Frenk & White (1997) [16].

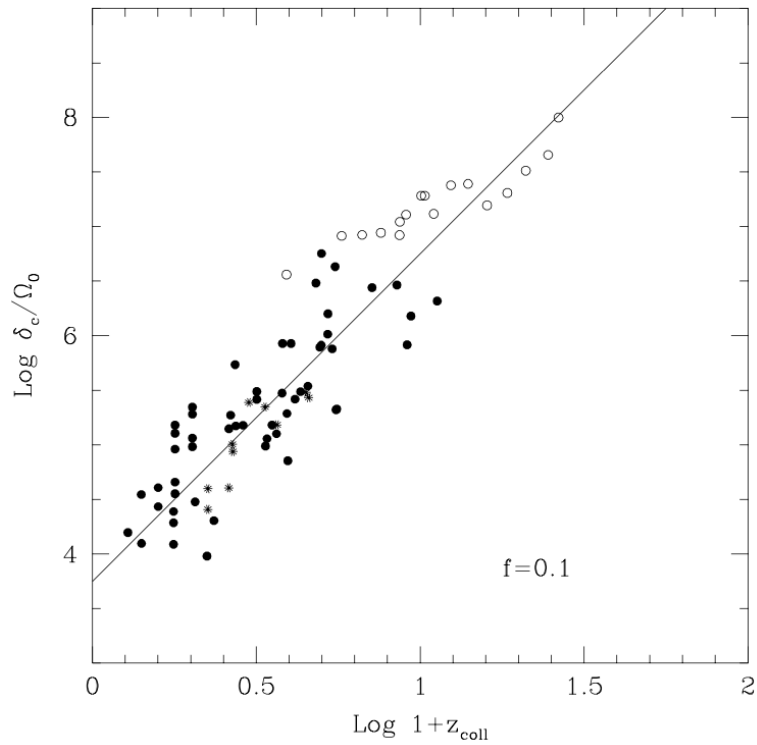


Figura 4.8: Nel grafico viene riportato il parametro di densità caratteristica di ciascun alone simulato in funzione del redshift di collasso z_{coll} , ricavato questa volta direttamente dalle simulazioni. I cerchi pieni corrispondono ad aloni che appartengono alle simulazioni su modelli con $\Omega_0=1$, i cerchi vuoti al caso $\Omega_0=0.1$ e $\Lambda=0$ mentre gli asterischi fanno riferimento ai modelli Λ CDM ($\Omega_0=0.25$, $\Lambda=0.75$). La linea continua rappresenta la relazione $\delta_c \propto \Omega_0(1+z)^3$, ossia quella aspettata nel caso in cui la densità caratteristica dell'alone fosse direttamente proporzionale alla densità media di materia dell'Universo al momento del collasso. Grafico da Navarro, Frenk & White (1997) [16].

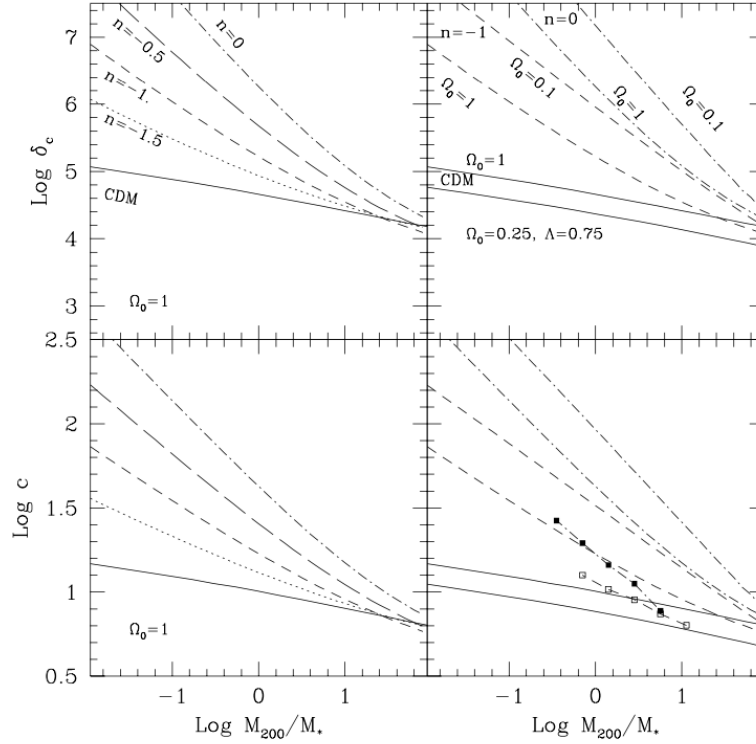


Figura 4.9: Vengono qui riassunti i risultati relativi alla dipendenza della massa dal parametro di concentrazione δ_c e dal parametro c nei diversi modelli cosmologici considerati. La massa è riportata in unità di massa non lineare M_* . I simboli riportati nel pannello in basso a destra mostrano la relazione tra il parametro c e la massa trovati da Cole & Lacey (1996), dove i quadrati vuoti rappresentano i modelli $n=-1, \Omega_0=1$ mentre i quadrati pieni identificano $n=0, \Omega_0=1$. A causa della scarsa risoluzione numerica, gli aloni studiati da Cole & Lacey risultano avere una concentrazione significativamente inferiore rispetto a quelli riportati in questo studio. Grafico da Navarro, Frenk & White (1997) [16].

4.4 La dispersione dei risultati

Viene qui analizzata l'origine della dispersione nelle relazioni sopra riportate. In particolare, è interessante verificare se, fissata la massa, la dispersione nella misura δ_c sia o meno dovuta a variazioni del redshift di collasso o del momento angolare globale del sistema.

In Figura 4.10 viene mostrato come la deviazione di δ_c rispetto alla linea continua di Figura 4.5 sia fortemente legata alla deviazione del redshift di collasso. Inoltre, i due residui appaiono essere correlati come predetto da eq. (4.5), i.e. $\Delta \log(\delta_c) = 3\Delta \log(1 + z_{coll})$. Questa relazione viene espressa dalla linea continua e riproduce coerentemente il trend osservato in Figura 4.10.

Similmente, Figura 4.11 mostra lo stesso residuo δ_c mostrato in Figura 4.10, tuttavia mostrato in funzione della dispersione del parametro massa-rotazione (M_{200} vs λ). Il parametro di rotazione λ viene definito da

$$\lambda = J|E|^{1/2}/GM^{5/2} \quad (4.7)$$

dove J rappresenta il momento angolare e E l'energia di legame dell'alone considerato.

Non osserviamo nessuna relazione tra il rapporto M/M_* e il parametro λ o tra i residui di δ_c e di λ . Questo risultato supporta l'idea secondo il quale il redshift di collasso rappresenta il fattore principale nella determinare la densità caratteristica di un alone.

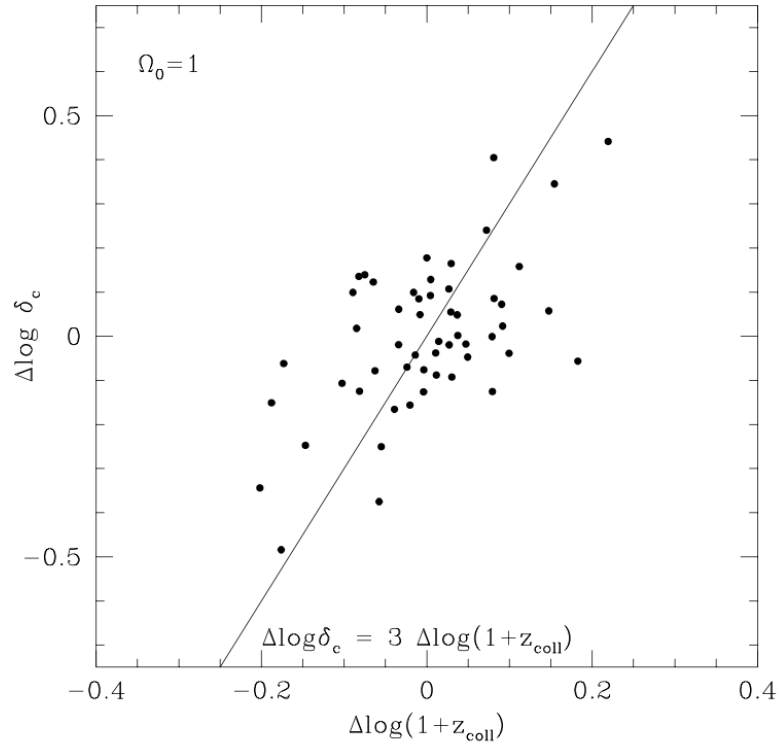


Figura 4.10: Viene rappresentata la deviazione del parametro δ_c dal fit mostrato in Figura 4.5 (per $f=0.01$) espressa in funzione della deviazione dalla relazione media fra il redshift di collasso, $1+z_{coll}$ (espresso in Figura 4.8) e la massa del sistema. Vengono qui riportati solo i risultati relativi a modelli aventi $\Omega_0=1$. Si noti come i sistemi che completano prima la propria formazione presentano densità caratteristiche inferiori alla media. La relazione tra i residui di δ_c e $(1+z_{coll})$ segue la formula $\Delta \log \delta_c=3\Delta \log(1+z_{coll})$, rappresentata dalla linea continua. Grafico da Navarro, Frenk & White (1997) [16].

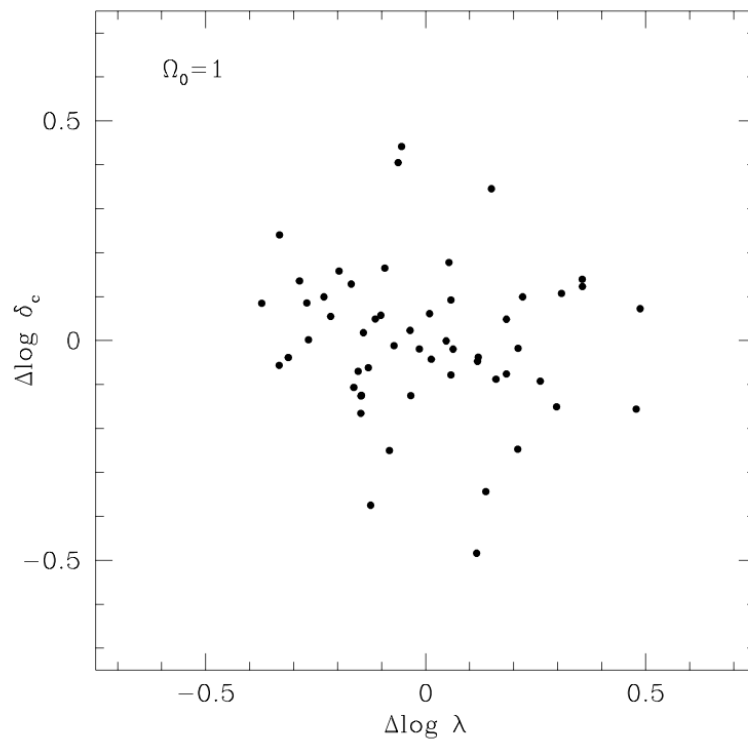


Figura 4.11: Il grafico riporta i residui del parametro δ_c riportati in Figura 4.5 contro i residui della relazione $M_{200} - \lambda$. λ rappresenta il parametro di rotazione (si veda eq. (4.7)). Viene qui mostrato come la dispersione dei valori in δ_c non sia in alcun modo legata agli effetti di rotazione. Gli aloni riportati appartengono ad Universi caratterizzati da $\Omega_0=0$. Grafico da Navarro, Frenk & White (1997) [16].

Capitolo 5

Riscontri osservativi e problemi aperti

5.1 Confronto con lavori precedenti

Il principale risultato dell'analisi indica che il profilo di densità di aloni di materia oscura in equilibrio non dipende dalla massa dell'alone, dallo spettro di potenza di fluttuazioni iniziali o dai parametri cosmologici Ω_0 e Λ . Una semplificazione di questo tipo permette di definire il modello NFW come "universale".

Secondo queste simulazioni, un profilo di densità può essere definito con buona accuratezza considerando solo due parametri, la massa dell'alone M e la densità caratteristica δ_c di questo. È importante tuttavia sottolineare come, nei modelli considerati all'interno di questo studio, questi parametri risultino essere fortemente legati tra loro poichè la densità caratteristica risulta essere proporzionale alla densità media cosmica al tempo in cui la massa non lineare rappresenta una piccola frazione della massa dell'alone.

La densità caratteristica δ_c è di conseguenza determinata dalla densità dell'Universo al tempo del collasso degli oggetti che andranno poi a formare il nucleo dell'alone. Così facendo, è per noi possibile modificare la relazione massa-densità per tutti gli aloni in equilibrio nei modelli cosmologici considerati.

Questi risultati appaiono tuttavia in contraddizione con alcuni dei lavori precedenti. Come già detto nel corso del capitolo introduttivo, diversi autori hanno nel tempo sostenuto l'idea che l'andamento del profilo di densità debba forzatamente dipendere dall'indice spettrale n e dal parametro di densità Ω_0 .

Tra gli altri, secondo Efstathiou et al (1988) [5], Zurek et al. (1988) [22], and Warren et al. (1992) [21], vi è la convinzione che il profilo di densità degli aloni dovesse irripidirsi al crescere dell'indice spettrale n in Universi di Einstein-De Sitter. Questa idea si basa principalmente sulla scoperta secondo cui i profili di velocità circolare per gli aloni di grandi dimensione si appiattiscono per $n=-2$ ma tendono ad avere una decrescita importante man mano che ci spostiamo verso raggi maggiori (per n maggiori).

L'analisi di Figura 5.2 mostra il medesimo andamento riportato da questi autori, se analizziamo i dati nella stessa maniera. In questo grafico vengono riportati, in unità lineari, il profilo di velocità circolare V_c di un alone di massa M_* per diversi valori di n . Ogni curva è stata ricavata utilizzando eq. (4.3) mentre il valore del parametro c è quello utilizzato anche in Figura 4.9. Dato che gli aloni in esame hanno tutti la stessa massa, questi presentano anche lo stesso raggio viriale r_{200} e la stessa velocità circolare V_{200} . La rappresentazione in unità lineari non permette tuttavia di apprezzare come la forma delle curve sia approssimativamente la stessa in tutti i casi e spinge, come fatto dagli autori sopra citati, ad ipotizzare che i grafici si irripidiscano per maggiori valori di n . Contrariamente, questo andamento è dovuto al fatto che gli aloni di massa M_* collassano prima, apparendo quindi più densi, per maggiori valori di n .

Figura 5.3 esprime, insieme al profilo NFW, un modello proposto da Crone et al. (1994) [3], il quale riporta una debole dipendenza dall'indice spettrale n e dal parametro di densità Ω_0 . Questi autori combinarono insieme i 35 gruppi più massivi in ciascuna simulazione svolta per ricavarne un profilo medio, interpolandoli poi con una legge di potenza del tipo $\rho(r) \propto r^\gamma$. Per $\Omega_0=1$, i risultati riportarono un valore di γ decrescente compreso tra -2.2 e -2.5 per n crescente da -2 a 0 .

Risulta doveroso tuttavia sottolineare che il profilo NFW ha ottenuto negli anni un ampio consenso. I profili di densità degli aloni possono in particolare anche essere ricavati attraverso lo studio dell'effetto di *gravitational lensing*, come fatto tra gli altri da Nobuhiro et al. (2013) [19]. Questo gruppo di autori, utilizzando il telescopio Subaru dell'Osservatorio di Mauna Kea, ha ricavato un campione composto da 50 ammassi galattici a redshift compreso tra $0.15 < z < 0.3$ ritrovando un andamento della materia oscura coerente con il profilo di NFW.

Per concludere questo paragrafo riportiamo alcuni dei risultati ricavati da Kravtsov et al. (1998) [13]. Questi autori hanno avuto modo di studiare, utilizzando le curve di velocità come osservabile, quale profilo di densità fornisce una migliore interpretazione dell'andamento di materia oscura. Questa analisi è stata svolta su un campione di 10 galassie nane con un'alta percentuale di materia oscura e 8 galassie a bassa brillantezza superficiale (*LSB, Low Surface Brightness*).

Nel corso del loro approfondimento, gli autori hanno sistematicamente ritrovato, dallo studio dei profili medi di densità nelle regioni più interne, significative deviazioni dal modello NFW.

Dall'analisi delle curve di velocità, come si vede da Figura 5.1, il modello NFW è apparso invece inconsistente con le osservazioni, portando il gruppo a preferire un profilo di densità più coerente con i dati avente una minore cuspidi centrale e caratterizzato da una curva di velocità con una crescita più ripida.

5.1.1 Il lavoro di Roncadelli & Galanti (2021)

Come approfondimento, riportiamo in questo paragrafo il lavoro svolto da Roncadelli & Galanti (2021) [20].

Questi autori, nel corso del loro studio, hanno avuto modo di confrontare alcuni tra i più studiati modelli galattici con simmetria sferica, tra cui anche il profilo NFW. L'obiettivo dell'articolo è duplice: in primo luogo verificare quali modelli risultassero coerenti con le condizioni fisiche delle regioni più interne, in particolare imponendo

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(r) = 0 \quad (5.1)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} V_c^2(r) = 0 \quad (5.2)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0 \quad (5.3)$$

dove V_c rappresenta la velocità circolare mentre g il modulo del campo gravitazionale. Secondariamente, parametrizzare ciascun modello con un profilo di densità a 5 parametri, definito attraverso

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{-\gamma} \left[1 + \left(\frac{r}{a}\right)^\alpha\right]^{(\gamma-\beta)/\alpha} \quad (5.4)$$

dove ρ_0 e a rappresentano delle costanti positive mentre α , β e γ dei parametri anch'essi positivi.

Come riportato da questi autori, il modello NFW ben si presta a descrivere il profilo di densità di aloni di materia oscura e la distribuzione di galassie all'interno degli ammassi, utilizzando nei due casi parametri diversi.

In entrambi i casi tuttavia, questo modello non sembra parametrizzare in maniera accurata le regioni più interne di queste strutture galattiche, dove la cuspidi centrale ipotizzata (a causa della divergenza del profilo di densità NFW) non viene mai osser-

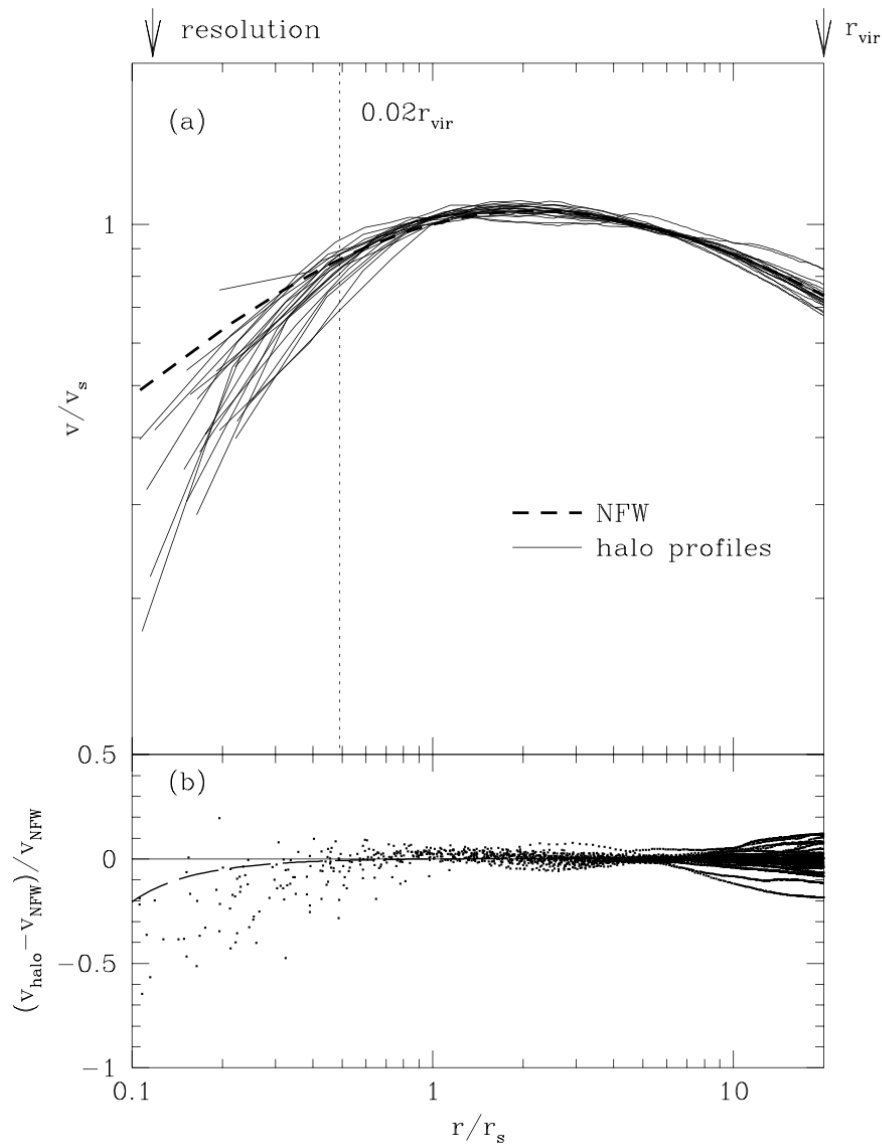


Figura 5.1: (a) Il grafico riporta i profili di velocità circolare degli aloni di materia oscura ottenuti interpolati con il miglior fit ricavato dal profilo NFW. Il raggio caratteristico r_s fa riferimento a eq. (1.1) mentre la velocità circolare V_s fa riferimento a $V_s \equiv V(r_s)$. La linea tratteggiata rappresenta la curva di velocità associata al modello NFW. (b) Vengono qui rappresentati i residui tra i profili di velocità circolare degli aloni e il fit ricavato dal profilo NFW. È qui possibile notare come, sebbene nelle regioni con $0.5 < r_s < 20$ questo modello si trovi in buon accordo con i dati osservativi, i valori della velocità circolare degli aloni quando $r/r_s \leq 0.5$ sono sistematicamente minori di quelli ipotizzati. La curva tratteggiata qui riportata esprime gli errori nella velocità di rotazione associata al *gravitational softening*. Grafico da Kravtsov et al. (1998) [13].

vata. Rimane inoltre non chiaro, secondo gli autori, il punto specifico in cui questo cambio di pendenza prende luogo.

5.2 Le complessità e il profilo di Einasto

Come già detto, il profilo di densità NFW viene definito come un profilo a due parametri, dove per determinare la forma delle curve associate è sufficiente fornire i valori associati alla densità caratteristica dell'alone δ_c e dalla densità media cosmica al tempo del collasso z_{coll} .

Questo tipo di modello presenta, come anche mostrato in Figura 5.3, una cuspidè nelle regioni più interne dove la densità centrale aumenta al crescere della risoluzione numerica delle simulazioni (come giustificato da studi successivi, in particolare Moore et al. (1999) [14], Fukushige & Makino (2001) [8]).

Lavori più recenti supportano tuttavia l'idea secondo cui siano necessari almeno tre parametri per correttamente descrivere un profilo di densità. Perfetto esempio di ciò è il profilo di Einasto, formula ipotizzata dall'astrofisico estone Jaan Einasto nel 1965. Il profilo in questione è definito dalla legge di potenza logaritmica

$$\gamma \equiv -\frac{d \ln(\rho(r))}{d \ln(r)} \propto r^\alpha \quad (5.5)$$

dove il parametro α viene denominato indice di Einasto e controlla il grado di curvatura del profilo. Come mostrato da Navarro et al. (2004)[17], un profilo di questo tipo aumenta sensibilmente la precisione dei fit nelle regioni più interne degli aloni. Di primaria importanza è stato il contributo fornito da Gao et al. (2008) [9] e Hayashi & White (2008) [10], i quali studiando grandi gruppi di aloni di massa simile, con lo scopo di ricavarne un profilo medio, hanno verificato come il valore del parametro α dipenda sistematicamente dalla massa dell'alone. Un risultato di questo tipo contraddice l'idea di universalità del profilo NFW.

Il confronto tra questi due profili di densità è tra gli obiettivi principali di un grosso progetto simulativo del 2010, chiamato *The Aquarius Project* a cui partecipano fra gli altri gli stessi Navarro, Frenk e White. Il progetto in questione è basato su un cospicuo insieme di simulazioni riguardanti la formazione di aloni *galaxy-sized* in Universi Λ CDM. Queste simulazioni comprendono la risimulazione di sei differenti aloni di massa $\sim 10^{12} M_\odot$ all'interno dei quali il numero di particelle varia in maniera sistematica. In un caso, lo stesso alone viene simulato cinque volte aumentando gradualmente il numero di particelle da un milione a circa 1.1 miliardi entro il viaggio viriale. I risultati qui riportati fanno riferimento ad uno degli articoli legato a questo progetto,

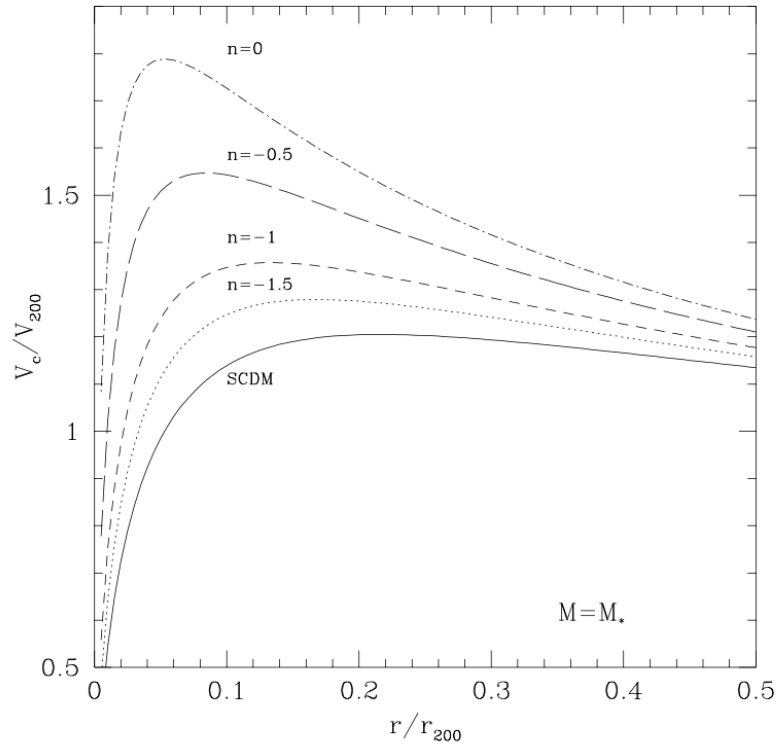


Figura 5.2: Vengono qui riportati i profili di velocità circolare per gli aloni di massa M_* con diversi spettri di potenza in Universi di Einstein-De Sitter. Le curve sono state generate utilizzando eq. (4.3) mentre i valori del parametro di concentrazione c dedotti dal grafico di Figura 4.9. I raggi vengono espressi in unità di raggio viriale, le velocità circolari vengono invece riportate in unità di velocità circolare, rispetto al raggio viriale. Si noti che, a causa dell'utilizzo di unità di misura lineari, non è immediato notare che tutte le curve presentano forme simili. Grafico da Navarro, Frenk & White (1997) [16].

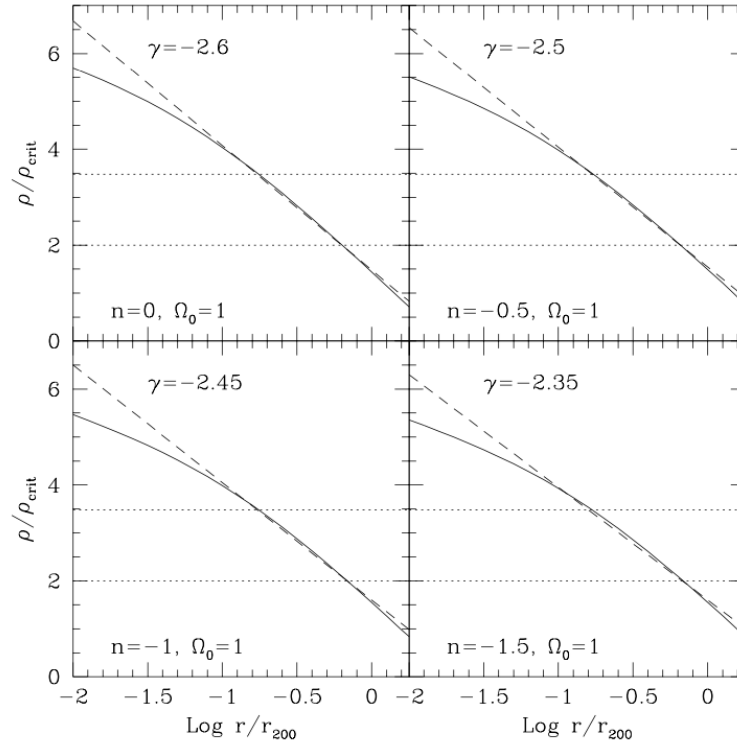


Figura 5.3: Il grafico rappresenta un confronto tra il profilo di densità Navarro, Frenk & White, rappresentato dalla linea continua, e il profilo a legge di potenza di Crone et al. (1994). La regione studiata da questi autori, corrispondente ad un range di densità che oscilla tra 100 e 3000, è rappresentato dalla linea tratteggiata. In queste regioni i risultati del nostro studio e la parametrizzazione a legge di potenza adottata da Crone risultano essere coerenti. I profili mostrati dalle linee continue corrispondono a $M = 6M_*$ ($n=-1.5$), $M = 4M_*$ ($n=-1$), $M = 2M_*$ ($n=-0.5$), $M = M_*$ ($n=0$). Grafico da Navarro, Frenk & White (1997) [16].

in particolare *The Diversity and Similarity of Simulated Cold Dark Matter Halos*, di Navarro et al. (2010) [18].

Il grafico a sinistra in Figura 5.4 compara i profili di densità di tutti i sei aloni di livello 2, dopo aver riscalato i raggi rispetto al raggio caratteristico r_{-2} , un parametro di scala identificabile dal cambio di pendenza nel profilo dell'alone, e le densità rispetto a $\rho_{-2} \equiv \rho(r_{-2})$.

Il pannello di destra esprime invece i profili di velocità circolare, riscalati questa volta in funzione di V_{max} , così da ottenere un picco uguale per tutti gli aloni. Per rappresentare il profilo NFW viene utilizzata eq. (1.1), rappresentata dalla linea a tratti e punti. La linea tratteggiata fa riferimento ad un profilo di NFW modificato, definito M99, legato alla formula

$$\rho(r) = \frac{\rho_M}{(r/r_M)^{1.5} [1 + (r/r_M)^{1.5}]} \quad (5.6)$$

mentre il profilo di Einasto viene parametrizzato come

$$\ln(\rho(r)/\rho_{-2}) = (-2/\alpha)[(r/r_{-2})^\alpha - 1] \quad (5.7)$$

ed è espresso dalla linea continua. In queste curve il profilo di Einasto utilizza come valore per il parametro $\alpha = 0.159$.

Come legenda, viene qui riportata una breve spiegazione della denominazione utilizzata. I sei aloni sono rappresentati dalle lettere dalla A alla F, mentre il numero riportato successivamente fa riferimento al livello di risoluzione. "1" rappresenta la risoluzione massima mentre le simulazioni di livello due, nel grafico riportate corrispondono ad un intervallo di circa 100 e 200 milioni di particelle considerate, entro r_{200} .

Le curve rappresentate dalle linee più grosse e colorate fanno riferimento alle diverse simulazioni svolte. Vi è, come è facile notare, un chiaro disaccordo tra i profili rappresentati dalle simulazioni e le curve associate ai modelli NFW e M99. Nel pannello inferiore vengono riportati i residui dei dati ricavati dall'interpolazione con le formule riportate sopra. È possibile qui notare come i residui calcolati su questi profili si discostino notevolmente dal valore 0.

Diversamente, l'andamento su larga scala dei residui del miglior fit svolto sulla formula di Einasto è piuttosto debole. Questo suggerisce che un profilo di questo tipo è sensibilmente più adatto per riprodurre il profilo di un alone simulato.

Questo risultato non è esclusivamente legato al parametro aggiuntivo α presente nella formula di Einasto, in quanto anche mantenendo questo termine fissato ad un

singolo valore, i residui appaiono minori rispetto a quelli riportati dagli altri due profili.

5.3 Conclusioni

Rimangono tuttavia da capire i motivi per cui i modelli fisici basati su simulazioni N-corpi, come quelli di Navarro, Frenk e White, riproducano meno accuratamente le osservazioni (profili di densità, curve di rotazione, ecc.) rispetto ai modelli puramente cinematici (descrittivi) quali il modello descritto dal profilo di Einasto.

Verosimilmente, e come sottolineato da molti autori, i modelli fisici N-corpi considerano esclusivamente il contributo della materia oscura fredda, costituita da particelle interagenti solo per via gravitazionale.

Ovviamente le galassie, e le strutture cosmiche in generale, includono importanti contributi di materia barionica. Ci si aspetta che quest'ultima, avente un comportamento completamente diverso e interagendo in diversi modi (elettromagneticamente in particolare) comporti significativi effetti sulla struttura, in particolare nelle regioni interne a più alta densità, dove la densità di barioni è elevata e superiore alla materia oscura, e dove gli effetti dissipativi divengono importanti.

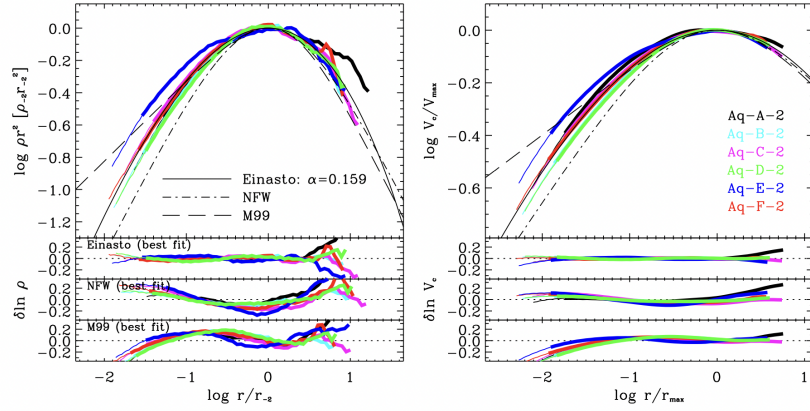


Figura 5.4: Pannello di sinistra: riporta i profili di densità per tutti gli aloni delle simulazioni *Aquarius* di livello 2. I raggi sono stati riscali in funzione del raggio caratteristico r_{-2} . Il pannello inferiore rappresenta i residui relativi all'interpolazione delle simulazioni con le formule sopra riportate per i tre profili. Si noti come la formula di Einasto rappresenti coerentemente tutte le sei simulazioni, specialmente nelle regioni più interne. Diversamente, mentre il profilo NFW possiede una discrepanza nella forma che porta a deviazioni sempre maggiori spostandoci verso l'interno, il modello M99 fornisce una rappresentazione mediocre delle simulazioni riportate. Pannello di destra: riporta gli stessi dati espressi nel pannello di sinistra, in funzione questa volta dei profili di velocità circolare, riscali per riportare il picco delle varie curve nello stesso punto. Grafico da Navarro et al. (2010). [18]

$P(k)$	Ω_0	Λ	f	$C(f)$
CDM	1.0	0.0	0.5	1.75×10^4
	1.0	0.0	0.1	7.44×10^3
	1.0	0.0	0.01	3.41×10^3
Λ CDM	0.25	0.75	0.5	1.75×10^4
	0.25	0.75	0.1	7.44×10^3
	0.25	0.75	0.01	3.41×10^3
$n = -1.5$	1.0	0.0	0.5	3.00×10^4
	1.0	0.0	0.1	1.08×10^4
	1.0	0.0	0.01	3.15×10^3
$n = -1.0$	1.0	0.0	0.5	5.00×10^4
	1.0	0.0	0.1	1.38×10^4
	1.0	0.0	0.01	2.50×10^3
	0.1	0.0	0.5	5.00×10^4
	0.1	0.0	0.1	1.38×10^4
	0.1	0.0	0.01	2.50×10^3
$n = -0.5$	1.0	0.0	0.5	1.25×10^5
	1.0	0.0	0.1	2.81×10^4
	1.0	0.0	0.01	2.81×10^3
$n = 0.0$	1.0	0.0	0.5	4.00×10^5
	1.0	0.0	0.1	6.66×10^4
	1.0	0.0	0.01	4.00×10^3
	0.1	0.0	0.5	4.00×10^5
	0.1	0.0	0.1	6.66×10^4
	0.1	0.0	0.01	4.00×10^3

Tabella 5.1: Vengono qui riportati i parametri utilizzati in eq. (4.5) per i grafici di Figura 4.5.

Bibliografia

- [1] Edmund Bertschinger. Self-similar secondary infall and accretion in an einsteinde sitter universe. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 58:39–65, 1985.
- [2] Shaun Cole and Cedric Lacey. The structure of dark matter haloes in hierarchical clustering models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 281(2):716–736, 1996.
- [3] Mary M Crone, August E Evrard, and Douglas O Richstone. The cosmological dependence of cluster density profiles. *Arxiv preprint astro-ph/9404030*, 1994.
- [4] Marc Davis, George Efstathiou, Carlos S Frenk, and Simon DM White. The evolution of large-scale structure in a universe dominated by cold dark matter. *The Astrophysical Journal*, 292:371–394, 1985.
- [5] George Efstathiou, Carlos S Frenk, Simon DM White, and Marc Davis. Gravitational clustering from scale-free initial conditions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 235:715–748, 1988.
- [6] James A Fillmore and Peter Goldreich. Self-similar gravitational collapse in an expanding universe. *Astrophysical Journal*, 281(1):1–8, 1984.
- [7] Carlos S Frenk, Simon DM White, Marc Davis, and George Efstathiou. The formation of dark halos in a universe dominated by cold dark matter. *The Astrophysical Journal*, 327:507–525, 1988.
- [8] Toshiyuki Fukushige and Junichiro Makino. Structure of dark matter halos from hierarchical clustering. *The Astrophysical Journal*, 557(2):533, 2001.
- [9] Liang Gao, Julio F Navarro, Shaun Cole, Carlos S Frenk, Simon DM White, Volker Springel, Adrian Jenkins, and Angelo F Neto. The redshift dependence of the structure of massive λ cold dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 387(2):536–544, 2008.

- [10] Eric Hayashi and Simon DM White. Understanding the halo-mass and galaxy-mass cross-correlation functions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 388(1):2–14, 2008.
- [11] Lars Hernquist. An analytical model for spherical galaxies and bulges. *The Astrophysical Journal*, 356:359–364, 1990.
- [12] Y Hoffman and J Shaham. Local density maxima-progenitors of structure. *The Astrophysical Journal*, 297:16–22, 1985.
- [13] Andrey V Kravtsov, Anatoly A Klypin, James S Bullock, and Joel R Primack. The cores of dark matter-dominated galaxies: Theory versus observations. *The Astrophysical Journal*, 502(1):48, 1998.
- [14] Ben Moore, Sebastiano Ghigna, Fabio Governato, George Lake, Thomas Quinn, Joachim Stadel, and Paolo Tozzi. Dark matter substructure within galactic halos. *The Astrophysical Journal*, 524(1):L19, 1999.
- [15] Julio F Navarro. The structure of cold dark matter halos. In *Symposium-international astronomical union*, volume 171, pages 255–258. Cambridge University Press, 1996.
- [16] Julio F Navarro, Carlos S Frenk, and Simon DM White. A universal density profile from hierarchical clustering. *The Astrophysical Journal*, 490(2):493, 1997.
- [17] Julio F Navarro, Eric Hayashi, Chris Power, AR Jenkins, Carlos S Frenk, Simon DM White, Volker Springel, Joachim Stadel, and Thomas R Quinn. The inner structure of λ cdm haloes—iii. universality and asymptotic slopes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 349(3):1039–1051, 2004.
- [18] Julio F Navarro, Aaron Ludlow, Volker Springel, Jie Wang, Mark Vogelsberger, Simon DM White, Adrian Jenkins, Carlos S Frenk, and Amina Helmi. The diversity and similarity of simulated cold dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 402(1):21–34, 2010.
- [19] Nobuhiro Okabe, Graham P Smith, Keiichi Umetsu, Masahiro Takada, and Toshifumi Futamase. Locuss: the mass density profile of massive galaxy clusters at $z=0.2$. *The Astrophysical Journal Letters*, 769(2):L35, 2013.
- [20] Marco Roncadelli and Giorgio Galanti. New strong constraints on the central behaviour of spherical galactic models—no nfw cusp. *arXiv preprint arXiv:2109.13284*, 2021.

- [21] Michael S Warren, Peter J Quinn, John K Salmon, and Wojciech H Zurek. Dark halos formed via dissipationless collapse. i-shapes and alignment of angular momentum. *The Astrophysical Journal*, 399:405–425, 1992.
- [22] WH Zurek, PJ Quinn, and JK Salmon. Rotation of halos in open and closed universes-differentiated merging and natural selection of galaxy types. *The Astrophysical Journal*, 330:519–534, 1988.