Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Osservazioni su un modello di alimentazione razionale e suoi possibili sviluppi

Relatore:
Prof. Bruno Viscolani

Laureando: Giacomo Zanini
Matricola: 1201763

Anno Accademico 2022/2023

21 Luglio 2023

Osservazioni su un modello di alimentazione razionale e suoi possibili sviluppi

Giacomo Zanini

Maggio 2023

1 Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è quello di descrivere il modello di Levy (2002) e i suoi successivi sviluppi apportati da Dragone (2009) e da Dragone e Caputo (2021). Si vogliono evidenziare alcune problematiche riscontrate nell'analisi del modello e successivamente presentarne una situazione semplificata che permetta di analizzarne economicamente i risultati.

In particolare Levy considera un mondo stilizzato, in cui non sono presenti problemi psicologici, fisiologici e ambientali e in cui non esistono abitudini alimentari. In questa situazione ideale, considera un agente razionale il cui unico obiettivo è quello di sopravvivere il più a lungo possibile e al tempo stesso di essere "appagato" dal consumo di cibo. Questo significa che sarà presente una funzione in grado di dare un valore matematico alla soddisfazione derivante dal consumo di cibo e una funzione di probabilità che indicherà la probabilità di vivere fino al tempo t.

Gli strumenti utilizzati per l'analisi di tali modelli derivano principalmente da "Buratto, Grosset e Viscolani (2021) *Ottimizzazione Dinamica, modelli economici e gestionali*" e in particolare viene applicato il principio del massimo di Pontryagin per analizzare i problemi di controllo ottimo. Successivamente per studiare l'andamento delle funzioni vengono utilizzati i concetti base di derivata e integrale derivanti dal corso di Analisi 1 e il metodo di risoluzione di equazioni differenziali derivante dal corso di Analisi 2. Vengono poi infine accennati termini relativi agli stati stazionari dei problemi di ottimizzazione, derivanti dal corso di Fisica Matematica.

Dopo aver analizzato criticamente il modello di Levy e i modelli di Dragone e Caputo, utilizzando le stesse notazioni e partendo dagli stessi dati, verrà introdotto e approfondito un modello in cui si ipotizza il consumo di cibo costante con l'obiettivo di ottenere dei risultati più ampi, seppur partendo da un modello più semplificato.

2 Modello di Levy

2.1 Introduzione al modello

In un mondo stilizzato, in cui non ci sono problemi psicologici, fisiologici e ambientali e dove non ci sono pressioni sociali e culturali, si osserva che il sovrappeso, il sottopeso e abitudini cicliche relative al consumo di cibo possono essere causate da un'alimentazione razionale.

Come anticipato, si considera il caso in cui non sono presenti abitudini alimentari. Tutti i possibili risultati che si otterranno deriveranno da tre assunzioni fondamentali:

- il benessere dell'individuo dipende dal consumo di cibo (deriva quindi dalla soddisfazione che si ottiene dal consumo di un pasto);

- per ogni individuo esiste un peso ottimo fisiologico e maggiore è la distanza di quest'ultimo dal peso dell'individuo e maggiore è la probabilità di morire (il rischio considerato in questo modello è rappresentato quindi dalle condizioni di sottopeso o sovrappeso, le quali possono causare maggiori complicazioni rispetto ad un peso ottimo fisiologico);

- l'agente razionale decide la propria strategia di consumo di cibo col fine di massimizzare l'attesa dell'utilità lungo tutta la sua vita.

2.2 Problema di controllo ottimo

È necessario quindi definire un agente razionale come un individuo in grado di riconoscere il "trade-off" tra la soddisfazione derivante dal consumo di cibo e il rischio di possibili problematiche che si hanno essendo sovrappeso o sottopeso. Una volta riconosciuto tale trade-off, l'agente è capace di scegliere il percorso del consumo di cibo in grado di massimizzare l'utilità. In particolare, un agente razionale è in grado di prendere decisioni riguardo alla propria alimentazione, evitando di cadere in dipendenze e abitudini alimentari negative. Questo tipo di comportamento alimentare quindi si concentra sulla scelta di alimenti sani ed equilibrati.

Si definisce poi la funzione di utilità: la funzione di utilità istantanea $U(c)$, dipendente dal consumo di cibo c, è una funzione "di preferenza", ovvero che serve a definire una relazione d'ordine tra elementi di uno stesso insieme. In particolare $U : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e vale:

$$c_1 \text{ è preferibile a } c_2 \quad \Longleftrightarrow \quad U(c_1) \geq U(c_2)$$

Si suppone che tale funzione U sia di classe C^2 con $U'(c) > 0$ e $U''(c) < 0$.

Questo significa che all'aumentare del consumo di cibo, cresce la funzione di utilità poiché cresce il "benessere" dell'individuo. È necessario però che la funzione sia concava in quanto: più cibo viene consumato, più diminuisce l'aumento di soddisfazione che ne si ottiene, poichè essendo sempre più vicini alla sazietà, ci si sente sempre meno appagati.

È importante introdurre inoltre la probabilità di morire p che aumenta come la deviazione quadratica del peso $W(t)$ dal peso ottimo fisiologico W^* e il fattore di attualizzazione ρ con la conseguente funzione di attualizzazione $e^{-\rho t}$. Il fattore di attualizzazione in questo caso rappresenta l'impazienza: maggiore è ρ e più $e^{-\rho t}U(c)$ diminuisce nel tempo. Tale fattore viene utilizzato per indicare che più è alto il tasso di impazienza, più rapidamente l'agente razionale desidera consumare cibo.

Senza perdita di generalità, per semplicità di calcoli, da questo momento in poi verrà considerato il problema di controllo ottimo in orizzonte infinito.

Poiché l'aspettativa di vita è casuale, i consumatori che massimizzano il valore atteso dell'utilità complessiva, vorranno massimizzare l'integrale della loro utilità accumulata fino al tempo t $\int_0^t e^{-\rho\tau}U(c(\tau))\,d\tau$ rispetto alla distribuzione di probabilità del tempo t di morte (che ha densità $p((W(t)-W^*)^2)$, dove $p:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ è integrabile e vale $\int_0^{+\infty} p(x)\,dx = 1$).

Tale formula ci dà quindi il funzionale obiettivo:

$$\int_0^{+\infty} p((W(t)-W^*)^2)\left\{\int_0^t e^{-\rho\tau}U(c(\tau))\,d\tau\right\}dt \tag{2.2.1}$$

Integrando per parti, seguendo l'appendice A del'articolo di Levy, tale funzionale obiettivo viene riscritto così:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\rho t}U(c(t))\phi((W(t)-W^*)^2)\,dt \tag{2.2.2}$$

dove $\phi(x)=1-F(x)$, con $F(x)$ funzione di ripartizione associata alla probabilità p (ovvero $F(x)=\int_0^x p(t)\,dt$) e che rappresenta quindi la probabilità di vivere fino al tempo t. $\phi(t)$ quindi rappresenta la probabilità di vivere oltre t. ϕ è stato introdotto per rappresentare il rischio dovuto all'essere distanti dal peso ottimo fisiologico e l'incertezza della durata della vita.

Direttamente dalla sua definizione, si deduce che ϕ è decrescente e viene assunta poi concava in $(W-W^*)^2$.

Poiché, in questo modello stilizzato, il peso è ottenuto dal consumo di cibo e perso dalla combustione di calorie, allora si arriva ad ipotizzare la seguente "equazione del moto":

$$\dot{W}(t) = c(t) - \delta W(t) \tag{2.2.3}$$

dove δ è uno scalare positivo che indica il tasso con cui un individuo perde peso come funzione del peso corrente. δ quindi rappresenta sostanzialmente il metabolismo basale dell'individuo. Più è alto δ, più è veloce il metabolismo basale della persona e quindi più calorie brucia a parità di tempo (senza quindi considerare attività fisica e supponendo il soggetto a riposo).

Ricordando quindi tutte le ipotesi espresse fino a questo momento, si è in grado di esplpicitare il problema di controllo ottimo:

$$\begin{aligned}
\max \quad & J(c) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t}U(c(t))\,\phi((W(t)-W^*)^2)\,dt \\
\text{s.t.} \quad & \dot{W}(t) = c(t) - \delta W(t), \\
& W(0) = W_0, \\
& c(t) \geq 0
\end{aligned}$$

Dopo aver dichiarato il problema di controllo ottimo, Levy si interessa alle condizioni necessarie per l'ottimo.

2.3 Condizioni necessarie per l'ottimo

Per analizzare le soluzioni ottime del modello, si utilizza il principio del massimo di Pontryagin in orizzonte infinito:

Sia $\overline{c}(t)$ un controllo continuo a tratti, definito su $[0, +\infty)$, a cui sia associata la funzione di stato $\overline{W}(t)$, e sia $(\overline{c}(t), \overline{W}(t))$ una soluzione ottima nel senso del criterio catching up, o di quello overtaking:

allora esistono una costante $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e una funzione di classe C^1 a tratti e continua $\lambda(t)$ $(\lambda : [0, +\infty) \to \mathbb{R})$ tali che, per ogni $t \in [0, +\infty)$, valgano le seguenti condizioni:

i) $(\lambda_0, \lambda(t)) \neq 0 \in \mathbb{R}^2$;

ii) $\overline{c}(t)$ massimizza $H(\overline{W}(t), c, \lambda(t), t), \ \ c \geq 0$;

iii) tranne che per i tempi t in cui $\overline{c}(t)$ è discontinua, $\lambda(t)$ è differenziabile e $\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H(\overline{W}(t), \overline{c}(t), \lambda(t), t)}{\partial W}$;

iv) $\lambda_0 \in \{0, 1\}$.

La funzione Hamiltoniana è data da:

$$H(W, c, \lambda, t) = \lambda_0 e^{-\rho t} U(c) \, \phi((W - W^*)^2) + \lambda[c - \delta W] \tag{2.3.1}$$

dove λ è la variabile aggiunta che indica il "valore" o "prezzo ombra" del peso in unità di utilità. Questa funzione lambda deriva appunto dal principio del massimo di Pontryagin e rappresenta la proporzionalità che c'è tra il ricavo marginale che ottengo "investendo" su c o su W e il "costo" relativo a quel fattore (in sintesi: più l'agente razionale "investe" su c e più è soddisfatto, mentre più "investe" su W e più diminuisce la probabilità di morire).

Dal secondo punto, derivando quindi l'Hamiltoniana rispetto a c e ponendola uguale a 0, si ottiene la cosiddetta "condizione di massimo":

$$\lambda(t) = -\lambda_0 e^{-\rho t} U'(\overline{c}(t)) \, \phi((\overline{W}(t) - W^*)^2) \tag{2.3.2}$$

dove $U'(\overline{c}(t))$ sta per $U'(c(t))_{|c(t)=\overline{c}(t)}$.

Ciò significa che, lungo le traiettorie ottimali di consumo di cibo e peso, il valore ombra è il corrispettivo negativo dell'utilità marginale derivante dal consumo di cibo, scontata dal tasso di impazienza e aggravata dalla prospettiva di vita dell'individuo.

Dal i), ii) e iv) si ottiene che $\lambda_0 = 1$.

iii) invece descrive l'evoluzione del valore ombra del peso lungo la traiettoria ottimale:

$$\dot{\lambda}(t) = -e^{-\rho t} U(\overline{c}(t))\, \phi_W((\overline{W}(t) - W^*)^2) + \delta\lambda(t) \tag{2.3.3}$$

dove $\phi_W((\overline{W}(t) - W^*)^2)$ significa $\left[2 \frac{\partial\phi((W(t)-W^*)^2)}{\partial(W(t)-W^*)^2} (W(t) - W^*)\right]_{|W(t)=\overline{W}(t)}$.

Tale equazione si chiama "equazione aggiunta".

Dividendo entrambi i membri dell'equazione aggiunta per λ si ottiene che:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \delta - \frac{\frac{\phi_W((\overline{W}-W^*)^2)}{\phi((\overline{W}-W^*)^2)}}{\frac{U_c(\overline{c})}{U(\overline{c})}} = \delta - \frac{E_\phi}{E_U}\frac{c}{W} \tag{2.3.4}$$

ovvero che il tasso di cambiamento del valore ombra lungo le traiettorie ottimali è uguale alla differenza tra la costante di combustione delle calorie (δ) e il prodotto del rapporto tra le elasticità di sopravvivenza e utilità e il rapporto tra consumo e peso, dove le elasticità di sopravvivenza e di utilità sono definite nel modo seguente:

$$E^\phi((\overline{W} - W^*)^2) := \phi_W((\overline{W} - W^*)^2) \frac{W}{\phi((\overline{W} - W^*)^2)} \tag{2.3.5}$$

$$E^U(\overline{c}) := U'(\overline{c}) \frac{c}{U(\overline{c})} \tag{2.3.6}$$

Differenziando la condizione di massimo (2.3.2) rispetto al tempo, utilizzando l'equazione aggiunta (2.3.3) e poi utilizzando nuovamente la condizione di massimo, si ottiene che le traiettorie ottimali del consumo di cibo e del peso seguono tale equazione:

$$\frac{U''}{U'}\dot{c} + \frac{\phi_W}{\phi}\dot{W} - \frac{U}{U'}\frac{\phi_W}{\phi} = \rho + \delta \tag{2.3.7}$$

definita da Levy: "regola di non arbitraggio".

Da questa equazione, riarrangiando i termini, si ottiene che:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{R}\left\{ \frac{E^\phi}{E^U}\frac{c}{W} - \left[(\rho + \delta) + E^\phi \frac{\dot{W}}{W}\right]\right\} \tag{2.3.8}$$

dove $R := -\frac{U''}{U'}$.

Tale equazione ci dice che, lungo le traiettorie ottimali, il tasso di cambiamento del consumo di cibo dipende dal grado di avversione al rischio del singolo individuo R. Questo tasso di cambiamento del consumo di cibo è positivo (risp. negativo) se il rapporto tra le elasticità di sopravvivenza e utilità e il rapporto tra consumo e peso è maggiore (risp. minore) della somma dei tassi di impazienza e di decadimento del peso e dell'elasticità di sopravvivenza (amplificata dal tasso di cambiamento del peso).

2.4 Lo stato stazionario

Imponendo le derivate del peso e del consumo di cibo uguali a 0, dalla regola di non arbitraggio (2.3.7) si ottiene che i livelli stazionari del consumo di cibo (c_{ss}) e del peso (W_{ss}) ottimi razionali soddisfano a tale equazione:

$$-\frac{U(c_{ss})}{U'(c_{ss})}\frac{\phi_W(W_{ss})}{\phi(W_{ss})} = \rho + \delta \tag{2.4.1}$$

Utilizzando poi le definizioni di "elasticità di utilità" (2.3.6) e "elasticità di sopravvivenza" (2.3.5) si arriva alla seguente equazione:

$$\frac{c_{ss}}{W_{ss}} = (\rho + \delta)\frac{E^U(c_{ss})}{E^\phi(W_{ss})}$$

il che significa che in uno stato stazionario razionale ottimo, il rapporto tra il consumo di cibo e il peso è uguale alla somma del tasso di impazienza e di decadimento del peso moltiplicati per il rapporto tra le elasticità di utilità e sopravvivenza.

Si assuma ora che la probabilità di sopravvivere oltre t sia data da:

$$\phi = \phi_0 e^{-\mu(W-W^*)^2} \tag{2.4.2}$$

dove μ è uno scalare positivo e invece ϕ_0 rappresenta un limite superiore della probabilità di sopravvivere oltre il tempo t. Indica quindi la prospettiva di sopravvivenza di una persona che ha il peso ottimo fisiologico costante. Più il peso dell'individuo si distacca dal peso ottimo fisiologico, più la prospettiva di sopravvivenza dell'individuo diminuisce proporzionalmente a μ.

Si assuma inoltre che la soddisfazione istantanea derivante dal consumo di cibo sia data da:

$$U(c) = c^\beta \tag{2.4.3}$$

dove $0 < \beta < 1$ rappresenta l'elasticità dell'utilità.

Questo fattore β modifica l'andamento della funzione di utilità. Infatti:

$$U'(c) = \beta c^{\beta-1} \qquad U''(c) = (\beta-1)\beta c^{\beta-2}$$

significa che all'aumentare di β, ottengo una maggiore soddisfazione dalla consumazione di cibo e un tasso di crescita lentamente decrescente, mentre al contrario, al diminuire di β, la soddisfazione derivante dal consumo di cibo diminuisce e invece il tasso di crescita decresce sempre più rapidamente.

Utilizzando l'equazione (2.4.1) e sostituendo (2.4.2) e (2.4.3), si ottiene, riarrangiando i termini:

$$c_{ss}(W_{ss} - W^*) = \frac{(\rho+\delta)\beta}{2\mu} \tag{2.4.4}$$

Ricordando in oltre l'equazione del moto (2.2.3), poichè Levy sta studiando gli stati stazionari che hanno quindi derivata 0, si ha che vale:

$$c_{ss} = \delta W_{ss} \tag{2.4.5}$$

Combinando ora (2.4.4) e (2.4.5), si ottiene la seguente equazione di secondo grado in W_{ss}:

$$W_{ss}^2 - W^* W_{ss} - \frac{(\rho+\delta)\beta}{2\delta\mu} = 0 \tag{2.4.6}$$

e poichè il peso è necessariamente positivo, ha come unica soluzione ammissibile:

$$W_{ss} = \frac{1}{2}W^* + \frac{1}{2}\sqrt{W^{*2} + \frac{2\beta(\rho+\delta)}{\delta\mu}} \tag{2.4.7}$$

Da questa soluzione, si evince che il peso ottimo razionale stazionario è maggiore del peso ottimo fisiologico. Indica inoltre che il livello stazionario ottimo razionale di sovrappeso cresce al crescere dell'elasticità di utilità β e del tasso di impazienza ρ. Questo significa che ad un maggior valore di β corrisponde un livello maggiore di soddisfazione dal consumo di cibo mentre ad un maggior valore di ρ corrisponde un declino della soddisfazione relativa al futuro consumo di cibo e corrisponde inoltre una diminuzione delle preoccupazioni relative al rischio associato alla futura divergenza dal peso ottimo fisiologico.

Come si può intuire, l'equazione indica che il livello stazionario ottimo di sovrappeso diminuisce proporzionalmente al tasso di combustione delle calorie δ e proporzionalmente al tasso μ di declino della probabilità di vivere oltre il tempo t.

2.5 Problematiche riscontrate nel modello e commenti

Da qui, Levy individua un sistema dinamico costituito da due equazioni differenziali che descrivono l'andamento del peso e del consumo di cibo dell'agente razionale, ricavate dall'equazione del moto (2.2.3), dalla regola di non arbitraggio (2.3.7) e dalle assunzioni fatte sulla probabilità di sopravvivere (2.4.2) e sulla funzione di utilità (2.4.3), ovvero:

$$\begin{cases} \dot{W} = c - \delta W \\ \dot{c} = \left(\frac{(\rho+\delta)+(2\mu c)\frac{(\beta-1)}{\beta}(W-W^*)-(2\mu\delta W)(W-W^*)}{(\beta-1)}\right)c \end{cases} \tag{2.5.1}$$

Analizzando queste equazioni differenziali e i risultati ottenuti con metodi di risoluzione differenti da quello di Levy, si riscontrano delle differenze sostanziali dall'articolo preso in esame fino ad ora.

Infatti, procedendo come scrive Levy, si ottiene che la curva stazionaria $\dot{c} = 0$ è data da:

$$(\rho+\delta) + (2\mu c)\frac{(\beta-1)}{\beta}(W - W^*) - (2\mu\delta W)(W - W^*) = 0 \tag{2.5.2}$$

Derivando totalmente l'equazione (2.5.2), si ottiene che l'andamento della curva stazionaria è:

$$\frac{dc}{dW}_{|\dot{c}=0} = -\left[\frac{\delta\beta}{1-\beta} + \frac{c + \delta W\frac{\beta}{1-\beta}}{W - W^*}\right] \tag{2.5.3}$$

Già nel calcolo di questa derivata totale, si può notare come nell'articolo di Levy venga omesso un fattore W, importante per il calcolo della pendenza della curva stazionaria.

L'andamento della curva stazionaria $\dot{c} = 0$ è quindi negativo per $\tilde{W} < W < W^*$ e positivo per $W < \tilde{W}$ e $W^* < W$, dove:

$$\tilde{W} := \frac{W^*}{2} - \frac{c(1-\beta)}{2\delta\beta} \tag{2.5.4}$$

da cui si deduce che $\tilde{W} < \frac{W^*}{2}$.

Invece, differentemente dal procedimento di Levy, partendo dall'equazione differenziale su c e ponendo la derivata temporale uguale a 0, studio l'andamento della funzione c, ovvero di:

$$c(W) = -\beta \frac{(\delta W)(W - W^*) - \frac{(\rho+\delta)}{2\mu}}{(1-\beta)(W - W^*)} \tag{2.5.6}$$

Ponendola $= 0$, trovo che:

$$c(W) = 0 \iff W = \frac{2\mu\delta W^* + \sqrt{4\mu^2\delta^2(W^*)^2 + 8\mu\delta\rho + 8\mu\delta^2}}{4\mu\delta} =: W^{\#}$$

Disegnando il grafico della pendenza della funzione $c(W)$ derivante dai due diversi approcci, ci si rende conto che i due diversi studi del segno sono compatibili solo quando $W^* < W < W^{\#}$, vanificando quindi tutto lo studio presentato successivamente da Levy riguardante le traiettorie ottimali stazionarie.

Questo problema è probabilmente dovuto ad un'imprecisione nell'appendice A dell'articolo di Levy in cui si spiega come passare da (2.2.1) a (2.2.2):

nell'appendice infatti, Levy introduce la funzione di ripartizione $F(t)$ della variabile aleatoria "tempo di morte" e scrive $p = F'(t)$ intendendo probabilmente:

$$p((W(t) - W^*)^2) = F'(t)$$

Questo è irrilevante nella correttezza dell'appendice A, a patto di leggere:

$$dv = e^{-\rho t} U(c(t)) dt$$

al posto della (A.11).

Quindi Levy arriva a dimostrare che:

$$\int_0^T F'(t) \left\{ \int_0^t e^{-\rho\tau} U(c(\tau))\, d\tau \right\} dt = \int_0^T e^{-\rho t} U(c(t)) \phi(t)\, dt$$

dove $\phi(t) = 1 - F(t)$.

Una volta mostrata questa uguaglianza però, Levy decide di proseguire utilizzando un'uguaglianza differente da quella dimostrata precedentemente:

$$\int_0^T p((W(t) - W^*)^2) \left\{ \int_0^t e^{-\rho\tau} U(c(\tau))\, d\tau \right\} dt =$$
$$= \int_0^T e^{-\rho t} U(c(t)) \phi((W(t) - W^*)^2)\, dt$$

nella quale cambia l'argomento di ϕ, risultando quindi errata o perlomeno non dimostrata rigorosamente.

3 Sviluppi di Dragone e Caputo

3.1 Modello di Dragone

Dragone prende come base il modello di Levy e lo amplia considerando la possibilità che gli individui razionali abbiano delle abitudini nel consumo di cibo.

Allo stesso modo dell'articolo di Levy quindi, consumare il cibo aumenta l'utilità e le calorie necessarie per l'attività metabolica del corpo. Per ogni individuo inoltre esiste un peso ottimo fisiologico e maggiore è la distanza di quest'ultimo dal peso dell'individuo e maggiore è la probabilità di morire (il rischio considerato in questo modello, come in quello di Levy rimane rappresentato dalle condizioni di sottopeso o sovrappeso, le quali possono causare maggiori complicazioni rispetto ad un peso ottimo fisiologico).

La novità assunta da questo modello è che il cambiamento di consumo di cibo è ritenuto faticoso per l'individuo e quindi viene introdotto un parametro che esprime proprio questa "rigidità" dell'individuo a cambiare quantità di cibo consumata periodicamente.

In caso di una rigidità molto bassa infatti sarà necessaria una convergenza molto lenta e piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio stazionario.

3.2 Analisi del problema di controllo ottimo

Dragone decide quindi di introdurre il parametro $a \geq 0$, il quale indica appunto la "rigidità" dell'individuo relativa al cambiamento di consumo di cibo. In particolare, $a = 0$ rientra nel caso del modello di Levy, in cui non è presente un comportamento abitudinario.

Viene così ridefinita la funzione di utilità:

$$V(c(t), \dot{c}(t)) := U(c(t)) - a\frac{\dot{c}(t)^2}{2} \tag{3.3.1}$$

Riutilizzando l'equazione del moto (2.2.3) e supponendo di essere in orizzonte infinito, Dragone ottiene il seguente problema di controllo ottimo:

$$\begin{aligned}
\max \quad & J(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t}(U(c(t)) - a\frac{x(t)^2}{2})\,\phi((W(t) - W^*)^2)\,dt \\
\text{s.t.} \quad & \dot{W}(t) = c(t) - \delta W(t), \\
& \dot{c}(t) = x(t), \\
& W(0) = W_0, \quad c(0) = c_0, \\
& c(t) \geq 0, \\
& W(t) > 0
\end{aligned}$$

dove quindi x è la nuova variabile di controllo che indica il tasso di cambiamento di cibo.

L'Hamiltoniana a valore corrente relativo al problema di controllo ottimo viene esplicitata come segue:

$$H(W, c, x, \lambda, t) = \lambda_0(U(c) - a\frac{x}{2})\phi((W - W^*)^2) + \lambda[c - \delta W] + \mu x \tag{3.3.2}$$

Utilizzando il principio del massimo di Pontryagin si ottengono infine le equazioni differenziali che rappresentano le traiettorie delle soluzioni ottime:

$$\begin{cases} \dot{W} = c - \delta W \\ \dot{c} = \frac{\mu}{a\phi} \\ \dot{\lambda} = (\rho + \delta)\lambda - (U - \frac{\mu^2}{2a\phi^2})\phi_c \\ \dot{\mu} = \rho\mu - \lambda - U_c\phi \end{cases} \tag{3.3.3}$$

Partendo da queste, Dragone studia gli stati stazionari ponendo quindi le derivate temporali pari a 0.

Ciò che arriva a sostenere Dragone è che lo stato stazionario implica una condizione di sovrappeso per ogni a, quindi indipendentemente dall'indice di rigidità dell'agente razionale considerato.

Di più, Dragone arriva alla conclusione che esistono due valori di biforcazione a_1, a_2, con $0 < a_1 < a_2$, tali che:

1. Se $a \in [0, a_1]$ o $a \in [a_2, +\infty)$, allora lo stato stazionario è una sella e la traiettorie ottimali del consumo di cibo e del peso sono monotone;

2. Se $a \in (a_1, a_2)$, allora lo stato stazionario è un fuoco stabile e la traiettorie ottimali del consumo di cibo e del peso presentano delle piccole oscillazioni.

3.3 Modello di Dragone e Caputo

Dragone e Caputo ripartono dalle analisi fatte nell'articolo di Levy e nell'articolo di Dragone e si soffermano sul fatto che tutte le conclusioni dedotte fino a quel momento derivino da ipotesi troppo stringenti sulla funzione di utilità.

Da questo deducono quindi che il risultato dell'articolo precedendemente sviluppato è parzialmente errato e che quindi lo stato stazionario non implica necessariamente una condizione di sovrappeso.

In particolare, spiegano come tutto il risultato ottenuto fino a quel momento derivi dall'assumere la funzione di utilità positiva. Infatti, ripartendo dalle equazioni differenziali che rappresentano le traiettorie delle soluzioni ottime (3.3.3) di Dragone e supponendo la concavità della funzione Hamiltoniana H, Dragone e Caputo ottengono tre disuguaglianze cardine del loro articolo:

$$\begin{aligned} \phi_W((W^{ss} - W^*)^2)U(c^{ss}) &\leq 0 \\ \phi_{WW}((W^{ss} - W^*)^2)U(c^{ss}) &\leq 0 \\ (W^{ss} - W^*)U(c^{ss}) &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

dove $\phi_W((\overline{W} - W^*)^2)$ significa $\left[2\frac{\partial\phi((W-W^*)^2)}{\partial(W-W^*)^2}(W - W^*)\right]_{|W=\overline{W}}$.

Questo dovrebbe quindi spiegare che supponendo la funzione di utilità positiva (in particolare $U(c) = c^\beta$), si ottiene necessariamente che $W^{ss} \geq W^*$ e che quindi il peso stazionario è maggiore del peso ottimo fisiologico e cioè sovrappeso.

In conclusione, Dragone arriva a spiegare quindi come il peso stazionario non debba necessariamente essere sovrappeso ma che, dipendentemente dal segno della funzione utilità, possa essere anche sottopeso.

3.4 Problematiche riscontrate nei modelli e commenti

Come spiegano parzialmente Dragone e Caputo nel loro articolo, tutti i risultati ottenuti fino a questo momento, da Levy prima e da Dragone e Caputo poi, non possono dipendere dal segno della funzione di utilità.

Infatti la funzione di utilità è una funzione cosiddetta "di preferenza", in quanto serve a definire una relazione d'ordine tra elementi di uno stesso insieme. In particolare $U : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e vale:

$$c_1 \text{ è preferibile a } c_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad U(c_1) \geq U(c_2)$$

Per tale motivo non ha importanza il segno della funzione di utilità, ma piuttosto la sua andatura. Infatti è corretto imporre che U debba essere di classe C^2 con $U'(c) > 0$ e $U''(c) < 0$.

A questo punto quindi, il segno della funzione di utilità non esprime nessun significato e non ci sono restrizioni: la cosa importante è che definisca una relazione d'ordine.

Ciò che è stato scritto da Dragone e Caputo sulla funzione di utilità quindi è in parte contraddittorio: inizialmente nel loro articolo spiegano come sia errato basarsi su una funzione di utilità necessariamente positiva in quanto i risultati debbano essere corretti a prescindere dal segno di tale funzione; successivamente però, arrivano a spiegare come, a seconda del segno della funzione di utilità, si possa giungere ad una situazione stazionaria di sovrappeso o sottopeso.

Una volta analizzato questo, il problema derivante dalle tre disuguaglianze (3.3.1) dell'articolo in questione, può essere dovuto alla errata uguaglianza dell'integrale derivante sempre dall'appendice A di Levy, da un'errata definizione della funzione ϕ o dal supporre la funzione Hamiltoniana H concava. In particolare quest'ultima ipotesi potrebbe essere troppo "stringente" in quanto la concavità della funzione H dipende strettamente dal segno della funzione di utilità, oggetto cardine della discussione dell'articolo di Dragone e Caputo.

4 Modello essenziale con consumo costante

4.1 Obiettivi trattabili

Decidiamo quindi di cambiare alcuni dati del problema per riuscire ad ottenere un risultato che ci permetta di analizzare in modo più completo il modello.

Accertato che non si possa ottenere di più dal principio del massimo di Pontryagin, possiamo forse affrontare una formulazione più approssimata e semplificata in cui imponiamo che la funzione di controllo sia costante e analizzare conseguentemente il risultante problema di programmazione non lineare.

L'obiettivo rimane quindi quello di studiare la traiettoria del peso che massimizzi il funzionale obiettivo descritto successivamente, simile a quello di Levy ma con l'aggiunta di un parametro $\alpha > 0$, il quale indica di quanto diminuisce la funzione utilità in base alla distanza tra il peso al tempo t e il peso ottimo fisiologico, lasciando quindi che la funzione ϕ possa dipendere esplicitamente solo dal tempo t.

4.2 Problema di programmazione non lineare

Riconsideriamo lo stesso agente razionale in grado di riconoscere lo stesso "tradeoff" e quindi sempre capace di scegliere il percorso del consumo di cibo in grado di massimizzare l'utilità.

Supponiamo U di classe C^2 con $U'(c) > 0$ e $U''(c) < 0$.

Definiamo poi $W^{\#}$ come il peso ottimo fisiologico e, basandoci sull'appendice A dell'articolo di Levy, otteniamo questa uguaglianza:

$$\int_0^T F'(t) \left\{ \int_0^t e^{-\rho s}[U(c(s)) - \alpha(W(s) - W^{\#})^2]\, ds \right\} dt =$$
$$= \int_0^T e^{-\rho t}[U(c(t)) - \alpha(W(t) - W^{\#})^2](1 - F(t))\, dt \quad (4.2.1)$$

che vale in quanto la funzione ϕ non dipende più da $(W(t) - W^*)^2$ ma solo da t.

In questo caso allora l'uguaglianza dimostrata nell'appendice A da Levy è valida e possiamo quindi studiare il problema di controllo ottimo:

$$\begin{aligned}
\max \quad & J(c) = \int_0^T e^{-\rho t}[U(c) - \alpha(W(t,c) - W^{\#})^2](1 - F(t))\, dt \\
\text{s.t.} \quad & \dot{W}(t,c) = c - \delta W(t,c), \\
& W(0,c) = W_0, \;\; W_0 > 0, \\
& W(T,c) \geq \tilde{W}, \\
& c \in [0, \bar{c}]
\end{aligned}$$

dove:

t_0	tempo iniziale;
T	tempo finale, $T > 0$;
c	intensità di consumo/alimentazione al tempo t;
$W(t, c)$	peso dell'individuo al tempo t con politica di consumo c;
$W^{\#}$	peso ottimo fisiologico dell'individuo;
$\tilde{W}$	peso "soglia di pericolo", $0 < \tilde{W} < W^{\#}$;
ρ	intensità di attualizzazione, $\rho > 0$;
$F(t)$	funzione di ripartizione della variabile aleatoria (non negativa) "tempo di vita";
α	parametro, $\alpha > 0$.

Allora l'equazione del moto diventa:

$$\dot{W}(t) = c - \delta W(t) \tag{4.2.2}$$

4.3 Analisi del problema e risultati

Per la semplicità del modello preso in esame, siamo in grado di risolvere direttamente l'equazione differenziale (4.2.2):

$$W(t, c) = (W_0 - \frac{c}{\delta})e^{-\delta t} + \frac{c}{\delta} \tag{4.3.1}$$

Tale funzione $W(t, c)$ è asintotica a $\frac{c}{\delta}$ per t che tende a $+\infty$, dove c rappresenta il consumo di cibo costante e δ rappresenta il metabolismo basale dell'individuo. Più è alto δ, più è veloce il metabolismo basale della persona e quindi più calorie brucia a parità di tempo (considerando il soggetto a riposo). In questo caso, maggiore è δ, minore è il livello dell'asintoto orizzontale della funzione rappresentante il peso. Quindi in presenza di metabolismo sempre più veloce a smaltire le calorie, il peso dell'individuo tende ad un peso sempre minore.

Dallo studio di funzione e per come è definita la funzione $W(t, c)$, si ha che se $W_0 < \frac{c}{\delta}$, allora $W(t, c)$ è una funzione crescente mentre, al contrario, se $W_0 > \frac{c}{\delta}$ si ha che $W(t, c)$ è una funzione decrescente.

La presenza del termine $-\delta$ ad esponente di e, rappresenta il fatto che maggiore è δ e più rapidamente il peso si avvicina all'asintoto; d'altra parte, δ grande implica anche un minor livello dell'asintoto.

Il funzionale obiettivo diventa quindi:

$$J(c) = \int_0^T e^{-\rho t}[U(c) - \alpha((W_0 - \frac{c}{\delta})e^{-\delta t} + \frac{c}{\delta} - W^{\#})^2](1 - F(t))\, dt \tag{4.3.2}$$

dove c è la variabile decisionale, vincolata a tre disequazioni:

$c \geq 0$
$c \leq \bar{c}$
$W(T, c) \geq \tilde{W}$, cioè $(W_0 - \frac{c}{\delta})e^{-\delta T} + \frac{c}{\delta} \geq \tilde{W}$

Analizzo quindi le condizioni necessarie per l'ottimo utilizzando le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker:

Scrivo la lagrangiana ridotta del problema di controllo ottimo, dove al posto del massimo di $J(c)$ considero il minimo di $-J(c)$:

$$L(c,\mu,\rho) = -J(c) + \mu(c-\bar{c}) + \rho(\tilde{W} - W(T,c)) \tag{4.3.3}$$

e scrivo le condizioni di complementarità di Karush-Kuhn-Tucker:

$\frac{\partial L}{\partial c} = -\int_0^T e^{-\rho t}[U'(c) - 2\alpha(W(t,c) - W^{\#})\frac{\partial W(t,c)}{\partial c}](1-F(t))\,dt +$
$+\,\mu - \rho(-\frac{\partial W(T,c)}{\partial c}) \geq 0$
se $c > 0$, allora $\frac{\partial L}{\partial c} = 0$
$c \geq 0$
se $\frac{\partial L}{\partial c} > 0$, allora $c = 0$
$c - \bar{c} \leq 0$
se $\mu > 0$, allora $c - \bar{c} = 0$
$\mu \geq 0$
se $c - \bar{c} < 0$, allora $\mu = 0$
$\tilde{W} - W(T,c) \leq 0$
se $\rho > 0$, allora $\tilde{W} - W(T,c) = 0$
$\rho \geq 0$
se $\tilde{W} - W(T,c) < 0$, allora $\rho = 0$

Da queste condizioni nascono tre casi differenti con ipotesi necessarie per l'ottimo, tenendo conto che $U'(c)$ non è definita per $c = 0$:

i) $c = \bar{c}$ e $\tilde{W} < W(T,c)$ da $\rho = 0$: è necessario però che l'integrale presente nella prima disequazione sia positivo

ii) $c < \bar{c}$ e $\tilde{W} = W(T,c)$ da $\mu = 0$: è necessario però che l'integrale presente nella prima disequazione sia negativo

iii) $c < \bar{c}$ e $\tilde{W} < W(T,c)$ da $\mu = \rho = 0$: è necessario però che l'integrale presente nella prima disequazione sia nullo

Una volta quindi esplicitata la funzione $W(t,c)$, siamo in grado di calcolare il funzionale obiettivo, supponendo per semplicità $U(c) = c^{\beta}$, con $0 < \beta < 1$.

Una possibile scelta per F è quella di prendere il tempo di vita come variabile aleatoria esponenziale (per esempio di parametro $\mu > 0$): poichè tale funzione viene utilizzata per esprimere una "funzione di sopravvivenza", è necessario che F sia una funzione di ripartizione, ovvero tale che l'immagine di F appartenga a [0,1] in quanto, in generale, $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ con X variabile aleatoria.

Di più, affinchè sia una funzione di ripartizione valida, devo avere che

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$$

Considerando le precedenti motivazioni, abbiamo deciso di definire nel modo seguente la funzione di ripartizione: $F(t) := 1 - e^{-\mu t}$, con $\mu > 0$, definita per $t \geq 0$.

Sotto queste ipotesi, vogliamo studiare i diversi casi:

1. Nel caso i), è necessario che l'integrale $\frac{\partial J}{\partial c}$ sia maggiore di 0. Data la difficoltà dello studio del segno di tale integrale, per semplicità si considera il caso in cui $W(t,c) \leq W^{\#}$, $\forall t$, implicando quindi una situazione di sottopeso dall'inizio alla fine della durata della vita dell'individuo. Di più $\frac{\bar{c}}{\delta} \leq W^{\#}$ e $\frac{\partial J}{\partial c} > 0$.

   Decidiamo quindi di studiare il funzionale obiettivo:

   $$\int_0^T e^{-\rho t}[(\bar{c})^\beta - \alpha((W_0 - \frac{\bar{c}}{\delta})e^{-\delta t} + \frac{\bar{c}}{\delta} - W^{\#})^2](e^{-\mu t})\,dt \tag{4.3.4}$$

   Definendo $A := \frac{\bar{c}}{\delta} - W^{\#} \leq 0$ e $B := W_0 - \frac{\bar{c}}{\delta}$, si ottiene che, approssimando $e^{-\rho t}|_{t=T}$ a 0, il valore dell'integrale è:

   $$\frac{(\bar{c})^\beta}{\rho + \mu} - \frac{\alpha A^2}{\rho + \mu} - \frac{\alpha B^2}{\rho + \mu + 2\delta} - \frac{2\alpha AB}{\rho + \mu + \delta} \tag{4.3.5}$$

   la quale diminuisce al crescere in modulo di A e B.

   Questo significa che più l'asintoto è distante dal peso ottimo fisiologico, minore sarà il funzionale obiettivo e quindi minore sarà l'utilità accumulata per tutta la vita scontata dalla probabilità di morire.

   Allo stesso modo, più l'asintoto è distante dal peso iniziale dell'individuo, minore sarà l'utilità accumulata per tutta la vita scontata dalla probabilità di morire.

   Da questo si evince quindi che meno il peso è "variabile" in un individuo, maggiore è in generale l'utilità accumulata per tutta la vita scontata dalla probabilità di morire, considerando la situazione in cui il consumo di cibo è massimo e costante.

   Il caso che massimizza il funzionale obiettivo è quello dove $W_0 = \frac{\bar{c}}{\delta}$ e $W^{\#} = \frac{\bar{c}}{\delta}$, ovvero quando il peso di partenza è già il peso ottimo fisiologico.

   Chiaramente la soluzione è inversamente proporzionale rispetto a μ, in quanto maggiore è μ e minore è la probabilità di vivere oltre il tempo t a t fissato e quindi l'utilità accumulata lungo la propria vita scontata della probabilità di morire diminuisce.

2. Nel caso ii), per porre l'integrale $\frac{\partial J}{\partial c} < 0$, data la difficoltà dello studio del segno di questo integrale, per semplicità si può considerare il caso in cui $W(t,c) >> W^{\#}$, $\forall t$. Usando però queste restrizioni, è impossibile che si arrivi ad ottenere $\tilde{W} = W(T,c)$, rendendo quindi vani tutti i risultati che si potrebbero dedurre successivamente.

3. Nel caso iii), per la difficoltà dello studio del punto in cui $\frac{\partial J}{\partial c}$ si annulla, consideriamo il seguente caso: $W(t,c) > W^{\#}$, $\forall t$, implicando quindi una situazione di sovrappeso dall'inizio alla fine della durata della vita dell'individuo.

   Poichè $0 < c < \bar{c}$ può essere talmente piccolo da rendere $U'(c) >> 2\alpha(W(t,c) - W^{\#})\frac{\partial W(t,c)}{\partial c}$ e allo stesso tempo talmente grande da invece rendere $U'(c) << 2\alpha(W(t,c) - W^{\#})\frac{\partial W(t,c)}{\partial c}$, esiste allora un particolare c^* in cui l'integrale è nullo. Chiaramente lo studio di questo caso è identico allo studio del caso i), dove $\bar{c}$ viene sostituito con c^*.

   Anche qui infatti, il caso che massimizza il funzionale obiettivo è quello dove $W_0 = \frac{c^*}{\delta}$ e $W^{\#} = \frac{c^*}{\delta}$, ovvero quando il peso di partenza è già il peso ottimo fisiologico.

Tutto ciò che è stato trovato, cercando di rappresentare la stessa situazione con dei dati più affini al mondo reale, nella realtà si traduce in questo modo: meno il peso varia tra peso iniziale dell'individuo e peso ottimo fisiologico, maggiore è in generale l'utilità accumulata per tutta la vita scontata dalla probabilità di morire, considerando la situazione in cui il consumo di cibo è costante e non nullo.

5 Conclusioni

In questa tesi è stato presentato inizialmente un modello stilizzato basato sul l'articolo di Levy (2002). Levy arriva a sostenere che il livello stazionario ottimo razionale per l'individuo è una situazione di sovrappeso. Di più, partendo da piccole deviazioni dal livello stazionario, è possibile arrivare a situazioni estreme di sottopeso negli stadi più avanzati della vita. Partendo però dalle stesse ipotesi di Levy e utilizzando un approccio diverso, si arriva ad ottenere un risultato molto meno significativo e che quindi fa perdere di valore a ciò che è stato descritto precedentemente. In particolare, probabilmente tutto nasce a causa di un'errata disuguaglianza tra integrali.

Successivamente vengono presentati l'articolo di Dragone (2009) e l'articolo di Dragone e Caputo (2021). Inizialmente Dragone riprende le ipotesi di Levy e sviluppa il suo articolo aggiungendo le abitudini sul consumo di cibo. Dragone e Caputo invece, si rendono conto che c'è qualcosa di sbagliato nell'articolo di Levy: la funzione di utilità viene supposta positiva e, supponendo concava la funzione Hamiltoniana, questo porta necessariamente ad una condizione di sovrappeso. In questo caso, ho ritenuto strano che si potesse parlare di "segno" della funzione di utilità, in quanto tutti i risultati ottenuti finora, non debbano assolutamente dipendere dalla positività o negatività della funzione di utilità, essendo quest'ultima una "funzione di preferenza".

Infine, io e il mio relatore, partendo dalle ipotesi dell'articolo di Levy, abbiamo sviluppato un nuovo modello semplificato in cui si suppone il consumo di cibo costante e si studia il comportamento della funzione $W(t)$ che rappresenta il peso. Da questo modello stilizzato, si ottiene che la situazione che massimizza l'utilità e quindi il funzionale obiettivo è quella di rimanere a peso ottimo fisiologicamente costante, dall'inizio alla fine della propria vita. Tutto ciò, nella realtà si traduce in questo modo: meno il peso varia tra peso iniziale dell'individuo e peso ottimo fisiologico, maggiore è in generale l'utilità accumulata per tutta la vita scontata dalla probabilità di morire, considerando la situazione in cui il consumo di cibo è costante e non nullo.

6 Bibliografia

[1] SEIERSTAD, A., AND SYDSÆTER, K. (1987) *Optimal Control Theory with Economic Applications*, North-Holland, Amsterdam.

[2] BURATTO, A., GROSSET L., E VISCOLANI B. (2021) *Ottimizzazione Dinamica, modelli economici e gestionali*, Libreria Progetto, Padova.

[3] LEVY, A. (2002) *Rational eating: can it lead to overweightness or underweightness*, Journal of Health Economics.

[4] DRAGONE, D. (2009) *A rational eating model of binges, diets and obesity*, Journal of Health Economics.

[5] DRAGONE, D., CAPUTO, M. R. (2021) *Rational agents might be overweight, underweight, or the physiologically optimal weight*, Journal of Health Economics.