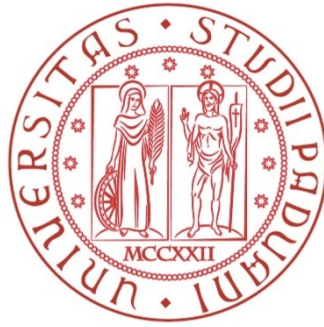




Università degli studi di Padova
Dipartimento di Filosofia, Sociologia e Psicologia applicata
(FISPPA)

Corso di laurea Magistrale in Scienze filosofiche
Tesi di laurea Magistrale

**Il problema del continuo matematico:
indagini filosofiche a partire da Kant e Weyl**

Relatore:
prof. Andrea Altobrando

Laureando
Tommaso Peripoli
Matricola n. 2020253

Anno Accademico 2022/23

INDICE

INTRODUZIONE	3
---------------------	----------

CAPITOLO 1. IL CONTINUO	15
--------------------------------	-----------

1.1 IL CONTINUO E IL DISCRETO	15
1.1.1 IL CONTINUO E IL CONTIGUO	20
1.1.2 DENSITÀ E CONTINUITÀ	21
1.2 PROBLEMATICITÀ DEL CONTINUO	24
1.2.1 IL PRIMO PROBLEMA: IL DISCRETO	26
1.2.2 IL SECONDO PROBLEMA: IL CONTINUO E L'INFINITO	33
1.2.3 IL TERZO PROBLEMA: IL CONTINUO E LE GRANDEZZE NON ARCHIMEDEE	35
1.3 IL CONTINUO NELL'ANALISI MATEMATICA DI OGGI	43

CAPITOLO 2. KANT: LA FILOSOFIA TRASCENDENTALE COME CORNICE DI SENSO DELL'INDAGINE INTORNO AL CONTINUO	49
--	-----------

2.1 IL CONTINUO NELLA MODERNITÀ: LA NASCITA DELL'ANALISI	50
2.2 KANT E LA FILOSOFIA DELLA MATEMATICA	55
2.2.1 LA REPUTAZIONE DELLA FILOSOFIA DELLA MATEMATICA DI KANT	57
2.3 KANT E IL CONTINUO	58
2.3.1 L'ESTETICA TRASCENDENTALE	64
2.3.2 L'ANALITICA: LO SCHEMATISMO TRASCENDENTALE	70
2.3.3 LA SECONDA ANTINOMIA	74
2.4 OSSERVAZIONI CONCLUSIVE	80

CAPITOLO 3. IL PROBLEMA DEI DIFFERENZIALI: DALLA CRITICA DI WEYL ALL'ANALISI DI ROBINSON **85**

3.1 IL TERZO PROBLEMA: GLI INFINITESIMALI	87
3.1.1 IL COSTRUTTIVISMO COME VIA DI USCITA	90
3.1.2 WEYL TRA FORMALISMO E COSTRUTTIVISMO	92
3.1.2.1 LE LEGGI LOGICHE	96
3.1.2.2 IL PASSAGGIO DALLA LOGICA ALL'ANALISI	101
3.2 LA ROTTURA CON L'INTUZIONISMO NEL <i>DAS KONTINUUM</i>	107
3.2.1 GLI INTORNI, I PUNTI INFINITAMENTE VICINI E I LIMITI	111
3.2.2 IL FORMALISMO COME VIA D'USCITA: IL SALTO IN NUOVO MONDO FORMALE	114
3.3 L'ANALISI NON STANDARD (ANS)	116
3.3.1 IL <i>TEOREMA DI COMPLETEZZA</i> E QUELLO DI <i>COMPATTEZZA</i> , IL <i>PRINCIPIO DEL TRANSFER</i> E L'UNIVERSO $\mathbb{R}^*$	117
3.3.2 L'ANALISI NON STANDARD NELLA RETTA	123
3.3.3 L'ANALISI NON STANDARD E IL SUO SIGNIFICATO PER LA CONTINUITÀ	126
3.4 OSSERVAZIONI CONCLUSIVE	130

CONCLUSIONE **135**

BIBLIOGRAFIA **141**

APPENDIX. DAS PROBLEM DES MATHEMATISCHEN KONTINUUMS: PHILOSOPHISCHE UNTERSUCHUNGEN ÜBER KANT UND WEYL **147**

RINGRAZIAMENTI **167**

INTRODUZIONE

Nel seguente elaborato si analizzerà il concetto del continuo e di come esso possa edificare l'impianto dell'analisi matematica. Il continuo è l'opposto del discreto. Essi sono due aggettivi che predicano una caratteristica di tutte le cose reali (una sedia, una casa, il mare, il pensiero etc.) o di tutti gli enti immaginari (un piano, una funzione, una retta etc.)

Anche se il lavoro potrebbe sembrare di gusto ontologico, il presente elaborato non intende sostenere che gli enti matematici abbiano uno statuto ontologico uguale rispetto alle "cose" (oppure minore o maggiore), l'obiettivo è piuttosto quello di argomentare che la filosofia della matematica è un valido strumento per descrivere il continuo fenomenico in quanto esiste un legame stretto tra i due tipi di continui. Il lavoro intende mostrare che la struttura della matematica viene costruita grazie al continuo e che quindi la filosofia della matematica può usare gli enti matematici per descriverlo. Tali enti possono avere una struttura ontologica debole (ossia non sono nient'altro che "belle finizioni"), ma sicuramente attraverso le funzioni, le successioni, le rette, i numeri, etc. possiamo comprendere il continuo e descrivere quest'aspetto fenomenico tanto intrinseco della natura umana che lo stesso Aristotele sostiene che è necessaria la continuità per formulare qualsiasi tipo di pensiero.

È abbastanza ovvio che il continuo fa parte della nostra esperienza di ogni giorno, sarebbe strano il contrario, proprio in virtù del fatto che siamo immersi in uno spazio e in un tempo che ci appaiono continui. Immagini del continuo sono un torrente, uno specchio d'acqua, qualcosa di omogeneo che non può essere rotto: "fare buchi nell'acqua" è una operazione impossibile tanto da diventare una frase proverbiale*. Il discreto, invece, è la spiaggia di sabbia o di sassi. Paradossalmente, nonostante viviamo in uno spazio e in un tempo continui e nonostante il pensiero sia reso possibile dal continuo, il nostro intelletto può lavorare solamente con il discreto, il quale sembra essergli "più congeniale". Si vedrà nell'elaborato che questa discrepanza è paradossale solo apparentemente: lavorare con il discreto per comprendere il continuo è simile al tentativo di afferrare l'infinito con il

* Qui "fare buchi nell'acqua" è usato nel senso dell'impossibilità fisica di bucare l'acqua.

finito. Il discreto e il finito fanno parte dell'intelletto dell'uomo: l'infinito e il continuo sono invece l'orizzonte di senso in cui il nostro intelletto è inserito.

La stretta parentela tra continuo fenomenico e continuo matematico permette alla filosofia di lavorare sulla struttura matematica, che ha quel rigore e quella forza conoscitiva che secondo Kant solo essa ha, in modo da comprendere il primo continuo. La filosofia si declina in questo modo in una maniera molto specifica: in filosofia della matematica. Essa permette un pensiero critico su ciò che la matematica “dona” all'intelletto umano nelle sue più complesse sfaccettature. Il lavoro della filosofia inizia da quando la matematica ha costruito i suoi primi enti poiché si possono intravedere problematiche e questioni fin da subito. Il presente elaborato evidenzia e discute tre problemi specifici: il rapporto continuo-discreto, l'infinito nel continuo e i numeri infinitesimali. Il primo problema consiste proprio nel rapporto discreto-continuo: la matematica è la disciplina del discreto, ogni numero discretizza la successione, ogni punto la retta e ogni retta il piano. È proprio della matematica lavorare solo con il discreto ed è per questo che ci si chiede come sia possibile capire il continuo attraverso la sua negazione.

Grazie a Kant si mostrerà che il problema non è intrinseco alla matematica, ma genetico all'intelletto umano: *discretizzare* significa *finitizzare* e l'intelletto riesce a ragionare solo con il finito, quindi solo con il discreto. Attraverso Kant si mostreranno i limiti della matematica come disciplina umana; la matematica, tuttavia, ha un posto speciale tra le discipline: per studiare il continuo con il discreto dobbiamo iterarlo fino a sfiorare l'infinità del continuo, e l'iterazione è resa possibile proprio dalle strutture matematiche, le quali riescono “a rompere” il finitismo della mente umana attraverso un sensato simbolismo e restando dentro i limiti imposti dalla filosofia critica. Il discreto, infatti, non esclude l'infinito, in virtù del fatto che esso è reso possibile proprio dall'infinità del continuo stesso; proprio la matematica è perciò quella disciplina umana che dovrebbe riuscire a cogliere il continuo attraverso il discreto. È chiaro che l'infinito nel continuo presenta non poche problematicità: esso è il secondo problema che affligge il continuo matematico.

Trattare il continuo significa trattare (con) l'infinito, quel “concetto che-come scrive Borges- corrompe e confonde”. L'infinito nel continuo matematico si trova su due livelli: nei numeri irrazionali e nelle infinite parti che compongono il continuo.

I numeri irrazionali sono quei numeri che rendono continua la retta, ma il cui valore esatto non è conoscibile. Solo una loro approssimazione è accessibile, ossia si hanno solo (infinite) approssimazioni sempre più precise che tendono al valore esatto del numero irrazionale, il quale può essere rappresentato sia come la diagonale di un quadrato, sia come un simbolo (come " $\sqrt{2}$ "). Tale simbolo non è trattato in modo diverso dai simboli "2", " $1/2$ ", "-3": l'algebra che regola tutti i numeri reali è la stessa (per esempio $3+\sqrt{2}=\sqrt{2}+3$, *proprietà commutativa*). Questa semplice osservazione porta a pensare che il simbolo "radice di due", che rappresenta il numero infinito 1,4142..., chiuda e quindi attualizzi una serie di infinite approssimazioni. Sembra proprio una quadratura del cerchio: l'infinito è ingabbiato dalla diagonale di un quadrato. La filosofia della matematica non può escludere i numeri irrazionali solo perché apparentemente impensabili: proprio il continuo, come base della matematica, deve costringere ogni filosofia ad inglobare tali enti nel proprio modello filosofico. La problematicità dei numeri irrazionali consiste nella loro impossibilità di essere ignorati, questo è il primo esempio di come la struttura matematica, sostenuta da un continuo molto intuitivo, leghi i propri enti così rigorosamente che i successivi pensieri ontologici dovranno tenere conto che se il numero naturale ha tale statuto ontologico, anche il numero irrazionale (e il suo infinito) dovrà avere lo stesso statuto. Un ragionamento poco raffinato potrebbe sostenere che, una volta disegnato un quadrato con il lato lungo un metro, allora la diagonale attualizza l'infinito nel mondo empirico. Tale ragionamento poggia sulla stretta parentela continuo fenomenico-continuo matematico. Si argomenterà, tuttavia, che usare tale parentela per dimostrare questa assurdità non è possibile: Kant segnala i limiti della matematica, oltre ai quali si hanno solo antinomie. Antinomico è anche pensare di aver dimostrato che ogni porzione di reale finito ha infinite parti perché le rette, le successioni etc. sono continue e quindi divisibili all'infinito.

Le infinite parti nel finito rappresentano il secondo livello in cui compare l'infinito nel continuo. La divisione all'infinito è talmente nevralgica che per Kant è l'essenza della continuità stessa; matematici e filosofi si scontrarono proprio su questa semplice proprietà dando vita a diverse scuole metafisiche. La filosofia della matematica deve concettualizzare la divisione dell'infinito, in quanto proprietà del continuo stesso, e per farlo deve chiedere alla matematica degli enti coerenti in grado di rappresentare tale divisione.

La divisione senza fine ha portato i matematici a nuovi enti chiamati numeri differenziali (detti anche numeri infinitesimali); tali enti sono così problematici che la matematica storicamente ha preferito negarli che costruirli coerentemente. Nel presente elaborato si sosterrà la tesi che i differenziali sono grandezze essenziali per la matematica (perché essenziali per il continuo) e, pertanto, che la strada della loro negazione non è praticabile: proprio il continuo aveva costretto la matematica ad accettare i numeri irrazionali e ora, con la medesima struttura, la costringe ad accettare anche i numeri infinitesimali. La filosofia deve esigere dalla matematica il massimo rigore per definire questo tipo di grandezze, affinché possa descrivere coerentemente il continuo. Il “differenziale” è il terzo problema del continuo matematico.

I differenziali gettarono le basi, a livello storico, della nascita dell’analisi così come la conosciamo oggi. Le solide basi della matematica, che le avevano garantito una solida reputazione di coerenza, furono messe in dubbio con l’introduzione dei differenziali, quantità che non sono quantità; diverse, ma uguali a zero. Accettare enti approssimativi come i differenziali solo in virtù del loro grande valore euristico (grazie ai differenziali i matematici erano riusciti a risolvere il plurimillenario problema delle rette tangenti ad un punto e del calcolo di qualsiasi area che sia curva, retta o mistilinea) fu percepita da molti accademici come un insulto alla precisione della matematica. I numeri infinitesimali, oltre al loro valore euristico, sono una diretta conseguenza di una discretizzazione all’infinito che, tuttavia, per un sistema formale come quello matematico, esige un ultimo termine, un simbolo. Questo simbolo deve essere in grado di rendere conto della divisione all’infinito del continuo altrimenti perde la sua proprietà più importante, ma allo stesso tempo deve concludere tale divisione. Questo è un serio rompicapo perché, per quanto approssimativa sia la definizione di differenziale, sarebbe molto più impreciso un sistema formale che toglie i differenziali dal campo matematico restando dentro al campo dei numeri reali (compensando con surrogati linguistici del tipo “piccolo a piacere” o “vicino quanto vuoi”) rispetto a uno che comprende i differenziali, ma con definizioni e assiomi problematici (come “uguale ma diverso da zero”). Il differenziale, costruito sapientemente, riesce ad eliminare ogni definizione incerta dalla matematica permettendo alla filosofia di comprendere il continuo e di riflettere criticamente sullo statuto metafisico del differenziale stesso.

Il seguente lavoro presenterà questi tre problemi del continuo matematico nel primo capitolo. Si può dire che ci sono due tipi di continuo, quello fenomenico e quello matematico. Il primo è definito nella nostra esperienza fenomenica, il secondo è invece una costruzione formale e concettuale, basata su assiomi e definizioni. Il primo capitolo presuppone che ci sia un perfetto isomorfismo tra continuo fenomenico e continuo matematico e assume che il primo sia accessibile attraverso il secondo. L'attenzione si sposta pertanto sul continuo matematico per spiegarne il lessico. Il capitolo si conclude con un paragrafo sulle più importanti definizioni dell'analisi matematica contemporanea (chiamata standard), l'obiettivo è mostrare come lavora la matematica, delimitare il campo d'indagine del presente elaborato e anticipare alcune definizioni che verranno riprese nell'ultimo capitolo, dove si analizzerà Weyl e si introdurrà l'analisi non-standard.

Nel secondo capitolo viene affrontato il pensiero di Kant, ma senza alcuna ambizione di esattezza filologica: l'obiettivo è infatti mostrare come la matematica sia un valido strumento per concettualizzare il continuo, come il discreto possa descriverlo e in che senso l'infinito sia presente nel continuo. Il capitolo presenta una sintetica analisi della *Critica della ragion pura* e dei *Prolegomeni ad ogni futura metafisica che potrà presentarsi come scienza* in grado far dialogare tali testi con la filosofia della matematica contemporanea, nonostante la concezione della matematica dell'autore abbia ricevuto molte critiche tanto dagli empiristi quanto dai dommatici e perfino dai filosofi trascendentali. Per attualizzare la filosofia kantiana è necessario tanto un'analisi approfondita dei testi quanto una buona comprensione del tempo matematico e filosofico di Kant per non cadere in banali errori come quello di esigere dal filosofo la conoscenza dell'insiemistica quando parla di insiemi/quantità (Kant usa la parola tedesca *Menge*). L'insiemistica fu infatti inventata da Cantor solo alla fine dell'800 e oggi in tedesco viene detta proprio *Mengenlehre*. Si è scelto di considerare Kant perché scrisse in un'epoca di accesi dibattiti tra matematici e scuole metafisiche, aspetto che lo rende un autore di grande interesse per la filosofia della matematica. I matematici dell'epoca di Kant non erano soltanto impegnati a dimostrare nuovi teoremi, bensì consideravano di vitale importanza dare solide basi filosofiche all'analisi matematica chiamata anche *calcolo*, facendo leva sul concetto di differenziale.

L'analisi della prima critica porterà non solo a vedere come Kant tratta il continuo, ma mostrerà anche *perché* la matematica rappresenta una strada percorribile per

comprendere il continuo fenomenico. Il presupposto del primo capitolo non sarà più un presupposto, se si prende come valida la proposta della prima critica in merito alla struttura epistemologica e metafisica della matematica. Grazie alla filosofia kantiana si riuscirà, inoltre, anche a spiegare il primo problema del primo capitolo: la mente umana riesce ad operare solo con il discreto, ma questo non vuol dire che, attraverso il discreto, non riesca a comprendere (un po') meglio il continuo, per quanto discreto-continuo siano una coppia di opposti. Il discreto del continuo matematico rivela le proprietà del continuo intuitivo. La filosofia della matematica, osservando gli enti matematici (i quali, legati tra di loro, formeranno il continuo matematico) riuscirà a descrivere il continuo intuitivo, in virtù del fatto che il continuo matematico tende costantemente all'omogeneità e alla complessità del continuo intuitivo (quello che è pre-concettuale e "troppo grande" per essere esaurito da ogni possibile esperienza), il quale è la condizione di possibilità anche del continuo fenomenico.

Non appena si accoglie il sistema kantiano come valido si devono accettare i limiti imposti dalla filosofia critica; quindi, anche la matematica non potrà avere la presunzione di superare tali limiti: nel secondo capitolo si risolverà allora anche il secondo problema del continuo. Per quanto il continuo matematico sia divisibile all'infinito, per quanto si possa accettare anche che esso sia composto da infinite parti, non significa per forza che anche noi riusciamo a percepire le infinite parti nel momento in cui abbiamo esperienza del continuo fenomenico. Sembrerebbe che l'isomorfismo che regge l'intero elaborato si sia rotto, ma grazie a Kant si riesce a salvarlo. È sufficiente spostare l'attenzione ad un terzo tipo di continuo: il continuo dell'intuizione pura *a priori*, la condizione di possibilità tanto del continuo fenomenico quanto di quello matematico. I rapporti "continuo intuitivo- continuo matematico" e "continuo intuitivo- continuo fenomenico" sono di natura diversa. Il continuo intuitivo è la condizione di possibilità del continuo matematico. I simboli matematici sono costruibili grazie al continuo intuitivo; tali simboli formeranno un continuo "atomico" a causa del modo di ragionare dell'intelletto, esso è un continuo-discreto che tende all'omogeneità del continuo intuitivo. Il continuo fenomenico, invece, segue le regole tanto del continuo intuitivo quanto delle nostre percezioni, le quali limitano l'infinità presente nel continuo intuitivo. La matematica, pertanto, ci dimostra solamente che non ci è lecito pensare un'ultima parte del continuo fenomenico, ma da questo non possiamo dedurre di essere in grado di percepire, attraverso i nostri sensi, tutte le

infinite parti di esso (fino a percepire il differenziale). Il salto dal continuo matematico al continuo fenomenico, senza considerare i limiti dei nostri sensi, porta alla seconda antinomia e, quindi, a ragionamenti di stampo dialettico. Probabilmente, se avessimo i sensi con risoluzione “infinita”, il continuo fenomenico coinciderebbe anche il continuo intuitivo e forse i concetti matematici riuscirebbero a spiegare anche come i nostri sensi funzionano, ma non è così: l’esperienza è immediata e limitata dai sensi. Attraverso la matematica possiamo concludere solamente che non ci è lecito sostenere che esistono parti semplici nel mondo fenomenico, poiché il continuo fenomenico segue le regole del continuo intuitivo, il quale è composto da infinite parti.

Il terzo problema rimane aperto e Kant ci può dire ben poco: gli strumenti matematici che ha disposizione sono poco raffinati e quindi dobbiamo volgere lo sguardo allo scorso secolo. Questo non vuol dire negare la validità di Kant, anzi, alla fine del terzo capitolo sarà facile capire come il sistema kantiano riesca a inglobare anche gli strumenti matematici degli ultimi due secoli.

Sarà il terzo e ultimo capitolo ad avere l’onere di trattare il problema dei differenziali attraverso due autori: Hermann Weyl e Abraham Robinson. In quest’ultima parte del lavoro si intrecceranno problematiche tecnico-logiche e questioni filosofiche. Questi due aspetti non sono in contraddizione, bensì si rafforzano a vicenda. Dall’intreccio di questi due aspetti la filosofia avrà le “ossa” dure grazie all’aspetto tecnico, il quale, a sua volta, sarà molto di più di un insieme di euristici simboli grazie alle riflessioni filosofiche. Essi avranno un significato ben preciso e sarà il terreno sul quale la filosofia della matematica dovrà scontrarsi per ottenere una maggiore comprensione del continuo (delle intuizioni pure *a priori*), il quale, presupposto della matematica, deve essere studiato e indagato dalla filosofia proprio attraverso la matematica.

Weyl era un matematico e un fisico con forti inclinazioni filosofiche, si avvicinò a Kant e alla scuola idealista in giovane età e abbracciò l’intuizionismo quando ormai era un matematico conosciuto. Ebbe sempre il coraggio di rivedere le sue idee, specialmente in materia di filosofia della matematica. Si prenderà pertanto in considerazione il suo libro dedicato all’analisi e al continuo: *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, scritto nella prima metà del secolo scorso. Weyl opera in maniera opposta a Kant: costruisce prima gli elementi logici, poi quelli matematici e infine sottopone l’impianto dell’analisi al banco di prova del mondo fenomenico (che per Weyl

coincide con il continuo intuitivo: si vedrà che Weyl subisce sia l'influsso di Kant che di Husserl). Anche su Weyl si lascerà cadere ogni interesse di tipo filologico (non ci si preoccuperà di ottenere un'interpretazione perfettamente sostenibile dell'autore nonostante l'evoluzione del suo pensiero sia sicuramente affascinante). Un grande contributo di Weyl alla matematica contemporanea è stato quello di vedere il problema dell'impianto del *Calcolo* delle radici. Si prenderanno in esame la sua intuizione e la sua strategia per gettare solide basi logico-matematiche all'analisi: seguire Weyl significa seguire una strada sicura, almeno sul versante logico.

Rimane tuttavia aperto il problema di quanto la struttura matematica sia valida ed esplicativa del continuo intuitivo e, quindi, non sia solo un insieme di "simboli" e di "assiomi". Weyl mostra i limiti dell'analisi rispetto al mondo fenomenico (nel capitolo si vedrà che in Weyl "fenomenico" è sinonimo di "intuitivo" e che tuttavia l'autore non cade nella seconda antinomia): Weyl argomenta che esiste un salto incolmabile tra il continuo matematico e quello fenomenico perché la matematica è incapace di cogliere l'istante: esso è l'infinitamente vicino in matematica, il quale, nell'ottica standard, presenta non poche contraddizioni. Ci si porrà la domanda se tale limite è insormontabile o superabile e si cercherà di introdurre un argomento a favore della seconda opzione, grazie all'analisi non-standard. L'istante di Weyl è il numero infinitesimale ed esso può essere compreso a patto che venga costruito in una determinata maniera, cioè partendo dagli assiomi e dalle regole esposte da Weyl nel *Das Kontinuum*, in questo modo non si avranno due mondi logici incomunicabili, ma due mondi conseguenti. Un approccio all'analisi non-standard di tipo filosofico può salvare l'isomorfismo tra continuo matematico e continuo fenomenico e quindi mostrare anche la contemporaneità di Kant, il quale pensava che i fluenti fossero l'essenza della continuità (i fluenti sono i differenziali in un lessico newtoniano).

Weyl mostra i limiti dell'analisi contemporanea e li risolve a livello logico, ma non riesce a mostrare come il simbolismo algebrico spieghi il modo in cui ci appare il continuo del mondo (il quale è reso possibile dalle nostre intuizioni). Weyl sembra consapevole che la matematica si sia legata mani e piedi con il suo formalismo troppo astratto e lontano dal mondo "reale", ma questo è l'unico modo che ha di operare. Lo stato dell'arte della matematica è in una situazione tragica: dovrebbe essere in grado di

descrivere i fenomeni (basti pensare che l'analisi viene continuamente usata dalla fisica classica), ma è troppo lontana dallo stesso mondo.

Nell'ultimo paragrafo dell'ultimo capitolo si cerca di schematizzare la posizione di Robinson, matematico dello scorso secolo e fondatore dell'analisi non-standard. L'interesse del matematico per l'analisi non-standard deriva dal fatto che riesce a costruire il differenziale in modo coerente alla struttura dei numeri reali. L'analisi non-standard riformula il concetto di limite e quello di derivata, risemantizza la retta reale e riesce a inserire nuove grandezze in grado di mantenere gli irrazionali come numeri che completano la retta, ma allo stesso tempo concettualizza la divisione all'infinito fino al numero più piccolo possibile pensabile. L'analisi non-standard si presenta più intuitiva di quella standard sia nel modo di ragionare che nel modo in cui formula le sue definizioni. Risulta, inoltre, più vicina alla nostra intuizione del continuo. Il guadagno è enorme e il numero infinitesimale rientra nel campo della matematica, senza contraddizioni. Il prezzo è il formalismo, il quale è lo sfondo filo-matematico nel quale Robinson si inserisce.

Alla fine dell'elaborato si ha in mano una forte struttura nella quale gli enti matematici hanno un loro senso e un loro posto; allo stesso tempo, tuttavia, tale struttura è una cornice nella quale si inseriscono ben altre problematiche. Ci si potrebbe domandare quanto Robinson si sia ingabbiato nel sistema formale da lui costruito oppure ci si potrebbe interrogare sullo statuto ontologico del numero infinitesimale per capire quanto vacilli tra “una bella finzione” o “un numero reale”. Anche se il numero infinitesimale viene costruito dai numeri reali esso presenta pesanti differenze con questi ultimi, per esempio, non è presente nella retta come un numero reale. L'elaborato si conclude con queste domande di carattere genuinamente filosofico, mostrando come il continuo sia un concetto di profondo interesse per la filosofia della matematica in quanto ci costringe a ragionare sul modo in cui la matematica opera e su enti un po' particolari. Potrebbe essere di grande interesse prendere sul serio tutti quegli enti che sono molto lontani dal mondo fenomenico e così complessi, proprio grazie al carattere semplice e fortemente intuitivo del continuo. L'elaborato, infatti, punta a mostrare che la matematica arriva agli enti complessi partendo dagli enti semplici costruiti sul continuo. Gli enti complessi devono essere mantenuti se non si vogliono sacrificare il continuo stesso e quindi anche la struttura matematica. Il passo successivo sarà quello di interrogarsi sulla natura ontologica di questa struttura e degli enti presenti in essa, vedere quanto il formalismo sia una gabbia per la

filosofia della matematica. Un realista, per esempio, ha un'ontologia abbastanza efficace per mostrare la natura dei numeri naturali, forse anche di quelli razionali e non dovrebbe avere nessun problema nemmeno ad accettare il continuo come reale (nella sua ontologia). In realtà, proprio, il continuo apre una spirale vorticoso in cui il realista si trova in imbarazzo e l'indagine contenuta in questo elaborato mostra proprio questa spirale: dal realismo dei numeri naturali si arriva alle finzioni degli infinitesimali. Il platonismo, dal canto suo, non ha nessun problema nell'accettare questi ultimi, per quanto si trovi costretto a considerare il continuo come base concreta per decidere la ragionevolezza dei suoi enti, esplicitati da assiomi e da definizioni.

Il primo capitolo è diviso in tre parti: la prima parte è incentrata sui numeri irrazionali e sulla loro necessità per la continuità. Si vedranno i concetti base come quelli di “retta continua”, “retta densa”, “completamento” etc. Nella seconda parte si analizzano i tre problemi del continuo: il discreto, l'infinito e i numeri infinitesimali. La terza e ultima parte presenta una raccolta di definizioni più importanti dell'analisi matematica riferiti alla continuità (l'analisi matematica presentata si chiama standard perché diventata canonica con il suo lessico. Nell'elaborato si fa riferimento al manuale universitario di *Analisi I* di Giusti).

Il secondo capitolo, dopo un veloce *excursus* storico-matematico, analizza la posizione kantiana. Si confronta l'analitica con la dialettica e si propone una interpretazione in grado sia di comprendere il conflitto analitica-dialettica che di attualizzare Kant. In questo capitolo si cercherà di rispondere alle prime due problematiche esposte nel primo capitolo.

Il terzo e ultimo capitolo, dedicato a Weyl, al suo sistema formale e alla sua critica al rapporto continuo matematico-continuo fenomenico abbozza una soluzione attraverso l'analisi non-standard. Nell'ultimo capitolo si delineeranno i contorni per una possibile risposta all'ultimo problema esposto nel primo capitolo.

Nota per le citazioni

Nel secondo capitolo i testi di Kant sono stati citati nel corpo del testo e non nelle note nella seguente maniera: per la *Critica della ragion pura* ho scritto *KrV*, B/A, pagina dell'edizione in italiano [pagina dell'edizione tedesco] (per esempio. *KrV*, B46/A30, p.53 [94]). Per quanto riguarda i *Prolegomeni*: *Prl* pagina edizione italiana [pagina edizione tedesca]. Nel terzo capitolo ho citato nel corpo del testo il libro di Weyl, *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, nella seguente maniera: *DK* pagina edizione italiana [pagina edizione tedesca].

Tutti i testi senza una traduzione in italiano sono stati tradotti nel testo da me, con in nota la versione in lingua originale.

Ultimi due acronimi: nell'ultimo capitolo si farà riferimento soventemente all'*Analisi Standard* e all'*Analisi Non-standard*. La prima verrà indicata con AS e la seconda con ANS.

Concludo dicendo che tutti le immagini sono state fatte utilizzando il programma gratuitamente scaricabile *GeoGebra* (2021).

Abbreviazioni

KrV:

- Kant Immanuel, *Kritik der Reiner Vernunft* (2. Aufl. 1787), in GS, III; trad. it.: *Critica della ragion pura*. Gentile Giovanni e Lombardo-Radice Giuseppe (tradotto da), Laterza; Roma-Bari 2005.
- Kant Immanuel, *Kritik Der reinen Vernunft*. (ed. de. Reclam. Hrsg: Raymund (von) Schmidt; Mit Ausführl. Sacherg. Valentiner (von) Theodor (Beilagen), 1966).

Prl:

- Kant Immanuel, *Prolegomena zu einer jeden Künftigen Metaphysik die als Wissenschaften wird Auftreten können*, in GS, iv; trad. it.: *Prolegomeni ad ogni*

futura metafisica che potrà presentarsi come scienza, Carabellese Pantaleo (a cura di). Laterza, Roma-Bari. 1996.

- Kant Immanuel, *Prolegomena zu einer jeden Künftigen Metaphysik die als Wissenschaften wird Auftreten können*. (ed. de., Reclam, Hrsg.: Malter Rudolf, 1989).

DK:

- Weyl Hermann, *Das Kontinuum, kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, Verlag von Veit & Comp. Leipzig (1932); trad. it.: *Il Continuo. Indagini critiche sui fondamenti dell'Analisi*. Riccioli Veit, Barbara Anna (tradotto da), Bibliopolis, Napoli 1977.
- Weyl Hermann, *Das Kontinuum, kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*. Verlag von Veit & Comp., Leipzig. 1918.

CAPITOLO 1.

IL CONTINUO

In questo primo capitolo si cercherà di delineare un quadro generale con l'obiettivo di costruire una cornice di senso per tutto l'elaborato. Si vedrà come la matematica opera offrendo le prime definizioni di continuità e tenendo d'occhio le problematichità che questa operazione solleva.

Il primo paragrafo metterà in luce concetti fondamentali come “densità”, “continuità”, “corrispondenza biunivoca etc.”, il secondo schematizzerà i tre problemi che affliggono il continuo, l'ultimo paragrafo sarà una enumerazione delle principali definizioni che riguardano il continuo nell'analisi contemporanea, senza l'ambizione né di sistematicità matematica (non essendo questa una tesi di matematica, ma di filosofia) né di inserire tali definizioni in un quadro più ampio della filosofia della matematica (argomento trattato nei capitoli successivi).

1.1 Il continuo e il discreto

Il discreto e il continuo sono due opposti che si rimandano vicendevolmente, tanto da rendere complicato (se non impossibile) definire il primo senza il secondo e comprendere il secondo senza il primo. Il continuo rimanda ad una cascata o ad uno stagno, il discreto alla sabbia in una clessidra o ai sassi di un argine. Il moto continuo, in fisica, è un moto costante che, in assenza di attrito, potrebbe andare avanti all'infinito. Il discreto sono le note del pentagramma intervallate da pause. Il continuo è *qualcosa* senza buchi, un tutto pieno e omogeneo dove le parti sono legate tanto saldamente che non sono più parti, ma formano quel *qualcosa*. Il discreto è *qualcosa* dove le parti non sono legate tra loro, al più si toccano; il discreto non è omogeneo e presenta dei buchi.

Continuo e discreto, pertanto, sono due coppie opposte: si potrebbe definire il continuo come “ciò che non è discreto”, o “il non-discreto” (e viceversa: il discreto come “ciò che non è continuo” o il “non continuo”).

Quanto è stato appena detto ha descritto, in maniera molto narrativa, posizioni che si inseriscono in un dibattito ampio e di vecchia data: fin dall’antichità, infatti, questi due concetti, assunsero un ruolo centrale nelle riflessioni filosofiche², in quanto l’uomo si rese subito conto che, nonostante i paradossi e i problemi che possono generare (come si vedrà), non devono essere ignorati proprio perché, come Bell sottolinea nella prefazione del suo manuale sul continuo, “noi tutti abbiamo familiarità con l’idea di continuo. Essere continui significa essere costituiti da un intero non-rotto o interrotto, come l’oceano o il cielo. Un ente continuo-un continuum- non ha “lacune”. Opposto al continuo è il discreto: essere discreti significa essere separati, come i ciottoli sparsi su una spiaggia o le foglie su un albero. Continuità connota unità; discrezione, pluralità”³; Aristotele stesso affermò: “[è] impossibile pensare a qualsiasi cosa senza la continuità, o pensare a cose atemporali se non in termini temporali”⁴. Zellini, commentando questo passo, fa notare che il tempo è necessario al pensiero, il quale sarà pertanto continuo.

Concentriamoci ora sul tempo. Il modo in cui noi concepiamo una serie temporale è analogo al modo in cui costruiamo una serie numerica studiata dalla matematica in quanto scienza dei numeri. La serie dei numeri *deve* essere continua, in virtù del fatto che il tempo *deve* essere continuo. Per concludere il ragionamento: la matematica, trattando la serie numerica, dovrà dar ragione al continuo; così facendo descriverà la continuità del tempo e, quindi, del pensiero stesso. Da queste righe si può notare come la teoria dei numeri sia la scacchiera dove si gioca la partita per la testa del continuo⁵: avere una teoria

² cfr. Bell 2019, cap.2 e Zellini 2022.

³ Bell 2019, p. vii.: “We are all familiar with the idea of continuity. To be continuous is to constitute an unbroken or uninterrupted whole, like the ocean or the sky. A continuous entity—a continuum—has no “gaps”. Opposed to continuity is discreteness: to be discrete is to be separated, like the scattered pebbles on a beach or the leaves on a tree. Continuity connotes unity; discreteness, plurality.”

⁴ Zellini cita Aristotele, *Parva naturalia*, 450, (Zellini 2022, p.33).

⁵ Vorrei far notare che in queste righe si riduce la matematica allo studio dei numeri, così facendo si riduce anche lo studio del continuo stesso alla teoria dei numeri. Ora, cosa sia una teoria di numeri non è facilissimo da definire e richiederebbe una presa di posizione sulla separazione delle varie branche della matematica (aritmetica, algebra, geometria analitica, analisi, geometria vettoriale etc.), cosa che non è molto rivelante per questo elaborato. In questo capitolo si prenderà la disciplina matematica completa e organica nelle sue parti, per cui geometria-analisi-algebra sono comunicanti tra di loro. Una serie di numeri può essere rappresentata in una retta e quindi, si passa dall’aritmetica alla geometria, inoltre la retta può essere disegnata su un piano cartesiano: così siamo subito nell’analisi. Vorrei mettere l’accento che l’obiettivo del capitolo non è una “filologia” delle divisioni disciplinari interne alla matematica, l’obiettivo piuttosto è

dei numeri “intelligente” può portare alla distruzione o costruzione, comprensione o adombramento del continuo stesso. Perdere la partita significa mandare alla forca il continuo, vincere significa glorificare l’intelletto umano. Il ragionamento presenta il fianco a possibili critiche concentrate sulla disciplina che dovrebbe avere l’onore di trattare il continuo, ma per poter cominciare bisogna assumere qualcosa! Diamo per vero, pertanto, in modo del tutto *acritico* (con la speranza di togliere quell’ “a” privativa prima o poi), che proprio la matematica è la scienza del continuo e che ha gli strumenti per comprenderlo.

Di solito si rappresenta una serie di numeri su una retta, mettendo in corrispondenza biunivoca i punti della retta con i numeri reali (ossia c’è una relazione uno-uno tra punto sulla retta-numero nella serie)⁶. La retta è continua se e solo se si accettano le grandezze incommensurabili, chiamate oggi numeri irrazionali. La necessità dei numeri irrazionali per la continuità (senza i quali, la retta verrà chiamata densa) verrà mostrata solo alla fine dell’Ottocento dal matematico Dedekind (il quale mostrò anche che i numeri irrazionali completano i numeri reali) e formulerà un assioma che prenderà il suo nome (chiamato anche *assioma del continuo*)⁷.

Le grandezze incommensurabili si conoscevano fin da Pitagora, allorquando, secondo la leggenda, un membro della setta venne annegato perché divulgò la terribile scoperta che “non è possibile trovare due numeri interi n e m tali che il rapporto AB/AC sia uguale al rapporto n/m ”⁸, dove $AB=n$ (il lato del quadrato), $AC=m$ (la diagonale del quadrato di lato AB). Già ai pitagorici era chiaro che le grandezze commensurabili (diremmo

quello di mostrare cosa succede quando cerchiamo di pensare il continuo. Il presupposto che si chiede di assumere è proprio quello di accettare la matematica tutta come scienza del continuo, avente gli strumenti per afferrare il discreto e il continuo (concetti non direttamente e non esclusivamente matematici), nonostante l’elaborato presto si limiterà a considerare l’analisi e il calcolo come scienza del continuo.

⁶ Questa retta, chiamata retta reale, si considera sia come un’entità geometrica che aritmetica. Zellini afferma, addirittura, che il continuo numerico si fonda su questa corrispondenza biunivoca (cfr. Zellini 2016, p.129). Bell fa notare che sarà Cantor a creare un perfetto isomorfismo retta-numeri. (cfr. Bell 2019, pp.117-118). Come si vedrà nell’ultimo capitolo nella aritmetica non-standard la corrispondenza biunivoca è mantenuta, ma i numeri reali sono un sottoinsieme dei numeri *surreali* (numeri *interi/limitati/finiti*, *infiniti/ipersfiniti* e *infinitesimi/differenziali*) (cfr. Ternullo e Fano 2021 pp.100-101 e Bottazzini 2018, pp. 263-264).

⁷ Per l’argomento a favore del fatto che i numeri irrazionali completano la retta e la rendono continua: Cfr., Corry 2015, pp.311-314, per la dimostrazione, *Ivi.*, Appendice 10.1 (pp.316-321). Sull’assioma della continuità, Dedekind scrive “If all points of the straight line fall into two classes such that every point of the first class lies to the left of every point of the second class, then there exists one and only one point which produces this division of all points into two classes, this severing of the straight line into two portions” (Dedekind 1963, p.11). Per una formulazione rigorosa dell’assioma della continuità, rimando al manuale di Analisi-Matematica di Giusti (cfr. Giusti 1988, pp.13-16).

⁸ Corry 2015, p.52, sull’aneddoto riguardante l’annegamento del pitagorico rimando a p.53.

oggi i numeri razionali) non sono sufficienti per avere in mano tutti i numeri e quindi, mantenendo la corrispondenza numero-punto, la retta presenterà dei buchi.

Il continuo fa parte del reale, ma per avere il continuo bisogna accettare numeri non esprimibili con proporzioni, numeri con infinite approssimazioni, numeri con un valore mai raggiungibile nella sua esattezza e univocità (una approssimazione è un altro numero e, quindi, in quel caso dovrebbe rappresentare sia il suo valore che l'approssimazione di ciò che è chiamato ad approssimare). L'infinito aveva fatto la sua irruzione nella matematica e non si poteva più tornare indietro⁹. Il *cosmo* si era frantumato sotto l'evidenza matematica. Il mondo, secondo i pitagorici, doveva essere esprimibile attraverso i numeri, i quali erano la chiave per accedere ai segreti della natura. Le proporzioni erano il *logos* del mondo¹⁰. Esprimere il mondo in proporzioni significava avere un reale conoscibile attraverso le strutture matematiche dei numeri e della frazione. Un modello di questo stampo crea proprio una *cosmologia*, ossia un ordine perfetto, calcolabile e accessibile attraverso il rigore della matematica. La scoperta degli incommensurabili, pertanto, diede un colpo duro ai pitagorici: “m” e “n” non hanno un *logos* in comune; nessuna “logica” lega i due numeri e questo venne dimostrato proprio con un procedimento aritmetico (ossia rigoroso). La stessa disciplina che aveva generato “m, “n” e le proporzioni, ora si trova davanti a delle costruzioni che mostrano la insufficienza della sua struttura!

Anche gli atomisti ricevettero uno schiaffo in faccia dagli irrazionali. Essi pensavano che il *cosmo* fosse fatto da atomi, parti ultime della materia non più separabili. La contro parte matematica dell'atomo è il punto in geometria e il numero in algebra. In linea di principio, lo spazio poteva essere disegnato con tanti cerchietti vicini; si può quindi facilmente immaginare di poter conoscere il mondo contando i cerchietti. Per esempio, i

⁹ L'infinito non solo entra perché i numeri irrazionali sono numeri con infinite cifre dopo la virgola non periodici (soluzione reale di un numero irrazionale sarebbe un numero infinito con il decimale che non si ripete mai. Anche $3,\bar{3}$ ha un decimale infinito (3,33333...), ma in realtà è un terzo (1/3), ossia un numero razionale. Il decimale va avanti all'infinito, solo perché abbiamo scelto precedentemente, in modo del tutto arbitrario, la base dieci. Quindi, se prendessimo un'altra base, il decimale sarebbe finito), ma anche perché, come si vedrà presto, con gli irrazionali la retta è divisibile all'infinito, ossia non ci sono parti semplici. Come si vedrà presto l'infinito crea non pochi problemi. Affrontare la questione del continuo significa inevitabilmente affrontare la questione dell'infinito!

¹⁰ Bottazzini scrive “Aristotele attribuiva agli antichi l'idea di *logos* come rapporto. Secondo i pitagorici i numeri interi e i loro rapporti fornivano la chiave per la conoscenza della natura e delle sue manifestazioni” (Bottazzini 2018, p.47). Da notare che anche nel modo in cui i numeri vengono chiamati si vede la centralità del *logos*: le grandezze commensurabili sono chiamati “razionali” (ossia, “avente una ragione, date due grandezze”), le grandezze incommensurabili sono, invece, gli “irrazionali” (ossia, “avente nessuna ragione in comune date due grandezze”).

cerchietti di un lato di un tavolo oppure quelli che intercorrono tra il mondo e la luna oppure quelli contenuti in un vaso etc. Si avranno sempre numeri interi positivi (se fossero fratti allora qualche cerchietto sarebbe stato “separato”, ma l’atomo è indivisibile; positivi perché è assurdo avere una quantità negativa). Una volta ottenuto il numero intero positivo di atomi, questi si possono confrontare tra di loro; per esempio, il tavolo ha miliardi di milioni di atomi in più della matita; oppure l’equatore ha milioni di miliardi di milioni in meno rispetto agli atomi che intercorre tra la luna e la terra e così via. In questo modello si avranno sempre numeri razionali e il *cosmo*, ancora una volta, sarà accessibile attraverso le quantità esatte e grazie al rigore della matematica. I numeri irrazionali mostrano che questo modello non è sostenibile. Se la distanza tra il sole e la terra è proprio la nostra diagonale AC, allora essa misurerà un *tot* di cerchietti più un pezzetto di cerchietto, ma questo significa che abbiamo diviso l’indivisibile *in primis* e, inoltre, non sappiamo quanto vale quel pezzetto, in quanto dovremmo conoscere tutte le cifre dopo la virgola, che sono illimitate: quel pezzetto pertanto diventa un residuo non esprimibile appieno!¹¹ Non ci soffermerà più di così sul rapporto continuo-grandezze incommensurabili nell’antichità perché eccede dall’elaborato, ma si è voluto sottolineare come le grandezze incommensurabili completano lo spazio, rendendolo continuo e come questa continuità non sia conoscibile perché le grandezze che rendono lo spazio continuo non hanno un valore accessibile per la finita mente umana .

Ma come fanno le grandezze incommensurabili a rendere continua una successione? È chiaro come completano il campo dei reali, ma da questo non si capisce come essi possano “saldare” le parti fino ad avere uno stagno d’acqua e non una spiaggia di sabbia. La domanda dovette aspettare molto tempo prima di avere una risposta, travagliando menti matematiche.¹² Il problema fu affrontato per molti secoli; infatti già Aristotele, riferendosi agli elementi di Euclide, propose una possibile soluzione che divenne modello per le generazioni future. Lo stagirita definì la continuità come una classe speciale di contiguità. Grazie i numeri irrazionali la serie è continua, altrimenti sarebbe contigua se ci fossero solo i numeri razionali. Affermazione che rispecchia molto l’idea

¹¹ Zellini si esprime così: “fenomeno dell’incommensurabilità dava un colpo definitivo alla teoria atomistica dello spazio, perché la concezione dello spazio come insieme di punti o atomi separati avrebbe consentito di conteggiarli, almeno in linea di principio, in modo da stabilire una proporzione razionale tra due qualsiasi grandezza lineari” (Zellini 2022, p.74).

¹² Si dice che Cantor, nel tentativo e continui fallimenti di mostrare che i reali completano il campo dei reali, finì in clinica psichiatrica (cfr. Bottazzini 2018, p.232).

contemporanea di densità e continuità. Consideriamo $\sqrt{2}$ per apprendere quello che Aristotele intende. Eudosso ed Euclide intuirono che il numero irrazionale è quel punto che unisce le due classi di punti, i quali, altrimenti, “avrebbero un salto”:

$$1/1 \quad 7/5 \quad 41/29 \dots \rightarrow \sqrt{2} \leftarrow \dots 99/70 \quad 17/12 \quad 3/2^{13}$$

L’immagine della bilancia rende molto chiara l’idea: sui due piatti ci sono frazioni che si avvicinano alla soluzione reale, con l’obiettivo di creare un perfetto equilibrio, ossia di toccarsi (facendo una media tra le approssimazioni per difetto con quella per eccesso si dovrebbe arrivare al valore (sempre più) esatto di radice di due. In quel caso le due approssimazioni sono coincidenti, ossia non sono più approssimazioni! La bilancia è in perfetto equilibrio, abbiamo ristabilito l’esattezza della matematica e conquistato il continuo: cosa, tuttavia, impossibile a livello pratico in quanto significherebbe che si conoscono tutte le infinite cifre dopo la virgola). Quando i piatti sono perfettamente bilanciati, allora si è ottenuto il valore esatto di radice di due. I numeri irrazionali rendono la retta continua, ma non è conoscibile né il loro valore esatto né il modo in cui rendono omogenea la retta stessa. La differenza aristotelica tra continuità e contiguità è interessante proprio perché verrà ripresa dalla matematica contemporanea con un lessico leggermente differente. Per questo vale la pena spendere due parole.

1.1.1 Il continuo e il contiguo

- A. **Definizione Continuo:** “il *continuo*: è ciò che è contiguo quando limiti delle cose che si toccano diventano un’unica cosa” e
- B. **Definizione Contiguo:** il *contiguo* è “ciò che è consecutivo e in contatto”¹⁴.

¹³ cfr. Zellini 2022, pp.75-76

¹⁴ Moretto 1999, p.91. Entrambe sono definizioni aristoteliche.

Questa definizione di continuità presenta un problema, infatti “si presuppone già che siano continui gli enti che entrano in contatto”¹⁵. Moretto mostra, infatti, che il continuo in questa definizione è “locale”, ossia il segmento è continuo nel punto di congiunzione, ma questo punto assume una forma speciale per un motivo ignoto in quanto riesce, a differenza degli altri punti “normali”, a mettere in contatto quest’ultimi, diventando magicamente “una sintesi di continuo e discontinuo (o discreto)”¹⁶.

La magia non è esoterica: i numeri irrazionali, infatti, si generano in maniera differente rispetto a quelli razionali e la critica di Moretto, nonostante centri il punto, se ne dimentica. I punti “normali”, infatti, possono essere costruiti solamente con l’utilizzo delle quattro operazioni (somma-differenza, moltiplicazione-divisione) induttivamente, partendo dagli assiomi di Peano-Dedekind. I numeri irrazionali invece sono più complessi da costruire, ma non per questo “magici”. Prendiamo il nostro solito numero: la radice di due. Essa è costruibile attraverso una successione infinita (per esempio: $1 + \frac{1}{\{2 + \frac{1}{[2 + (\frac{1}{(2 + \dots)}$). La successione infinita tende al valore esatto che il simbolo è chiamato a rappresentare ($\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{11}$ etc.). Per esprimere quel “tendere”, la matematica si usa di un nuovo operatore: il limite. Proprio quel tendere rende il numero irrazionale un *punto limite*. Si ottiene al più una retta contigua con i numeri razionali, proprio perché non necessitiamo l’operatore del limite. La retta è continua solo grazie agli irrazionali. In un lessico contemporaneo: la prima retta viene chiamata densa, la seconda continua. Nel prossimo paragrafo verrà riformulato quanto è stato appena detto con maggior rigore e con un lessico contemporaneo.

1.1.2 Densità e continuità

Anche una retta densa ha infiniti punti, facile da dimostrare: è sufficiente pensare che data una grandezza si possa dividere per due, per tre etc. Tuttavia, è un infinito di tipo diverso, perché presenta dei salti. La parola “densità” rimanda proprio a questi buchi, molto piccoli, ma comunque presenti e incancellabili se si resta nel dominio dei razionali. La

¹⁵ *Ivi.* p.92

¹⁶ Zellini 2022, p.77

continuità si ottiene solo se si accettano anche l'insieme degli irrazionali, i quali, sono generati in modo diverso rispetto a tutti gli altri insiemi.

Consideriamo come si costruiscono gli insiemi numerici.

I numeri naturali (insieme $\mathbb{N}$) vengono assiomatizzati dai cinque assiomi di Peano-Dedekind. Definendo le quattro operazioni, si ha in mano già tante (infinite) opzioni di polinomi e soluzioni. Con questi assiomi si possono risolvere polinomi come $x-3=0$ o $x^2-4=0$.

Abbiamo subito un problema: non riusciamo a risolvere i polinomi come $10+a=0$, perché la soluzione reale è $a=-10$ (un numero negativo), allora si espande l'insieme dei numeri naturali a quello dei numeri negativi (insieme $\mathbb{Z}$). Ora la sottrazione è sempre possibile. Con lo stesso procedimento si arriva ai numeri razionali positivi o negativi (insieme $\mathbb{Q}$)¹⁷. In $\mathbb{Q}$ possiamo sempre risolvere sottrazioni e divisioni. Come si arriva ora ai numeri irrazionali? Questi numeri non possono non esserci perché sennò il campo dei reali presenta dei buchi ingiustificati. Prendiamo il seguente polinomio: $x^2-2=0$. Si può cercare quanto si vuole la soluzione all'interno dell'insieme $\mathbb{Q}$, ma non si troverà niente, eppure ci deve essere una soluzione¹⁸. La sua necessità si comprende maggiormente se spostiamo il polinomio in un piano cartesiano, costruendo la sua rispettiva funzione $f(x)=x^2-2$. Disegniamo il grafico, il quale mostra chiaramente una parabola, (*figura 1a*). Ci domandiamo: che coordinate ha il punto A? La soluzione sarebbe $A(\sqrt{2}; 0)$ ¹⁹.

Se noi stiamo fermi all'insieme $\mathbb{Q}$, è chiaro che non sappiamo come si comporta la funzione nel punto A. Non abbiamo nessuna ragione di ritenere di poter accettare un punto P, per esempio (2; 2), e di rifiutare invece il punto A (non solo la matematica si troverebbe molto in imbarazzo a spiegare come si dovrebbe comportare la curva sul punto A, ma anche (e proprio per questo) la filosofia: un modello di filosofia della matematica *deve* essere sufficientemente forte per spiegare tanto i numeri razionali quanto quelli

¹⁷ Come si vedrà nel paragrafo sulle grandezze infinitamente piccole, l'insiemistica ha intrinsecamente la possibilità di espandere i propri insiemi. (cfr. Ternullo e Fano (2021)).

¹⁸ la dimostrazione che radice di due è un numero irrazionale si svolge per assurdo: si assume che il polinomio ha una soluzione dentro $\mathbb{Q}$. Si arriva all'assurdo, quindi la soluzione non appartiene a $\mathbb{Q}$

¹⁹ Si è scelto questo esempio perché il punto A ($\sqrt{2}; 0$) è visivamente più chiaro in virtù del fatto che la parabola interseca l'asse delle X in quel punto, ma si poteva benissimo prendere una qualsiasi altra funzione o un altro punto con almeno una x o una y irrazionale. I punti P ($\sqrt{2}; y$) o Q ($x; \sqrt{2}$) ci devono essere perché su quei punti la funzione si comporta esattamente in tutti gli altri punti R ($x; y$), con $x, y \in \mathbb{Q}$. Un argomento simile, per dimostrare l'esistenza dei numeri irrazionali si trova in Zellini 1980, p.63.

irrazionali). La continuità (del piano in questo caso) costringe la matematica a considerare i numeri irrazionali *come se fossero* naturali.

Il piano, quindi, deve essere continuo per essere completo, e per essere continuo ci *devono* essere tutti i numeri reali (insieme $\mathbb{R}$). Caso contrario, la parabola si dovrebbe disegnare con trattini e gli spazi vuoti stanno a simboleggiare il vuoto che intercorre tra un punto e l'altro in un piano denso (*figura 1b*).

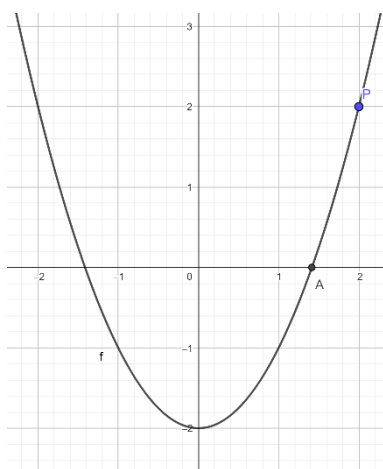


FIGURA 1A

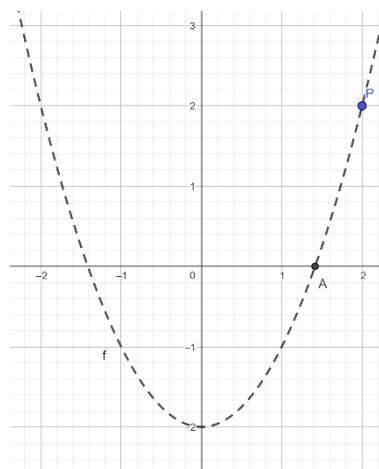


FIGURA 1B

Tutta l'analisi si fonda sull'idea del continuo, senza il quale, i teoremi fondamentali non sono dimostrabili e non si riesce né a derivare né integrare. Il problema dei numeri irrazionali consiste nel fatto che i loro valori non sono conoscibili esattamente e sono necessarie le serie infinite per definirli. L'infinito così irrompe nella matematica insinuandosi dentro ai numeri finiti²⁰.

²⁰ Per esempio, $\sqrt{2}$ può essere rappresentato come $1 + 1/(2 + 1/(2 + 1/2 + \dots))$. Oppure, il π , viene definito in più volte; per esempio: Formula di Viète: $\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \dots$; oppure, formula di Leibniz

$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{17 \cdot 19} \dots$; infine, una definizione con l'integrale: $\pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$. E molti altri. Quindi si capisce che l'algoritmo per calcolare il π -greco, è alquanto problematico ed eccede la finitezza della somma, moltiplicazioni, sottrazione e divisione, operazioni sufficienti per calcolare i numeri appartenenti a $\mathbb{Q}$. Certo: alla fin fine si somma e si divide, si moltiplica e si sottrae, ma sono una iterazione all'infinito e quindi sono numeri non conoscibili esattamente. Per avere un valore in mano bisogna o interrompere la serie in modo del tutto arbitrario o approssimare l'integrale (ancora secondo il volere del

1.2 Problematicità del continuo

È naturale chiedersi, a questo punto perché il continuo è un concetto problematico. Se l'unico problema sono i numeri irrazionali, tutto sommato può essere sorpassato da un formalismo e costruttivismo tale da considerarli come “normali” (non si può conoscere esattamente il π -greco? Uso il π -greco come simbolo per la soluzione dell'integrale e poi tratto quel simbolo come nella stessa maniera in cui tratto il simbolo che indica il numero due, il numero meno quattro o il numero meno tre fatti tredici etc.). La pratica matematica in effetti è soddisfatta dal simbolismo e dalla sua manipolazione, ma se riflettiamo per un momento sulla continuità ci accorgiamo che esso è un concetto intrinsecamente problematico: Leibniz parlava del «labyrintho del continuo», dove la ragione umana si perde; ma perché la ragione umana si dovrebbe smarrire dentro il concetto del continuo? Esso rispecchia la nostra esperienza e quindi dovremmo avere familiarità con esso (si ricordi come esordiva Bell; “We are all familiar with the idea of continuity”). Tutti noi abbiamo familiarità con il continuo perché la nostra vita è inserita proprio dentro a coordinate spazio-temporali continue (come la parabola è continua, se le Y sono lo spazio e le X il tempo, allora abbiamo creato una relazione perfetta spazio-tempo=moto con x - y =funzione).

Prendiamo il caso del tempo. Consideriamo una giornata come un segmento, dove ogni punto rappresenta un'istante (un momento della giornata). Intuitivamente il segmento sarà continuo se e solo se non ci saranno “buchi”, denso il caso contrario. È strano pensare che alle quindici, tredici minuti e due secondi non ci sia stato niente, perché vorrebbe dire che in quell'istante la giornata non è esistita (o che noi non siamo esistiti in quell'istante o che in quel momento c'è stato un *non-tempo*). Si potrebbe fare lo stesso discorso con lo spazio. Consideriamo una stanza: sarebbe assurdo pensare che noi possiamo percepire dei “buchi di nulla” nello spazio o, peggio, siamo sopra ad un *non-spazio* proprio in questo momento, il quale potrebbe essere un *non-momento*, essendo anche il tempo discreto.

La nostra esperienza diretta e immediata (vuoi per umana deficienza di non sufficiente risoluzione visiva nel percepire “i buchi”, vuoi in quanto le nostre strutture

matematico, calcolatore che sia umano o no), oppure accontentarsi il simbolo “ π ” come se fosse il simbolo per “2” o “-198”. Restano, tuttavia, dei punti che appartengono al piano, ma sono inaccessibili.

trascendentali sono fatte per percepire solo il continuo²¹), ci mostra che viviamo in un mondo continuo nello spazio e nel tempo²². Il problema consiste, però, nel fatto che il nostro intelletto non riesce a trattare il continuo adeguatamente e, quando ci prova, “manda in tilt il nostro cervello”, per usare il titolo del capitolo quindici del libro di Eugenia Cheng, *La matematica dell’infinito. Un viaggio ai confini del pensiero matematico*. L’intelletto usa i concetti, i quali sembrano essere insufficienti per spiegare l’esperienza immediata del continuo.

La matematica usa l’intelletto e non appena approccia la complessità del continuo sorgono i problemi. I problemi sono stati raggruppati in tre classi, legate tra di loro. Il primo consiste nel modo in cui non trattiamo il continuo. Se è vero (per ora ammettiamo che sia vero) che la matematica deve avere l’onere di spiegare il continuo, allora essa fallisce perché la matematica ha che fare solo con il discreto. Il secondo problema è genetico al continuo stesso: uno spazio continuo dovrebbe, almeno in linea di principio, essere divisibile all’infinito portando, da un lato ad una serie di paradossi che la logica difficilmente può cogliere (come la parte è uguale al tutto o un infinito contenuto nel finito), dall’altro lato ad una serie di conclusioni inverosimili che rasentano il paradossale legati alla dialettica di cogliere l’infinito con una mente finite o di esperire l’infinito in un mondo finito. Il terzo e ultimo problema è un risultato dei primi due: l’exasperazione della discretizzazione del finito infinite volte, ci costringe ad ammettere grandezze che non sono archimedee: definizioni come “uguali, ma diversi da zero” oppure “la grandezza più piccola possibile”. Le grandezze non archimedee non possono essere ignorate e devono essere prese sul serio. Queste definizioni si fanno spazio difficilmente tra gli enti matematici, come molti matematici e filosofi notarono subito dopo la pubblicazione della *Nova methodus*²³.

²¹ Come argomenta Parsons nella sua lettura intorno a Kant e il continuo (cfr. Parsons 1964).

²² Zellini scrive, spiegando Husserl, “L’esperienza fenomenica implica in sé l’infinità e la potenzialità di un <<continuum>> di apparizioni.” (Zellini 1980, p.73) e Moore discute del rapporto tra continuità-esperienza-matematica nel paragrafo 7.3 (Moore 2019 pp.101-103). Emblematiche sono le parole di Hermann Weyl, “la *continuità* data in un’intuizione immediata (in particolare nel tempo che scorre e nel movimento), come una totalità di stati discreti, occorre costatare, ripeto, che questo problema è, nonostante Dedekind, Cantor e Weierstrass, oggi irrisolto non meno di ieri” (DK p.44-45 [15]) (autore che verrà sarà il protagonista dell’ultimo paragrafo).

²³ tradizionalmente si considera la pubblicazione avvenuta nell’ottobre del 1684 di *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangetibus* di Leibniz come l’inizio del calcolo (cfr. Bottazzini 2018, p.142).

Verranno ora annunciati i tre problemi, uno per volta e nei prossimi capitoli si cercherà di dare strade per possibili soluzioni, affinché si possa afferrare il continuo adeguatamente.

1.2.1 Il primo problema: il discreto

Il discreto è il punto nella retta e il numero nella serie. Discretizzare significa determinare un punto (o il numero). L'osservatore acuto potrebbe obiettare che il rapporto tra continuo e discreto non è un rapporto problematico: parto dal continuo, da esso determino un discreto. Nessun problema sussiste. I punti non portano una vera e propria discretizzazione della retta, semplicemente indicano un punto dentro di essa. Anche all'osservatore acuto, tuttavia, potrebbe sfuggire che discretizzare la retta con un punto significa distruggere il continuo di partenza, il quale sembra che non possa più essere restaurato. Consideriamo un segmento AB e scegliamo un punto di AB che taglia il segmento, tale punto lo chiamo P. Ammettiamo che P non distrugga il continuo, semplicemente limita due porzioni di segmento AP e PB, le quali possono essere unite affinché il segmento e la sua continuità vengano restaurato. L'acutezza dell'osservatore sarà sufficiente a notare che il segmento $AP+PB$ è un po' diverso dal segmento AB; infatti, $AP+PB$ è uguale $AB+P$, ossia abbiamo un "P" di troppo. Potrebbe sembrare una differenza da poco, ma, come diceva Eulero, *rigor geometricus a tantillo errore abhorret!* Un solo punto di differenza è un'approssimazione troppo grande per essere accettata in una disciplina così rigorosa ed esigente come la geometria, specialmente se il ragionamento viene svolto grazie alla definizione di segmento come insieme di punti (definizione che viene fatta tacitamente nel momento in cui si sceglie un punto appartenente al segmento). Dobbiamo scegliere a quale porzione di segmento appartiene P. Assumiamo che giaccia nel segmento avente l'estremo A. Quindi abbiamo $AP+?B$. Il "?" corrisponde ad un altro punto, come esige la definizione di segmento. Nominiamolo C. $AP+CB=AB$, ma così non è più P il punto che divide il segmento AB, contraddicendo le premesse. Le premesse, tuttavia, possono essere modificate talvolta: ammettiamo che l'assunto sia sbagliato e che, quindi, non sia più P a dividere il segmento; ma qui cadiamo nel dubbio: cosa c'è tra P e C? Ossia cos'è che lega P e C. Se diciamo un altro punto, come U (quindi $AB=AP+UB$), allora ci domandiamo cosa c'è tra P e U? Avanti così senza un limite.

L'unico modo per uscirne è riprendere la premessa iniziale “P divide il segmento” e supporre che P appartiene sia alla parte con il punto A sia alla parte con il punto B. Per capire il modo in cui questo è possibile, bisogna passare alla controparte algebrica. Anche nel determinare un numero dentro un intervallo, infatti, discretizza tale intervallo senza un modo di ritornare. Prendiamo l'intervallo $[10;23]$ definito in $\mathbb{R}$. Decido di prendere il numero 11. Il numero undici a quale parte dell'intervallo appartiene? Alla parte dell'estremo inferiore o dalla parte di quello superiore? A livello algebrico si mette l'undici in entrambi le sezioni: $[10;11] - (11;23]$ ²⁴. Il problema principale non consiste nell'arbitrarietà di aver messo l'undici a sinistra e non a destra (avremmo potuto scrivere anche $[10;11)$ e $[11,23]$), ma consiste in quel buco che si è formato tra i due intervalli: cosa c'è tra il primo l'undici e il secondo undici? Nulla? Impossibile! I numeri reali sono continui e completi: qualcosa ci deve essere. Qualcosa ci deve essere e le contraddizioni dell'esempio geometrico riaffiorano anche in quello numerico.

I numeri sono più raffinati dei punti in quanto i punti sono tutti i punti; invece, i numeri vengono raggruppati in diversi insiemi. Un insieme in particolare è nevralgico per il nostro discorso: quello degli irrazionali. Essi sono punti locali che appartengono un po' all'intervallo a destra e un po' all'intervallo a sinistra. O meglio: entrambi gli intervalli contengono una approssimazione (per difetto o per eccesso) del numero irrazionale. La radice di due non appartiene né all'intervallo di destra né a quello di sinistra, ma salda la serie numerica (almeno al livello teorico). Tuttavia, le approssimazioni non fanno altro che discretizzare sempre di più l'intervallo (come facevano il punto P, il punto C, il punto U etc.).

Per determinare questi numeri “cerniera”, i quali rendono la serie continua, si deve discretizzare più volte la serie con varie approssimazioni (si ricordi la figura della bilancia: i piatti non sono mai fermi, mai in equilibrio). A loro volta tali approssimazioni approssimano il continuo stesso nel tentativo di ritornare al continuo di partenza. *Ergo*: solo le approssimazioni possono farci tendere al continuo, ossia solo attraverso il discreto posso concepire il continuo e non viceversa. Questa è la tesi principale di Zellini nel suo libro *Continuo e discreto. storia di un errore*: “il rapporto tra discreto e continuo-scrive Zellini- va inteso non tanto nel senso che un continuo inizialmente assegnato è diviso in

²⁴ Le parentesi quadre “[]” indicano che il punto appartiene all'intervallo, quelle rotonde “()”, o quadrate che non chiudono l'intervallo “[”, “[”, indicano la non appartenenza del punto all'intervallo.

un numero discreto di parti, quanto nel senso che lo stesso continuo viene definito e costruito per mezzo di calcoli sul discreto"²⁵. L'autore continua affermando che gli strumenti che abbiamo a disposizione sono i metodi di approssimazione e le matrici, le quali, ci danno soluzioni sempre più vicine alle soluzioni reali grazie a metodi algoritmici.

Per comprendere la tesi di Zellini, la quale riesce a centrare la problematica del nostro paragrafo, facciamo un esempio. Prendiamo il nostro solito numero irrazionale: $\sqrt{2}$. Come è stato detto più volte, noi non potremmo mai conoscere tutte le cifre dopo il punto, perché sarebbero infinite; quindi, non possiamo conoscere mai il valore esatto di $\sqrt{2}$, ma solo delle sue approssimazioni. Con qualsiasi calcolatrice, schiacciando il "due" e la "radice quadrata", troviamo un valore più o meno esatto come "1,4"; tuttavia 1,4 non è uguale a $\sqrt{2}$, in quanto 1,4 corrisponde a $7/5$, ossia ad un altro punto. Allora prendiamo un'altra approssimazione, più precisa: 1,4142, ma ancora una volta, esso non è esattamente $\sqrt{2}$, rappresenta solo un punto *più* vicino al risultato che vogliamo. Possiamo continuare così all'infinito senza mai raggiungere il valore corrispondente a $\sqrt{2}$, ma solo numeri più grandi o più piccoli che approssimano sempre meglio il valore effettivo della radice di due in eccesso o in difetto²⁶.

Morale della favola: il numero irrazionale è necessario per avere la continuità della retta, ma "l'unico modo in cui possiamo concepire $\sqrt{2}$ è per via di una successione di intervalli nidificati, in cui estremi sono due frazioni successive definite da numeri laterali e diagonali, calcolate con un algoritmo per via di infiniti passi discreti. Il discreto sembra allora aver proceduto il continuo"²⁷. Il procedimento di calcolo dei numeri irrazionali porta addirittura a Zellini ad affermare che "per essere concepito il continuo doveva avere come presupposto il calcolo discreti"²⁸ e l'irrazionale è il *punto limite*, che costringe la matematica a discretizzare sempre di più (fino all'infinito) per riottenere il continuo. Il discreto solo può cogliere il continuo, il quale a sua volta diventa una specie di ideale

²⁵ Zellini 2022, p.22.

²⁶ La radice di due è il nostro P dell'inizio del paragrafo: ecco perché appartiene sia all'intervallo con A che quello con B. A e B hanno solo approssimazioni che tendono verso P, il quale viene "spezzato" tra le due parti.

²⁷ Zellini 2022, p.77.

²⁸ *Ibidem*. Come verrà argomentato grazie a Kant la matematica presuppone il continuo intuitivo, su e grazie ad esso costruisce il continuo matematico (ossia un continuo fatto di discreti punti "saldati"). Il continuo matematico tende all'omogeneità e infinità del continuo intuitivo. Detto con parole più vicine al testo di Zellini: il discreto forma il continuo matematico, il quale si approssima sempre di più al continuo intuitivo. Un esempio pratico per tale approssimazione è proprio l'algoritmo che trova più cifre dei numeri irrazionali, tale algoritmo tenta di portare la bilancia in equilibrio.

regolativo. Rimane aperto il problema: se il discreto è la negazione del continuo, allora come mai siamo costretti a cogliere il continuo con il discreto?

La matematica riesce a lavorare nel momento in cui determina un punto, una retta, un piano, un numero; ossia solo discretizzando ciò che prima era continuo, ma pagando il prezzo di tagliarlo senza la possibilità di ricucirlo²⁹. Il continuo, tuttavia, deve essere presupposto (si è già visto *l'assioma di Dedekind*, il quale è un assioma appunto!). Il problema viene riassunto da Moore in maniera molto tagliente: “una delle ragioni per cui la continuità pone un tale problema è che ciò che è continuo (una linea, ad esempio) sembra essere sia essenzialmente un'unità sia essenzialmente composto da parti”³⁰.

Allora perché la matematica non può escludere il continuo? Perché non può semplicemente costruire i propri enti partendo dal discreto e poi, semmai, arrivare alla continuità? In questo modo il continuo sarebbe derivato e non presupposto³¹.

Due esempi molto semplici evidenziano come il continuo deve essere presupposto e non può essere derivato dal discreto (si deve, piuttosto, presupporre il continuo, si lavora con il discreto e dal discreto si descrive il continuo presupposto).

Esempio primo. Senza presupporre il continuo, la geometria non potrebbe nemmeno costruire le proprie figure. Assumiamo che la geometria escluda il continuo, perché inconcepibile e prova a costruire i suoi elementi. Il punto è per definizione l'elemento più semplice³², dai punti dobbiamo ottenere i segmenti, dai segmenti le rette, dalle rette le superfici e dalle superfici i solidi. Arrivati ai solidi, si ha tutta la geometria, senza postulare nessun tipo di continuo. Assumiamo di avere i punti e dai punti dobbiamo costruire i segmenti. Un segmento può essere definito in due modi: o come un insieme infinito di punti o come un punto che “si muove” generando il segmento prima e la retta poi. La prima definizione porta a concepire un segmento come discreto che difficilmente riesce

²⁹ Significative le parole di Weyl “dopo aver frantumato il continuo in singoli punti, diventa ora difficile ricostruire a posteriori un equivalente concettuale della connessione della connessione dei singoli punti.” (DK, p.161 [79]).

³⁰ Moore 2019, pp.101-102: “one of the reasons that continuity poses such a problem is that what is continuous (a line, say) seems to be both essentially a unity and essentially composed of parts”.

³¹ Zellini conclude il suo ultimo libro affermando che è il continuo una approssimazione del discreto, non il discreto un'approssimazione del continuo.

³² Qui vorrei far notare che non pochi matematici e filosofi hanno sostenuto che dal punto non si può ottenere nulla in nessun modo. Per citarne due: Bois-Reymond il quale afferma che i punti non possono mai formare una distanza, anche se sono infiniti (“points are just dimensionless, and therefore an arbitrarily dense sequence of points can never become a distance.” (Bell 2019, p.151 cita Bois-Reymond (1882), *Die allgemeine Functionentheorie*, p.114.)). Brouwer addirittura riteneva che il continuo non si potesse costruire dal discreto, ossia non possiamo avere un segmento se partiamo dal punto sia che esso sia costruito come somma di punti sia che esso sia costruito come un punto in movimento (cfr. Bell 2019, pp. 178-179).

a cogliere la continuità in quanto, per quanto ci concentriamo a mettere tanti punti vicini, avremmo sempre “degli spazi” tra un punto all’altro. L’unico modo è postulare, in maniera del tutto arbitraria (ed eccedendo completamente alla costruzione del segmento come insieme di punti), dei punti “locali”, speciali che fungono da cerniera, cadendo, però, in una critica simile a quella fatta da Moretto ad Aristotele.

La seconda definizione, invece, cattura il continuo, ma pecca di esattezza; possiamo domandarci che cosa significhi “muoversi” in un mondo senza profondità o dimensione come quello piano. Anche accettando come valido il suddetto linguaggio metaforico, rimane poco chiaro come possa un punto (avente nessuna dimensione per definizione ($=0$), generare qualcosa con dimensione ($=1,2$ o 3). Sarebbe come continuare a camminare nella speranza di volare ad un certo punto. Se aggiungo dei pezzi al segmento percorso otterrò nient’altro che un segmento più lungo, ma mai una superficie o un solido, ossia resterò sempre nella stessa dimensione e per il punto questa dimensione è il *nulla*!³³

Ammettiamo che il punto riesca a genere le rette in qualche modo a noi sconosciuto. Il punto, tuttavia, deve muoversi in un piano che di per sé è continuo, sennò “si fermerebbe” al primo buco presente. Quindi la continuità del piano precede il punto. Perché il piano è continuo? Come è stato costruito? Da altri punti? È chiaro che si può andare avanti senza limite e senza nessuna soluzione con questo genere di domande. Il discreto forma le figure (un quadrato limita il piano in cui è disegnato, tanto quanto il punto limita il segmento; ossia discretizzando), ma bisogna avere già il piano dove poter discretizzare

³³ Qui vorrei sostenere la mia tesi ricollegandomi alle critiche fatte storicamente ad Aristotele sulla dimostrazione che non si può andare oltre la terza dimensione. Vale la pena osservarla perché mette in chiaro il problema nella costruzione delle figure come “oggetti (punti, linee etc..) in movimento”. L’argomento di Aristotele, per dimostrare che non si può andare al di là della terza dimensione, viene descritto da D’Amore e Sbaragli così: “Se si muove un punto (oggetto di dimensione 0) si ottiene un segmento (oggetto di dimensione 1); se si muove (in modo opportuno) il segmento si ottiene un quadro (oggetto di dimensione 2); se si muove (in qualsiasi modo) un cubo si ottiene un altro oggetto di dimensione 3.” (D’Amore e Sbaragli 2017, p.212) Con ragione, però, gli autori fanno notare che il discorso è fallace perché “con un’argomentazione come questa non si giunge affatto a dimostrare alcuna impossibilità: in effetti, se si muovesse il segmento sulla stessa direzione cui appartiene, si avrebbe un nuovo segmento, semmai più lungo, ma pur sempre di dimensione 1” (*ibidem.*). Spingendo lo stesso ragionamento il punto non avrebbe il potere di generare nulla dal suo movimento, in quanto sommando tanti zeri si ottiene sempre zero. La problematicità del punto come avente il potere di generare qualcosa, viene analizzato, senza dando una possibile risoluzione da Zellini (cfr. Zellini 2022, capitolo 13). Il punto sembrerebbe quel nulla che non può essere nulla. Come si vedrà nell’ultimo paragrafo, la difficoltà di definire un punto coerente con la formazione della retta (e viceversa la divisione della retta fino all’ultimo termine che è proprio il punto) è congeniale ad una discretizzazione (o divisione) che può essere protratta all’infinito senza mai raggiungere l’ultimo elemento. Ecco una prima formulazione del differenziale con un metodo del tutto intuitivo. L’ultimo termine che non si annulla. Un nulla che vale molto, forse troppo contando quanti menti geniali si sono dovuti arrendere di fronte alla sua incomprensibilità, verso la sua nullità in cui c’era rinchiuso tutto il segreto del continuo e quindi della matematica.

e tale piano deve essere continuo. Ossia se si parte, da una figura già formata, per esempio un cubo, allora si ottiene con facilità il piano, segmento e punto. Il presupposto, ancora una volta, è che il cubo sia continuo, sennò perdiamo tanto la figura come una figura (se il piano in cui giace il cubo è discreta, allora abbiamo tanti pezzi che formano tante figure, non una figura unica) quanto la possibilità di tagliare arbitrariamente la figura per ottenere piani segmenti etc.³⁴

Finendo il ragionamento: una volta che abbiamo un solido, possiamo costruire piani, segmenti e punti, semplicemente discretizzando l'intera figura, la quale, allora, si può considerare come un insieme di punti, o meglio: si può sostenere che la figura sia fatta di punti. I punti sono entità reali non meno del cubo stesso, sennò che cosa è quella cosa che noi chiamiamo vertice? E se una retta taglia i lati di un cubo in due punti, quei due punti che cosa sono? Discreto e continuo si rimandano reciprocamente tanto che non si può ignorare il primo per comprendere il secondo o evitare la continuità per costruire il discreto.

L'esempio secondo viene proprio dall'analisi: il teorema degli zeri di una funzione. Il teorema afferma “se f è una funzione *continua* in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$ e negli estremi di tale intervallo assume valori di segno opposto, allora esiste almeno un punto c , interno all'intervallo, in cui f si annulla”. È chiaro che la continuità è un presupposto necessario, altrimenti potrebbe essere che proprio in $f(c)$ ci sia un salto (vedere ultimo paragrafo per una definizione più rigorosa di “salto”) della funzione la quale, dunque, non ha nessun zero.

È opportuno a questo punto aprire una breve parentesi. Da questi esempi si vede allora che la matematica presuppone il continuo e poi costruisce il discreto. Ma allora perché è proprio la matematica ad avere l'onere di capire il continuo? Sembrerebbe che sia un'altra disciplina a dover trattare il continuo e che, quindi, Zellini ha intrapreso una strada sbagliata; l'autore, infatti, quando afferma “il continuo [deve essere] concepito come approssimazione del discreto”³⁵, intende non nel senso che abbiamo inizialmente il discreto, lo uniamo con qualche esoterica conoscenza e poi otteniamo qualcosa di simile al continuo, piuttosto intende che attraverso il calcolo otteniamo approssimazioni (sempre) più vicine al continuo. Le approssimazioni possono essere sempre migliorate quindi

³⁴ Io posso tagliare il cubo C nel punto P nel lato l , per avere un piano se e solo se sono sicuro che P appartiene al cubo, e questa garanzia posso averla solo se C è continuo.

³⁵ Zellini 2022, p.327.

avremo un continuo sempre più vicino al continuo “completo”. L’impossibilità della matematica di afferrare il continuo completamente dipende dalle nostre strutture trascendentali, non dallo statuto della disciplina che è troppo piccola rispetto ad un concetto così grande.

Zellini si concentra sulle matrici come strumento per concepire il continuo, in questo elaborato, invece, si analizzerà un altro strumento: il calcolo differenziale. La scelta non è del tutto arbitraria. Il continuo può essere tagliato e frantumato. Non abbiamo un limite nella divisione, il discreto può prendere il sopravvento e la divisione andare avanti all’infinito. I differenziali sono proprio “gli ultimi termini” di questa divisione. Essi sono enti matematici che hanno il potenziale di dare ragione alla discretizzazione *senza limite* del continuo. I più piccoli elementi della divisione. Chiaramente è una definizione che presenta delle problematicità (partendo dal fatto che mettono un limite a un processo illimitato), ma la sfida è vedere se la matematica può concepire questi differenziali rigorosamente, dentro i limiti della ragione umana imposti dalla filosofia critica. Non a caso si è voluto inserire un lessico fortemente kantiano: il prossimo capitolo sarà proprio Kant a mostrare come la filosofia, entro a quali limiti, possa comprendere il continuo attraverso gli enti matematici. Kant fornisce un modello sufficientemente forte per comprendere il rapporto continuo-discreto nella matematica. Anche questo punto verrà approfondito successivamente, quindi è conveniente chiudere la parentesi e concentrarsi sul paragrafo, mantenendo in piedi l’assunzione che si è fatta: la matematica ha gli strumenti per comprendere il continuo.

Il discreto è un problema non soltanto perché “tradisce il continuo” implicando “una fondamentale falsificazione della continuità (sia esperienziale che fisica), a causa del suo impegno nella nozione di punto”³⁶, ma anche perché ci si può domandare: quanto posso discretizzare un segmento? Ossia quanto posso dividerlo, ammettendo *a priori* che esso sia continuo? Se è continuo, allora posso dividerlo all’infinito se così non fosse, una volta finito di dividere, avremmo tanti piccoli “atomi”, uno a fianco all’altro e tra gli atomi avremmo del vuoto. Gli atomi non sarebbero più legati tra di loro come non lo sono tante biglie dentro un sacchetto. Il processo di discretizzazione ha distrutto il continuo, sgretolando con esso anche sé stesso (infatti ho potuto dividere proprio perché ho

³⁶ Moore 2019, p.102: “He held that mathematics involved a fundamental falsification of (both experiential and physical) continuity, because of its commitment to the notion of a point”.

presupposto il continuo). E poi gli atomi in sé, sono continui? Se sì, allora possono essere spezzati nuovamente; e così all'infinito. Dentro il continuo si insinua l'infinito: affrontare il continuo, quindi, significa affrontare l'infinito con tutti i problemi che si porta appresso.

1.2.2 Il secondo problema: il continuo e l'infinito

Una retta densa, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, è fatta da infiniti punti e già questo presenta un problema. Prendiamo, infatti, il segmento AB. Possiamo dividerlo a metà nel punto C, poi metà ancora e ancora e ancora etc. Possiamo andare potenzialmente avanti all'infinito. Tuttavia, i numeri razionali sono numerabili (ossia si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali). Una infinità di questo genere è abbastanza facile da gestire, perché può essere descritta con le stesse proprietà dei numeri naturali (i numeri più facili da comprendere) e si possono costruire proporzioni. Una retta densa può essere divisa all'infinito potenzialmente, ma non contiene infinite parti perché la cardinalità dei razionali è la stessa di quella dei numeri naturali e, quindi, la divisione, almeno a livello teorico, ha un limite proprio perché gli “atomi” che compongono la retta densa sono contabili. Molti paradossi dell'infinito non sorgono (come quello di Duns Scoto) e l'infinito è semplicemente un infinito per addizione (o per divisione) il quale ottiene sempre numeri esprimibili con valori esatti. L'infinito dentro una retta densa è un infinito che può essere anche trascurato in quanto non è intrinseco agli elementi della retta stessa.

La cosa si complica con i numeri irrazionali. La retta diventa continua e quindi non ci sono atomi né particelle prime che compongono lo spazio. I paradossi più classici sorgono come quello di Duns Scoto e di Zenone.³⁷ Se voglio il continuo, lo spazio deve poter essere diviso all'infinito. Questo tipo di infinito è un infinito “più grande” rispetto all'infinito della retta solo densa (già questo è alquanto paradossale), infatti Cantor

³⁷ Potrebbe sembrare che a Zenone basti una retta divisibile sempre a metà per ottenere il paradosso, ma in realtà non è così! Se la retta non è continua, la tartaruga si ferma al primo buco e, potendo saltare da atomo ad atomo come sassi di uno stagno, prima poi verrebbe raggiunta da Achille in virtù del fatto che i sassi sono un numero esatto. Alla peggio Achille ci metterà un po' più di tempo per raggiungere l'animale. Alla fin fine, però, si ritroverà sopra al guscio a parlare con l'animale riposando dopo il grande saltellio. Il segmento tra Achille e la tartaruga deve essere continuo! Così e solo così sorge il paradosso. (Cfr. Bottazzini 2018, capitolo 3).

dimostrò, grazie la famosa *dimostrazione della diagonale*³⁸, che l'infinito dei numeri naturali è di ordine uguale rispetto all'infinità dei numeri negativi e razionali, ma inferiore rispetto all'infinità dei numeri irrazionali (e quindi dei numeri reali). Risultato: i numeri reali non sono numerabili (non esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri reali e quello dei numeri naturali)³⁹. La densità rimanda all'immagine di un vaso pieno di sabbia il quale, in linea di principio, può essere svuotato per mettere ogni granello di sabbia affianco ad un altro così che possa essere contato quanti granelli di sabbia contiene il vaso. Per quanto possa sembrare assurdo, Cantor, dimostra che, i numeri razionali sono numerabili, ossia, se avessimo abbastanza tempo e forze a disposizione, riusciremmo a contare ogni numero razionale. Ragionamento che non può essere seguito se avessimo i numeri reali.

Le cose stanno in modo diverso se la retta è continua. Il problema si acutizza non tanto perché i punti sono infiniti (ossia che posso dividere all'infinito la retta. In questo caso la divisione non troverà mai gli irrazionali), ma perché ci sono dei numeri che, pur sommando infiniti numeri razionali, non ottengono il numero desiderato, trasformando quel punto in un "punto limite che non appartiene né all'una né all'altra delle due infinite successioni che lo definiscono"⁴⁰. Il *punto limite* mette una fine alla successione che è infinita. Sembra allora proprio una quadratura del cerchio: abbiamo l'infinito dentro ogni finito, in quanto ogni finito è continuo e il continuo, discretizzato, produce la divisione in infinite parti, le quali, sommate, non ottengono il *punto limite*. Tale punto deve avere un suo posto nel mondo degli enti matematici non diverso da quello occupato dai numeri razionali (lo stesso Kant ritiene che i numeri irrazionali, pur avendo infinite approssimazioni sono "reali" come i numeri razionali⁴¹).

³⁸ La dimostrazione è molto famosa ed è tratta in qualsiasi libro che parli di insiemistica o infinito. Io rinvio a Corry perché presenta sia la dimostrazione meramente matematica e inserisce la stessa in un contesto storico più ampio. Per un'analisi anche storica rimando a Corry 2015, pp.343-352, per un'analisi anche storica. Per solamente la dimostrazione vedere l'Appendice 12.1 dello stesso libro (cfr. *Ivi.*, pp.371-374).

³⁹ Un insieme si dice numerabile se si può mettere in corrispondenza biunivoca l'insieme da numerare e l'insieme dei numeri naturali. Quindi l'insieme dei colori {giallo, rosso, blu} è numerabile perché possiamo metterlo in corrispondenza 1-1 con l'insieme {1,2,3}, così come ogni insieme finito. L'insieme $\mathbb{Q}$ (numeri negativi) è numerabile, ossia l'infinità di $\mathbb{Q}$ = infinità di $\mathbb{N}$ (Si direbbe in gergo tecnico: la cardinalità di $\mathbb{N}$ =cardinalità di $\mathbb{Q}$, (per gli insiemi finiti la cardinalità è uguale al numero degli elementi, contati solo una volta)), anche l'insieme $\mathbb{Z}$ (numeri fratti sia negativi che positivi) è numerabile. La cosa si complica con l'insieme $\mathbb{R}$ (reali positivi e negativi), i quali non sono numerabili, ossia hanno un infinito "più grande" rispetto ai numeri razionali. (cfr. Corry 2015, p.366).

⁴⁰ Zellini 1980, p.70.

⁴¹ Cfr. Moretto 1999, pp.233-241. Tanto è vero che l'insieme di tutti i numeri (irrazionali compresi) si chiama insieme dei numeri reali.

Sembrerebbe che il tanto agognato infinito non si trovi che “dentro” ogni segmento, porzione, parte di superficie e, in ultima istanza, in ogni oggetto finito (se si mantiene l’isomorfismo spazio geometrico-mondo concreto; infatti, anche qualsiasi oggetto può essere separato all’infinito dall’intelletto, per quanto la nostra vista non può penetrare fino agli atomi, nucleo, elettroni etc.). Questo ultimo punto sembra molto contro intuitivo che rasenta l’assurdo: come fa una mente finita a cogliere (non solo a livello astratto, ma proprio nell’esperienza di tutti i giorni) l’infinito?

Riassumendo: il continuo si configura con una infinità stratificata su due livelli. Da un lato il continuo porta alla possibilità di separare all’infinito il segmento o, detta altrimenti, se un finito è continuo, allora dentro quel finito, ci sono infinite parti. Dall’altra parte il continuo presenta dei punti che “mettono in moto” il segmento, ossia ci sono dei punti speciali che sono convergenti (ossia tutti i punti “si muovono” verso quel limite), rappresentabili (con simboli, come diagonale etc.), ma con un valore mai accessibile del tutto. Numeri finiti, ma che sono risultati da somme infinite. Si rasenta il paradossale quando, mantenuto l’isomorfismo continuo matematico-continuo fenomenico, si pretende di “poter percepire” (almeno in potenza) l’infinito in ogni porzione continua del mondo fenomenico.

1.2.3 Il terzo problema: il continuo e le grandezze non archimedee

Il processo di discretizzazione all’infinito del continuo può portare a grandezze molto strane. Fino ad ora si è parlato solamente di numeri reali, ma di fatto ci sono delle grandezze che non appartengono ai reali, ma sono logicamente conseguenti al continuo, tanto da diventare problematico negare queste bizzarre grandezze mantenendo il continuo.

Si parte con la definizione delle grandezze archimedee (tutti i numeri i reali), per poi passare a quelle non archimedee.

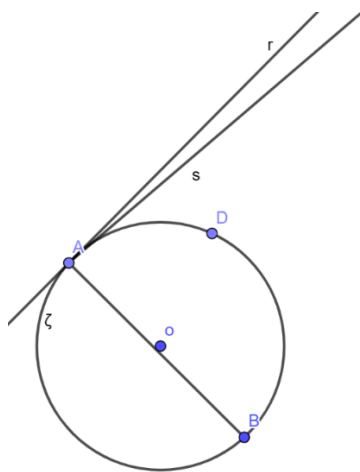
Definizione grandezza archimedeo (GA): “date due quantità reali a, b , con $a < b$, esiste sempre una quantità intera n , tale che $na > b$ ” ossia “date due grandezze omogenee A e B

tale che $A < B$, esiste sempre un numero naturale tale che la n -esima parte di B è minore di A , cioè $\frac{1}{n}B < A$ ⁴².

Quanto è stato appena enunciato è l'assioma di Eudosso-Archimede. Ternullo e Fano fanno notare, dopo aver enunciato l'assioma, che dal XVII secolo le grandezze non-archimedee ebbero grande fortuna tra i matematici e i filosofi. Queste grandezze non rispettano tale assioma (ossia se $A > B$, ma A non è archimedea, allora $nA > B$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

Anche se le grandezze non-archimedee scoppiarono nella modernità (le grandezze non-archimedee vennero chiamate infinitesimali o numeri infiniti da quando Leibniz inventò il *calcolo*, ed ebbero da allora una grande fortuna sia a livello matematico che filosofico), già Euclide conosceva questo tipo di grandezze, come D'amore e Sbaragli fanno notare. Una veloce illustrazione delle grandezze non archimedee in geometria le renderanno più intuibili e accessibili, a differenza di una formulazione immediatamente algebrica, la quale potrebbe apparire un po' più astrusa.

Euclide, nel libro III, dimostra che l'angolo di contingenza (un angolo mistilineo) è minore di qualsiasi angolo rettilineo (*figura 2*).



ζ =circonferenza

AB=diametro

O=centro

$D \in \zeta$

r è perpendicolare ad AB

r con l'arco AB dalla parte di D forma l'angolo di contingenza (sAD)

la retta incontra la circonferenza in A e forma con il diametro AB l'angolo rettilineo (sAB)

Euclide dimostra che $rAD < sAB$, quindi non esiste nessun numero naturale n tale che $\frac{1}{n}(sAB) < rAD$

FIGURA 2

⁴² Prima definizione, Ternullo e Fano 2021, p.85. Seconda definizione, D'Amore e Sbaragli 2017, p.252.

Sorvolando sulla dimostrazione, D'Amore e Sbaragli constatano che “è fin troppo chiaro che si sta parlando di infinitesimi”⁴³, in quanto non esiste nessun numero naturale n tale che $\frac{1}{n}$ (sAB) < rAD. Si può rimpicciolire quanto si vuole l'angolo rettilineo o ingrandire quello di contingenza, ma il primo non raggiungerà mai il secondo e il secondo non supererà mai il primo. Questo è un fatto molto controintuitivo, ma non per questo meno dimostrato. A questo punto si può andare diretti verso una formulazione algebrica di tali grandezze, avendo in mente l'intuizione di base chiarificata grazie alla geometria.

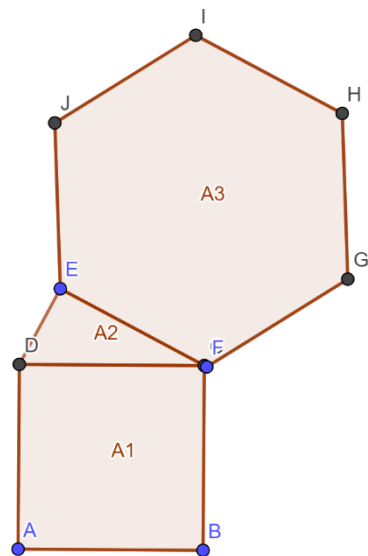
I differenziali, o le grandezze infinitesimali, sono la stessa cosa degli angoli contingenti. La simbologia “ dx ” venne introdotta da Leibniz. La controparte di Newton è il fluente (Newton usò una simbologia che ebbe meno fortuna di quella di Leibniz, la quale divenne canonica⁴⁴). Gli infinitesimali vennero inventati per risolvere due problemi geometrici di estrema importanza e connessi tra di loro, come Leibniz notò fin da subito: il calcolo della tangente di un qualsiasi punto di una curva data e l'area di una qualsiasi figura. Vediamo velocemente quale sia l'intuizione di Leibniz partendo dal secondo problema: abbiamo una figura e dobbiamo calcolarne l'aria⁴⁵.

Se dobbiamo calcolare un'area di un triangolo o di un rettangolo è facile: il primo è *base per altezza diviso due*, il secondo è *base per altezza*; se dobbiamo calcolare l'area di un trapezio dobbiamo, invece, spendere un passaggio in più. Il trapezio equilatero rettangolo, per esempio, può essere considerato come un quadrato “incollato” ad un triangolo sulla sua altezza, pertanto $A_{\text{trapezio}} = A_{\text{triangolo}} + A_{\text{quadrato}}$. A questo punto è sufficiente fare semplici passi di semplificazione algebrica e otteniamo l'area del trapezio. La cosa si complica un pochino (ma nemmeno troppo), se dobbiamo calcolare l'area di una figura composta (*figura 3*). La *figura 3* può essere vista come un quadrato incollato ad un triangolo e ad un ottagono. Per calcolarne l'aria è sufficiente spezzare la figura nelle tre figure e poi calcolarne le aree separatamente; quindi, l'area della figura tre è uguale alla somma delle tre aree.

⁴³ D'Amore e Sbaragli 2017, p.253.

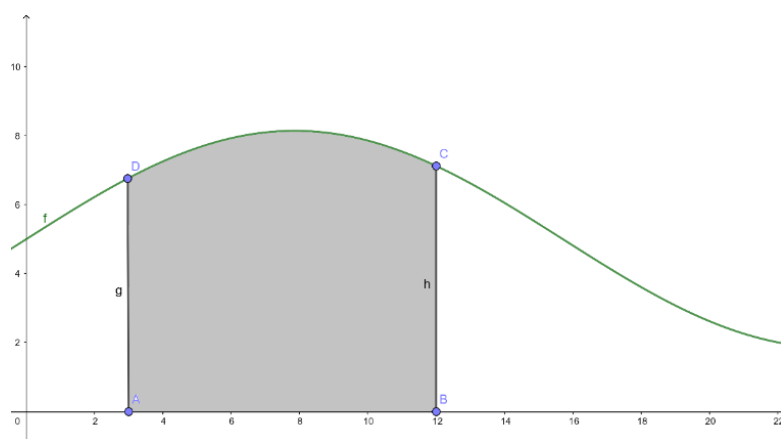
⁴⁴ Per farsi un'idea dell'evoluzione del formalismo di Newton rimando al manuale di Boyer. (cfr. Boyer 1968, pp.571-576). Si vedrà nel prossimo capitolo che Kant userà la parola “fluente” per rifarsi ai differenziali (cfr. *KrV*, B207/A166-B210/A168, pp.154-155 [244-245]).

⁴⁵ Mi sto rifacendo alla spiegazione data da D'Amore e Sbaragli. (cfr. D'Amore e Sbaragli 2019, pp.268-272).



$$A_{TOT} = A_1 + A_2 + A_3$$

FIGURA 3



- $y=f(x)$
- A (a, 0)
- B (b, 0)
- D (a, f(a))
- C (b, f(b))

FIGURA 4

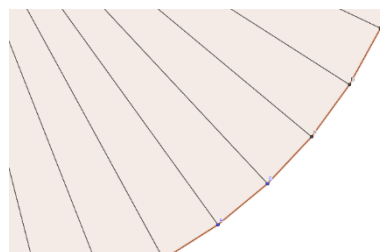
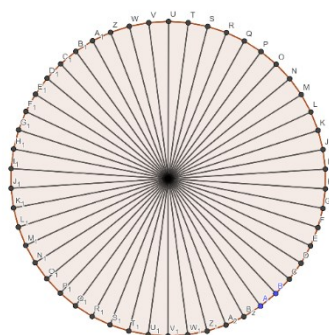


FIGURA 5

Le cose si complicano veramente quando la figura è mistilinea, ossia presenta sia linee “dritte” che linee “curve”. Tenendo a mente il modo di ragionare delle figure rettilinee, proviamo a calcolare l’area di una figura mistilinea (*figura 4*) disegnata su un piano cartesiano. Quindi, dobbiamo provare a “spezzare” la curva in figure di cui conosciamo il modo di calcolare l’area. La figura con l’area più facile da calcolare è il rettangolo (*base per altezza*): questa fu l’intuizione di Leibniz.

Il filosofo tedesco, si immaginò di disegnare n -rettangoli con la base di ugual misura, dentro e fuori dall’area della curva (*figura 4*), avente come *altezza* $f(x)$ e come *base* il segmento ottenuto dividendo AB n -volte. Si immagina l’area della curva come la media tra la somma delle aree dei rettangoli inscritti (sarà un’area approssimata per difetto) con la somma di rettangolini circoscritti (l’area della curva approssimata per eccesso). In questo modo avremo un’area approssimativamente equivalente all’area della curva. Aumentando i rettangoli, l’approssimazione si fa sempre più accettabile (più vicina alla soluzione reale), esattamente come gli antichi calcolavano l’area del cerchio: inscrivevano (o circoscrivevano) poligoni regolari nella circonferenza. L’area del poligono era l’approssimazione dell’area del cerchio. Più sono i lati del poligono, meno il valore ottenuto dista dall’area effettiva; infatti, si può facilmente notare che, usando programmi come *geogebra* o usando riga e compasso (per quanto a mano possa risultare complesso) un poligono regolare con mille lati sembra proprio un cerchio (nella *figura 5* è disegnato un poligono avente 50 lati).

Ultimo passaggio per calcolare l’area colorata in grigio della *figura 4*: cosa succede se dividiamo il segmento AB in infiniti lati? Possiamo dire che “l’area della figura ABCD è il limite, per n che tende all’infinito, della somma delle aree dei rettangoli così determinati, quando la misura di tali rettangoli tende a zero”⁴⁶. In simboli:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Dove il simbolo “ $\int$ ” è una “S” grande per indicare somma e dx è la larghezza dei rettangoli. Eccolo il differenziale! Ma che cos’è effettivamente? Esso è la larghezza più piccola

⁴⁶ D’Amore e Sbaragli 2019, p.271. La base dei rettangoli è sempre più piccola all’aumento dei rettangoli inscritti, quindi, a rigor di logica, avranno sempre valori più vicini a 0 ($1 \rightarrow 0.9 \rightarrow 0.09 \rightarrow 0.000009 \rightarrow \text{etc.}$).

possibile affinché il valore della somma delle aree dei rettangolini sia la stessa del valore dell'area della curva. Esso lo ritroviamo nel calcolo del coefficiente angolare della tangente di un punto in una qualsiasi curva⁴⁷.

Si prenda una curva $f(x)$ e un punto P di coordinate $(x; y)$. L'obiettivo è quello di trovare la tangente di P. Si consideri allora un altro punto chiamato P_2 , di coordinate $(x + \Delta x; y + \Delta y)$, Δx e Δy sono gli incrementi delle variabili x e y rispettivamente (figura 6).

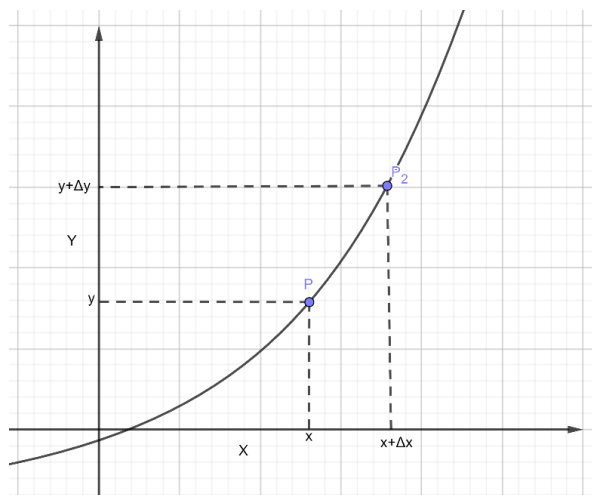


FIGURA 6

La retta che collega P con P_2 è la secante della curva. Si può comprendere facilmente che P_2 si avvicina a P nel momento in cui si diminuisce Δx e Δy . A forza di diminuire si otterranno approssimazioni sempre più precise della retta tangente che passa per P. Cosa succede se l'incremento è infinitamente piccolo? Ossia se Δx e Δy hanno come valore dx e dy , (due grandezze più piccole di qualsiasi grandezza data). Rispondendo a questa domanda si arriva all'idea alla base dei differenziali, ma prima continuiamo a vedere come Leibniz procede. L'equazione della secante è $y = y_0 + \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, dove y_0 è il valore di $f(x)$ quando $x=0$. La derivata prima, la quale definisce la retta tangente in un punto, si

⁴⁷ In questo caso mi rifaccio al libro di Ternullo e Fano 2021 pp. 86-91, perché è più chiaro e completo sull'argomento rispetto ai manuali di D'Amore e Sbaragli, i quali si fermano (anche il manuale IV) all'analisi *standard*, mancando così, di un'analisi storicamente e teoreticamente completa dello statuto delle grandezze non-archimedee. Da notare che il differenziale mette in comune i due problemi: quello del calcolo delle tangenti e quello del calcolo delle aree.

definisce proprio con $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ quando Δx tende a 0, ossia quando l'incremento è quasi nullo.

Come si può notare, tuttavia l'espressione “ Δx tende a 0” è problematica, perché ad un certo punto esso sarà uguale a 0, ma allora si avrà la forma indeterminata 0/0 ($\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, con $\Delta x=0$, quindi $\frac{f(x+0)-f(x)}{0} = \frac{f(x)-f(x)}{0} = \frac{0}{0}$). Leibniz, allora, nella *Nova methodus pro maximis et minimis* (1684), deve definire il differenziale come “quantità minori di qualunque quantità data, ma diverse da 0”⁴⁸. In questo modo ovvia il problema e la tangente della curva in P “può essere vista come la *secante* che passa per i due punti, *infinitamente vicini*, ma *non coincidenti*, $P=(x_0 + y_0)$ e $P_2=(x_0+ dx, y_0+dy)$, la cui equazione [della tangente] è: $y = y_0 + \frac{dy}{dx} (x - x_0)$.”⁴⁹

Quindi i differenziali sono grandezze più piccole di qualsiasi altra grandezza e permettono di considerare la tangente *come se fosse* una secante dove i due punti distano di appena un differenziale. Emblematica è la risposta di Leibniz di fronte alle critiche secondo le quali il suo metodo fosse approssimativo: “Leibniz-scrive Bottazzini- riaffermava esplicitamente che due quantità che differiscono per un differenziale sono uguali, così come sono uguali una linea e la stessa linea cui si *aggiunge punto*”⁵⁰. Il punto, così inteso, è quella quantità che non è quantità⁵¹. Leibniz usa un'altra espressione molto evocativa per aiutarci a comprendere l'idea alla base del differenziale: ci chiede se una montagna diventa più alta solo perché aggiungiamo un granello di polvere sulla cima. Il differenziale è quel granello di polvere che, per trovare la retta tangente, deve essere considerato, ma può essere ignorato nell'economia di tutta la montagna. Come la citazione di Eulero evidenzia (*rigor geometricus a tantillo errore abhorret*), il differenziale pecca di rigore in quanto anche quel granello di polvere deve essere considerato come “reale” per la matematica se non vuole essere una disciplina approssimativa. Nel prossimo capitolo si vedrà quanto potente sia il *calcolo* e nel terzo capitolo tutte le incongruenze degli infinitesimali riaffioreranno e verranno analizzate delle possibili soluzioni con occhio critico, affinché si possa comprendere un po' meglio il continuo.

⁴⁸ Ternullo e Fano 2021, p.88.

⁴⁹ *Ibidem*.

⁵⁰ Bottazzini 2005, p.27. Enfasi mia.

⁵¹ Si veda la nota 33 a pagina 32.

Anche se si accettassero le incongruenze degli infinitesimali, rimangono aperte questioni di stampo filosofico, come “che natura hanno i numeri infinitesimali?” Si era visto poc’anzi che i numeri irrazionali completavano la retta, ma se ci sono anche grandezze più piccole delle grandezze reali, allora, gli irrazionali non bastano per completare tutti i punti in mano⁵². Non a caso Cantor, artefice della completezza della retta con i numeri irrazionali, è un campione a minimizzare l’importanza delle grandezze infinitesimali per la retta⁵³.

Nello scorso secolo, inoltre, la legittimità degli infinitesimali non appoggerà più solo al loro valore euristico (per molto tempo gli infinitesimali, infatti, venivano accettati dai matematici solo per il loro valore pragmatico, i quali facevano leva sull’argomento tanto semplicistico quanto banale: “funzionano, quindi sono veri”). Grazie a Robinson, infatti, gli infinitesimali vennero costruiti su leggi logiche, sfruttando sapientemente una proprietà essenziale del *linguaggio* di primo ordine: esso “è fatto in maniera tale che gli assiomi risultano *veri* anche in un’estensione del campo ordinato dei reali, che definiremo $\mathbb{R}^*$ ”⁵⁴. Il campo di $\mathbb{R}^*$ (ossia il campo dei reali non-standard) è più ampio di $\mathbb{R}$, perché oltre ai numeri i reali ci sono anche le grandezze infinitesimali. Il risultato: non abbiamo motivo di accettare i numeri reali rifiutando i numeri infinitesimali. Per la filosofia della matematica si traduce con il fatto che i numeri infinitesimali sono enti dello stesso statuto almeno metafisico (e forse anche ontologico) dei numeri reali. Il guadagno è enorme e Robinson rilegge sé stesso come ultimo capitolo della grande secolare battaglia alla comprensione dei differenziali.

Proprio la continuità ci permette di assumere che ci siano grandezze non archimedee, le quali sono la conseguenza cronica della possibilità di una discretizzazione all’infinito. Si può affermare che il “problema del differenziale” sia il risultato dei due problemi

⁵² Si nota come qui si usi la parola “grandezza” come sinonimo di “numero”. Nella storia della matematica le cose coincidevano, ora, invece, non più grazie alle definizioni di Zermelo e von Neumann di numeri, i quali non sono nient’altro che insiemi. Tuttavia, questo eccede dal capitolo il quale vuole comprendere semplicemente la continuità, che sia una “continuità astratta” o una “continuità di grandezze”. Prendiamo l’esempio degli angoli contingenti: poco importa se l’angolo contingente e l’angolo rettilineo siano considerati entrambi delle grandezze talvolta o delle “entità astratte” un’altra volta. In entrambi i casi abbiamo un valore più piccolo di qualsiasi altro valore, il che è altamente problematico come si vedrà fra poco. Quindi, fino alla fine del paragrafo, grandezza e numero saranno considerati come due sinonimi

⁵³ Bell scrive “Cantor believed that the theory of transfinite numbers could be employed to explode the concept of infinitesimal once and for all. Cantor’s specific aim was to refute all attempts at introducing infinitesimals through the abandoning of the Archimedean principle—i.e. the assertion that for any positive real numbers $a < b$, there is a sufficiently large natural number n for which $na > b$.” (Bell 2019, p.128).

⁵⁴ Ternullo e Fano 2021, p.98 (si chiama *Assioma di Continuità*).

precedenti. Esso è una “iper-infinitizzazione” di una “iper-discretizzazione”. Le grandezze infinitesimali possono essere accettate proprio grazie alla continuità della retta (o della serie di numeri). Cosa rappresentano però? Che tipo di grandezze sono? La parola differenziale richiama ad una differenza; ma come fanno due grandezze finite a dare una *grandezza infinita*? Che posto hanno nella retta?

I differenziali devono permettere alla matematica di trattare l’infinito e di non distruggere il *continuum*, nonostante sia il discreto l’unico strumento a disposizione. Costruendo i differenziali sapientemente, si può arrivare ad una comprensione maggiore del continuo stesso e delle sue proprietà.

1.3 Il continuo nell’analisi matematica di oggi

In questo paragrafo si enunciano le principali definizioni matematiche riferite al continuo. I testi presi in considerazione sono *Infinito* di Ternullo e Fano, l’articolo della Stanford *Infinity*, per una spiegazione meno tecnica e il manuale di *Analisi I* di Giusti per il linguaggio e il tecnicismo (affinché non si pecchi di rigore). L’obiettivo non è scrivere un manuale di matematica, né tantomeno mostrare qualche interpretazione del suo simbolismo. Lo scopo, invece, è duplice: da un lato vuole elencare definizioni che verranno ripresi lungo tutto l’elaborato, dall’altro vuole mostrare come la matematica ragiona. Il concetto fondante dell’analisi è quello di funzione e di limite.

Def. di Intorno completo: Dato un numero reale x_0 , si chiama intorno completo di x_0 un qualunque intervallo aperto di $I(x_0)$, contenete x_0 : $I(x_0) =]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_2[$ con δ_1 e δ_2 numeri reali e positivi.

Def. funzione: La funzione è un’idea abbastanza semplice da cogliere: data una x si assegnano delle y in base ad una certa regola. Si scrive $y=f(x)$, che vuol dire “ y in funzione di x ”. Le “ x ” sono il *dominio* della funzione, le “ y ” sono il *codominio* della funzione. Per esempio, se $y=x^3+4x$ (si può scrivere anche $f(x)=x^3+4x$), vuol dire che se $x=2$, allora $y=2^3+4\cdot 2=16$. Per disegnare tale funzione, ovviamente, non si calcolano tutti i valori delle

y date delle x (sarebbero infiniti), ma si fa lo studio della funzione (qualitativa e quantitativa): per esempio si vede se è *biettiva*, *suriettiva*, *dispari* o *pari* etc., oppure si calcolano gli *zeri*, i *salto*, i *flessi* etc. Calcolando la derivata prima della funzione si vede se la funzione cresce o decresce. Infine, si disegna in modo approssimativo seguendo i punti nevralgici. Usando un programma $f(x) = x^3 + 4x$ risulta una curva nel I e III quadrante simmetrica all'origine. (figura 7).

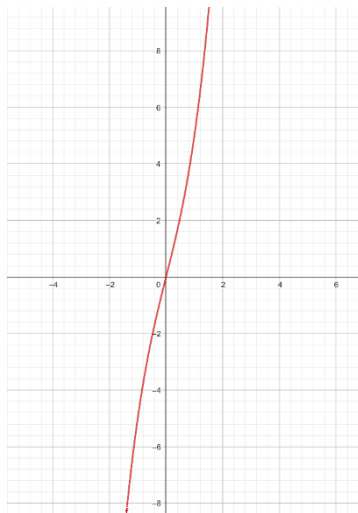


FIGURA 7

Def. limite: data una funzione $f(x)$, definita su un intervallo D di $\mathbb{R}$, diremo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$, tali che quando $0 < |x - x_0| < \delta$, si ha che $|f(x) - L| < \varepsilon$, con $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$.

Abbiamo quattro possibilità di limiti, date dal fatto che x_0 e L possono essere uguali ad un numero o a ∞ (ossia x può tendere ad un numero oppure all'infinito; limite può dare un numero o ∞ come soluzione). Vediamo tutte le quattro opzioni velocemente.

(A). **Def. Lim (1):**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists I(a) \mid |f(x) - L| < \varepsilon, \forall x \in I(a), x \neq a$$

Questo simbolismo domanda: “cosa succede a $f(x)$ quando si avvicina al punto a ?”. Se si può costruire un limite, allora significa che, comunque, si scelga un numero reale positivo ε , si può determinare un intorno completo I di a , tale che $|f(x) - L| = \varepsilon$ (il valore assoluto della differenza tra $f(x)$ e L è uguale ad ε), per ogni x appartenente a I , diverso (al più) da a . Per esempio $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x} = 2$. Attenzione: il limite non calcola il valore di $f(3)$ (il quale è pur sempre 2), ma esso dice che $f(x)$ approssima al due quando ha valori sempre più vicini a tre.

(B). Def. Lim (2):

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$$

$$\forall M > 0, \exists I(a) \mid f(x) > M, \forall x \in I(a) - \{a\}.$$

Questo, vuol dire che la funzione tende ad infinito per x che tende ad a , quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno completo di I di a tale che risulti $f(x) > M$, per ogni x appartenente a I e diverso da a .

Esempio classico: $f(x) = \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$ (figura 8).

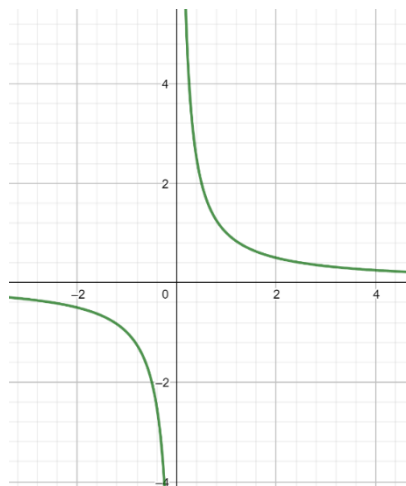


FIGURA 8

L rette con equazione $x=0$ e $y=0$, verranno chiamate asintoti verticali e la curva non toccherà mai tali asintoti. Attenzione: il limite non dice che uno diviso zero sia uguale ad infinito; infatti, il simbolo infinito non può essere trattato come un numero finito

(altrimenti $4+\infty = \infty$, allora $4=0$). Uno diviso zero rimane una forma impossibile, in quanto non esiste nessun numero moltiplicato per zero che dia uno. Il limite dice che la funzione va avanti all'infinito, senza mai toccare l'asintoto quando le x si avvicinano allo zero.

(C). Def. Lim. (3):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c > 0 \mid |f(x) - L| < \varepsilon, \forall x > c$$

In questo caso abbiamo un asintoto orizzontale. Un esempio è $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-5}{x} = 4$, o la nota funzione esponenziale $f(x)=e^x$, infatti $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = 0$, e $y=0$ è l'asintoto orizzontale.

(D). Def. Lim (4):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\forall M > 0, \exists c > 0 \mid f(x) > M, \forall x < -c.$$

Questa ultima definizione di limite è abbastanza oziosa, per cui si darà solo un esempio:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty.$$

Def. funzione continua: Una funzione definita in $[a; b]$ si dice continua nell'intervallo $[a; b]$ se è continua in ogni punto dell'intervallo.

Nota:

- Se una funzione è derivabile nel punto a , allora la funzione è continua in quel punto
- Una funzione è continua se

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$$

(vedere definizione di derivata)

Def. punto di discontinuità (1): il punto a è un punto di discontinuità per la funzione $f(x)$, quando, per $x \rightarrow a$, il limite destro e il limite sinistro di $f(x)$ sono entrambi finiti, ma diversi fra loro. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1 \neq L_2 = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. $|L_1 - L_2|$, si chiama salto.

Def. punto di discontinuità (2): un punto a si dice di discontinuità per la funzione $f(x)$ quando per $x \rightarrow a$, almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, di $f(x)$ è infinito o non esiste.

Def. punto di discontinuità (3): Un punto a si dice di discontinuità per la funzione $f(x)$ quando: 1. Esiste ed è finito il limite di $f(x)$. (Def. limite 1) e 2. $f(x)$ non è definita in a , oppure, se lo è, risulta $f(x) \neq L$.

Def. derivata prima: data una funzione $y=f(x)$, definita nell'intervallo $[a; b]$, si chiama derivata della funzione nel punto c interno all'intervallo, e si indica con $f'(c)$ il limite, se esiste ed è finito, per h che tende a 0, del rapporto incrementale di f relativo a c :

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Def. differenziale: si chiama differenziale di una funzione $f(x)$, relativo al punto x e all'incremento Δx , il prodotto della derivata della funzione, calcolata in x , per l'incremento Δx . Il differenziale viene indicato con $df(x)$ oppure con dy :

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

Si è voluto dare una serie di definizioni fondamentali per l'analisi, diventate ormai cano-
niche nel simbolismo e nella sostanza. L'analisi è la disciplina che ha come oggetto il
continuo. Questo paragrafo verrà ripreso quando si vedranno la storia della matematica,
l'analisi *non-standard* e le critiche di Weyl.

Per finire il capitolo, infine, si vuole fare il punto della situazione: la matematica
deve presupporre il continuo fenomenico e costruisce i suoi enti sopra di esso, concettua-
lizzando. Così facendo forma un nuovo tipo di continuo: quello matematico, il quale è
fatto di infinite discrete parti che tendono a legarsi tra di loro. Il continuo matematico è
inoltre divisibile fino agli infinitesimali. Nel prossimo capitolo si vedrà come il presu-
posto della matematica non è tanto il continuo dell'esperienza, ma è quello delle intui-
zioni. Tale obiettivo verrà raggiunto grazie ad un'analisi della *critica della ragion pura*
di Kant. Il continuo intuitivo è funzionale alla risoluzione dei due primi problemi e salva
il rapporto continuo matematico-continuo fenomenico, grazie al fatto che il continuo in-
tuitivo è la condizione di possibilità tanto del primo quanto del secondo. Questo terzo tipo
di continuo, anche se è il ponte tra il mondo fenomenico e quello matematica, limiterà
l'applicabilità della matematica sul mondo dell'esperienza

CAPITOLO 2.

Kant:

la filosofia trascendentale come cornice di senso dell'indagine intorno al continuo

Nel capitolo precedente si è detto che è proprio la matematica quella disciplina ad avere l'onere di studiare il continuo, tuttavia con una frettolosa spiegazione. Non si è data nessuna giustificazione di questa asserzione, la quale è tutt'altro che ovvia. Anzi si può facilmente argomentare: il discreto è la negazione del continuo, la matematica tratta solo con il discreto; quindi, la matematica non può studiare il continuo. Questo argomento non regge se non si considera che il presupposto del discreto è il continuo e proprio attraverso il discreto si può cogliere il continuo. Il continuo non può essere compreso appieno proprio perché involve l'infinito; quindi, il limite non è imposto solo alla matematica, ma su ogni altra disciplina umana, in quanto tutte le discipline sono fatte da menti finite. All'interno del continuo c'è qualcosa che sfugge. Nello studio del continuo si scontra il finito con l'infinito in una dialettica che può essere positiva o negativa. Anche se a tutti sembra naturale un'esperienza del continuo, una sua riflessione (e quindi concettualizzazione) porta al limite la mente umana. Proprio perché appartiene a tutti l'esperienza del continuo, un'indagine di essa è di grande interesse: essa ha portato l'uomo, nella storia, a torturarsi nella comprensione di qualcosa apparentemente incomprensibile e inaccessibile. Senza contare che attraverso il continuo si apre una possibile strada per la comprensione dell'infinito.

In questo capitolo si cercherà di argomentare che la matematica (in particolare l'analisi matematica) è una strada molto valida per comprendere il continuo fenomenico. Per fare questo Kant diventa un autore nevralgico; egli, infatti, ha scritto in un periodo storico critico per la matematica e in particolare per la comprensione degli enti fondanti del *calcolo*. Ebbe occasione di prendere parte ai caldi dibattiti che porteranno alla nascita dell'analisi matematica come la conosciamo oggi. Inoltre, la filosofia trascendentale presenta una concezione della matematica molto interessante per il nostro scopo, avendo una certa influenza sul dibattito contemporaneo della filosofia della matematica. Il capitolo comincerà, pertanto, delineando un quadro storico della matematica al tempo di Kant

(sarà molto semplice confrontarlo con il capitolo precedente per vedere che strumenti matematici il filosofo poteva (e non poteva) conoscere), poi si introdurrà la concezione kantiana della matematica il che porterà direttamente al concetto di continuo nella filosofia trascendentale. Nella trattazione del continuo nella filosofia kantiana si proverà a spiegare il perché e in che modo la matematica possa studiare il continuo e in che senso il continuo l'infinito anche se l'infinito non è percepibile.

2.1 Il continuo nella modernità: la nascita dell'analisi

“Il grande spartiacque della storia della matematica è l'invenzione del calcolo”¹, scrive Cook. Chi si il fondatore è difficile da dire, quindi è preferibile abbracciare la tesi di d'Amore e Sbaragli per cui “furono moltissimi i matematici che lavorarono all'impresa e determinarono il suo successo [del calcolo], prima, durante e dopo il lavoro indipendente dei due geni [Leibniz e Newton]. Lo definiremo un *immenso lavoro collettivo nella storia* nella quale Leibniz e Newton emergono in modo strabiliante”². In effetti già in Cavalieri (1598-1647) possiamo trovare un embrione del calcolo infinitesimale. Il matematico italiano è l'inventore del metodo degli indivisibili, attraverso il quale riusciva a calcolare volumi e aree di alcune figure con l'idea di base di “considerare una figura bidimensionale come costruita dalle infinite corde intercettate all'interno della superficie da un insieme di rette parallele, ciascuna di quelle corde è vista come un rettangolo avente una dimensione infinitesima, *l'elemento indivisibile*, appunto”³. Tale intuizione è tanto vicina all'idea di Leibniz di considerare l'area di una curva come una somma infinita di rettangoli aventi *l'altezza* $f(x)$ e la *base* dx , che Boyer usa proprio la simbologia del filosofo tedesco per tradurre il teorema di Cavalieri ($\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$)⁴.

Così come anche Newton, inventore del calcolo differenziale per il mondo anglosassone, deve un grande debito al professore Barrow (1630-1677), il quale considerava le curve generate dal movimento di punti (il quale a sua volta si ispirò a Torricelli e Roberval), per risolvere concreti problemi geometrici come il calcolo delle tangenti del *folium*

¹ Cooke 2005, p.462: “The great watershed in the history of mathematics is the invention of the calculus”.

² D'Amore e Sbaragli 2019, p.266. Enfasi mia.

³ Ivi, p.136.

⁴ Boyer 1968, p.462.

di Descartes o la *quadratrice* di Dinostrato. Barrow, ancora prima di Newton e Leibniz, applicava l'incremento infinitesimale per calcolare la tangente di un punto e lasciava intravedere "la relazione che intercorre tra il problema delle quadrature e quello delle tangenti"⁵.

Questi sono solo alcuni nomi di matematici che resero possibile il calcolo e precedettero Leibniz e Newton. La novità del filosofo tedesco e del matematico inglese consiste nel fatto che, in modo indipendente e con un lessico diverso (ma uguale nella sostanza), formularono un metodo universale capace di calcolare tangenti e aree di qualsiasi curva (ossia un metodo non limitato alle risoluzioni di certe funzioni)⁶. Importante notare che siamo ancora a formulazioni grezze in quanto manca ancora il concetto di limite, il quale è fondamentale per l'analisi, come fa notare il matematico dello scorso secolo che portò il calcolo nella sua formulazione più coerente e più precisa: Abraham Robinson⁷.

Il problema di base, che affliggeva i matematici fin dall'antichità, era quello di calcolare le aree e le rette tangenti data una qualsiasi curva. Leibniz comprese che erano due problemi collegati. Si è già mostrato la natura dei differenziali e degli integrali nel capitolo precedente; quindi, qui ci si limiterà a fare delle considerazioni storiche successive al filosofo tedesco.

Grazie al suo valore euristico, il nuovo metodo ebbe una grandissima fortuna: in Inghilterra con un lessico vicino a quello di Newton e invece sul continente con una formulazione vicina a quella di Leibniz⁸. Solo per citare alcuni matematici che svilupparono

⁵ Bottazzini 2005, p.15

⁶ La faida tra Leibniz e Newton è sicuramente interessante, ma eccede lo scopo dell'elaborato. Per un approfondimento rimando alla narrazione che fa Bottazzini nel capitolo primo (cfr. Bottazzini 2005). La vera differenza consiste che Leibniz ha un metodo basato sulla geometria; invece, Newton usa il suo metodo per spiegare il mondo fisico. (cfr. Bottazzini 2005, p.33). Per l'universalità del metodo, cfr. Ternullo e Fano 2021, p.85. Robinson scrive nel capitolo 10 intitolato *Concerning the history of the calculus*: "After a long development which involved the determination of areas, volumes, and tangents in special cases, the general theory of differentiation and integration was put forward in the second half of the seventeenth century by Newton and, somewhat later but independent, by Leibniz" (Robinson 1966, p.260).

Bottazzini scrive "il calcolo differenziale era stato presentato da Leibniz come uno speciale algoritmo per lo studio delle curve e in questo campo fu applicato con successo dai fratelli Bernoulli; il nuovo calcolo si rivelò nelle loro mani uno strumento di straordinaria *agilità e duttilità*, che permetteva di risolvere facilmente antichi problemi che avevano messo alla prova l'abilità dei più grandi geometri e apriva la via per <<un mondo sconosciuto>> di curve e equazioni differenziali" (Bottazzini 2005, p.21. Enfasi mia).

⁷ Robinson 1966, p.1 scrive "Derivates and integrals, the sum of an infinite series and the continuity of a function all are defined in terms of limits". Questa citazione viene dal libro che ha fondato l'analisi non-standard, analisi che, per alcuni, chiude il travagliato processo dell'accettazione dei differenziali iniziata con Leibniz. Verrà ripresa a fine dell'elaborato questo tipo di analisi in modo molto più dettagliato: qui si è voluto solamente fare una piccola anticipazione. In realtà Newton arriva molto vicino al concetto di limite, ma non ha gli strumenti né formali né concettuali per una formulazione rigorosa (cfr. Boyer 1968, p.553).

⁸ Cfr. Bottazzini 2005, p.34.

il calcolo differenziale: Jacques Bernoulli (1654-1705) applicò il calcolo infinitesimale alla spirale “lemniscata di Bernoulli” e al calcolo della probabilità⁹, Jean Bernoulli (1667-1748) dimostrò il famoso teorema *de Hôpital*, L’Hôpital (1661-1704) fu il primo a scrivere un manuale di calcolo differenziale intitolato *Analyse des infiniment petits*, pubblicato a Parigi nel 1696. Il libro si basa su due postulati: “1) che si possono considerare uguali due quantità che differiscono soltanto di una quantità infinitamente piccola e 2) che una curva può essere considerata come formata da due segmenti rettilinei finitamente piccoli che determinano, mediante gli angoli che formano l’uno con l’altro, la curvatura della curva”¹⁰. Erede del “calcolo sublime” fu anche il grande matematico Euler (1707-1783), allievo di Jean Bernoulli. Euler trovò il calcolo differenziale un potente strumento per la dinamica e per le oscillazioni armoniche¹¹ e così via con molti altri illustri matematici che difesero (e svilupparono) il calcolo differenziale.

Il calcolo, però, mancava tanto di chiarezza quanto di rigore e quindi, nella metà del XVIII secolo, si sentì forte il bisogno di “consolidare l’edificio teorico della matematica, ponendo su solidi fondamenti il calcolo differenziale”¹² in quanto i risultati, nonostante suscitassero notevole entusiasmo, non placarono il dominio di “una certa confusione circa i suoi principi fondamentali”¹³. I filosofi e i matematici della Rivoluzione francese accolsero la sfida. Sicuramente Lagrange (1736-1813) e D’Alembert (1717-1783) sono due figure di spicco. Il secondo “riteneva che la nozione di differenziale fosse semplicemente un modo conveniente di parlare, che trovava giustificazione nel linguaggio di limiti”¹⁴ e nella sua *Encyclopédie* affermava che “la teoria dei limiti è alla base della vera metafisica del calcolo differenziale”¹⁵. Prendendo in prestito le parole di Boyer, la *quantità limite* veniva definita come “una seconda quantità [variabile] se questa seconda quantità si avvicina alla prima così tanto che la differenza fosse inferiore a qualsiasi quantità data (senza effettivamente coincidere con essa)”¹⁶. Nonostante, come fa notare Boyer nella stessa pagina, fosse una definizione imprecisa e resa obsoleta dal raffinato

⁹ Cfr. Boyer 1968, pp.581-584.

¹⁰ Boyer 1968, pp.585-586.

¹¹ Cfr. Bottazzini 2005, pp.36-38.

¹² Bottazzini 2005, p.53. Per un approfondimento delle critiche rimando a cfr. Bell 2019, pp.70-76. In realtà in ogni manuale sia storico che filosofico che presenta il calcolo ha sempre un capitolo su Barkley o su Hume.

¹³ Boyer 1968, p.674. Per un approfondimento del rapporto differenziale-limite cfr. Bell 2019, pp.82-86.

¹⁴ Boyer 1968, p.629.

¹⁵ Bottazzini 2005, p.53.

¹⁶ Boyer 1968, p.629.

formalismo di Weierstrass e Bolzano, D'Alembert è molto vicino alla definizione di limite, data nel primo capitolo.

Non si intende proseguire con la storia, perché, ormai siamo al futuro rispetto a Kant (1724-1804) e, pertanto, si eccede dallo scopo del capitolo. Kant visse in un periodo matematico proficuo: i matematici, infatti, non erano solo dediti a far progredire la disciplina con nuove dimostrazioni di teoremi, bensì consideravano di vitale importanza anche fondare con sicurezza la matematica con rigore e precisione tanto sul piano logico quanto su quello metafisico. Poc'anzi si è visto solo alcuni matematici che cercarono di fondare metafisicamente il calcolo, ma nel prossimo paragrafo si vedranno come i filosofi e i matematici si scontrarono per comprendere la natura del continuo (attraverso il calcolo), formando diverse scuole metafisiche.

L'analisi di oggi è molto diversa rispetto al calcolo di Leibniz, nonostante ci siano molti punti di contatto e le idee di base siano rimaste più o meno intatte come si può facilmente vedere confrontando il veloce *excursus* storico appena fatto con l'ultimo paragrafo del capitolo precedente; grazie al medesimo confronto sarà facile anche notare quali strumenti matematici (e quali invece no) poteva avere in mano Kant quando si mise a scrivere la prima critica. Il periodo di Kant, tuttavia, dista non poco dal nostro, non solo rispetto agli strumenti formali (per esempio, non poteva conoscere l'insiemistica di Cantor, la definizione di numero di Zermelo, l'*iper-astrattismo* degli enti matematici, il formalismo di Frege o l'aritmetizzazione dell'integrale di Riemann), ma anche rispetto al modo in cui la matematica veniva concepita. Non bisogna stupirsi, per esempio, se Kant afferma che il tempo, il quale è la condizione *a priori* dell'aritmetica, non ha nessuna figura, e quindi “noi cerchiamo di supplire a questo *difetto* con analogie e rappresentiamo la serie temporale con linea che si prolunghi all'infinito.” (*KrV*, B50/A33, p.63 [9]. Enfasi mia). Al tempo di Kant, infatti, la geometria aveva un privilegio rispetto all'algebra¹⁷;

¹⁷ Per esempio, Newton (in linea con Barrow) pensava che “l'algebra mancava della chiarezza della geometria, ed è anche filosoficamente fuorviante poiché ci fa credere che cose inesistenti esistano realmente” (Corry 2015, p.253). Carnot fu un tentativo di creare una solida metafisica intorno al calcolo (cfr. *Ivi*, pp. 674-675). Tutto il libro di Corry è costellato di esempi di divorzi e unioni le due discipline. Un pioniere fu sicuramente Wallis (1616-1703), il quale affermava a differenza di molti suoi predecessori e di molti contemporanei, più rispettosi delle concezioni classiche, [...] affermò inequivocabilmente la piena supremazia concettuale dell'algebra sulla geometria. [...] proseguì attivamente tentativi coerenti per legittimare l'uso di numeri negativi e immaginari” (*Ivi*, p.236). Quindi non bisogna stupirsi se l'analisi sia nata per risolvere problemi di stampo geometrico. Il primo che azzardò ad “algebrizzare” l'analisi (ossia a rendere il calcolo differenziale autonomo dalla geometria. Prendo in prestito il termine “algebrizzazione” da Boyer, presente nel capitolo 25. Boyer lo usa per riferirsi ai matematici che partono da Fourier (1768-1830) fino alle critiche di Kronecker a Cantor, (Boyer 1968, pp.766-794)). Lagrange (1736-1813) fu un pioniere verso

basti notare l'abisso che crearono gli elementi di Euclide tra geometria e algebra. Gli elementi di Euclide sono un esempio di “mirabile assiomatizzazione della geometria”¹⁸, grazie ai quali la geometria godette di un primato rispetto all'algebra, branca della matematica senza alcun schema assiomatico chiaro. Per l'algebra difatti la storia fu un po' più travagliata: dovremmo aspettare il XIX secolo per una sua completa assiomatizzazione libera da qualsiasi “giustificazione” geometrica. Fu Peano (1858-1932) che costruì un sistema assiomatico pari a quello euclideo. Formulò sei postulati per l'insieme dei numeri Naturali ($\mathbb{N}$), e successivamente si costruirono tutti gli altri insiemi, come si è visto nel capitolo precedente¹⁹. Coerentemente con il suo tempo, inoltre, Kant sosteneva che l'algebra non avesse postulati, diventando così motivo di bersaglio di grandi critiche sia contemporanee a Kant che successive²⁰. L'assenza della assiomatizzazione dell'algebra e la sua sottomissione alla geometria potrebbero rendere obsoleto Kant, ma non il suo modello filosofico sulla matematica, in quanto è in grado di inglobare nuovi enti matematici e liberarsi da questi limiti temporali (come sarà chiaro alla fine del capitolo e alla fine dell'elaborato stesso).

In breve: Kant ha in mano un'analisi sufficientemente sviluppata da poter formulare teorie complesse, anche se è ancora legato da una visione “geometrica” della matematica e manca di un formalismo strutturato come quello di Frege o di Weierstrass; pertanto, quando si analizzerà la concezione della matematica di Kant e la sua teoria intorno al continuo, bisognerà tenere a mente i suoi presupposti e limiti matematici.

l'indipendenza dell'algebra rispetto alla geometria: “con la sua teoria delle funzioni Lagrange si muoveva, coerente e consapevole pioniere, in una direzione che diverrà dominante nel corso dell'Ottocento: la liberazione dell'analisi da ogni riferimento intuitivo all'evidenza geometrica o fisica dei suoi metodi” (Bottazzini 2005, p.67). E non fu scevro da critiche, infatti nonostante la sua autorità, “la sua concezione puramente algebrica del calcolo non riscosse l'unanimità dei consensi” (*Ivi.*, p.68) lo stesso Cauchy criticò il matematico francese, mostrando “l'esigenza del ritorno ad un rigore <<euclideo>>” (*Ivi.*, p.87). Per un approfondimento sugli oppositori di Lagrange, rimando a Bottazzini (2005), pp.68-70, 86-94.

¹⁸ D'Amore e Sbaragli 2017, p.237.

¹⁹ Per i sei postulati rinvio alla formulazione che fa D'Amore e Sbaragli 2020, p.296, per una chiarezza anche a livello storico (considerando lo stampo del paragrafo). Per una formulazione solo matematica “canonica”, rinvio a Giusti 1988, capitolo primo)

²⁰ Come dimostra la corrispondenza epistolare tra Kant e Schulz (cfr. Moretto 1999, pp.217-219). Anche Parsons, in tempi molto più recenti, vede questa discrasia tra geometria e algebra come problematica (cfr. Parsons 1983). Parsons è un autore che verrà ripreso successivamente, perché è un autore che ha approfondito sia la filosofia della matematica, sia la filosofia trascendentale e sia il concetto di continuità nella filosofia trascendentale e contemporanea (cfr. Parsons 1964 e Parsons 2011)).

2.2 Kant e la filosofia della matematica

Tanto la matematica quanto la metafisica si esprimono con giudizi. I giudizi possono essere sintetici o analitici; a loro volta possono essere *a priori* o *a posteriori* (le possibilità, quindi, sono quattro tipi di giudizi). La base della filosofia della matematica per Kant sono i giudizi sintetici *a priori*²¹. Solamente essi sono necessari, universali e allargano la nostra conoscenza. Analizziamo velocemente tutti i quattro tipi di giudizi.

I giudizi analitici sono i giudizi logici, quelli che hanno solo bisogno del principio di non-contraddizione per essere veri. Quelli sintetici invece sono i giudizi che espandono la nostra conoscenza sul reale perché non è sufficiente avere solo la logica in mano per costruirli (un giudizio non può mai essere auto-contraddittorio per Kant). Quindi l'estensione del soggetto viene allargato dal predicato, il quale, appunto, non è dedotto semplicemente dall'analisi "logica" del soggetto stesso (cfr. *KrV*, B7/A4, p.38 [56] e *Prl*, §2). Per esempio: "il tavolo è quadrato" è un giudizio sintetico, perché "l'essere quadrato" non è all'interno del concetto di "tavolo". Attraverso il giudizio io aggiungo una proprietà al "tavolo", ossia la sua "quadratura": se mi fossi fermato al concetto di tavolo non avrei mai potuto apprendere che esso era quadrato.

A priori: il giudizio proviene dall'intelletto (Indipendente "dall'esperienza e dalle stesse impressioni tutte dei sensi" (*KrV*, B2/A2, p.34 [50])).²²

A posteriori: il giudizio ha la sua origine dall'empiria (come l'esempio del giudizio "il tavolo è quadrato").

Riassumendo: sono possibili i giudizi analitici *a priori* (come "ogni corpo è esteso") e sintetici *a posteriori* (come "il tavolo è rotondo"). I giudizi analitici *a posteriori* non hanno senso perché nessun giudizio logico può essere costruito attraverso l'esperienza, sarebbe una contraddizione in termini (la logica è l'astrazione da ogni esperienza e detta solo le regole puramente formali del pensiero). La matematica e la fisica sono scienze perché hanno giudizi sintetici *a priori* (cfr. *KrV*, B13/A10-B18, pp.42-44 [63-68] e *Prl*, p.31 [20-21]). Sono sintetici perché devono allargare la nostra conoscenza e sono *a priori* perché devono essere veri, universali e necessari (il teorema di pitagora, per esempio, vale per chiunque dotato di ragione, indipendentemente dalla particolare esperienza dell'individuo).

²¹ Per un veloce riassunto della posizione kantiana rimando a Neunhäuserer 2019, pp.41-49.

²² Per un approfondimento cfr. *Prl*, pp.35-37 [22-23].

Potrebbe sembrare un problema pensare che si possa espandere la nostra conoscenza senza ricorrere all'esperienza. Per Kant, tuttavia, non c'è nessuna assurdità come afferma orgogliosamente: “la matematica ci dà uno splendido esempio di quanto possiamo spingerci innanzi nella conoscenza a priori, indipendentemente dall'esperienza. È vero che essa ha che fare con oggetti e conoscenze solo in quanto si possono presentare nell'intuizione: ma questa circostanza viene facilmente trascurata perché l'intuizione stessa può essere data a priori” (*KrV*, B8/A4, p.38 [56]).

La possibilità dei giudizi matematici con tali caratteristiche è resa possibile perché la matematica è una disciplina che costruisce. Con “costruire”, Kant intende “esporre a priori un'intuizione a esso [concetto] corrispondente” (*KrV*, B741/A713, p.446 [732]). Kant ha premura di sottolineare che, per esempio, tre rette non parallele formano un triangolo, la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto etc. non perché empiricamente percepiamo una cosa triangolare che ha effettivamente tre lati etc., ma perché l'intelletto prende il concetto di triangolo e “lo disegna” su un'intuizione pura *a priori* (la quale segue certe regole indipendentemente dall'immaginazione dell'individuo, quindi per esempio, lo spazio è euclideo, è piano, non supera le tre dimensioni etc.); solo successivamente l'intuizione empirica segue questa intuizione pura *a priori*, quindi noi percepiamo un oggetto triangolare come un oggetto con tre lati non paralleli etc.

Costruire, pertanto, significa attribuire ad un concetto (il quale è fornito dall'intelletto) le proprietà dello spazio e del tempo, le uniche due intuizioni pure *a priori* possibili. Un giudizio così formato è un giudizio matematico. Bisogna però stare attenti: costruire un giudizio matematico non ha nulla di empirico, ma è sempre una costruzione tutta *a priori*²³, in virtù del fatto che i teoremi matematici sono universali e necessari e non devono essere legati dalla contingenza dell'esperienza.

²³ Cfr. Micheli 1982, p.356.

2.2.1 La reputazione della filosofia della matematica di Kant

La concezione della matematica kantiana ebbe cattiva reputazione, la quale “suscitò forti obiezioni già fra gli stessi contemporanei”²⁴. La reputazione venne aggravata tra la fine dell’ Ottocento e gli inizi del Novecento, in cui ci fu da un lato “un vivace ed importante dibattito sulla teoria kantiana della matematica; dall’altro, il giudizio negativo che allora ne diedero, pressoché unanimemente, logici e matematici, condusse ben presto ad una drastica diminuzione dell’interesse per questo aspetto del pensiero kantiano, ritenuto dai più ormai del tutto superato dagli sviluppi della matematica moderna e legato da una sorta di vizio psicologistico”²⁵. Le critiche attaccavano principalmente la tesi centrale che i giudizi matematici dovessero essere sintetici *a priori*. Leibniz, Wolff e Hegel (e le loro successivamente scuole), per esempio, ritenevano che i giudizi matematici dovessero essere analitici; Frege reputava i giudizi sintetici *a priori* assurdi e Cantor e Bolzano ritenevano insensato fondare la matematica sullo spazio e sul tempo poiché significava sia perdere la universalità e necessità della matematica sia macchiare la disciplina con qualcosa al di fuori del suo campo²⁶.

Tale accanimento può essere spiegato dal fatto che negli ultimi due secoli ci fu un enorme progresso e potenziamento nell’apparato formale delle diverse logiche. Tale potenziamento sembrò aver creato nuovi strumenti formali (come l’insiemistica di Cantor e la nuova logica di Frege) sufficientemente forti per fondare la matematica senza ricorrere a intuizioni extra-matematiche e logiche (quindi i giudizi matematici sono analitici). Il risultato fu quello di vedere il modello trascendentale della matematica come obsoleto e incapace di accogliere i nuovi elementi, i nuovi teoremi e le nuove scoperte teoretiche/matematiche. Kant stesso, inoltre, non sembrava essere molto acuto di fronte alle nuove scoperte nel campo della logica, come quelle fatta da Leibniz: per Kant la logica formale è

²⁴ Micheli 1998, p.2. Micheli ha scritto un altro saggio che riassume in sommi capi quanto viene detto nel suo libro. La sostanza e anche le parole sono praticamente le stesse, ma in maniera più riassuntiva, schematica e veloce. Rimando al suo saggio per una lettura più leggera e riassuntiva (Micheli 1982).

²⁵ Micheli 1998, p.5. Rimando al § 1 di questo capitolo per una descrizione dei presupposti matematici del tempo di Kant.

²⁶ C’è da dire che, nonostante Bolzano e Cantor hanno avuto più fortuna a livello storico, ci furono altri matematici che ritenevano necessario fondare la matematica (e il continuo specialmente) sullo spazio e il tempo. Un esempio contemporaneo a Bolzano è Poincaré (1854-1912). Poincaré riteneva; infatti, che il continuo non può essere trattato semplicemente come un insieme, perché esiste un divario tra simbolo e realtà, divario colmato dall’intuizione. Un altro esempio più contemporaneo è dato dalla *Category theory* di Eilenberg (1913-1998) e di Mac Lane (1909-2005), la quale sia basa su un forte isomorfismo tra numero e tempo/spazio (cfr. Bell 2019, p.165 e p.198).

stata iniziata e completata da Aristotele, fatto (almeno) storicamente erraneo. Kant non riuscì a intravedere la forte originalità di Leibniz da un lato e, dall'altro, Frege, Cantor e gli altri logici e matematici dello scorso secolo dimostrarono come il linguaggio logico sviluppato da Aristotele fosse insufficiente di fronte alla complessità del pensiero²⁷.

Nonostante alcuni matematici tentarono di rifarsi alla filosofia trascendentale come Hilbert, Brouwer o Heyting²⁸, solo negli anni Sessanta si risvegliò l'interesse per la filosofia della matematica di Kant grazie agli studi del logico finlandese Jaakko Hintikka²⁹ proseguiti con vivacità da Parsons. Ai fini dell'elaborato, bisognerà riabilitare Kant come filosofo matematico, altrimenti, diventa un autore di interesse storico e poco utile a rispondere alle domande poste a inizio capitolo. Per fare questo bisognerà mostrare la legittimità dei giudizi sintetici *a priori*, la necessità alla matematica di rifarsi alle intuizioni dello spazio e del tempo (senza mai scadere nel ritenere che i giudizi matematici si fondino sul mondo dell'esperienza) e mostrare come la filosofia trascendentale possa accogliere i nuovi enti proposti dalle teorie matematiche successive a Kant. Una risposta generale che comprende tutta la matematica è complessa da dare ed eccede al fine dell'elaborato; pertanto, ci si contrerà sulla continuità e sull'analisi matematica.

2.3 Kant e il continuo

Kant parla del continuo in diversi momenti nella prima critica, ma mai in modo sistematico. Il continuo entra in campo fin dall'estetica, quando Kant parla delle proprietà dello spazio e del tempo. Spazio e tempo sono intuizioni pure *a priori* che permettono i giudizi sintetici *a priori*, ossia permettono alla matematica e alla fisica di essere una scienza pura. Spazio e tempo devono essere continui, quindi la continuità diventa nevralgica per comprendere la concezione della matematica del filosofo tedesco.

Il legame "spazio/tempo"- "continuità" viene accennato nell'estetica trascendentale per poi essere approfondito nella sezione terza dell'analitica dedicata ai principi

²⁷ Sulla visione della logica kantiana rimando a Barone 1984. Sulla originalità di Leibniz rimando a D'Amore Bruno e Sbaragli Silvia 2019, pp.301-312 e per comprendere gli sviluppi della logica da Aristotele ad oggi è sufficiente confrontare il capitolo 5 con il capitolo 6 del manuale di logica di Varzi, Nolt e Rohatyn 1988.

²⁸ Ad esempio, Brouwer, padre dell'intuizionismo e costruttivismo, ammetteva che i concetti matematici sono costruzioni mentali fondate sull'intuizione (cfr. Bell 2019, p.169).

²⁹ Cfr. Hintikka 1973 e Hintikka 1974; (specialmente dal capitolo sei al capitolo nove).

dell'intelletto. Poi Kant tace. La seconda antinomia (con tutti i paragrafi di osservazione successivi) riapre la questione quasi come se non ci fosse mai stata l'analitica: alla domanda se lo spazio sia continuo oppure no, la ragione non è in grado di rispondere e si trova in un conflitto antinomico. A sorpresa la questione della continuità viene riaperta nell'Appendice della dialettica: il continuo è una massima, un'idea regolativa alla stregua dell'*Ens realissimus* (cfr. *KrV*, B689/A661, p.417 [689]).

Kant intende la stessa cosa quando parla di continuità in tutte le quattro parti? Una risposta affermativa sembrerebbe ricevere per l'estetica, l'analitica e l'antinomia. Nell'analitica approfondisce la proprietà di continuità del tempo enunciata nell'estetica. Anche nell'antinomia sembrerebbe che Kant usi la parola "continuità" con lo stesso significato delle due precedenti sezioni; infatti, in questa sezione Kant si domanda se lo spazio è composto da parti semplici oppure no ossia se esso sia divisibile all'infinito, facendo leva sulla proprietà essenziale del continuo esposta sia nell'estetica che nell'analitica. Si potrebbe, invece, storcere il naso per l'appendice: Kant parla di continuo nella natura evolutiva e non ha nulla a che fare con la continuità delle intuizioni pure *a priori*, quindi con i giudizi matematici. Ci si limiterà a prendere in considerazione, quindi, l'estetica, l'analitica e la seconda antinomia (con le eventuali osservazioni di Kant al riguardo).

La questione risulta essere interessante non solo ai fini di una comprensione della prima critica, ma mette in luce il primo problema del continuo esposto nel primo capitolo: perché abbiamo solo il discreto in mano quando cerchiamo di comprendere il continuo? Rispondendo a questa domanda si affronterà inevitabilmente anche la questione della matematica come scienza del continuo e il discreto come strumento per cogliere la continuità stessa. Il presupposto che era stato chiesto di assumere per tutto il primo capitolo (cioè: è proprio la matematica ad essere la disciplina del continuo), collideva nel modo in cui la pratica matematica opera: essa lavora solo con il discreto, lasciando il continuo in uno sfondo teorico-pragmatico. Grazie a Kant si potrà rendere questo presupposto argomentato e quindi non più un assunto *acritico*.

Tematizziamo subito il problema "continuo" dentro la filosofia trascendentale, mantenendo il *focus* sugli obiettivi enunciati precedentemente. Per fare ciò consideriamo quattro citazioni:

(A). (...); ma tra la realtà (rappresentazione sensibile) e lo zero, cioè la completa vuotezza della intuizione del tempo, v'ha pur una differenza che ha una quantità, giacché tra qualunque grado dato di luce e l'oscurità, tra qualunque grado di calore e freddo assoluto, tra qualunque grado di pienezza dello spazio e lo spazio completamente vuoto, possono sempre esser pensati gradi ancor più piccoli come sempre han luogo gradi ancor più piccoli tra una coscienza e la completa incoscienza (oscurità psicologica); perciò non è possibile una percezione che dimostri una assoluta mancanza (...), il reale di ogni fenomeno ha gradi, il che è la seconda applicazione della matematica (*mathesis intensorum*) alla scienza della natura.

(Prl, p.123 [71])

(B). Quindi fra la realtà nel fenomeno e la sua negazione c'è una catena continua di molte possibili sensazioni intermedie, la cui differenza, dell'una all'altra, è sempre più piccola della differenza che v'è fra quella data e lo zero, o completa negazione. [...]. Spazio e tempo sono quanta continua.

(KrV, B210/A168-B211/A169, pp.154-155 [245-246])

(C). Secondo conflitto delle idee trascendentali.

-Tesi: ogni sostanza composta nel mondo consta di parti semplici, e non esiste in nessun luogo se non il semplice, o ciò che ne è composto.

-Antitesi: Nessuna cosa composta nel mondo consta di parti semplici; e in esso non esiste, in nessun luogo, niente di semplice.

(KrV, B562/A434-B463/A437, pp.294-295 [478-479])

(D). Le questioni: (...) se si dia mai, e per avventura del mio Me, una indivisibile e indistruttibile unità, o niente che non sia indivisibile e transeunte, (...): sono questioni [tutte le questioni provenienti dal conflitto della ragione] per la cui soluzione il matematico volentieri darebbe tutta la scienza

(KrV, B491/A463, p.311[509])

Insomma: nell'analitica lo spazio e il tempo sono continui, ma nella dialettica Kant sembra che si rimangi la parola affermando che non possiamo dimostrare la divisibilità o meno all'infinito dello spazio e del tempo. Per capire a fondo quello che intende Kant è necessario riprendere il dibattito a lui contemporaneo sul continuo. La battaglia del continuo si combatteva sul campo dello spazio e del tempo e in particolare sulla sua o meno divisibilità all'infinito³⁰. Il ragionamento è abbastanza semplice: se lo spazio è continuo, allora non c'è un limite alla sua divisione possibile, altrimenti non è continuo (il coltello dei tagli all'infinito si rompe quando trova davanti a sé la monade, atomo o parte semplice: le ultime parti dello spazio. Tra gli atomi c'è un vuoto ed essi possono formare solo spazi (e tempi) al più densi). Questa guerra si rifletteva nella matematica in quanto, come abbiamo visto, ai tempi di Kant la matematica e la metafisica e si intrecciavano costantemente.

La guerra si combatteva tra validi avversari. Descartes sosteneva la divisibilità all'infinito tanto dell'estensione geometrica quanto di quella della materia. Galileo tentava di conciliare gli indivisibili di Cavalieri con la divisibilità della materia. Leibniz era d'accordo con Descartes per quanto riguarda la geometria, ma sosteneva la indivisibilità nella metafisica. Newton trovava incoerente la posizione di Galileo e, grazie al suo lessico di "fluenti", "evanescenti" etc., riteneva di aver reso la materia continua e allo stesso tempo rendere pensabile una sorta di indivisibili divisibili. Dall'altro lato Hume, Locke, Hobbes e Barkley non erano disposti ad accettare la divisione all'infinito perché contraria all'esperienza. Per gli empiristi, così come per la scuola wolffiana, c'è una differenza tra il piano logico-matematico e quello fisico³¹. La *critica della ragion pura*, pertanto, si introduce in questo complesso dibattito tra la metafisica e la matematica: il continuo sembra allora un concetto-limite proprio perché rispecchia due atteggiamenti del dibattito contemporaneo: la matematica studia il continuo, il quale contemporaneamente è contestato tra scuole metafisiche. La metafisica, a differenza della matematica, non produce mai conoscenza, poiché tale metafisica era "dialettica" e "ingannatrice" (*Prl*, p.257 [147]) non avendo la critica a precedere la ricerca.

³⁰ Moretto scrive: "la nozione (...) <<grandezza divisibile all'infinito>> corrisponde al concetto di continuità generalmente accolta prima della definizione di continuità fornita dall'analisi classica della seconda metà dell'Ottocento" (Moretto 1999, p.43). Grazie a Cantor, Weierstrass, Frege, Dedekind, Bolzano etc. il concetto di continuo si smarcherà dallo spazio; tuttavia, la filosofia trascendentale resta essenziale come preambolo di uno studio sensato del continuo.

³¹ Cfr. Moretto 1999, Capitolo 1.

Dalla citazione (A) sembra chiaro che Kant si metta dalla parte di un modo continuo, mentre la citazione (B) mette in rapporto dialettico il “grado” (che sarebbe il discreto) e il continuo fino a discutere sulla natura degli infinitesimali (o fluenti come verranno chiamati righe sotto). La citazione (C) riporta la seconda antinomia trattando la continuità come una idea contestata tra le varie scuole metafisiche del suo tempo. Si faccia attenzione: Kant non sta sostenendo né che lo spazio sia discreto né che sia continuo. Semplicemente dimostra che non si può provare la sua divisibilità all’infinito. Nella citazione (D) il filosofo tedesco fa un’osservazione sui conflitti della ragion pura: la matematica vorrebbe comprendere la divisibilità all’infinito, ma non riesce. Ma perché non riesce? Quando la matematica afferma

α) la retta q è continua

che intende? Se la retta q è continua, allora possiamo dividerla all’infinito. Se spostiamo la retta q in un piano cartesiano, allora possiamo applicare tutti quei teoremi dell’analisi matematica che fanno leva sulla divisibilità all’infinito di ciò che è continuo. Se la divisibilità all’infinito non è comprensibile dalla matematica, allora è compito della filosofia spiegare tale proprietà in modo descrittivo (cfr. *KrV*, B741/A713, p.447 [732]), ma questo significa che il giudizio (α) non è sintetico *a priori* quindi non matematico.

In questo paragrafo si mostrerà che il giudizio (α) è un giudizio matematico grazie al fatto che si applica la proprietà della continuità al concetto di retta la quale non contiene analiticamente la continuità. Affinché (α) sia un giudizio sintetico *a priori*, deve possedere almeno tre requisiti: 1. io posso conoscere la retta q attraverso la proprietà di continuità; 2. il giudizio deve espandere il mio campo conoscitivo, quindi la proprietà di “continuità” non è contenuta nel concetto di “retta” e infine 3. deve essere oggettivamente vero, quindi necessario e universale.

Il soggetto è “la retta q ”; il predicato “essere continui”. Ci domandiamo se è sufficiente esplicitare le proprietà della retta per arrivare alla sua continuità oppure è necessario costruire (α). Stiamo questionando sul secondo punto requisito.

Potrebbe sembrare assurdo a prima vista, ma Kant sostiene fortemente che la continuità non appartiene al concetto di retta, sicché scrive “la possibilità delle quantità continue, anzi delle quantità in generale, poiché i concetti di esse sono tutti quanti sintetici,

non è mai chiara in virtù dei concetti in sé stessi, ma solo in virtù dei concetti come condizioni formali delle determinazioni degli oggetti dati dall'esperienza in generale" (*KrV*, B271/A224, p.187 [301]). Testiamo se Kant ha le sue buone ragioni a ritenere che (α) sia un giudizio sintetico *a priori*. Consideriamo un giudizio certamente analitico:

$\alpha\alpha$) la retta q è dritta.

Essere "dritta" è la *conditio sine qua non* di retta, che sarebbe curva altrimenti, ma possiamo affermare anche:

β) la curva b è continua e

$\beta\beta$) la curva b non è dritta. Giudizio analitico.

La retta e la curva sono due opposti: io posso definire la retta come "linea non curva" e la curva come "una linea non-dritta". Sarebbe assurdo ritenere che si può derivare analiticamente la stessa proprietà dal concetto "di curvo/ciò che non è retto" e dal concetto di "retto/ciò che non è curvo", a meno che il curvo e il retto non siano concetti della stessa famiglia. In questo caso specifico essi sono fratelli della stessa classe chiamata "linea". Allora tanto (α) quanto (β) sono analitici nel momento in cui il dritto e il curvo sono continui, poiché esse sono linee. Schematizzando:

α_0) la retta q e la curva b sono linee. Giudizio analitico.

α_{0a}) le linee sono continue. Giudizio analitico.

β_b) quindi la retta q è continua. Giudizio analitico.

β_{0b}) quindi la curva b è continua. Giudizio analitico.

Però così spostiamo solamente l'asse di attenzione: (α_{0a}) è un giudizio veramente analitico? Kant direbbe no: non c'è nessuna contraddizione nel pensare una linea densa.

Detta altrimenti: la continuità della retta non è genetica alla sua definizione e noi possiamo cercare quanto vogliamo nel concetto di "linea" la continuità, ma non troveremo nulla; quindi, i giudizi (α_{0a}), (β_{0b}), (α) e (β) sono sintetici. Io devo oltrepassare il concetto di linea/retta/curva e devo ricorrere all'intuizione (cfr. *KrV*, B14/A10-B15, p.42

[63-64]). È chiaro che tanto il primo quanto il secondo requisito è soddisfatto: io conosco il concetto retta attraverso quello di “continuità” ed espando la mia conoscenza.

Le linee (così come le figure, le successioni numeriche etc.) acquistano la proprietà di continuità grazie all’intuizione dello spazio e del tempo. L’intuizione che Kant sta parlando qui non ha nulla di empirico, ma lo precede. Questa affermazione è alquanto problematica: sembra Kant voglia qualcosa che ha che fare con il mondo senza che si macchi dall’empiria, sennò deve salutare la necessità e universalità della scienza (terzo requisito). Se la matematica fosse legata all’accidentalità dell’esperienza, allora rischierebbe di cadere in uno scetticismo radicale come quello di Hume, ma se essa fosse vera solo in virtù di una idea innata e trascendente, allora la filosofia trascendentale sarebbe solo un altro dommatismo della vecchia metafisica alla Descartes.

L’intuizione dello spazio riesce a mediare le due posizioni: un giudizio è scientifico sia in virtù del fatto che ha la sua controparte nell’esperienza (un pensiero dommatico è problematico, poiché pretende di conoscere qualcosa senza che sia esibito nel mondo), sia perché non si fonda sull’esperienza stessa. L’attenzione è sulla parola “intuizione” e sarà l’estetica trascendentale a dover approfondire questo aspetto.

2.3.1 L’estetica trascendentale

Indicativo è il fatto che l’estetica trascendentale è la prima parte della critica, come se fosse l’anticamera di tutto il pensiero critico. Con “estetica”, Kant intende “la scienza dell’esperienza” (riprendendo Baumgartner³²); “trascendentale” significa “condizione di possibilità”, la quale deve essere *a priori*, ossia non deve derivare dall’esperienza (la quale è resa possibile proprio dal trascendentale stesso). Quindi “estetica trascendentale” vuol dire “condizione di possibilità dell’esperienza in generale” o “di ogni esperienza possibile”: essa è la “scienza di tutti i principi a priori della sensibilità” (*KrV*, B35/A21, p.54 [82]). La condizione di possibilità di ogni esperienza è lo spazio e il tempo: quelle due nozioni che avevano tanto travagliato metafisici alla ricerca della loro Natura quanto esasperato matematici nel comprendere attraverso di esse la continuità e l’infinità.

³² Cfr. *KrV*, B35/A21(n), p.54 [82].

Kant sostiene che lo spazio e il tempo sono “solo a priori, ossia prima di ogni reale percezione” (*KrV*, B59/A42, p.68 [107]) e perciò vengono chiamate intuizioni pure³³. Essi, precedendo ogni esperienza, la rendono possibile e non sono deducibili da quest’ultima, quindi non sono solo pure, ma anche *a priori* (cfr. *KrV*, B38/A23, p.56 [85] e B46/A30-B48/A32, pp.61-62 [94-96]). L’intuizione è una delle due fonti della conoscenza umana e la matematica è una scienza proprio perché le usa entrambi nella loro purezza e nella loro aprioricità (cfr. *KrV*, B56/A39, p.66 [102] e B74/A50-B76/A51, p.77 [119-120]).

Se spazio e tempo sono intuizioni, se i concetti vengono forniti dall’intelletto e se “l’intelletto non può intuire nulla, né i sensi nulla pensare” (*KrV*, B76/A51, p.78 [120]), allora si può concludere che le due forme pure dell’intuizione sono *al-di-là* della sfera concettuale. Risulta chiaro dalla prima critica che le intuizioni di spazio e tempo precedono l’intelletto, il quale da un lato è “la facoltà di produrre da sé rappresentazioni, ovvero la spontaneità della conoscenza” (*KrV*, B76/A51, pp.77-78 [120]), dall’altro è incapace di conoscere da solo: l’intelletto da solo è come un mulino che gira a vuoto perché gli manca il grano da macinare. Per poter produrre conoscenza l’intelletto deve ricevere un oggetto, il quale è consegnato dall’intuizione (cfr. *KrV*, B74/A/50, p.77 [119]). Ottenuto l’oggetto, la matematica costruisce i propri giudizi:

Ora spazio e tempo sono quelle intuizioni che la matematica pura pone a fondamento di tutte le sue conoscenze e giudizi che si presentano nello stesso tempo come apodittiche e necessarie; poiché tutti i suoi concetti la matematica deve *prima* esibire, ossia costruire, nell’intuizione, e la matematica pura nell’intuizione pura. La matematica (...) non è possibile che proceda di un passo, fintantoché le manca l’intuizione pura, nella quale soltanto può essere data la materia per giudizi sintetici *a priori*

(*Prl*, p.67 [40]. Enfasi mia)

³³ Si può notare che se lo spazio e il tempo rendono possibile ogni esperienza, allora “se uscissimo dalla condizione soggettiva [ossia se uscissimo dallo spazio] nella quale possiamo solo conseguire un’intuizione esterna, dal mondo, cioè in cui possiamo venir modificati dagli oggetti, l’idea di spazio [simile discorso Kant fa per il tempo] non significherebbero più nulla. Questo predicato viene attribuito alle cose solo in quanto esse appaiono a noi, sono cioè oggetti della sensibilità” (*KrV*, B42/A26, pp.58-59 [90]). Si può, quindi, facilmente concludere che la geometria come l’aritmetica, non sono scienze delle cose in sé, ma del mondo come appare. Ossia sono oggettive per tutti i soggetti: possiamo definire il loro statuto come “soggettivamente oggettivo”.

L'intuizione esibisce uno spazio e un tempo unico, omogeneo nel quale possiamo separarlo indefinitamente, quindi è continuo: "non ci si può rappresentare se non uno spazio unico e, se si parla di molti spazi distinti, si intende soltanto parti dello stesso spazio unico e universale" (*KrV*, B39/A25, pp.56-57 [86]) e ancora "lo spazio viene rappresentato come una grandezza infinita data" (*ibidem*). Discorso analogo per il Tempo (cfr. *KrV*, B46/A30- B48/A32, pp.61-62 [94-96]). A questo punto è chiaro perché il giudizio (α) è un giudizio sintetico *a priori*: lo spazio in cui è costruita la retta è continuo (e non denso)³⁴.

Spazio e tempo sono *pre-concettuali* e quindi diventa complicato, per non dire impossibile, farne un discorso, in quanto, non appena vengono descritti, si cade in una loro concettualizzazione ed è quello che succede nelle citazioni appena fatte: Kant attribuisce alle intuizioni pure *a priori* la proprietà di essere "grandezze infinite", ma così facendo le sta trattando come se fossero concetti. Il filosofo ne è consapevole e nella *deduzione dei concetti puri dell'intelletto* afferma:

Abbiamo adesso già due specie di concetti, di genere affatto diverso, i quali però si accordano l'uno e l'altro in questo, che si riferiscono ambedue assolutamente *a priori* agli oggetti: cioè i *concetti dello spazio e del tempo*, come forme della sensibilità, e le categorie, come concetti dell'intelletto.

(*KrV*, B117/A84, p.103 [161-162]. Enfasi mia)

Kant è altrettanto consapevole che i concetti sono insufficienti per descrivere l'infinità dello Spazio e del Tempo, tanto che afferma:

lo spazio viene rappresentato come una grandezza infinita data. Ora, se conviene certo pensare ogni concetto come una rappresentazione contenuta in un

³⁴ Ricordo che il giudizio (α) afferma "la retta q è continua". Ricordo che è un giudizio analitico perché pensare una retta discreta non presenta contraddizioni; quindi, affermare " q è una retta continua" quindi non è sufficiente il principio di non contraddizione per determinarne la veridicità del giudizio. È da notare, tuttavia, che un giudizio del genere non descrive di per sé la continuità come proprietà, bensì si limita a usare la continuità come proprietà di un elemento geometrico. Altro discorso se si affermasse, per esempio: δ) "Il continuo è uniforme" o ϵ) "il continuo è omogeneo". (δ) e (ϵ) analizzano la continuità. Lasciamo sospeso per un attimo la differenza tra (α) e (δ) / (ϵ), perché questo discorso verrà ripreso alla fine di questo paragrafo alla luce di tutta l'analisi dell'estetica.

numero infinito di differenti rappresentazioni possibili (come loro nota comune), esso dunque le comprende sotto di sé: ma nessun concetto, come tale, può essere considerato come contenente in sé un'infinita moltitudine di rappresentazioni. Pure, lo spazio così (giacché tutte le parti dello spazio coesistono, all'infinito). Sicché la rappresentazione originaria dello spazio è intuizione pura a priori, e non concetto.

(*KrV*, B40/A25, p.57 [87])

I giudizi sullo spazio e sul tempo sono pertanto sempre insufficienti rispetto alla complessità delle intuizioni. Essi sono derivabili da una riflessione sui giudizi simili a quelli (α) o (β). In questo caso il continuo non è il predicato, bensì il soggetto:

γ) Il continuo è costituito da infinite parti.

Ovviamente se (γ) e (β) sono veri, allora si può concludere

($\gamma\gamma$) la retta è costituita da infinite parti.

Poco importa se (γ) sia analitico o sintetico, ma quello che è importante è vedere come essi cercano di concettualizzare qualcosa che è immediato e *pre-concettuale*³⁵. Questa operazione lo può fare solo quella disciplina che costruisce i propri giudizi, perché nel costruire i propri giudizi concettualizza lo spazio e il tempo³⁶. La matematica affermando (α) tratta la continuità dello spazio come un predicato, quindi già mediato dall'intelletto. Essa, nel momento in cui usa la continuità dell'intuizione, spiega la continuità stessa in quanto vede i suoi elementi (rette, serie numeriche, funzioni etc.) “continui” e quindi essi sono divisibili all'infinito, sono enti omogeni etc.; per esempio il giudizio (γ) vale perché deve valere il giudizio (α).

A questo punto bisogna fare una precisazione. (α) è un giudizio matematico e la matematica userà tale giudizio per i propri teoremi etc.; per esempio, se la retta q è

³⁵ Cfr. Smyth 2014.

³⁶ Anche la metafisica può usare la continuità per i propri giudizi, come per esempio “la materia non è fatta di parti semplici”, ma questi tipi di affermazioni portano solo a scontri dialettici, come verrà spiegata nella sezione dedicato alla seconda antinomia.

disegnata su un piano cartesiano, allora posso applicare il teorema di Bolzano-Weierstrass. Questo, tuttavia, non implica che la matematica abbia un pensiero riflessivo sui propri teoremi, sui propri enti e sulle proprietà derivate dallo spazio e dal tempo (il giudizio (γ) non è un giudizio matematico nel momento in cui non è costruito, ma esso deve valere perché il giudizio (α) è un giudizio apodittico e garantisce la validità dei teoremi matematici). Lo stesso Kant afferma che “la matematica pura e la scienza pura della natura, a sostegno della loro sicurezza e certezza, non avrebbero avuto bisogno di una deduzione quale finora abbiamo fatto per entrambe, poiché la prima si fonda sulla evidenza sua propria” (*Prl*, p.169 [97]). Pertanto, seguendo il filosofo contemporaneo Lewis, “se i filosofi hanno dei problemi con la matematica, è meglio per loro cambiare filosofia che per tutti noi rinunciare alle matematica”³⁷. Mettendosi il cuore in pace, si prende consapevolezza che la matematica fa la sua strada senza il bisogno immediato di riflettere sulla natura dei suoi enti, sulle conseguenze filosofiche dei suoi teoremi etc. Discorso diverso per la filosofia (in questo caso filosofia della matematica). La filosofia della matematica non deve solo provare a mostra l’apoditticità della matematica, ma deve anche riflettere sui giudizi come (α) e spiegare il significato, le conseguenze logiche etc. dei giudizi del tipo (δ) e (γ).

Quindi è vero che è la matematica la disciplina in grado di costruire i propri giudizi sintetici *a priori* grazie alla continuità, ma sarà poi la filosofia a dover ritornare su tali giudizi e delineare le proprietà della continuità scrutando dentro alle nostre intuizioni pure *a priori* e, costretta a concettualizzarle, dovrà continuamente volgere lo sguardo sui concetti matematici (come fluenti, differenziali, numeri iperreali etc.), poiché sono gli unici concetti che non portano a giudizi metafisici. Kant sostiene che la filosofia descrive mentre la matematica costruisce (cfr. *KrV*, B740/A712-B745/A717, pp.446-452 [732-736]). Nel presente elaborato si sta sostenendo che la filosofia della matematica riesce a descrivere ciò che la matematica ha costruito e, così facendo, descrive la continuità dello spazio e del tempo. Ovviamente, è un lavoro duro che non finisce mai, proprio perché la struttura dell’intuizione è *pre-concettuale* e sfugge dalle mani continuamente. Tuttavia, non bisogna scoraggiarsi, anzi: la filosofia deve esigere dalla matematica nuove costruzioni e nuove forme perché possa comprendere meglio la continuità.

³⁷ Plebani 2011, p.59.

Dopo e grazie a Kant il continuo è strappato dalla metafisica e diventa terreno fertile per un confronto tra la matematica e filosofia della matematica. A fine capitolo sarà chiaro come la metafisica possa produrre l'antinomia e quindi sarà limpido come non cadere nel suo inganno. Si argomenterà che l'antinomia è resa possibile da un'errata descrizione delle strutture matematiche da parte della filosofia. La citazione (D) sostiene proprio questa tesi: il problema è genetico alla domanda di stampo metafisico, non dalle costruzioni matematiche, le quali non sono mai antinomiche per definizione. Inserirsi nella cornice della filosofia trascendentale, significa delimitare il campo alla filosofia che non può essere mai metafisica. La filosofia dentro i confini della ragione umana si declina in filosofia della matematica (anche la matematica ha il campo limitato: banalmente lavora solo con il discreto). La filosofia trascendentale è in grado di fornire terreno fertile per la filosofia la quale, non è più metafisica, bensì filosofia della matematica proprio perché abbassa le pretese ed esige solo quello che l'intelletto può chiedere dalla matematica, né di più né di meno. Questa è una tesi forte, ma avrà una solida base argomentativa non solo con il confronto antinomia-dialettica nella prima critica, ma anche grazie al terzo capitolo. Nel terzo capitolo concretamente due costruzioni formali si scontreranno e sarà la filosofia della matematica ad avere la capacità di decretare quale sia la preferibile³⁸. Il criterio è l'intuizione pura *a priori*, complessa e infinita. Dalla struttura dell'intuizione, dalla costruzione della matematica e dalla riflessione filosofica si può sfiorare l'infinito fino a riuscir a comprendere complessi enti come gli infinitesimali: fino a Robinson erano banditi, dopo l'ANS, inserita in un quadro della filosofia trascendentale, il loro statuto sarà tutt'altro che dialettico.

Riassumendo: lo spazio e il tempo sono intuizioni che rendono possibili i giudizi sintetici *a priori*. Essi sono continui e il continuo è il presupposto della matematica in quanto la matematica è l'unica disciplina che ha giudizi sintetici *a priori*. Tale continuo non contiene nulla di empirico, solo così si può garantire l'universalità e necessità della matematica. Lo spazio e il tempo vengono concettualizzati dalla matematica. Il continuo concettualizzato è il continuo matematico il quale, grazie alla richiesta della filosofia della

³⁸ Anche se le strutture hanno lo stesso rigore logico. Si vedrà che l'ANS sarà più precisa, ma l'AS rimane una opzione valida e rigorosa (l'ANS non nega, anzi, conferma e potenzia l'AS). L'AS semplicemente "usa la continuità, l'ANS riesce, invece, ad avvicinare il continuo matematico a quello fenomenico. Si potrebbe argomentare addirittura che la filosofia della matematica può decretare quale sia la vera strada. È una tesi più impegnata, ma sostenibile.

matematica di nuovi enti più coerenti con il continuo intuitivo, potrà tendere all'omogeneità e complessità di quest'ultimo. Una volta fatta questa operazione siamo fuori dall'estetica e siamo dentro all'analitica, ossia a quella parte "che espone gli elementi della conoscenza pura dell'intelletto e i principi senza i quali nessun oggetto può essere assolutamente pensato" (*KrV*, B87/A63, p.84 [130]). L'Analitica trascendentale dovrà sempre riferirsi all'estetica come luogo di ogni esperienza possibile.

2.3.2 L'analitica: lo schematismo trascendentale

Una volta che l'intelletto riceve l'oggetto dall'intuizione, esso applica i concetti, i quali sono separati secondo le categorie.

Il legame tra intuizione e concetti avviene grazie allo schematismo e all'immaginazione produttiva che "denota la facoltà, la sintesi l'atto e, lo schema il prodotto di questa sintesi"³⁹. L'immaginazione produttiva ci permette di pensare oggetti della sensibilità, senza avere l'oggetto davanti, invece, lo schema "è una regola generale, un metodo per determinare immagini secondo un concetto puro"⁴⁰. È nello schematismo che il discreto irrompe e distrugge la continuità e l'omogeneità dello spazio e del tempo. Lo schema della quantità, la quale "[soltanto] si può costruire con col puro intelletto" si riferisce alla proprietà base del continuo, ossia alla sua divisibilità. Se vogliamo giudizi scientifici sul continuo, devono essere matematici (ossia sintetici *a priori*)⁴¹, quindi costruibili (come si è detto più volte), ma "non c'è se non il concetto di quantità che si possa costruire, cioè esporre a priori nella intuizione" (*KrV*. B742/A714, p.447 [734]). Conclusione: la matematica deve lavorare con il continuo, però la quantità, ossia il discreto, è il solo mezzo a sua disposizione. Se accogliamo come buona la filosofia trascendentale ci troviamo un'intuizione continua e un intelletto che ragiona solo con il discreto.

Gli schemi della quantità e della qualità portano a due principi chiamati da Kant "matematici", dove l'autore discuterà in modo massiccio sulla continuità: essi sono *assioma dell'intuizione e anticipazione della percezione*. Il primo afferma che "tutte le

³⁹ Micheli 1998, p.41.

⁴⁰ *Ivi*, p.43

⁴¹ Micheli sostiene che la matematica è "l'unica vera scienza pura, l'unica forma di conoscenza a priori di oggetti di cui sia capace l'uomo" (*Ivi*, p.34).

intuizioni sono quantità estensive” (*KrV*, B202/A162, p.149 [238]), il secondo sostiene che “in tutti i fenomeni il reale che è oggetto della sensazione ha una quantità intensiva, cioè un grado” (*KrV*, B207/A166, p.152 [243]).

Bisogna fare attenzione perché l’ombra dell’antinomia si insinua proprio a questo livello: per ora non abbiamo ancora un mondo dell’esperienza *a posteriori*, ma abbiamo solo i concetti e il mondo dell’intuizione pura *a priori*. Anche l’anticipazione è *a priori*, infatti è “anticipazione”⁴²: l’Io trascendentale si appropria al mondo fenomenico avendo già uno spazio e un tempo tanto immediato e quindi continuo quanto concettualizzato attraverso il grado che non è nient’altro se non il discreto, il numero, il punto⁴³. L’assenza dell’*a posteriori* è chiara se si considera che i due principi matematici sono affrontati nella sezione intitolata *dello schematismo dei concetti puri dell’intelletto*. Nell’introduzione di questa sezione Kant sottolinea che gli schemi non esistono se non nel pensiero e, prendendo come esempio lo schema del triangolo, afferma “non può esistere [lo schema del triangolo] mai altrove che nel pensiero, e significa una regola della sintesi della immaginazione rispetto alle figure pure presenti nello spazio” (*KrV*, B180/A141, p.138 [216]). Nulla ci vieta pensare i gradi, le quantità estensive o i fluenti come schemi analoghi a quello del triangolo, *ergo* appartenenti al mondo del pensiero che si riferiscono all’intuizione dello spazio e del tempo. L’antinomia sorge nel momento in cui vogliamo avere l’esperienza degli enti che di per sé sono solo matematici e derivati da proprietà appartenenti allo spazio e al tempo come intuizioni pure *apriori*.

Ritornando sui nostri passi: lo spazio e il tempo vengono pensati attraverso la grandezza estensiva e quella intensiva. Essi sono quantità intensive come afferma l’assioma, ossia quantità “nella quale la rappresentazione delle parti rende possibile la rappresentazione del tutto (e perciò necessariamente la precede)” (*KrV*, B203/A162 p.150 [239]). Sono per Kant anche quantità estensive perché vengono pensanti come aggregati, i quali nella loro somma tendono a dare il tutto (il quale è l’omogeneo e il continuo). La somma delle parti non è statica, bensì cinetica in quanto “io non mi posso rappresentare una linea, per piccola che sia, senza tracciarla nel pensiero” (*ibidem*). Moretto evidenzia la vicinanza di Kant alla concezione newtoniana, accentuata dal fatto che Kant nella

⁴² Kant spiega la parola anticipazione così: “anticipazioni dei fenomeni potrebbero chiamarsi le determinazioni pure nello spazio e nel tempo, sì rispetto alla figura che alla quantità, poiché esse rappresentano a priori ciò che sempre può essere dato a posteriori (*KrV*, B209/A167, p.153 [244-245]).

⁴³ Garrett afferma “This is not a question of luck. The Principle [i.e. the axiom] is a synthetic a priori truth: it expresses a condition of experience that the world must conform to.” (Garrett 2003, p.16).

anticipazione userà proprio i fluenti per spiegare il continuo⁴⁴. A questo livello le due intuizioni hanno già perso una loro fondamentale proprietà: la continuità. Questo porta a pensare lo spazio e il tempo come “holistic mereological structure”⁴⁵, dove le parti non raggiungeranno mai il tutto e il tutto eccede le parti.

Una volta compreso che il continuo è presupposto dalla matematica, che l’intelletto lavora con il discreto e che la matematica riesce a costruire giudizi sensati sul continuo, Kant usa la matematica del suo tempo per descrivere la continuità. Per Kant i fluenti (oggi diremmo i differenziali) sono l’essenza della continuità, in quanto sono le più piccole parti possibili (i gradi più piccoli) (cfr. *KrV*, B207/A166-B210/A168, pp.154-155 [244-245])⁴⁶.

La grandezza estensiva, allora sono le parti che tendono ad essere tutto lo spazio, le grandezze intensive sono gli istanti dovuti dal fatto che “ogni realtà nella percezione ha un grado, fra il quale e la sua negazione, c’è posto per una serie infinita di gradi sempre minori” (*KrV*, B218/A176, p.158 [253]). Tanto le grandezze intensive quanto quelle estensive sono continue, infatti “tutti i fenomeni, considerati estensivamente o intensivamente, sono quantità continue” (*KrV*, B214/A173, p.155 [249]). La matematica, scienza delle grandezze, tenderà all’omogeneità e alla continuità attraverso i suoi enti. I numeri irrazionali, come sono stati visti nel primo capitolo, ne sono un esempio: essi provano a legare la retta che sennò sarebbe densa. La matematica ha fatto, in questo senso, precedere il discreto rispetto al continuo, come Zellini voleva. È chiaro, tuttavia, che il continuo rimane il presupposto della matematica che altrimenti non dovrebbe tendere a nessuna continuità e quindi non avrebbe bisogno di nessun numero irrazionale.

Il continuo è un continuo affatto diverso rispetto a quello dell’esperienza: esso è puro e *a priori*. Su questo punto ci si ritornerà nel prossimo paragrafo, ma prima è necessario mettere il punto del ciclo argomentativo fatto dall’inizio della tesi fin qui, sottolineando cosa si è guadagnato grazie alla filosofia trascendentale:

1. Il continuo precede ogni analisi matematica in virtù del fatto che essa, per essere scienza, deve riferirsi allo spazio e al tempo che sono continui.

⁴⁴ Cfr., Moretto 1999, pp.121-123 e pp.335-336.

⁴⁵ Smyth 2014, p.560. Su questo punto si tornerà nel prossimo paragrafo.

⁴⁶ Kant definisce così i fluenti: “fra realtà di un fenomeno e la sua negazione c’è una catena continua di molte possibili sensazioni intermedie, la cui differenza, dall’una all’altra, è sempre più piccola della differenza che v’è fra quella data e lo zero, o completa negazione” (*KrV*, B210/A168, p.154 [245]).

2. Il primo problema del primo capitolo ha trovato in Kant una possibile soluzione. Il discreto è genetico alla mente umana, la quale, nel momento in cui approccia la continuità dello spazio e il tempo, è costretta a ragionare per grandezze, che siano estensive o intensive. Entrambe le grandezze tendono a ricostituire l'omogeneità del continuo intuitivo. La filosofia della matematica ha l'onere di studiare la continuità in quanto ha la matematica come campo di indagine, ed essa sola si può riferire costruttivamente alle intuizioni pure *a priori*, ossia è l'unica disciplina che riesce a usare il discreto per produrre conoscenza.

3. Il discorso intorno al continuo è all'interno del "pensiero" e si riferisce alle intuizioni pure *a priori*; quindi, non è mai riferito (né si fonda) sul mondo dell'esperienza⁴⁷.

Il terzo punto è nevralgico sia per capire lo scontro antinomico sia per riabilitare la filosofia trascendentale; pertanto, si conclude il paragrafo con una piccola annotazione finale. Moretto sottolinea che è vero che da un lato Kant accoglie il lessico di Newton (a discapito di quello di Leibniz), ma c'è una differenza radicale tra il filosofo e il fisico in quanto il secondo "aveva inteso la generazione delle grandezze come un fatto che avviene in natura, Kant ritiene che questa generazione avvenga a livello della sintesi trascendentale che viene effettuata da parte del «soggetto»."⁴⁸ La matematica, con il suo modo di operare, "guarda" l'intuizione dello spazio e del tempo e lo studia secondo i concetti che provengono dell'intelletto (come quello del triangolo o di fluente). Facendo questo da un lato deve dare ragione a tutte le proprietà delle intuizioni esposte nell'estetica, dall'altro anticipa l'esperienza, la quale dovrà in qualche modo seguire queste regole dedotte sinteticamente, ma *a priori* e mai a posteriori!

⁴⁷ Su questo punto bisogna stare attenti a non scendere in discorsi psicologistici. Nel seguente elaborato si sta sostenendo solamente che il continuo che fonda la matematica non ha niente di empirico, pur essendo extra-matematico. Il continuo matematico, infatti, è il risultato della discretizzazione del continuo intuitivo. Il continuo matematico è l'approssimazione che tende al continuo intuitivo, come voleva Zellini. Ossia, la matematica presuppone il continuo intuitivo, lavora con il discreto e così facendo costruisce il continuo matematico. Zellini, quando afferma che il discreto precede il continuo, intende il continuo matematico, non quello intuitivo, il quale è l'orizzonte di senso di tutto l'impianto del calcolo, ossia un suo presupposto.

⁴⁸ Moretto 1999, p.340.

2.3.3 La seconda antinomia

Quanto è stato detto nel paragrafo precedente lascia intravedere l'errore in cui cade la ragione provocando la seconda antinomia. Della seconda antinomia sono state date varie soluzioni e interpretazioni⁴⁹, ma qui si vuole salvare il continuo come concetto studiabile dalla matematica e non creare un compendio di tutta la seconda antinomia matematica (come viene chiamata da Kant).

La tesi sostiene che la sostanza consta di parti semplici, negate dall'antitesi. Singolare è notare come la dimostrazione della tesi fa leva sul mondo sensibile; invece gli argomenti dell'antitesi sono incentri sulle proprietà dello spazio esposte nell'estetica: il composto occupa uno spazio e poiché "lo spazio non consta di parti semplici, bensì di spazi, dunque, il semplice occupa uno spazio" (*KrV*, B463/A437, p.295 [479]), anche il composto non consta di parti semplici. La dimostrazione dell'antitesi fa leva su proprietà dello spazio analizzati nell'estetica e concettualizzati nell'analitica; quindi, si può concludere che l'analitica porta ad un conflitto antinomico e, quindi, i giudizi sintetici *apriori* sono dialettici! Un disastro. Bisogna allora capire cosa Kant intenda e quale sia la causa del conflitto per evitare di buttare via tutto ciò che si era guadagnato fino al paragrafo precedente.

Kant percepisce la drasticità del conflitto e afferma (citazione (D)) "sono questioni [i conflitti della ragione] per cui la soluzione il matematico volentieri darebbe tutta la sua scienza" (*KrV*, B491/A463, p.311 [509]), ma non può, eppure abbiamo visto che il giudizio "lo spazio è divisibile all'infinito" è un giudizio matematica, *ergo* apoditticamente certo! Di fatto il problema non è il continuo in sé, ma una sua diretta conseguenza: la sua divisibilità all'infinito. Come abbiamo visto nel paragrafo dedicato all'estetica, anche per Kant è assurdo che si possa concepire un concetto che contiene in sé una moltitudine di infinite rappresentazioni, ma lo spazio è un concetto *sui generis*. Esso è un concetto che deriva direttamente da un'intuizione pura e per Kant tale intuizione deve essere tanto infinitamente grande quanto infinitamente piccola (anche se poi è una mente finita a dover usarla per produrre i propri giudizi). Il motivo che fa sorgere l'antinomia è una considerazione errata dell'intuizione che viene scambiata come intuizione empirica. Per cogliere il punto è molto utile la distinzione di Bennett di "real divisibility" (RD) e "conceptually

⁴⁹ Per esempio Strawson 1996, pp.187-189, oppure Bennett 1974, capitolo nove, oppure Moretto 1999, capitolo quinto, oppure Bell 2019, pp.91-98.

divisibility” (CD)⁵⁰. L’analitica parla e descrive un mondo concettuale che si riferisce ad un’intuizione pura *a priori*. Tale intuizione non si fonda sull’esperienza, semmai è il contrario: l’esperienza è resa possibile e appare così proprio perché deriva dalle categorie e dalle intuizioni dello spazio/ tempo. L’esperienza non è una derivazione di diretto isomorfismo per cui, se la matematica ha dei fluenti, allora anche nell’esperienza percepiamo dei fluenti. Essa è piuttosto una derivazione di possibilità, ossia è possibile dividere una porzione di spazio infinite volte (o meglio possiamo dividere fino alla più piccola porzione possibile), quindi nell’esperienza non è da escludersi che si percepirà, con o senza strumenti, una porzione più piccola rispetto a quella di partenza. Da questo, tuttavia, non si potrà mai pensare di aver dimostrato che il mondo è fatto da composti o da parti semplici, semplicemente perché nell’esperienza non avremmo mai né una né l’altra cosa (tanto quanto nell’esperienza non avremmo mai un cominciamento o nessun cominciamento come afferma la prima antinomia). Kant spiega questa quanto è stato appena detto in maniera analoga, ma con un lessico che si concentra tra la differenza tra indefinito e infinito:

(...) la prima espressione [*in indefinitum*] non significa altro: prolungate quanto voi volete [la retta], e la seconda [*in infinitum*] invece: voi non dovete cessare mai di prolungarla. (...). Così della divisione d’una materia data tra i suoi limiti (d’un corpo), deve dirsi che essa va all’infinita. Questa materia infatti è tutta e, però data con tutte le sue parti possibili nella intuizione empirica.

(*KrV*, B540/A 512, pp.336-337 [554-555])

Con questa premessa Kant afferma nella sezione chiamata *Soluzione dell’idea cosmologica della totalità della divisione d’un tutto dato in una intuizione*:

Ciò non ostante, non è a nessun patto concesso di dire di un tal tutto che è divisibile all’infinito: esso risulta d’infinite parti. Perché, quantunque tutte le parti siano contenute nell’intuizione del tutto, pure non v’è contenuta tutta la divisione (...). La divisibilità di esso [del fenomeno] si fonda sulla divisibilità

⁵⁰ Bennett 1974, p.170.

dello spazio, che costituisce la possibilità del corpo come un tutto esteso. Questo è dunque, divisibile all'infinito, senza tuttavia che per ciò consti di infinite parti.

(*KrV*, B552/A524, pp.342-343 [566]).

Da queste due citazioni si potrebbe abbracciare quella interpretazione che vede in Kant una riformulazione del lessico classico tra infinito in potenza e infinito in atto⁵¹, per cui lo spazio fisico è divisibile solamente in potenza; Kant, tuttavia, ha una tesi molto più forte, per cui se “(...) la distinzione tra la divisione concettuale e reale può essere applicata allo *spazio*”, allora Bennett conclude che “è possibile che sia falso che lo spazio è davvero divisibile all'infinito, anche se è matematicamente sicuro la sua divisibilità all'infinito”⁵². Considerando quanto è stato detto sull'estetica e sull'analitica si può concludere che non c'è in gioco solo un infinito in atto o un infinito in potenza, ma molto di più: che cosa può la matematica costruire, che cosa la filosofia può comprendere e che cosa i sensi possono percepire.

L'infinito è accessibile dalla mente umana solo in virtù del fatto che le intuizioni, condizione di possibilità della conoscenza in generale, sono infinite e complesse (come si è visto nell'estetica). Il continuo ci mostra chiaramente lo scarto tra le categorie e le intuizioni (come si è visto nell'analitica). La matematica usa le categorie e le intuizioni, riuscendo, attraverso gli schemi, a combinare entrambe le fonti di coscienza (come è stato detto più volte). Il prodotto da questa combinazione sono proprio i giudizi apodittici. Il continuo innerva la matematica, la quale è costretta a costruire gli enti sopra di esso. Tali enti tenderanno di ricostituire il continuo iniziale, in modo tale che il continuo matematico sarà un'approssimazione (sempre più precisa) del continuo intuitivo. Grazie alla dialettica possiamo vedere come la filosofia può scegliere se avere una postura dialettica verso gli enti matematici (quindi arrivare alle antinomie) o avere un comportamento epistemico verso gli stessi enti. Essa nel secondo caso può e deve descrivere il continuo del mondo intuitivo. La seconda antinomia mostra i limiti della ragione umana, fin dove la matematica può spingere e come la filosofia non deve congetturare.

⁵¹ Interpretazione sostenuta sia da Bell 2019 che da Moretto 1999.

⁵² Bennett 1974, p.183: “(...) the distinction between conceptual and real divisibility can be applied to *space* (...) I offer the suggestion that it might actually be false that space is infinitely really divisible, although its is infinity conceptual divisibility is mathematically secure”.

Bennett con la sua differenza tra (CD) e (RD) non riesce a rendere pienamente giustizia alla filosofia della matematica kantiana. La divisione concettuale avviene da parte della matematica, ma mai nel mondo dell'esperienza; essa si effettua solo nelle intuizioni dello spazio e del tempo, proprio perché i sensi sono limitativi ed estranei alle categorie matematiche⁵³ (con i sensi percepiamo uno spazio continuo non perché percepiamo tutti gli infiniti pezzi, ma semplicemente perché noi ci avviciniamo al mondo con uno spazio continuo⁵⁴). Per questo motivo tale divisione sarà solo concettuale e mai “reale”, se con reale si intende “fenomenico”. L'unico modo per pensare coerentemente il punto di vista di Kant è pensare l'intuizione dello spazio e del tempo come completamente slegate dall'esperienza, ossia che esse precedendo il mondo fenomenico e, essendo totalmente altro rispetto all'apparato categoriale, non formano nessuna antinomia. Si può concludere che l'infinito del mondo fenomenico è in potenza (usando un lessico kantiano: divisibile *in indefinitum*), un altro tipo di infinito è rispetto a quello dello spazio delle intuizioni che, in un certo senso, è in atto (*in infinitum*), ma quello “infinito in potenza” potrebbe essere fuorviante: esso significa solamente che non ci è lecito limitare la divisione delle cose nel mondo fenomenico⁵⁵. È vero che percepiamo il mondo fenomenico come continuo, perché esso è già strutturato da uno spazio continuo, ma questo non vuol dire che percepiamo ogni porzione di reale o che esso contiene un'infinità di parti.

Sembrerebbe che l'isomorfismo “continuo matematico” - “continuo fenomenico” sia caduto: in realtà, è mantenuto nel momento in cui si considera un terzo tipo di continuo, quello intuitivo. L'isomorfismo ora è tra il continuo matematico e quello intuitivo, in virtù del fatto che il secondo è il presupposto del primo. Il continuo fenomenico è reso possibile da quello intuitivo, *ergo* esiste uno stretto legame anche tra il continuo fenomenico e quello matematico. Grazie a questo isomorfismo, la filosofia riesce a studiare le intuizioni *pre-concettuali*, le quali, altrimenti, sarebbero inaccessibili. La filosofia, inoltre, grazie alla seconda antinomia, limita il campo d'azione. Il continuo dell'esperienza

⁵³ Questa è una tesi di base in Parsons 1964.

⁵⁴ La strada dell'esperienza può essere percorribile per accedere alle intuizioni, come afferma Kant in *KrV*, B163-B169, 128-130 [203-206]. Ma questo non vuol dire che l'esperienza fonda la nostra coscienza; infatti, noi accediamo al mondo dell'intuizione con i sensi, con già l'intuizione e le categorie come strutture trascendentali. L'esperienza viene ordinata dall'intelletto e dalle intuizioni ed essa ci appare così grazie a già un ordinamento precedente (*a priori* appunto). Prendere la “via dell'esperienza” è come studiare uno albero nel tentativo di indicare rami, tronchi e radici.

⁵⁵ Non nel senso che è potenzialmente divisibile in una tensione verso l'infinito in atto. Kant usa, infatti, la parola “indefinito” non “infinito”. Un infinito a livello intuitivo.

presenta la completa infinità dell'infinito delle intuizioni, ma da questo la filosofia non può affermare che sarà possibile percepire i fluenti, oppure ad un certo punto si potrà percepire la porzione di spazio più piccola possibile.⁵⁶ Il continuo disvela l'infinito alla matematica solo se si resta nelle intuizioni pure *a priori*. Questo non vuol dire che la matematica riesca a descrivere completamente quell'infinito in atto, ma attraverso gli strumenti formali, può e deve cogliere il continuo e tutte le sue (infinite) parti.

Smyth lo spiega molto bene nel suo articolo cogliendo la sfida di spiegare come “la nostra rappresentazione di qualcosa essenzialmente strutturata unitaria e olistica comporta che ciò che è così rappresentato ci deve essere dato perché lo si possa rappresentare in assoluto. La risposta, io penso, è da trovarsi nelle basi di Kant di attribuire una struttura unitaria e olistica dello spazio nel primo spazio [quello delle intuizioni]. È precisamente perché lo spazio è infinito e continuo che è una struttura unitaria e olistica. La finitudine della mente umana, che Kant ragionevolmente mantiene, è incapace di spiegare tale molteplicità infinita e olistica. Nella misura in cui siamo in grado di rappresentare (e lo facciamo) una tale manifestazione, quindi, esso ci deve essere dato, cioè la nostra rappresentazione originale deve essere intuitiva.”⁵⁷ Interpretando Kant, l'autore mostra come l'intuizione è immediata e intuitiva mentre le categorie sono mediate e intellettive (come si è visto anche precedentemente). Questo porta alla deficienza dell'intelletto a cogliere completamente l'infinita complessità dello spazio e del tempo. Tali intuizioni vengono ridotte in una serie di discreti che tendono all'infinito.

La conclusione di Smyth è in termini di arresa, allorquando afferma: “l'infinità complessità dello spazio è una condizione di possibilità dell'esperienza; non è (e non ha bisogno di essere) un oggetto dell'esperienza possibile, per nessuna sintesi intellettuale è

⁵⁶ Dal confronto con l'antinomia sembrerebbe che Kant oscilli tra platonismo (la scuola della filosofia della matematica che ritiene che gli enti matematici sono come le idee di Platone), poiché gli enti matematici potrebbero essere di fatto un costrutto di categorie innate e intuizioni *pre-esperenziali*, e tra realismo, in virtù del fatto che gli enti matematici sono una diretta conseguenza delle stesse condizioni di possibilità dell'esperienza (del *reale*) e, quindi, gli enti matematici sono al più belle finizioni per concettualizzare l'intuizione, la quale, è condizione di possibilità tanto dell'esperienza quanto della matematica.

⁵⁷ Smyth 2014, p.559: “Our challenge, then, is to explain why our representing something as essentially unitary and holistically structured entails that what is thus represented must be given to us in order for us to represent it at all. The answer, I think, is to be found in Kant's grounds for attributing essential unity and holistic structure to space in the first place. It is precisely because space is infinite – and, in particular, continuous – that it is essentially unitary and holistically structured. The finitude of the human mind, Kant reasonably maintains, is incapable of accounting for such a holistic, infinitary manifold. To the extent that we can (and do) represent such a manifold, therefore, it must be given to us – i.e. our original representation of it must be intuitive”.

capace di comprendere esso. La rappresentazione spaziale è intuitiva perché il suo contenuto deve essere dato a noi”⁵⁸. A questo punto se si conclude che nessuna disciplina può tentare di comprendere il continuo poiché si porta appresso l’infinità, allora bisogna abbandonare il commentario nonostante mostri con chiarezza il salto tra le intuizioni e le categorie. Certamente la condizione di possibilità dell’esperienza è infinitamente più complessa sia dell’esperienza sia della matematica, ma per il primo caso è un’osservazione che rasenta l’ovvio (altrimenti si arriverebbe in un momento in cui si ha esperito tutta l’esperienza) e nel secondo caso non esula la matematica alla comprensione del continuo, come afferma lo stesso Kant nella *dottrina del metodo*: “La matematica si occupa (...), della continuità dell’estensione come d’una qualità stessa” (*KrV*, B743/A715, p.447 [734]). Citazione giustificata lungo tutto il secondo paragrafo di questo capitolo.

Dalla riflessione sulla seconda antinomia è chiaro che si delinea una soluzione rispetto al secondo problema del primo capitolo: il continuo matematico presenta l’infinito perché la matematica tende alla continuità delle intuizioni, sua condizione di possibilità. I numeri irrazionali, per esempio, sono quegli enti che vengono costruiti propri per adempiere a questo scopo (primo livello, dei due, dove si trova l’infinito nel continuo). Essi sono “cerniere” della retta. La matematica, lavorando sempre con il discreto, non consocerà mai il valore esatto degli irrazionali, ma solo finite approssimazioni che tendono all’infinito. Ogni approssimazione discretizza, quindi la retta presenterà infinite parti (secondo livello). L’infinito nel continuo necessita anche la riflessione filosofica; il continuo, infatti, disvela l’infinito alla filosofia della matematica, disciplina in grado di riflettere sugli enti matematici⁵⁹.

La seconda antinomia mostra che non si può derivare di poter percepire l’infinito anche nella esperienza, poiché i nostri sensi limitati. L’antinomia, perciò, mostra che la matematica deve sottostare ai limiti della ragione umana, per cui non potrà portare mai l’umano ad avere la presunzione di percepire, per esempio, la più piccola parte del cosmo

⁵⁸ Smyth 2014, p.563: “Infinitely complex space is a condition of the possibility of experience; it is not (and need not be) an object of possible experience, for no intellectual synthesis is capable of comprehending it. Spatial representation is intuitive because its content must be given to us”.

⁵⁹ Alla matematica è sufficiente avere l’irrazionale per completare la retta, ma tutte quelle riflessioni intorno alla matematica come disciplina che tende all’infinito delle intuizioni etc. sono di stampo filosofico. In queste righe si sta proprio riflettendo sugli enti matematici per dedurre proprietà del continuo matematico e di quello intuitivo; quindi, si stanno facendo discorsi di stampo filosofico. Tutto il capitolo è un esempio di come la filosofia opera, nel terzo capitolo si vedrà come il pensiero filosofico sia in grado di riflettere sulla matematica contemporanea fino a esigere nuovi sistemi formali.

o la più grande. Se tentasse un tale passo cadrebbe nel dominio della metafisica, quindi in un conflitto antinomico. Certamente: come si è detto fin da subito dall'inizio della tesi, tutti noi facciamo esperienza del continuo, ma questo perché ci presentiamo al mondo con uno spazio e un tempo continui. Tuttavia, questo non vuol dire che il numero iper-reale, un fluente o tutta l'area tra un'iperbole e il suo asintoto siano esperibili.

2.4 Osservazioni conclusive

Per concludere il capitolo si vuole riprendere due critiche fatte al filosofo⁶⁰: la prima criticava Kant di fondare la matematica sul mondo dell'esperienza mentre la seconda sottolineava come il sistema kantiano fosse incapace di accettare nuovi enti matematici, ormai essenziali per la pratica matematica.

La prima critica accusa il filosofo di fondare la matematica sull'esperienza. Essa è chiaramente un fraintendimento. Kant non fonda la matematica sull'esperienza, poiché, se così fosse, si avrebbe la prima e la seconda antinomia. I giudizi sintetici *a priori* non hanno nulla di empirico, essi sono possibili se si pensa lo spazio e il tempo come immediati tanto *pre-concettuali* quanto oltre ogni esperienza possibile. La matematica non si fonda sul mondo fenomenico e, costruendo i propri giudizi, concettualizza inevitabilmente lo spazio e il tempo, esplicitandone sempre una porzione delle loro caratteristiche. Gli enti matematici saranno sempre insufficienti di fronte all'infinita complessità dello spazio e del tempo, per questo possono essere visti come ideali trascendentali, ma essi sono diversi rispetto agli ideali del Regno dei cieli o della virtù. Questi ultimi non verranno mai dati nell'esperienza e non sono in grado di costruire nessun giudizio, a differenza dell'idea di continuo dello spazio e del tempo. Anche il mondo fenomenico è reso possibile dalle intuizioni; quindi, la filosofia della matematica, limitata dalla filosofia critica, descriverà anche (sempre un po' meglio) il mondo fenomenico, attraverso i concetti matematici.

La seconda critica ritiene il sistema kantiano sia incapace di accogliere nuovi enti. Si vuole concludere il paragrafo mostrando che Kant può essere attualizzato, poiché il suo sistema è aperto ai nuovi simboli e concetti senza tradire le sue premesse.

⁶⁰ Viste nel paragrafo 2.2.1.

Il tallone d'Achille del filosofo potrebbe essere proprio il formalismo dell'analisi matematica dei nostri giorni, inoltre il filosofo tedesco presenta bizzarre giustificazioni filosofiche ai nostri occhi: senza un'attenta analisi potrebbe sembrare strano abbracciare un modello che fonda la somma come aggiunta di oggetti (come Kant afferma nell'esempio di $7+5=12$, ricorrendo alle dita della mano (cfr. *Prl*, p.33 [21])). Kant non ha in mano un sistema formale raffinato come quello di oggi, ma possiamo affermare che da un lato possiamo arrivare all'idea che tre più quattro sia uguale a sette perché è noto che se dentro la tasca ho tre monete e ne aggiungo altre quattro, allora ho sette monete. Così come posso comprendere (o conoscere per la prima volta) la proprietà associativa: se ho in tasca quattro monete e ne aggiungo altre tre, le monete saranno sempre sette indipendentemente da come vengono mischiate; questo, tuttavia, non vuol dire che tre più quattro fa sette perché conto le dita o i sassi etc., il fondamento algebrico della somma risiede sugli assiomi di Peano, sul concetto di cardinalità, ordinalità etc., anche se resta buona l'idea di base che l'esperienza è il primo mezzo che ci sprona a conoscere. Fatta questa precisazione, si può essere ben disposti di accogliere il modello kantiano come filosoficamente valido sotto il profilo della filosofia della matematica, proprio perché non ha alcun fondamento empirico ed è in grado ad accogliere nuovi enti e nuove sintassi matematiche.

L'analisi condotta e il confronto tra analitica e dialettica ha mostrato che la condizione di possibilità della matematica come scienza apoditticamente certa non risiede nel mondo fenomenico, bensì nel mondo "di ogni esperienza possibile". Nello studio della struttura dello spazio e tempo successivamente si comprende anche il mondo fenomenico, il quale essendo conforma alle regole delle intuizioni e di ogni esperienza possibile, si adatta ad esso⁶¹. La continuità, come proprietà dell'omogeneo spazio, rende plausibile uno sviluppo matematico teoretico dell'algebra senza tradire la filosofia critica, anche se si abbandonano gli strumenti matematici del '700. Lo stesso filosofo permette nuovi apparati formali purché vengano costruiti. Ossia purché ci si riferisca alle intuizioni dello spazio e del tempo. Kant afferma a proposito del formalismo algebrico che "con le sue equazioni (...), non è per questo una costruzione geometrica, ma è pur sempre una costruzione caratteristica, in cui con i segni si rappresentano i concetti, segnatamente del rapporto della quantità, nell'intuizione" (*KrV*, B762/A734, p.457 [751])⁶². I simboli, in

⁶¹ Cfr. Shapiro 2005, p.44.

⁶² Vedere anche *KrV*, B745/A717 p.449 [736]).

algebra, rappresentano una intuizione pura *a priori* e Kant ha a disposizione il simbolismo del suo tempo; quindi, il filosofo non può spingersi oltre a Newton o a Leibniz. Questo significa, dall'altro lato, che ogni simbolismo che riesce a dar senso alla continuità dello spazio e del tempo è inseribile dentro al sistema trascendentale. Così facendo si rinnova l'apparato concettuale/matematico kantiano. Sulla differenza di grandezza estensiva e intensiva, per esempio, Garrett vede la differenza di numeri ordinali e cardinali (grandezze intensive sono i numeri ordinali, le grandezze estensive sono i numeri cardinali)⁶³. L'ordinalità di un numero indica la posizione del numero all'interno della serie, la cardinalità indica la quantità di elementi dentro un insieme. Per i numeri finiti i numeri ordinali e quelli cardinali coincidono ed è abbastanza ozioso, per esempio, domandarsi quale sia il numero ordinale e cardinale di 5 (è sempre cinque). Per i numeri chiamati "infiniti" invece la cosa diventa più interessante. Cantor definisce il primo numero della serie dopo tutti i numeri finiti con " ω " e la cardinalità di tutti i numeri naturali con " $\aleph$ ". Kant pensa che lo spazio è infinitamente dato in estensione (cfr. *KrV.*, B39/A25-B40/A25, p.57 [87]), quindi, teoreticamente, possiamo assegnarli un " $\aleph$ " (il quale potrebbe indicare la quantità di tutti i punti dello spazio); anche il tempo è infinitamente dato (cfr. *KrV*, B47/A31-B48/A32, pp.61-62 [95-96]) quindi, essendo la condizione di possibile per costruire qualsiasi tipo di successione possiamo immaginarci il numero che chiude tutto l'infinito coincidente con l' " ω " di Cantor.

Ironia della sorte: i fluenti (quelli che per Kant sono l'essenza della continuità) possono essere definiti come $1/\omega$, oppure, per essere più generici, con $1/\infty$ ⁶⁴. Il modello trascendentale riesce allora a rileggere sapientemente sia l'insiemistica di Cantor (il quale criticò moltissimo Kant proprio nell'aver fondato i giudizi matematici nello spazio e nel tempo) sia i numeri iperreali che saranno alla base dell'analisi non-standard, un tipo di analisi fondata da Robinson per risolvere "il problema differenziale" e chiudere i lunghi dibattiti metafisici intorno all'analisi matematica.

In conclusione, la filosofia riesce a comprendere il continuo intuitivo nel momento in cui analizza gli elementi (che sono il discreto e formano il continuo matematico) della matematica, la quale deve presupporre il continuo. Anche se il discreto è la negazione del continuo, resta l'unica via percorribile, in virtù del fatto che la mente umana ragiona solo

⁶³ Garrett 2003, p.16.

⁶⁴ Ternullo e Fano 2021, pp.98-99.

con il discreto. Anche se la mente umana è insufficiente a comprendere l'infinita complessità del continuo la filosofia, attraverso il formalismo matematico, può tentare di comprendere e descrivere la complessa olistica struttura del continuo dello spazio e del tempo (primo problema del primo capitolo). La filosofia della matematica, pertanto, è in grado di limitare il campo di indagine sulle strutture matematiche per comprendere il continuo e la sua infinità interna (secondo problema del secondo capitolo).

Kant spiega la proprietà della continuità con il lessico a lui contemporaneo, ma nulla ci vieta di includere nuovi elementi matematici purché vengano costruiti grazie alle intuizioni. Quest'ultimo fatto è di grande interesse perché riesce a riempire di senso i simboli formali che, altrimenti, sarebbero “vuoti”; delle costruzioni senza un'intuizione precedente non avrebbero nessun contenuto e non ci sarebbe nessun strumento per confrontarle tra di loro (corollario: i giudizi analitici non sono sufficienti per fondare la matematica, come volevano, invece, Frege o Cantor). Una costruzione formale matematica, anche se costruita solo su basi logiche (come sarà quella di Weyl) deve coerente con il mondo dell'intuizione, altrimenti si avranno tanti assiomi e definizioni vuote e prive di senso. Poco cambia se l'intuizione è presupposta oppure è il banco di prova successivo: nel secondo caso semplicemente si ignora l'intuizione prima per considerarla poi per essere più fedeli alla pratica matematica nella sua costruzione formale (ossia restando nel campo della matematica e della logica), nel primo caso invece si prende consapevolezza fin da subito del suo presupposto anche se è un presupposto non immediatamente matematico.

Un matematico e filosofo del secolo scorso si è occupato del continuo con chiave intuizionistica e costruttivista. Si sta parlando di Hermann Weyl e in particolare del suo libro *Das Kontinuum, kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*. Weyl è un autore eclettico che ha spaziato dalla matematica alla fisica, passando per la filosofia. Era allievo di Hilbert e collega di Einstein. È un autore di estremo interesse per comprendere il continuo e l'infinito in un'ottica contemporanea tanto filosofica quanto matematica grazie alla sua sensibilità tanto vero alle scoperte matematiche quanto verso i problemi filosofici. Si vedrà che Weyl non dista troppo dalle premesse kantiane e riesce a farci leggere l'insiemistica, la logica e i concetti di limite, funzioni etc. in un'ottica costruttivista e intuizionista. Weyl mostrerà come i differenziali sono essenziali per la comprensione del continuo delle intuizioni, ma, essendo limitato dall'analisi standard, non riuscirà

a costruirli sensatamente. A questo punto, si passerà a Robinson: l'inventore dell'analisi non-standard. Si argomenterà che l'analisi non-standard riuscirà a fornire un nuovo sistema formale sufficientemente forte per dar ragione alle nostre intuizioni pure *a priori*.

CAPITOLO 3.

Il problema dei differenziali: dalla critica di Weyl all'analisi di Robinson

Rimane terzo e ultimo problema da affrontare: il differenziale (chiamato anche numero infinitesimale).

Nel primo capitolo si era argomentato che i differenziali hanno uno statuto incerto perché sono incerte le loro definizioni. L'incertezza del loro statuto a livello filosofico-metafisico non impedì ai matematici di usarli grazie alla loro grande forza euristica. Anzi: si ebbe uno sviluppo del calcolo differenziale quasi immediato e molto proficuo come si è visto lungo il veloce *excursus* storico del secondo capitolo. Rimase tuttavia l'esigenza da parte dei matematici e dei filosofi di dare un rigido fondamento all'analisi, attaccando direttamente il differenziale: talvolta veniva giustificato a livello geometrico, coerentemente con la concezione matematica del tempo; invece altre volte ci furono tentativi di algebrizzare tutto l'impianto dell'analisi matematico trovando non di rado seri ostacoli. Solo alla fine dell'Ottocento si ebbero gli strumenti formali e concettuali per rigorizzare l'analisi, la quale, da lì in avanti, si rese su due pilastri: l'insiemistica (fondata da Georg Cantor (1845-1918)) e il lessico *delta-epsilon* (che riuscì a rigorizzare l'idea di limite e divenne l'approccio standard dell'analisi tutt'ora usato) di Bolzano (1781-1848) e Weierstrass (1815-1897).

Il primo pilastro, tuttavia, fu messo in crisi all'inizio del Novecento, dagli innumerevoli paradossi derivati da un'insiemistica troppo generosa nei suoi principi (chiamata ora insiemistica *naïf*)¹; il secondo, invece, esclude completamente i differenziali, lasciando *epsilon* e *delta* numeri reali piccoli a piacere: *epsilon* e *delta* non sono in grado di cogliere la continuità adeguatamente, piuttosto “usano” la continuità come presupposto teoretico senza coglierne le proprietà. Se il primo problema si presenta sul livello tecnico-logico, il secondo aleggia tra problemi filosofici e matematici, per questo è molto interesse ai fini dell'elaborato.

¹ Per esempio, il paradosso di Russell o l'antinomia di Richard, oppure il paradosso di Cantor o il paradosso di Burali-Forti (cfr. Ternullo e Fano 2021, p.68).

Si è visto come il concetto di limite (già presente in Newton, ma ufficialmente inventato alla fine del Settecento) diventa fondante per tutto l'impianto, ma solo alla fine dell'Ottocento si ebbe gli strumenti formali e concettuali per sistematizzarlo coerentemente e quindi fondare su basi solide l'analisi matematica. Tale rigore dovette però essere pagato a caro prezzo: i differenziali vennero banditi².

Come si capirà presto il prezzo è troppo alto da pagare, per cui è necessario considerare un altro sistema formale (almeno) ugualmente rigoroso, ma che possa includere i differenziali. Si può anticipare che il problema dell'esclusione dei numeri infinitesimali non si limita al rigore matematico ("piccolo a piacere" è un termine fortemente approssimativo), ma presenta problemi anche rispetto alle strutture dello spazio e del tempo: grazie a Kant si è guadagnato la matematica come costruzione *a priori* e sintetica basata sulle nostre intuizioni, non bisogna buttare via il lavoro fatto per la cecità di un formalismo algebrico. Hermann Weyl, autore del secolo scorso, sia mostrò il limite della matematica rispetto al mondo fenomenico³, proprio perché incapace a cogliere l'istante, controparte del differenziale, sia cercò di ricostruire il castello dell'analisi con un aggressivo attaccato all'insiemistica *naïf*. Weyl propose la sua ricostruzione dell'analisi e la sua critica del rapporto "continuo matematico" – "continuo fenomenico" nel *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*. Weyl è un autore eclettico e risulta interessante proprio perché mostra i limiti del sistema formale (Weyl ha in mente l'approccio standard dell'analisi (AS)) sia sul piano logico che su quello dell'intuizione del tempo e dello spazio.

Nel seguente elaborato ci si concentrerà sul limite dell'incapacità del sistema formale standard di cogliere l'infinitesimale. Si sosterrà che tali limiti non sono insormontabili, i quali possono essere superati cambiando il sistema formale. Il nuovo sistema formale dovrà da un lato seguire le stesse regole del vecchio sistema, ma dall'altro riuscire a comprendere coerentemente anche il numero infinitesimale. In questo modo si

² Cfr. Robinson 1966, p.277 e Davis, Hersh (1991), p. 56. Per capire cosa sia il lessico *delta-epsilon*, si consiglia di tornare all'ultimo paragrafo del primo capitolo. Nelle definizioni di limiti si usa proprio il linguaggio *epsilon-delta*. Ripeto qui solo la definizione generale di limite per amor di chiarezza: data una funzione $f(x)$, definita su un intervallo D di $\mathbb{R}$, diremo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$, tali che quando $0 < |x - x_0| < \delta$, si ha che $|f(x) - L| < \varepsilon$, con $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$. (pp.46-48).

³ Per Weyl, "fenomenico" è equivalente a "intuitivo". Ovviamente, Weyl non cade in nessuna antinomia, poiché usa fenomenico non come "esperienza", ma come "esperienza possibile", come si argomenterà successivamente (pp. 106-108).

riuscirà a (ri)formulare il concetto di limite in maniera più chiara, più logicamente valida e più coerente alle nostre intuizioni pure *a priori*, senza retrocedere in rigore dal sistema formale ε - δ . Per ottenere questo risultato si prederà in considerazione l'analisi non-standard (ANS), fondata nel secolo scorso dal matematico Abraham Robinson.

Il capitolo, pertanto, si svilupperà in tre parti: la prima mostrerà *perché* il differenziale è un ente essenziale per la matematica; la seconda parte sarà concentrata sulla proposta e sulla critica di Weyl mostrando come il differenziale è essenziale per un'appropriata comprensione del continuo; la terza e ultima parte si focalizzerà a delineare i principali aspetti dell'ANS, mantenendo il focus sul continuo e sugli infinitesimali senza perdere la coerenza appena esposta con Weyl.

3.1 Il terzo problema: gli infinitesimali

In questo paragrafo si vedrà l'importanza dell'infinitesimale sul piano algebrico; invece, quando si affronterà Weyl si argomenterà che esso è essenziale proprio alla filosofia della matematica per comprendere il continuo delle intuizioni; l'infinitesimale è essenziale per mantenere l'isomorfismo continuo intuitivo-continuo matematico.

Una retta continua può essere divisa all'infinito in segmenti sempre più piccoli senza mai arrivare all'ultimo termine. La divisione all'infinito è garantita dalla continuità della retta ed è diventata la proprietà che ha più travagliato i matematici e i filosofi. La retta è un ente geometrico e, come si diceva nel primo capitolo, una successione è la sua controparte algebrica mentre la funzione la controparte del calcolo. Nella successione di numeri (definiti nell'insieme $\mathbb{R}$) noi possiamo trovare numeri sempre più piccoli. Questi numeri “piccoli a piacere” saranno sempre numeri archimedei (ossia seguono l'assioma di Eudosso-Euclide⁴), in quanto abbiamo costruito i numeri reali a partire da quelli naturali (grandezze archimedee) e abbiamo dimostrato che, non solo rendono continua la successione, ma anche la completano: non c'è spazio per altri numeri oltre ai numeri reali.

È chiaro, però, che “piccolo a piacere” pecca di esattezza e univocità. Prendiamo una serie che va da 1 a 1398020, definita in $\mathbb{R}$. Anche il numero 1389,673 è piccolo rispetto all'intera successione: si è preso a piacere un numero piccolo. Invece se considero

⁴ Per una formulazione dell'assioma, vedere p.37.

un intervallo $[0;1]$ definito sempre in $\mathbb{R}$, un numero piccolo a piacere potrà essere 0,0000078. Il “piccolo” e il “grande” sono concetti relativi all’intervallo che si prende in considerazione. In algebra “piccolo” e “grande” si traducono con “maggiore” ($x > y$) o “minore” ($x < y$). Le due relazioni e la relazione dell’“uguale” ($x = y$) sono le tre relazioni principali in algebra. “Piccolo di” viene tradotto in “minore di”, ma è chiaro che anche i simboli “ $<$ ”, “ $>$ ” e “ $=$ ” sono solo connettivi relativi, che si limitano a mettere in relazione due grandezze. Per esempio “ x è più piccolo di y ”, vuol dire “ x è minore di y ” ($x < y$), ma non esiste un connettivo per dire “ x è il più vicino possibile a y ”, o “ x e y hanno la distanza più piccola possibile rimando due numeri diversi”. L’ultima proposizione evidenzia che di fatto non è il numero ad essere piccolo, ma la distanza che intercorre tra due numeri. Tale distanza deve essere la “più piccola possibile” (come veniva definito il dx). anche in questo si presenta il medesimo problema: dipende quanto grande è l’intervallo, se esso va da zero a un miliardo, per esempio, anche un milione è molto vicino allo zero. E poi, chi definisce chi è piccolo o grande? Il Dio della matematica? Quello che possiamo affermare con certezza, senza cadere in sarcastiche battute, è prendendo un “ r ” qualsiasi, allora si può considerare un altro numero “ q ”, tale che $r > q$, con r e $q \in \mathbb{R}$. Quindi, per esempio, se $r=3$, allora anche 0,01 soddisfa la condizione; q può essere uguale a 0,1, allora $r-q=2,99$.

L’esempio evidenzia la difficoltà nel dire che q e r sono infinitamente vicini, perlomeno risulta impossibile affermarlo in maniera universale e sicura (in un intervallo di diecimila metri, per esempio, forse $r-q=2,99$ è una piccola distanza, ma in uno di quattro metri probabilmente no? Ancora: chi decide la soglia che r e q sono infinitamente vicini?). Questo è stato il prezzo da pagare: i differenziali; l’idea di Weierstrass e Bolzano poggia proprio di rigorizzare la continuità considerando soltanto i numeri reali, ma lasciarono la continuità come un insieme indeterminato di divisioni possibili. Loro furono gli artefici del lessico ormai diventato canonico dell’*epsilon-delta*. *Delta* ed *Epsilon* sono numeri piccoli presi a piacere sempre reali, quindi sempre troppo grandi per essere sufficientemente piccoli per tutti indipendente dall’intervallo preso.

A questo livello entra in campo la necessità del differenziale: intuitivamente pensando, a forza di dividere prima o poi si arriverà a intervalli sempre più piccoli e sempre più piccoli finché avremmo dei numeri piccoli per tutti in modo univoco, indipendentemente dall’intervallo preso in considerazione. Il numero più piccolo pensabile è proprio il differenziale, chiamato anche numero infinitesimale (Kant lo

chiama “fluente”). Esso è il numero infinitamente piccolo perché si trova *al di là* di qualsiasi numero reale; quindi, da un lato non ferma ogni possibile divisione, dall’altro lato non può più essere diviso a sua volta proprio perché la distanza tra di lui e il suo numero vicinissimo è la più piccola possibile.

Con il numero infinitesimali entra in gioco tanto il discreto come strumento matematico per la comprensione del continuo, quanto la capacità di comprendere un infinito che rimane infinito, ma non è più infinito. Queste grandezze hanno caratteristiche diverse rispetto ai numeri reali proprio perché, da un lato devono garantire la continua divisione, dall’altro però devono essere le più piccole possibili, indipendentemente dall’intervallo preso o da ciò che il matematico considera grande o piccolo. Inoltre, queste grandezze scardinano una proprietà intuitivamente ovvia. Esse, infatti, sono grandezze non-archimedee, come si è visto nel primo capitolo (nel quale si è mostrato anche la sua utilità euristica per risolvere i problemi delle tangenti e delle aeree). Un piccolo corollario: la somma di infinitesimali, a sua volta, non potrà mai portare ad una grandezza reale, per definizione.

Gli infinitesimali devono essere reinseriti come cardine dell’analisi per una maggiore precisione, allo stesso devono essere liberati dalle incoerenze logiche viste tanto nel paragrafo 2.1 quanto nel paragrafo 1.2.3: l’ANS assolverà questo compito. Attraverso di essi, la matematica riformulerà i concetti base dell’analisi matematica, il limite *in primis* e poi a cascata integrale, intorno, punto di discontinuità etc. Il concetto di limite, idea fondante per il calcolo, per esempio, viene formulato dall’approccio standard con il lessico *epsilon-delta*. Scegliere un approccio non standard significa, perciò, riformularlo in maniera coerente. L’ANS lo riformulerà con ugual coerenza e senza impegnare un linguaggio metaforico: il limite, infatti, è un operatore matematico che ci chiede di calcolare il valore quando la funzione “*approccia* ad un certo altro valore”. L’*approcciare* è un lessico fortemente metaforico e per niente soddisfacente per una disciplina che esige il massimo del rigore, come la matematica; inoltre, il limite presuppone il continuo senza veramente descriverlo. L’immagine del limite è quella del punto che corre lungo la retta semplicemente presuppone che la retta sia già continua, ma la filosofia della matematica difficilmente comprenderà da questa definizione cosa sia la continuità. L’approccio standard, né con il suo lessico *epsilon-delta* né con la sua formulazione di limite, non

riesce a cogliere la continuità. L'ANS, invece, riuscirà ad avvicinare la matematica al continuo⁵.

In questo capitolo l'obiettivo è quello di mostrare la natura degli infinitesimali al fine di comprendere la continuità con rigore e precisione evitando un lessico ambiguo e approssimativo. Si comprende che l'obiettivo si articola tanto su questioni tecniche-logiche quanto su questioni squisitamente filosofiche. Le due articolazioni non si scontreranno, piuttosto si completeranno: la prima prenderà un senso fortemente filosofico grazie alla seconda, la quale, a sua volta, avrà una struttura dura e precisa proprio grazie alla prima.

3.1.1 Il costruttivismo come via di uscita

Il problema delle grandezze non archimedee consiste nel fatto che non è molto chiaro dove siano dentro una retta, tanto da dubitare che esse siano effettivamente grandezze. Se sono all'interno della retta, allora hanno una ordinalità e una cardinalità, ma a questo punto esse sono grandezze reali, semplicemente “molto piccole”, ma si ritorna al problema esposto precedentemente, oppure ci accetta lo zero come l'unica grandezza infinitamente piccola⁶. L'ultima opzione chiaramente non può essere la sola praticabile: il differenziale come differenza tra due grandezze deve essere diverso da zero, sennò le grandezze sono uguali, oppure peggio: si avrebbero divisioni con il denominatore uguale a zero (basti pensare ai due assiomi di De Hôpital), ottenendo come risultato l'impossibilità di comprendere la continuità⁷.

Per risolvere il problema non è sufficiente negare l'esistenza di tali grandezze, perché esse sono genetiche al continuo stesso e ad una sua proprietà indispensabile: la

⁵ Al convegno dell'ANS di Verona hanno fatto notare che “La definizione Standard non dà alcuna informazione su come calcolare un limite, dice solo come verificare che un particolare valore sia effettivamente il limite. Mentre la definizione Non Standard fornisce un semplice strumento per calcolare il limite” (Marzacci, Marzorati 201 p.120). Nel terzo paragrafo si vedrà come l'ANS permetterà di calcolare il limite

⁶ Presto si vedrà che, nell'insieme dei numeri “iperreali”, lo zero è il primo numero infinitesimale, cfr. Dossena 2021. Da tenere presente che lo zero è uno dei cinque postali di Peano: pertanto non è derivabile da nessuna altra grandezza, né da legge logiche generali (cfr. Corry 2015 pp.326-327). Inoltre, le definizioni dei differenziali erano incerte proprio perché dovevano essere diverse da 0, ma avere la proprietà che lo 0 ha. La distanza tra due grandezze (x e y) più piccola possibile (se $x-y=0$, allora così ovviamente $|x|=|y|$) (cfr. Davis, Hersh 1991)

⁷ Per i due assiomi di De Hôpital vedere p.56. Per la necessità dei differenziali per il concetto di limite, integrale etc. vedere §§2.3 e 3 del primo capitolo.

divisione all'infinito. Come si è visto poc'anzi il prezzo più caro è quello di negare i differenziali stessi che accettarli con tutte le loro incongruenze; pertanto, la sfida è quella di costruire differenziali coerentemente così è possibile ammetterli nel mondo matematico marchiato dal rigore logico. Si è voluto usare la parola “costruire” appositamente; in questo capitolo si prenderanno in considerazione due scuole della filosofia della matematica: il formalismo e il costruttivismo.

Gli enti matematici per la prima scuola sono simboli formali e la matematica ha a che fare solo con loro manipolazione. Questi simboli sono costruiti su assiomi e regole logiche generali. Un campione della prima scuola fu Hilbert, il quale, però, fu accusato di “degradare la matematica riducendola a un gioco eseguito con serie di simboli diversi”⁸. Ovviamente non tutti gli assiomi sono uguali tra di loro e serve un criterio di decisione per una struttura e l'altra. Allora il formalismo non è autosufficiente. Il criterio per il nostro caso specifico è la continuità come proprietà essenziale dello spazio e del tempo⁹. L'idea di base consiste nel ritenere l'intuizione pura *a priori* dello spazio e del tempo fertile terreno per confrontare strutture formali diverse; dunque, si costruiscono gli enti su pochi assiomi, “i più naturali” (saranno i numeri naturali la base dell'impianto), da essi si derivano e si costruiscono enti più complessi legati tra di loro da un rigore logico, sicché negare l'ultimo pezzo della catena dovrebbe comportare al negare anche il primo (per questo l'ANS deve seguire l'AS, non si vuole negare la coerenza dell'AS, ma solo la sua imprecisione: tanto l'ANS quanto l'AS si costruiscono a partire dai numeri naturali). Una volta costruito l'impianto ci domandiamo: è coerente con l'intuizione dello spazio e del tempo?

Esempio lampante è la differenza tra la struttura dell'analisi standard con quella non-standard. Quanto detto nella prima parte di questo paragrafo mostra come il linguaggio *delta-epsilon* sia insufficiente per cogliere la divisione dell'infinito di una

⁸ Robinson 2021, p.51

⁹ La declinazione più famosa del costruttivismo è l'intuizionismo. Secondo l'intuizionismo le strutture della matematica sono costruzioni mentali che poggiano sullo spazio e sul tempo. Non a caso Brouwer, fondatore della scuola intuizionistica vedeva un filo rosso che collega la sua filosofia della matematica con la filosofia trascendentale, tanto che il filosofo sostiene che la matematica è una conoscenza sintetica *a priori* (cfr. Shapiro 2005, p.331). Certamente ci sono delle differenze con Kant, la più grande consiste nel sistema formale, molto più elaborato nel Novecento rispetto ai fluenti del filosofo della prima critica, così come viene dato molto peso al sistema assiomatico scelto (per Kant la matematica non ha neppure assiomi), oppure, molto probabilmente, Kant accuserebbe di psicologismo il padre dell'intuizionismo se potessero dialogare. Per un approfondimento sul costruttivismo: cfr. Neunhäuserer 2019, pp.109-118. Nel presente elaborato si è voluto sostenere questa tesi guardando un caso specifico: il continuo.

successione e quindi non riesce a cogliere la continuità. Si vedrà che la struttura, non meno formale, dell'ANS coglie molto meglio la continuità. Se l'ultima struttura è coerente e non presenta contraddizioni, allora è preferibile rispetto a quella standard, anche se i risultati finali non cambiano (si può svolgere uno studio di una funzione sia usando l'AS che l'ANS: lo studio avrà differenze nei procedimenti e nei simboli usati, ma non nei risultati finali). I simboli e le formule non sono semplicemente dei segni sul foglio per aiutare calcolatori umani, bensì sono vere e proprie costruzioni che la filosofia della matematica deve poi controllare la loro plausibilità. Ogni sistema formale agli occhi della filosofia della matematica può indurre contraddizioni o risolverne, può comprendere l'infinità del continuo oppure restare nel finitismo della mente umana, possono cogliere la continuità dell'intuizione oppure no etc. Come si era detto nell'introduzione il presente elaborato non intende impegnarsi ontologicamente, ma la filosofia della matematica, una volta che ha decretato quale sistema formale sia il preferibile perché il più efficace a descrivere lo spazio e il tempo, potrà porsi domande di stampo ontologico, attribuendo così ad ogni ente della struttura così costruita un certo statuto ontologico (o toglierlo). Il formalismo e il costruttivismo sono la cornice di senso dei prossimi paragrafi, il quale mostrerà in concreto quale dei due sistemi formali sia più vicino alle nostre intuizioni.

Tra costruttivismo, intuizionismo e formalismo naviga Hermann Weyl: matematico, fisico e filosofo tedesco del secolo scorso. Eclettico intellettuale che si è interrogato profondamente sull'analisi, sul continuo e sull'infinito¹⁰.

3.1.2 Weyl tra formalismo e costruttivismo

Weyl (1885-1955) è un autore tedesco, eclettico che non ebbe mai paura di rivedere i propri studi e le proprie teorie, Bell descrive così l'autore:

¹⁰ Weyl è un autore davvero eclettico, sensibile alle scoperte matematiche del tempo e anche i problemi filosofici. A lui è da attribuire la famosa frase “la matematica è la scienza dell'infinito” (Weyl 2012, p.17). Scrisse saggi sull'infinito come *Levels of Infinity* (Ivi, pp.17-33) o *The Mathematical Way to Think* (Ivi, pp.67-85), sul costruttivismo come *Axiomatic Versus Constructive Procedures in Mathematics* (Ivi, pp.191-203) e saggi sul rapporto matematica-logica come *Mathematics and Logic* (Ivi, 133-147). Per un approfondimento sull'ecletticità di Weyl rimando all'introduzione della collezione dei Saggi fatta da Peter Pesic, (Ivi, pp.1-15)

Hermann Weyl (1885-1955), uno dei più versatili matematici del ventesimo secolo, era insolito tra gli scienziati per essere attratto dalla filosofia idealista. In gioventù inclinò all'idealismo di Kant e Fichte, e in seguito fu influenzato dalla fenomenologia di Husserl.¹¹

Proprio per le sue molteplici inclinazioni, bisogna limitare il campo di studi: in questo caso specifico il lavoro verrà delimitato dall'analisi del testo intitolato *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*.

Per comprendere la complessità del testo è sufficiente notare queste due citazioni; una presa dalla prima, l'altra dall'ultima pagina.

- I. con questo saggio non ci proponiamo di erigere, nello spirito del formalismo, intorno alla «roccia solida» sulla quale è fondato l'edificio dell'Analisi, una bella impalcatura di legno (...). Sosteniamo qui invece l'opinione che una parte essenziale di quest'edificio è costruita sulla sabbia.

(DK, p.9 [iii])

- II. ci siamo resi conto che ciò che si evidenzia nel continuo della nostra intuizione e l'ambiato concettuale della matematica costituiscono due mondi talmente estranei l'uno rispetto all'altro, che l'esigenza di farli coincidere dev'essere respinta come assurda.

(DK, p.167 [83])

¹¹ Bell 2019, p.172: "Hermann Weyl (1885–1955), one of most versatile mathematicians of the twentieth century, was unusual among scientists in being attracted to idealist philosophy. In his youth he inclined towards the idealism of Kant and Fichte, and later came to be influenced by Husserl's phenomenology.". Avron scrive "Hermann Weyl (1885-1955) was one of the greatest mathematicians of the 20th century, with contributions to many branches of mathematics and physics. He was also deeply interested in the philosophy of these disciplines, as his great book [*Das Kontinuum*] shows. The question of the certainty of the propositions of mathematics, and the strongly related question of the security of its foundations, were of particular importance for him (as well as a source of worry) throughout his scientific career (...). This worry has caused him to make several contributions to the debate about the foundation of mathematics, (...), in which he changed his mind more than once." (Avron 2020, p.1)).

In questo paragrafo ci si concentrerà principalmente sulla prima citazione, perché sono questioni più tecniche-logiche che filosofiche (la seconda verrà analizzata ampiamente nei paragrafi successivi).

La prima citazione è presa dalla prefazione, scritta con un taglio accattivante e critico verso il suo professore Hilbert: l'impalcatura di legno, infatti, sono altri sistemi assiomatici che però non sono in grado di risolvere il problema alla radice¹². Weyl, attraverso una costruzione su sei principi logici base che vengono poi tradotti in un linguaggio matematico e ragionando su come “saturare” i giudizi in modo sensato e non artificioso, riesce a ricostruire l'analisi su basi solide tanto che afferma orgogliosamente verso la fine del testo che “è perfettamente possibile elaborare un'Analisi in base ai nostri principi” (*DK*, p.167 [83]).

Weyl comprende che il problema di base dell'analisi sono le definizioni impredicative (“giudizio” in un lessico di Weyl), ossia una definizione che “si riferisce alla classe che contiene l'oggetto che viene definito”¹³. Per comprendere che cosa siano, Weyl porta un esempio (cfr. *DK*, pp. 19-20 [2]): definiamo un aggettivo “autologico” se possiede la proprietà che esprime, altrimenti “eterologico”. Per esempio, “corto” è autologico, invece “lungo” è eterologico, infatti, la parola “corto” è corta; invece, non è lunga la parola “lunga”. A questo punto Weyl si domanda se “eterologico” sia autologico oppure eterologico. Tale giudizio è chiaramente impredicativo e “il formalismo si trova qui di fronte ad una contraddizione senza via d'uscita” (*DK*, p.19 [2]). Non riesce a dare risposta, ma il problema sta alla base della domanda. Le definizioni impredicative portano ad un circolo vizioso l'analisi (cfr. *DK*, §6, CAP I), sia nelle sue fondamenta che nella costruzione dei numeri reali; capiamo velocemente il *perché*.

Il punto di partenza di Weyl sono i numeri naturali e la relazione di base $S(x, y)$. Tale relazione essa significa: “ x è successore ad y ”. Da essa Weyl è in grado di costruire

¹² Weyl era il pupillo di Hilbert, tanto che scrisse non pochi saggi in onore del professore, come *David Hilbert 1862-1943* (Weyl 2012, pp.85-93), oppure *David Hilbert and his Mathematical Work* (Ivi.,93-133), nel quale elogia il prof con queste parole “In Hilbert's approach to mathematics, *simplicity* and *rigor* go hand in hand” (Ivi., p.93). Tuttavia, ci fu una rottura a livello filosofico, infatti Avron sostiene che Weyl è vicino alla concezione della matematica/logica di oggi proprio perché rifiuta restrizioni artificiali ad assiomi per “far tornare i conti”. (cfr. Avron 2020, pp.51-52). Vorrei rinviare alla critica fatta ad Hilbert esposta nel §1.1 del presente capitolo. Weyl supporta fortemente la tesi che il formalismo non è sufficiente per la matematica: è essenziale avere anche il costruttivismo: in questo elaborato la tesi viene sostenuta considerato un caso specifico, il continuo.

¹³ Shapiro 2005, p.7: “a definition is impredicative if it refers to a class that contains the object being defined”.

tutti i numeri fino all'insieme $\mathbb{Q}$ (in un modo non troppo diverso, ma con un taglio un po' più logico, di quanto è stato fatto nel primo capitolo). Per l'insieme dei reali la questione è diversa perché si insinua il circolo vizioso. I numeri reali vengono definiti da Weyl, seguendo la sezione di Dedekind, come un insieme quadridimensionale¹⁴ di numeri naturali avente un estremo superiore o inferiore (cfr. *DK*, p.109 [52]). Tale estremo superiore è una definizione impredicativa in quanto “se consideriamo un insieme S (non vuoto) di sezione di Dedekind limitato superiormente (che è un numero reale) consiste a sua volta in una sezione di Dedekind, che chiameremo $\text{lub}(S)$ ”¹⁵, ma a sua volta per definire $\text{lub}(S)$ dobbiamo far riferimento alla totalità del sottoinsieme dei numeri naturali che lo stesso $\text{lub}(S)$ ne fa parte. Quindi, avendo una definizione impredicativa, la sezione di Dedekind è da essere bandita (cfr. *DK*, p.122 [58-59]). Senza i numeri irrazionali si perde la continuità, quindi anche l'intero pianto dell'analisi. L'unico modo per salvarsi dal circolo vizioso è quello di considerare i numeri irrazionali come approssimazione dei numeri razionali (o come afferma Weyl. “Una successione di intervalli incapsulati gli uni negli altri e altri” (*DK*, p.121 [58]), ossia insiemi quadridimensionale di numeri naturali che rappresentano numeri razionali, i quali tendono al valore dell'irrazionale senza mai raggiungerlo (esattamente come si era visto all'inizio del primo capitolo)¹⁶.

Nel capitolo primo, tuttavia, si era visto che proprio la continuità costringeva la matematica ad accettare i numeri irrazionali alla stessa maniera in cui accettava i numeri razionali, ma è qui che Weyl attacca: l'autore sostiene che la matematica e il mondo fenomenico sono in due monti diversi, con un burrone nel mezzo (citazione (II)). Una interpretazione più legata al testo potrebbe portare ad affermare che la citazione (II) sia dovuta dal fatto che non è possibile definire i numeri reali esattamente senza cadere in definizioni impredicative e che quindi, essendo i numeri irrazionali quei numeri che completano la retta e la rendono continua, la matematica ha solo in mano tante

¹⁴ I livelli degli insiemi rispecchiano i diversi ordini di logica; quindi, il primo livello abbiamo solo i giudizi contenuti variabili (x, y, z etc.), il secondo livello abbiamo sia le variabili libere sia le relazioni di queste variabili ($x, y, z, G(x, z)$ etc.) e così via. Weyl afferma che solo le variabili dei numeri naturali (primo livello) possono essere riempiti, pena definizioni impredicative e paradossi come quelli di Russell o l'antinomia di Richard. (cfr. *DK*, §5 Cap. I e p.54 [20])

¹⁵ Zellini 2022, p.219.

¹⁶ Per evitare defizioni impredicative, il principio di base è quello di riempire solo la categoria dei numeri naturali, ossia “In order to ensure that every such definition is predicative, we restrict which quantifiers can occur in the formula $\phi[x]$ that can appear in (1) [i.e. “The natural numbers are accepted as a primitive concept” (cit., p.11)]: we may quantify over natural numbers, but we may not quantify over sets or functions. In modern terminology, we would say that $\phi[x]$ must be arithmetic; that is, it must contain only first-order quantifiers” (Adams e Lou 2010, p.11)

approssimazioni di numeri razionali, che sono intervalli discreti¹⁷. Tuttavia, Weyl stesso costruisce le successioni infinite e i limiti a partire dall'idea di intorno. L'estremo superiore è costruibile a partire dai numeri naturali e quindi si può costruire un limite composto da numeri razionali che tende verso tale estremo, senza mai raggiungerlo.

La critica di Weyl sul rapporto continuo matematico-continuo fenomenico può essere studiata e risolta proprio studiando il concetto di “limite” in matematica e fondante per tutta l'analisi. Ci si concentrerà, pertanto, proprio sulla definizione algebrica di continuità e limite.

Da questo paragrafo si apprende che seguire Weyl, significa evitare le definizioni impredicative e quindi non vagabondare nei paradossi che un'insiemistica *naïf* porta con sé. Il primo pilastro dell'analisi poggia su solide basi e non più, come afferma l'*incipit* del *Das Kontinuum*, “sulla sabbia”. Nel capitolo secondo del presente elaborato è stato argomentato di come la continuità deve essere un presupposto per la matematica perché le intuizioni pure *a priori* sono continue. Weyl mostra che, nella costruzione dei numeri reali bisogna considerare i limiti per non cadere alle definizioni impredicative, ma i limiti, così come gli intorni (presupposto dei limiti) non sono sufficienti per cogliere il continuo fenomenico. In questo elaborato si ragionerà proprio sui concetti di intorno e di limite, senza approfondire quanto i numeri irrazionali possano essere costruiti sul nuovo concetto di limite¹⁸. Prima di prendere in considerazione la citazione (II), tuttavia bisogna restare ancora un attimo nel tecnicismo di Weyl, per possedere un quadro generale di come gli enti matematici sono costruiti nel *Das Kontinuum* e di quale linguaggio formale verrà usato lungo tutto il capitolo.

3.1.2.1 Le leggi logiche

L'inizio del *Das Kontinuum* è incentrato sulla logica: Weyl inizia elencando i tipi di giudizi e le regole logiche base. I giudizi sono di tre tipi:

¹⁷ La seconda condizione che Weyl pone grazie alla quale la continuità matematica riesca a spiegare la continuità fenomenica è proprio che esista sempre un rapporto tra il tutto e una sua parte (cfr. *DK* p.140 [68]). Questa è l'interpretazione di Zellini in Zellini 2022.

¹⁸ approfondimento che è più vicino ad una esplicitazione che approfondimento vero e proprio: non ci sono motivi per pensare il contrario e, una volta capito come funziona l'ANS, è facile trarre le conclusioni

- A. Giudizio predicativo: “A è B”. Tale giudizio è formato semplicemente da “soggetto” – “copula” – “predicato”. Per esempio “Il pinguino è un volatile”. (cfr. *DK*, pp.17-19 [1-2]).
- B. Giudizio relazionale: soggetto e predicato sono in relazione. Per esempio: “a è minore di b”, “il punto c giace tra a e b”, “Aldo è zio di Gianni”. Il giudizio relazionale “Aldo è zio di Gianni” si traduce con $Z(a, g)$, avente “Z” per “essere zio di”, “a” per “Aldo” e “g” per “Gianni” (cfr. *DK* p.20 [3]).
- C. Giudizio esistenziale: si afferma che esiste qualcosa che soddisfi questa o quella proprietà. Per la complessità di questo tipo di giudizio, vale la pena citare Weyl:

il concetto di esistenza è sovraccaricato di enigmi metafisici. Qui basterà quanto segue. Se $P(x)$, $P'(x)$, $R(x, y)$ sono, per esempio, alcuni degli schemi di giudizi R (x e y indicano posti vuoti) e se a è un singolo oggetto dato, allora le proposizioni come: «*Esiste un oggetto (della nostra categoria), per il quale sia avverrà sia $P(x)$ che $P'(x)$ (che possiede sia la proprietà P che la proprietà P')*»; «*Esistono oggetti x che stanno con a nella relazione $R(x, a)$* » hanno senso, afferma cioè un ben determinato stato di cose (esistenziale).

(*DK*, p.22 [4])

A questo punto bisogna avere chiaro cosa per Weyl intenda con “giudizio”. Per il matematico tedesco “un *giudizio* afferma uno *stato di cose*” (*DK*, p.17 [1]). Affinché si possa valutare se il giudizio sia vero e falso, deve possedere due caratteristiche.

La prima esige che il predicato legato al soggetto debba appartenere alla categoria del soggetto; per esempio, dire “la foglia è verde” ha senso perché il verde è un colore e il colore appartiene alla categoria “foglia”, invece affermare “L’aspro del limone è rosa” non ha senso e, pertanto, non è un giudizio, anche se “dal punto di vista *grammaticale formale* [hanno] lo stesso aspetto delle configurazioni linguistiche che rappresentano un giudizio vero e proprio” (*DK*, p.18 [2]).

La seconda caratteristica richiede l’assenza di variabili libere. Le variabili libere sono simili alle incognite in matematica e sono indicate con le lettere “ x , y , z etc.”, gli oggetti, invece, vengono indicati con le lettere minuscole “ a , b , c etc.” I giudizi senza

variabili sono “giudizi propriamente detti” e “saturare un giudizio” vuol dire che si stanno riempiendo tutti i posti vuoti¹⁹.

In questo punto Weyl è pressoché identico al modo in cui si devono formare le formule ben formate (*fbf*) nella logica predicativa: dai giudizi “*semplici*” (o “*originali*” (*DK.*, p.23 [4]), si possono costruire altri giudizi seguendo sei regole logiche.

La costruzione avviene secondo sei principi logici, che sono i seguenti:²⁰

0. $J(x\ y)$ significa “ x è identico a y ”.
1. Se G è un giudizio, allora anche la sua negazione $\bar{G}$ è un giudizio (in un lessico contemporaneo: $\neg G$).
2. Da un giudizio con più posti vuoti, si può applicare la regola 0, quindi se $N(x\ y)$, significa “ x è nipote di y ”, allora si ottiene $N(x\ x)$ che significa “ x è nipote di stesso”.
3. Un giudizio può essere composto unendo due giudizi (semplici o composti) con la lettera “e”. Per esempio, se $R(x)$ significa “ x è rosso” e $S(x)$ significa “ x è sferico”, allora $R(x) \cdot S(x)$ significa “ x è rosso e sferico”. (oggi useremo questa forma: $R(x) \wedge S(x)$).
4. Abbiamo anche la composizione con la congiunzione “o”. Prendendo lo stesso esempio: $R(x) + S(x)$ significa “ x rosso o sferico” ($R(x) \vee S(x)$).
5. Se abbiamo, per esempio, un giudizio $G(x\ y\ z)$ e “ a ” è un oggetto dato che appartiene a “ x ”, “ y ” o “ z ”, allora possiamo sostituire “ a ” con x , “ y ” o “ z ”; il nuovo giudizio sarà allora $G(x\ y\ a)$, se “ a ” appartiene alla categoria di “ z ”. Riempiendo tutti i posti vuoti si ottiene quello che Weyl chiama un “giudizio saturato”.
6. Se abbiamo un giudizio a tre posti vuoti $G(x\ y\ z)$, si può costruire il giudizio $G(x\ y\ *) = G'(x\ y)$ che significa “esiste un oggetto della categoria z tale che soddisfa la relazione $G(x\ y\ z)$ ”. Si può completare anche il giudizio $G'(x\ y)$, fino a creare un giudizio vero e proprio, il quale potrà essere sia vero che falso.
 $(\exists x \exists y \exists z (G(x\ y\ z)) = G(*\ *\ *))$

¹⁹ seguendo le sei regole esposte appena qualche riga qui sotto.

²⁰ Il conto parte dallo zero, perché Weyl considera l’identità come un giudizio semplice (cfr. *DK* pp.23-25 [4-6]). Nel volgersi del capitolo si useranno i numeri 1-6 per rifarsi alle regole logiche, come Weyl nel *DK*. Per questo motivo l’identità è il numero 0: si vuole mantenere la stessa enumerazioni per evitare confusione e per lasciare la possibilità di confrontare il capitolo con il *DK*.

Come si può notare Weyl è molto vicino alla logica predicativa di primo ordine di oggi, usa solo una dicitura diversa²¹.

Si noti la mancanza di un importante connettivo (il “quindi”, segnato con la freccia: “ $\rightarrow$ ”) e del quantificare universale (il “per ogni”, scritto con la “A” rovesciata: “ $\forall$ ”). In realtà essi si possono dedurre dalle regole di Weyl: fortunatamente l’autore è molto generoso nelle regole logiche e nelle equivalenze; tanto è vero che vale anche il principio del terzo escluso, nonostante Weyl abbia appoggiato Brouwer per un periodo²².

L’universale si ottiene con la negazione dell’esistenziale, infatti “(...) «ogni oggetto possiede la tal proprietà» significa: «non esiste alcun oggetto che non possieda la proprietà in questione” (DK, p.27). (Ossia: $\exists x F(x) \equiv \neg \forall x \neg F(x)$ (e viceversa)).

Per l’implicazione Weyl fa leva sull’equivalenza $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ (e viceversa) (basta vedere gli esempi che Weyl stesso porta (in seguito ne è stato riportato uno)).

Con Weyl pertanto le equivalenze valgono, così come tutte le leggi logiche della logica predicativa del primo ordine²³.

I giudizi matematici devono essere costruiti seguendo queste regole. Weyl fornisce alcuni esempi, ma uno in specifico è d’interesse per la nostra indagine. (Esempio B²⁴, DK, pp.28-29 [7]). Analizziamo il giudizio “ f è uniformemente continua”. Weyl usa la definizione standard. Il giudizio significa: “per ogni numero positivo ε , esiste un numero positivo δ , tale che, per due numeri x e y qualsiasi che soddisfanno la disuguaglianza $|x - y| < \delta$, vale sempre anche la disuguaglianza $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ”.

A ($x \ y \ \varepsilon$) sta per “ $|x - y| < \varepsilon$ ”

²¹ nel capitolo si userà la dicitura contemporanea, quella di Weyl verrà messa o nelle parentesi o nelle note per lasciare la possibilità di verificare l’esattezza della traduzione simbolica.

²² È bene noto che il principio del terzo escluso è la prima vittima della scuola intuizionistica. Per il rapporto Weyl-scuola intuizionista cfr. Dalen 1995. Almeno a livello logico, Weyl ha abbandonato il suo periodo intuizionista come si può dedurre dalle sue stesse parole; esso sostiene, infatti, che “la logica formale ha perfettamente ragione quando afferma che, di questi due giudizi [P e non-P], uno è *sempre* vero, e l’altro è *sempre* falso” (DK, p.18 [2]. Enfasì mia). Si può applicare senza problemi anche il principio di *non*-contraddizione (cfr. DK, p.37 [38]).

²³ Per tutte le equivalenze e regole logiche rimando a Varzi Achille, Nolt John, Rohatyn Dennis 1988, (specialmente capitolo sei). Lungo il capitolo verranno usate, specificando solamente la regola generale, tralasciando le dimostrazioni e ulteriori spiegazioni della regola stessa.

²⁴ Per la traduzione in un linguaggio logico-formale corrente, mi rifaccio alle note dell’edizione italiana del DK (in questo caso nota 13, pp.174-175)

$F(x, y, \varepsilon)$ sta per “ $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ”

$P(\varepsilon)$ sta per “ ε è positivo”.

Utilizziamo le regole (1) e (3) e otteniamo: $A(x, y, \delta) \cdot \bar{F}(x, y, \varepsilon) = B(x, y, \varepsilon, \delta)$.

[Ossia : $|x - y| < \delta \wedge \neg |f(x) - f(y)| < \varepsilon = B(x, y, \varepsilon, \delta)$]

Utilizziamo la regola (6) per ottenere $B(\varepsilon, \delta) = C(\varepsilon, \delta)$ e la sua negazione $\bar{C}(\varepsilon, \delta)$ ²⁵.

[Ossia: $C(\varepsilon, \delta) = \exists x \exists y (|x - y| < \delta \wedge \neg |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$, quindi $\neg C(\varepsilon, \delta) = \neg \exists x \exists y (|x - y| < \delta \wedge \neg |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$]

Si formi poi il giudizio $\bar{C}(\varepsilon, \delta) \cdot P(\delta) = Q(\varepsilon, \delta)$, e $Q(\varepsilon, *) = R(\varepsilon)$

[Ossia: $R(\varepsilon) = \neg \exists \delta [\delta > 0 \wedge \neg \exists x \exists y (|x - y| < \delta \wedge \neg |f(x) - f(y)| < \varepsilon)]$]

Neghiamo $R(\varepsilon)$ e lo uniamo con “e” a $P(\varepsilon)$, quindi $\bar{R}(\varepsilon) \cdot P(\varepsilon) = S(\varepsilon)$, infine saturiamo il giudizio $S(\varepsilon)$ e otteniamo $U = S(*)$. Nenago U si ottiene $\bar{U}$, che è proprio “ f è uniformemente continua”. Attraverso varie equivalenze, traduzioni e sostituzioni il giudizio “ f è uniformemente continua” si traduce in:

$$\alpha) \forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta [\delta > 0 \wedge \forall x \forall y (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)])$$

Questo esempio ci fa comprendere come si costruiscono i giudizi partendo da un giudizio *semplice* e usando le sei regole (da notare che per Weyl valgono anche le leggi *De Morgan*). Tuttavia, ci si può domandare se effettivamente è saturato il giudizio.

Guardando attentamente (α), ci si renderà conto che i giudizi non sono saturati con individui, ma con altre categorie generali. “ ε ”, infatti, può essere qualsiasi numero positivo reale. Se consideriamo la seguente funzione $f(x) = x^2$ e prendiamo i valori $x=2$ e $y=1$, allora $f(x) = 2^2 = 4$ e $f(y) = 1^2 = 1$, allora possiamo dire con certezza che

$$\alpha_1) \forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta [\delta > 0 \wedge (|2 - 1| < \delta \rightarrow |4 - 1| < \varepsilon)])$$

Quindi la definizione mi garantisce che esiste un delta maggiore a 1 (come 2) e quindi esisterà sempre un numero più grande di 3 (come 4). Avrei potuto prendere anche 1,95 e

²⁵ ovviamente perché il giudizio sia un giudizio, deve esistere una categoria perché si possa applicare la regola (6).

3,98989 o 10930 e 2000. non mi dice quale ε o quale δ devo scegliere, applicando la regola (6). Grazie ad (α) posso dire che esiste una categoria (ossia la categoria “numero reale”) tanto per ε quanto per δ in modo tale che esisterà sempre un numero reale più grande del valore assoluto della differenza del codominio, nel momento in cui esiste almeno un numero reale superiore del valore assoluto della differenza dei due valori del dominio. Si potrebbe saturare così il giudizio se volessi applicare la regola (5):

$$\alpha_2) [(|2 - 1| < 2 \rightarrow |4 - 1| < 4)], \text{ ossia “} 1 < 2 \text{ quindi } 3 < 4 \text{”}$$

Chiaramente (α_2) non dice nulla di interessante per la matematica, la quale non satura mai i giudizi applicando la regola (5), ma applica solo la regola (6):

Diremo che un giudizio è *generale*, se è stato costruito senza applicare il principio (5), se cioè il riempimento dei posti vuoti è avvenuto soltanto tramite * (*«esiste»*). In matematica, si incontrano unicamente giudizi di questa specie; possiamo chiamarli, a buon diritto anche giudizi esistenziali. Se invece il principio (5) viene ad essere applicato, per cui interverranno nel giudizio oggetti singoli, immediatamente evidenziabili della nostra categoria, parleremo di un giudizio *particolare*.

(DK, p.30 [8])

Dopo aver enunciato le regole logiche generali, Weyl entra nello specifico nella sezione dedicata alla matematica.

3.1.2.2 Il passaggio dalla logica all’analisi

Dopo aver trasformato i sei principi logici in sei principi matematici grazie all’insiemistica (cfr. DK, pp.42-43 [14-15]), il matematico tedesco aggiunge altri due principi (DK, pp.63-65 [26])²⁶: quello di sostituzione e quello di iterazione. L’ultimo dei

²⁶ Non si approfondisci questi principi perché eccedono dallo scopo dell’elaborato. Per mostrarli velocemente. Il principio di sostituzione è il principio (5) riformulato, che ammette non solo un determinato insieme, ma anche di una funzione. Weyl fa questo esempio: $R(u \vee l \ x \ y \ z)$ e $S(x \ w \ U)$ sono due relazioni; u

due porta al principio chiamato oggi *principio di induzione completa* (Weyl lo chiama *principio di Bernoulli*, cfr. *DK*, p.69 [29]). Esso afferma che se (i) “0” ha una proprietà $\wp$, (ii) se anche “1” ha $\wp$ e (iii) se anche “n” ha $\wp$, allora anche “n+1” avrà $\wp$.²⁷ Il principio di iterazione è importantissimo per la matematica tanto che Weyl afferma: esso “è di gran lunga il più complicato di tutti, è il principio matematico in senso specifico” (*DK*, p.67 [27]). La sua importanza risiede nella sua capacità di mostrare come lo schema dei numeri naturali è essenziale per la matematica: “l’idea dell’iterazione, della successione dei numeri naturali, costituisce un fondamento ultimo del pensiero matematico” (*DK*, p.82 [36]).

Dal giudizio relazionare base di successione ($S(x, y)$) costruisce i numeri naturali; definisce cosa siano funzione e insieme (*DK*, p.75 [31-32]) quindi, costruisce tutti i numeri fino agli irrazionali. A questo punto Weyl ha in mano tutto l’analisi ed è in grado di mostrare come correggere la disciplina perché non cada in definizioni impredicative. La sua idea di base è che solo i posti con i numeri naturali possono essere riempiti e quindi saturati (applicando sempre e solo il principio (6)), Tanto è vero che i numeri razionali non sono nient’altro che un giudizio di relazione a quattro posti vuoti come $\Sigma(m_1, n_1; m_2, n_2 | x, y)$, con m_1, m_2, n_1 e $n_2 \in \mathbb{N}$ (*DK*, p.110 [52]). I numeri irrazionali, pertanto, diventano solo approssimazioni definiti come un segmento con lunghezza esprimibile con i numeri razionali a intervallo aperto (in virtù del fatto che l’estremo superiore non può appartenere al segmento stesso altrimenti si cade in una definizione impredicativa, come si era visto precedentemente). Weyl definisce i numeri reali (insieme dei numeri razionali unito all’insieme dei numeri irrazionali) come “insiemi quadridimensionali di numeri naturali” (*DK*, p.109 [52]), la categoria di questo insieme viene indicato con NR.

e v sono posti vuoti dipendenti che formano il dominio della funzione $\Phi(x, y, z)$, U è il codominio della funzione Φ . Quindi posso sostituire U con la funzione, *ergo*: $S(x, w, \Phi(x, y, z))$ (a quattro posti vuoti). Principio di iterazione. Sia $R(x, x' | X)$ una relazione; x e x' sono i posti vuoti, ordinati dipendenti, X è la variabile indipendente. $\Phi(X)$ è la funzione che genera R. Per il principio (7) otteniamo: $R_2(x, x' | X) = R(x, x' | \Phi(X))$

²⁷L’enunciato in termini logici: “Data una fbf Φ contenente la costante “0” e una fbf della forma $\forall \alpha (\phi^{\alpha/0} \rightarrow \phi^{s\alpha/0})$, inferire $\forall \alpha \phi^{\alpha/0}$, dove $\phi^{\alpha/0}$ risulta dalla sostituzione di una più concorrenze di “0” in Φ con una variabile α non presente in Φ e dove $\phi^{s\alpha/0}$ risulta dalla sostituzione delle stesse occorrenze di “0” in Φ e con $s\Phi$ ” (Varzi, Nolt, Rohatyn 1988, p.316).

Per una formulazione matematica: Sia $n_0 \in \mathbb{Z}$ e sia P_n un predicato $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$. Se (i) P_{n_0} è vero, (ii) “ $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0: P_{n_0}, P_{n_0+1}, \dots, P_n$ sono veri” (*ipotesi di induzione*) $\Rightarrow P_{n+1}$ è vero”, allora P_n è vero $\forall n \geq n_0$ (Bertsh, Passo e Giacomelli 2007, p.28)

Il paragrafo cinque è dedicato alle successioni di numeri infinite e al principio di convergenza (Weyl inserisce i limiti) e infine costruisce le funzioni continue.

β) Introduciamo il simbolo $|x| \leq \alpha$ per significare: x è un numero reale e il numero razionale $+\alpha$ che corrisponde alla frazione α non appartiene al dominio x , mentre vi appartiene ogni numero razionale minore di $-\alpha$. Riportiamo la bene nota definizione di continuità [già discussa nel capitolo I, paragrafo 2]: $f(x)$ è continua per il numero a (compreso nell'intervallo unitario), se, per ogni frazione α , esiste una frazione β tale che

$$|f(x) - f(a)| \leq \alpha$$

Per tutti i numeri reali x compresi nell'intervallo unitario che verificano la disuguaglianza

$$|x - a| \leq \beta$$

Come si vede, la proprietà di una funzione di essere continua per un valore a , è *transfinita*.

(DK, p.128 [62])

Come si vede è una definizione un po' articolata, ma in realtà non dista troppo dalla definizione di continuità e dal giudizio (α) dell'esempio B: la condizione $|x - a| < \delta$, implicava che $x \in \mathbb{R}$ e la condizione $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, implicava che $f(x) \in \mathbb{R}$, qui invece $\alpha \in \mathbb{Q}$. L'esempio B è la definizione classica, quindi "l'unica differenza tra la definizione usuale e quella di Weyl è che in Weyl ε e δ dovrebbero essere razionali. Tuttavia, è una differenza insignificante"²⁸. Il *Principio di continuità* è del tutto simile a quello standard.

²⁸ Avron 2020 p.48: "Hence the only difference between this definition and the usual one is that in Weyl's definition ε and δ should be rational. However, this is an insignificant difference". Avron continua affermando "Most probably, Weyl has chosen the above definition in order to show the exact reason why the property of being continuous at some point is not a delimited property of a function (...). It means that being continuous is not an absolute matter; a continuous function might cease to be so when new elements are added to $\mathbb{R}$ " (*ibidem*). Avron traduce così la continuità di una funzione: $\forall \varepsilon: \mathbb{Q} (\varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta: \mathbb{Q} (\delta > 0 \wedge \forall x: \mathbb{R} N (|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)))$ (*ibidem*). Inoltre, Weyl, da questa definizione, dimostra i principali teoremi sulla continuità: (Punto A) "Una funzione continua assume tutti i valori intermedi" (DK, p.129 [62]. dimostrazione: DK, p.130 [62-63]); (Punto B) "Una funzione continua nell'intervallo unitario assume in esso un massimo ed un minimo" (DK, p.129 [62]. dimostrazione: DK, pp.130-131 [63]) e (Punto C) "una funzione continua nell'intervallo unitario è in esso uniformemente continua" (DK, p.129 [62]. dimostrazione: DK, pp.131-133 [63-64]). Ovviamente il dominio appartiene a $\mathbb{Q}$ e non a $\mathbb{R}$, altrimenti si cade nella sezione di Dedekinds. Con "transfinita", invece, Weyl intende che per decidere "(...) se una funzione definita mediante i nostri principi sia o no continua, occorre non solo che lo sguardo della mente

Le leggi della matematica definiscono una funzione continua attraverso il concetto di limite, individuabile nel caso in cui la funzione segua le condizioni esposte da Weyl. Riprendiamo velocemente la definizione di continuità offerta dall'analisi standard:

(DCS) Se x_0 è un punto di accumulazione di X (X sottoinsieme $\mathbb{R}$), f definisce continua in x_0 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ²⁹

Si finisce così con il tecnicismo logico-matematico di Weyl. Si è voluto mostrare come il *Das Kontinuum* è costruito e come Weyl ha ragionato, tralasciando i tecnicismi più forti e prendendo in considerazione solo quelle parti che hanno un collegamento con il primo capitolo. Si è voluto, infine, mostrare quali leggi logiche sono presenti e quindi utilizzabili.

Weyl dall'inizio del sesto paragrafo del secondo capitolo si interroga sul rapporto tra matematica e fenomenologia. L'influsso di Husserl è lampante, tutt'al più lui stesso lo cita nella prefazione:

per una esposizione approfondita, che assegna ai fenomeni logici il loro specifico posto inserendoli nel quadro di una filosofia complessiva, rinvio anche alle *Ideen zu einer Phänomologie und phänomenologischen zu Philosophie* di Husserl.

(DK, p.11 [iv]).

Anche se la influenza di Husserl è lampante, Weyl si serve di un lessico fortemente kantiano e quindi, attraverso Weyl, si farà il percorso opposto del secondo capitolo. Kant, infatti, è partito dalle intuizioni e poi ha costruito il sistema formale, Weyl, invece, ha prima costruito il sistema formale e con esso il continuo matematico e poi lo ha confrontato con il mondo intuitivo (nel prossimo capitolo verrà chiamato "principio di traduzione").

abbraccia completamente i numeri naturali, ma anche tutti gli *insiemi* (più precisamente: tutti gli insiemi quadridimensionali di numeri naturali)" (DK, p.136 [65])

²⁹ Bertsh, Passo e Giacomelli 2007, p.164 (definizione 6.1). Chiaramente è la prima definizione di limite data nel primo capitolo (p.49).

Nel presente capitolo l'andamento argomentativo sarà:

- Logica $\rightarrow$ matematica (continuo matematico) $\overset{?}{\leftrightarrow}$ mondo fenomenico/intuizione (continuo intuitivo=continuo fenomenico³⁰).

Nel primo capitolo, invece, l'andamento era:

- intuizione (continuo intuitivo) $\rightarrow$ logica/matematica (continuo matematico) $\leftarrow$ mondo fenomenico (continuo dell'esperienza) $\rightarrow$ antinomia.

A questo punto si domanda: quanto il confronto tra i due tipi di continui è efficace? Per Kant la domanda nemmeno si pone, in quanto, il sistema formale viene “creato” proprio sulle intuizioni, invece per Weyl tale domanda è del tutto legittima, tanto è vero che ottiene una risposta radicalmente diversa rispetto a Kant, come dimostra la citazione (II)³¹. Si intende argomentare che il limite, tuttavia, deriva non tanto dalla matematica in sé, ma deriva da una insufficienza del sistema formale che Weyl ha in mano: il matematico, infatti, è fermo all'AS e quindi incapace di cogliere l'infinitesimale coerentemente (il quale è la “controparte” matematica dell'istante, come si vedrà presto). I numeri irrazionali forse sono sufficienti per rendere la retta continua, ma non lo sono per mantenere l'isomorfismo continuo matematico-continuo intuitivo; quell'isomorfismo che era essenziale per la filosofia per scrutare le intuizioni pure *a priori*. I differenziali non sono solo necessari per comprendere con rigore il calcolo, ma anche per descrivere efficacemente l'infinita complessità del continuo intuitivo. Weyl, pur non approfondendo quest'ultimo aspetto, è consapevole che uno dei problemi della matematica è l'incapacità di concepire l'istante (l'infinitesimale nella intuizione); si vedrà presto come Weyl tematizza il problema e come si potrà provare a dare una risposta attraverso l'ANS.

³⁰ Questa uguaglianza è chiaramente problematica, ma poche righe sotto verrà spiegata.

³¹ Coerentemente con il suo pensiero: Weyl quando pubblica il *Das Kontinuum* aveva divorziato con la filosofia kantiana. Bell fa notare che “On entering Göttingen University in 1904, Weyl read Hilbert's Foundations of Geometry. This tour-de-force of the axiomatic method, in comparison to which Kant's “bondage to Euclidean geometry” had come to seem naïve, greatly impressed Weyl, so much so that, as a result (...) After this philosophical debacle Weyl lapsed into an indifferent positivism for a while. In 1912–13 his interest in philosophy was rekindled by his coming to learn of Husserl's phenomenology, to which he had been introduced by his wife, a student of Husserl's” (Bell 2000 p.2). Per sostenere la sua tesi Bell cita Weyl “under this overwhelming blow, the structure of Kantian philosophy, to which I had clung with faithful heart, crumbled into ruins” (*ibidem.*, Bell cita Weyl (1968) *Gesammelte Abhandlungen*, I-IV, K. Chandrasekharan, ed. Berlin: Springer-Verlag, p.283)

Prima di entrare nel dettaglio è opportuno aprire una piccola parentesi e fare chiarezza terminologica, in quanto Weyl usa fenomeno e intuizione come sinonimi, problematico dopo il secondo capitolo: il rischio è quello di cadere nell'antinomia. Nel corso del presente capitolo si seguirà i passi di Weyl, l'obiettivo del capitolo è spiegare il fluente/differenziale e l'autore parla di esperienza del continuo come totalità, evento unico, mai come esperienza delle singole parti. Per esempio: l'esperimento mentale proposto da Weyl ci chiede di immaginarci una matita sopra ad un tavolo e di ricordare l'evento come evento unico e omogeneo, esattamente come lo spazio descritto da Kant nella prima critica: proprio perché la matematica discretizza in parti non è in grado di spiegare tale fenomeno. Come nell'*estetica trascendentale* lo spazio e il tempo sono continui come entità monolitiche e inseparabili. La divisione all'infinito è una conseguenza del fatto che l'intelletto ragiona sopra a tali intuizioni³². L'ombra dell'antinomia non sfiora la critica di Weyl, proprio perché Weyl non sostiene che, essendo continuo il tempo e lo spazio, allora possiamo percepirne i singoli momenti come se fossero numeri infinitesimali³³.

Weyl parla di un tempo continuo come un momento unico, come un fluire, esattamente come il continuo delle intuizioni descritte da Kant; pertanto, è perfettamente possibile usare “fenomenico” e “intuitivo” come sinonimi in questo capitolo. Inoltre, il continuo fenomenico (inteso nel senso di “ciò che percepiamo”) segue le regole del continuo dell'intuizione, per questo esso è continuo. Il continuo fenomenico presenta delle caratteristiche conoscibili proprio grazie al continuo intuitivo, sceverato dai limiti dei nostri sensi³⁴. Noi percepiamo la matita in un lasso di tempo che appare come omogeneo proprio perché il tempo delle intuizioni è omogeneo. Il continuo matematico, d'altro canto si fonda sul continuo intuitivo, ma tende, attraverso il suo sistema formale, ad essere sempre più simile all'omogeneità del continuo fenomenico. La matematica appoggia sul continuo intuitivo, il quale rende possibile una descrizione delle proprietà del continuo intuitivo, il quale rende possibile il continuo fenomenico. Si è creato così

³² Cfr. *KrV*, B35/A21, p.54 [82]

³³ Weyl cadrebbe nell'antinomia se seguisse le critiche di Parsons fatte a Kant: Parsons afferma “Our ability to perceive details decreases continuously with an increase in distance, from which it follows that it was not unlimited at optimum distance” (Parsons 1964, p.189). Come si può intuire ora e come si vedrà successivamente Weyl è infinitamente lontano da qualsiasi tipo di discorso simile.

³⁴ Parsons in Parsons 1964 centra pienamente questo punto: mostra bene i limiti delle nostre esperienze. Così come Kant afferma chiaramente che noi accediamo alla conoscenza grazie all'esperienza (ovviamente questo non significa che la conoscenza si fonda su basi empiriche), (cfr. *KrV*, B35/A21, p.54 [82]).

una stretta relazione tra i tre tipi di continui. In questo capitolo useremo fenomenico come sinonimo di intuitivo, stando sempre attenti a non cadere nella seconda antinomia (cosa che potrà essere verificata da qualsiasi lettore). Chiusa questa parentesi terminologica, si torna a Weyl e alla sua critica del continuo matematico. Gli strumenti concettuali sono stati costruiti su basi solide, eppure sfugge qualcosa alla matematica.

3.2 La rottura con l'intuizionismo nel *Das Kontinuum*

Weyl introduce il problema del rapporto matematica-fenomeno già nel primo capitolo, quando afferma che

la *continuità* data in un'intuizione immediata (in particolare nel tempo che scorre e nel movimento), come una totalità di stati discreti, occorre costatare, ripeto, che questo problema è, nonostante Dedekind, Cantor e Weierstrass, oggi irrisolto non meno di ieri.

(DK, pp.44-45 [15])

Con Kant abbiamo visto che la matematica costruisce i propri elementi su uno spazio continuo, il quale diventa il presupposto della stessa matematica (in particolare dell'analisi). Si è anche argomentato che è la filosofia a dover porre lo sguardo sul continuo matematico, prodotto degli elementi matematici. La filosofia rifletterà quanto il continuo matematico disti da quello intuitivo, ossia attraverso gli elementi matematici proverà a descrivere il continuo intuitivo e, qualora quegli elementi fossero insufficiente per tale compito (o sono imprecisi), allora la matematica dovrà mettersi all'opera per costruire nuovamente i suoi enti (e con esso il continuo matematico). Una volta avvenuta la nuova costruzione ci sarà il confronto con quella vecchia; passata la prova della coerenza (compito della logica e della matematica), ancora una volta sarà la filosofia a dover decidere quale struttura sia preferibile: il criterio di decisione è l'efficacia di descrizione del continuo dell'intuizione pura *a priori*. Questo ultimo processo si basa sul principio chiamato principio di "traduzione". Il *principio di traduzione* è quel principio grazie al quale possiamo congiungere "lo spazio e il tempo da un lato e i numeri dall'altro" (DK, p.151 [74]) e quindi grazie ad esso si può vedere la bontà del sistema formale, il quale sarebbe,

altrimenti, solo un insieme di vuote formule e assiomi³⁵. Weyl spiega tale principio in analogia con la fisica:

Volendo, nella nostra teoria del continuo che dovrà dare le prove della sua ragionevolezza (a parte la sua coerenza logica) allo stesso modo di una teoria fisica. Il concetto di numero reale rappresenta qui lo schema astratto del continuo con il suo infinito incastonarsi di parti possibili.

(DK, p.145 [71])

Detto questo Weyl conclude il suo libro affermando (la citazione (II)) “si evidenzia [che] nel continuo della nostra intuizione e l’ambito concettuale della matematica [quello costruito nel primo capitolo e riassunto nel paragrafo precedente] costituiscono due mondi talmente estranei l’uno rispetto all’altro, che dev’essere respinta come assurda.” (DK, p.167 [83]), tanto che afferma che “il continuo, così come è dato nella intuizione, non può assolvere questo compito [fondare una disciplina matematica]” (DK, p.141 [68]).

La causa è da trovarsi nella matematica come disciplina che ragiona solo per discreti momenti. Nel paragrafo sei Weyl argomenta che il problema consiste proprio nella sua incapacità di cogliere l’istante senza distruggere l’omogeneità del continuo fenomenico. Un lasso di tempo temporale è un istante omogeneo e fulmineo, la matematica invece ragiona per punti discreti e statici, il continuo così costituito è un continuo per nulla omogeneo. Il filosofo tedesco porta l’esempio di una matita sopra ad un tavolo (cfr. DK pp.139-140 [68])³⁶; noi la fissiamo dal momento “O” al momento “E”; supponiamo che OE sia un segmento temporale descritto da una funzione ($y=f(x)$), essa deve essere continua secondo la definizione data³⁷. Il momento “O” indica il punto iniziale fissato nel tempo ($y=f(O)=0$). Così facendo abbiamo la relazione binaria “O prima di E”, quindi anche $f(O)$ prima di $f(E)$).

³⁵ Chiaramente la costruzione di Weyl non poggia sul continuo come in Kant, per questo il principio di traduzione è essenziale; tuttavia, come è stato argomentato alla fine del secondo capitolo, poco cambia se il continuo intuitivo è prima o dopo la costruzione: esso rimane il banco di prova con il quale ogni sistema formale è obbligato a ricevere una valutazione.

³⁶ Weyl porta l’idea di un continuo “atomico”, fatto di punti che è il continuo che la matematica può trattare solamente (coerentemente quanto mostrato con Kant), cfr. Bell 2000, p.8 e Van Dalen 1995, p.149. Per una spiegazione approfondita dell’esempio della matita, mi rifaccio a Bell 2000 e Bell 2019, pp.178-180.

³⁷ (β) e (DCS).

Il tempo percepito è fatto di istanti, uno a fianco all'altro, talmente veloci che non sono istanti diversi, ma proprio quel lasso di tempo percepito "OE", solo il fluire si percepisce e mai il singolo istante; infatti, è "nella natura del tempo (e non dipende dalla casuale imperfezione dei nostri mezzi) che un determinato istante non è proprio evidenziabile, che non possiamo mai fissarlo con *precisione*, ma solo approssimativamente." (DK, p.144 [73]). Il continuo fenomenico presentato da Weyl è un omogeneo, dove il presente è già ricordo e il ricordo è formato da un istante fulmineo. Tale istante può essere anche "più lungo" di un "attimo", ma i punti di tale attimo sono talmente legati assieme che formano un istante³⁸. La matematica ragiona per punti e per numeri. Quello che può fare è costruire una funzione che collega "O-E" e rappresentarla in un piano cartesiano, quindi disegnare una funzione continua. La matematica fallisce fin da quando determina un punto, infatti "già per il concetto di punto ci manca l'appoggio necessario per l'intuizione" (DK, p.141 [68]).

Weyl si ferma ai numeri irrazionali, per cui: "l'assioma della continuità dev'essere formulato in modo da far corrispondere, con riferimento ad un segmento unitario OE, ad ogni punto P un *numero reale* come ascissa e viceversa" (DK, p.147 [72]. Enfasi mia).

Il continuo percepito come continuo di punti (ossia atomico, come si accennava nella nota 36 della pagina precedente), è un continuo non omogeneo e quindi, incapace di rendere conto al continuo fenomenico. Il risultato del continuo matematico è un insieme di "istanti vissuti, puntiformi, incastonati senza fine gli uni negli altri" (DK, p.143 [69]).

Il continuo matematico, in Weyl, si scontra con il grande limite della matematica: la sua capacità di lavorare solo con il discreto; tuttavia, come abbiamo visto nel secondo capitolo, il limite non è della matematica in quanto matematica, ma della matematica in quanto disciplina umana. Quello che si può sperare è costruire, sulla base dei nostri principi definitivi (ossia l'AS), un nuovo modello in grado di rendere conto del fluire temporale e di rendere il punto-numero più vicino alle nostre intuizioni, ricordando che

³⁸ L'argomento ricorda molto le riflessioni di Agostino nelle *Confessioni*. Ai fini del capitolo è necessario capire se è possibile concepire l'istante di una funzione continua, senza far perdere l'omogeneità della continuità. Se è possibile, allora sarà solo successivamente uno sguardo retrospettivo al mondo fenomenico: la filosofia analizzerà più profondamente quel mondo che ci svela i segreti del mondo *pre-intuitivo* e ancora una volta, in un movimento simile a quello fatto a inizio del capitolo, analizzerà la nuova struttura algebrica.

la filosofia della matematica ha un possibile accesso per il continuo intuitivo in virtù del fatto che la matematica sola è la disciplina in grado di costruire sullo spazio e sul tempo.

Per ottenere una funzione continua nell'intervallo tra "O" e "E" devo concepire "OE" come un insieme di punti, se la funzione che collega "O – E" è continua, allora vale il *teorema A* (DK, p.129 [62]³⁹), quindi posso scegliere qualsiasi punto tra "O" e "E", ma il fluire del tempo non viene descritto, poiché "OE" non viene rappresentato come un istante unico, bensì come un insieme di punti. Possiamo ragionare per intervalli nidificati come vuole Weyl, ossia scegliamo un intervallo più piccolo tra "O" ed "E" per poi collegare in qualche modo tutti questi piccoli intervalli per rendere conto al fulmineo tempo del mondo fenomenico. Prendiamo perciò il punto "P", con "P viene prima di E". Anche il segmento "OP", tuttavia, non riesce a rappresentare l'istante percepito, come istante, ma semplicemente come un segmento più breve, ma ancora troppo grande per cogliere la velocità dell'istante "OE". L'autore formalizza questa idea di "istanti nidificati" con un'equazione (coerentemente al modo di ragionare algebrico):

se P è un istante, è possibile costruire un dominio di numeri razionali, al quale λ appartiene se e solo se esiste un istante L che viene P tale che $OL=\lambda \cdot OE$ (...) di modo tale che il dominio sia un numero reale nel senso da noi definito.

(DK, p.140 [68])

Ovviamente "OL" si restringe all'allargarsi di λ . Per cogliere l'istante "OE" come istante, "OE" dovrebbero essere infinitamente vicino, ossia con l' λ grandissima $L \sim E$ (significa L ed E sono approssimativamente uguali). Teniamo questo punto in sospeso, perché riemergerà prestissimo con l'ANS, ma è chiaro che proprio perché vale il giudizio (α)⁴⁰

³⁹ Teorema A: Una funzione continua assume tutti i valori intermedi: se f è una funzione, $f(a) < v < f(b)$, allora esiste un numero reale c tra a e b ($a < c < b$) tale che $f(c) = v$. (Vedere nota numero 28, p.106).

⁴⁰ Si potrebbe pensare che il continuo matematico, essendo una disciplina che lavora su giudizi esistenziali, non applichi mai il principio (5), ma solo il (6). Nel mondo fenomenico, invece, l'istante percepito nel tempo, ossia l'ora, satura il giudizio applicando il principio (5). La matematica non riesce a saturare il giudizio (α), perché ci sono infiniti ε e δ , in quanto i numeri appartenenti ad "OE" sono infiniti, e "nessuno può descrivere un insieme infinito se non indicando delle proprietà che sono caratteristiche degli elementi di tale insieme. (...). È assurdo immaginare un insieme infinito come una «collezione» raccolta attraverso un'infinita di singole scelte arbitrarie (...): l'inesauribilità è nell'essenza dell'infinito" (DK, p.43). La descrizione della proprietà è rappresentata dal giudizio α , con i problemi che stanno emergendo sia sul fronte matematico che filosofico. Le grandezze non archimedee non saurano il principio α applicando esattamente il principio (5), altrimenti si cadrebbe nella seconda antinomia sostenendo che si possono percepire

e il *teorema A* che “OE” è un istante troppo grande per essere concepito come istante fulmineo nel nostro ricordo.

Gli istanti matematici, si restringono sempre di più ad “O”, senza mai raggiungere né “O” (infatti un punto non può essere continuo, ma semmai può essere continua la funzione che collega due punti) né la brevità dell’istante del mondo fenomenico. Si otterrebbe il risultato atteso se si avesse il giudizio: “esiste uno e uno solo numero tale che, dato l’origine diversa dal numero, la differenza tra l’origine e tale numero è inferiore (al più uguale) di qualsiasi altra differenza tra l’origine e qualsiasi altro numero”. Questo numero, chiaramente, è un numero non-archimedeo! Perché esso sia possibile deve esistere una categoria con tali elementi per applicare il principio (6) sul giudizio (α). Tale categoria deve essere conseguente della categoria NR, sennò sono due modelli vicini che non dialogano e sarebbe come aggiustare una casa di pietra con la carta velina. Per costruire tale categoria una strada possibile è ragionare prima sull’origine (“O”) e poi su il punto “più vicino”. Nell’ottica standard ogni punto *intorno* ad “O” è solo un punto di passaggio, che lascia posto a quello successivo. La riflessione si concentra, così, in maniera opposta: prima si è riflettuto su “OE” nel suo insieme, ora, invece, si sta riflettendo su “O”, sul suo numero immediatamente successivo ossia: in termini matematici si può dire che si sta costruendo un *intorno* di “O”⁴¹.

3.2.1 Gli intorni, i punti infinitamente vicini e i limiti

Il segmento temporale “OE” in cui vedo la matita è continuo nella mia percezione. Se dovessi rappresentarlo matematicamente mi siederei su una sedia, prenderei la matita sul tavolo e con un foglio disegnerei un punto e lo chiamerei “O”, poi disegno un altro punto e lo chiamerei “E”, dunque collegherei i due punti finché non ottengo il segmento “OE”, il quale rappresenta l’istante della matita sopra al tavolo appena passato. Riflettendo sopra a questo segmento, proverei a ricordare l’istante “OE” come un “momento” di continuità. Esso rappresenta un ricordo di un momento temporale incastonato tra due punti. I punti

grandezze infinitamente piccole. Tuttavia, se si può saturare il principio α con le grandezze non archimedee usando il principio (6), si ottiene una distanza tra due punti più piccola possibile e sarebbe più coerente con l’intuizione del tempo che ha solo ricordi di istanti fulminii. Per fare questo bisogna accettare l’esistenza della categoria “grandezze non-archimedee”, almeno a livello “ideale”, per usare le parole di Weyl.

⁴¹ Per definizione di *Intorno* capitolo 1, paragrafo 1.3, p.45.

non posso essere continui⁴², la funzione che connette “O” a “E” è continua e deve rendere ragione a quel ricordo temporale. La matematica si mette all’opera e ha in mano il sistema formale-logico del *Das Kontinuum*.

A questo punto mi trovo in enorme difficoltà, perché mi accorgo che l’istante “OE” deve essere concepito come un istante, ma composto da insieme di infiniti punti messi in relazione tra di loro con le relazioni “prima” e “dopo” (DK, p.139 [67]). L’unica cosa che posso affermare è che, scelto un numero piccolo a piacere x , considerato O come punto di inizio (=0), allora posso prendere un altro punto tra O e x . Tuttavia, la scelta di un punto molto vicino non mi descrivere l’istante “OE” in cui ho visto la matita ferma sul tavolo, semplicemente faccio una congettura derivante dal fatto che “OE” è un segmento continuo e quindi contiene un punto nel mezzo (*teorema A*).

Posso considerare il segmento come un insieme di istanti continui, in quanto il punto è qualcosa che non esiste nel tempo⁴³. Per quanto io scelga il punto vicino a O, esso è un momento troppo grande rispetto all’immediatezza dell’istante nella mia percezione, inoltre, proprio grazie al principio matematico (α)⁴⁴ e al *teorema A*, posso scegliere sempre un punto ancora più piccolo rispetto a quello inizialmente considerato (con un ragionamento medesimo non si mette mai limite alla divisione possibile). La scelta di considerare “OE” tutto insieme e poi descriverlo fallisce e quindi bisogna prendere un’altra strada, mantenendo buona l’idea di base che se “OE” è continuo, allora posso prendere qualsiasi punto in “OE” senza problemi e considerare il nuovo istante O-nuovo punto.

La nostra percezione del tempo è un continuo fluire, il punto di per sé non esiste e “esiste solo come «punto di passaggio»” (DK, p.162 [80]). Per ovviare il problema considero solo il punto “O”, ossia l’inizio di tutta la percezione. Il punto iniziale deve cedere immediatamente all’altro punto e così via, in un continuo fluire. Questo porta a considerare il punto “O” come un *intorno completo*⁴⁵, detto in termini algebrici (DK, p.162 [79-80]):

⁴² Cfr. DK p.146. punto 1 per capire cosa Weyl pensa intorno ai punti.

⁴³ Bell commenta “The fact that single points in a true continuum “cannot be exhibited” arises, Weyl continues, from the fact that they are not genuine individuals and so cannot be characterized by their properties” (Bell 2019, p.178)

⁴⁴ Per ricordarlo: $\alpha) \forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta [\delta > 0 \wedge \forall x \forall y (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)]$

⁴⁵ Nel primo capitolo è stato definito intorno completo “Dato un numero reale x_0 , si chiama intorno completo di x_0 un qualunque intervallo aperto di $I(x_0)$, contenete x_0 : $I(x_0) =]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_2[$ con δ_1 e δ_2 numeri reali e positivi” (p.48)

$$\gamma) |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots \in \mathbb{N}),$$

con $\mathbf{x}=\mathbf{O}$ e a un punto preso qualsiasi

Weyl, lapidario, afferma:

La nozione dell'infinitamente vicino alla quale la vecchia Analisi ricorreva per cogliere quel carattere non autonomo di punto, non esente da contraddizioni, ed ha quindi dovuto cedere il posto nell'Analisi moderna alla successione infinita di intorni sempre più ravvicinati

(DK, p.162 [80])

Weyl intende che, ragionando, si può provare a iterare (γ) fino a trovare il punto $\mathbf{x}$ infinitamente vicino, ossia finché

$$\gamma_1) |\mathbf{x} - \mathbf{a}| = dx$$

Esattamente la nostra grandezza non archimedea e, come sappiamo dal primo capitolo del presente elaborato, essa non è esente da contraddizioni. Essa è una grandezza non archimedea è sempre più piccola di qualsiasi numero reale e (γ) è soddisfatta per qualsiasi n , in maniera univoco (come si esigeva dal primo paragrafo di questo capitolo).

Weyl, tuttavia, ha in mano solo l'AS, la quale non accetta le grandezze non archimedee. Restando sulla scia di Weyl si può dire che, mantenendo che $1/n$ sarà sempre un numero razionale, il passo successivo sarà quello di avere un operatore matematico in grado di connettere i punti, affinché la definizione di continuità nella matematica (ossia affinché la definizione di funzione continua) sia vicina alla continuità del mondo fenomenico. Per fare ciò utilizzo (α) e (γ) per costruire un limite che collega il punto "O" al punto "E" così che tutti gli istanti che ci sono in mezzo sono collegati nel loro fluire. Il problema dei limiti affiora proprio nelle contraddizioni presenti in (γ_1) nell'AS. Come è stato già largamente spiegato nel primo capitolo il salto da grandezza reale a grandezza

non archimedeo non è chiaro, eppure è più pericoloso non accettare quest'ultima che prende sul serio tale salto. Se consideriamo, in effetti, l'istante come il tempo tra un numero reale e il suo "numero più vicino in assoluto", allora la matematica riuscirebbe a cogliere veramente la continuità dell'esperienza e non in maniera approssimata come intervalli nidificati sempre più piccoli. Il fluire di "OE" sarebbe l'unione di tutti gli istanti infinitamente vicini e quindi avremmo un modello matematico/formale più vicino alla nostra intuizione temporale. Ovviamente anche in una struttura del genere il continuo risulta un continuo "atomico", ossia formato da discrete parti, ma bisogna considerare che la matematica (o meglio la mente umana) riesce a ragionare solo con il discreto e quindi bisogna mettersi il cuore in pace per quanto il tentativo risulta nobile nel descrivere il continuo senza il discreto, solo nella sua completa omogeneità. Quello che si può sperare è che il continuo matematico che accetta l'infinitamente vicino sia un po' più vicino al continuo intuitivo rispetto al continuo matematico fermo ai numeri reali.

Per concludere il paragrafo è da notare che la costruzione nuova dell'infinitesimale (che poi porterà ad una nuova costruzione del limite stesso) deve riuscire ad avere una costruzione in sé coerente, non impredicativa; quindi, deve essere un risultato delle regole logiche esposte nel paragrafo precedente. Tale aspetto verrà argomentato nel prossimo paragrafo.

3.2.2 Il formalismo come via d'uscita: il salto in nuovo mondo formale

Weyl si arrende davanti all'evidenza che c'è un abisso incolmabile tra il continuo fenomenico e il continuo matematico, eppure afferma:

gli schemi astratti forniti dalla matematica sono necessari per rendere possibile una scienza esatta dei domini di oggetti nei quali interviene la nozione di continuo.

(DK, p.167 [83])

Per colmare l'abisso si potrebbe cambiare il sistema definitorio. Solo nell'analisi, tuttavia, come è stata costruita "fornisce una teoria utilizzabile del continuo" (DK, p.148 [72]) e questo è coerente con quanto detto nella prefazione in cui Weyl non vuole reggere "una

bella impalcatura di legno” (DK, p.9 [i]) di assiomi per far reggere l’edificio, ma mettere solide basi.

La battaglia, pertanto, non deve puntare in un cambiamento dello schema assiomatico, ma dovrebbe mirare in suo possibile ampliamento, ossia in nuovi enti, derivati dagli assiomi logici. Nel nostro caso specifico bisogna riformulare l’infinitamente vicino che da un lato sia esente da contraddizioni e che dall’altro lato possa concepire l’istante coerentemente con il tempo fenomenico per poi riuscire a ricostruire il limite in maniera coerente.

La sfida è ardua se si considera che tale nuovo ente deve essere oltre alla divisione all’infinito, ossia la regola (α) deve valere, ma deve allo stesso tempo rendere univoca l’idea che esista un punto più vicino di qualsiasi punto dato. L’idea di base è quella di espandere i numeri reali con le grandezze non archimedee. Un lavoro in questa direzione è stato svolto dal matematico Abraham Robinson, inventore dell’analisi non standard. Robinson, usando sapientemente il *teorema di completezza*, *compattezza* e il *teorema del transfert*, riesce ad espandere il campo dei reali standard ($\mathbb{R}$) al campo dei reali non-standard ($\mathbb{R}^*$), e quindi fondare l’ANS. L’obiettivo non è comprendere algebricamente cosa sia l’ANS, ma vedere come i concetti di infinitesimale e limite vengono riformulati in modo tale che colgono in modo più naturale l’idea del fluire del tempo da istante a istante. Il nuovo sistema formale porterà gli stessi risultati a livello algebrico del vecchio, ma questo non deve voler dire che siano perfettamente equivalenti agli occhi della filosofia della matematica; anzi proprio perché la costruzione dell’ANS porta gli stessi risultati dell’AS, ma è più precisa della costruzione dell’AS deve preferire il primo sistema formale piuttosto del secondo. La pratica matematica è la prima a guadagnare con l’ANS, ma al fine dell’elaborato è la filosofia la disciplina che soddisferà la necessità di spiegare il continuo fenomenico, attraverso i nuovi enti matematici. Il nuovo sistema formale riesce ad essere più coerente con le nostre intuizioni e, quindi, la filosofia della matematica potrà descrivere più correntemente lo spazio omogeneo delle nostre intuizioni.

3.3 L'analisi non standard (ANS)

In questo paragrafo si vedrà la proposta di Robinson e l'ANS. Prima di entrare nel merito è necessario fare delle precisazioni. Lo scopo non è quello né di avere un confronto tra Weyl e Robinson né di spiegare nel dettaglio l'ANS. Il primo compito sarebbe sicuramente molto interessante, ma servirebbe un elaborato intero per provare a poter apprezzare tale confronto, la seconda questione trasformerebbe la tesi in un lavoro di matematica. Lo scopo del paragrafo è, invece, quello di mostrare come l'apparato logico-formale presentato da Robinson sia più vicino alla continuità delle nostre intuizioni.

Detto questo, bisogna vedere se il sistema formale di Robinson è un sistema potenzialmente coerente con il sistema formale di Weyl. Da un rapido sguardo sembrerebbe proprio di sì. Senza entrare nel dettaglio possiamo notare che i sei principi logici vengono rispettati anche nel testo di Robinson in cui costruisce l'ANS⁴⁶, infatti si hanno i simboli per oggetti individuali (i-5) e quelli per le variabili individuali (ii), i giudizi di relazione, quelli predicativi e quelli esistenziali (i, v-A, B, C) e infine si hanno tutti i connettivi logici (iv-2,3,4). Le formule Atomiche sono i giudizi semplici e ovviamente c'è anche l'identità⁴⁷. Il modo di costruire è identico a quello di Weyl, infatti Robinson afferma fin da subito:

Se X è una formula atomica, $[X]$ è una formula ben-formate; se X e Y sono fbf, allora anche $[\neg X]$, $[X \vee Y]$, $[X \wedge Y]$, $[X \supset Y]$, $[X \equiv Y]$ sono fbf⁴⁸

Per quanto riguarda il modo di mettere i valori di verità il criterio è simile a quello di Weyl.⁴⁹ Non ci dilungherò più di così nel confronto tra i due sistemi formali, semplicemente perché né Weyl né Robinson hanno una logica con particolari limitazioni, ma le regole, equivalenze, connettivi etc. sono gli stessi della logica predicativa di primo

⁴⁶ Il numero latino minuscolo si riferisce al testo Robinson (1966), invece i numeri naturali e le lettere maiuscole al *DK*, spiegato nel § di questo capitolo (pp. 6-7)

⁴⁷ Robinson 2021, p.88.

⁴⁸ Robinson 196), p.7: "if X is an atomic formula, $[X]$ is a well-formed formula; If X and Y are wff, then $[\neg X]$, $[X \vee Y]$, $[X \wedge Y]$, $[X \supset Y]$, $[X \equiv Y]$ are wff" e cfr. Robinson 1963, pp.11-37.

⁴⁹ Cfr. Robinson 1966, pp.8-9.

ordine. Robinson, inoltre, è un autore molto sensibile alle questioni filosofiche del suo tempo, per cui difficilmente avrebbe accettato definizioni impredicative⁵⁰.

Nel prossimo paragrafo si entrerà nello specifico dell'ANS e di come si può passare da $\mathbb{R}$ (universo standard) a $\mathbb{R}^*$ (universo non-standard). Il passaggio è reso possibile da un principio logico. Ogni fbf di $\mathbb{R}$ potrà essere tradotta in $\mathbb{R}^*$ e viceversa, $\mathbb{R}^*$ non entrerà in contraddizione con $\mathbb{R}$ (ma semplicemente espanderà il suo dominio) e infine le soluzioni ottenute in $\mathbb{R}^*$ saranno le stesse di $\mathbb{R}$ (ma in maniera più coerente e più intuitiva). Dopo aver esposto l'ANS, si ritornerà alla critica di Weyl sul rapporto “continuo matematico” – “continuo fenomenico”. Con in mano il nuovo sistema formale si potrà delineare i contorni per un sensato rapporto tra i due continui che sia in grado di mantenere il mondo matematico più vicino al mondo intuitivo.

3.3.1 Il teorema di completezza e quello di compattezza, il principio del transfer e l'universo $\mathbb{R}^*$

Robinson usa una logica dei modelli e parte dai lavori già svolti da Skolem sull'algebra non-standard. L'intuizione originale di Robinson è quello di usare la logica dei modelli e il principio del transfer per arrivare ai numeri infinitesimali. Il matematico parte dal *teorema di completezza*:

(TCl): Un insieme di proposizioni è logicamente coerente (nessuna contraddizione può essere dedotta da esso) se e solo se esso ha un modello, cioè se e solo se esiste un universo in cui esse sono tutte vere.⁵¹

Weyl non avrebbe alcun problema ad accettare TCl. Esso corrisponde alle due condizioni che Weyl pone affinché si possa dire se un giudizio sia vero o falso: la prima esige che

⁵⁰ Cfr. Robinson 1966, p.280 e Robinson 2021, inoltre c'è un saggio molto interessante che vuole proprio togliere l'ANS da eventuali definizioni impredicative, cfr. Solom Ferman 1975. Infine, vorrei far notare che il grande contributo di Weyl è stato quello proprio nell'aver fondato la matematica in definizioni non predicative: difficilmente da ignorare per i matematici successivi. (Significative le parole di Robin e Luo “Hermann Weyl (1885–1955) contributed to many branches of mathematics in his lifetime. His greatest contribution to the foundations of mathematics was the book *Das Kontinuum*, in which he presented a predicative foundation which he showed was adequate for a large body of mathematics” (Adams e Lou 2010, p.7).

⁵¹ Dossena 2021, p.6, per la dimostrazione: Robinson 1963, pp.112-113.

non presenti nessuna contraddizione, la seconda richiede che il predicato, predichi qualcosa che appartiene alla categoria del soggetto (come il giudizio “la foglia è verde”). Ottenute queste due clausole bisogna avere un metodo per decidere se un giudizio sia vero o falso. Weyl giustamente afferma che è una questione metafisica di complicata risoluzione, ma quello che possiamo dire è che tutti giudizi standard formano un universo, chiamato universo standard appunto; designiamo tale insieme con la lettera M.

Per comprendere Robinson, bisogna capire cosa sia un modello. Il linguaggio formale di M è L (o anche segnato con $L_{\mathbb{R}}$). Ogni proposizione in L è un enunciato in M: esso sarà vero o sarà vero la sua negazione (esattamente come diceva Weyl). L’insieme di tutte le proposizioni vere vengono chiamate K. M allora viene definito come il modello di K esattamente quello che parla il (TCI)⁵². Il campo dei numeri reali per definizione gode della proprietà di completezza, infatti: “Un campo ordinato $\mathbb{R}$ si dice campo dei numeri reali se gode della proprietà di *completezza*: ‘ogni sottoinsieme non vuoto $X \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ammette estremo superiore’ ”⁵³. (TCI) ha un corollario molto importante per la nostra indagine, il *teorema di compattezza*:

(TCa): Sia P un insieme di proposizioni di un linguaggio formale L. Supponiamo che nell’universo standard ogni sottoinsieme finito di P sia vero. Allora esiste un universo non-standard in cui tutte le proposizioni di P sono contemporaneamente vere.⁵⁴

A questo punto il gioco è fatto: si arriva ai numeri infinitesimali! Prendiamo nuovamente la formula $(\gamma): |x - a| < \frac{1}{n} \ (n = 1, 2, 3, \dots \in \mathbb{N})$. Se $a=0$ (ossia considero il caso in cui la differenza si restringe all’origine), allora abbiamo solo la x (che chiameremo ora “c” per essere in linea con i testi sull’ANS). Decidiamo di costruire c in modo tale che c debba essere minore di 1/2, ma maggiore 0, poi ancora c deve essere minore di 1/3, ma maggiore 0, etc. l’intervallo è sempre più piccolo, come si era fatto notare nel capitolo precedente. Ogni sottoinsieme finito della collezione di elementi infinita in 1/n, è

⁵² Cfr. Robinson 1966, pp.8-10.

⁵³ Nasso 2003, p.16. Da notare che non si cade nell’impredicativà perché X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, ma non coincide con $\mathbb{R}$.

⁵⁴ Dossena 2021, p.6. Dimostrazione: Robinson (1974) pp.34-35.

esprimibile in $L_{\mathbb{R}}$ e appartiene a K , ossia “ogni suo sottoinsieme finito è vero, perché se consideriamo solo un numero finito di proposizioni della forma « c ’è un numero maggiore di zero e minore di $1/n$ », una delle proposizioni conterrà la frazione più piccola $1/n$, e $1/2n$ sarà ovviamente maggiore di 0 e minore di tutte le frazioni che compaiano nel nostro elenco finito di proposizioni”⁵⁵. (TCa) afferma proprio che esiste “un universo non-standard $\mathbb{R}^*$ che contiene numeri pseudo-reali compreso un numero pseudo-reale positivo c , minore di qualsiasi numero della forma $1/n$. Cioè, “ c ” è infinitesimo”⁵⁶. Così si è esteso l’insieme dei numeri reali a quello degli iperreali.

Ora bisogna capire come funziona questo nuovo universo e qui entra il *principio del transfer* (introdotto da Łos nel 1955):

(PT) ogni formula Φ di $L_{\mathbb{R}}$ - il linguaggio dell’analisi del prim’ordine in cui le variabili variano su tutto $\mathbb{R}$ - ha una *traduzione* “conforme” in una formula Φ^* di $L_{\mathbb{R}^*}$ - il linguaggio dell’analisi, sempre di primo ordine, in cui le variabili variano su tutto $\mathbb{R}^*$ - tale che Φ è vera *se e solo se* Φ^* è vera.⁵⁷

(PT) sancisce che qualsiasi cosa che sia vera nei numeri reali, sarà vera anche nei numeri iperreali, in quanto “(...) dai risultati standard della logica dei predicati segue che esiste un’estensione propria $\mathbb{R}^*$ di $\mathbb{R}$ che è un modello di K , cioè tali che tutti gli enunciati di K sono veri anche in $\mathbb{R}^*$ ”⁵⁸. Quindi ogni regola esposta nei capitoli precedenti, vale anche nell’insieme dei iperreali ((α) e (γ) compresi), inoltre “ogni enunciato dell’analisi è vero in $\mathbb{R}^*$ se e solo se è vero in $\mathbb{R}$ ”⁵⁹.

“ c ” non è una grandezza archimedeica proprio perché è più piccola di qualsiasi grandezza finita, quindi l’assioma di Eudosso-Euclide non è più valido. Questo potrebbe indurre a pensare che la traduzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^*$ non sia sempre possibile, in realtà il (PT) sancisce semplicemente che si conserva sempre il senso, ma non per questo il significato è sempre mantenuto. L’assioma di Eudosso-Euclide è formalizzabile così: $\forall x \forall y \in$

⁵⁵ Davis e Heresh 1991, p.58

⁵⁶ *Ibidem*.

⁵⁷ Ternullo e Fano 2021, p.99

⁵⁸ Robinson (1967), p.28: “Let K be the set of all sentences in L which hold (are true) in the field of real numbers, $\mathbb{R}$. It follows from standard results of Predicate Logic that there exists a proper extension $\mathbb{R}^*$ of $\mathbb{R}$ which is a model of K , i.e. such that all sentences of K are true also in $\mathbb{R}^*$ ”

⁵⁹ Ternullo e Fano 2021, p.104.

$\mathbb{R} (\exists n \in \mathbb{N} (x < y \rightarrow (nx > y))$ e tradotto in $\mathbb{R}^*$ si formalizza come segue: $\forall x \forall y \in \mathbb{R}^* (\exists n \in \mathbb{N}^* (x < y \rightarrow (nx > y))$. Il secondo estende l'assioma anche agli iperreali. Esso, infatti, afferma che “dati due *iperreali* x e y , l'uno più piccolo dell'altro, esiste sempre un numero *iperreale* (*iperfinito* (...)) che, moltiplicato al più piccolo, supera l'iperreale più grande”⁶⁰.

Ritornando sui proprio passi: “ c ” è un numero infinitesimale e viene proprio definito nel mondo standard come $|c| < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Chiaramente lo “0” è il primo numero infinitesimale, ma, come è stato detto più volte, non può essere l'unico. Consideriamo il numero 2 e il numero $2+c$, il secondo numero lo chiamiamo “3”. Il 2 e il “3” sono infinitamente vicini perché differenziano solo di un infinitesimale (da notare che anche c e 0 sono infinitamente vicini per definizione). Pertanto, definiamo due numeri x e y infinitamente vicini (o appartenenti alla stessa monade) se la loro differenza è infinitesimale ($x-y=c$) e si scrive $x \approx y$ (si può capire che banalmente $x \approx x$, come $3 \approx 3$, $104509 \approx 104509$, etc.). Da questa definizione arriviamo a poter dimostrare che “Ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino ad *esattamente* un numero reale”⁶¹. Da questo definiamo l'unico numero reale di cui x è infinitamente vicino viene definito come sua parte standard e lo scriviamo $st(x)$.

Da queste poco nozioni si può ridefinire il concetto di limite. Un limite della funzione $f(x)$ di x che tende a un valore c , se per tutti le x infinitamente vicini a c e diversi da c , $f(x)$ è infinitamente vicino a L :

⁶⁰ Ternullo e Fano 2021, p.100. Su una spiegazione più approfondita rimando a cfr. Davis e Heresh 1991 pp.58-59. Su questa questione non ci si vorrà dilungare più di così, perché come si vedrà presto ogni numero infinitesimale ha la sua parte standard nel campo dei reali; quindi, nel campo dei reali l'assioma di Eudosso-Euclide viene rispettato, nel mondo non-standard non viene rispettato solo nel numero infinitesimale, il quale ha, però, sempre la controparte standard, la quale rispetta l'assioma. Robinson riformula l'assioma: “l'assioma di Archimede, ad esempio, può essere espresso come una disgiunzione infinita; in parole un «se b è maggiore di a , e se a è maggiore di b , oppure $a+a+a+a$ è maggiore di b , oppure...». In generale il *principio di compattezza*, di cui abbiamo già sottolineato l'importanza per il calcolo dei predicati del prim'ordine, non si applica a linguaggi infinitari.” (Robinson 2021, p.100).

⁶¹ Cfr. Dossena 2021, p.9.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ se } \forall x \approx c \text{ e } x \neq c, f(x) \approx L^{62}$$

Da questa nuova definizione si possono (ri)-definire tutte le altre quattro definizioni di limite, ma quella che ci interessa è la prima, proprio perché coincide con la definizione di continuità (DCNS):

DCNS) f è continua nel punto reale c se $f(c)$ è definite e qualsiasi x è infinitamente vicino a c , $f(x)$ è infinitamente vicino a $f(c)$, ossia se $x \approx c$, allora anche $f(x) \approx f(c)$ ⁶³

Ossia, calcolo la parte standard della funzione nel punto c e devo ottenere il punto $f(c)$, allora posso costruire il limite e seguire la (DCS). Per esempio devo vedere se $f(x) = x^2 - 4x + 2$ è continua in $x=3$, allora $f(3) = 3^2 - 4(3) + 2 = -1$, ora devo calcolare $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ con l'ANS: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = st((3 + c)^2 - 4(3 + c) + 2) = st(-1) = -1$. Il limite è calcolabile, quindi $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1$. I risultati coincidono, allora la funzione in $x=3$ è continua, con $3 \approx c$ e $f(3) = -1 \approx f(c)$. Questo vuol dire che la funzione in $x=-1$ è continua, ossia ha un numero infinitamente vicino, il quale sarà infinitamente vicino in modo univoco, indipendentemente dall'intervallo preso.⁶⁴ Tale “ c ” nell’ottica NS esiste non meno dei numeri reali, in quanto l’ANS non ha solo riformulato il concetto di limite, ma anche quelli dei numeri. I numeri nell’ANS sono un sottoinsieme di tutti i numeri, i quali

⁶² Si possono definire così tutte le quattro definizioni di limiti. Per alcuni esempi con la parte standard e quella non standard di calcoli rimando a Dossena 2021, *Appendice*, Stecca e Zambelli 2020, pp.126-127. Si noterà che i risultati ottenuti nella parte standard sono gli stessi del procedimento non-standard. Questo però non deve portare a sostenere la inutilità dell’Analisi non-standard, bensì a confermare che l’universo dei reali può essere tradotto nell’universo degli iperreali e che, quindi, si può lavorare nel secondo universo perché più coerente logicamente e più coerente rispetto alla costruzione matematica basata sullo spazio e sul tempo. A cascata si possono definire integrali e derivate e, quindi, tutti teoremi di analisi in un modo solido e riparato da contraddizioni (cfr. Nasso 2003, pp. 19-21)

⁶³ Keisler 2007, p.44, Definizione 3.7: “ f is continuous at a real point c if $f(c)$ is defined and whenever x is infinitely close to c , $f(x)$ is infinitely close to $f(c)$ ” Robinson mette questa come condizione per costruire il limite per la definizione di DCS: Teorema 3.4.1 “in order that standard real number c be limit of $f(x)$ in R as x approaches b (from below), $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$, it is necessary and sufficient that $f(x) \approx c$, for all $x \approx b$, $a < x < b$ ” (Robinson 1966, p.65).

⁶⁴ Esempio preso da Stecca e Zambelli 2020, p.123 (Esempio 8.3.4).

comprendono tanto i numeri reali quanto quelli infiniti e infinitesimali. Nel campo di $\mathbb{R}^*$, infatti, troviamo⁶⁵:

1. numeri infinitesimali, indicati con c (o talvolta con ε), tali che $\forall r \in \mathbb{R}, \varepsilon < r$
 2. numeri finiti (o *iperfiniti*), indicati con M , tali che $\forall r \in \mathbb{R}, > r$ (sono vere le seguenti operazioni: $M = 1/c$ e $c = 1/M$)
 3. numeri limitati (o finiti): indicati con a , tali che $\exists r, s \in \mathbb{R}, r < a < s$
- I numeri c e M vengono chiamati anche non-standard; il numero a è il numero reale.

Per la matematica questo è sufficiente e riesce a condurre le proprie dimostrazioni sicura di mantenere la propria coerenza e raggiunge anche una maggiore chiarezza nelle proprie definizioni e rigore nella propria pratica. Emblematiche sono le parole di Davis e Heresch:

Quando diciamo che infinitesimali o monadi esistono, dovrebbe esser chiaro che non intendiamo affatto ciò come sarebbe stato inteso da Euclide o da Barkley. (...) La teoria dei modelli non si compromette in un modo o nell'altro su tali questioni ontologiche. Quel che i matematici vogliono dagli infinitesimali, non è una forma di esistenza materiale, ma piuttosto il diritto di servirsi di esse nelle dimostrazioni (...). Se si immergono gli oggetti standard nell'ampliamento non-standard, si può trovare una dimostrazione molto più breve e più intuitiva usando oggetti non-standard.⁶⁶

Si possono fare due considerazioni: una al livello tecnico, l'altra su un piano squisitamente filosofico. La prima considerazione è un corollario di tutto il capitolo fin qui svolto: l'ANS è molto più precisa dell'AS. Essa non cade in tutte quelle critiche fatte in occasione paragrafo 3.1, tanto meno si scontra con le incoerenze storicamente sottolineate dai matematici e filosofi viste nel paragrafo 2.1. La matematica non ha più modo di escludere i differenziali dalla propria struttura: essi sono derivati logicamente e permettono alla pratica matematica di essere più precisa dell'AS. La seconda

⁶⁵ Cfr. Ternullo e Fano 2021, p.100. Ovviamente una volta riformulato il concetto di limite, allora si può riformulare anche quello di integrale, derivata prima e seconda etc. (Nel paragrafo 1.3 questo è chiaro: ogni definizione involve il limite in qualche modo).

⁶⁶ Davis e Heresh 1991, p.59.

considerazione merita un'analisi approfondita, ma prima di entrare nello specifico è saggio vedere dove i punti iperreali sono nella retta, così sia si possa avere una immagine visiva e sia si può risolvere uno dei problemi esposti alla fine del paragrafo 1.2.3⁶⁷.

3.3.2 L'analisi non standard nella retta

I numeri infinitesimali devono avere un posto nella retta, altrimenti come possono rispondere ai quesiti di Weyl? Come si risemantizza il segmento “OE”, perché sia continuo non solo nella nostra esperienza, ma anche nei fogli di carta?

Un modo errato è di vedere gli infinitesimali come dei numeri molto vicini a un certo numero, disegnando un punto (“L”) vicino ad “O” se il segmento è “OE” (*figura 1a*). Appare chiaro ormai che la *figura 1a* è forviante perché ho deciso io, arbitrariamente, di disegnare il punto molto vicino all'origine per “far tornare i conti”. Non c'è incoerenza nel disegnare il punto un po' più distante dall'origine (*figura 1b*): chi può fissare quando è vicino o quando è lontano? Inoltre, se “O” vale 990909, “L” può valere anche 991099, purché “E” sia maggiore di “L”, ma nessuno direbbe che “L” abbia un valore “piccolo” né che la distanza tra “O e L” sia piccola (con i numeri presi in considerazione la distanza “O- L” è di 190 unità), eppure se “E” vale 9090912, allora si può dire che “L” sia molto vicino (in realtà è solo un gioco di proporzioni e di “lente di ingrandimento”⁶⁸).

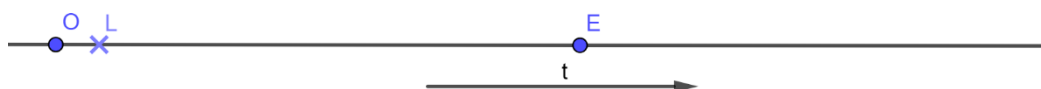


FIGURA 1A

⁶⁷ Il paragrafo finiva con delle domande, una delle quali era proprio “dove sono le grandezze non archimedee nella retta”? (pp. 44-45).

⁶⁸ Keisler esprime questo concetto con un'immagine molto suggestiva “If we train an infinitesimal microscope on an element of the hyperfinite grid and set the magnification to H , the portion of the grid inside the microscope will look like a portion of the set $\mathbb{Z}$ of integers. If we train a microscope on the greatest element H and aim the telescope at this microscope, we will see the upper end of the hyperfinite grid, which will look like a portion of the set of negative integers with O at H ” (Keisler 1994, p.220).

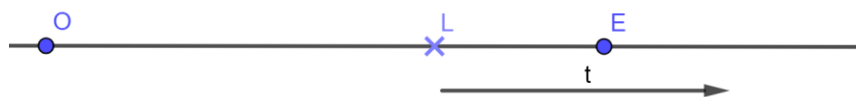


FIGURA 1B

Per farla breve: gli infinitesimali non devono appartenere alla retta come i numeri reali, sennò si cade nelle incoerenze viste lungo tutto questo capitolo.

Weyl afferma che l'“infinitamente vicino” non è esente da contraddizioni, lasciando pensare che il problema non risiede tanto nel fatto che l'infinitamente vicino sia troppo lontano dalla nostra intuizione del tempo, quanto dal fatto che l'infinitamente vicino è un ente autocontraddittorio. La retta NS mostra come si possa concepire l'infinitamente vicino coerentemente (almeno a livello, logico. Il prossimo paragrafo si vedrà che la coerenza è anche rispetto alle nostre intuizioni). L'idea della retta NS è quella di rappresentare il numero come una monade per cui l'infinitesimale è dentro al numero stesso. Fano e Ternullo rappresentano la retta dell'analisi non standard facendo finta di avere un microscopio con “sensibilità infinitesimale”⁶⁹ (figura 2):

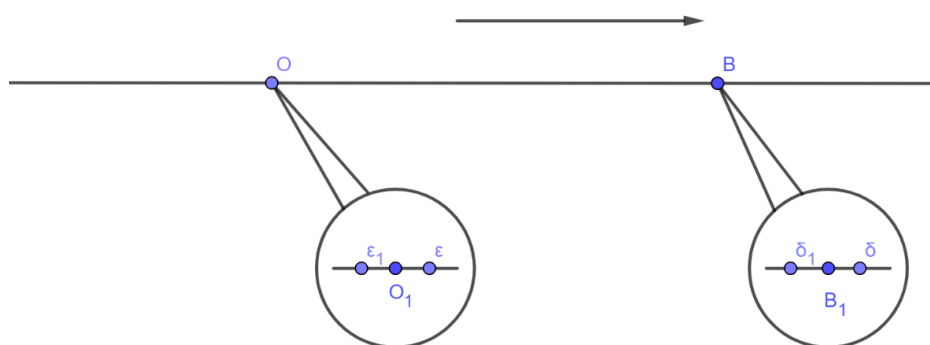


FIGURA 2

⁶⁹ Cfr. Ternullo e Fano 2021, p.102

La nuova retta viene chiamata “hyperreal line”⁷⁰ ed è una estensione della retta reale.

Se prendiamo O come un numero allora definiamo “galassia di O ” tutti i numeri finiti intorno O , ossia *l’intorno* standard di O (quello considerato da Weyl). Tecnicamente tutti i numeri reali finiti sono galassie di un punto. Invece i numeri infinitamente vicini a O , viene chiamata monade di O ⁷¹. La retta è estesa anche nell’infinitamente grande, in quanto l’infinitamente grande può essere definito come $1/\text{infinitamente piccolo}$ ($1/c$). La parte “grande” sta *al di là* della retta reale, graficamente si rappresenta la retta infinita, dove i trattini stanno a simboleggiare la parte non-archimedeana della retta (figura 3).

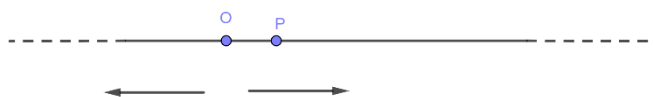


FIGURA 3

Keisler dimostra una cosa molto importante, ossia che ogni finito numero ha solo una parte non standard, ovvero che ogni numero infinitesimale è solo una parte di cui è standard (come si era visto per l’estensione $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^*$)⁷². Quindi non ha senso domandare cosa ci sia tra l’infinitesimale e la sua parte standard, questo perché significherebbe trattare il numero infinitesimale come se fosse un numero reale. Detto con altre parole bisogna sforzarsi ad immaginare che non c’è nessun spazio vuoto o nessun salto tra il numero infinitesimale e la sua (unica) parte reale; quindi, la retta rimane completa e continua con i numeri reali (vale perfettamente la definizione (α) di continuità). Grazie alle regole logiche (TCI, TCa e PT) possiamo rigorizzare l’idea dei tagli all’infinito fino all’infinitamente piccolo, il quale è piccolo in senso universale e indipendentemente dalla

⁷⁰ Mi riferisco agli studi di Keisler, Cfr., Keisler e Schmerl (1991) e Keisler (1994). Il modo in cui si estende la retta reale in quella iperreale è lo stesso della sua controparte algebrica, ossia “One of the main properties of the hyperreal line will be the Transfer Principle, which says that the hyperreal number system is an elementary extension of the real number system even in the full language which has a symbol for every relation and function over $\mathbb{R}$ ” (Keisler (1994), p.213)

⁷¹ Cfr. Keisler 1994, p.211

⁷² Cfr. Keisler 1994, p.211. In Dossena si chiama “teorema della parte standard” e afferma che “Ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino ad esattamente un numero reale” (Dossena 2021, p.9). Si può facilmente notare che quello che dimostra Keisler non è nient’altro che la controparte geometrica di quanto è stato detto a p.121.

lente di ingrandimento. Questo è il primo grande guadagno dell'ANS e della retta iperreale. Il secondo consiste proprio perché coglie meglio la continuità nella sua intuizione pura *a priori*. A livello tecnico, infatti, l'ANS mette fine a tutti quei problemi dell'analisi che da Leibniz e Newton non riuscivano a risolvere, mantiene gli infinitesimali e infine, grazie all'idea dell'infinitesimamente vicino, si presenta più intuitiva e semplice da spiegare⁷³. A livello filosofico, è proprio nel concetto di continuo che l'ANS non è solo un altro simbolismo “più utile”. Essa mette da parte il lessico *Delta-Epsilon* a favore in un “approccio che si ritiene più vicino alle nostre intuizioni circa il continuo”⁷⁴. Su questo punto ora ci si concentrerà e si capirà perché l'istante “OE” in una retta non-standard è più coerente con l'istante “OE” dell'esperienza fenomenica.

3.3.3 L'Analisi non standard e il suo significato per la continuità

Tornando a Weyl. Si era rimasti nel tentativo di concettualizzare matematicamente la continuità percepita nell'istante “OE”. Weyl riesce solo a far valere la definizione (α), e, se dovesse rappresentare il fluire del tempo da “O” a “E”, allora costruirebbe un limite con “E” come estremo superiore (il che è possibile perché vale (γ)); in linguaggio formale: $\lim_{x \rightarrow m} f(x) = L$, dove $L=E$, x sono tutti gli istanti tra “O” ed “E”, $m=E$.

La funzione “OE” è una funzione continua, per cui ora sappiamo che ogni punto tra “O” e “E” è una monade. Se la funzione è definita con $y=f(x)$, allora abbiamo sicuramente $f(O)$ e $f(E)$. L'approccio non standard ci dice che se la funzione $y=f(x)$ è continua nell'intervallo “O-E” nel punto reale “O”, allora qualsiasi c infinitamente vicino

⁷³ Per una spiegazione più approfondita sulla più intuitività dell'approccio non-standard, cfr. Ternullo e Fano (2021), p.104. Ci sono stati degli studi rivolti proprio al tentativo di riscrivere i manuali di matematica delle superiori. Per esempio: cfr. Maracci, Marzorati 2019 e Stecca e Zambelli 2020. Nasso comincia così il suo articolo per mostrare la poca chiarezza dell'approccio standard: “Indovinello. Qual è il significato di questa definizione? Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni x se $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ allora $f(x_0) - \delta < f(x) < f(x_0) + \delta$. No, non ci sono errori di stampa. I simboli ε e δ hanno posizione scambiata rispetto alla definizione di continuità. Provate a proporre a bruciapelo questo indovinello ai vostri studenti ed anche ai vostri colleghi. Se vi capiterà quello che è successo a me, avrete spesso come risposta silenzi imbarazzati e interpretazioni sbagliate. Eppure la complessità di quella formula è esattamente la stessa della familiare definizione di continuità. Perché dunque non risulta altrettanto facile capirla? Lascio la risposta al lettore.” (Nasso 2003, p.18). A livello tecnico l'ANS riesce a risolvere il problema esposto nel paragrafo 1 di questo capitolo.

⁷⁴ Ternullo e Fano 2021, p.47.

ad “O”, quindi $f(O)$ è infinitamente vicino ad $f(c)$, (se $O \approx c$, quindi $f(O) \approx f(x)$)⁷⁵. Così per ogni punto appartenente a tale intervallo (anche L).

A questo punto possiamo soddisfare la condizione di continuità fenomenica esposta nel *Das Kontinuum* scevra da contraddizioni e approssimazioni. Riprendendo la citazione, Weyl affermava che “se P è un istante, è possibile costruire un dominio di numeri razionali, al quale λ appartiene se e solo se esiste un istante L che viene P tale che $OL = \lambda \cdot OE$ (...) di modo tale che il dominio sia un numero reale nel senso da noi definito” (DK, p.140 [68]). Weyl usa il lessico algebrico per esprimere semplicemente l’idea di poter prendere un “L” sempre più vicino ad “O”. Se mi “restringo ad O”, allora più mi avvicino ad “O” e quindi più riesco a cogliere “l’istante del tempo fenomenico”. Se prendo, in effetti, un segmento lungo *dieci* e scelgo un punto lontano *uno* da “O”, vuol dire che $OL = 1/10$ di OE , ossia che ho bisogno di *dieci* volte “OL” per completare “OE”. Ovviamente più “L” si avvicina a “O”, allora avrò sempre bisogno di più pezzettini di “OL” per completare “OE”. Usando il lessico algebrico di Weyl: più piccola è λ , allora ho bisogno di più *segmentini*-OL per completare “OE”.

Per la definizione di continuità non standard, considero $x=L$ ($L \in \mathbb{R}^*$), allora $f(O) \approx f(L)$, questo vuol dire che $OL = c$. Ossia vuol dire che la distanza tra “O” e “L” è infinitesimale e “O” è la parte standard di “L” ($O = st(L)$). Essendo su una linea iperreale, L sta *al di là* della divisione all’infinito del segmento temporale “OE”; quindi, non ha senso domandarsi cosa ci sia tra “O” e “L”, proprio di come la linea è stata costruita. Ogni punto della funzione O-E è una monade e una galassia, per cui, si può costruire un *intorno* per ogni punto e hanno numeri infinitamente vicini. È chiaro vedere che la divisione all’infinito è soddisfatta perfettamente, perché (γ) funziona sempre. Se voglio, invece, che “OE” sia un istante allora “O” e “E” devono essere l’infinitamente vicini, allora $O = st(E)$, ossia “E” è infinitamente vicino ad O. Si può arrivare al medesimo risultato algebricamente: il punto di partenza è l’equazione $OL = \lambda \cdot OE$. Considero $O = st(L)$, quindi $OL = c$ e λ deve essere un numero razionale per assunzione. Sostituisco e ottengo: $c = \lambda \cdot OE$, $OE = c/\lambda$, quindi “OE” è un numero infinitesimale (*O meno E uguale a c*). Poiché “O” può avere solo un numero infinitamente vicino per definizione, allora $O = st(E)$,⁷⁶ (ossia $L = E$).

⁷⁵ “f is continuous at a real point c if $f(c)$ is defined and whenever x is infinitely close to c, $f(x)$ is infinitely close to $f(c)$ ” (Keisler 2007, p.44).

⁷⁶ Per definizione $\lambda = \text{numero infinitesimale} / \text{numero infinitesimale} = \text{indeterminato}$ (cfr. Ternullo e Fano 2021, p.101). Questo è abbastanza ovvio. L deve essere infinitamente vicino a O, indipendentemente da λ ; quindi, λ può essere qualsiasi numero razionale.

Se consideriamo $L \neq E$, entrambi devono essere numeri non archimedei, quindi $L+E=c$, ma questi sono “giochi formali”, in quanto si sta trattando “L” e “C” come numeri reali, non come infinitesimali. L’istante viene rappresentato come il tempo che intercorre tra “O” e “E”, ma “E” è il numero infinitamente vicino a “O”, quindi non posso pensare un tempo più breve, per esempio un punto “P” tra “O” e “E”.

Il ragionamento appena tentava di formalizzare il ricordo, ora, invece, assumiamo il caso che la penna sia ancora sul tavolo, per qui deve ancora passare il “momento E”. “OE” non è un ricordo, quindi non è un istante passato. Matematicamente vogliamo rappresentare “OE”, con “E =appena dopo di ora”. La funzione che collega i due istanti è una funzione continua che fluisce verso “E”, con “O= ricordo nel passato” e “E=ricordo nel futuro” (non appena il tempo è fluito, “OE” ritorna l’istante del passato visto poc’anzi). In questo caso, si consideri il $\lim_{x \rightarrow E}$ di $f(x)$. Non si applica il principio (α) seguendo l’AS, piuttosto si deve calcolare $\text{st}(f(E+c))$, per definizione $\text{st}(f(E+c)) = f(E)$ quindi $E \approx c$, e $f(E) \approx f(c)$. Ossia si sta considerando l’istante “subito prima” ad E, prima che sia E. Quel “subito prima” è l’infinitamente vicino ad E, per cui si trova “dentro” E (come mostra la retta *iperreale*): non si ha bisogno di considerare tutti i valori vicini ad E (come ci chiedeva (γ)), ma si considera l’esatto momento prima⁷⁷. L’esatto momento è un simbolo (c, come infinitamente vicino), ma costruito coerentemente senza cadere in contraddizioni (la domanda “cosa c’è tra c e E?” è una domanda che non ha senso porre perché c non è un numero reale).

Per finire il ciclo argomentativo, riprendiamo il tecnicismo dentro il sistema formale Weyl (ampliato dall’ANS); consideriamo nuovamente (α) e vediamo come possa essere riformulato in $\mathbb{R}^*$ (α^*).

$$\alpha) \forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta [\delta > 0 \wedge \forall x \forall y (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)])$$

$$\alpha^*) \exists c \forall n \{ \{ [((c \in \mathbb{R}) \wedge (n > 0, n \in \mathbb{N}) \wedge (0 < c < 1/n))] \rightarrow (c \approx 0) \} \rightarrow f(0) \approx f(c) \}$$

⁷⁷ Chiaramente la matematica rende statico il momento esattamente prima di “E”, nel mondo fenomenico esso è già passato, ma questo tipo di discorso è di stampo antinomico: nessuno di noi percepisce c. Il numero infinitesimale rende il continuo matematico più vicino al continuo intuitivo, proprio perché rende ragione alla divisione all’infinito in modo univoco, come è stato più detto e riesce a concepire l’istante temporale come omogeneo, in quanto esso è il tempo che passa dentro una monade.

(α^*) semplicemente formalizza “ f è continua” in un lessico NS. Il problema è accettare la condizione “ $\exists c(c \approx 0)$ ” in quanto applico il principio (6) su una categoria che non appartiene alla matematica standard. In un lessico di Weyl sarebbe: (i) $I(c, 0)$, che significa “ c è infinitamente vicino ad 0”, per arrivare a “ $\exists c(c \approx 0)$ ”, devo saturare (i); 0 è un individuo, quindi applico (5) (oppure semplicemente costruisco il giudizio $P(c)$: $M(c, \zeta)$ con la regola (3), con $P(c)$ = “ c è positivo” e con $M(c, \zeta)$ = “ c minore del numero razionale fratto ζ ”, quindi etc. fino ad arrivare $I(c, 0)$). Il nuovo giudizio è $I(c, 0)$. Posso applicare il principio (6) anche su c , proprio grazie alla condizione “ $\exists c \forall n(c \in \mathbb{R}, 0 < c < 1/n)$ ”, ma in un’ottica NS, ossia $c \in \mathbb{R}^*$. Esso non è nient’altro che il principio (γ) (con $a=0$). Da (γ) si arriva agli $\mathbb{R}^*$ grazie al (TCa) e (TCI). Alla luce di tutte queste considerazioni, infine, si può saturare (i): $I(*, *)$, ossia $\exists c(c \approx 0)$. Applicando il (PT), posso da c tornare a x attraverso la definizione di “parte standard di un valore”, ossia: “0 è la parte standard di c ” ($0 = st(c)$)⁷⁸. Grazie (PT) (α) e (α^*) hanno lo stesso senso.

L’infinitamente vicino è perfettamente inseribile nel sistema definitorio di Weyl. Esso fa leva su leggi che, anche se non presenti nel *Das Kontinuum*, sono logiche e rigorose. Proprio l’infinitamente vicino rende il continuo più vicino alla nostra intuizione, riesce a cogliere “l’istante” e a riformulare l’analisi in termini più intuitivi e rigorosi.

Come si può capire ci si è concentrati solo sul tempo rappresentato dalla funzione che collega “O” e “E”. Per quanto riguardo lo spazio la critica di Weyl è simile, ma la risposta dell’ANS è un po’ diversa in quanto coinvolge la topologia. Non è il luogo per introdurre e spiegare la topologia, perché servirebbero molto più pagine per entrare nel dettaglio della linea iperreale; quello che si può ipotizzare è che, così come l’ANS riesce a cogliere coerentemente l’istante temporale, allora deve essere in grado anche di poter rigorizzare il punto spaziale. Anche se non ci sono gli strumenti per trarre conclusioni sulla tipologia NS, possiamo comunque provare a rappresentare la matita ferma sul tavolo nell’istante “OE” in un piano cartesiano che mette in relazione lo spazio e il tempo. L’asse delle X è il tempo e l’asse delle Y è lo spazio; verosimilmente la funzione potrebbe essere

⁷⁸ Tutte le tre condizioni sono state soddisfatte ampiamente. (cfr. p.116) se si vuole un numero qualsiasi da 0, allora sarebbe: $\exists c \exists x \forall n \{ [((c, x \in \mathbb{R}, x > 0) \wedge (n > 0, n \in \mathbb{N}) \wedge (x < c < 1/n))] \rightarrow (c \approx x) \} \rightarrow f(x) \approx f(x)$. Andando più a fondo posso riscrivere così: $\exists c \exists x \forall n \{ [((c, x \in \mathbb{R}^*, x > 0) \wedge (n > 0, n \in \mathbb{N}^*) \wedge (x < c < 1/n))] \rightarrow (c \approx x) \} \rightarrow f(x) \approx f(x)$, ma grazie al (PT) posso togliere l’asterisco e alleggerire la dicitura.

$y = x$, perché nel passare del tempo il punto nello spazio è sempre lo stesso. Il grafico è una retta orizzontale che taglia l'asse delle Y nel punto y_m (il punto in cui la matita è ferma nello spazio). Possiamo studiare questa semplice funzione, per cui, possiamo per esempio notare che $f(E) = f(O)$, oppure possiamo calcolare limite di $f(x)$ che tende ad "E" etc. La ricerca è stata limitata, inoltre, nell'immaginarci che sia una funzione quella che unisce "O-E" nonostante nulla ci vieti a rappresentare quell'istante come, per esempio, una successione numerica. La scelta è stata dettata dal fatto che ci si voluti essere più vicini al *Das Kontinuum*.

Per concludere il paragrafo si noti che l'ANS sia un quadro di senso nel quale la filosofia della matematica può operare più precisa nel suo lavoro descrittivo della continuità delle intuizioni. Si è visto, infatti, come l'ANS renda ragione alla proprietà della divisione all'infinito senza cadere in approssimazioni, si è visto come essa costruisce i limiti in modo più intuitivo e facile e, infine, si è visto come i numeri, essendo monadi, possono essere considerati come istanti temporali di tempo infinitesimale. Tutto questo si è ottenuto dai principi definitori di inizio capitolo e dalla logica dei modelli, quindi con rigore logico.

3.4 Osservazioni conclusive

La prima parte del capitolo ha mostrato la necessità del differenziale per la continuità e, quindi, per la filosofia della matematica. Così facendo si è andato a criticare fortemente il lessico canonico matematico (e quindi la sua teoria matematica) per cui, grazie ad *epsilon-delta*, il differenziale veniva obliato e usato solo "per cortesia"⁷⁹. Le altre due parti, invece sono strutturate similmente. Entrambe i primi sottoparagrafi sono serviti per introdurre il linguaggio formale e logico per mostrare come i due autori ragionano. Sono state le parti "tecniche" del capitolo e hanno richiesto una conoscenza di base di logica e di insiemistica.

Weyl è un autore originale perché riesce a risolvere il problema delle fondamenta dell'analisi e riflette sul suo rapporto con il mondo fenomenico. Robinson invece è un autore prezioso perché riesce a formalizzare in maniera logica e coerente l'infinitesimale.

⁷⁹ Robinson, spiegando Weierstrass e Bolzano, scrive "(...) the former used infinitesimals really as a kind of *shorthand*" (Robinson 1966, p.277. Enfasi mia).

Lo scopo del capitolo non era quello di collegare i due autori, ma vedere se Robinson riuscisse a risolvere il problema sollevato da Weyl rispetto al rapporto continuo matematico e continuo fenomenico (che per Weyl coincide con quello intuitivo), aggiungendo principi che non distruggessero il sistema formale di Weyl. Il sistema formale di Weyl sembrerebbe non avere problemi ad accettare l'estensione dei reali, fintantoché l'ANS non cada in giudizi impeditivi, il tallone d'Achille dell'analisi⁸⁰.

L'altra domanda posta chiedeva se l'ANS riesca a risolvere alle problematiche filosofiche esposte da Weyl. Sembrerebbe che tale quesito debba ricevere una risposta affermativa: l'ANS riesce a cogliere gli istanti temporali attraverso la linea iperreale in modo univoco, non approssimativo e preciso.

Restano tuttavia delle questioni aperte proprio sul campo della filosofia della matematica. Per introdurre tale problematico è interessante notare che Robinson, concludendo il suo libro, osserva che

essa [ANS] è presentata, naturalmente, nel quadro della matematica contemporaneità, e sembra quindi affermare l'esistenza di ogni sorta di entità infinita. Tuttavia, da un punto di vista formalista possiamo guardare alla teoria dal punto di vista sintattico e ritenere che ciò che abbiamo fatto è stato introdurre *nuove procedure deduttive* piuttosto che nuove entità matematiche. Qualunque sia il nostro punto di vista e nonostante la posizione di Leibniz, oggi ci sembra che i numeri infinitamente piccoli e infinitamente grandi di un modello di Analisi non-standard non siano né più né meno reali, ad esempio, dei numeri irrazionali standard.⁸¹

⁸⁰ Robinson scrive negli anni Sessanta, anni in cui l'insiemistica *naïf* ormai è stata superata e digerita come tale e ogni teorema valido in $\mathbb{R}$ vale anche in $\mathbb{R}^*$. Weyl accetta tutti i teoremi più importanti di $\mathbb{R}$. Robinson pensava di essere colui che ha concluso il dibattito del Calcolo (Cfr., Robinson (1966), pp. 1-2) e la filosofia della matematica si è sviluppata proprio sulle orme dei problemi del Calcolo stesso. L'autore pensava di aver sviluppato la sua teoria, pertanto, in perfetta armonia con i problemi della filosofia del tempo, ergo escludendo anche le definizioni imprecative, afferma infatti "(...) the history of the subject cannot be fully understood if we disregard its philosophical background. Nowadays the Philosophy of Mathematics is considered in connection with more general notions such as consistency, *predictivity*, or conductivity." (Robinson 1966, pp.279-280. Enfasi mia). Robinson era particolarmente sensibile sia alle questioni filosofiche (cfr. Robinson 1966, p.280, Robinson 1967, pp.158-159 e Robinson 2021) che logiche, tanto è vero che "Kurt Gödel, for example, believed that Robinson more than anyone else had succeeded in bringing mathematics and logic together" (Dauben 1988, p.178).

⁸¹ Robinson 1966, p.282: "(...) we observe that it [NSA] is presented, naturally, within the framework of contemporary Mathematics, and thus appears to affirm the existence of all sorts of infinitary entities. However, from a formalist point of view we may look at the theory syntactically and may consider that

Ternullo e Fano, dopo aver citato lo stesso passo, fanno notare che difficilmente un realista potrà essere convinto dal formalismo di Robinson. La struttura dell'ANS è una struttura fortemente logica che “crea” nuovi enti come conseguenze logiche dei vecchi. Per quanto essa sia “più vicina alle intuizioni dei primi analisti, come Leibniz e Newton e, secondo altri studiosi, alle nostre intuizioni “ingenue” circa la natura del continuo”⁸², possiamo domandarci quanto l'ANS rimanga incagliata nel suo sistema formale e quanto sia artificiosa nel suo sistema assiomatico.

Se accogliamo, tuttavia, il formalismo come una buona strada percorribile per la filosofia della matematica, allora il salto che separa il continuo matematico da quello fenomenico di cui parla Weyl sembrerebbe superato proprio grazie al formalismo stesso, il quale assume un significato molto più forte di semplici segni e simboli. Tuttavia, si potrebbe ancora argomentare che tale formalismo allarga ancora di più la voragine tra mondo matematico e il mondo fenomenico. Questa critica è ben fondata, ma qui si vuole concludere affermando che negare la forza dell'ANS significa negare la forza di tutta la matematica. Ammesso e non concesso che il formalismo dell'ANS allarghi la voragine, allora la filosofia della matematica non può studiare il continuo in toto, poiché la matematica, come è stato argomentato nel secondo capitolo, costruisce i propri elementi proprio sul continuo intuitivo, il quale diventa il presupposto tanto della matematica (e del suo sistema formale) quanto del mondo fenomenico. L'ANS è una conseguenza del mondo matematico standard, non nega, ma migliora l'AS e quindi negare la validità formale dell'ANS, significa negare la forza di tutta la matematica a cascata...che strumento ci rimane per scrutare le nostre intuizioni pure *a priori* se anche la disciplina che costruisce gli enti su di esse fallisce?

Le intuizioni pure *a priori* sono pre-concettuali; quindi, nessun concetto filosofico riesce a coglierle da solo. Esse sono anche pre-esperienziali; quindi, la nostra esperienza non riuscirà mai ad essere una porta di accesso per tali intuizioni, il rischio è di cadere nella seconda antinomia. La matematica, invece, è un potente strumento proprio perché costruisce i propri enti su tali intuizioni, i quali formeranno un continuo matematico

what we have done is to introduce *new deductive procedures* rather than new mathematical entities. Whatever our outlook and in spite of Leibniz' position, it appears to us today that infinitely small and infinitely large numbers of a non-standard model of Analysis are neither more nor less.

⁸² Ternullo e Fano 2021, p.48.

sempre teso ad essere come quello intuitivo (come si faceva notare nel primo capitolo citando Zellini: il discreto che compone il continuo matematico si approssima al continuo intuitivo): la filosofia osservando la matematica e interrogandosi su suoi enti e sui suoi sistemi formali dovrebbe riuscire ad aprire una piccola fessura sullo spazio e sul tempo.

CONCLUSIONE

Nell'elaborato si è analizzato il concetto del continuo matematico in un quadro costruttivista e formalista: secondo i costruttivisti gli enti matematici si costruiscono sulle intuizioni dello spazio e del tempo, secondo i formalisti la pratica matematica può essere ridotta a manipolazioni di simboli e assiomi. La filosofia della matematica, osservando il formalismo matematico, deve poter dire qualcosa sulle intuizioni pure *a priori*, le quali sono la causa della costruzione dei simboli algebrici stessi.

Il lavoro si presenta diviso in tre capitoli, il primo di ordine introduttivo, il secondo incentrato su Kant e il terzo dedicato a Weyl. Tra Kant e Weyl ci sono quasi due secoli di distanza, in questo periodo molte cose cambiarono, sia a livello matematico che filosofico. Essi portarono due proposte opposte, ma simile circa il rapporto fra il continuo matematico e il continuo intuitivo. L'elaborato, tuttavia, non è stato incentrato sul confronto tra i due pensatori, ma ha cercato di sostenere l'esistenza di un rapporto di stretta parentela tra il continuo matematico e il continuo intuitivo, quest'ultimo, infatti, è la condizione di possibilità del primo. Si è visto come il continuo matematico sia la strada per la comprensione del continuo intuitivo, attraverso un lavoro di riflessione filosofica riguardante gli enti matematici. Il continuo intuitivo, a sua volta, è la condizione di possibilità del continuo fenomenico; perciò, esiste una forte parentela anche tra il continuo matematico e quello fenomenico.

Il primo capitolo propone un'introduzione generale del continuo della matematica presa: nonostante si faccia riferimento anche alla geometria, ci si è concentrato principalmente sull'analisi matematica; branca nata nel XVI secolo che portò accesi dibattiti sul fondamento della matematica, sul suo rigore e sul concetto di continuo. I dibattiti interessarono tanto i filosofi quanto i matematici spesso e volentieri incarnati nella stessa persona: il continuo fu campo di battaglia tanto tra le diverse scuole metafisiche, quanto tra i diversi approcci matematici utili alla risoluzione di pratici problemi geometrici (come il calcolo di aree, la ricerca di funzioni etc.). Il primo capitolo tematizza i tre problemi che l'elaborato è chiamato a rispondere: il rapporto continuo-discreto, l'infinito nel continuo e gli infinitesimali come essenziali per la continuità.

L'analisi matematica cerca di comprendere assiduamente il continuo, in quanto è un presupposto di essa. I problemi sorgono, però, nel momento in cui si prende coscienza del discreto come unico strumento in mano alla matematica. Discretizzare significa determinare, finitizzare, invece il continuo è proprio quella proprietà che ha in sé l'infinito e le parti sono talmente legate tra di loro da diventare indistinguibili. Un segmento è continuo, ma per studiarlo bisogna determinare almeno un punto (anche fossero solo i punti degli estremi), la retta discretizza il piano, il piano il volume etc. Questa evidenza porta a concepire il continuo come un qualcosa fatto di infinite parti: l'infinito irrompe nella matematica ed essa non può più ignorarlo, in quanto proprio il continuo con il suo infinito edifica l'edificio matematico. Questa ultima affermazione, apparentemente astratta, risulta più chiara se si prende come esempio il teorema del valore intermedio: esso vale se e solo se la funzione è continua. La funzione è continua se e solo se il piano in cui giace è continuo, etc. Tale teorema vuole che la funzione sia divisibile all'infinito ed esige che tra le infinite parti si possa scegliere esattamente un punto che soddisfa tale teorema.

La matematica e la filosofia si trovarono davanti al continuo e riscoprirono l'infinito. Dopo aver esposto il problematico rapporto dialettico continuo-discreto è stato esposto il secondo problema: l'infinito. L'infinito si radicalizza come problema nel momento in cui ci domandiamo: un segmento continuo (per esempio) contiene infinite parti? E se il continuo è la controparte formale di un lasso di tempo (o di spazio), allora abbiamo esperienza fenomenica di infinite parti? Riaffiora l'infinito attuale indagato da molti pensatori per secoli e alla fine rivelatosi essere presente in ogni porzione di reale (o ideale) continuo. Sembrerebbe una conclusione assurda, ma la filosofia della matematica deve affrontare questo problema. Nel secondo capitolo si è visto come la filosofia trascendentale limita le aspirazioni metafisiche dell'uomo il quale, essendo anche l'artefice della matematica, si trova a confondere tanto la matematica con la metafisica quanto il continuo matematico con quello fenomenico e costruisce sull'esperienza e non più sulla intuizione.

La concezione della matematica kantiana, nel secondo capitolo, è stata rivalutata attraverso un'interpretazione che fa emergere la matematica come una disciplina pura, senza alcunché di empirico, pur poggiante sullo spazio e sul tempo. Si è giunti a questa interpretazione attraverso un confronto tra l'analitica e la seconda antinomia. Si è visto e argomentato che lo spazio (e il tempo) dell'intuizione è infinitamente grande e contiene una infinità di parti, esso è la condizione di possibilità dell'esperienza e terreno per la

costruzione della matematica; l'esperienza, tuttavia, non presenta fisicamente gli enti matematici, come fluenti, differenziali, limiti etc. L'antinomia sorge proprio dall'errore di interpretare la matematica come costruzione empirica. La filosofia può scrutare le nostre intuizioni (le quali sono pre-concettuale e "troppo grandi" per essere esaurite dall'esperienza) attraverso gli enti matematici e descrivere le intuizioni, ma non il mondo esperito, il quale segue tanto le regole delle nostre intuizioni, quanto quelle delle nostre percezioni. Per concludere il ragionamento: il mondo dell'esperienza segue le regole dell'intuizione pura *a priori*, ma questo non vuol dire che di fatto contenga infinite parti, anche se lo spazio dell'intuizione le contiene; esattamente nel momento in cui si confonde il mondo dell'intuizione con il mondo dell'esperienza sorge la seconda antinomia.

La costruzione matematica si appoggia sul continuo come suo presupposto indispensabile. Si è visto che la matematica riesce a ragionare solo con il discreto, non a causa della disciplina, bensì a causa dell'intelletto umano. Nel continuo implicitamente c'è l'infinito: "discretizzare" significa "finitizzare" il continuo. Gli enti matematici pertanto sono il modo più efficace per gestire la infinità del continuo, anche se questo implica "approssimarli" con stadi discreti sempre più precisi. Il continuo matematico non sarà omogeneo come quello delle intuizioni, ma "discreto". Il discreto del continuo tenderà ad essere sempre più simile al continuo intuitivo poiché, come si è visto in Kant, le grandezze estensive quanto quelle intensive sono continue. Il continuo matematico deve approssimarsi sempre di più al continuo delle intuizioni per non tradire il suo presupposto. Con Kant, pertanto, si arriva a concepire tre tipi di continui: quello delle intuizioni, quello matematico e quello fenomenico. Il primo viene presupposto dagli ultimi due, per quanto quest'ultimi presentino una pesante differenza: quello matematico è un continuo concettuale e "atomico", ossia un continuo fatto di infinite parti determinate (ossia di infiniti discreti), quello dell'esperienza è un continuo immediato e limitato dai sensi.

Nel secondo capitolo, grazie a Kant e alla sua filosofia trascendentale, si riesca a risolvere i primi due problemi esposti nel primo capitolo. La matematica lavora con il numero, il quale discretizza, tuttavia esso è l'unico schema in grado di costruire giudizi sensati e non antinomici: "lo spazio del tavolo presenta infiniti fluenti" oppure "il tempo che passa in una giornata è eterno perché è divisibile all'infinito e la somma di infinite parti da un numero infinito, quindi etc." o ancora "posso separare questo spazio occupato da questa trave all'infinito, quindi con esso percepisco l'infinito" etc. Ai tempi di Kant il

continuo era in oggetto di dibattiti tra matematica e metafisica, proprio a causa di una confusione terminologica; grazie a Kant e al suo apparato concettuale, il continuo intuitivo, quello che contiene in sé l'infinito, può essere solo compreso se ci si limita ad un'analisi della matematica come struttura costruita sulle intuizioni pure *a priori*. La metafisica, quindi, non è altro che una deviazione della filosofia della matematica che pretende, attraverso la matematica, di superare i limiti della ragione umana cadendo inevitabilmente nelle antinomie. Un intervallo di una funzione continua ha sempre un punto medio e per la matematica questo è sufficiente; se questo teorema, splendidamente dimostrato, viene usato però dalla filosofia per dedurre che nel mondo fenomenico esiste sempre un punto medio e che il punto è un ente reale in quanto lo spazio è continuo e quindi il mondo costa di parti semplici allora si cade nell'antinomia: la metafisica non può sapere se lo spazio è fatto di ultime parti oppure no (seconda antinomia). La filosofia della matematica può mostrare la fedeltà degli enti matematici rispetto alle intuizioni, può descrivere il continuo attraverso la struttura della matematica, può introdurre un criterio decisionale fra diverse costruzioni simboliche, ma non può mai usare gli enti matematici per dimostrare qualcosa sul mondo fenomenico. Esso non può congetturare sull'infinito matematico come se il mondo fosse senza confine o senza limiti. Con Kant la matematica e la filosofia sono limitate dagli schemi trascendentali e quindi possono agire liberamente con le spalle coperte dalla riflessione trascendentale. Il secondo capitolo si conclude illustrando come Kant possa accogliere anche le strutture matematiche degli ultimi due secoli, ciò trova conferma alla fine del terzo capitolo, nel quale si tratta la struttura della matematica contemporanea.

Nell'ultimo capitolo si affronta il problema dei numeri infinitesimali. Weyl mostra come l'analisi matematica sia costruita su un "castello di sabbia" e come disti troppo dall'esperienza fenomenica, esperienza sempre continua. Dopo aver mostrato come Weyl pone nuove basi solide alla matematica affinché, si è specificato che "fenomenico" e "intuitivo" sono sinonimi nel lessico di Weyl e si è spiegato successivamente come e perché Weyl non cade in discorsi antinomici.

Assodato che Weyl costruisce l'analisi su basi logiche, sorge il problema di quale criterio si debba applicare per mostrare la bontà di tale sistema formale. Il criterio è il mondo delle intuizioni e il principio che regola il rapporto tra i due mondi (quello intuitivo e quello formale), è stato chiamato "principio di traduzione". La struttura del *Das*

Kontinuum è opposta, ma uguale a quella della prima critica di Kant. Il filosofo è partito dalle intuizioni e poi ha costruito il sistema formale, il matematico ha prima costruito il sistema formale e poi lo ha “tradotto” nel mondo intuitivo. A questo punto ci domanda: “quanto la traduzione è fedele?”.

Si è visto come nel mondo fenomenico il tempo viene colto ad istanti, mentre nella matematica ci sono solo intervalli temporali sempre più piccoli, ma mai abbastanza piccoli per rappresentare formalmente “l’istante”. L’istante è il momento più piccolo percepibile; il numero infinitesimale è il numero più piccolo pensabile, c’è quindi una corrispondenza stretta istante-infinitesimale. La scommessa è diventata quella di provare a costruire l’infinitesimale dentro il sistema matematico e si è visto come sia possibile, abbracciando la logica dei modelli. Attraverso i *teoremi di compattezza*, a quello di *completezza* e grazie al *principio del transfer* si può espandere il campo dei numeri reali. La matematica, attraverso la sua struttura e il suo metodo, riesce a costruire i numeri infinitesimale perfettamente coerenti, strappandoli dall’incertezza che aleggiava intorno alle definizioni di Leibniz e alle contraddizioni che impregnavano gli assiomi di *de Hôpital*. Il terzo capitolo, nel tentativo di risolvere il problema sollevato da Weyl ma rimasto irrisolto, arriva a confrontarsi con l’analisi non-standard, fondata da Abraham Robinson.

Abraham Robinson è un matematico dello scorso secolo che inventò l’analisi *non-standard* (chiamata così in opposizione a quella standard alla quale faceva riferimento anche Weyl); il nuovo approccio riesce a fornire una costruzione formale dell’infinitesimale in grado di eliminare tutte quelle definizioni approssimative come “piccolo a piacere”, “differenza uguale e diversa da zero”, “approccio a zero” etc. ed è in grado di far rientrare i numeri infinitesimali nel mondo della matematica. L’analisi non-standard infine riesce a cogliere l’istante temporale di cui parlava Weyl nel *Das Kontinuum* senza cadere in un linguaggio approssimativo. Il terzo capitolo si chiude con i paragrafi dedicati alla semantica e sintassi dell’ANS. Successivamente sono stati riformulati i concetti base capaci di apprezzare la retta iperreale, i limiti nuovamente costruiti ed è stato riformulato il giudizio “*f* è continua” nell’ottica *non-standard* (sempre mantenendo la coerenza con la formulazione che Weyl dà a tale giudizio).

Rimangono tuttavia aperte stimolanti questioni: sarebbe interessante capire se Abraham Robinson può convincere i realisti della filosofia della matematica; oppure indagare quanto il matematico sia realmente riuscito a cogliere il continuo; oppure

verificare quanto il matematico è limitato nel sistema formale da lui stesso costruito. Rimane irrisolta anche la questione di quanto il formalismo dell'ANS, con i suoi enti controintuivi come i numeri infinitesimali o quelli infiniti, sia lontana o vicina al mondo delle intuizioni. Ammesso e non concesso, infatti, che il formalismo dell'ANS allarghi la voragine, allora la filosofia della matematica non può studiare il continuo poiché la matematica, come è stato argomentato nel secondo capitolo, costruisce i propri elementi proprio sul continuo intuitivo, il quale diventa il presupposto tanto della matematica (e del suo sistema formale) quanto del mondo fenomenico. Proprio il continuo ha costretto la matematica a costruire i numeri irrazionali e proprio il continuo chiede ora di accettare i numeri infinitesimali. L'ANS offre alla filosofia una nuova sintassi in grado di essere più coerente con il continuo. La strada è stata segnata dalla filosofia della matematica, ma potrebbe essere vista come una scelta arbitraria; Weyl, per esempio, ha criticato l'analisi matematica nel suo rapporto con il mondo fenomenico grazie ad uno studio fenomenologico di Husserl.

Rimane aperta la possibilità di confrontare la filosofia della matematica con gli altri approcci filosofici al continuo, ma il presente elaborato ha sostenuto che la filosofia della matematica riesce a cogliere il continuo studiando gli enti matematici proprio perché quest'ultimi sono resi possibili dalla continuità stessa: quella delle nostre intuizioni pure *a priori*. La tesi, pertanto, ha avuto da un lato l'ambizione di argomentare come il continuo intuitivo sia la base della matematica per costruire la propria struttura e dall'altro lato di sostenere che ogni ricerca futura sul continuo dovrà, in negativo o in positivo, confrontarsi con la filosofia della matematica.

BIBLIOGRAFIA

- Adams, Robin e Luo Zhaohui. (2010), *Weyl's predicative classical mathematics as a logic-enriched type theory*. ACM transactions on computational logic. 11 (2), (pp. 1–29). [<https://doi.org/10.1145/1656242.1656246>].
- Avron, A. (2020), *Weyl Reexamined: “das Kontnuum” 100 Year Later*. The bulletin of symbolic logic. 26 (1), (pp. 26–79). [<https://doi.org/10.1017/bsl.2020.23>].
- Barone Francesco (1984), *Kant e la logica*. In Santinello Giovanni e Micheli Giuseppe (1984), *Kant a due secoli dalla critica*. La scuola, Brescia. (Capitolo primo).
- Bell L. John (2019), *The Continuous, the Discrete and the Infinitesimal in Philosophy and Mathematics*. 1nd ed., Springer Nature Switzerland, Cham.
- Bell L. John (2000), *Hermann Weyl on Intuition and the Continuum*. Philosophia Mathematica 8, (pp. 259–73). [<https://doi.org/10.1093/philmat/8.3.259>].
- Bennett Jonathan (1974), *Kant's dialectic*. Cambridge University press, New York.
- Bertsch Michiel, Passo (dal) Roberta, Giacomelli Lorenza (2007), *Analisi matematica*. 2nd ed., McGraw-Hill. Milano.
- Boyer B. Carl, (1968), *A History of the Mathematics*, John Wiley & Sons, New York (trad. it., (1980), *Storia della matematica*. Radice L. Lombardo (prefazione di), Mondadori, Milano).
- Bottazzini Umberto (2005), *Il flauto di Hilbert: Storia della matematica*, UTET libreria, Torino.
- Bottazzini Umberto (2015), *Infinito*. Il Mulino, Bologna.
- Cheng Eugenia (2017), *Beyond Infinity: An expedition to the outer limits of mathematics*. Basic Books: Hachette Book Group, New York (trad. it., (2018) *La matematica dell'infinito. Un viaggio ai confini del pensiero matematico*. Serra Laura (tradotto da), Ponte alle Grazie, Milano)
- Cooke Roger (2005), *The History of Mathematics. A Brief Course*. 2nd ed., Hoboken, New Jersey: Wiley-Interscience.

- Corry Leo (2015), *A Brief History of Numbers*, Oxford University Press, Oxford (trad. it., (2020), *Breve storia dei numeri*. Davide Calonico (a cura di), Ulrico Hoepli, Milano).
- Dauben W. Joseph (1988), *Abraham Robinson and Nonstandard Analysis: History, Philosophy, and Foundations of Mathematics*, In *History and Philosophy of Modern Mathematics*. Minneapolis, (Volume 11), University of Minnesota Press, Minneapolis, (pp. 177-200). [Retrieved from the University of Minnesota Digital Conservancy. [<https://hdl.handle.net/11299/185659>].
- D'Amore Bruno e Sbaragli Silvia (2017), *La matematica e la sua storia. Dalle origini al miracolo greco*. Dedalo, Bari.
- D'Amore Bruno e Sbaragli Silvia (2019), *La matematica e la sua storia III. Dal rinascimento al XVIII secolo*. Dedalo, Bari.
- D'Amore Bruno e Sbaragli Silvia (2020), *La matematica e la sua storia IV. Dal XVIII secolo al XXI secolo*. Dedalo, Bari.
- Davis Martin, Hersh Rueben (1991), *L'Analisi Non-Standard*. Le Scienze quaderni, 60, pp. 52-59 (numero speciale a cura di C. Mangione).
- Dedekind Richard (1963), *Essays on the Theory of Numbers*, Dover, New York.
- Dossena Riccardo (2021), *Introduzione all'analisi non standard*. [(60) [Introduzione all'Analisi Non-Standard | Riccardo Dossena - Academia.edu](#)].
- Easwaran, Kenny, Alan Hájek, Paolo Mancosu, and Graham Oppy, "Infinity", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2021 Edition), Edward N. Zalta (ed.), [URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/win2021/entries/infinity/>> .].
- Garrett Thomson (2003), *On Kant revised edition*, Wadsworth, London.
- Giusti Enrico (1988), *Analisi matematica 1*. 2ed ed., Bollati Boringhieri, Torino.
- Hintikka, Jakko. (1973) *Logic, language-games and information: Kantian themes in the philosophy of logic*. Oxford: At the Clarendon Press. (trad. it., (1975), *Logica, giochi linguistici e informazione: temi kantiani nella filosofia della logica*. Milano: Il saggiatore).
- Hintikka Jakko (1974), *Knowledge and the Known. Historical Perspectives in Epistemology*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

- Keisler H. Jerome, Schmerl H. James (1991), *Making the Hyperreal Line Both Saturated and Complete*, In *The Journal of Symbolic Logic*, (Sep., 1991), Vol. 56, No. 3 (Sep., 1991). Association for Symbolic Logic, (pp. 1016- 1025). [Online: L: <https://www.jstor.org/stable/2275069>].
- Keisler H. Jerome (1994), *The Hyperreal line*. In Ehrlich (ed.) *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*. Kluwer Academic Publishers. (pp. 207-237).
- Keisler H. Jerome (2007), *Foundations of infinitesimal calculus*. Madison, Wisconsin, USA.
- Maracci Mirko, Marzorati Ambra (2019), *Uno studio sulla concept-image di nozioni di base dell'analisi non standard. Didattica della matematica*. No 6, Locarno, Switzerland, (pp. 9–34). [<https://doi.org/10.33683/ddm.19.6.1>].
- Micheli Giuseppe (1982), *Kant e la matematica*. In *Vetera Novis Augere*. La goliardica editrice. Roma. (pp. 341-383).
- Micheli Giuseppe (1998), *Matematica e metafisica in Kant*. Cleup. Padova.
- Moore A.W. (2019), *The infinite*. 3en ed., Routledge, London-New York.
- Moretto Antonio (1999), *Dottrina delle grandezze e filosofia trascendentale in Kant*. Il Poligrafo, Padova.
- Nasso (di) Mauro (2003). *I numeri infinitesimi e l'analisi nonstandard*. Archimede vol.1, (pp.13-22).
- Neunhäuserer Jörg (2019), *Einführung in die Philosophie der Mathematik*, Springer Spektrum, Berlin.
- Parsons Charles (1964), *Infinity and Kant's Conception of the "Possibility of Experience"*. In *The Philosophical Review*, Apr., 1964, Vol. 73, No. 2 (Apr., 1964), Duke University Press on behalf of Philosophical Review, (pp. 182-197). [<https://www.jstor.org/stable/218333>].
- Parsons Charles (1983), *Kant's philosophy of Arithmetic*. In *Mathematics in Philosophy. Selected Essay*. Cornell University Press, New York, (pp.110-150).
- Parsons Charles (2015), *Infinity and a Critical View of Logic*. In *Inquiry*, 58:1, (pp. 1-19). [<https://doi.org/10.1080/0020174X.2015.978529>].
- Plebani Matteo (2011), *Introduzione alla filosofia della matematica*, Carocci Editori, Roma.

- Robinson Abraham (1963), *Introduction to Model Theory and to the Mathematics of Algebra*, North-holland Publishing Company, Amsterdam (trad. it., (1974), *Introduzione alla teoria dei modelli e alla matematica dell'algebra*. Bozzi Silvio (tradotto da), Borghieri, Torino).
- Robinson Abraham (1966), *Non-standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam.
- Robinson (1967), *The Metaphysics of the Calculus*. In Imre Lakatos (ed), *Problems in the Philosophy of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam, (pp.28-40).
- Robinson Abraham (2021), *Logica matematica*. Lolli Gabriele (prefazione di) e Levi Beppo (saggio di), Treccani.
- Shapiro, S. & Shapiro, S. (2005) *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford University Press, New York.
- Smyth D. (2014), *Infinity and givenness: Kant on the intuitive origin of spatial representation*. In *Kant on the intuitive origin of spatial representation*, Canadian Journal of Philosophy, 44:5-6, (pp. 551-579), [<https://doi.org/10.1080/00455091.2014.967737>].
- Solom Ferman (1975), *Impredicativity of the existence of the largest divisible subgroup of an abelian p -Group*. In Weispfenning, Volker & Saracino Dan. (1975), *Model theory and algebra: a memorial tribute to Abraham Robinson*. 1nd ed., 1975. Volker Weispfenning & Dan Saracino (eds.). Berlin, Germany, Springer-Verlag, (pp. 117-130). [online: <https://doi.org/10.1007/BFb0080977>].
- Stecca Bruno e Zambelli Daniele (2020). *Nona giornata nazionale di Analisi non Standard nelle scuole superiori*. Atti del convegno: Verona 5° ottobre 2019.
- Strawson Peter (1966), *The bounds of sense: an essay on Kants Critique of pure reason*. London, Methuen and Co.
- Ternullo Claudio e Fano Vincenzo (2021). *L'infinito. Filosofia, matematica, fisica*, Carocci Editori, Roma.
- Van Dalen Dirk (1995), *Hermann Weyl's Intuitionistic Mathematics*. In *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 1, no. 2, 1995, (pp. 145–69). [<https://doi.org/10.2307/421038>].

- Varzi Achille, Nolt John, Rohatyn Dennis (1988), *Schaum's Outline of logic*, 2ed ed. McGraw-Hill, New York. (trad., it., (2007) *Logica*. 2ed ed. Boccuni F., Carrara M., Ferrari D., Manfrinati A., Morato V., Soavi M., Spolaore G., (tradotto da), McGraw-Hill, Milano).
- Weyl Hermann (2012) e Pesic Peter (a cura di), *Levels of Infinity. Selected Writings on mathematics and philosophy*. Dover Publications. United States.
- Zellini Paolo (1980), *Breve storia dell'infinito*. Adelphi, Milano.
- Zellini Paolo (2016), *La matematica degli dèi e gli algoritmi degli uomini*. Adelphi, Milano.
- Zellini Paolo (2022), *Discreto e continuo. Storia di un errore*. Adelphi, Milano.

Appendix:

Das Problem des mathematischen Kontinuums: Philosophische Untersuchungen über Kant und Weyl

In dieser Masterarbeit wird der Begriff von dem Kontinuum analysiert. Die Abschlussarbeit hat drei Teile. Der erste Teil behandelt die grundlegenden Begriffe von Kontinuum in der Mathematik, ohne mathematische systematische Ambitionen. Wir führen die drei wichtigsten Probleme von dem Kontinuum ein.

In dem zweiten Teil sehen wir die Kantische Position der Philosophie von Mathematik. Der Fokus liegt auf dem Kontinuum, aber es ist wichtig, alle ersten Kritiken zu kennen, um Kants Lehre über das Kontinuum schätzen zu können. Außerdem müssen wir die mathematischen Instrumente von Kant kennen, deshalb analysieren wir erstens die mathematische Zeit von Kant, danach sehen wir das System von Kant, und schließlich sehen wir, wie Kant das Kontinuum vorstellt.

Im letzten Teil dieser Arbeit werden die Lehren von Weyl und Robinson vertieft. Der erste ist Mathematiker und Philosoph; er kritisierte die mathematische Analyse und zeigte die Grenzen der zeitgenössischen Analyse: es gibt viele Paradoxien, außerdem kann die mathematische Analyse das phänomenologische Kontinuum nicht beschreiben. Robinson ist ein Mathematiker von dem letzten Jahrhundert, der Erfinder der non-standard Analyse. Dank Weyl und Robinson können wir eine Lösung des dritten Problems vom Kontinuum finden.

Kapitel 1

Das Kontinuum

Kontinuum und Diskret sind zwei zentrale Begriffe für die Philosophiegeschichte. Bereits im Altertum stritten sich die metaphysischen Schulen um das Kontinuum¹². John Bell

¹ Vgl. Zellini 2022, Kapitel.2 und Bell 2019.

² Smyth erklärt es sehr gut: „Our challenge, then, is to explain why our representing something as essentially unitary and holistically structured entails that what is thus represented must be given to us in order for us

fängt sein Buch über das Kontinuum mit diesen Worten an: „Wir alle sind mit dem Begriff der Kontinuität vertraut. Kontinuierlich zu sein bedeutet, ein ungebrochenes oder ununterbrochenes Ganzes zu bilden, wie das Meer oder den Himmel. Ein kontinuierliches Gebilde - ein Kontinuum - hat keine "Lücken". Im Gegensatz zur Kontinuität steht die Diskretion: Diskret zu sein bedeutet, getrennt zu sein, wie die verstreuten Kieselsteine an einem Strand oder die Blätter an einem Baum. Kontinuität bedeutet Einheit, Diskretion bedeutet Vielfalt.“³.

In diesem Kapitel nehmen wir an, dass es einen perfekten Isomorphismus zwischen dem mathematischen Kontinuum und dem phänomenologischen Kontinuum gibt. Die Zahlenreihe entspricht der Zeitreihe. Ein zeitlicher Moment entspricht einem Punkt (der Strahl) oder einer Zahl (die Zahlenreihe).

Wir betrachten die Zahlenreihe. Dedekinds beweist, dass die irrationalen Zahlen nötig sind, um eine stetige Zahlreihe zu haben⁴. Wenn wir keine irrationalen Zahlen haben, haben wir nur eine dichte Reihe. Wir haben das erste Problem: die irrationalen Zahlen sind irrational, weil wir sie mit keiner Proportion ausdrücken können. Das war ein Problem für die antiken Schulen (wie Pythagorismus oder Atomismus), weil der *Comos* durch den *Logos* erklärt wird. Es gibt einen Logos, der die irrationalen Zahlen ausdrückt.⁵ In der zeitgenössischen Mathematik werden die irrationalen Zahlen aus natürlichen Zahlen konstruiert. Wir haben die fünf Peano-Axiome. (Menge $\mathbb{N}$), dann konstruiert man

to represent it at all. The answer, I think, is to be found in Kant's grounds for attributing essential unity and holistic structure to space in the first place. It is precisely because space is infinite – and, in particular, continuous – that it is essentially unitary and holistically structured. The finitude of the human mind, Kant reasonably maintains, is incapable of accounting for such a holistic, infinitary manifold. To the extent that we can (and do) represent such a manifold, therefore, it must be given to us – i.e. our original representation of it must be intuitive". (Smyth (2014), p.559)

³ Bell 2019, S. vii: "We are all familiar with the idea of continuity. To be continuous is to constitute an unbroken or uninterrupted whole, like the ocean or the sky. A continuous entity—a continuum—has no "gaps". Opposed to continuity is discreteness: to be discrete is to be separated, like the scattered pebbles on a beach or the leaves on a tree. Continuity connotes unity; discreteness, plurality."

⁴ Vgl. Corry (2015), S.311-3124, für die Beweis *idem*. S. 316-317 und Giusti (1988), S. 13-16. Für die stetig vom Kontinuum schreibt Dedekinds „If all points of the straight line fall into two classes such that every point of the first class lies to the left of every point of the second class, then there exists one and only one point which produces this division of all points into two classes, this severing of the straight line into two portions" (Dedekind 1963, S. 11)".

⁵ Zellini erklärt: "Das Phänomen der Inkommensurabilität versetzte der atomistischen Raumtheorie einen endgültigen Schlag, denn die Vorstellung vom Raum als einer Ansammlung von einzelnen Punkten oder Atomen würde es erlauben, diese zumindest im Prinzip so zu zählen, dass ein rationales Verhältnis zwischen zwei beliebigen linearen Größen hergestellt werden könnte" ("il fenomeno dell'inkommensurabilità dava un colpo definitivo alla teoria atomistica dello spazio, perché la concezione dello spazio come insieme di punti o atomi separati avrebbe consentito di conteggiarli, almeno in linea di principio, in modo da stabilire una proporzione razionale tra due qualsiasi grandezze lineari") (Zellini 2022, S.74).

algebraisch die Menge $\mathbb{Q}$, endlich konstruiert man auch die irrationalen Zahlen und so haben wir die Menge der reellen Zahlen ($\mathbb{R}$). Die irrationalen Zahlen haben eine besondere Lage: sie wirken wie Klebstoff innerhalb der Reihe, die stetig ist.

Wenn wir das mathematische Kontinuum betrachten, benutzen wir seinen Formalismus, d.h. Gleichheit, formale Symbole, Gerade, Strecke, usw. Dank seinem Formalismus können wir das Kontinuum verstehen, und wenn wir den Isomorphismus akzeptieren, können wir auch das phänomenale Kontinuum verstehen.

Das mathematische Kontinuum hat aber drei Hauptprobleme:

1. Die Mathematik funktioniert nur mit der Diskreten. Der Diskrete ist die Verweigerung des Kontinuums, so ist es seltsam, dass das Kontinuum mit seiner Verweigerung erklärt werden soll.
2. Wenn eine Gerade, eine Oberfläche oder ein Körper stetig ist, können sie unendlich geteilt werden. Die Unendlichkeit ist auf zwei Ebenen: zunächst die irrationalen Zahlen (wie wir schon gesehen haben), und zweitens gibt es innerhalb einer Unendlichkeit zahlreiche unendliche Teile: zum Beispiel eine Gerade kann unendlich oft geteilt werden. Wenn wir das phänomenale Kontinuum betrachten, und wenn es einen Isomorphismus zwischen dem phänomenalen Kontinuum und dem mathematischen Kontinuum gibt, findet man deswegen die Unendlichkeit innerhalb jeden endlichen Teils der Welt. Es ist ein paradoxaler Schluss.
3. Das dritte Problem ist ein Ergebnis von den vorherigen Problemen: der Zweifel bezüglich der Diskretisierung des Endlichen in unendlichen Zeiten zwingt uns dazu, Quantitäten zuzulassen, die nicht archimedisch sind. In der modernen mathematischen Analyse können wir die Infinitesimalzahlen (d.h. eine Quantität, die nicht-archimedisch ist) finden. Die Infinitesimalzahlen sind problematisch, weil wir davon keine rigorose Definition haben können. Wir können Definitionen finden, wie „gleich, aber unterschiedlich zu Null“, „eine beliebige kleinere Quantität“ etc. Diese Definitionen sind nicht klar⁶. Ferner sind sie unfähig, Kontinuität zu begreifen.

⁶ Sofort kritisierten Mathematiker und Philosophen die Differentiale (Vgl. Bottazzini 2018, S.142).

Wir analysieren hier schnell diese drei Probleme eingehender.

(1) Das Erste Problem: der Diskret.

Der Diskret ist der Punkt einer Gerade und die Zahl der Reihe. Das Problem ist nicht bestimmt eine Zahl: wir haben ein abgeschlossenes Intervall $[a; b]$ (mit $a=10$, $b=12$, das Intervall gehört zu R) und wir entscheiden die Zahl $c=11,5$. Das Problem hat man, wenn man zurückgeht: zu welchem Teil gehört c ? Die Mathematik kann entscheiden; d.h., $[10; 11,5]$ und $(11,5; 12]$ (mit eckiger Klammer, die Zahl gehört zu den Intervallen, mit runder Klammer nicht). Es geht einfach um folgendes Problem: was gibt es zwischen 11,5 und 12? Eine andere Zahl (bzw. 11,6)? Die gleiche Frage könnte jedoch unendlich wieder gestellt werden. Weyl drück dieselbe Idee in dieser Form aus: „Wie aber den stetigen Zusammenhang zwischen diesen Punkten fassen, der sie zur zweidimensionalen Fläche eint? Nachdem wir das Kontinuum in isolierte Punkte zerrissen haben, fällt es jetzt schwer, den auf der Unselbständigkeit der einzelnen Punkte beruhenden Zusammenhang nachträglich durch ein begriffliches Äquivalent wiederherzustellen“⁷

Die Mathematik kann nur mit dem Diskreten arbeiten, aber sie muss das Kontinuum annehmen. Um diese These zu begründen, können wir uns zwei Beispiele anschauen.

A) Ohne das Kontinuum anzunehmen, könnte die Geometrie sogar ihre eigenen Figuren nicht konstruieren. Wir können sagen, dass eine Gerade aus einem sich bewegenden Punkt konstruiert wird, aber es gibt zwei Probleme. Erstens: was bedeutet „bewegender Punkt“ in einer Welt ohne Dimensionen? Wir sind ja gezwungen, eine metaphorische Sprache zu verwenden. Und zweitens: Wohin bewegt sich der Punkt? In einer stetigen Ebene? Wenn er sich auf einer stetigen Ebene bewegt, dann wird wiederum das Kontinuum vorausgesetzt⁸.

⁷ DK, S.79.

⁸ An dieser Stelle möchte ich darauf hinweisen, dass einige Mathematiker und Philosophen die Ansicht vertreten haben, dass aus einem Punkt niemals etwas gewonnen werden kann. Zwei Autoren seien hier genannt: Bois-Reymond, der behauptet, dass Punkte niemals einen Abstand bilden können, selbst wenn sie unendlich sind („points are just dimensionless, and therefore an arbitrarily dense sequence of points can never become a distance“ (Bell 2019, S.151 zitiert Bois-Reymond(1882), *Die allgemeine Functionentheorie*, S.114.)). Brouwer glaubte sogar, dass das Kontinuierliche nie aus Diskreten konstruiert werden kann, d.h. wir können kein Segment haben, wenn wir von dem Punkt ausgehen, egal ob es gedacht wird als eine Summe von Punkten oder als ein sich bewegender Punkt (Vgl. Bell 2019, S. 178- 179).

B) Das zweite Beispiel kommt aus der mathematischen Analyse. Der Satz von den Nullstellen einer Funktion besagt: "Wenn f eine stetige Funktion in einem endlichen und geschlossenen Intervall $[a; b]$ ist und in den Extremen dieses Intervalls Werte mit entgegengesetztem Vorzeichen annimmt, dann gibt es mindestens einen Punkt c innerhalb des Intervalls, in dem f sich aufhebt". Es ist klar, dass die Kontinuität eine notwendige Voraussetzung ist.

Die Frage ist also: wie kann die Mathematik das Kontinuum nur durch das Diskrete verstehen? Ein zweites Problem entsteht sobald wir die Frage stellen: Wie sehr können wir eine Reihe oder eine Gerade diskretisieren?

(2) Das zweite Problem: die Unendlichkeit

Mit den irrationalen Zahlen, auch wenn wir alle Approximationen von der Wurzel von zwei summen, haben wir nie den genauen Wert von Wurzel aus zwei vom Wurzel zwei, das bedeutet, die irrationale Zahl ist ein „Grenzpunkt, der weder zum einen noch zum anderen gehört der beiden unendlichen Abfolgen, die ihn definieren“⁹. Der Grenzpunkt endet eine unendliche Reihe, die beendet wird. Das zweite Unendliche besteht aus unendlichen Teilen (wie wir zuvor gesehen haben). Wie könnten wir das Unendliche durch einen endlichen, aber kontinuierlichen Teil der Wirklichkeit wahrnehmen? Dies sieht absurd aus. Aufgabe der Philosophie ist eine Erklärung des Problems

(3) Das dritte Problem: Die nicht-archimedische Quantität.

Definitionen der archimedischen Quantität (AQ): „Bei zwei reellen Quantität a, b , mit $a < b$, gibt es immer eine ganzzahlige Quantität n , so dass $na > b$ “, d.h. "Bei zwei homogenen Mengen A und B , so dass $A < B$, gibt es immer eine natürliche Zahl, so dass der n -te Teil von B kleiner als A ist, d.h., $\frac{1}{n}B < A$ “¹⁰. (bekannt auch als Eudoxus-Archimedes Axiom).

⁹ Zellini 1980, S. 70: "punto limite che non appartiene né all'una né all'altra delle due infinite successioni che lo definiscono".

¹⁰ Erste Definition, Ternullo u- Fano 2021, S. 85 ("date due quantità reali a, b , con $a < b$, esiste sempre una quantità intera n , tale che $na > b$ "), Zweite Definition, D'Amore u. Baragli 2017, S. 252 ("date due grandezze omogenee A e B tale che $A < B$, esiste sempre un numero naturale tale che la n -esima parte di B è minore di A , cioè $\frac{1}{n}B < A$ ").

Ternullo und Fano bemerkten, dass seit dem 17. Jahrhundert die nicht-archimedischen Mengen, die dieses Axiom nicht beachten (d.h., wenn $A > B$, aber A nicht archimedisch ist, dann $nA > B$, für jeden Wert von n), die Oberhand gewonnen hätten. Der Bekannteste ist dx : der Differential. Leibniz führte dx (und das Integral, „ $\int$ “, wie Summa) ein, um die geometrischen Probleme zu lösen. Differentiale sind die Differenzen zwischen zwei unendlich nahen beieinanderliegenden Größen. Ihr Wert ist „gerade größer“ als Null. Auf diese Weise glaubte Leibniz, die Luft unter einer beliebigen Kurve $f(x)$ berechnen zu können: Sie ist die Summe aller Rechteck mit der Höhe $f(x)$ und der Basis dx , d.h., $A = \int_b^a f(x)dx$. Die Differentiale dienten auch zur Berechnung der Tangente an einem beliebigen Punkt und einer Kurve. Die Idee des deutschen Philosophen war es, zwei Punkte zu betrachten: den Punkt, dessen Tangente berechnet werden soll (heißt x), und den Punkt, der unendlich nahe ist ($x+\Delta x$). Die Operation bestand darin, die Tangente des Punktes x mit der Sekante zusammenfallen zu lassen. Die Gleichung der Sekante: $y = y_0 + \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} (y_0=f(0))$. $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ist die erste Ableitung, wenn Δx nach 0 strebt. Das Ausdruck „nach 0 strebt“ ist problematisch, denn Δx kann nicht gleich zu 0 sein, aber es ist viel näher: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, mit $\Delta x=0$, haben wir $\frac{f(x+0)-f(0)}{0}$, $\frac{f(x)-f(x)=0}{0} = \frac{0}{0}$ ¹¹. Diese Methode von Leibniz wurde als approximativ kritisiert (aber das sehen wir im nächsten Kapitel). Die Infinitesimalzahlen setzen die Möglichkeit voraus, eine Linie in unendlichen Teilen zu diskretisieren. Sie sollten der Mathematik erlauben, das Unendliche zu behandeln und das Kontinuum nicht zu zerstören, obwohl Diskretion das einzige Instrument in den Händen der Mathematik ist. Was sind aber Differentialen? Die reellen Zahlen schließen die Reihe ab, und sie sind QA. Wo sind die nicht-QA innerhalb der Reihe? Wenn wir die nicht-QA studieren, können wir das Kontinuum besser verstehen.

¹¹ Das Bedeutet: die Area aus $f(a)$ bis $f(b)$, d.h., die Summe aller Rechteck zwischen a und b , mit der Höhe $f(a) \dots f(b)$ und der Basis dx . Es kann also so: $A = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. (Vgl. S. 40 Bild 4).

Bevor das erste Kapitel zu Ende geführt wird, möchte ich die Definition von Grenzen geben, weil sie wesentlich ist.¹² Für eine Funktion $f(x)$, die auf einem Intervall D von $\mathbb{R}$ definiert ist, gilt, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L, \text{ wenn es für jedes } \varepsilon > 0 \text{ ein } \delta > 0 \text{ gibt, so dass, wenn } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ haben wir, dass } |f(x) - L| < \varepsilon, \text{ mit } \varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$$

KAPITEL 2

Kant: Transzendentalphilosophie als Sinnrahmen der Untersuchung der kontinuierlichen

Im diesem Kapitel sehen wir die Philosophie von Kant und seine Konzeption über dem von Kontinuum and Mathematik, damit folgende Frage beantwortet werden kann: Wieso muss die Mathematik das Kontinuum erforschen? Warum können wir es nur mit den durch das Diskrete behandeln? Wie kann die Mathematik die Unendlichkeit vom Kontinuum umgehen?

Um diese Fragen zu beantworten, ist es nötig die Geschichte von der Mathematik in der Zeit von Kant zu erörtern (man darf nicht annehmen, dass Kant mit dem Wort „Menge“ die „Mengenlehre“ von Cantor meinte, oder dass Kant die Definition von Grenzen von Weierstrass-Bolzano hätte kennen können). Wenn wir falsche Voraussetzungen entfernen, haben wir einen genuinen Zugang zur wirklichen Kantlehre bezüglich der Mathematik und des Kontinuums.

2.1 Die Geburt von Analyse in Mathematik.

Cook schreibt „Der große Wendepunkt in der Geschichte der Mathematik ist die Erfindung der Infinitesimalrechnung“¹³. Es ist schwer zu erkennen, wer der Erfinder war, aber traditionell werden Leibniz und Newton als solche genannt. Das Geburtsjahr ist 1684, als Leibniz *Nova methodus pro maximis et minimis* veröffentlichte.

¹² Vgl. Ternullo u. Fano 2021, S. 88.

¹³ Robinson sagt „Derivates and integrals, the sum of an infinite series and the continuity of a function all are defined in terms of limits“ (Robinson 1966, S.1). In dem letzten Kapitel sehen wir Robinson und seine Analysis non-Standard. Es ist interessant wie Robinson die nicht-QA konzipiert.

Dank ihrem heuristischen Wert war die neue Methode äußerst erfolgreich: in England Newton und auf dem Kontinent Leibniz¹⁴. Es wurden auch viele Kritiken geäußert: der neue *Calculus* war ungefähr und es war nicht genug genau für eine präzise und konkrete Disziplin wie die Mathematik¹⁵.

Die Mathematiker versuchten, eine präzise Grundlage zu finden¹⁶, aber nur Weierstrass und Bolzano waren erfolgreich. Sie erfanden die formelle Sprache (mit den kanonischen Symbolen *Epsilon-delta*), um die Grenzen zu stützen, aber die Infinitesimalen verschwanden¹⁷. Weierstrass lebte am Ende des 18. Jahrhunderts, das bedeutet nach Kant, aber wir sollten in die Geschichte der Mathematik zurückgehen, um die Genese ihrer Probleme zu erfassen.

2.2 Kant und die Philosophie der Mathematik

Die Gründe der kantischen Konzeption von Mathematik sind die synthetischen Urteile a priori. Sie müssen synthetisch sein, weil sie unser Wissen erweitern; sie müssen a priori sein, weil die Mathematik eine notwendige und universale Disziplin sein muss (sie hat keine empirische Grundlage).¹⁸

Diese Urteile sind möglich, weil die Mathematik ihre Begriffe konstruiert, und „konstruieren, heißt: die ihm korrespondierende Anschauung a priori darstellen“ (KrV., B741/A713, S.732). Konstruieren bedeutet also, einem Begriff (der den Intellekt hat) die Eigenschaften von Raum und Zeit zu geben, welche die einzigen reinen a priori-Anschauungen sind (der Raum und die Zeit sind die Bedingungen a priori einer jeden empirischen Anschauung). Ein so gebildetes Urteil ist ein mathematisches Urteil. Man muss jedoch vorsichtig sein: Konstrukt hat nichts Empirisches an sich, ist aber dennoch eine völlig apriorische Konstruktion¹⁹.

¹⁴Cooke 2005, S. 462: “The great watershed in the history of mathematics is the invention of the calculus”.

¹⁵ Dies sind nur einige Namen von Mathematikern, die die neue Methode unterstützt haben: Jacques Bernoulli (1654-1705), Jean Bernoulli (1667-1748), L'Hôpital (1661-1704), der das erste Schulbuch schreibt hat oder Euler (1707-1783). (Vgl. Bottazzini 2005, S. 36-38 und Boyer 1968, S. 581-584).

¹⁶ Für eine ausführlichere Diskussion der Kritik verweise ich auf Vgl. Bell 2019, S. 70-76. Die berühmtesten Kritiker waren Hume und Barkley.

¹⁷ Bzw. Lagrange (1736-1813) und D'Alambert (1717- 1783). Vgl. Boyer 1968, S. 629, 674 und Bell 2019, S. 82- 86.

¹⁸ Corry 2015, S.236: “a differenza di molti suoi predecessori e di molti contemporanei, più rispettosi delle concezioni classiche, [...] affermò inequivocabilmente la piena supremazia concettuale dell'algebra sulla geometria. [...] proseguì attivamente tentativi coerenti per legittimare l'uso di numeri negativi e immaginari”. Für Wallis' Argument, warum eine komplexe Zahl real ist, siehe Corry 2015, S. 241-242

¹⁹ Für eine klare und schnelle Vertiefung: vgl. Neunhäuserer 2019, S. 41-49.

Kants Auffassung von Mathematik hatte einen schlechten Ruf, der „schon bei den Zeitgenossen selbst starke Einwände hervorrief.“²⁰ Der Ruf wurde später noch verschlimmert: insbesondere „im späten 19. und frühen 20. Jahrhundert [entwickelte sich] eine lebhafte und wichtige Debatte über die kantische Theorie der Mathematik; andererseits ist die negative Bewertung, die Logiker und Mathematiker damals gegeben haben, führte zu einem niedrigeren Interesse an diesem Bereich von Kants Gedanken, der von den meisten als völlig überwunden durch die Entwicklungen in der mathematischen Theorie angesehen wurde“²¹.

Frege denkt, dass die synthetischen a priori Sätze absurd sind. Cantor und Bolzano haben sich nicht darauf geeinigt, die Mathematik auf Zeit und Raum zu gründen. Für viele Logiker war Kant wegen seiner Vorurteile über die Logik begrenzt: er glaubte, dass die formale Logik von Aristoteles initiiert und vollendet wurde (es ist ein historischer Irrtum, wie Frege gezeigt hat)²². Obwohl einige Mathematiker wie Hilbert, Brouwer oder Heyting versuchten²³, sich auf die Transzendentalphilosophie zu stützen, wurde erst in den 1960er Jahren das Interesse an Kants Philosophie der Mathematik wieder lebendig, und zwar dank der Studien des finnischen Logikers Jaakko Hintikka²⁴, die von Parsons fortgesetzt wurden.

Für die Zwecke dieser Arbeit muss Kant als mathematischer Philosoph rehabilitiert werden, andernfalls wird er zu einem Autor von historischem Interesse und von geringem Nutzen für die Beantwortung der Fragen, die am Anfang des Kapitels gestellt wurden. Die Legitimität synthetischer a priori-Urteile muss daher geprüft werden, und es muss gezeigt werden, dass die Transzendentalphilosophie die neuen mathematischen Entitäten aufnehmen kann.

²⁰ Vgl. Irritz 201, S. 117 und Micheli 1998, S. 5.

²¹ Micheli 1998, S. 2: „suscitò forti obiezioni già fra gli stessi contemporanei“.

²² Micheli 1998, S. 5 “tra fine Ottocento e inizi del Novecento, un vivace ed importante dibattito sulla teoria kantiana della matematica; dall’altro, il giudizio negativo che allora ne diedero, pressoché unanimemente, logici e matematici, condusse ben presto ad una drastica diminuzione dell’interesse per questo aspetto del pensiero kantiano, ritenuto dai più ormai del tutto superato dagli sviluppi della matematica moderna“

²³ Zur kantischen Auffassung von Logik verweise ich auf Baron 1984. Zum Verständnis der Entwicklung der Logik von Aristoteles bis zum heutigen Tag, genügt es, Kapitel 5 und Kapitel 6 des Handbuchs der Logik von Varzi, Nolt u. Rohatyn 1988.

²⁴ Vgl., Bell 201), S. 169.

2.3 Kant und das Kontinuum

Wir können über das Kontinuum im dritten Teil der *Kritik der reinen Vernunft* lesen: *Transzendente Ästhetik*, *Transzendente Analytik* und die *zweite Antinomie*. Um das Problem zu verstehen, ist es genug, diese beiden Zitate anzuschauen:

1. „Daher ist zwischen Realität in der Erscheinung und Negation ein kontinuierlicher Zusammenhang vieler möglichen Zwischenempfindungen, deren Unterschied von einander immer kleiner ist, als der Unterschied zwischen der gegeben und dem Zero, oder der gänzlichen Negation“ (*KrV.*, B210/A168, S.245), und ein paar Seiten tiefer „Der Raum und Zeit sind quanta continua“ (*KrV.*, B211/A169, S.246)

2. die zweite Antinomie der reinen Vernunft:

-Thesis: „Eine jede zusammengesetzte Substanz in der Welt besteht aus einfachen Teilen, und es existiert überall nichts als das Einfache, oder das, was diesem zusammengesetzt ist.“ (*KrV.*, B462/A434, S.478).

-Antithesis: Kein zusammengesetztes Ding in der Welt besteht aus einfachen Teilen, und es existiert überall nichts Einfaches in derselben. (*KrV.*, B463/A435, S.479).

Sind Raum und Zeit stetig oder nicht? Für die Transzendente Ästhetik sind stetig sowohl der Raum (vgl. *KrV.*, B39-40/A25 (S.87)) als auch die Zeit (vgl. *KrV.*, B48/A32, S.95). Sie sind jenseits der begrifflichen Sphäre und ermöglichen eine jede Erfahrung, ohne aus ihr ableitbar zu sein, daher sind sie nicht nur rein, sondern auch a priori (Vgl. *PrL.* S.67). Die Intuition weist einen einzigartigen, homogenen Raum und eine homogene Zeit auf, in denen wir sie auf unbestimmte Zeiten trennen, so dass sie kontinuierlich ist.

Raum und Zeit sind deshalb präkonzeptionell und daher wird es kompliziert (ich würde sagen unmöglich), sie zu erörtern, da eine jede Erörterung Zeit und Raum voraussetzen muss. Die Mathematik muss aber die Intuitionen benutzen und die Philosophie kann dank der Mathematik die Intuitionen beschreiben, obwohl sie beide wissen, dass der menschliche Verstand endlich ist und deshalb die Komplexität des Kontinuums von Raum und Zeit nicht erfassen kann.

Wenn wir wissenschaftliche Urteile über das Kontinuum haben wollen, müssen sie mathematisch sein (d.h. synthetisch a priori), also konstruierbar (wie schon oft gesagt wurde), aber „nur der Begriff von Größen läßt konstruieren“ (*KrV.*, B742/A714, S.734).

Abschluss: Die Mathematik muss mit dem Kontinuierlichen das Seiende bauen. Der einzige mögliche Weg ist die Quantität, d.h. die Diskretisierung.

Der Schematismus von Quantität und Qualität führen zu zwei Prinzipien, die Kant als „mathematisch“ beschreibt, dort wo der Autor die Kontinuität in massiver Weise diskutiert: sie sind *Axiomen der Anschauung* und die *Antizipationen der Wahrnehmung*. Die erste besagt, dass „Alle Anschauungen sind extensive Größe“ (*KrV.*, B202/A162, S. 238), und die andere behauptet: „In allen Erscheinungen hat das Reale, was ein Gegenstand der Empfindung ist, intensive Größe, d.i. einen Grad“ (*KrV*, B207/A166, S. 243). Raum und Zeit werden also durch sowohl die Ausdehnungsgröße als auch die Intensive Größe gedacht. Kant verwendet die Mathematik seiner Zeit, um die Kontinuität zu beschreiben. Für Kant ist sind die *Fluente* (heute würde man sagen: Differentiale) das Wesen der Kontinuität, denn sie sind die kleinstmöglichen Teile (die kleinsten Grade) (vgl. *KrV*, B207/A166-B211/A169, S. 243-246). Sowohl intensive als auch extensive Mengen sind kontinuierlich, weil Kant sagt, dass „alle Erscheinungen, sowohl extensiv als intensiv betrachtet, kontinuierliche Größen sind“ (*KrV*, B212/A170, S. 248).

Und wieso gibt es eine Antinomie über dem Kontinuum? Kant argumentiert, dass wir nicht wissen können, ob der Raum stetig ist (oder nicht). Abschluss: Die Analyse führt zu einem antinomischen Konflikt und damit die synthetischen Urteile *a priori* sind dialektisch! Eine Katastrophe. Das Problem, wenn wir es richtig lesen, ist nicht das Kontinuum selbst, sondern eher eine unmittelbare Folge davon: seine Teilbarkeit bis ins Unendliche. Der Grund für die Antinomie ist eine falsche Betrachtung der Anschauung, die als eine empirische missverstanden wird. Die Erfahrung ist nicht eine gerichtete Auswirkung aus der mathematischen Konstruktion, bzw. wenn die Mathematik Differentiale hat, bedeutet das nicht, dass wir auch in der Erfahrung differential wahrnehmen. Vielmehr ist es eine Ableitung der Möglichkeit, dass ein Teil des Raums unendlich oft geteilt werden kann (oder besser gesagt, wir können es auf den kleinstmöglichen Teil herunterbrechen), also in der Erfahrung kann nicht ausgeschlossen werden, dass wir den kleinsten Teil von einem Objekt wahrnehmen können. Daraus lässt sich jedoch nicht ableiten, dass die Welt aus Verbindungen oder einfachen Teilen besteht, einfach weil die Erfahrung zeigt, wir würden weder das eine noch das andere haben.

Die einzige Möglichkeit, Kants Ansicht konsequent zu denken, besteht darin, die Anschauung von Raum und Zeit als völlig unabhängig von der Erfahrung zu betrachten,

d.h. dass sie, da sie der phänomenalen Welt vorausgehen und völlig anders sind als der kategorische Apparat, keine Antinomie bilden. Das Kontinuum offenbart der Mathematik nur dann das Unendliche, wenn man bei den reinen Intuitionen *a priori* bleibt.²⁵

Die Antinomie zeigt, dass sich die Mathematik den Grenzen der menschlichen Vernunft beugen muss. Die menschliche Vernunft kann also nicht dazu führen, dass der Mensch sich anmaßt, den kleinsten Teil des *Kosmos* oder den größten wahrzunehmen. Wir alle erleben das Kontinuierliche, aber das liegt daran, dass wir uns die Welt vorstellen, bereits durch kontinuierlichen Raum und Zeit. Dies darf jedoch nicht bedeuten, dass die hyperreale Zahl bzw. die gesamte Fläche zwischen einer Hyperbel und ihrer Asymptote erfahrungsorientiert seien.

2.3 Abschluss

Die Achillesferse einer jeden Versuchung, Kant zu aktualisieren, ist der Formalismus der mathematischen Analyse sein unserer Zeit. Kant konnte das nicht wissen, aber die Kontinuität, als eine Eigenschaft des homogenen Raums, macht eine mathematische Entwicklung plausibel die theoretische Entwicklung der Algebra, ohne die kritische Philosophie zu verraten, selbst wenn wir auf die mathematischen Werkzeuge des 18. Jahrhunderts. Der Philosoph selbst erlaubt neue formale Apparate, solange sie konstruiert sind, d.h. solange man sich auf die Intuitionen von Raum und Zeit bezieht (vgl. *KrV*, B760/A732-B761/A734, S. 749-750).

Das bedeutet, dass jede Symbolik, der es gelingt, der Kontinuität von Raum und Zeit einen Sinn zu geben, in das transzendente System eingefügt werden kann: wir können den kantischen begrifflich-mathematische Apparat erneuern. Hermann Weyl ist ein Mathematiker und Philosoph des letzten Jahrhunderts, der *Das Kontinuum, kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analyse* beschreibt. Er folgte Kant, weil er dachte, dass die Mathematik ihren Begriff konstruiert, aber er hat die Mathematik auf den heutigen Standard angepasst. Es wird sich zeigen, dass Weyl von kantischen Prämissen

²⁵ Smyth erklärt sehr gut: „Our challenge, then, is to explain why our representing something as essentially unitary and holistically structured entails that what is thus represented must be given to us in order for us to represent it at all. The answer, I think, is to be found in Kant’s grounds for attributing essential unity and holistic structure to space in the first place. It is precisely because space is infinite – and, in particular, continuous – that it is essentially unitary and holistically structured. The finitude of the human mind, Kant reasonably maintains, is incapable of accounting for such a holistic, infinitary manifold. To the extent that we can (and do) represent such a manifold, therefore, it must be given to us – i.e. our original representation of it must be intuitive”. (Smyth 2014, S. 559).

nicht zu sehr abweicht, und dass es ihm gelingt, uns die Mengenlehre, die Logik und die Begriffe der Grenzen, Funktionen usw. aus einer konstruktivistischen und intuitionistischen Perspektive zu erklären. Wir sehen, dass die Standardmathematik weit aus dem phänomenologischen Kontinuum liegt, weil sie die Differentialzahlen nicht konstruieren kann. Nachdem wir Weyl behandelt haben, sehen wir die *non-standard Analysis*, welche die Differentialzahlen konzeptualisieren kann.

KAPITEL 3

Das Problem der Differentiale: von der Kritik an der Analyse von Weyl zu Robinsons Hyperreale Zahlen.

Damit bleibt noch das letzte Problem zu lösen: die Differentiale. Historisch gesehen wurden sie aus der Mathematik verbannt, weil sie problematisch und widersprüchlich waren. Es wurde kanonisch, das *Delta-Epsilon* Lexikon zu verwenden, wobei eine Funktion stetig ist, wenn:

$$\alpha) \forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta [\delta > 0 \wedge \forall x \forall y (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)])$$

(DK, S. 7-8)

Sie ist jedoch nicht präzise genug und schließt auch die Differentiale aus, die sich aus einer wesentlichen Eigenschaft der Kontinuität ergeben: ihrer Teilbarkeit bis ins Unendliche²⁶. Das Differential ist wichtig, nicht nur um mehr akkurate sein, aber auch um das Kontinuum besser zu verstehen.

²⁶ Um zu verstehen, wie die *Delta-Epsilon* Lexikon approximativ ist, einfach merken: α sagt uns nur, dass, „wenn es ein *Delta* gibt, das kleiner ist als die Länge von $x-y$, dann gibt es auch ein *Epsilon*, das kleiner ist als die Bilder von $x-y$ “. „Klein“ ist ein relativer Begriff. hängt davon ab, wie groß das Intervall ist, wenn es eine Milliarde ist, ist selbst eine Million eine Entfernung „klein“, und wer definiert dann, wer klein oder groß ist? Der Gott der Mathematik? Was wir mit Sicherheit sagen können, ohne in sarkastische Witze zu verfallen, ist dass jedes „ r “ beliebig ist, dann können wir eine andere Zahl „ q “ betrachten, so dass $r > q$, mit r und $q \in \mathbb{R}$. Wenn z. B. $r=3$ ist, dann erfüllt 0,01 ebenfalls die Bedingung; q kann gleich sein auf 0,1, dann ist $r-q=2,99$.

3.1 Hermann Weyl und *Das Kontinuum*

Weyl ist ein interessanter Autor, weil er ein Mathematiker ist, aber er hat auch viele bedeutende Anregungen zu philosophischen Problemen angeboten; „Hermann Weyl (1885–1955), einer der vielseitigsten Mathematiker des zwanzigsten Jahrhunderts, war ungewöhnlich unter den Wissenschaftlern, da er sich zur idealistischen Philosophie bekannte. In seiner Jugend neigte er zum Idealismus von Kant und Fichte, später wurde er von Husserls Phänomenologie beeinflusst“ schreibt Bell²⁷.

Weyl zeigt, wie die mathematische Analyse in eine „Sandburg“ eingebaut ist und wie weit sie von der phänomenalen Erfahrung entfernt ist, die immer eine kontinuierliche Erfahrung ist.

Das erste Problem ist das nicht-prädikative Urteil, d.h. eine Definition (vgl., *DK*, §6, Kap. I), die sich bezieht „auf die Klasse, die das zu definierende Objekt enthält“²⁸ Schneller gesagt: Weyl konstruiert die Analyse mit dem Anfang von natürlichen Zahlen. Die Hintergrundbericht ist $S(x, z)$, die „ x folgt zu z “ bedeutet. Mit dieser Relation können alle Zahlen konstruiert werden: die irrationalen Zahlen und die Grenzen auch. Um nichtprädikative Definitionen zu vermeiden, wird grundsätzlich nur die Kategorie der natürlichen Zahlen verwendet, d. h. „Um sicherzustellen, dass jede solche Definition prädikativ ist, schränken wir ein, welche Quantoren in der Formel $\phi[x]$ vorkommen können, die in (1) erscheinen kann [d.h. „Die natürlichen Zahlen werden als primitiver Begriff akzeptiert“]: Wir dürfen über natürliche Zahlen quantifizieren, aber wir dürfen nicht über Mengen oder Funktionen quantifizieren. In der modernen Terminologie würden wir sagen, dass $\phi[x]$ arithmetisch sein muss; das heißt, es darf nur Quantoren erster Ordnung enthalten“²⁹.

Das wichtigste Teil aber ist die Kritik von Weyl über die Beziehung zwischen mathematischem und phänomenalem Kontinuum³⁰:

²⁷ Bell 2019, S. 172: “Hermann Weyl (1885–1955), one of most versatile mathematicians of the twentieth century, was unusual among scientists in being attracted to idealist philosophy. In his youth he inclined towards the idealism of Kant and Fichte, and later came to be influenced by Husserl’s phenomenology.”

²⁸ Shapiro 2005, S. 7: “a definition is impredicative if it refers to a class that contains the object being defined”.

²⁹ Adams u. Lou 2010, S. 11: „In order to ensure that every such definition is predicative, we restrict which quantifiers can occur in the formula $\phi[x]$ that can appear in (1) [i.e. “The natural numbers are accepted as a primitive concept” (cit., p.11)]: we may quantify over natural numbers, but we may not quantify over sets or functions. In modern terminology, we would say that $\phi[x]$ must be arithmetic; that is, it must contain only first-order quantifiers”.

³⁰ Es ist eine Klarstellung erforderlich. Weyl verwendet Phänomen als Synonym für Anschauung, aber nach Kant ist es problematisch, sie als Synonyme zu verwenden. Aber Weyl spricht von der kontinuierlichen

Die große Aufgabe, welche seit der pythagoräischen Entdeckung des Irrationalen gestellt ist, das uns (namentlich in der fließenden Zeit und der Bewegung) unmittelbar anschaulich gegebene Stetige nach seinem in „exakten“ Erkenntnissen formulierbaren Gehalt als Gesamtheit diskreter »Stadien« mathematisch zu erfassen, dieses Problem ist trotz Dedekind, Cantor und Weierstrass heute so ungelöst wie je.

(DK, S.16)

Das Problem ist, dass die Mathematik den kontinuierlichen Fluss der Weltzeit nicht kopieren kann (Vgl. DK, §§6-7, Kap. II), während es in der Mathematik nur immer kleinere Zeitintervalle gibt, die aber nie klein genug sind, um den „Augenblick“ formal darzustellen. Nehmen wir einen Augenblick OE. Er fängt mit O an und beendet mit E. Weyl schreibt, dass OE wie die phänomenale Zeit ist, wenn:

Ist P ein Zeitpunkt, so läßt sich derjenige Bereich rationaler Zahlen, dem λ dann und nur dann angehört, falls es einen Zeitpunkt L früher als P gibt, für den

$$OL = \lambda \cdot OE$$

ist, auch arithmetisch in der reinen Zahlenlehre auf Grund unserer Definitionsprinzipien konstruieren und ist damit eine reelle Zahl in unseren Sinnen; ferner: es gehört in dieser Weise, bei Zugrundelegung der Zeitstrecke OE als Einheit, nicht nur zu jedem Punkt P eine bestimmte reelle Zahl als seine »Abszisse«, sondern auch umgekehrt zu jeder reellen Zahl ein bestimmter Zeitpunkt.

(DK, S.68)

P müsst sehr näher zu O, und eine Umgebung konstruiert, wie Weyl schreibt:

Zeit als einem einzigen Moment, als fließend, genau wie das von Kant beschriebene Kontinuum der Intuitionen; daher ist es durchaus möglich, "phänomenal" und "Anschauung" als Synonyme in diesem Kapitel zu verwenden

γ) Daß im Zeitkontinuum ein einzelner Punkt nur als »Durchgangspunkt« existiert, bringen wir, nachdem wir den Punkt dieser Tatsache zum Trotz zu einem selbständigen Individuum, einer reellen Zahl Q , gemacht haben, innerhalb der Analysis dadurch zur Geltung,

$$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < 1/n \quad (n = 1, 2, 3, \dots \in \mathbb{N}),$$

daß wir ihn relativ zu der unendlichen Folge seiner durch die Ungleichungen definierten, sich immer enger um a zusammenziehenden Umgebungen betrachten.

(DK, S, 79-80)

Es ist klar: Der Augenblick ist der kleinste wahrnehmbare Moment; die Infinitesimalzahl ist die kleinste denkbare Zahl, es besteht also eine enge Übereinstimmung zwischen Augenblick und Infinitesimalzahl, aber für Weyl ist die Notion von Infinitesimalzahl voller Widersprüche (Vgl. DK, S.80). Die Wette wurde daher zu dem Versuch, das Infinitesimale im Rahmen des mathematischen Systems zu konstruieren.

3.2 Non-standard Analysis als eine mögliche Lösung

Robinson ist ein Mathematiker des letzten Jahrhunderts, der die Nicht-Standard-Analyse erfand (so genannt im Gegensatz zur Standard-Analyse, auf die sich auf Weyl bezog).

Er hat die *Compactness and Completeness Theorem* and den *Transfer Principle*³¹ benutzt, um die infinitesimalen Zahlen zu bestimmen. Nehmen wir die Formel (γ). Ohne den Unterschied zu berücksichtigen, nehmen wir nur x (den wir jetzt „ c “ nennen werden, um mit den Texten von und über Robinson übereinzustimmen) und wir beschließen, c so zu konstruieren, dass „ c kleiner als $1/2$, aber größer als 0 ist“, dann wiederum „ c ist kleiner als $1/3$, aber größer als 0 “, usw. ist das Intervall immer kleiner, wie auch wie im vorangegangenen Kapitel dargelegt. Jede endliche Teilmenge der Sammlung von Elementen

³¹ Keisler schreibt: “Any hyperreal number system $(^*\mathbb{R}, ^*S : S \in \text{CZF})$ is an elementary extension of the full structure $(\mathbb{R}, S : S \in \text{CZF})$. That is, every n -tuple of real numbers satisfies the same first-order formulas in $(\mathbb{R}, S : S \in \text{CZF})$ as it satisfies in $(^*\mathbb{R}, ^*S : S \in \text{CZF})$. The proof is by induction on the complexity of formulas”. (Keisler 1994, S. 215).

unendlich in $1/n$, ist in $L_{\mathbb{R}}$ ausdrückbar und gehört zu K , d. h. jede endliche Teilmenge davon ist wahr, denn wenn wir nur eine endliche Anzahl von Sätzen der Form „es gibt eine Zahl größer als Null und kleiner als $1/n$ “, so wird einer der Sätze den Bruch enthalten kleiner $1/n$, und $1/2n$ wird offensichtlich größer als 0 und kleiner als alle Brüche sein, die in unserer endlichen Liste von Sätzen erscheinen“³².

Bevor wir zu Weyl zurückkommen, ist es nötig, einige grundlegende Prinzipien über non-standard Analysis zu einzuführen. „ c “ ist eine infinitesimale Zahl und wird in der folgenden Tabelle genau definiert *Standardwelt* als $|c| < 1/n, \forall n \in \mathbb{N}$. Natürlich ist „0“ die erste unendlich große Zahl. Betrachten wir die Zahl 2 und die Zahl $2+c$, nennen wir die zweite Zahl „3“. Die 2 und „3“ sind unendlich nahe beieinander, weil sie sich nur um ein Infinitesimal unterscheiden (beachten Sie, dass c und 0 auch per Definition unendlich nahe). Daher definieren wir zwei Zahlen x und y als unendlich nahe beieinander liegend (oder zu derselben Monade), wenn ihre Differenz infinitesimal ist ($x-y=c$) und schreiben wir $x \approx y$. (Es kann verstanden werden die trivial $x \approx x$, wie $3 \approx 3$, $104509 \approx 104509$, usw.). Aus dieser Definition ergibt sich, dass wir beweisen können, dass „jede hyperreale Zahl unendlich nahe an genau einer reellen Zahl liegt“. Daraus definieren wir die einzige reelle Zahl, deren Standardteil unendlich nahe bei x liegt, und wir schreiben wir $st(x)$. Ausgehend von diesen kleinen Begriffen können wir den Begriff der Grenze neu definieren. Eine Grenze der Funktion $f(x)$ von c , die zu einem Wert q tendiert, wenn für alle x , die unendlich nahe bei c liegen und unterschiedlich sind von c ist $f(x)$ unendlich nahe an L :

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ se } \forall x \approx c \text{ e } x \neq c, f(x) \approx L$$

Wir können nur „ f ist stetig“³³ umformulieren. f ist im reellen Punkt c stetig, wenn $f(c)$ definitiv ist und jedes x ist unendlich nahe bei c liegt, ist $f(x)$ unendlich nahe bei $f(c)$, d. h. wenn $x \approx c$, dann auch $f(x) \approx f(c)$ ³⁴.

³² Davis u. Heresh 1991, S. 58: “ogni suo sottoinsieme finito è vero, perché se consideriamo solo un numero finito di proposizioni della forma ‘ c ’ è un numero maggiore di zero e minore di $1/n$ ’, una delle proposizioni conterrà la frazione più piccola $1/n$, e $1/2n$ sarà ovviamente maggiore di 0 e minore di tutte le frazioni che compaiono nel nostro elenco finito di proposizioni”

³³ Für AS: Wenn x_0 ein Akkumulationspunkt von X (X -Teilmenge $\mathbb{R}$) ist, definiert f kontinuierlich in x_0 , wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

³⁴ Usw.: Das heißt, ich berechne den Grenzwert der Funktion im Punkt c und muss zum Beispiel den Punkt $f(c)$ ermitteln. Ich muss sehen, ob se $f(x) = x^2 - 4x + 2$ ist stetig für $x=3$, denn $f(3) = 3^2 - 4(3) +$

Wir kommen zu Weyl zurück. Die Funktion OE ist eine stetige Funktion, daher ist jeder Punkt zwischen O und E eine Monade. Wenn die Funktion definiert ist, ist $y=f(x)$ und wir haben definitiv $f(O)$ und $f(E)$. Der Nicht-Standard-Ansatz besagt, dass, wenn die Funktion $y=f(x)$ kontinuierlich im Intervall O-E, im reellen Punkt „O“, jedes c unendlich nahe an O, $f(O)$ ist unendlich nahe bei $f(c)$, (wenn $O \approx c$, dann $f(O) \approx f(c)$).

An diesem Punkt erfülle ich die Bedingung der phänomenalen Kontinuität, die in *Das Kontinuum*, zuerst dialogisch gesehen und jetzt formalisiert ($OL = \lambda \cdot OE$). Diese Art der Formulierung bedeutet einfach, dass ich ein L immer näher an O heranzuführen kann, d. h. ich „schrumpfe auf O“, und je näher ich komme, desto mehr kann ich „den Augenblick der phänomenalen Zeit“ begreifen, nämlich wenn ich ein Segment mit der Länge zehn nehme und einen Punkt wähle, der einen Punkt von O entfernt ist, bedeutet dies, dass $OL=1/10$ von OE, d.h. dass ich das Zehnfache von OL benötige, um OE abzuschließen.

Für die Definition der nicht standardisierten Kontinuität. Betrachten wir $x=L$ ($L \in \mathbb{R}^*$), dann $f(O) \approx f(L)$, das bedeutet, dass $OL=c$. Der Abstand zwischen O und L ist infinitesimal, da O der Standardteil von L ist ($O=st(L)$). Da L auf einer *hyperrealen* Linie liegt, befindet es sich jenseits der infinitesimalen Teilung des Zeitabschnitts OE, in dem γ und der Satz A ohne Probleme angewendet werden können.

In diesem Fall können wir OE als einen einzigen Zeitpunkt betrachten, dann ist $O=st(E)$, d. h. E liegt unendlich nahe an O. Wir erhalten dies algebraisch, indem wir von $OL=\lambda \cdot OE$ ausgehen. Ich betrachte $O=st(L)$, dann $OL=c$, muss λ eine rationale Zahl sein. Ich ersetze: $c=\lambda \cdot OE$, $OE=c/\lambda$, also $OE=$ Infinitesimalzahl. Da O per Definition nur eine infinitesimale Zahl haben kann, ist $O=st(E)$, d. h. $L=E$.

Um den argumentativen Zyklus zu beenden, lassen Sie uns die Formalität wieder aufnehmen; lassen Sie uns erneut α betrachten und sehen, wie sie in $\mathbb{R}^*$ (α^*) umformuliert werden kann:

$$\alpha) \forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta [\delta > 0 \wedge \forall x \forall y (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)])$$

$$\alpha^*) \exists c \forall n \{ [((c \in \mathbb{R}) \wedge (n > 0, n \in \mathbb{N}) \wedge (0 < c < 1/n))] \rightarrow (c \approx 0) \} \rightarrow f(O) \approx f(c) \}^{35}$$

2 = -1. Jetzt berechnen die Grenzen $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ mit ANS: $= st((3+c)^2 - 4(3+c) + 2) = st(-1) = -1$. Wir haben die gleiche Ergebnisse, denn $3 \approx c \in f(3) = -1 \approx f(c)$ (vgl. Stecca u. Zambelli 2020, p.123 (*Esempio* 8.3.4)).

³⁵ α^* formalisiert einfach "f ist stetig" in einem NS-Lexikon.

Abschluss

Allerdings bleiben anregende Fragen offen: inwieweit Abraham Robinson die Realisten von der Philosophie der Mathematik überzeugen kann, inwieweit er das Kontinuum wirklich erfassen kann oder inwieweit der Mathematiker in dem formalen System, das er selbst konstruiert hat, beschränkt ist.

Sobald eine solide Struktur erreicht ist, müssen erkenntnistheoretische und ontologische Fragen gestellt werden. Es wurde der Versuch unternommen, die Mathematik durch die Erweiterung der formalen Welt näher an die Möglichkeitsbedingungen der phänomenalen Welt heranzuführen. Das neue formale System könnte jedoch die Unterschiede zwischen der mathematischen Welt und der phänomenalen Welt noch stärker hervorheben.

Das Problem liegt jedoch nicht in dem neuen formalen System, sondern in dem gesamten mathematischen System und seiner Funktionsweise. Wer die Beschreibungskraft der ANS leugnet, leugnet die Kraft der gesamten Mathematik. Wenn man davon ausgeht, dass der Formalismus der ANS die Kluft vergrößert, kann die Philosophie der Mathematik das Kontinuum nicht untersuchen, da die Mathematik, wie in Kapitel zwei dargelegt, ihre Elemente genau auf dem intuitiven Kontinuum aufbaut, das zur Voraussetzung sowohl der Mathematik (und ihres formalen Systems) als auch der phänomenalen Welt wird.

Es war genau das Kontinuum, das die Mathematik gezwungen hat, irrationale Zahlen zu konstruieren, und es ist genau dasselbe Kontinuum, das jetzt die Philosophie auffordert, infinitesimale Zahlen zu akzeptieren. Die ANS bietet der Philosophie eine neue Syntax, die mit dem ursprünglichen Anliegen des Papiers besser vereinbar ist: das Verständnis des Kontinuums.

Legitimierenderweise kann man fragen: Kennen wir die Eigenschaften des Kontinuums wirklich? Diese Frage sollte jedoch weder an die Mathematik noch an die Philosophie der Mathematik gestellt werden, sondern an die gesamte Philosophie, denn ein einzelnes Stück Mathematik zu leugnen, bedeutet, das gesamte System der Mathematik zu leugnen, wenn dieses einzelne Stück mit logischer Strenge konstruiert wurde, wie es bei den Differentialen der Fall war. Weyl zum Beispiel konnte dank einer phänomenologischen Studie über Husserl die mathematische Analyse in ihrer Beziehung zur

phänomenalen Welt kritisieren. Daher bleiben mögliche Vergleiche zwischen der Philosophie der Mathematik und anderen philosophischen Ansätzen offen, aber in diesem Aufsatz wurde argumentiert, dass es der Philosophie der Mathematik gelingt, das Kontinuum zu erfassen, indem sie mathematische Entitäten untersucht, und zwar genau deshalb, weil letztere durch eine echte und komplexe Kontinuität ermöglicht, werden: die unserer reinen a priori-Intuitionen, die vor dem Begriffsvermögen liegen. Die Dissertation hatte daher den Ehrgeiz zu zeigen, dass jede künftige Forschung über das Kontinuum muss, negativ oder positiv, konfrontieren die Philosophie der Mathematik, die von einer transzendentalen und formalistischen Perspektive.

RINGRAZIAMENTI

Vorrei dedicare un ringraziamento speciale al mio relatore Andrea Altobrando, che mi ha supportato, seguito e indirizzato nel lavoro della tesi.

Sono grato al prof. Kienzler, il quale ha accettato di leggere l'appendice in tedesco e particolarmente riconoscente agli organizzatori del progetto del doppio titolo: al prof. Illetterati, al prof. Cesaroni e alla prof.ssa Crepaldi per dell'università di Padova, al prof. Schmidt dell'università *Schiller* di Jena.

Vorrei infine ringraziare tutti i miei familiari e tutti gli amici che mi hanno accompagnato in questo periodo universitario.