

**Università degli Studi di Padova – Dipartimento di Ingegneria Industriale**

---

*Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale*

Relazione per la prova finale

**STUDIO E ANALISI DI UN MODELLO MATEMATICO  
PER IL TRAFFICO AEREO**

Tutor universitario: **Dott. Pierpaolo Soravia**

Laureando: **Andrea Mercanti**

Padova, 13/03/2023

**Per analizzare al meglio l'articolo oggetto di studio, si introdurranno concetti matematici riguardanti i modelli matematici per il traffico.**

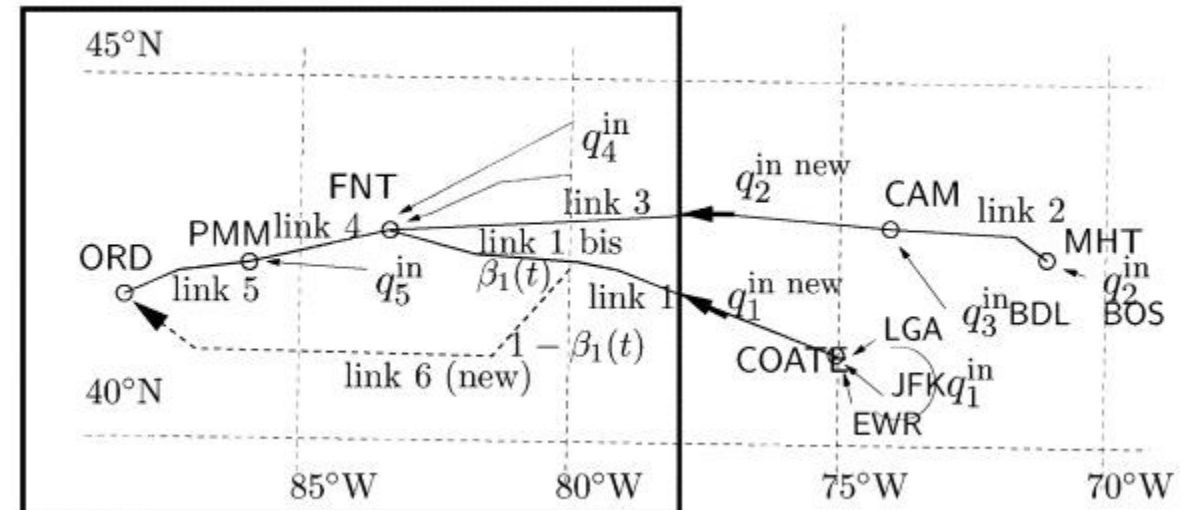
Si parlerà quindi di:

1. Onde d'urto e ventaglio di rarefazione.
2. Soluzioni integrali e condizioni di entropia.
3. Soluzioni fisiche e non.

Successivamente, si analizzeranno i dati contenuti nell'articolo e la fattibilità del modello.

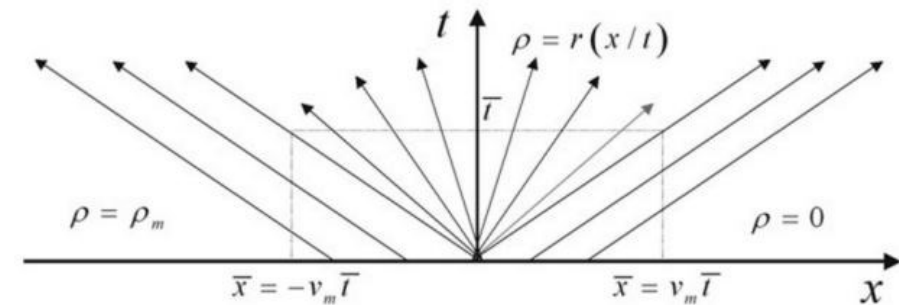
Nella trattazione si useranno equazioni del tipo:  $u_t + q(u)_x = 0$

Con  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ .



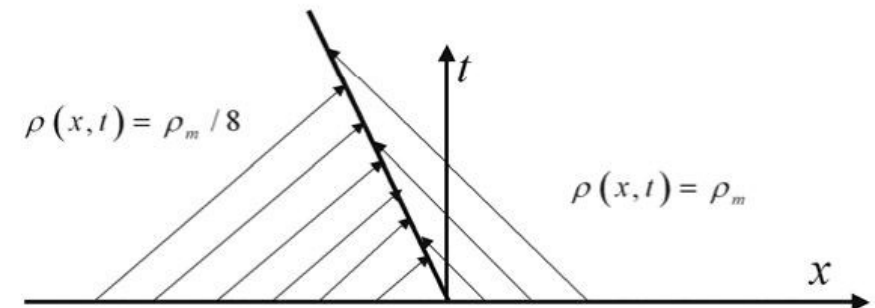
Onda di rarefazione:

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_m & x \leq -v_m t \\ \frac{\rho_m}{2} \left( 1 - \frac{x}{v_m t} \right) & -v_m t < x < v_m t \\ 0 & x \geq v_m t \end{cases}$$



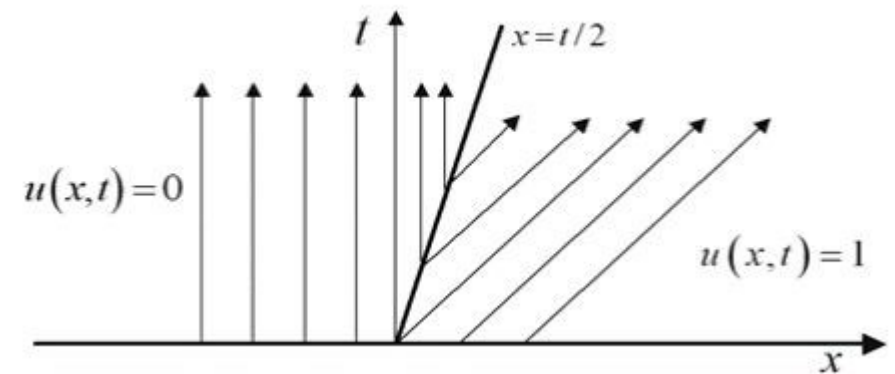
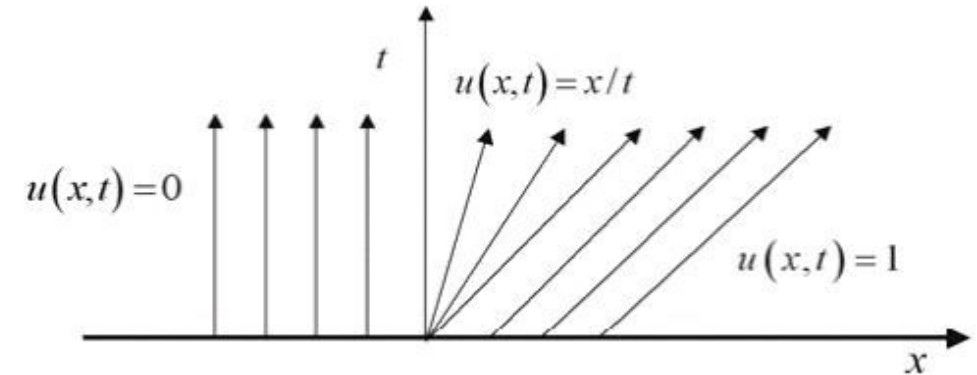
La linea d'urto:  $\dot{s} = \frac{q(\rho^+) - q(\rho^-)}{\rho^+ - \rho^-}$

Onda d'urto:  $x = \dot{s}(t)t + s(0)$ .



**Soluzione integrale:** una funzione  $u$  limitata si dice soluzione integrale del problema se  $\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} [uv_t + q(u)v_x] dx dt + \int_{\mathbb{R}} g(x)v(x, 0)dx = 0$  vale per ogni funzione test  $v$  a supporto compatto. .

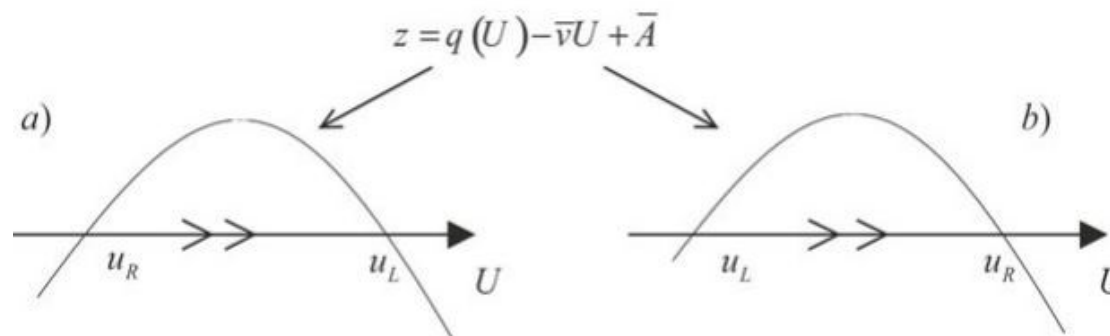
**Condizione d'entropia:** esiste  $E > 0$  tale che, per ogni  $x, z \in \mathbb{R}, z > 0, t > 0$ :  $u(x + z, t) - u(x, t) \leq \frac{E}{t} z$



**Problema di Riemann:** sia  $q$  strettamente convessa e di classe  $C^2(\mathbb{R})$ , con  $q'' \geq h > 0$ :

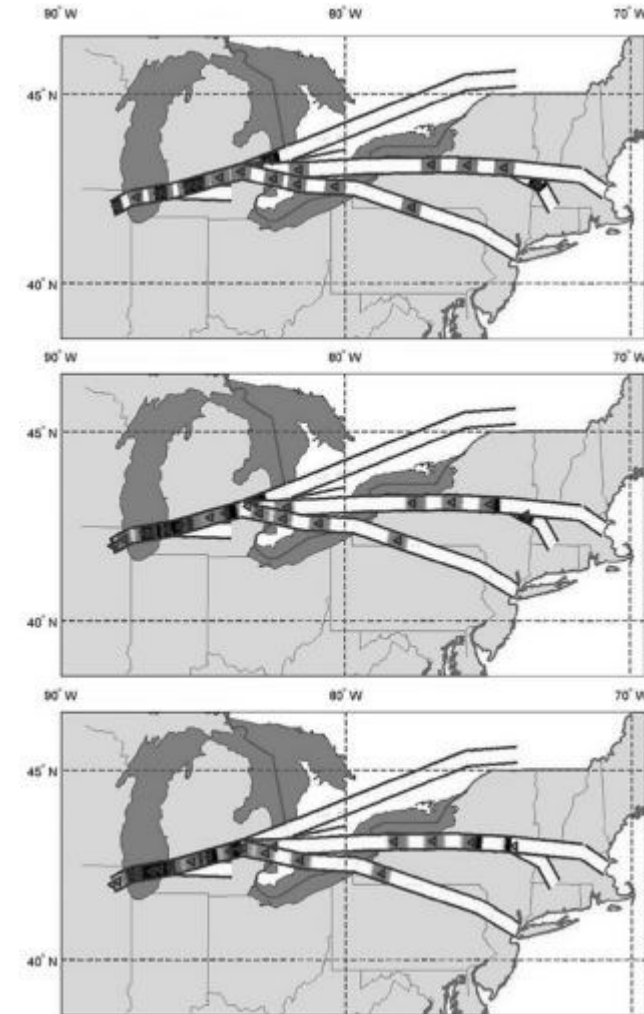
- a) Se  $u^+ < u^-$ , l'unica soluzione integrale entropica è l'onda d'urto:  $u(x, t) = \begin{cases} u^+ & x > s(t) \\ u^- & x < s(t) \end{cases}$
- b) Se  $u^+ > u^-$ , la soluzione integrale che soddisfa la condizione di entropia è l'onda di rarefazione:

$$u(t) = \begin{cases} u^- & \frac{x}{t} < q'(u^-) \\ r\left(\frac{x}{t}\right) & q'(u^-) < \frac{x}{t} < q'(u^+) \\ u^+ & \frac{x}{t} > q'(u^+) \end{cases}$$



Modello euleriano invece di un modello lagrangiano.

- Scala bene con l'aumentare del numero di velivoli.
- Adattabile a specifiche classi di controllo.
- Può essere implementato al traffico autostradale



$$n(x, t) = \int_0^x \rho(u, t) du$$

La PDE: 
$$\begin{cases} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho(x, t) \cdot v(x)) = 0 \\ \rho(0, t) v(0) = q^{in}(t) \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x) \end{cases}$$

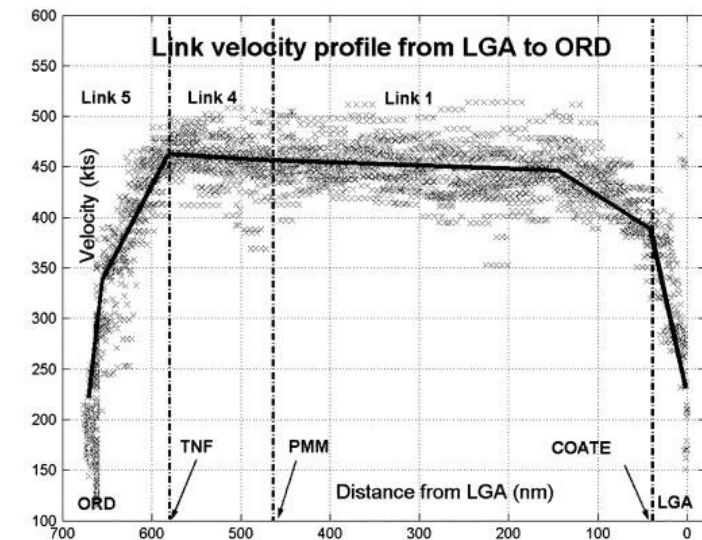
$$r(x, t) = \frac{[n(K^{-1}(K(x) + t_{ref}), t) - n(K^{-1}(K(x) - t_{ref}), t)]}{2t_{ref}v(x)},$$

Si utilizza lo schema Jameson-Schmidt-Turkel per il suo termine antidiffusivo: comprende gli shock e, quando la PDE ha una soluzione entropica, vi converge. Inoltre può essere usato sia per il problema diretto che aggiunto.

Sfruttando i dati ETMS, si avranno informazioni di volo ogni tre minuti.

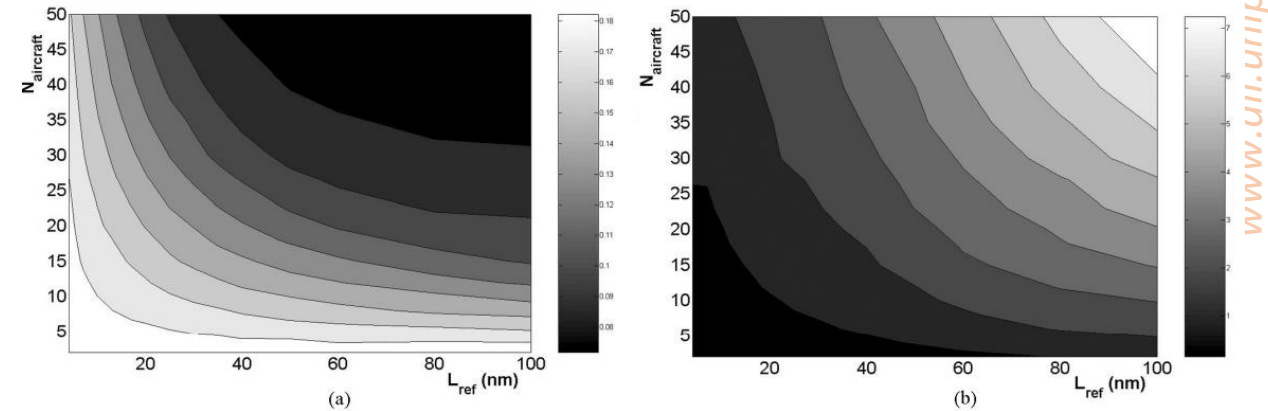
- La densità iniziale di aerei  $\rho_i^0(x_i) = \sum_{a \text{ in link } i} \frac{\chi_{[x_i^a - L_{ref}, x_i^a + L_{ref}]}(x_i)}{2L_{ref}}$  e  

$$r_i^0(x_i) = \sum_{a \text{ in link } i} \frac{\chi_{[x_i^a - t_{ref}v_i(x_i^a), x_i^a + t_{ref}v_i(x_i^a)]}(x_i)}{2t_{ref}v_i(x_i^a)}.$$
- Il flusso in entrata  $q^{in}(t)$ .





Le regioni in basso a sinistra e in alto a destra sono da evitare per i loro valori irrealistici.



- errore relativo di densità: 
$$\frac{\sum_{i=1,4,5} \int_0^{L_i} |\rho_i(x_i, t_0 + \Delta T) - \tilde{\rho}_i(x_i, t_0 + \Delta T)| dx_i}{\sum_{i=1,4,5} \int_0^{L_i} \rho_i(x_i, t_0 + \Delta T) dx_i}$$

- errore assoluto nel conteggio degli aerei:

$$\sum_{i=1,4,5} \sum_{\text{sottolink di } i} \left| \int_0^{L_i} \rho_i(x_i, t_0 + \Delta T) dx_i - \#(a | a \in \text{link } i) \right|$$

**La funzione col costo aumentato:**  $H(v, \beta, \rho) :=$

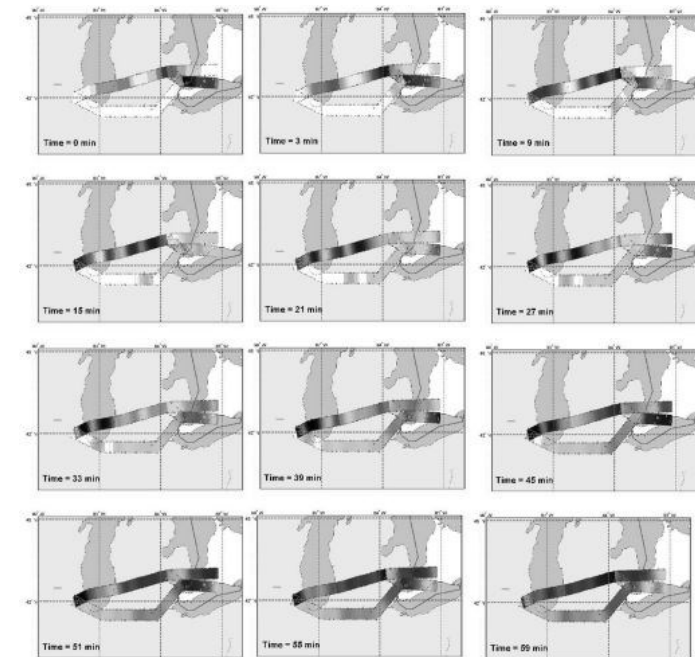
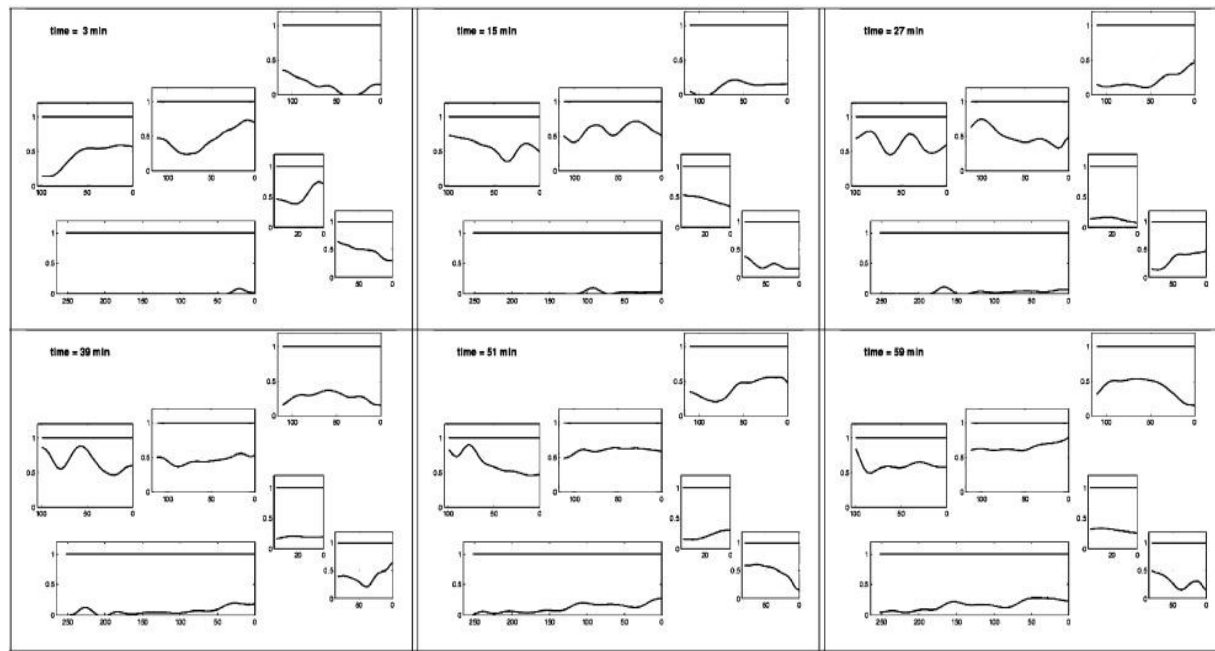
$$- \sum_{i:i \in F} \int_0^T \rho_i(L_i, t) v_i(L_i, t) dt - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_0^{L_i} \log((\rho_{max} - \rho_i(x_i, t)) (v_{max,i} - v_i(x_i, t)) (v_i(x_i, t) - v_{min,i})) dx_i dt - \frac{1}{M} \sum_{i \in D} \int_0^T \log(\beta_i(t)(1 - \beta_i(t))) dt$$

$$J: v, \beta \rightarrow J(v, \beta) = H(v, \beta, \rho).$$

$$J' = \sum_{i=1}^N < \bar{\rho}_i \frac{\partial \rho_i^*}{\partial x_i} + \frac{1}{M} \left( \frac{1}{v_{max,i} - \bar{v}_i} - \frac{1}{\bar{v}_i - v_{min,i}} \right) |v_i' >_i + \sum_{i \in D} < \rho_i(L_i) v_i(L_i) (\rho_{il}^*(0) - \rho_{ir}^*(0) + \frac{1}{M} \left( \frac{1}{1 - \bar{\beta}_i} - \frac{1}{\bar{\beta}_i} \right) |\beta_i' >_{[0,T]}$$

Tre diversi tipi di scenari:

- Traffico normale.
- Traffico intenso.
- Rete congestionata.



Situazioni con il link 6 disponibile.

La simulazione sul modello reale dimostra  
l'efficienza del metodo.

Metodi obsoleti in uso oggi.

Fornire dati in tempo reale.

