



**UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA**

# **Università degli Studi di Padova**

---

**Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”**

**Master Degree in Mathematics**

**Final Dissertation**

**Investigating the use of Mathematics in Physics through the  
Test of Calculus and Vectors in Mathematics and Physics: a  
case study with medical students**

**Thesis supervisor:  
Dr. Sandra Moretto**

**Thesis co-supervisor:  
Dr. Stefania Lippiello  
Dr. Marta Carli**

**Candidate:  
Sarah Annella  
Matricola:  
2092246**

---

**Academic Year 2023/2024**

*Il tetto si è bruciato:  
ora  
posso vedere la luna.  
- Mizuta Masahide*

## **Abstract**

This thesis aims to investigate the use of mathematics and its role in a physical context, with a particular focus on the topics of derivatives, integrals, and vectors. The primary objective is to explore the understanding of these concepts among first-year medical and dental students at the University of Padua and to compare the results with those obtained from students in other degree programs. To achieve this, the Test of Calculus and Vectors in Mathematics and Physics (TCV-MP) was utilized as a tool, originally developed by the Physics and Astronomy Education Research Group at the University of Padua, in a modified version that includes a confidence parameter in the questions, reflecting how confident students feel when answering the proposed questions. The new context provided by the Medical School allows for comparisons with results obtained from students in the Schools of Science and Engineering, fields where the test has been previously validated. Additionally, a revision of the TCV-MP regarding the questions on vectors is proposed in light of previous results and current literature. The findings of this research offer two main contributions: on one hand, they provide educators with a diagnostic tool to better understand the level of students' preparation and to adapt teaching accordingly; on the other hand, they enable students themselves to conduct a self-assessment of their prerequisites, helping them identify areas where they require further study. This dual function of the test, as a tool for both the teacher and the student, emphasizes the importance of a targeted and mindful educational approach.

## Sommario

La presente tesi si propone di indagare l'uso della matematica e il suo ruolo in un contesto fisico, con un focus particolare sugli argomenti di derivate, integrali e vettori. L'obiettivo principale è indagare la comprensione di tali concetti tra studenti del primo anno di medicina e odontoiatria dell'Università degli Studi di Padova e confrontare i risultati con quelli ottenuti in precedenza da altri corsi di laurea. Per questo scopo, è stato utilizzato come strumento il Test of Calculus and Vectors in Mathematics and Physics (TCV-MP), originariamente sviluppato dal Gruppo di ricerca in Didattica della Fisica e dell'Astronomia dell'Università di Padova, in una sua versione modificata che include il parametro di *confidence* nelle domande, ovvero quanto gli studenti si sentono sicuri nel rispondere ai quesiti proposti. Il nuovo contesto fornito dalla Scuola di Medicina permette di confrontare i risultati con quelli ottenuti da studenti delle Scuole di Scienze e di Ingegneria, ambiti in cui il test è stato precedentemente validato. Inoltre, si propone una revisione del TCV-MP relativamente ai quesiti sui vettori alla luce dei risultati precedenti e della letteratura più attuale. I risultati di questa ricerca forniscono due contributi principali: da un lato, offrono al docente uno strumento diagnostico per comprendere meglio il livello di preparazione degli studenti e adattare di conseguenza la didattica; dall'altro, permettono agli studenti stessi di effettuare un'autovalutazione sui prerequisiti, aiutandoli a identificare le aree in cui necessitano di un maggiore approfondimento. Questa doppia funzione del test, come strumento sia per l'insegnante sia per l'alunno, sottolinea l'importanza di un approccio educativo mirato e consapevole.

# Indice

Introduzione .....	1
<b>1 Matematica e Fisica: Un connubio fondamentale nella comprensione dei fenomeni naturali.....</b>	<b>3</b>
1.1 Sfide e opportunità nell'insegnamento .....	5
1.2 Il ruolo della modellizzazione matematica nella comprensione dei fenomeni fisici....	7
1.3 Costruzione del significato e processi cognitivi .....	8
1.4 Trasferimento di competenze tra Matematica e Fisica .....	12
<b>2 Strumenti utilizzati .....</b>	<b>15</b>
2.1 <i>Test of Calculus and Vectors in Mathematics and Physics</i> .....	15
2.2 L'importanza dei vettori nell'apprendimento .....	17
2.3 Isomorfismo e fluidità rappresentativa nel TCV-MP .....	19
2.4 La valutazione della fiducia .....	21
2.5 Strumenti per l'analisi .....	23
<b>3 Revisione quesiti e nuove proposte.....</b>	<b>25</b>
3.1 Revisione item 10M e 10P .....	27
3.1.1 Coppia di item del test TCV-MP attuale: .....	27
3.1.2 Proposta .....	29
3.2 Revisione item 11M e 11P .....	30
3.2.1 Coppia di item del test TCV-MP attuale: .....	30
3.2.2 Proposte .....	31
3.3 Revisione item 12M e 12P .....	34
3.3.1 Coppia di item del test TCV-MP attuale: .....	34
3.3.2 Proposta .....	35
3.4 Revisione item 13M e 13P .....	37
3.4.1 Coppia di item del test TCV-MP attuale: .....	37
3.4.2 Proposta .....	38
3.5 Revisione item 14M e 14P .....	39
3.5.1 Coppia di item del test TCV-MP attuale: .....	39
3.5.2 Proposta .....	40
3.6 Revisione item 15M e 15P .....	41
3.6.1 Coppia di item del test TCV-MP attuale: .....	41
3.6.2 Proposta .....	44
3.7 Revisione item 16M e 16P .....	46

3.7.1 Coppia di item del test TCV-MP attuale: .....	46
3.7.2 Proposte .....	47
3.8 Revisione item 17M e 17P .....	50
3.8.1 Coppia di item del test TCV-MP attuale: .....	50
3.8.2 Proposte .....	52
4 Elaborazione dei risultati .....	56
4.1 Analisi statistica del campione totale .....	57
4.2 Analisi in funzione del genere .....	62
4.3 Confronto con la Scuola di Ingegneria .....	72
5 Conclusioni .....	74

## Indice tabelle

Tabella 1: Riepilogo elementi test attuale e loro rappresentazioni .....	25
Tabella 2: Facility Index e Coefficiente $\phi$ negli anni (2018-2024), quesito 10.....	30
Tabella 3: Facility Index e Coefficiente $\phi$ negli anni (2018-2024), quesito 12.....	35
Tabella 4: Dati analisi anni (2018-2024), quesito 13.....	38
Tabella 5: Coefficiente $\phi$ e differenza FI (2018-2024), quesito 14. ....	40
Tabella 6: Facility Index (M), Facility Index (P) e Coefficiente $\phi$ negli anni (2018-2024), quesito 16.....	47
Tabella 7: Facility Index (M), Facility Index (P) e Coefficiente $\phi$ negli anni (2018-2024), quesito 17.....	52
Tabella 8: Partecipanti FisicaMente 2024/2025 .....	57
Tabella 9: Shapiro-Wilk distribuzione voto in decimi N=147 .....	60
Tabella 10: Analisi descrittiva completa (N=147) .....	60
Tabella 11: Voto in decimi suddiviso per genere .....	63
Tabella 12: Analisi descrittiva Voto in decimi e Confidence (N(Donne)=85, N(Uomini)=53) ..	68

## Indice figure

Figura 1: Distribution Plots.....	59
Figura 2: Grafico Excel Confidence score e voto/10, la retta rappresenta la linea di tendenza..	62
Figura 3: Voto in decimi e Genere (1= donne, 2= uomini).....	68
Figura 4: Confidence score e Genere (1= donne, 2= uomini).....	70
Figura 5: Grafico Confidence vs Punteggio test (donne).....	71
Figura 6: Grafico Confidence vs Punteggio test (uomini) .....	72

# Introduzione

La comprensione dei fenomeni naturali e la descrizione delle leggi che li governano si fondano su due pilastri fondamentali: la matematica e la fisica. Queste discipline, sebbene apparentemente distinte, si intrecciano profondamente nella modellizzazione e nell'interpretazione della realtà [3, 8, 9, 22, 26, 38, 39]. La loro sinergia è particolarmente evidente nell'ambito delle scienze applicate, dove la capacità di passare fluidamente da una rappresentazione matematica a una fisica è cruciale per il progresso scientifico e tecnologico [1-9].

Questa tesi si propone di indagare il ruolo della matematica in contesti fisici, con particolare attenzione ai concetti di derivate, integrali e vettori, che costituiscono elementi fondamentali sia nell'apprendimento che nella pratica delle due discipline [3, 5-7, 9, 10, 12, 13, 19]. Lo studio si concentra su studenti del primo anno dei corsi di laurea in Medicina e Chirurgia, Odontoiatria e Protesi Dentaria e Tecniche della Prevenzione nell'Ambiente e nei Luoghi di Lavoro presso l'Università degli Studi di Padova.

Per valutare il livello di comprensione di questi concetti, è stato utilizzato il *Test of Calculus and Vectors in Mathematics and Physics* (TCV-MP), uno strumento sviluppato dal *Gruppo di Ricerca in Didattica della Fisica e dell'Astronomia* (GRAPE) dell'Università di Padova [10]. La versione del test utilizzata in questa ricerca è stata modificata per includere il parametro di *confidence* [62-63], che misura il grado di sicurezza degli studenti nelle loro risposte. Questa caratteristica permette di ottenere un quadro più completo non solo delle competenze acquisite, ma anche della percezione che gli studenti hanno delle proprie capacità.

L'analisi dei dati è stata effettuata utilizzando Microsoft Excel e il software statistico JASP, che ha permesso di ottenere un quadro completo e dettagliato delle risposte fornite. I risultati ottenuti sono stati successivamente confrontati con i dati messi a disposizione dal progetto FisicaMente, selezionando specificamente quelli relativi all'anno accademico 2023/2024. Confrontando il nuovo campione composto da studenti della Scuola di Medicina con il campione dell'anno precedente composto da

studenti della Scuola di Ingegneria. Questa scelta consente di analizzare le differenze nella padronanza dei concetti matematici e fisici tra studenti con background accademici diversi, evidenziando le peculiarità dei diversi percorsi formativi.

La struttura del lavoro si articola in cinque capitoli. Nel Capitolo 1 viene approfondita la relazione tra matematica e fisica, con particolare attenzione al ruolo della matematica nella fisica e al ruolo della modellizzazione matematica. Il Capitolo 2 descrive gli strumenti utilizzati, introducendo il TCV-MP e le sue caratteristiche. Il Capitolo 3 si concentra sulla revisione dei quesiti relativi ai vettori e sulle proposte di miglioramento. Nel Capitolo 4 vengono presentati i risultati dell'analisi del campione dell'anno accademico 2024/2025 rispetto alla performance, in matematica e in fisica e alla *confidence*, con un confronto tra tale campione e quello dell'anno accademico 2023/2024. Infine, il Capitolo 5 offre una discussione sui risultati e le conclusioni, suggerendo spunti per future ricerche.

Questa ricerca, con la sua doppia funzione diagnostica e didattica, si propone di fornire un contributo significativo all'insegnamento della matematica e della fisica, aiutando docenti e studenti a individuare e colmare le lacune nell'apprendimento e a migliorare la comprensione delle discipline scientifiche fondamentali.

# 1 Matematica e Fisica: Un connubio fondamentale nella comprensione dei fenomeni naturali

La matematica ha da sempre ricoperto un ruolo centrale ed essenziale negli studi e nelle scoperte scientifiche, con una connessione particolare con la fisica. Legate da una relazione fruttuosa e multiforme, si arricchiscono reciprocamente in vari modi: la matematica fornisce il linguaggio e gli strumenti, quali i modelli, per descrivere e/o prevedere i fenomeni fisici. Esempi storici come le leggi di Newton e la teoria della relatività di Einstein mostrano come queste discipline abbiano da sempre collaborato nel gettare le fondamenta della scienza. Newton, per esempio, utilizzò il calcolo differenziale per formulare le sue leggi sul moto, mentre Einstein si basò su strutture matematiche più avanzate, come la geometria non euclidea, per descrivere la curvatura dello spazio-tempo [1].

Non bisogna commettere l'errore di circoscrivere il ruolo delle due materie, difatti la relazione tra esse non può essere ridotta a un'unica funzione: ogni contesto fisico-matematico ha una sua peculiarità. Il ruolo della matematica cambia a seconda del problema affrontato e del periodo storico, si svincola dalla funzione di prerequisito e diviene fondamentale. Un'utilità fruibile nello sviluppo di un ragionamento completo, critico e sistematico.

Come sottolinea Gingras [2] nel saggio "*What did mathematics do to physics?*" la fisica, nella sua formulazione teorica, è strettamente intrecciata con la matematica. Questo legame si manifesta non solo nella risoluzione dei problemi, ma anche nella capacità della matematica di suggerire analogie e guidare il ragionamento verso la scoperta di nuovi fenomeni. La matematizzazione della fisica ha avuto effetti significativi su tre livelli, i quali chiariscono come questo intreccio abbia trasformato la scienza:

1. Sociale: L'introduzione della matematica ha reso la fisica più esclusiva, creando una "barriera" per coloro privi di competenze matematiche avanzate.

Questo ha trasformato la fisica in una disciplina intellettuale specializzata e distante dal sapere comune.

2. Epistemologica: La matematizzazione ha cambiato il concetto stesso di "spiegazione" in fisica. Prima si faceva spesso riferimento a meccanismi fisici concreti, mentre oggi si considera un fenomeno spiegato quando espresso in termini di equazioni o modelli matematici.
3. Ontologica: La matematizzazione ha portato all'eliminazione di entità fisiche concrete come i vortici cartesiani o l'etere luminifero, una volta ritenuti essenziali per spiegare certi fenomeni. Con l'astrazione fornita dalla matematica, la fisica si è orientata verso modelli simbolici e funzionali.

Questi effetti dimostrano come la matematizzazione abbia influenzato non solo la pratica della fisica, ma anche il modo in cui è compresa e insegnata, sottolineando la necessità di una profonda integrazione tra competenze matematiche e conoscenza fisica.

L'analisi storica condotta da Uhden e Karam [3] mostra che, anche quando i fisici partono da principi intuitivi, l'inserimento di questi in strutture matematiche ne rafforza la portata, rendendoli supposizioni più robuste. Come osserva Zahar [4], il formalismo matematico non solo rappresenta il principio fisico ma lo consolida, facilitando lo sviluppo teorico attraverso un metodo ipotetico-deduttivo, centrale per il progresso della fisica. Questo metodo, usato da pionieri come Galileo, Newton e Fresnel, consente di derivare proposizioni da un insieme di principi, guidando il ragionamento e permettendo previsioni innovative.

Greca e Moreira [5] sottolineano come, nonostante la centralità dell'apprendimento delle procedure matematiche, questo non garantisca da solo una comprensione fisica dei fenomeni. È quindi necessario un insegnamento che, oltre alle tecniche, guidi verso una comprensione concettuale e integri la matematica nei concetti fisici in modo equilibrato.

In conclusione, la matematica non è solo uno strumento utile, ma una componente fondamentale per la comprensione e lo sviluppo della fisica. Questo rapporto

simbiotico ha permesso alla fisica di affrontare problemi sempre più complessi, aprendo nuove prospettive nella conoscenza del mondo naturale.

## **1.1 Sfide e opportunità nell'insegnamento**

Il legame tra matematica e fisica non è solo teorico, ma si riflette anche nei programmi scolastici e nelle dinamiche di insegnamento-apprendimento. Gli studenti, fin dalle scuole superiori, sono introdotti a concetti che mostrano questa connessione. In fisica, ad esempio, l'uso delle equazioni di moto richiede una comprensione preliminare di algebra e calcolo, mentre lo studio dell'elettricità e del magnetismo non sarebbe possibile senza una solida conoscenza di vettori e analisi matematica. Questa interdipendenza richiede un approccio didattico integrato [1]. L'apprendimento risulta potenziato quando gli insegnanti non si limitano alla teoria matematica, ma ne mostrano l'applicazione pratica in fisica. Un esempio classico è l'insegnamento delle derivate nelle lezioni di matematica, spesso seguito dalla loro applicazione nello studio della cinematica in fisica, rendendo l'apprendimento più profondo e favorendo una visione unificata del sapere scientifico.

Affrontare la matematica richiede non solo passione, ma anche una guida competente e strategie di insegnamento efficaci. Sia a livello secondario che universitario le due discipline sono insegnate separatamente da docenti provenienti da dipartimenti distinti e con formazioni diverse, spesso spetta agli studenti il compito di integrare questi saperi. La comunità scientifica incontra tuttora difficoltà nel formare alunni che sappiano utilizzare la matematica per descrivere fenomeni fisici. Alcuni studenti sviluppano questa capacità con naturalezza, ma per molti altri risulta complessa, nonostante la matematica sia prerequisito per molti corsi di fisica. Ad esempio, nel corso di laurea in fisica dell'Università del Maryland, gli studenti devono completare cinque semestri di matematica e, per chi desidera approfondire, è consigliato seguirne altri due [6].

Questa interconnessione tra fisica e matematica porta spesso gli insegnanti di fisica a porre l'accento sull'abilità matematica come strumento primario per costruire conoscenza. Nei problemi d'esempio o nei compiti assegnati, l'elaborazione matematica viene spesso sottolineata, tralasciando le critiche fasi di creazione del significato fisico attraverso la contestualizzazione fisica e il collegamento con l'esperienza concreta. Questo approccio può non essere ottimale per i principianti, che potrebbero trascurare il significato fisico e concentrarsi sulla manipolazione delle formule, favorendo le leggi formali a discapito della comprensione concettuale.

Studi e rapporti di insegnanti evidenziano che molti studenti tendono a usare la matematica in modo meccanico, limitandosi alla manipolazione delle formule senza comprendere appieno i principi fisici. Questo approccio può generare insoddisfazione nei confronti della fisica, compromettendo la percezione del ruolo della matematica nell'apprendimento scientifico. Limitare la matematica a un mero strumento di calcolo, infatti, ne sminuisce il valore e il potenziale formativo [3]. Tuttavia, è vero anche il contrario: ridurre la fisica a semplici formule matematiche svalorizza il suo valore, privandola della capacità di suscitare meraviglia e di farci apprezzare la bellezza dei fenomeni naturali.

Come evidenziato da Pietrocola [7] si distingue in modo significativo tra l'uso algoritmico della matematica e il suo ruolo concettuale e strutturale. Esaminiamo questa distinzione mettendo in risalto i punti di forza di entrambi gli approcci:

1. Il ruolo tecnico riguarda le manipolazioni matematiche di base, calcoli ed equazioni, che sono utili ma possono essere eseguite senza una comprensione approfondita dei concetti fisici.
2. Il ruolo strutturale della matematica rappresenta un uso più profondo della matematica, in cui essa diviene inseparabile dalla fisica stessa, conferendo forma e significato ai fenomeni fisici, oltre al semplice calcolo.

Nel contesto didattico, questa distinzione porta alla separazione tra competenze tecniche e strutturali. Le prime includono abilità puramente matematiche, come

risolvere equazioni o manipolare formule, le seconde implicano la capacità di usare la matematica per modellare e strutturare situazioni fisiche, consentendo una comprensione più profonda della fisica attraverso la matematica.

## **1.2 Il ruolo della modellizzazione matematica nella comprensione dei fenomeni fisici**

La modellizzazione è indispensabile nel pensiero fisico per comprendere la complessità della natura nonché i limiti della percezione umana. Numerosi filosofi sostengono che la realtà sia accessibile solo attraverso modelli idealizzati e semplificati, enfatizzando come la matematica non sia semplicemente uno strumento astratto, ma una componente essenziale per comprendere i fenomeni fisici.

La modellizzazione rappresenta un campo di ricerca fruttuoso, centrale sia in fisica che in matematica [3]. Storicamente, i modelli hanno avuto un impatto cruciale nello sviluppo della fisica, mentre il loro insegnamento costituisce un tema di primo piano nella didattica. Dal punto di vista matematico, la modellizzazione è concepita come un processo di traduzione tra la matematica e il mondo reale [8].

I cicli di modellizzazione costituiscono un quadro teorico utile per comprendere e risolvere problemi fisici e matematici. La forza di questo approccio risiede nella sua capacità di evidenziare l'interazione tra fisica e matematica, permettendo agli studenti di cogliere non solo il "*come*", ma anche il "*perché*" dietro i processi matematici in fisica. Per la pratica della fisica, i modelli matematici non sono solo strumenti per descrivere fenomeni, ma diventano parte integrante della costruzione concettuale stessa [9].

Seguendo gli studi di Uhden e Pietrocola [3] un modello didattico efficace dovrebbe idealmente possedere alcune caratteristiche fondamentali:

1. L'integrazione tra fisica e matematica: Le equazioni matematiche devono rappresentare concetti fisici oltre a fungere da strumenti di calcolo, migliorando così la comprensione concettuale e permettendo di interpretare i risultati in termini di modelli fisici concreti.
2. Distinzione tra abilità tecniche e strutturali: Le competenze tecniche riguardano le manipolazioni matematiche pure, mentre quelle strutturali sono legate alla capacità di utilizzare la conoscenza matematica per strutturare situazioni fisiche.
3. Enfasi sull'aspetto concettuale: Promuovere una visione della fisica come una scienza in cui il pensiero matematico e fisico si fondono per dare una visione coerente della realtà, permettendo un approccio didattico equilibrato.

### **1.3 Costruzione del significato e processi cognitivi**

L'uso della matematica nelle scienze, in particolare in fisica, si distingue nettamente dalla matematica pura. La differenza principale risiede nel suo scopo: anziché esplorare relazioni astratte, la matematica in fisica rappresenta e interpreta sistemi fisici.

Questo uso differenziato ha portato a considerare il linguaggio matematico dei fisici come un "*dialetto*" unico. Mentre la matematica pura si concentra sulla coerenza interna, in fisica i simboli matematici acquisiscono significati specifici legati ai fenomeni che descrivono. Questo muta profondamente il modo in cui le equazioni vengono interpretate, come sottolineato da Redish e Kuo nel loro studio *Language of Physics, Language of Math* [6].

Numerosi studi evidenziano che una solida preparazione matematica non garantisce automaticamente il successo nello studio della fisica. Anche studenti brillanti in analisi

matematica spesso faticano ad applicare gli stessi concetti ai problemi fisici, riuscendo nei calcoli tecnici ma senza cogliere il significato fisico delle equazioni [10, 11-17].

Un esempio di come la fisica attribuisca significato ai simboli matematici è dato dall'equazione  $y = mx + b$ . Per un matematico, rappresenta una relazione lineare tra due variabili. In fisica, però, ogni elemento dell'equazione assume un significato concreto:  $x$  e  $y$  possono rappresentare grandezze fisiche,  $m$  la pendenza, che può corrispondere ad un'accelerazione o un coefficiente di resistenza, e  $b$  a un valore iniziale. Questo arricchisce l'interpretazione matematica con una dimensione fisica, una pratica descritta come "*filtraggio delle equazioni attraverso la fisica*" [6].

La costruzione del significato attraverso le equazioni presenta almeno tre aspetti fondamentali: un fondamento legato all'esperienza fisica, l'impiego della conoscenza enciclopedica e la scelta contestuale di tali informazioni per dar forma al significato [6]. Analogamente a quanto avviene nel linguaggio, l'interpretazione e l'attribuzione di significato in fisica sono processi dinamici, influenzati dalle circostanze e dai segnali sociali che possono mutare nel tempo.

Secondo la comunità di ricerca sulla didattica della fisica (*Physics Education Research*, come acronimo: PER) i processi cognitivi che gli studenti attivano per comprendere e costruire il significato in fisica condividono numerosi elementi con i modelli teorici impiegati per studiare la costruzione del significato nel linguaggio [6]. Il ragionamento di una persona è considerato il risultato dell'attivazione di un insieme di risorse cognitive interconnesse, che vengono richiamate in base a come l'individuo percepisce e interpreta i contesti esterni e interni. Tre elementi chiave emergono in questo contesto:

1. Cognizione incarnata: le strutture di base del ragionamento in fisica sono radicate nell'esperienza fisica diretta, anche i concetti più astratti che comprendiamo sono influenzati e limitati dalle nostre esperienze concrete nella realtà fisica.

2. Conoscenza enciclopedica: una varietà di risorse cognitive è attivata in modo dinamico.
3. Contestualizzazione: l'attivazione di queste risorse dipende da fattori concettuali, epistemologici e affettivi.

Osservando la costruzione di significato attraverso la matematica con questi strumenti si può comprendere meglio i modi in cui gli studenti non sempre attingono alle loro risorse cognitive più efficaci. L'ancoraggio della concettualizzazione nell'esperienza fisica e nelle azioni si estende persino ai processi cognitivi più complessi, come il pensiero matematico. Sebbene la matematica formale possa talvolta sembrare distante dalle esperienze quotidiane, la comprensione delle regole formali può essere radicata in esperienze fisiche comuni. Per migliorare la capacità degli studenti di applicare la matematica in fisica, è cruciale un supporto esplicito nell'integrare i concetti fisici con il formalismo matematico. Ad esempio, l'interpretazione della teoria degli insiemi può trovare fondamento nella nostra interazione con contenitori e collezioni di oggetti, mentre il concetto di rotazione nella vita quotidiana può fornire una base per comprendere i numeri complessi [20].

Questi fattori contribuiscono alla comprensione della fisica, ma spesso gli studenti non riescono a integrare efficacemente concetti fisici e operazioni matematiche. Ad esempio, la cognizione incarnata offre una base per comprendere concetti fisici astratti, ma, come evidenziato in letteratura, può risultare limitata quando si tratta di rappresentazioni matematiche simboliche [6, 11, 12]. Inoltre, le risorse cognitive attivate in modo dinamico potrebbero non essere adeguatamente collegate al formalismo matematico, creando una barriera tra il linguaggio fisico e quello matematico.

Molte delle idee più sofisticate in matematica sono profondamente intrecciate con la nostra fisicità. Gli insegnanti possono facilitare questa transizione sfruttando le risorse cognitive già presenti negli studenti e aiutandoli a collegare i simboli matematici ai significati fisici.

Studi recenti [18-20, 37, 38, 46, 56, 57] supportano ampiamente l'idea che gli strumenti cognitivi incarnati (embodied cognitive tools) rappresentino un'opportunità unica per migliorare l'educazione STEM (Scienza, Tecnologia, Ingegneria e Matematica). Questi strumenti sfruttano l'interazione tra mente, corpo e ambiente per potenziare l'apprendimento di concetti complessi attraverso l'azione fisica, il movimento, e l'interazione sensoriale.

- Integrazione corpo-mente: La teoria dell'embodied cognition suggerisce che il pensiero umano sia strettamente collegato al corpo e alle sue interazioni con l'ambiente. Questo approccio si è dimostrato particolarmente efficace nell'insegnamento delle discipline STEM, poiché molti concetti scientifici e matematici possono essere meglio compresi attraverso attività fisiche e manipolative che facilitano la transizione dall'azione all'astrazione [18, 19].
- Tecnologie immersive: L'uso di realtà aumentata (AR), realtà virtuale (VR) e realtà mista permette di implementare ambienti di apprendimento immersivi che supportano l'apprendimento incarnato. Questi strumenti tecnologici offrono agli studenti esperienze pratiche che rafforzano l'apprendimento di concetti complessi, come la visualizzazione tridimensionale di dati o la comprensione di fenomeni fisici attraverso simulazioni interattive [18, 19].
- Collaborazione e gesti: L'uso dei gesti e del movimento collaborativo, ad esempio in attività di geometria incarnata, ha dimostrato di migliorare le capacità cognitive degli studenti e di favorire l'apprendimento concettuale. Studi [18] hanno evidenziato che le attività di gruppo che includono movimenti sincronizzati migliorano la comprensione dei concetti geometrici e aumentano l'interesse degli studenti per le discipline STEM.

Nel complesso, l'integrazione di strumenti cognitivi incarnati nelle pratiche educative può contribuire a colmare il divario tra teoria e pratica, rendendo l'apprendimento più coinvolgente e significativo per gli studenti di tutte le età.

## **1.4 Trasferimento di competenze tra Matematica e Fisica**

Studi precedenti [38, 40, 43, 46, 55, 57] sul trasferimento delle competenze tra matematica e fisica evidenziano che ciò non avviene in modo automatico. Diverse ricerche [20] suggeriscono che un possibile rimedio sia l'insegnamento integrato delle due discipline, affrontandole simultaneamente per creare un legame più stretto tra il formalismo matematico e il suo significato fisico.

Corsi integrati di questo tipo sono stati proposti come strumento per facilitare l'apprendimento e migliorare la comprensione in entrambi gli ambiti [3, 13, 21]. Le ricerche citate indicano una tendenza diffusa tra gli studenti di fisica a risolvere i problemi in modo meccanico, inserendo valori nelle equazioni senza comprendere appieno il significato fisico delle operazioni svolte. Questo approccio è spesso incentivato dalla natura delle valutazioni tradizionali, che premiano la manipolazione matematica a scapito della comprensione concettuale. Di conseguenza, gli studenti si concentrano sulla produzione di risposte numeriche senza riflettere sul loro significato [3].

Per contrastare questa tendenza, Bagno e collaboratori [22] hanno sviluppato un approccio didattico che pone l'accento sull'importanza di affermazioni concettuali nell'interpretazione delle formule fisiche, incoraggiando una riflessione più profonda sulle equazioni. Questo metodo nasce da uno studio diagnostico che ha esplorato la comprensione degli studenti rispetto a due specifiche formule della fisica. I risultati di questa analisi hanno guidato lo sviluppo di un'attività didattica mirata, progettata in collaborazione con insegnanti di fisica delle scuole superiori. L'attività, implementata nelle loro classi, ha incoraggiato un'interpretazione più consapevole delle formule e ha mostrato un impatto positivo sia sugli atteggiamenti degli studenti sia sul loro progresso nella comprensione di equazioni chiave.

Allo stesso modo, Domert [16] ha introdotto un framework basato su diverse "*mentalità epistemologiche*" per categorizzare gli atteggiamenti degli studenti verso le equazioni fisiche, evidenziando la varietà di approcci cognitivi nell'uso delle formule. Questo approccio indaga come gli studenti universitari concepiscano la comprensione delle equazioni fisiche, rivelando che tale comprensione è influenzata dalle convinzioni epistemologiche che modellano il loro apprendimento. Attraverso interviste semi-strutturate condotte in tre università, Domert ha analizzato come gli attributi critici percepiti – come il significato, l'applicazione e la risoluzione dei problemi – evolvano lungo il percorso accademico degli studenti. Questi risultati offrono spunti per migliorare l'insegnamento della fisica a livello universitario, suggerendo strategie pedagogiche mirate per supportare una comprensione più profonda delle equazioni.

La difficoltà degli studenti nell'applicare la matematica in fisica è spesso attribuita all'incapacità di trasferire le competenze apprese durante le lezioni di matematica. Tuttavia, Redish e Kuo [6] offrono un'interpretazione alternativa, suggerendo che l'apprendimento della matematica in contesti matematici e in contesti fisici sia in realtà un processo distinto, simile all'acquisizione di due lingue correlate ma diverse. Sebbene vi siano sovrapposizioni tra i due ambiti, le differenze rimangono significative, e la competenza in uno non garantisce necessariamente la competenza nell'altro.

Molti fisici raggiungono una comprensione naturale della matematica applicata alla fisica solo dopo anni di pratica. Tuttavia, è possibile accelerare questo processo tramite un approccio didattico che enfatizzi la connessione tra esperienza fisica, concetti astratti e formalismo matematico [23].

Considerare la matematica e la fisica come linguaggi distinti implica la necessità di fornire non solo istruzioni, ma anche esercizi pratici che aiutino gli studenti a integrare il formalismo matematico con l'interpretazione fisica. Questa prospettiva introduce nuove sfide sia per la ricerca educativa sia per l'insegnamento.

Questa tesi si propone di compiere un primo passo verso l'interdisciplinarietà, come definita da Frodeman, Klein e Pacheco [24, 25], ovvero l'integrazione, interazione e fusione delle discipline, cercando di ridurre le distanze tra matematica e fisica.

## 2 Strumenti utilizzati

### ***2.1 Test of Calculus and Vectors in Mathematics and Physics***

Lo strumento che si vuole approfondire in questa tesi è il *Test of Calculus and Vectors in Mathematics and Physics* (TCV-MP), sviluppato dal Gruppo di Ricerca in Didattica della Fisica e dell'Astronomia dell'Università di Padova.

La scelta di utilizzare questo strumento risponde a due obiettivi principali: da un lato, fornire agli insegnanti una comprensione più dettagliata delle difficoltà degli studenti, consentendo di adattare la didattica alle esigenze specifiche della classe; dall'altro, offrire agli studenti uno strumento di autovalutazione che evidenzi le aree critiche, favorendo uno studio più mirato [10]. Il TCV-MP dona, con un unico strumento, un *feedback* efficace sia per l'apprendimento degli studenti che per il miglioramento dell'insegnamento.

Il *test del calcolo e dei vettori in matematica e fisica* (TCV-MP) indaga le differenze nelle risposte degli studenti a problemi isomorfi di matematica e fisica, coinvolgendo concetti matematici tipicamente incontrati nella fisica introduttiva: derivate, integrali e vettori. Ispirandosi a studi precedenti [10, 45, 46] ed utilizzando distrattori elaborati sulla base della letteratura esistente è stato creato un pool iniziale di 78 item. La versione preliminare del test è stata esaminata da esperti, quali docenti di fisica o calcolo dei corsi introduttivi dell'Università degli Studi di Padova, per garantirne la validità dei contenuti. In base al loro *feedback*, alcuni item e/o distrattori sono stati eliminati, aggiunti, modificati o riscritti creando così la versione finale del test. Quest'ultima comprende 34 quesiti: 17 in un contesto matematico e 17 in un contesto fisico. Ogni domanda offre cinque opzioni, una corretta e quattro distrattori, metodo particolarmente utile per un'analisi su larga scala [10].

Dai risultati raccolti dalle prime somministrazioni del test [10, 41, 42] si è potuto riscontrare che quando gli studenti affrontano problemi con un contesto ricco di

dettagli, spesso vengono distratti da elementi superflui, portandoli a utilizzare risorse inutili. È stato necessario un lavoro meticoloso sulla scelta adeguata dei distrattori e, malgrado l'utilizzo di suggerimenti visivi che possono indicare somiglianze tra quesiti di matematica e fisica, capita che gli studenti adottino strategie differenti.

Una caratteristica distintiva del test è il suo focus su rappresentazioni multiple armonizzate tra loro per presentare i concetti oggetto del test nel miglior modo possibile: grafici, parole, numeri e linguaggio formale (espressioni algebriche ed equazioni). Attualmente, sebbene in letteratura siano già presenti strumenti per indagare le difficoltà degli studenti su argomenti specifici [29, 30, 33, 39, 40, 45, 48, 58], tra gli studi condotti il TVC-MP è il più completo e sintetico per indagare i temi matematici rilevanti nei corsi di fisica introduttiva.

L'affidabilità e il potere discriminatorio del TCV-MP sono stati valutati tramite l'utilizzo di due parametri statistici: l'*indice di Kuder-Richardson* (KR20) come misura della coerenza interna del test (affidabilità) con un valore di 0.91 e il *delta di Ferguson* come misura del potere discriminatorio globale del test con un valore di 0.99. Per la valutazione dei singoli quesiti viene fornita un'analisi basata sull'impiego di tre misure statistiche:

1. *Facility Index*: percentuale di risposte corrette.
2. *Point-Biserial Coefficient* ( $r_{pb}$ ): correlazione tra risposte corrette e punteggio totale.
3. *Discrimination index* ( $DI_{27\%}$ ): una misura della capacità del quesito di discriminare tra gli studenti con il punteggio più alto e gli studenti con il punteggio più basso.

La prima somministrazione del test [10], condotta nel 2018 presso l'Università di Padova, ha rivelato che uno degli ostacoli principali per gli studenti è l'uso della matematica nei corsi di fisica. Questo ha portato allo sviluppo di progetti di supporto basati sui risultati del TCV-MP. Attualmente, il test fornisce agli studenti un *feedback* personalizzato fruibile tramite la piattaforma Geogebra.org. Hanno la possibilità di accedere a moduli di apprendimento che includono esercizi aggiuntivi con correzione

istantanea, migliorando in modo guidato la loro comprensione degli argomenti passo dopo passo.

## 2.2 L'importanza dei vettori nell'apprendimento

Gli studi didattici condotti sulle difficoltà degli studenti in matematica e fisica si dividono principalmente in due approcci: studi su larga scala, volti a classificare le principali problematiche legate a concetti o strumenti chiave, e studi su scala ridotta, basati su teorie cognitive, che esaminano in dettaglio le conoscenze e i processi mentali degli studenti [43]. Il *Test of Calculus and Vectors in Mathematics and Physics* (TCV-MP), oggetto di questa tesi, si inserisce nel primo approccio.

La cinematica e la dinamica rappresentano per molti studenti il primo confronto con il ragionamento vettoriale in fisica [27, 29, 30, 43, 44, 48]. I vettori sono essenziali per descrivere forze e grandezze cinematiche, e la loro comprensione è cruciale per affrontare la meccanica. Studi come quello di Flores et al. [44] hanno dimostrato che modifiche nei metodi di insegnamento migliorano significativamente la capacità degli studenti di eseguire operazioni vettoriali come l'addizione e la sottrazione. Questo accresce la probabilità che i vettori vengano utilizzati efficacemente nella risoluzione di problemi di meccanica.

Nel suo lavoro *A Guide to Introductory Physics Teaching* [28], Arons suggerisce l'importanza di esercitazioni specifiche per affinare la gestione grafica dell'aritmetica vettoriale. Nonostante ciò, persiste una significativa difficoltà nell'applicazione pratica dei vettori, come evidenziato da vari insegnanti e ricercatori. Modifiche ai contenuti e alla sequenza didattica dei corsi, operate da parte degli autori [28], hanno portato a un incremento nell'uso dei vettori da parte degli studenti per analizzare forze e accelerazioni. Tuttavia, gli errori e le incomprensioni qualitative dimostrano che le difficoltà legate ai vettori non sono facilmente superabili.

Diverse ricerche [10, 29-31, 75] hanno evidenziato problematiche specifiche nell'interpretazione delle grandezze cinematiche, soprattutto nella lettura e comprensione dei grafici. Leinhardt et al. [10, 32] hanno categorizzato le problematiche generali relative all'uso dei grafici, mentre McDermott e collaboratori [10, 33] hanno introdotto la prima classificazione specifica delle difficoltà cinematiche. Studi successivi più dettagliati, come quelli di Wemyss e Van Kampen [34], confermati da Bollen et al. [35], hanno dimostrato che le difficoltà degli studenti non sono esclusivamente matematiche, ma spesso radicate in concetti fisici precedentemente appresi in modo scorretto.

Alcuni studi, come quello di Christensen e Thompson [36], hanno esaminato il divario tra la capacità degli studenti di risolvere problemi matematici e fisici, evidenziando come il formato grafico “spogliato” del contesto fisico possa risultare ostico. I ricercatori dell'Università di Zagabria [37-40] hanno confermato che gli studenti adottano strategie diverse a seconda del contesto disciplinare. Curiosamente, essi dimostrano una maggiore flessibilità strategica in matematica rispetto alla fisica, dove tendono a fare affidamento su metodi mnemonici [10].

In precedenti studi [10, 41, 42] il *Test of Calculus and Vectors in Mathematics and Physics* (TCV-MP) è stato modificato per l'uso nelle scuole secondarie, con l'obiettivo di migliorare la matematizzazione degli studenti prima dell'ingresso all'università [41, 42]. I risultati hanno evidenziato come le difficoltà principali risiedano nella comprensione delle connessioni tra aspetti algebrici e geometrici dei vettori, sottolineando l'importanza di strategie didattiche che rendano tali legami più evidenti [6].

Nguyen e Meltzer [43] hanno fornito una panoramica delle difficoltà più comuni nell'ambito dei concetti vettoriali, come somma vettoriale, direzione e grandezza. Persistono difficoltà anche dopo istruzioni esplicite, come già rilevato da Knight [44].

In quest'ambito uno dei primi strumenti diagnostici utilizzati per completare il quadro disciplinare specifico è Il *Test di Comprensione dei Vettori* (TUV) sviluppato da Barniol e Zavala [45]. L'elaborazione di tale test si rivela fondamentale per individuare errori specifici e ragionamenti errati [46]. Il TUV è stato ampiamente validato e offre una tassonomia dettagliata dei concetti vettoriali, risorsa per ricercatori che si

occupano dell'apprendimento dei vettori e per docenti che desiderano utilizzare il materiale nei loro corsi. In “*Test of understanding of vectors: A reliable multiple-choice vector concept test*” [45] vengono analizzate le risposte degli studenti al test TUV, identificati e descritti in dettaglio gli sbagli e le procedure di ragionamento errate che hanno portato gli studenti a compiere tali errori. Questa tassonomia ha tre punti chiave: copre i concetti vettoriali fondamentali utilizzati nei corsi introduttivi di fisica; include errori e ragionamenti mai descritti precedentemente in letteratura; e riassume parte delle ricerche precedenti sulle difficoltà che gli studenti incontrano con i concetti vettoriali.

Per un quadro completo degli errori più comuni commessi lavorando con i vettori Susac, Planinic, Klemencic e Sipus [46] hanno somministrato il TUV a 889 studenti del primo anno dell'Università di Zagabria, mettendo in luce alcuni concetti come il vettore unitario, il prodotto incrociato e la sottrazione vettoriale. Uno studio condotto da Flores e collaboratori [27] presenta dati che suggeriscono molti studenti non hanno capacità quali determinare la direzione della differenza tra vettori di velocità, individuare correttamente la direzione del vettore di accelerazione o comprendere il rapporto tra forze individuali e forza netta. Successivamente Shaffer e McDermott [48] hanno esaminato le difficoltà degli studenti nel trattare la velocità e l'accelerazione come vettori, identificando problemi come il non riconoscere la tangente della velocità alla traiettoria, confondere velocità con accelerazione, o pensare che l'accelerazione sia nulla quando la velocità è costante [10].

## **2.3 Isomorfismo e fluidità rappresentativa nel TCV-MP**

Per garantire l'isomorfismo all'interno del TCV-MP tra i quesiti di matematica e i quesiti di fisica, è stato necessario approfondire studi sulle capacità degli studenti di utilizzare i vettori in entrambe le discipline [10, 49, 50].

Compiti isomorfi riguardanti grandezze vettoriali, componenti, sottrazione e prodotto scalare sono stati oggetto delle ricerche condotte da Van Deventer e colleghi [49, 50].

I risultati hanno evidenziato che gli studenti ottenevano migliori prestazioni nella sottrazione vettoriale in fisica, grazie al supporto del sistema di coordinate. Tuttavia, esprimere una componente vettoriale algebrica risultava più complesso, specialmente quando l'angolo fornito era compreso tra il vettore e l'asse. Performance particolarmente deboli si sono osservate nei quesiti sul prodotto scalare, con numerosi studenti che lo rappresentavano erroneamente come un vettore, dimostrando confusione concettuale in entrambi i contesti.

Un elemento chiave emerso da queste ricerche è il ruolo cruciale della forma rappresentativa del problema (grafici, parole, numeri, equazioni). La capacità di passare fluidamente da una rappresentazione all'altra, definita *fluidità rappresentativa*, è considerata un indicatore fondamentale di competenza in fisica [51, 52]. Proprio il passaggio tra rappresentazioni diverse costituisce una sfida significativa per gli studenti. Essi tendono infatti ad adottare strategie di risoluzione diverse in base al formato del problema [53, 54]. Studi che hanno comparato le prestazioni degli studenti su versioni diverse dello stesso quesito, ma formulate con rappresentazioni differenti, hanno evidenziato variazioni significative nelle risposte [55, 58]. Questo fenomeno mette in luce come la comprensione delle grandezze vettoriali in matematica e fisica possa essere influenzata dalla rappresentazione utilizzata, in particolare nei quesiti isomorfi.

Gli studi di Heckler e Scaife [59] hanno mostrato che gli studenti ottenevano risultati mediamente migliori nei problemi formulati in notazione algebrica rispetto a quelli in formato grafico (freccia), sia in matematica che in fisica. Analogamente, Liu e Kottegoda [60] hanno evidenziato una disconnessione tra la comprensione degli aspetti algebrici e geometrici dei vettori.

Questi risultati evidenziano l'importanza di progettare strumenti didattici, come il TCV-MP, capaci di esplorare in modo approfondito le difficoltà degli studenti nel comprendere e utilizzare i vettori in contesti diversi. La padronanza delle rappresentazioni vettoriali e la capacità di passare fluidamente tra esse rappresentano competenze essenziali per il successo nell'apprendimento della fisica e della matematica.

## 2.4 La valutazione della fiducia

La versione del TVC-MP in analisi include il parametro di *confidence* nelle domande.

La valutazione della fiducia, *Confidence Assessment (CA)*, è un metodo che invita gli studenti a indicare, accanto alle proprie risposte, un livello di fiducia espresso in un punteggio per valutare quanto si sentano sicuri della correttezza delle loro risposte. Il punteggio totale dello studente è determinato sommando i punteggi di fiducia assegnati alle risposte corrette e sottraendo quelli attribuiti alle risposte errate. Questo meccanismo ha lo scopo di incoraggiare gli studenti a fornire giudizi di fiducia sinceri.

La valutazione della fiducia rappresenta un approccio innovativo nelle pratiche pedagogiche, introducendo una variazione rispetto alle tradizionali modalità di valutazione formativa non vincolante in ambito scolastico. Nella ricerca di Foster [63] gli studenti sono chiamati a valutare il loro grado di certezza rispetto alle risposte fornite, associando un punteggio da 0 (completamente incerto, ovvero una supposizione) a 10 (assolutamente certo). Nel lungo periodo, gli alunni non sono in grado di "manipolare" sistematicamente questo punteggio, poiché una sovrastima o sottostima costante dei loro livelli di fiducia risulta inefficace. Il concetto di calibrazione si riferisce alla corrispondenza tra la fiducia espressa dagli studenti e la loro performance effettiva, ovvero la proporzione di risposte corrette [61]. Si potrebbe prevedere che, con l'uso continuativo della *CA*, gli studenti diventino progressivamente più calibrati nelle proprie autovalutazioni [62].

Uno studente, nonostante sia in grado di applicare correttamente la sua esperienza diretta, potrebbe essere influenzato dal suo stato emotivo, caratterizzato da una scarsa fiducia nelle proprie intuizioni e dalla percezione che "la fisica sia complicata". Uno studio condotto utilizzando come strumento *CA* durante una lezione di matematica sui numeri positivi e negativi [63], ha rilevato che gli studenti delle scuole secondarie dimostravano una buona calibrazione, assegnando punteggi di fiducia più elevati alle risposte corrette. La maggior parte degli studenti ha compreso rapidamente il

meccanismo di penalizzazione associato alle risposte errate ed ha accolto positivamente questo approccio, mitigando le preoccupazioni legate alla possibile resistenza degli studenti verso un metodo di valutazione percepito come inusuale. Da questa ricerca condotta nell'anno 2016 l'interesse per la valutazione di fiducia è cresciuto, specialmente tra gli insegnanti di matematica che hanno mostrato grande entusiasmo per questo strumento [64].

Studi condotti da Gardner-Meswin e collaboratori [65-68] mostrano come la valutazione della fiducia è stata ampiamente utilizzata nell'istruzione, soprattutto in ambiti come la medicina, dove è cruciale evitare supposizioni che potrebbero avere conseguenze gravi [65-68]. Gli studenti universitari tendono spesso a sopravvalutare le proprie capacità e a mostrarsi eccessivamente sicuri di sé [69], ma l'utilizzo ripetuto della *CA* ha dimostrato di migliorare la calibrazione delle loro valutazioni [62]. La capacità di "sapere cosa si sa e cosa non si sa" è un'abilità cruciale per l'apprendimento continuo e per capire quando è necessario chiedere aiuto o approfondire un argomento. Questa maggiore fiducia nelle procedure fondamentali fornisce agli alunni la libertà di esplorare concetti matematici più complessi [71].

L'integrazione della *CA* nelle valutazioni formative in matematica potrebbe portare a una serie di vantaggi potenziali, tra cui:

1. Disincentivare le congetture: Le ipotesi azzardate possono alterare i risultati delle valutazioni formative, rendendo più difficile per insegnanti e studenti identificare le reali aree di debolezza e banalizzando il processo di apprendimento.
2. Ridurre l'eccessiva sicurezza: Un eccesso di fiducia può portare gli studenti a rimanere compiaciuti e a non correggere errori o idee errate. Questo atteggiamento può ostacolare lo sviluppo delle loro competenze future in matematica, poiché non si impegnano nell'analisi critica delle proprie risposte.
3. Contrastare la mancanza di fiducia: Una bassa autostima può influenzare negativamente la motivazione degli studenti e la loro soddisfazione verso la materia, rendendoli meno inclini a proseguire lo studio della matematica oltre il periodo scolastico obbligatorio.

Un ulteriore vantaggio derivante dall'utilizzo della valutazione di fiducia è legato al cosiddetto *effetto di ipercorrezione*. Secondo questo fenomeno, gli errori commessi con elevata sicurezza vengono corretti con maggiore facilità rispetto a quelli fatti con bassa fiducia [70]. Questo potrebbe essere attribuito allo shock o alla sorpresa che si prova nel rendersi conto di aver sbagliato nonostante la certezza della risposta [67]. È essenziale esplorare la sicurezza degli studenti in modo altrettanto dettagliato, affinché possano valutare in maniera accurata le loro capacità in ogni specifico contesto [63].

In definitiva, la *CA* offre un metodo potente e semplice da implementare per supportare le valutazioni realistiche degli studenti sulla loro fiducia, incoraggiando una rivelazione onesta dei loro livelli di sicurezza. Questo approccio si contrappone alle strategie comuni come l'uso del metodo "indovina e spera", che gli studenti spesso adottano, e rappresenta un mezzo più costruttivo per migliorare l'apprendimento [63].

## 2.5 Strumenti per l'analisi

Il test è stato proposto agli studenti dell'Università degli Studi di Padova, in particolare agli iscritti al primo anno dei corsi di Medicina e Chirurgia e Odontoiatria. La presentazione è avvenuta durante l'ora di lezione dedicata alla materia Fisica Medica, sfruttando questo contesto per garantire una partecipazione ampia e rappresentativa.

La procedura di accesso al test è stata facilitata tramite una slide proiettata in aula, contenente un QR code che reindirizzava gli studenti alla piattaforma Moodle, dove era possibile compilare il test. Durante la presentazione, è stato sottolineato quanto fosse cruciale la partecipazione di ciascuno studente. È stato spiegato loro che una raccolta dati basata su un campione rappresentativo avrebbe consentito di ottenere risultati accurati e affidabili. Questi risultati sarebbero poi stati utilizzati per progettare azioni di supporto mirate, volte a migliorare la comprensione e l'applicazione delle competenze matematiche e fisiche nel contesto medico.

Gli studenti che partecipano al test hanno la possibilità di navigare liberamente tra i quesiti e di modificarli in qualsiasi momento, indipendentemente dalla sezione in cui

si trovano (Derivate, Integrali o Vettori). Il tempo stimato per completare il test è di 60 minuti, ma agli studenti vengono concessi 90 minuti per garantire una maggiore flessibilità.

I dati raccolti tramite Moodle sono stati successivamente esportati in formato Excel, per poi essere analizzati utilizzando uno specifico software di analisi statistica JASP nella versione 0.19.1.0. Questi strumenti hanno permesso di effettuare un'elaborazione dettagliata dei risultati, fornendo una base solida per l'interpretazione e la discussione degli stessi.

### 3 Revisione quesiti e nuove proposte

Questo capitolo è dedicato alla revisione dei quesiti relativi alla sezione dei vettori del *Test of Calculus and Vectors in Mathematics and Physics* (TCV-MP), con l'obiettivo di migliorarne l'efficacia nel rilevare le difficoltà degli studenti in matematica e fisica. Il lavoro di riorganizzazione ha tratto ispirazione non solo dalla letteratura specifica sui vettori [73-81], ma anche da studi più ampi riguardanti le migliori modalità di rappresentazione per ciascun argomento e tipologia di quesito [33, 39, 40, 45, 48, 49].

In ogni proposta avanzata, si è tenuto conto del duplice scopo del test: da un lato, fornire al docente uno strumento diagnostico per valutare con precisione il livello di preparazione degli studenti e adattare la didattica in modo mirato; dall'altro, offrire agli studenti un'opportunità di autovalutazione sui prerequisiti, aiutandoli a identificare le aree in cui necessitano di un maggiore approfondimento.

Un aspetto cruciale di questa revisione è stato mantenere una visione d'insieme, considerando la lunghezza complessiva del test e il bilanciamento tra le diverse sezioni. Ogni quesito è stato analizzato non come elemento isolato, ma come parte integrante di un sistema pensato per garantire un'esperienza di valutazione coerente, mirata ed efficace.

Vengono proposte modifiche dell'intera sezione dedicata ai vettori, dal quesito numero 10 al quesito numero 17:

*Tabella 1: Riepilogo elementi test attuale e loro rappresentazioni*

<b>Item</b>	<b>Argomento Matematica</b>	<b>Argomento Fisica</b>	<b>Rappresentazione Input</b>	<b>Rappresentazione Output</b>
10	Rappresentazione	Velocità (2D)	Parole	Grafico

11	Rappresentazione	Velocità (2D)	Grafico	Formale
12	Componenti	Forze	Grafico	Formale
13	Somma-modulo	Forze	Grafico	Formale
14	Somma- componenti	Forze	Grafico	Formale
15	Differenza	Velocità (2D)	Grafico	Grafico
16	Prodotto scalare	Lavoro di una forza	Grafico e Formale	Numerico e Formale
17	Prodotto vettoriale	Momento di una forza	Grafico e Formale	Numerico e Formale

I dati utilizzati per l'analisi, riorganizzazione e la formulazione delle proposte derivano da precedenti somministrazioni del test ad opera del progetto *FisicaMente*, promosso dal Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei" dell'Università degli Studi di Padova, dal *Gruppo di Ricerca in Didattica della Fisica e dell'Astronomia* (GRAPE) e dalle successive analisi statistiche condotte sui risultati.

Per il test globale e per la valutazione dei singoli item sono state impiegate le seguenti misure statistiche:

- Punteggio medio del test, punteggio medio di matematica, punteggio medio di fisica.

- La correlazione e la differenza tra il punteggio medio nella parte di matematica e quella di fisica (significativa o no).
- *Alpha di Cronbach - indice di Kuder-Richardson* come misura della coerenza interna del test (affidabilità).
- *Delta di Ferguson* come misura del potere discriminatorio globale del test.
- *Facility Index (FI)* corrispondente alla percentuale di risposte corrette normalizzata a 1.
- *Point-biserial coefficient ( $r_{pb}$ )* misura dell'affidabilità dell'item, definito come la correlazione tra la correttezza dell'item e il punteggio del test.
- *Discrimination index ( $DI_{27}\%$ )* una misura della capacità del quesito di discriminare tra gli studenti con i punteggi più alti e quelli con i punteggi più bassi.
- I coefficienti phi ( $\phi$ ) per ogni coppia di item corrispondenti per il grado di associazione tra quesiti isomorfi.

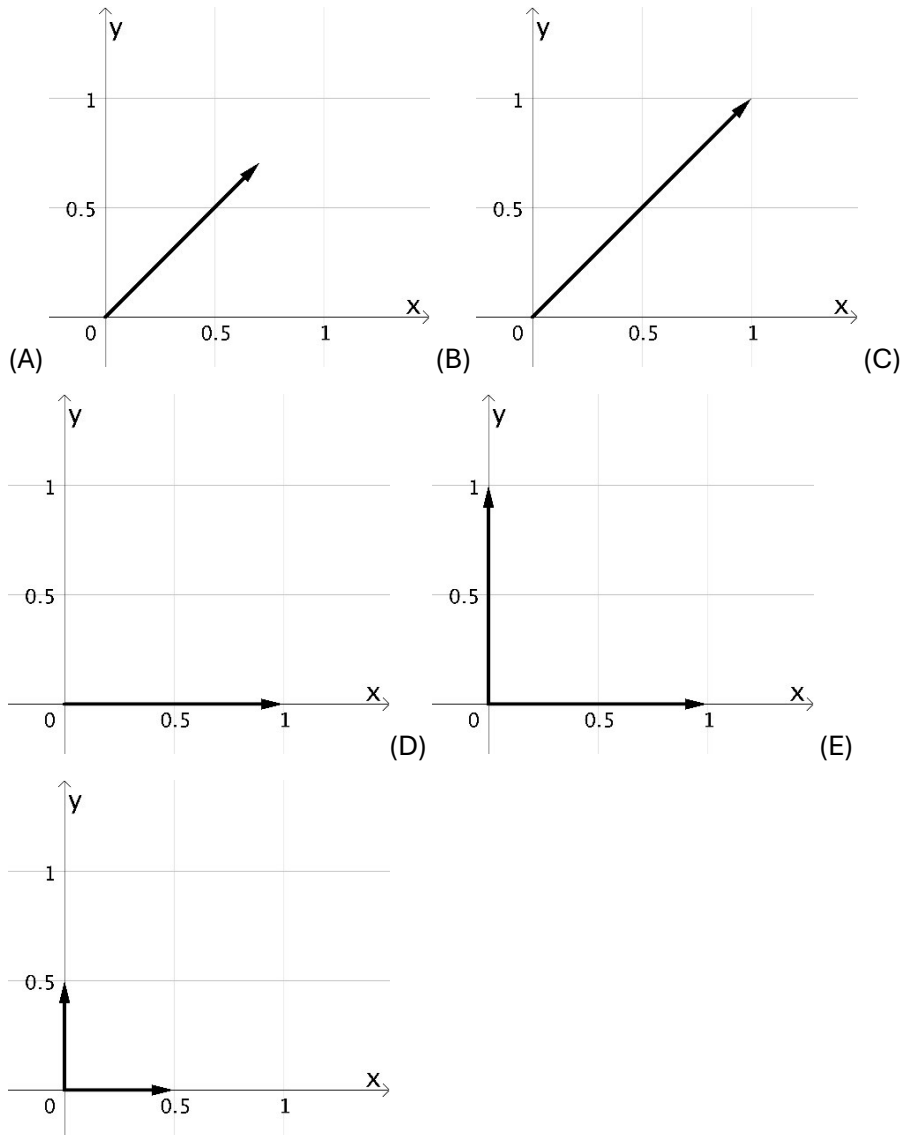
Questi parametri hanno permesso di identificare con maggiore precisione le problematiche specifiche nella comprensione e nell'applicazione dei concetti vettoriali, offrendo una base solida per l'implementazione di interventi didattici mirati.

Le modifiche sono state revisionate dalla prof.ssa Stefania Lippiello e dalla prof.ssa Marta Carli, sviluppatrici del test.

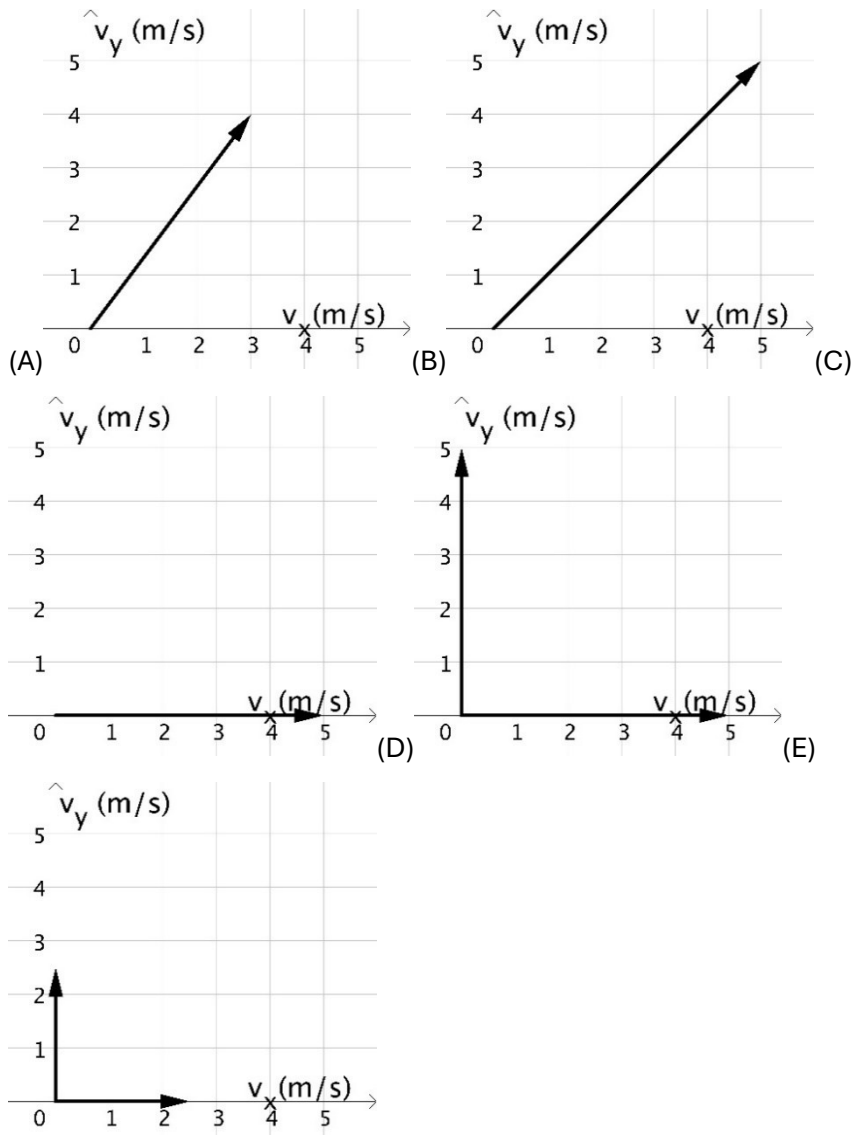
## 3.1 Revisione item 10M e 10P

### 3.1.1 Coppia di item del test TCV-MP attuale:

**Item 10M.** Considera il vettore  $\vec{A}$  di modulo 1, che forma un angolo positivo con l'asse  $x$ . Quale tra i seguenti vettori rappresenta  $\vec{A}$  ?



**Item 10P.** Un ragazzo cammina con velocità  $\vec{v} = 5 \text{ m/s}$  in una direzione che forma un angolo positivo con l'asse  $x$ . Quale tra i seguenti vettori rappresenta la velocità del ragazzo?



### 3.1.2 Proposta

Questo quesito riguarda la rappresentazione di un vettore modulo unitario che forma un angolo positivo con l'asse delle ascisse in matematica e la rappresentazione del vettore velocità in fisica. Dalle analisi FisicaMente 2018 – 2024 tale item non risulta avere problemi di sbilanciamento, inoltre il suo *Facility Index* (FI) è ottimale. La proposta sviluppata è quella di eliminare tale quesito.

Nell'analisi dei dati le differenze di FI superiori al 10% e i valori di  $\phi$  inferiori a 0.30 sono contrassegnati con un asterisco, riportiamo i valori rilevanti:

Tabella 2: Facility Index e Coefficiente  $\phi$  negli anni (2018-2024), quesito 10.

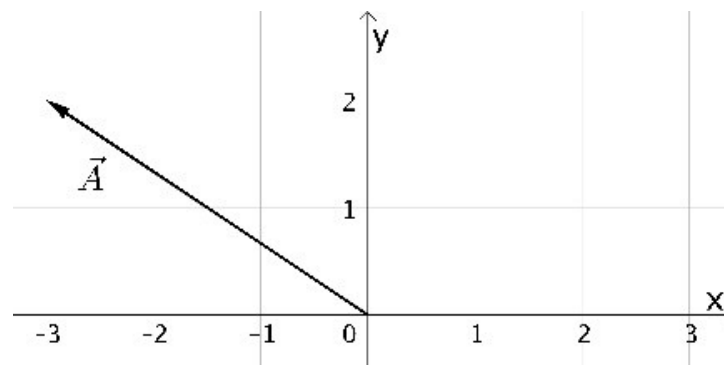
Anno	FI	$\phi$
2018	0.04	0.46
2019	0.01	0.43
2020	-0.01	0.50
2021	0.00	0.60
2022	-0.02	0.46
2024	0.01	0.46

Nonostante l'introduzione alla sezione dei vettori tramite questo quesito possa essere un buon modo per far sentire a proprio agio lo studente ed entrare nell'argomento, bisogna tenere conto della lunghezza totale del test. Pertanto, si preferisce lavorare maggiormente sugli argomenti più critici, ovvero prodotto scalare (item 16) e prodotto vettoriale (item 17).

## 3.2 Revisione item 11M e 11P

### 3.2.1 Coppia di item del test TCV-MP attuale:

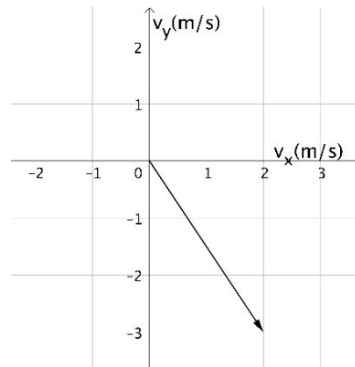
**Item 11M.** Considera il vettore  $\vec{A}$ , mostrato nella figura seguente.



Quale tra le seguenti è una rappresentazione corretta di  $\vec{A}$  in termini di  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ , i vettori di modulo unitario diretti rispettivamente lungo l'asse  $x$  e lungo l'asse  $y$ ?

- (A)  $\vec{A} = -3\hat{i} + 2\hat{j}$
- (B)  $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$
- (C)  $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$
- (D)  $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$
- (E)  $\vec{A} = -3\hat{i} - 2\hat{j}$

**Item 11P.** Un ragazzo si muove con velocità  $\vec{v}$  rappresentata nella figura seguente



Quale tra le seguenti è una rappresentazione corretta di  $\vec{v}$  in termini di  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ , i vettori di modulo unitario diretti rispettivamente lungo l'asse  $x$  e lungo l'asse  $y$ ?

- (A)  $\vec{v} = (2 \text{ m/s}) \hat{i} + (-3 \text{ m/s}) \hat{j}$
- (B)  $\vec{v} = (-3 \text{ m/s}) \hat{i} + (2 \text{ m/s}) \hat{j}$
- (C)  $\vec{v} = (-2 \text{ m/s}) \hat{i} + (-3 \text{ m/s}) \hat{j}$
- (D)  $\vec{v} = (2 \text{ m/s}) \hat{i} + (3 \text{ m/s}) \hat{j}$
- (E)  $\vec{v} = (-3 \text{ m/s}) \hat{i} + (-2 \text{ m/s}) \hat{j}$

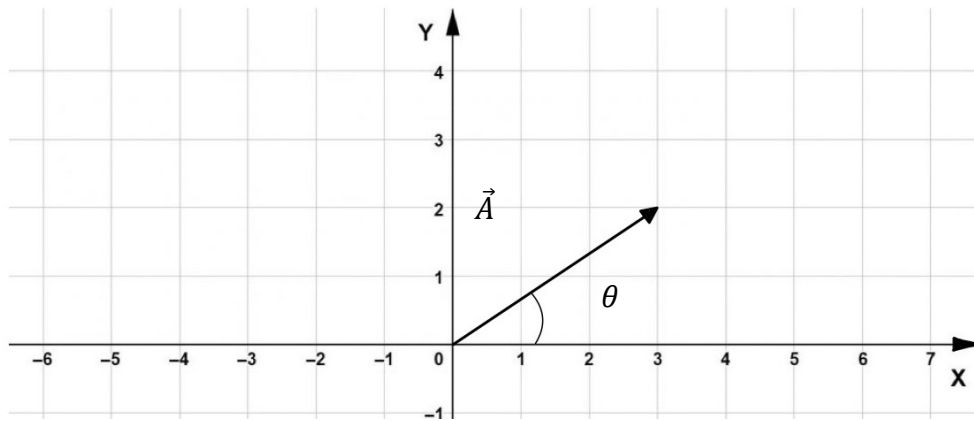
### 3.2.2 Proposte

Il *Facility Index* di questo item è molto alto, ad esempio nel 2019 i valori sono 0.90 in matematica e 0.83 in fisica, risultando sbilanciato rispetto agli altri quesiti. La proposta è quella di cambiare il quesito: inserire una domanda sull'utilizzo e la connessione tra il vettore e la tangente. Lo stesso argomento può essere utilizzato in fisica parlando così di spostamento. Questo potrebbe intanto introdurre il concetto di tangente di un angolo che non è presente nel test attuale e consoliderebbe il passaggio

tra diverse rappresentazioni di un vettore, in particolare tra coordinate cartesiane e polari.

Una bozza del quesito in matematica potrebbe essere:

Item 11M.1. Considera il vettore  $\vec{A} = (A_x, A_y)$ , mostrato nella figura seguente.



Quale tra le seguenti è una rappresentazione corretta dell'angolo che forma  $\vec{A}$  con l'asse x?

(A)  $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$

(B)  $\theta = \tan\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$

(C)  $\theta = \cos A_x$

(D)  $\theta = \frac{A_y}{A_x}$

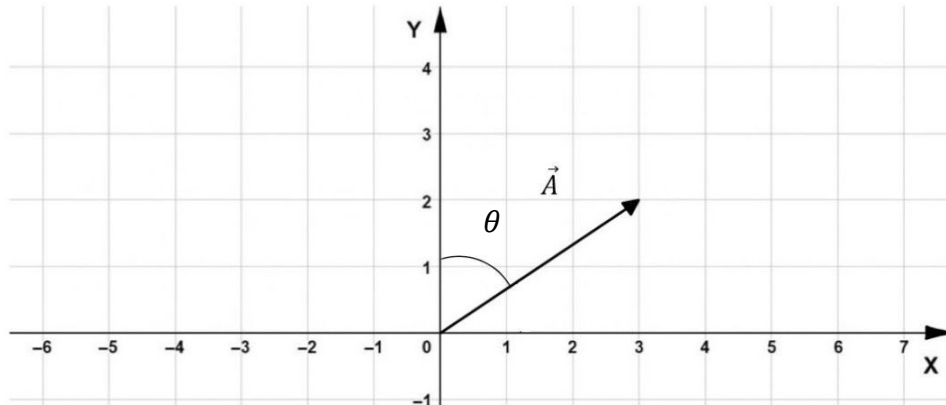
(E)  $\theta = \cos^{-1} A_x$

Possibili variazioni per vedere se hanno capito piuttosto che imparato a memoria la definizione e/o la formula:

1. Cambiare quadrante potrebbe confondere con i segni, quindi, sebbene sia stata presa in considerazione questa opzione, non è stata scelta al momento. L'ulteriore rischio sarebbe di distrarre l'alunno dal concetto principale dell'item ossia la tangente.

2. Quale tra le seguenti è una rappresentazione corretta dell'angolo che forma  $\vec{A}$  con l'asse  $y$ ? Sviluppiamo:

Item 11M.2. Considera il vettore  $\vec{A} = (A_x, A_y)$ , mostrato nella figura seguente.



Quale tra le seguenti è una rappresentazione corretta dell'angolo che forma  $\vec{A}$  con l'asse  $x$ ?

- (A)  $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_x}{A_y}\right)$
- (B)  $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$
- (C)  $\theta = \cos A_x$
- (D)  $\theta = \frac{A_y}{A_x}$
- (E)  $\theta = \cos^{-1} A_x$

Per l'item 11P. la proposta è una domanda analoga all'item 11M per mantenere il bilanciamento, ma utilizzare il vettore spostamento nel primo o nel secondo quadrante, magari usando Sud-Nord per l'asse  $y$  e Ovest-Est per l'asse  $x$ .

Una possibile variazione vagliata potrebbe essere:

“Un gatto si muove verso est per 5 metri e poi verso nord per 3 metri, in linea d'aria che direzione forma lo spostamento risultante con la direzione est?”

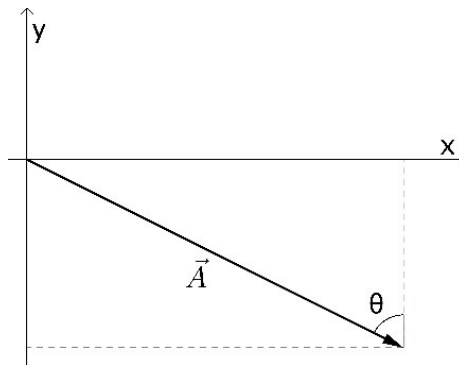
Tuttavia, in questo modo si sottende la somma vettoriale, cosa che non emerge nell'11M; quindi, o si cambia l'11M oppure si scarta questa versione e si tiene la prima

proposta. Al momento volevamo concentrarci sulla rappresentazione piuttosto, quindi la proposta scelta è la prima, ma riportiamo anche questa per esplicitare tutto il processo e vagliare tutte le opzioni. Inoltre, consentirebbe di avere “il contrario” del 12, dove si chiedono le componenti cartesiane a partire dal modulo e dall’angolo. Eventualmente si potrebbe invertire l’ordine tra l’11 e il 12, portando questo dopo.

### 3.3 Revisione item 12M e 12P

#### 3.3.1 Coppia di item del test TCV-MP attuale:

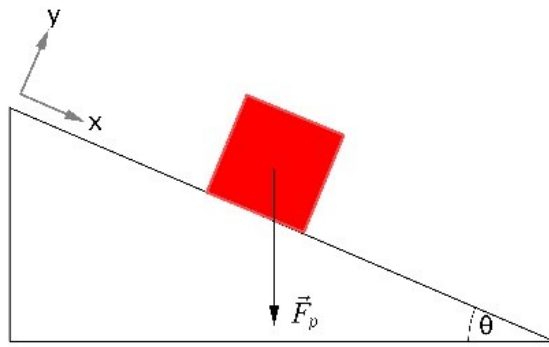
**Item 12M.** La figura seguente mostra il vettore  $\vec{A}$ , di modulo  $A$ , e l’angolo positivo  $\theta$ .



Quale tra le seguenti è una rappresentazione corretta di  $A_x$  e  $A_y$ , le componenti di  $\vec{A}$  lungo  $x$  e lungo  $y$ ?

- (A)  $A_x = A \sin \theta$  ;  $A_y = -A \cos \theta$
- (B)  $A_x = A \sin \theta$  ;  $A_y = A \cos \theta$
- (C)  $A_x = A \cos \theta$  ;  $A_y = -A \sin \theta$
- (D)  $A_x = A \cos \theta$  ;  $A_y = A \sin \theta$
- (E)  $A_x = A$  ;  $A_y = 0$

**Item 12P.** Un oggetto si muove lungo un piano inclinato. La forza peso  $\vec{F}_p$  dell’oggetto (di modulo  $F_p$ ) è illustrata nella figura seguente.



Quale delle seguenti opzioni è una rappresentazione corretta di  $F_x$  e  $F_y$ , le componenti di  $\vec{F}_p$  lungo  $x$  e lungo  $y$ ?

- (A)  $F_x = F_p \sin \theta$  ;  $F_y = -F_p \cos \theta$
- (B)  $F_x = F_p \sin \theta$  ;  $F_y = F_p \cos \theta$
- (C)  $F_x = F_p \cos \theta$  ;  $F_y = -F_p \sin \theta$
- (D)  $F_x = F_p \cos \theta$  ;  $F_y = F_p \sin \theta$
- (E)  $F_x = 0$  ;  $F_y = F_p$

### 3.3.2 Proposta

Nei dati raccolti grazie al progetto FisicaMente 2018 – 2024, in particolare dalla valutazione del parametro phi ( $\phi$  = coefficients for each pair of matched items) si evince che tale quesito è sbilanciato, l’item in fisica riporta un *Facility Index* (FI) più basso. Nell’analisi dei dati le differenze di FI superiori al 10% e i valori di  $\phi$  inferiori a 0.30 sono contrassegnati con un asterisco, riportiamo i valori rilevanti:

Tabella 3: *Facility Index* e Coefficiente  $\phi$  negli anni (2018-2024), quesito 12.

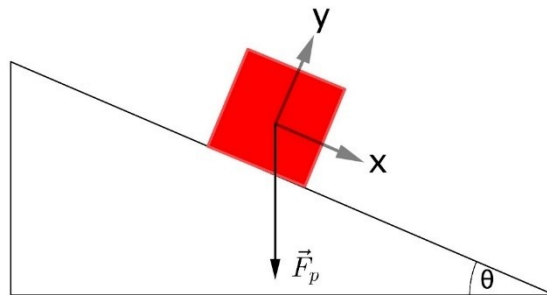
Anno	FI	$\phi$
2018	0.12*	0.35
2019	0.15*	0.37
2020	0.12*	0.38
2021	0.13*	0.43
2022	0.12*	0.38
2024	0.15*	0.32

La proposta è quella di apportare due piccole modifiche all'item 12 P:

1. Modifica della rappresentazione del piano cartesiano: spostare il centro del piano nel punto in cui si deve scomporre la forza;
2. Modificare il testo che esplicita la domanda: passare dall'attuale testo "Quale delle seguenti opzioni è una rappresentazione corretta di  $F_x$  e  $F_y$ , le componenti di  $\vec{F}_p$  lungo  $x$  e lungo  $y$ ?" alla modifica "Quale delle seguenti opzioni è una rappresentazione corretta di  $F_x$ , la componente di  $\vec{F}_p$  lungo l'asse  $x$ , e  $F_y$ , la componente di  $\vec{F}_p$  lungo l'asse  $y$ ?".

Il nuovo item sarebbe così strutturato:

Item 12P. Un oggetto si muove lungo un piano inclinato. La forza peso  $\vec{F}_p$  dell'oggetto (di modulo  $F_p$ ) è illustrata nella figura seguente.



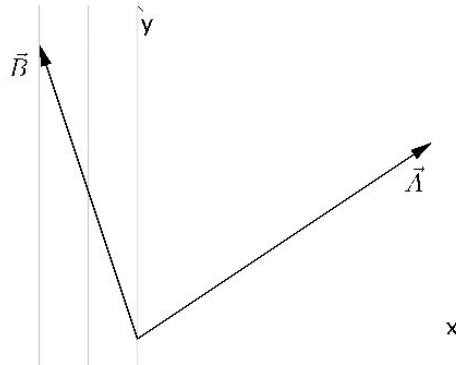
Quale delle seguenti opzioni è una rappresentazione corretta di  $F_x$ , la componente di  $\vec{F}_p$  lungo l'asse  $x$ , e  $F_y$ , le componenti di  $\vec{F}_p$  lungo l'asse  $y$ ?

- (A)  $F_x = F_p \sin \theta$  ;  $F_y = -F_p \cos \theta$
- (B)  $F_x = F_p \sin \theta$  ;  $F_y = F_p \cos \theta$
- (C)  $F_x = F_p \cos \theta$  ;  $F_y = -F_p \sin \theta$
- (D)  $F_x = F_p \cos \theta$  ;  $F_y = F_p \sin \theta$
- (E)  $F_x = 0$  ;  $F_y = F_p$

### 3.4 Revisione item 13M e 13P

#### 3.4.1 Coppia di item del test TCV-MP attuale:

**Item 13M.** La figura seguente mostra il vettore  $\vec{A} = (A_x, A_y)$  di modulo  $A$  e il vettore  $\vec{B} = (B_x, B_y)$  di modulo  $B$ .



Quale tra le seguenti è una rappresentazione corretta di  $C$ , il modulo di  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ ?

(A)  $C = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2}$

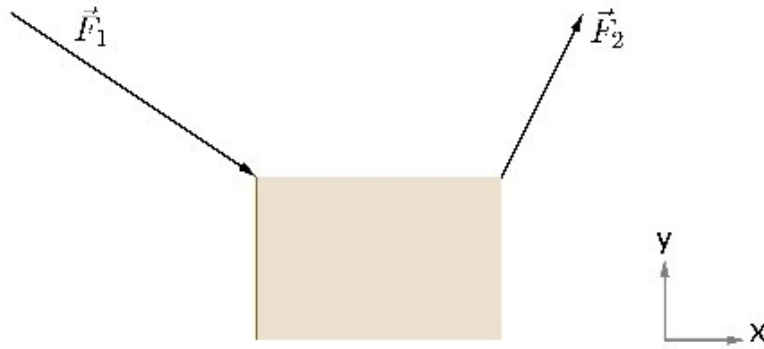
(B)  $C = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2}$

(C)  $C = A + B$

(D)  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$

(E)  $C = \sqrt{(A_x + A_y)^2 + (B_x + B_y)^2}$

**Item 13P.** Su una cassa agiscono le forze  $\vec{F}_1 = (F_{1x}, F_{1y})$ , di modulo  $F_1$ , ed  $\vec{F}_2 = (F_{2x}, F_{2y})$ , di modulo  $F_2$ , come illustrato nella figura seguente.



Quale tra le seguenti è una corretta rappresentazione di  $F$ , il modulo di  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ ?

(A)  $F = \sqrt{(F_{1x} + F_{2x})^2 + (F_{1y} + F_{2y})^2}$

(B)  $F = \sqrt{(F_{1x} - F_{2x})^2 + (F_{1y} - F_{2y})^2}$

(C)  $F = F_1 + F_2$

(D)  $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

(E)  $F = \sqrt{(F_{1x} + F_{1y})^2 + (F_{2x} + F_{2y})^2}$

### 3.4.2 Proposta

Il quesito 13 riguarda la somma tra vettori, non vengono proposti cambiamenti per tale argomento. Riportiamo per completezza una tabella con i dati ottimali che tale quesito ha ottenuto in FisicaMente (2018 – 2024):

Tabella 4: Dati analisi anni (2018-2024), quesito 13.

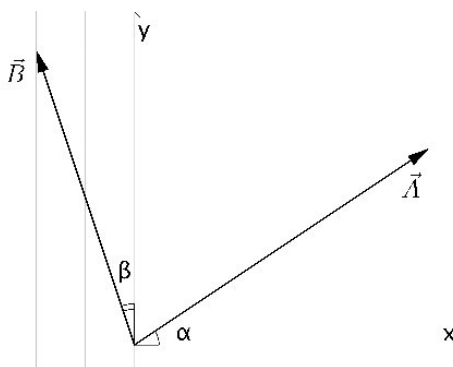
Anno	$\phi$	FI differenza (M-P)	DI27% (M)	DI27% (P)
2018	0.44	-0.02	0.45	0.59
2019	0.36	-0.02	0.45	0.56
2020	0.48	-0.07	0.56	0.66
2021	0.41	0.00	0.39	0.51
2022	0.40	-0.02	0.35	0.57

2024	0.32	0.02	0.42	0.70
------	------	------	------	------

### 3.5 Revisione item 14M e 14P

#### 3.5.1 Coppia di item del test TCV-MP attuale:

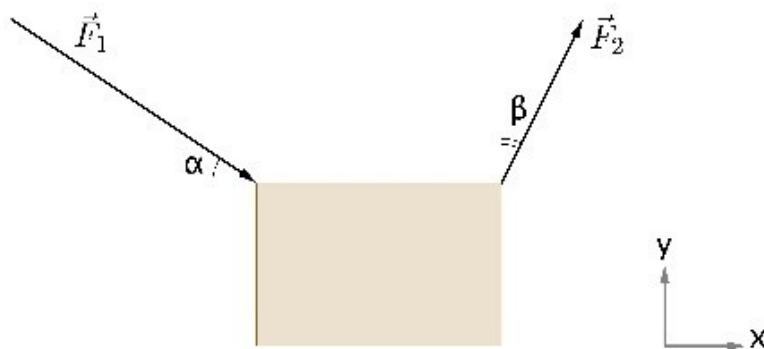
**Item 14M.** La figura seguente mostra il vettore  $\vec{A}$  di modulo  $A$  e il vettore  $\vec{B}$  di modulo  $B$ , e i due angoli positivi  $\alpha$  e  $\beta$ .



Quale tra le seguenti è una rappresentazione corretta di  $C$ , la componente lungo  $x$  di  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ ?

- (A)  $C_x = A \cos \alpha - B \sin \beta$
- (B)  $C_x = A \cos \alpha + B \sin \beta$
- (C)  $C_x = A \sin \alpha - B \cos \beta$
- (D)  $C_x = A \cos \alpha - B \cos \beta$
- (E)  $C_x = A \cos \alpha + B \cos \beta$

**Item 14P.** Su una cassa agiscono le forze  $\vec{F}_1$ , di modulo  $F_1$ , ed  $\vec{F}_2$ , di modulo  $F_2$ , come illustrato nella figura seguente. Gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  sono entrambi positivi.



Quale tra le seguenti è una corretta rappresentazione di  $F_x$ , la componente  $x$  di  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ ?

- (A)  $F_x = F_1 \cos \alpha + F_2 \sin \beta$
- (B)  $F_x = F_1 \cos \alpha - F_2 \sin \beta$
- (C)  $F_x = F_1 \sin \alpha + F_2 \cos \beta$
- (D)  $F_x = F_1 \sin \alpha - F_2 \cos \beta$
- (E)  $F_x = F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta$

### 3.5.2 Proposta

Tale quesito racchiude in sé le componenti con seno e coseno e la somma. Tali abilità sono state già testate nei quesiti 12 e 13. La proposta prevede l'eliminazione di questo quesito in quanto sarebbe utile ai fini del test cercare di mantenere contenuta la lunghezza totale. Questo item è l'unico, nella sezione dei vettori, a non essere strettamente necessario, bensì una sintesi dei due punti precedenti.

Riportiamo per completezza una tabella con i dati che tale quesito ha ottenuto in FisicaMente (2018 – 2024). Nell'analisi dei dati le differenze di FI superiori al 10% e i valori di  $\phi$  inferiori a 0.30 sono contrassegnati con un asterisco:

Tabella 5: Coefficiente  $\phi$  e differenza FI (2018-2024), quesito 14.

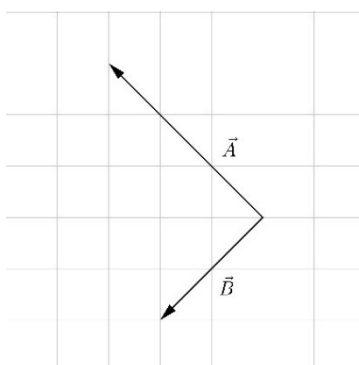
Anno	$\phi$	FI differenza (M-P)	DI27% (M)	DI27% (P)
2018	0.35	-0.09	0.47	0.56

2019	0.28	-0.13*	0.46	0.59
2020	0.40	-0.15*	0.49	0.63
2021	0.38	-0.11*	0.53	0.64
2022	0.32	-0.13*	0.52	0.65
2024	0.34	-0.08	0.49	0.57

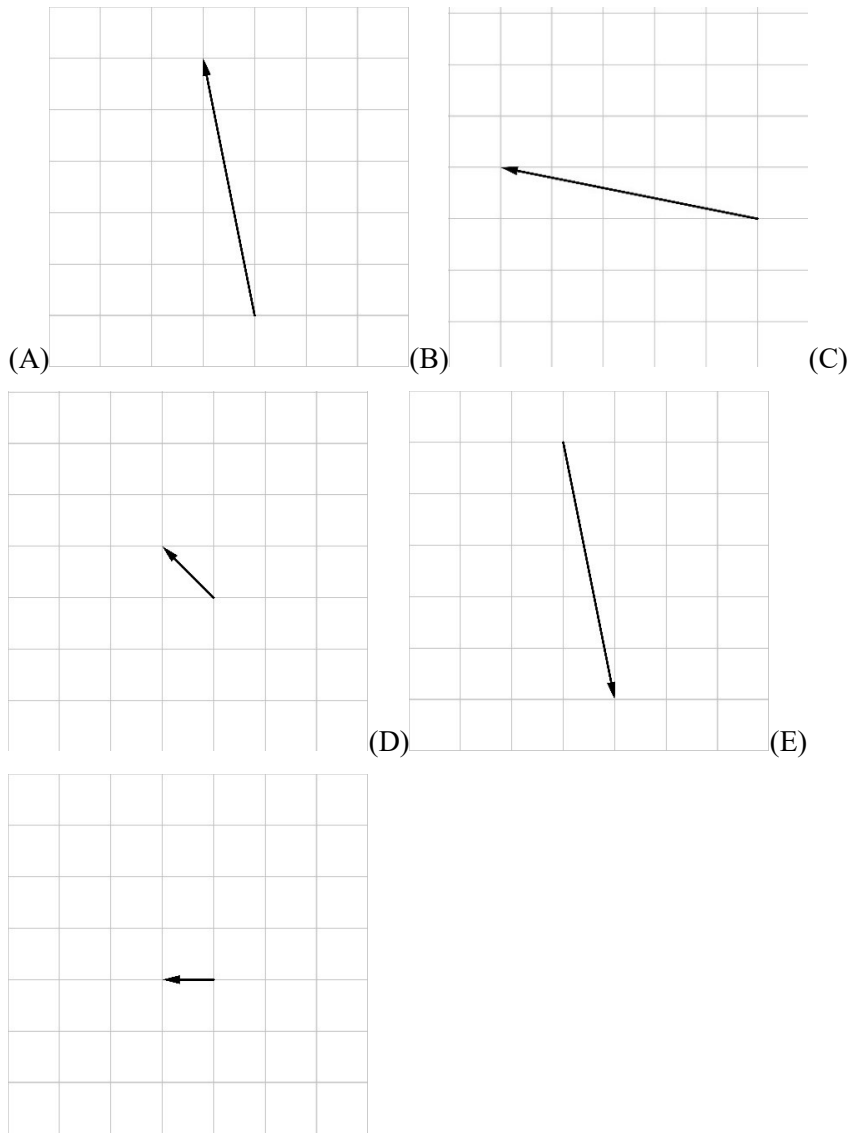
### 3.6 Revisione item 15M e 15P

#### 3.6.1 Coppia di item del test TCV-MP attuale:

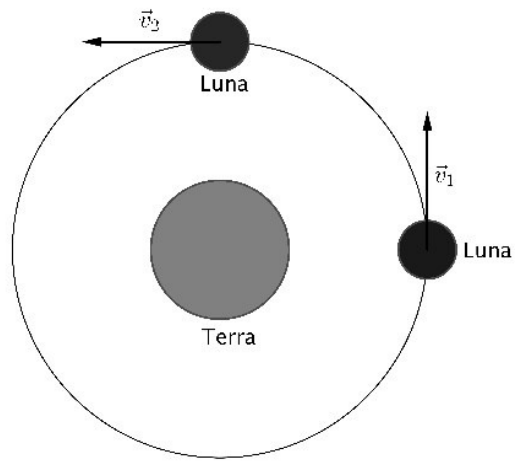
**Item 15M.** Due vettori,  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , sono mostrati nella figura seguente.




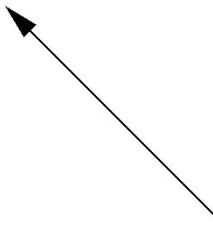

Quale tra le seguenti è una rappresentazione corretta di  $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$ ?



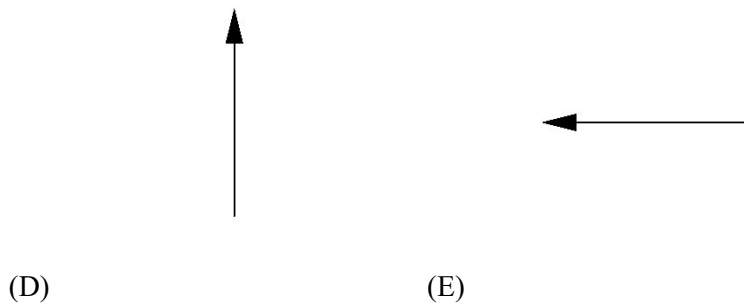
**Item 15P.** La figura seguente mostra la posizione e la velocità della Luna in due istanti di tempo, a distanza di 7 giorni l'uno dall'altro.



Quale opzione rappresenta correttamente la variazione di velocità della luna,  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ , tra i due istanti di tempo?

- (A) 
- (B) 
- (C) 

•  
 $\Delta \vec{v} = 0$

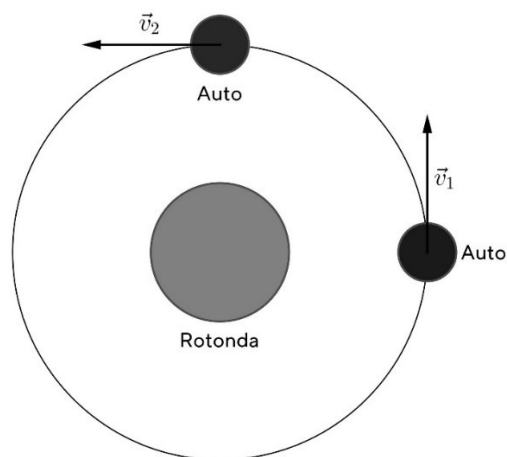


### 3.6.2 Proposta

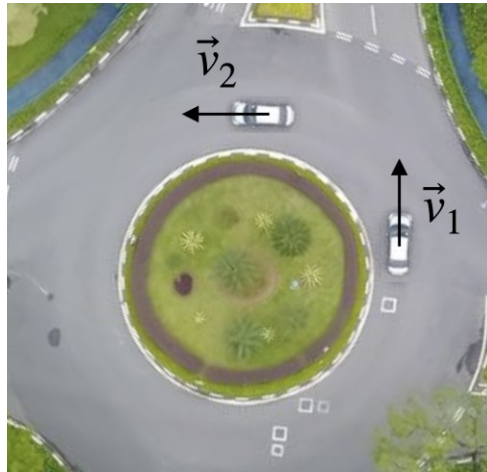
In questo quesito viene trattato come argomento la differenza tra vettori. Nonostante statisticamente il quesito risulti ottimale, si propone una piccola modifica al testo. Si vuole suggerire di utilizzare lo stesso quesito, ma cambiare il contesto gravitazionale. L'utilizzo di elementi come "luna" o "terra" porta lo svantaggio di indurre lo studente a credere che lo scopo dell'item sia quello di lavorare sulla gravitazione.

Lavorare con un'auto che percorre una curva (rappresentandola come punto materiale), ad esempio, aiuterebbe ad inquadrare lo scopo dell'item e a concentrarsi sulla differenza tra vettori, senza evocare un contesto differente rispetto alla cinematica. Questo risponderebbe ad alcuni docenti intervistati che hanno mostrato qualche diffidenza nel contesto di tale quesito.


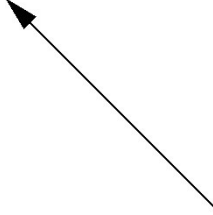
Si propone un'alternativa nella rappresentazione: inserire un'auto al posto del punto materiale potrebbe rendere più realistico il quesito.




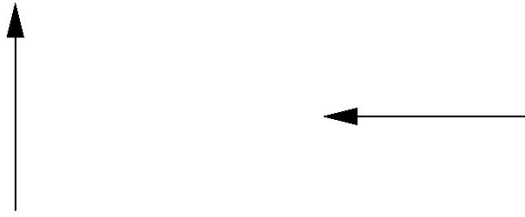
Item 15P. La figura seguente mostra la posizione e la velocità di un'auto in due istanti di tempo, a distanza di qualche secondo l'uno dall'altro, mentre percorre un tratto di rotonda.



Quale opzione rappresenta correttamente la variazione di velocità dell'auto,  $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ , tra i due istanti di tempo?

- (A)  (B)  (C)

  
 $\Delta\vec{v} = 0$



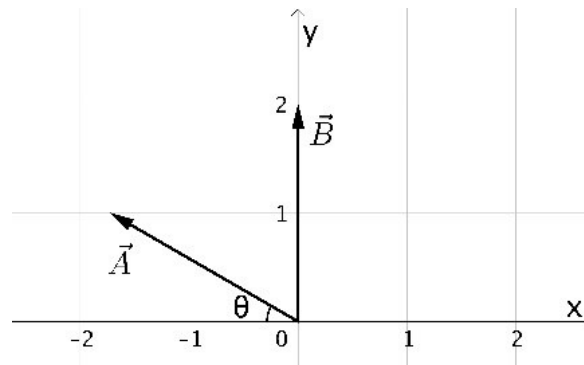
(D)

(E)

### 3.7 Revisione item 16M e 16P

#### 3.7.1 Coppia di item del test TCV-MP attuale:

**Item 16M.** La figura seguente mostra il vettore  $\vec{A}$  di modulo 2 che forma un angolo  $\theta = 30^\circ$  con l'asse  $x$ , e il vettore  $\vec{B} = 2\hat{j}$ .  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  sono i vettori di modulo unitario diretti rispettivamente lungo  $x$ ,  $y$  e  $z$ .



Quanto vale il prodotto scalare  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ?

(A) 2

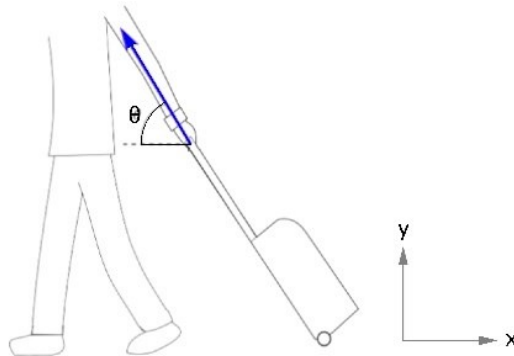
(B)  $-2\sqrt{3}\hat{k}$

(C) 4

(D)  $2\sqrt{3}$

(E)  $-2\sqrt{3}\hat{i} + 2\hat{j}$

**Item 16P.** Un ragazzo trascina una valigia esercitando su di essa la forza costante  $\vec{F}$  di modulo  $4N$ , rappresentata in figura, con  $\theta = 60^\circ$ .



Siano  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  i vettori di moduli unitario diretti rispettivamente lungo  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Quanto vale il lavoro svolto sulla valigia dalla forza  $\vec{F}$  lungo uno spostamento  $\vec{s} = (-2m)\hat{i}$ ?

- (A)  $4J$
- (B)  $(-4\sqrt{3}J)\hat{k}$
- (C)  $-8J$
- (D)  $4\sqrt{3}J$
- (E)  $(-4J)\hat{i} + (4\sqrt{3})\hat{j}$

### 3.7.2 Proposte

Il quesito 16 ed il quesito 17 sono gli item più critici. Dalle statistiche si evince che i *Facility Index* sono molto bassi, dal 2018 al 2024, oltre l'anno 2022, il valore resta sotto al 0.40. La seguente tabella mostra il quesito 16 nello specifico:

Tabella 6: *Facility Index (M)*, *Facility Index (P)* e *Coefficiente  $\phi$*  negli anni (2018-2024), quesito 16.

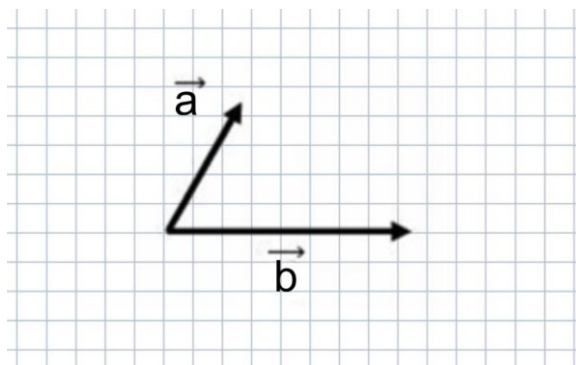
Anno	FI (M)	FI (P)	$\phi$
2018	0.37	0.39	0.36
2019	0.35	0.37	0.34
2020	0.36	0.40	0.49
2021	0.40	0.44	0.37
2022	0.42	0.41	0.38
2024	0.38	0.38	0.34

Le ipotesi proposte sono:

- Sdoppiare l'item per mettere in luce due aspetti: il concetto e il calcolo. In questo modo si può distinguere tra la conoscenza del concetto dalla sua applicazione.
- Lasciare l'item corrente e modificare le risposte. Attualmente le risposte del quesito prevedono lo svolgimento di un calcolo, la proposta è l'aggiunta di un'interpretazione espressa a parole.

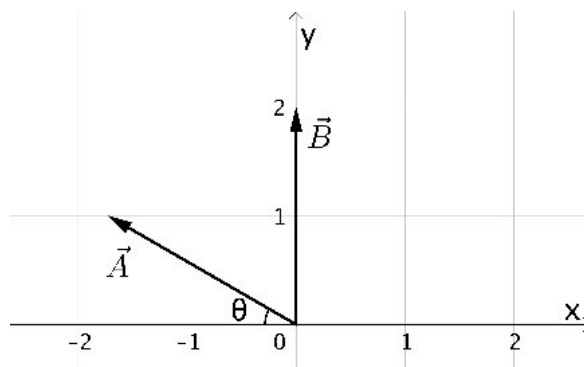
(L'item 16M.1. è stato ispirato dal quesito 3 del test TUV [63], l'immagine è stata rielaborata per garantire un'omogeneità dal punto di vista grafico.)

Item 16M.1. La figura mostra due vettori  $\vec{a}, \vec{b}$ . Quale opzione è la miglior interpretazione del prodotto scalare  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  ?



- (A) La proiezione del vettore  $\vec{a}$  sul vettore  $\vec{b}$  moltiplicata per l'intensità di  $\vec{b}$ .
- (B) L'intensità di un vettore compreso tra  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  che punta verso l'alto a destra.
- (C) Un vettore compreso tra  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  che punta verso l'alto a destra.
- (D) Un vettore perpendicolare a entrambi
- (E) Un vettore nella direzione di  $\vec{b}$

Item 16M.2. La figura seguente mostra il vettore  $\vec{A}$  di modulo 2 che forma un angolo  $\theta = 30^\circ$  con l'asse  $x$ , e il vettore  $\vec{B} = 2\hat{j}$ .  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  sono i vettori di modulo unitario diretti rispettivamente lungo  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

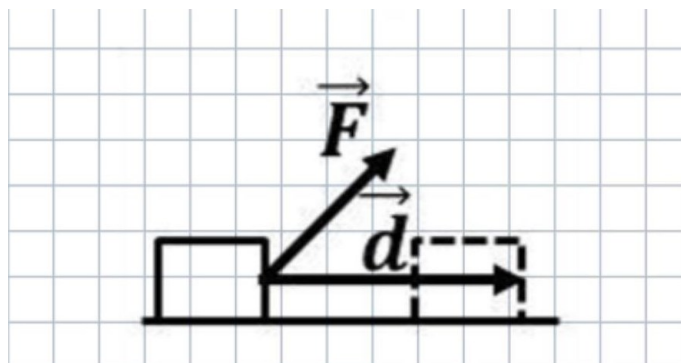


Quanto vale il prodotto scalare  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ?

- (A) 2
- (B)  $-2\sqrt{3}\hat{k}$
- (C) 4
- (D)  $2\sqrt{3}$
- (E)  $-2\sqrt{3}\hat{i} + 2\hat{j}$

(L'item 16P.1. è stato ispirato dal quesito 3 del test TUV [72] con un'integrazione fisica elaborata ed esposta da G. Zavala e P. Barniol nel lavoro Students' Understanding of Dot Product as a Projection in No-context, Work and Electric Flux Problems, PERC 2012 [45]. L'immagine è stata rielaborata per garantire un'omogeneità dal punto di vista grafico.)

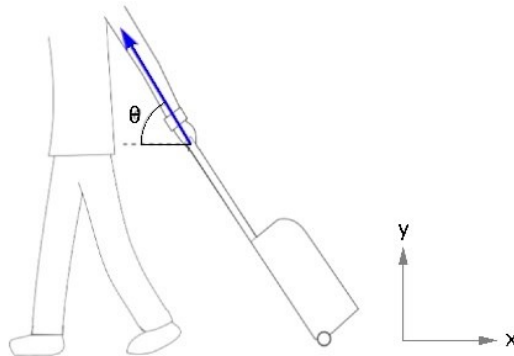
Item 16P.1. La figura mostra una forza  $\vec{F}$  che agisce su una scatola. Quale opzione è la miglior interpretazione del lavoro fatto dalla forza  $\vec{F}$  per spostare la scatola di un vettore  $\vec{d}$ .



- (A) La proiezione del vettore  $\vec{F}$  sul vettore  $\vec{d}$  moltiplicata per l'intensità di  $\vec{d}$ .

- (B) L'intensità di un vettore compreso tra  $\vec{F}$  e  $\vec{d}$  che punta verso l'alto a destra.
- (C) Un vettore compreso tra  $\vec{F}$  e  $\vec{d}$  che punta verso l'alto a destra.
- (D) Un vettore perpendicolare a entrambi.
- (E) Un vettore nella direzione di  $\vec{d}$ .

**Item 16P.2.** Un ragazzo trascina una valigia esercitando su di essa la forza costante  $\vec{F}$  di modulo  $4N$ , rappresentata in figura, con  $\theta = 60^\circ$ .



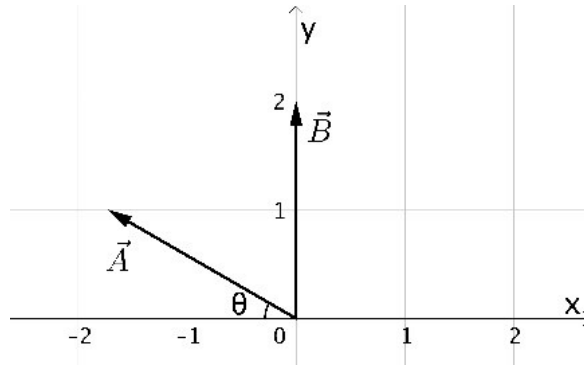
Siano  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  i vettori di moduli unitario diretti rispettivamente lungo  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Quanto vale il lavoro svolto sulla valigia dalla forza  $\vec{F}$  lungo uno spostamento  $\vec{s} = (-2m) \hat{i}$ ?

- (A)  $4J$
- (B)  $(-4\sqrt{3}J)\hat{k}$
- (C)  $-8J$
- (D)  $4\sqrt{3}J$
- (E)  $(-4J)\hat{i} + (4\sqrt{3})\hat{j}$

### 3.8 Revisione item 17M e 17P

#### 3.8.1 Coppia di item del test TCV-MP attuale:

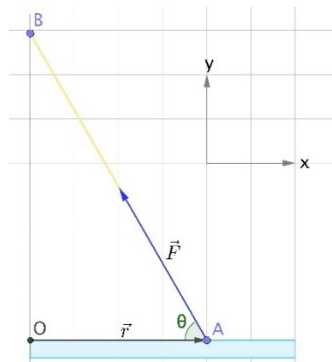
**Item 17M.** La figura seguente mostra il vettore  $\vec{A}$  di modulo 2 che forma un angolo  $\theta = 30^\circ$  con l'asse  $x$ , e il vettore  $\vec{B} = 2\hat{j}$ .  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  sono i vettori di modulo unitario diretti rispettivamente lungo  $x$ ,  $y$  e  $z$ .



Quanto vale il prodotto vettoriale  $\vec{A} \times \vec{B}$ ?

- (A)  $-2\sqrt{3}\hat{k}$
- (B)  $4\hat{k}$
- (C) 4
- (D) 2
- (E)  $-2\sqrt{3}\hat{i} + 2\hat{j}$

**Item 17P.** Un'asta metallica è vincolata al muro nel punto  $O$  ed è sostenuta da una fune nel punto  $A$ , a una distanza  $\vec{r} = (4m)\hat{i}$  da  $O$ . La fune esercita sull'asta una forza  $\vec{F}$  di modulo  $4N$ , rappresentata in figura con  $\theta = 60^\circ$ .



Siano  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  i vettori di modulo unitario diretti rispettivamente lungo  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Quanto vale il momento della forza  $\vec{F}$  rispetto al punto  $O$ ?

- (A)  $(8\sqrt{3}Nm)\hat{k}$
- (B)  $(16Nm)\hat{k}$
- (C)  $16Nm$
- (D)  $-8Nm$
- (E)  $(-8Nm)\hat{i} + (8\sqrt{3}Nm)\hat{j}$

### 3.8.2 Proposte

La proposta per questo quesito è quella di sostituirlo con una versione modificata del quesito numero 12 presente nel Test of Understanding of Vectors (TUV). Tale scelta è volta a rendere più mirata l'attenzione dello studente ed a facilitare la conclusione del test in modo sereno. In questo modo si punterebbe maggiormente l'attenzione sul concetto di prodotto vettoriale piuttosto che sul calcolo. Forse in questa fase l'item risulterebbe così meno ancorato alla pura conoscenza dichiarativa. In fisica si potrebbe tradurre utilizzando comunque il momento di una forza ma mantenendo queste opzioni.

La seguente tabella mostra i risultati ottenuti dal quesito 17 nell'analisi condotta dal progetto FisicaMente (2018 – 2024). Nella tabella i dati che riportano valori di  $\phi$  inferiori a 0.30 sono contrassegnati con un asterisco:

Tabella 7: Facility Index (M), Facility Index (P) e Coefficiente  $\phi$  negli anni (2018-2024), quesito 17.

Anno	FI (M)	FI (P)	$\phi$
2018	0.41	0.32	0.35
2019	0.39	0.30	0.31
2020	0.38	0.31	0.42
2021	0.43	0.34	0.44
2022	0.43	0.31	0.41
2024	0.46	0.31	0.32

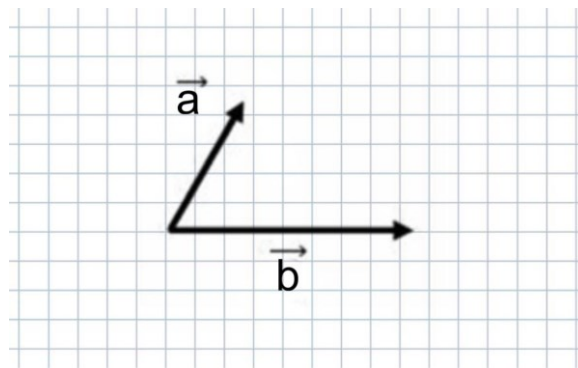
Le ipotesi proposte di seguito sono state elaborate considerando un parallelismo, oltre quello tra matematica e fisica, tra prodotto scalare (quesito 16) e prodotto vettoriale (quesito 17):

- Sdoppiare l'item per mettere in luce due aspetti: il concetto e il calcolo. In questo modo si può distinguere tra la conoscenza del concetto dalla sua applicazione.

- Lasciare l'item corrente e modificare le risposte. Attualmente le risposte del quesito prevedono lo svolgimento di un calcolo, la proposta è l'aggiunta di un'interpretazione espressa a parole.
- Aggiungere una proposta che sfrutta la rappresentazione grafica sia nella domanda che nella risposta. Il test TCV-MP ha una particolare attenzione al coinvolgimento delle possibili rappresentazioni per coinvolgere gli studenti e sviluppare al meglio ogni argomento.

(L'item 17M. è stato ispirato dal quesito 12 del test TUV [72], l'immagine è stata rielaborata per garantire un'omogeneità dal punto di vista grafico.)

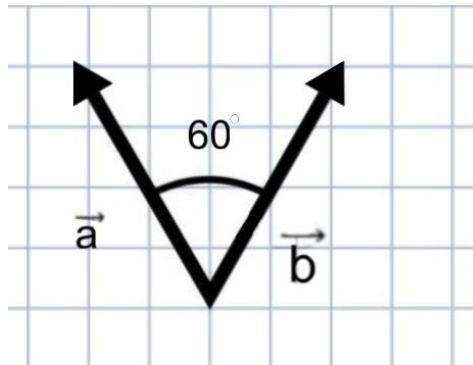
Item 17M.1. La figura sotto mostra i vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Quale opzione è la migliore interpretazione del prodotto vettoriale  $\vec{a} \times \vec{b}$ ?



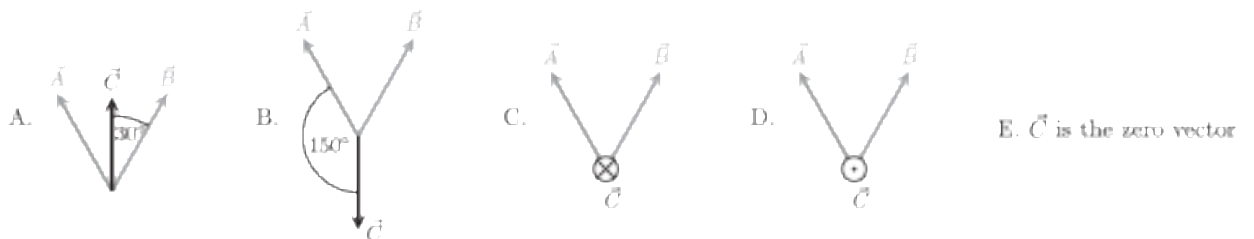
- (A) Un vettore perpendicolare ad entrambi i vettori con direzione entrante dalla pagina.
- (B) Un vettore compreso tra  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  con direzione verso l'alto a destra.
- (C) Il modulo di un vettore compreso tra  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  che punta verso l'alto a destra.
- (D) Una grandezza orientata in senso orario.
- (E) Un vettore perpendicolare ad entrambi i vettori con una direzione entrante nella pagina.

(Versione grafica dell'item 17M.2. ispirata dal lavoro di Deprez et al. (2019) Investigating student understanding of cross products in a mathematical and two electromagnetism contexts, PRPER [73]. Le immagini sono state rielaborate per garantire un'omogeneità dal punto di vista grafico.)

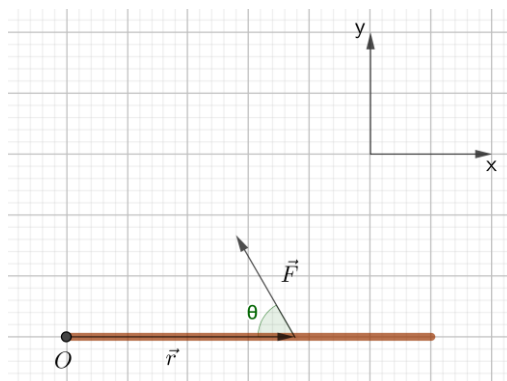
Item 17M.2. Il vettore  $\vec{a}$  forma un angolo di  $60^\circ$  con il vettore  $\vec{b}$ .



Quale tra le seguenti figure proposte rappresenta la corretta direzione del prodotto vettoriale  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ?



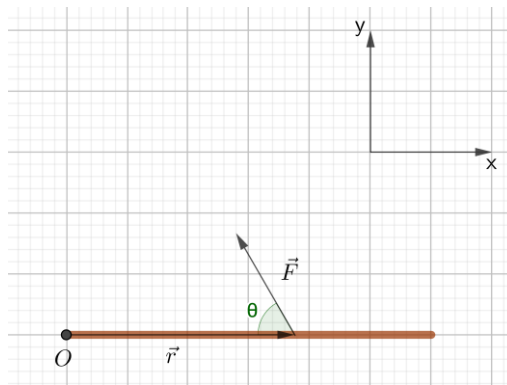
Item 17P.1. La figura sotto mostra una forza che  $\vec{F}$  applicata su una porta a una distanza  $\vec{r}$  dai cardini (O). La forza causa la rotazione della porta. Quale opzione è la miglior interpretazione del momento dalla forza  $\vec{F}$ .



(A) Un vettore perpendicolare ad entrambi i vettori con una direzione uscente nella pagina.

- (B) Un vettore compreso tra  $\vec{F}$  e  $\vec{r}$  con direzione verso l'alto a destra.
- (C) Un vettore perpendicolare ad entrambi i vettori con direzione entrante dalla pagina.
- (D) Il modulo di un vettore compreso tra  $\vec{F}$  e  $\vec{r}$  che punta verso l'alto a destra.
- (E) Una grandezza orientata in senso orario.

Item 17P.2. La figura sotto mostra una forza  $\vec{F}$  applicata su una porta a una distanza  $\vec{r} = (4m)\hat{i}$  dai cardini (O). La forza, rappresentata in figura, ha modulo  $4N$  e forma un angolo  $\theta = 60^\circ$  con la porta. Essa causa la rotazione della porta.



Siano  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  i vettori di modulo unitario diretti rispettivamente lungo  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Quanto vale il momento della forza  $\vec{F}$  rispetto al punto  $O$ ?

- (A)  $(8\sqrt{3}Nm)\hat{k}$
- (B)  $(16Nm)\hat{k}$
- (C)  $16Nm$
- (D)  $-8Nm$
- (E)  $(-8Nm)\hat{i} + (8\sqrt{3}Nm)\hat{j}$

## 4 Elaborazione dei risultati

Le analisi statistiche condotte nell'ambito di questo studio sono state organizzate in tre macroaree principali, ciascuna delle quali mira a indagare specifici aspetti delle prestazioni degli studenti:

1. **Analisi complessiva del campione totale:** questa fase ha fornito una panoramica generale dei risultati ottenuti dagli studenti, consentendo di valutare le loro prestazioni medie e la distribuzione dei punteggi nei diversi quesiti del test. Tale analisi è stata fondamentale per identificare eventuali criticità comuni e delineare un profilo generale delle competenze in matematica e fisica.
2. **Analisi delle differenze di genere:** è stata condotta un'analisi mirata a esplorare possibili differenze statisticamente significative tra i risultati ottenuti da studenti di genere femminile e maschile. Questo approfondimento ha permesso di evidenziare eventuali discrepanze nelle prestazioni, contribuendo a comprendere meglio l'influenza del genere sull'apprendimento delle competenze valutate dal test.
3. **Analisi comparativa con il campione del progetto *FisicaMente*:** I risultati degli studenti di Medicina e Chirurgia, Odontoiatria e Tecniche della Prevenzione sono stati confrontati con quelli di un campione di studenti della Scuola di Scienze e della Scuola di Ingegneria che hanno partecipato al progetto *FisicaMente* nell'anno accademico 2023/2024. Questo confronto ha permesso di mettere in relazione le performance degli studenti di Medicina, provenienti da un percorso di studio meno orientato alle discipline scientifiche, con quelle di studenti iscritti a corsi maggiormente incentrati sulle scienze e l'ingegneria, offrendo spunti di riflessione sul diverso approccio alle competenze matematiche e fisiche tra i due gruppi.

Per il presente studio, il campione iniziale era composto da 173 partecipanti, provenienti da tre diversi corsi di laurea: Medicina e Chirurgia, Odontoiatria e Protesi Dentaria, e Tecniche della Prevenzione nell'Ambiente e nei Luoghi di Lavoro.

Tuttavia, ai fini dell'analisi, sono stati esclusi 26 partecipanti che hanno lasciato il test completamente in bianco o hanno risposto a meno di 10 quesiti dei 34 quesiti proposti. Questa scelta è stata motivata dalla necessità di garantire la significatività dei dati raccolti, escludendo risposte incomplete o non rappresentative, consentendo un'analisi statistica significativa.

Dopo l'applicazione di questo criterio, il campione finale analizzato è risultato composto da 143 partecipanti, suddivisi come segue:

*Tabella 8: Partecipanti FisicaMente 2024/2025*

<b>Corso di Laurea</b>	<b>Numero di Partecipanti</b>
Medicina e Chirurgia	83
Odontoiatria e Protesi dentaria	24
Tecniche della Prevenzione nell'Ambiente e nei Luoghi di Lavoro	16
Totale finale	143

## **4.1 Analisi statistica del campione totale**

Per l'elaborazione e l'analisi dei dati raccolti, sono stati utilizzati due strumenti principali: Microsoft Excel per la gestione e l'organizzazione preliminare dei dati e JASP (versione 0.19.1.0) per l'analisi statistica avanzata. L'impiego di entrambi questi strumenti ha garantito un'elaborazione accurata e coerente con quanto riportato nella letteratura scientifica sulle performance degli studenti nell'ambito delle operazioni con i vettori [43-46, 48-50, 60].

L'analisi è stata strutturata seguendo un approccio sequenziale che ha permesso di esaminare diversi aspetti delle prestazioni degli studenti:

- Analisi descrittiva del campione totale, per fornire una visione generale dei risultati ottenuti nel test.
- Confronto dei punteggi ottenuti nelle sezioni di matematica e fisica, al fine di valutare la coerenza tra le competenze nelle due discipline.
- Esame del parametro di *confidence*, ovvero il punteggio che misura il livello di fiducia degli studenti nelle risposte fornite. Per semplicità, adotteremo il termine *confidence score*, poiché è la denominazione utilizzata nei software di analisi statistica.

Questa struttura ha consentito di ottenere una visione chiara e articolata delle competenze degli studenti, evidenziando eventuali punti di forza e aree critiche su cui è possibile intervenire.

Inizialmente, è stato esaminato il grafico della distribuzione dei voti, utilizzando la funzione Distribution Plots di JASP (Figura 1).

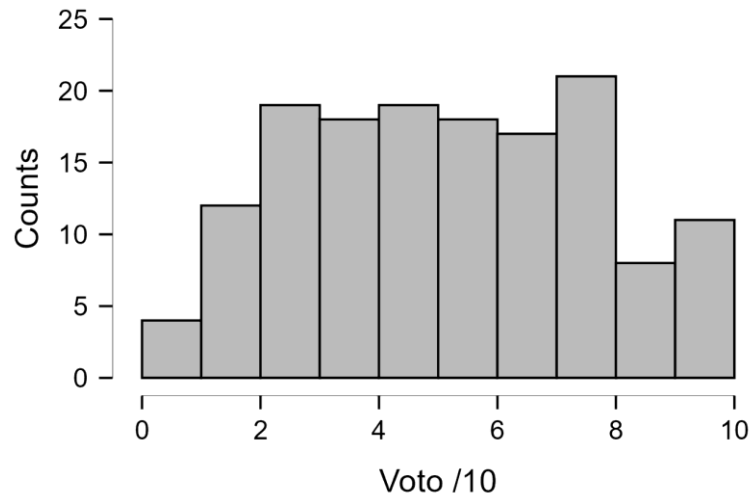


Figura 1: Distribution Plots

Da una valutazione preliminare visiva, la distribuzione è apparsa piatta, non riconducibile a una forma campanulare tipica della distribuzione gaussiana. Questo ha suggerito la necessità di verificare se il campione seguisse effettivamente una distribuzione normale.

La verifica della normalità di una distribuzione si basa sul confronto tra due diversi stimatori della varianza: la varianza basata sulla media campionaria (che si calcola considerando tutti i valori del campione rispetto alla loro media) e la varianza basata sulla distribuzione normale teorica (che si calcola assumendo che i dati seguano una distribuzione normale).

Se i dati sono distribuiti normalmente, i due stimatori della varianza tendono a coincidere. Tuttavia, quando la distribuzione dei dati differisce significativamente da quella normale (ad esempio, quando la distribuzione appare piatta o asimmetrica), questi due stimatori presentano differenze rilevanti. Tale confronto rappresenta una valutazione preliminare.

Per confermare la valutazione visiva della distribuzione, è stato utilizzato il test di *Shapiro-Wilk*, uno dei metodi più robusti e affidabili per verificare se un campione di dati segue una distribuzione normale. L'interpretazione del test prevede che se  $Shapiro-Wilk \approx 1$  il campione è compatibile con una distribuzione normale, se

*Shapiro-Wilk* significativamente inferiore a 1, la distribuzione del campione si discosta dalla normalità.

Il risultato del test di *Shapiro-Wilk* è accompagnato da un p-value: Se  $p > 0.05$  non si rifiuta l'ipotesi nulla (i dati possono essere considerati normalmente distribuiti). Se  $p \leq 0.05$ : si rifiuta l'ipotesi nulla, indicando che i dati non seguono una distribuzione normale.

Tabella 9: *Shapiro-Wilk* distribuzione voto in decimi  $N=147$

	Voto /10
Shapiro-Wilk	0.97
P-value of Shapiro-Wilk	0.005

Nel nostro caso (Tabella 9), il p-value ottenuto dal test di Shapiro-Wilk pari a 0.005 ha indicato che il campione non segue una distribuzione normale, questa evidenza ha confermato l'osservazione iniziale derivata dall'analisi grafica ed ha guidato la scelta di utilizzare la mediana come misura di tendenza centrale, piuttosto che la media, per rappresentare in modo più accurato i dati raccolti. La mediana è più robusta rispetto a valori estremi e non è influenzata da distribuzioni asimmetriche o outlier.

Tabella 10: Analisi descrittiva completa ( $N=147$ )

	Voto /10
Median	5.29
Mean	5.20
Minimum	0.59
Maximum	10.00

Un ulteriore passo nell'analisi ha riguardato la verifica della correlazione tra i punteggi ottenuti in matematica e quelli ottenuti in fisica. Utilizzando il modulo di *Regressione* di JASP, è stata eseguita un'analisi di correlazione, inserendo i punteggi relativi ai quesiti di matematica e quelli di fisica, espressi sempre in decimi, come variabili. Il

risultato di questa analisi ha fornito un *coefficiente di Pearson* ( $r$ ) pari a 0.782, con un  $p$ -value  $< 0.001$ , indicando un risultato altamente significativo dal punto di vista statistico.

Il *coefficiente di Pearson*, che misura la forza e la direzione della correlazione lineare tra due variabili, può assumere valori compresi tra  $-1$  e  $+1$ . Un valore positivo vicino a  $+1$  indica una relazione lineare positiva tra le due variabili, mentre un valore vicino a  $-1$  indica una relazione lineare negativa. Nel nostro caso, il valore di  $r = 0.782$  indica una buona correlazione tra i punteggi di matematica e fisica, suggerendo che gli studenti che ottengono buoni risultati in matematica tendono ad avere buoni risultati anche in fisica.

Tale correlazione rappresenta un dato positivo per il TCV-MP, poiché evidenzia una coerenza tra le competenze valutate nei due ambiti. Questo aspetto è fondamentale, in quanto dimostra che il test è bilanciato e riflette in modo affidabile il legame tra le due discipline, obiettivo primario dello strumento di valutazione.

Per proseguire l'analisi, è stato creato un file in Excel contenente la *confidence score*, voto in decimi, punteggio in matematica, punteggio in fisica. La *confidence* è stata calcolata chiedendo agli studenti, per ogni quesito, di indicare quanto fossero sicuri della risposta data. Il codice è stato creato così: 1 = Ho tirato ad indovinare, 2 = Non sono molto sicuro, 3 = Sono abbastanza sicuro e 4 = Sono certo. Questo file è stato poi esportato in JASP per condurre ulteriori analisi statistiche.

Il *coefficiente di Pearson* ( $r$ ) è risultato pari a 0.755, un valore piuttosto elevato che indica una forte correlazione positiva tra *confidence score* e voti in decimi, con  $p$ -value  $< 0.001$ . È importante sottolineare che, sebbene i valori siano correlati, la retta di regressione ottenuta non corrisponde perfettamente alla bisettrice, che rappresenterebbe una calibrazione ideale.

Per rappresentare la relazione tra il *confidence score* e i voti ottenuti in decimi, sono stati generati grafici di regressione utilizzando sia JASP sia Excel, che permettono una migliore interpretazione visiva dei dati.

La retta in Figura 2 rappresenta la linea di tendenza (equivalente alla retta di regressione), permettono di osservare come i dati siano distribuiti rispetto alla linea dei valori auspicabili o di calibrazione.

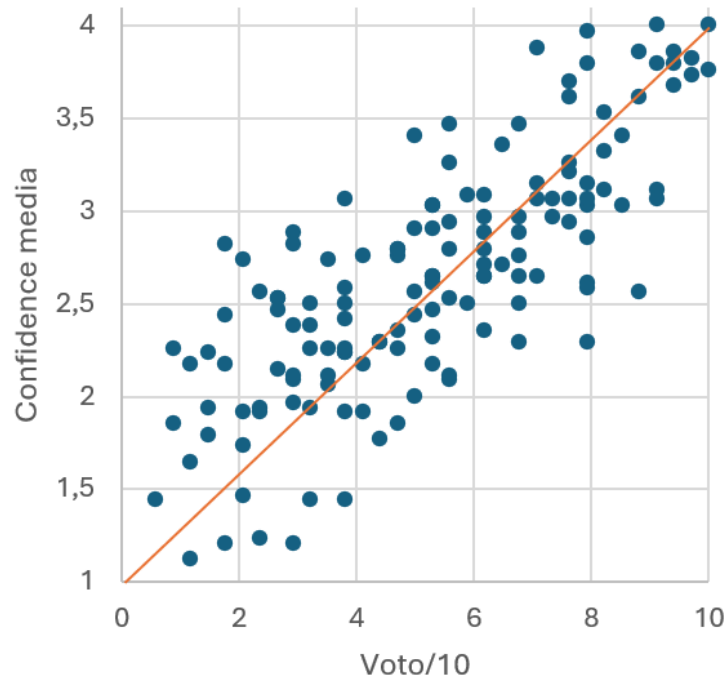


Figura 2: Grafico Excel Confidence score e voto/10, la retta rappresenta la linea di tendenza.

L'osservazione della Figura 2 suggerisce che maggiore è la fiducia percepita dagli studenti, maggiore è la probabilità di ottenere un voto più alto. Sebbene i dati mostrino una correlazione forte, la distribuzione non coincide perfettamente con la bisettrice, che rappresenterebbe una calibrazione ideale. Questo mostrerebbe che, pur esistendo una relazione chiara, altri fattori potrebbero influire sui voti, e la fiducia da sola non può spiegare completamente i risultati.

## 4.2 Analisi in funzione del genere

Il campione è stato organizzato in sottogruppi distinti per genere. Tale analisi segue uno schema analogo a quello adottato nella sezione precedente: un'analisi descrittiva, il confronto dei punteggi ottenuti in matematica e fisica e l'esame del parametro

confidence score. Questo studio nasce dall'osservazione che in letteratura [10, 42] esistono segnali preoccupanti riguardo le differenze di genere nei risultati accademici. Le studentesse spesso riportano una maggiore insicurezza rispetto agli studenti, una condizione che può influire negativamente sul loro rendimento scolastico e sulle performance accademiche in generale. L'intento di questa sezione è esplorare se e come il parametro di *confidence* (*Confidence score*) possa avere un impatto significativo sulle performance degli studenti in relazione al genere.

Durante lo svolgimento del test è stata inserita una domanda sul genere, riconoscendo la pluralità di risposte possibili (donna, uomo, transgender, non binary/non conforming, altro, preferisco non rispondere), ma le uniche risposte ottenute sono state quelle riportate nella tabella 11.

Tabella 11: Voto in decimi suddiviso per genere

	Voto /10		
	Non ha risposto	Donne	Uomini
N	9	85	53
Median	2.06	4.71	6.18
Mean	2.88	4.87	6.11
Std. Deviation	1.89	2.26	2.48
Shapiro-Wilk	0.85	0.98	0.96
P-value of Shapiro-Wilk	0.08	0.12	0.05
Minimum	0.88	0.59	1.18
Maximum	5.59	9.41	10.00

Un'ulteriore analisi effettuata riguarda la verifica di eventuali differenze statisticamente significative tra i risultati del test score delle donne e degli uomini. Sono stati trascurati i dati di chi non ha risposto alla domanda relativa al genere, dato il loro numero esiguo rispetto agli altri due gruppi – donne e uomini. Per condurre

questa analisi, è stato utilizzato un T-test per campioni indipendenti tramite il software JASP.

Il primo passo è stato determinare se i dati seguivano una distribuzione normale, poiché questa condizione influenza la scelta del test statistico appropriato. In caso di distribuzione normale, si applica il T-test di *Student*. Il T-test è un test statistico utilizzato per determinare se ci sono differenze significative tra le medie di due gruppi, o se la media di un gruppo è significativamente diversa da un valore specifico. Il T-test si basa sulla distribuzione t di *Student*, che tiene conto della variabilità del campione. Il T-test di *Student* è la versione più comune del T-test e viene utilizzato in situazioni in cui si ha una distribuzione normale, ma la dimensione del campione è piccola.

Per eseguire un T-test di *Student*, si calcolano tre elementi: la media del campione, la deviazione standard del campione e la dimensione del campione. Il p-value associato al test determina se la differenza tra i gruppi è significativa: se il p-value è inferiore al livello di significatività (tipicamente 0.05), si conclude che c'è una differenza statisticamente significativa tra le medie dei gruppi.

Se non si può assumere che le varianze siano uguali (situazione di varianze non omogenee), si utilizza una versione modificata del T-test per confrontare le medie di due gruppi, il test di *Welch*. A differenza del T-test di *Student*, il test di *Welch* non richiede l'assunzione di omogeneità delle varianze, ossia che i gruppi abbiano varianze simili, inoltre il T-test di *Student* utilizza un numero di gradi di libertà basato sulla dimensione del campione, mentre il test di *Welch* calcola i gradi di libertà in modo più complesso, utilizzando la formula di *Welch-Satterthwaite*.

Il test di *Welch* richiede che i dati siano numerici e che abbiano una distribuzione approssimativamente normale (in ogni gruppo). Se, invece, i dati non seguono una distribuzione normale, si utilizza il test di *Mann-Whitney*, un test non parametrico (test che lavorano direttamente con i ranghi, la posizione relativa di ciascun dato nel campione, anziché con i valori numerici, rendendoli meno sensibili alle distribuzioni irregolari o alla presenza di outlier.) che confronta due campioni indipendenti e verificare se provengono dalla stessa popolazione o se esistono differenze significative

tra di loro. Viene spesso utilizzato come alternativa al T-test per campioni indipendenti quando i dati non soddisfano l'assunzione di normalità.

Le ipotesi del Test di *Mann-Whitney* sono: Ipotesi nulla ( $H_0$ ): non vi è differenza significativa tra i due gruppi; Ipotesi alternativa ( $H_1$ ): esiste una differenza significativa tra i due gruppi. L'interpretazione del test prevede: Se il valore di U è sufficientemente piccolo (o il p-value è inferiore a una soglia di significatività, ad esempio 0.05), si rifiuta l'ipotesi nulla, indicando una differenza significativa tra i due gruppi. Se il p-value è maggiore di 0.05, non si rifiuta l'ipotesi nulla, suggerendo che non vi sono differenze significative tra le due distribuzioni.

Nel nostro studio, il test di *Mann-Whitney* è stato utilizzato per confrontare i punteggi ottenuti dagli studenti di genere maschile e femminile. Poiché i dati non seguivano una distribuzione normale, l'uso di un test non parametrico ha garantito risultati più affidabili, permettendo di verificare la presenza di differenze statisticamente significative tra i due gruppi senza dipendere da assunzioni sulla distribuzione dei dati.

Nel caso specifico analizzato, la statistica di *Mann-Whitney* ha mostrato una differenza statisticamente significativa tra i due gruppi, con valore  $p = 0.005$ .

L'analisi procede controllando l'*Effect size* e il *Rank-Biserial Correlation*.

L'*Effect size* è una misura statistica che quantifica la dimensione dell'effetto di una variabile indipendente su una variabile dipendente. Esso fornisce un'indicazione della rilevanza di una relazione, al di là della semplice significatività statistica. Mentre il p-value ci dice se l'effetto osservato è probabilmente dovuto al caso, l'*Effect size* ci dice quanto è grande l'effetto stesso. Esistono vari tipi di *Effect size*, a seconda del tipo di test utilizzato, noi utilizzeremo il *Cohen's d*. Quest'ultimo misura la dimensione dell'effetto per il confronto tra due gruppi (ad esempio, T-test). È calcolato come la differenza tra le medie dei gruppi divisa per la deviazione standard combinata e i valori di *Cohen's d* più alti indicano un effetto maggiore (valori comunemente accettati sono: 0.2 = effetto piccolo, 0.5 = effetto medio e 0.8 = effetto grande).

L'*Effect size* è molto utile per interpretare la rilevanza pratica dei risultati, poiché una piccola differenza statistica (significativa) potrebbe non essere di grande importanza pratica se l'*Effect size* è molto basso.

Il *Rank Biserial Correlation* è una misura dell'associazione tra una variabile dicotomica (ad esempio la nostra: il genere) e una variabile continua. È spesso utilizzato per esaminare la relazione tra gruppi quando i dati non sono distribuiti normalmente o quando si usano test non parametrici, come il *Mann-Whitney*. L'interpretazione del *Rank Biserial* prevede: un valore vicino a 0 indica una bassa o nessuna relazione tra la variabile dicotomica e la variabile continua, un valore positivo suggerisce che un gruppo tende a ottenere punteggi più alti sulla variabile continua rispetto all'altro gruppo e un valore negativo di indica che il gruppo dicotomico associato con i punteggi più bassi sulla variabile continua ha una relazione inversa. In generale, un *Rank Biserial Correlation* maggiore di 0.3 o minore di -0.3 indica una relazione moderata tra le variabili, mentre valori più vicini a 0 indicano una correlazione debole.

I risultati dell'analisi indicano che esiste una differenza statisticamente significativa tra i punteggi ottenuti da donne e uomini nel test. Tuttavia, la misura della dimensione dell'effetto (*Rank-biserial correlation* di 0.285) suggerisce che questa differenza, pur significativa, è di modesta entità. Ossia, mentre il test ha rilevato una discrepanza tra i gruppi, la sua portata pratica risulta limitata. Inoltre, i dati non seguono una distribuzione normale, come confermato dai test di normalità, il che ha reso necessario l'uso di un test non parametrico, il test di *Mann-Whitney*, che si è rivelato adatto a questi dati non normalmente distribuiti.

Per proseguire l'analisi, è stato creato un file in Excel contenente le seguenti variabili: codice identificativo, confidence score, confidence dei quesiti di matematica, confidence dei quesiti di fisica, voto in decimi, punteggio in matematica, punteggio in fisica e genere. Anche in questo caso sono stati considerati solo due gruppi, donne e uomini.

Sono stati eseguiti i controlli di normalità e l'uguaglianza delle varianze. I risultati hanno mostrato che i due gruppi non rispettavano entrambi la condizione di normalità (studentesse  $p = 0.119$ , studenti  $p = 0.046$ .)

In base a questa discrepanza, si è scelto di applicare il test di *Mann-Whitney*, appropriato per distribuzioni non normali.

Il test di *Mann-Whitney* ha confermato una differenza tra i due gruppi, ( $U = 1611.0000$ ,  $p = 0.005$ ). Per quantificare la portata di questa differenza, è stato calcolato l'*Effect Size* (misura dell'effetto), che in questo caso è il *Rank-biserial correlation*, risultato pari a 0.285, evidenziando che la differenza è sì statisticamente significativa, ma con un basso *Effect size*.

Questo indica che, sebbene vi sia una differenza significativa nei risultati tra donne e uomini, la portata di questa differenza è contenuta. Tale valore suggerisce che il problema della differenza di genere è presente, ma non risulta eccessivamente elevata. Andrebbe aumentato il campione di riferimento per poter capire meglio il fenomeno in modo più diffuso.

Approfondiamo l'analisi controllando differenze tra i generi nei risultati del test, utilizzando i *Descriptive Plots* generati in JASP. In particolare, è stata esaminata la distribuzione dei voti tra donne e uomini, includendo le barre di errore standard per visualizzare le differenze nella media.

Dal grafico, Figura 3, emerge che la media dei voti è leggermente più alta per un genere rispetto all'altro. Tuttavia, considerando le barre di incertezza che nel grafico rappresentano la variabilità dei dati (calcolate come deviazione standard, esse mostrano quanto i singoli dati si discostano dalla media, indicando la dispersione all'interno del campione.), i due intervalli rimangono relativamente vicini. Questo conferma che, pur essendoci una differenza statisticamente significativa, come indicato in precedenza dal p-value, la *Effect Size* rimane bassa (0.285). Tale risultato è in linea con la letteratura esistente, che spesso rileva differenze di genere nei risultati accademici [10, 42].

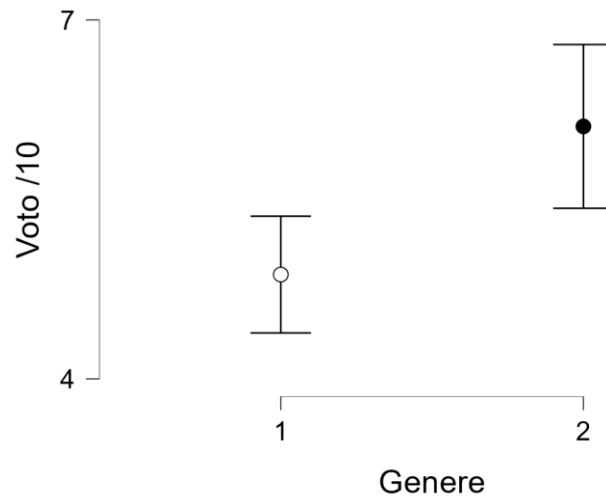


Figura 3: Voto in decimi e Genere (1= donne, 2= uomini)

Un'ulteriore analisi è stata condotta per esaminare la correlazione tra i punteggi ottenuti in matematica e quelli ottenuti in fisica, escludendo dal campione gli studenti che non avevano dichiarato il proprio genere. Questo sottocampione ha permesso di isolare e confrontare i dati in modo più dettagliato.

Con la funzione *Descriptive Statistics* sono stati analizzati i dati relativi al voto in decimi e alla confidence score, suddivisi per genere. Per verificare la correlazione tra i punteggi in matematica e fisica, è stata utilizzata la funzione di correlazione di JASP. I dati dei punteggi in matematica e in fisica sono stati valutati in decimi e analizzati attraverso la correlazione lineare (il *coefficiente di Pearson r*).

I risultati hanno evidenziato una correlazione positiva e significativa, con un valore di  $r = 0.807$  e un  $p\text{-value} < 0.001$ , indicando che i punteggi in matematica e fisica sono fortemente correlati.

Tabella 12: Analisi descrittiva Voto in decimi e Confidence ( $N(\text{Donne})=85$ ,  $N(\text{Uomini})=53$ )

	Voto /10		Confidence score	
	Donne	Uomini	Donne	Uomini
Median	4.706	6.176	2.500	2.912
Mean	4.872	6.110	2.505	2.935

	Voto /10		Confidence score	
	Donne	Uomini	Donne	Uomini
Std. Deviation	2.262	2.483	0.608	0.639
Minimum	0.588	1.176	0.647	1.441
Maximum	9.412	10.000	3.971	4.000

Successivamente, l'attenzione si è concentrata sul confronto relativo al confidence score (punteggio di fiducia). È stato utilizzato un T-test per campioni indipendenti, con il confidence score come variabile dipendente e il genere come variabile di raggruppamento.

Il controllo della normalità ha riportato valori quali  $p = 0.580$  per le donne e  $p = 0.218$  per gli uomini, entrambi i gruppi risultano normali. Il test dell'uguaglianza delle varianze il valore ottenuto è  $p = 0.441$ . I test condotti hanno indicato che entrambi i gruppi seguivano una distribuzione normale. Pertanto, è stato applicato il T-test di *Student*.

I risultati hanno mostrato una differenza statisticamente significativa  $t = 3.967$  con un p-value  $< 0.001$ , ben al di sotto di 0.05. Inoltre, il calcolo della *Effect Size* ha restituito un valore di 0.694 (*Cohen's d*), indicativo di una grandezza dell'effetto medio-alta.

Questa differenza è visibile nel grafico, Figura 4, dove le barre rappresentative del confidence score per maschi e femmine sono separate, con uno spazio evidente che non permette sovrapposizioni, mostrando incompatibilità tra gli intervalli. Questo risultato è particolarmente interessante poiché conferma una situazione osservata frequentemente nella letteratura [10, 42]: le studentesse tendono a sottovalutare la propria preparazione e le proprie capacità (under-confidence) rispetto agli studenti maschi.

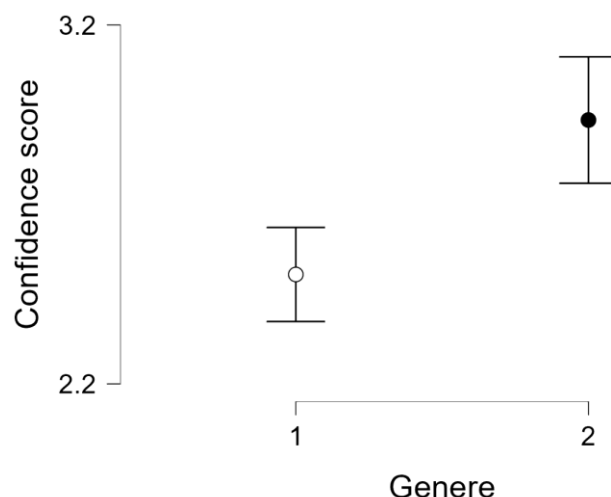


Figura 4: Confidence score e Genere (1= donne, 2= uomini)

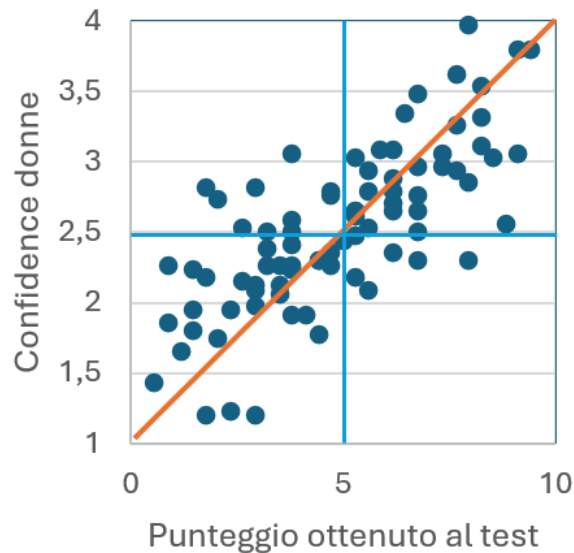
Questo dato pone in evidenza un aspetto importante per future riflessioni didattiche e pedagogiche: la necessità di supportare maggiormente le studentesse nello sviluppo della fiducia nelle proprie competenze, per ridurre questo divario di percezione e favorire un approccio più equilibrato alla valutazione delle proprie abilità.

I grafici di Excel, con l'aggiunta di una linea di tendenza (equivalente alla retta di regressione), permettono di osservare come i dati siano distribuiti rispetto alla linea dei valori auspicabili o ideali. Suddividendo il grafico in quadranti:

- Nel quadrante in alto a sinistra rientrano gli studenti overconfident, con una sicurezza superiore ai risultati effettivi. Overconfident (sovracconfidenza) si riferisce alla situazione in cui una persona ha una percezione della propria capacità superiore a quella che è effettivamente la sua competenza o performance. Una persona overconfident tende a sovrastimare la propria abilità, credendo di sapere di più o di essere più preparata di quanto lo sia in realtà.
- Nel quadrante in basso a destra rientrano gli studenti underconfident, che ottengono buoni risultati pur mostrando una sicurezza inferiore. Underconfident (sottoconfidenza) indica invece il caso in cui una persona ha una valutazione della propria capacità inferiore rispetto a quella che è la sua

reale competenza. Un individuo underconfident può dubitare delle proprie capacità o sentirsi meno preparato di quanto non sia effettivamente.

Nel contesto della valutazione di fiducia (confidence score), queste due situazioni possono influenzare i risultati degli studenti, in quanto chi è overconfident potrebbe non dedicare abbastanza attenzione o impegno, mentre chi è underconfident potrebbe non riconoscere le proprie capacità e quindi non esprimere il massimo del proprio potenziale.



*Figura 5: Grafico Confidence vs Punteggio test (donne)*

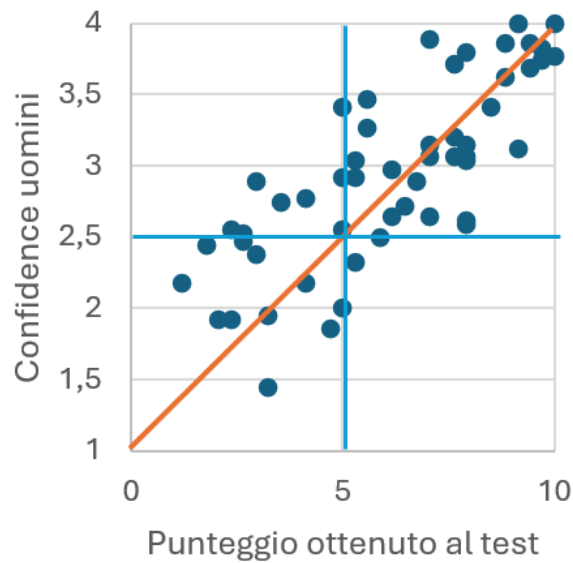


Figura 6: Grafico Confidence vs Punteggio test (uomini)

Nei test svolti dagli uomini, emerge una tendenza interessante: non ci sono studenti underconfident. Al contrario, molti mostrano una sicurezza alta e una buona calibrazione rispetto ai risultati.

### 4.3 Confronto con la Scuola di Ingegneria

Per capire se esistessero differenze nelle prestazioni tra gli studenti della Scuola di Medicina e quelli della Scuola di Scienze e Scuola di Ingegneria è stata effettuata un'ulteriore analisi. L'attuale campione di studenti di medicina è stato confrontato con un campione di studenti che hanno partecipato al progetto *FisicaMente* e svolto il test durante l'anno accademico 2023/2024. Questo campione era composto da 560 partecipanti, provenienti dalla Scuola di Scienze e Scuola di Ingegneria dell'Università degli Studi di Padova. Alcuni dei corsi di laurea in ambito ingegneristico e scientifico coinvolti sono: Ingegneria Biomedica, Ingegneria Chimica e dei Materiali, Scienze Naturali e Ambientali, Ingegneria Aerospaziale, Scienze Geologiche, Ingegneria Civile, Ingegneria dell'Energia, Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, Ingegneria dell'Automazione e dei Sistemi, Ottica e Optometria, Ingegneria Gestionale.

La scelta di confrontare i risultati con il campione dell'anno accademico 2023/2024 è stata guidata da due principali motivazioni. In primo luogo, la vicinanza temporale tra i due gruppi consente di ridurre l'impatto di eventuali variazioni didattiche o organizzative, che potrebbero influire sui risultati. In secondo luogo, nonostante il campione dell'anno accademico 2023/2024 fosse significativamente più numeroso (560 partecipanti contro i 143 dell'anno accademico 2024/2025), la disparità numerica tra i due gruppi era più contenuta rispetto ad altre annate. La scelta è stata operata per rendere il confronto il più possibile statisticamente rilevante.

Questo confronto permette di analizzare le differenze e le somiglianze tra studenti di corsi di laurea con background matematico-fisico differenti, fornendo ulteriori spunti di riflessione sull'efficacia del test e sulle modalità di apprendimento delle discipline scientifiche.

Creando un file CSV contenente i punteggi degli studenti degli anni e dei corsi interessati e importando i dati in JASP, è stato effettuato un confronto per determinare se esistessero differenze statisticamente significative tra i due gruppi rispetto al punteggio ottenuto nel test (test score). Il controllo della normalità ha riportato i seguenti p-value:  $p = 0.005$  per la Scuola di Medicina e  $p < 0.001$  per la Scuola di Scienze e Ingegneria. Il test di uguaglianza delle variabili ha dato come risultato  $p = 0.501$ . Procedendo nell'analisi con il *Mann-Whitney U* test si ha  $U = 38217.000$ ,  $p = 0.203$ .

Il valore di  $p = 0.203$ , ottenuto dal test, non risulta statisticamente significativo. Questo indica che non vi sono differenze rilevanti tra i punteggi dei due campioni, confermando una sostanziale omogeneità tra le due coorti.

## 5 Conclusioni

Questa ricerca si è mossa in diverse direzioni, perseguendo tre obiettivi principali:

1. Revisione dei quesiti della sezione dei vettori del TCV-MP per migliorarne l'efficacia nella rilevazione delle difficoltà degli studenti in matematica e fisica alla luce dei risultati ottenuti dalle precedenti somministrazioni.
2. Somministrazione del test in un nuovo contesto, ovvero presso la Scuola di Medicina dell'Università degli Studi di Padova, con l'intento di esplorare le competenze matematiche e fisiche degli studenti di un ambito disciplinare diverso da quelli precedentemente analizzati.
3. Analisi dei dati raccolti e confronto con i risultati ottenuti dal progetto *FisicaMente* nell'anno accademico precedente, che ha coinvolto studenti della Scuola di Scienze e della Scuola di Ingegneria. Questo confronto ha permesso di evidenziare somiglianze, differenze e peculiarità nell'approccio degli studenti delle diverse aree disciplinari.

Questa tesi si inserisce in un ambito di ricerca che esplora il legame profondo e imprescindibile tra matematica e fisica [1-7, 21]. Queste due discipline, sebbene distinte, sono strettamente intrecciate: la modellizzazione matematica rappresenta uno strumento essenziale per comprendere i fenomeni fisici, mentre la fisica restituisce concretezza e significato ai modelli matematici, offrendo un contesto reale e tangibile in cui applicarli [3, 8, 9, 22, 26, 38, 39].

Tuttavia, trasferire competenze tra queste due materie non è un compito semplice. Numerosi studi evidenziano la difficoltà degli studenti nel passare agevolmente da una rappresentazione matematica astratta alla sua applicazione fisica concreta [10, 12, 21, 26, 38, 41]. Questa sfida sottolinea la necessità di docenti consapevoli e preparati, capaci di favorire lo sviluppo di un pensiero interdisciplinare. È cruciale che l'insegnamento incoraggi gli studenti a costruire connessioni tra matematica e fisica,

aumentando così la loro capacità di risolvere problemi complessi e interdisciplinari [1-9].

In questo contesto, i vettori assumono un ruolo fondamentale nell'apprendimento [73-81]. Studi come quello di Flores et al. [44] hanno dimostrato che modifiche nei metodi di insegnamento possono migliorare significativamente la capacità degli studenti di eseguire operazioni vettoriali come l'addizione e la sottrazione, incrementando la probabilità che queste competenze vengano utilizzate in modo efficace nella risoluzione di problemi.

Alla luce di queste considerazioni, il *Test of Calculus and Vectors in Mathematics and Physics* (TCV-MP) è stato sviluppato con l'obiettivo di offrire una valutazione accurata delle competenze degli studenti in entrambi i campi disciplinari: fisica e matematica. I risultati di questa ricerca forniscono due contributi principali:

1. Uno strumento diagnostico per i docenti, utile per comprendere meglio il livello di preparazione degli studenti e adattare di conseguenza le strategie didattiche. Questo permette di intervenire in modo mirato sulle difficoltà specifiche riscontrate dagli studenti, migliorando l'efficacia dell'insegnamento.
2. Un'opportunità di autovalutazione per gli studenti, che possono così identificare le aree in cui necessitano di un maggiore approfondimento e colmare eventuali lacune nei prerequisiti di matematica e fisica.

Questa doppia funzione del test, che lo rende uno strumento tanto per l'insegnante quanto per l'alunno, evidenzia l'importanza di un approccio educativo consapevole e orientato al miglioramento continuo.

Grazie alle ricerche effettuate, tramite revisione della letteratura e all'analisi statistica dei risultati delle domande originali nelle precedenti somministrazioni, è stata sviluppata una versione rivista della sezione dei vettori del TCV-MP. La versione originaria del test comprende un totale di 17 quesiti per area, ciascuno con una

versione per la matematica e una per la fisica, così suddivisi: 6 quesiti riguardanti le derivate, 3 quesiti riguardanti gli integrali e 8 quesiti riguardanti i vettori. Un totale di 17 domande da sottoporre in duplice versione, matematica e fisica.

La versione aggiornata del test propone invece una diversa ripartizione, nella quale quesiti relativi agli integrali sono stati rielaborati e studiati da uno studente del Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei" nell'ambito di un Master Degree in Physics nella sua tesi "*Improving the Test of Calculus and Vectors in Mathematics and Physics: an evidence-centered approach*" congiuntamente al Gruppo di Ricerca in Didattica della Fisica e dell'Astronomia dell'Università di Padova. Tale rielaborazione è composta da: 6 quesiti riguardanti le derivate, 5 quesiti riguardanti gli integrali e 6 quesiti riguardanti i vettori. Mantenendo un totale di 17 domande da sottoporre in duplice versione, matematica e fisica.

La versione espansa del test proposta in questa tesi include due alternative per i quesiti 16 e 17. La nuova versione del test risulta così strutturata: 6 quesiti riguardanti le derivate, 5 quesiti riguardanti gli integrali e 8 quesiti riguardanti i vettori. Il totale dei quesiti salirebbe a 19, da proporre una volta in matematica ed una volta in fisica. Nello specifico:

Quesito numero 10: Questo quesito si focalizza sulla rappresentazione dei vettori, utilizzando sia la rappresentazione formale che quella grafica. In base all'analisi condotta dal progetto *FisicaMente* 2018 – 2024 e alle indicazioni emerse dalla letteratura [79], è stato proposto di eliminare questo quesito. La sua rimozione consentirebbe di dedicare maggiore spazio ai quesiti successivi, che trattano argomenti considerati più complessi per gli studenti, come confermato dai risultati delle precedenti somministrazioni del test.

Quesito numero 11: I dati raccolti dal progetto *FisicaMente* hanno evidenziato un *Facility Index* elevato per questo quesito. Di conseguenza, è stato proposto di modificarlo introducendo una domanda che esplori l'utilizzo e la connessione tra il vettore e la tangente. Questa nuova versione permette di: Introdurre il concetto di

tangente di un angolo, attualmente assente nel test, consolidare il passaggio tra diverse rappresentazioni di un vettore, in particolare tra coordinate cartesiane e polari, mantenendo sia la rappresentazione grafica che quella formale. Tale scelta si basa su studi che evidenziano l'importanza della comprensione delle componenti vettoriali per la corretta risoluzione dei quesiti relativi ai vettori [76].

Quesito numero 12: Anche questo quesito è incentrato sulla comprensione delle componenti vettoriali. Sono state proposte due modifiche di natura formale, volte a migliorare la leggibilità e, di conseguenza, l'interpretazione del quesito da parte degli studenti.

Quesito numero 13: Si tratta del primo quesito dedicato alla somma di vettori (modulo). Dopo un'analisi complessiva, si è deciso di non apportare modifiche a questo quesito, ma di suggerire l'eliminazione del quesito successivo, il quesito 14.

Quesito numero 14: Questo quesito combina le abilità relative alle componenti vettoriali (con seno e coseno) e alla somma dei vettori. Tuttavia, tali competenze risultano già adeguatamente valutate nei quesiti 12 e 13. Pertanto, si è ritenuto opportuno proporre l'eliminazione, con l'obiettivo di contenere la lunghezza complessiva del test senza sacrificare la qualità delle competenze indagate.

Quesito numero 15: Tale quesito si concentra sulla differenza tra vettori, un argomento che, secondo la letteratura [59, 74], risulta tra i meno intuitivi per gli studenti. Per facilitare la comprensione, il test utilizza una rappresentazione grafica sia nelle domande che nelle risposte [57]. Tuttavia, si propone una modifica del contesto gravitazionale utilizzato, sostituendolo con un contesto più neutro e meno specifico. Questa variazione consentirebbe agli studenti di focalizzarsi meglio sull'obiettivo principale del quesito, ovvero la differenza tra vettori, evitando distrazioni legate alla cinematica [75]. Inoltre, tale modifica risponde alle perplessità espresse da alcuni docenti intervistati, che avevano manifestato riserve sull'adeguatezza del contesto gravitazionale.

Quesito numero 16: Questo item rappresenta uno dei punti più critici del test, in quanto tratta il prodotto scalare. Studi precedenti condotti sulla comprensione dei vettori presso la Scuola di Medicina [74] hanno evidenziato che gli studenti di questa facoltà raramente approfondiscono concetti come il prodotto scalare o vettoriale durante la loro formazione pre-universitaria. Per il quesito 16 si propone una duplice versione: Una focalizzata sul calcolo del prodotto scalare [77] ed una che esplora il concetto in termini verbali, ponendo particolare attenzione alla comprensione qualitativa del prodotto scalare [80]. Questa scelta mira a distinguere tra la capacità di eseguire il calcolo matematico e la comprensione concettuale, due aspetti complementari ma distinti nella valutazione delle competenze degli studenti.

Quesito numero 17: Similmente al precedente, anche questo quesito si presenta come un elemento critico, in quanto riguarda il prodotto vettoriale. Impiega diverse rappresentazioni: grafica, formale e numerica. Anche in questo caso, si propone una duplice versione: Una che richiede agli studenti di calcolare il prodotto vettoriale e una che valuta la comprensione concettuale del prodotto vettoriale, richiedendo di descrivere il significato e le applicazioni del concetto. Inoltre, si suggerisce di aggiungere una versione che utilizzi una rappresentazione grafica sia nella formulazione della domanda che nella risposta. Questa scelta è in linea con l'approccio del TCV-MP, che pone particolare attenzione al coinvolgimento delle diverse rappresentazioni (grafica, formale, numerica e verbale) per favorire una comprensione più profonda degli argomenti trattati [73, 78].

In sintesi, le proposte di modifica avanzate in questa tesi mirano a migliorare la validità e l'efficacia del TCV-MP come strumento di valutazione. L'attenzione posta sulle rappresentazioni multiple e sulla distinzione tra comprensione concettuale e abilità di calcolo permette di fornire una valutazione più completa delle competenze degli studenti, offrendo spunti significativi per future somministrazioni e ulteriori studi nel campo della didattica della matematica e della fisica.

Il presente studio ha coinvolto un campione di studenti iscritti al primo anno di tre diversi corsi di laurea presso l'Università degli Studi di Padova: Medicina e Chirurgia,

Odontoiatria e Protesi Dentaria e Tecniche della Prevenzione nell’Ambiente e nei Luoghi di Lavoro. Agli studenti è stato chiesto di completare il *Test of Calculus and Vectors in Mathematics and Physics* (TCV-MP), modificato con l’aggiunta di domande sul parametro *confidence*, tramite la piattaforma Moodle. Durante lo svolgimento del test, i partecipanti avevano la possibilità di navigare liberamente tra le domande, potendo scegliere l’ordine con cui risolvere i quesiti.

Le analisi statistiche condotte si articolano in tre macroanalisi principali:

1. Analisi complessiva del campione totale, per ottenere una panoramica generale delle prestazioni degli studenti sui diversi quesiti del test.
2. Analisi condotta per genere, per individuare eventuali differenze significative nelle prestazioni tra studenti di sesso femminile e maschile.
3. Analisi comparativa con il campione del progetto *FisicaMente*, che ha coinvolto studenti della Scuola di Scienze e della Scuola di Ingegneria durante l’anno accademico 2023/2024. Questa analisi ha permesso di confrontare le prestazioni degli studenti di Medicina con quelle di studenti provenienti da percorsi accademici più orientati alle discipline scientifiche e ingegneristiche.

L’analisi del campione totale ha rivelato che i punteggi ottenuti dagli studenti non seguono una distribuzione normale. Questo risultato suggerisce una possibile eterogeneità nelle competenze degli studenti. Un passo successivo nell’analisi ha riguardato la verifica della correlazione tra i punteggi ottenuti nelle sezioni di matematica e fisica del TCV-MP. Il coefficiente di correlazione di Pearson ha mostrato una buona correlazione tra i due insiemi di punteggi, indicando che gli studenti che ottengono buoni risultati in matematica tendono a performare bene anche in fisica. Questa correlazione rappresenta un dato significativo per il TCV-MP, in quanto sottolinea la coerenza tra le competenze valutate nei due ambiti disciplinari. Tale coerenza conferma che il test riesce a bilanciare efficacemente i concetti matematici e fisici, riflettendo il legame profondo tra queste due discipline. Questo aspetto è particolarmente importante, poiché uno degli obiettivi principali del TCV-MP è

proprio quello di misurare la capacità degli studenti di trasferire competenze tra la matematica e la fisica.

Un'ulteriore analisi ha riguardato la relazione tra il confidence score – cioè il livello di sicurezza con cui gli studenti hanno risposto ai quesiti – e i voti finali in decimi. Si è evidenziata una buona correlazione tra confidence score e test score (Figura 2). Questo risultato fa emergere che gli studenti con un livello di confidenza più elevato tendono a ottenere risultati migliori nel test. Tale correlazione potrebbe riflettere una maggiore padronanza dei concetti da parte di quegli studenti che si sentono più sicuri nel rispondere, confermando l'importanza di potenziare non solo le competenze tecniche, ma anche la sicurezza nelle proprie capacità.

Nel TCV-MP è stata considerata la variabile genere, offrendo ai partecipanti una pluralità di risposte possibili: donna, uomo, transgender, non binary/non conforming, altro, e preferisco non rispondere. Questa scelta riflette l'attenzione alla diversità e alla rappresentatività del campione. La prima analisi ha riguardato la verifica di eventuali differenze statisticamente significative tra i punteggi medi ottenuti dalle studentesse e dagli studenti. Sebbene sia emersa una significativa differenza statistica tra donne e uomini, la portata di questa differenza è risultata limitata, suggerendo che il divario di genere nei risultati accademici è presente, ma non particolarmente marcato. Questo risultato implica che, sebbene le donne tendano a ottenere punteggi leggermente inferiori rispetto agli uomini, la differenza è contenuta e potrebbe essere attribuita a fattori contestuali o a differenze individuali piuttosto che a una disparità sostanziale di genere nelle competenze valutate dal test.

Questi risultati suggeriscono che il problema della differenza di genere nei punteggi accademici esiste, ma non è particolarmente accentuato nel campione considerato. Tuttavia, per una comprensione più accurata e generalizzabile del fenomeno, sarebbe opportuno: ampliare il campione di riferimento, includendo un numero maggiore di partecipanti provenienti da diversi corsi di laurea e percorsi di studio e analizzare ulteriori variabili che potrebbero influenzare i risultati, come il background scolastico, il livello di confidenza nelle discipline STEM e il contesto educativo. Un campione

più ampio e diversificato consentirebbe di delineare con maggiore precisione le dinamiche legate al genere e di individuare eventuali interventi didattici mirati per ridurre ulteriormente il divario.

Per approfondire l'analisi delle differenze tra generi nei risultati del TCV-MP, è stato esaminato il grafico della distribuzione dei voti medi (Figura 3). Dall'osservazione emerge che la media dei voti è leggermente più alta per un genere rispetto all'altro. Questo risultato è coerente con quanto riportato nella letteratura esistente, che evidenzia spesso differenze di genere modeste nei risultati accademici, soprattutto nelle discipline STEM [64].

Un ulteriore focus è stato posto sul confidence score e l'analisi ha rivelato una differenza significativa nel confidence score tra donne e uomini, con un *Effect size* di entità medio-grande. Nel grafico riportato in Figura 4, è possibile osservare una chiara separazione tra le barre rappresentative del confidence score dei due generi, gli uomini mostrano un livello di fiducia mediamente più elevato rispetto alle donne, confermando quanto già descritto in numerosi studi. Le studentesse tendono a sottovalutare le proprie capacità e a manifestare una maggiore insicurezza nelle loro competenze, nonostante i loro risultati accademici siano spesso comparabili o superiori a quelli degli studenti maschi. Gli studenti maschi, al contrario, mostrano una maggiore sicurezza nelle proprie risposte, anche quando la loro performance oggettiva è simile o inferiore a quella delle loro colleghe.

Questo risultato mette in evidenza una questione cruciale per la didattica: la necessità di supportare gli studenti, maggiormente le studentesse, nello sviluppo della fiducia nelle proprie competenze. L'under-confidence femminile rappresenta un ostacolo potenziale nell'approccio alle discipline STEM, limitando non solo la loro performance, ma anche la loro partecipazione attiva e il loro senso di appartenenza a queste aree di studio.

Alla luce di ciò, si rendono necessari interventi educativi che mirino a: incoraggiare una maggiore consapevolezza delle proprie capacità attraverso feedback costruttivi e personalizzati, promuovere ambienti di apprendimento inclusivi che valorizzino il

contributo di tutti gli studenti, indipendentemente dal genere e introdurre attività mirate a potenziare la fiducia nelle proprie competenze, come esercizi di autovalutazione guidata e simulazioni di situazioni reali che richiedano l'applicazione delle competenze matematiche e fisiche.

In questo modo, sarà possibile ridurre il divario di percezione tra generi e favorire un approccio più equilibrato e consapevole allo studio delle discipline scientifiche.

È stato effettuato un confronto tra i risultati del campione attuale (a.a. 2024/2025) e quelli raccolti dal campione dell'anno accademico 2023/2024 per valutare eventuali differenze significative nelle prestazioni degli studenti al TCV-MP. Tale confronto è stato condotto utilizzando un test statistico per determinare se esistessero differenze significative nei punteggi medi ottenuti al test (test score). L'analisi ha mostrato che il valore ottenuto non risulta statisticamente significativo, indicando che non vi sono differenze rilevanti tra i punteggi medi delle due coorti e che i risultati suggeriscono una sostanziale omogeneità tra le prestazioni degli studenti del campione attuale e quelle del campione 2023/2024.

Questa osservazione è importante in quanto evidenzia che, nonostante le differenze numeriche tra i due gruppi, il profilo delle competenze valutate dal TCV-MP è rimasto costante. Ciò sottolinea la validità dello strumento di valutazione, che si conferma in grado di rilevare in modo coerente le competenze degli studenti, indipendentemente dalle variazioni di anno accademico e fornire risultati comparabili tra coorti diverse, contribuendo così a monitorare in modo efficace l'evoluzione delle competenze matematiche e fisiche degli studenti nel tempo.

Questa consistenza nei risultati rafforza ulteriormente l'utilità del TCV-MP come strumento diagnostico per docenti e studenti, favorendo un monitoraggio continuo e affidabile delle competenze interdisciplinari.

Tale ricerca ha incontrato i seguenti limiti:

Nonostante il campione sia rappresentativo degli studenti del primo anno dei corsi di laurea in Medicina, Odontoiatria e Tecniche della Prevenzione, la sua dimensione rimane relativamente contenuta rispetto a studi più ampi. La dimensione ridotta del campione e la concentrazione su specifici corsi di laurea potrebbero limitare la generalizzabilità dei risultati ad altre discipline o contesti accademici.

L'analisi di genere ha evidenziato differenze statisticamente significative nei punteggi di confidence score tra uomini e donne. Tuttavia, alcune categorie di genere (es. transgender, non binary) non hanno avuto rappresentanza sufficiente per essere analizzate. La mancanza di una rappresentazione omogenea di tutti i generi ha impedito un'analisi approfondita dell'impatto della diversità di genere sui risultati del test.

Lo studio è stato condotto in un'unica somministrazione del TCV-MP, limitando l'analisi alla performance degli studenti in un determinato momento del loro percorso accademico. Non è stato possibile valutare le variazioni nel tempo delle competenze interdisciplinari tra matematica e fisica, né l'evoluzione della confidence score nel corso degli anni accademici.

Tale lavoro ha lo scopo di inserirsi all'interno di un ampio corpus di ricerca dedicato a rendere l'approccio a materie affascinanti come la matematica e la fisica non solo più accessibile, ma anche più sereno e stimolante per gli studenti. In un contesto in cui la difficoltà percepita di questi argomenti può spesso scoraggiare, l'obiettivo è promuovere una visione più positiva e appassionata, che incoraggi una maggiore fiducia nelle proprie capacità e favorisca una comprensione profonda e duratura. Gli sviluppi futuri del *Test of Calculus and Vectors in Mathematics and Physics* mirano a rafforzare questo legame, cercando di affinare ulteriormente gli strumenti di valutazione e di supporto, per accompagnare gli studenti in un percorso di apprendimento sempre più consapevole e gratificante.

Un'estensione naturale di questo lavoro potrebbe essere la progettazione di uno studio longitudinale, che monitori gli studenti durante il loro percorso accademico. Analizzare l'evoluzione delle competenze interdisciplinari nel tempo, identificando i

fattori che favoriscono o ostacolano il trasferimento delle competenze tra matematica e fisica.

Infine, il test attuale si concentra principalmente su derivate, integrali e vettori. Una possibile evoluzione potrebbe includere competenze interdisciplinari più complesse, come il calcolo differenziale applicato alla fisica o l'algebra lineare per la meccanica quantistica.

## Bibliografia

- [1] Riazuddin, (2004), Role of Mathematics in Physical Sciences, <https://arxiv.org/pdf/math/0402407>
- [2] Gingras, Y. (2001). What did mathematics do to physics? *History of Science*, 39, 383–416.
- [3] O. Uhden, R. Karam, M. Pietrocola, and G. Pospiech, Modelling mathematical reasoning in physics education, *Sci. Educ.* 21, 485 (2012).
- [4] Zahar, E. (1980). Einstein, Meyerson and the role of mathematics in physical discovery. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 31(1), 1–43.
- [5] Greca, I. M., & Moreira, M. A. (2001). Mental, physical, and mathematical models in the teaching and learning of physics. *Science Education*, 86(1), 106–121.
- [6] Redish & Kuo 2015 *Sci. & Educ.*, Language of Physics Language of Math - Disciplinary Culture and Dynamic Epistemology
- [7] Pietrocola, M. (2008). Mathematics as structural language of physical thought. In M. Vicentini & E. Sassi (Eds.) *Connecting research in physics education with teacher education (Vol. 2)*. International Commission on Physics Education.
- [8] Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45–58.
- [9] Redish, E. F., & Bing, T. J. (2009). Using math in physics: Warrants and epistemological frames. In D. Raine, C. Hurkett & L. Rogers (Eds.) *Physics community and cooperation, Vol. 2*. GIREP-EPEC & PHEC 2009 international conference, University of Leicester, Leicester, UK.
- [10] M.Carli, S.Lippiello, O.Pantano, M.Perona & G.Tormen, Testing students ability to use derivatives, integrals, and vectors in a purely mathematical context and in a physical context (2020).

- [11] E.F. Redish, Problem solving and the use of math in physics courses, in Proceedings of “World View on Physics Education in 2005: Focusing on Change” (2006), <http://www.physics.umd.edu/perg/papers/redish/IndiaMath.pdf>.
- [12] L. Cui, N.S. Rebello, P.R. Fletcher, and A.G. Bennett, Transfer of learning from college calculus to physics courses, in Proceedings of the NARST 2006 Annual Meeting (2006), [https://web.phys.ksu.edu/papers/2006/Cui\\_NARST2006.pdf](https://web.phys.ksu.edu/papers/2006/Cui_NARST2006.pdf).
- [13] F.R. Yeatts and J.R. Hundhausen, Calculus and physics: Challenges at the interface, *Am. J. Phys.* 60, 716-721 (1992).
- [14] H.T. Hudson and W.R. McIntire, Correlation between mathematical skills and success in physics, *Am. J. Phys.* 45, 470 (1977).
- [15] J. Tuminaro and E.F. Redish, Elements of a cognitive model of physics problem solving: Epistemic games, *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 3, 020101 (2007).
- [16] Domert, D., Airey, J., Linder, C., & Kung, R. L. (2007). An exploration of university physics students epistemological mindsets towards the understanding of physics equations. *NorDiNa—Nordic Studies in Science Education*, 3(1), 15–28.
- [17] T.J. Bing and E.F. Redish, Analyzing problem solving using math in physics: Epistemological framing via warrants, *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 5, 020108 (2009).
- [18] Sheila L. Macrine, Jennifer M.B. Fugate. (2022), *Movement Matters: How Embodied Cognition Informs Teaching and Learning*. The MIT Press DOI: <https://doi.org/10.7551/mitpress/13593.001.0001>
- [19] Sheila L. Macrine, Jennifer M.B. Fugate. (2021), *Translating Embodied Cognition for Embodied Learning in the Classroom*. *Sec. Educational Psychology* DOI: <https://doi.org/10.3389/feduc.2021.712626>
- [20] Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 18(1), 32–42.

- [21] Dunn, J. W., & Barnabel, J. (2000). One model for an integrated math/physics course focusing on electricity and magnetism and related calculus topics. *American Journal of Physics*, 68(8), 749–757.
- [22] Bagno, E., Berger, H., & Eylon, B. S. (2008). Meeting the challenge of students' understanding of formulae in high-school physics: A learning tool. *Physics Education*, 43(1), 75.
- [23] Fuster, J. (1999). *Memory in the Cerebral Cortex: An empirical approach to neural networks in the human and nonhuman primate*. New York: MIT Press. ISBN 0262561247
- [24] Veronica Bagaglini, Laura Branchetti, Alessandro Gombi, Olivia Levrini, Sara Satanassi, Matteo Viale (2021) , The role of the text in the interdisciplinarity between mathematics, physics and language education: the theme of parabolic motion between historical texts and Physics textbooks for secondary school, *Italiano a scuola*, 3 (2021), pp. 133-184
- [25] Frodeman, Robert Klein, Julie Thompson Pacheco, Roberto Carlos Dos Santos (Eds.) (2017), *The Oxford handbook of interdisciplinarity*, Oxford, Oxford University Press.
- [26] M.D. Caballero, B.R. Wilcox, L. Doughty, and S.J. Pollock, Unpacking students' use of mathematics in upper-division physics: Where do we go from here?, *Eur. J. Phys.* 36, 065004 (2015).
- [27] S. Flores, S.E. Kanim, and C.H. Kautz, Student use of vectors in introductory mechanics, *Am. J. Phys.* 72, 460 (2004).
- [28] A. B. Arons, *A Guide to Introductory Physics Teaching* , Wiley, New York, 1990 ,p.91
- [29] D.E. Trowbridge and L.C. McDermott, Investigation of student understanding of the concept of velocity in one dimension, *Am. J. Phys.* 48, 1020 (1980).
- [30] D.E. Trowbridge and L.C. McDermott, Investigation of student understanding of the concept of acceleration in one dimension, *Am. J. Phys.* 49, 242 (1981).

- [31] L.C. McDermott and E.F. Redish, Resource letter: PER-1: Physics Education Research, *Am. J. Phys.* 67, 755 (1999).
- [32] G. Leinhardt, O. Zaslavsky, and M.K. Stein, Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching, *Rev. Educ. Res.* 60, 1 (1990).
- [33] L.C. McDermott, M.L. Rosenquist, and E.H. van Zee, Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics, *Am. J. Phys.* 55, 503 (1987).
- [34] T. Wemyss and P. van Kampen, Categorization of first-year university students' interpretations of numerical linear distance-time graphs, *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 9, 010107 (2013).
- [35] L. Bollen, M. De Cock, K. Zuza, J. Guisasola, and P. van Kampen, Generalizing a categorization of students' interpretations of linear kinematics graph
- [36] W.M. Christensen and J.R. Thompson, Investigating graphical representations of slope and derivative without a physics context, *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 8, 023101 (2012).
- [37] L. Ivanjek, A. Susac, M. Planinic, A. Andrasevic, and Z. Milin-Sipus, Student reasoning about graphs in different contexts, *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* 12, 010106 (2016).
- [38] M. Planinic, Z. Milin-Sipus, H. Katic, A. Susac, and L. Ivanjek, Comparison of student understanding of line graph slope in physics and mathematics, *Int. J. Sci. Math. Educ.* 10, 1393 (2012).
- [39] M. Planinic, L. Ivanjek, A. Susac, and Z. Milin-Sipus, Comparison of university students' understanding of graphs in different contexts, *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 9, 020103 (2013).
- [40] A. Susac, A. Bubic, E. Kazotti, M. Planinic, and M. Palmovic, Student understanding of graph slope and area under a graph: A comparison of physics and non physics students, *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* 14, 020109 (2018).

- [41] S.Lippiello, M.Carli, O.Pantano, Enhancing integrated learning of physics and mathematics in secondary school
- [42] S.Lippiello, M.Carli, O.Pantano, The relationship between performance and confidence in the secondary-school version of the Test of Calculus and Vectors in Mathematics and Physics
- [43] N.-L. Nguyen and D.E. Meltzer, Initial understanding of vector concepts among students in introductory physics courses, *Am. J. Phys.* 71, 630 (2003).
- [44] R. Knight, The vector knowledge of beginning physics students, *Phys. Teach.* 33, 74 (1995).
- [45] P. Barniol and G. Zavala, Test of understanding of vectors: A reliable multiple-choice vector concept test, *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 10, 010121 (2014).
- [46] A. Susac, M. Planinic, D. Klemencic, and Z. Milin Sipus, Using the Rasch model to analyze the test of understanding of vectors, *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* 14, 023101 (2018).
- [47]
- [48] P. Shaffer and L.C. McDermott, A research-based approach to improving student understanding of the vector nature of kinematical concepts, *Am. J. Phys.* 73, 921 (2005).
- [49] J. Van Deventer and M.C. Wittmann, Comparing student use of mathematical and physical vector representations, *AIP Conf. Proc.* 951, 208 (2007).
- [50] J. Van Deventer, Comparing student performance on isomorphic math and physics vector representations, Master's Thesis, The University of Maine, 2008.
- [51] A. Van Heuvelen, Learning to think like a physicist: A review of research based instructional strategies, *Am. J. Phys.* 59, 891 (1991).
- [52] E. Etkina, A. Van Heuvelen, S. White-Brahmia, D.T. Brookes, M. Gentile, S. Murthy, D. Rosengrant, and A. Warren, Scientific abilities and their assessment, *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 2, 020103 (2006).

- [53] P.Nieminen, A. Savinainen, and J. Viiri, Relations between representational consistency, conceptual understanding of the force concept, and scientific reasoning, *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 8, 010123 (2012).
- [54] B. Ibrahim and N.S. Rebello, Representational task for mats and problem solving strategies in kinematics and work, *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 8, 010126 (2012).
- [55] D. Meltzer, Relation between students' problem-solving performance and representational format, *Am. J. Phys.* 73, 463 (2005).
- [56] P.B. Kohl and N.D. Finkelstein, Student representational competence and self-assessment when solving physics problems, *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 1, 010104 (2005)
- [57] M. De Cock, Representation use and strategy choice in physics problem solving, *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 8, 020117 (2012).
- [58] P. Nieminen, A. Savinainen, and J. Viiri, Force Concept Inventory-based multiple-choice test for investigating students' representational consistency, *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 6, 020109 (2010).
- [59] A.F. Heckler and T.M. Scaife, Adding and subtracting vectors: The problem with the arrow representation, *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 11, 010101 (2015).
- [60] D. Liu and Y. Kottegoda, Disconnect between under graduates' understanding of the algebraic and geometric aspects of vectors, *European J. Phys.* 40, 035702 (2019).
- [61] Fischhoff, B., Slovic, P., & Lichtenstein, S. (1977). Knowing with certainty: The appropriateness of extreme confidence. *Journal of Experimental Psychology*, 3(4), 552–564. <https://doi.org/10.1037/0096-1523.3.4.552>.
- [62] Foster, C. (2022), Implementing Confidence Assessment in Low-Stakes, Formative Mathematics Assessments, *Int. J. of Sci. and Math. Educ.*, 20, 1411-1429 <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10207-9>
- [63] Foster, C. (2016), Confidence and competence with mathematical procedures. *Educ. Stud. Math.* 91, 271-288, DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9660-9>

- [64] Foster, C., Woodhead, S., Barton, C., & Clark-Wilson, A. (2021). School students' confidence when answering diagnostic questions online. *Educational Studies in Mathematics*. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10084-7>
- [65] Gardner-Medwin, A. R. (1995). Confidence assessment in the teaching of basic science. *Research in Learning Technology*, 3(1), 80–85. <https://doi.org/10.3402/rlt.v3i1.9597>.
- [66] Gardner-Medwin, A. R. (1998). Updating with confidence: Do your students know what they don't know? *Healthcare Informatics*, 4, 45–46.
- [67] Gardner-Medwin, A. R. (2006). Confidence-based marking: Towards deeper learning and better exams. In C. Bryan & K. Clegg (Eds.), *Innovative assessment in higher education* (pp. 141–149). Routledge.
- [68] Gardner-Medwin, T. (2019). Certainty-based marking: Stimulating thinking and improving objective tests. In C. Bryan & K. Clegg (Eds.), *Innovative assessment in higher education: A handbook for academic practitioners* (2nd ed., pp. 141–150). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780429506857-13>.
- [69] Ehrlinger, J., Johnson, K., Banner, M., Dunning, D., & Kruger, J. (2008). Why the unskilled are unaware: Further explorations of (absent) self-insight among the incompetent. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 105(1), 98–121. <https://doi.org/10.1016/j.obhdp.2007.05.002>.
- [70] Butterfield, B., & Metcalfe, J. (2001). Errors committed with high confidence are hypercorrected. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 27, 1491–1494. <https://doi.org/10.1037/0278-7393.27.6.1491>.
- [71] Foster, C. (2014). Can't you just tell us the rule? Teaching procedures relationally. In S. Pope (Ed.), *Proceedings of the 8th British Congress of Mathematics Education, Vol. 34, No. 2, September* (pp. 151–158). Nottingham: University of Nottingham.
- [72] TUV, Supplemental material test of understanding.
- [73] T. Deprez, S. E. Gijssen, J. Deprez and M. De Cock, Investigating student understanding of cross products in a mathematical and two electromagnetism contexts,

Physical review physics education research 15, 2013, DOI: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.020132

[74] Bani-Salameh et al HPE 2020, Investigating the knowledge of vector concepts of first year medical students.

[75] Klein et al. 2017 PRST-PER, Assessment of representational competence in kinematics.

[76] U. Wutchana and N. Emarat, A Worksheet to Enhance Students Conceptual Understanding in Vector Components, Siam Physics Congress 2017 (SPC2017) doi :10.1088/1742-6596/901/1/012127

[77] P. Barniol and G. Zavala, A Tutorial Worksheet to Help Students Develop the Ability to Interpret the Dot Product as a Projection, Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 2016, 12(9), 2387-2398 doi: 10.12973/eurasia.2016.1271a

[78] T. Deprez, S. E. Gijzen and J. Deprez, Investigating student understanding of cross products in a mathematical and two electromagnetism contexts, Physical review physics education research 15, 020132 (2019)

[79] U. Wutchana, Effectiveness of tutorial worksheet for promoting basic vector concepts: dot product and cross product, J. Phys.: Conf. Ser. 1719 012090 (2021)

[80] P. Barniol and G. Zavala, Students' Understanding of Dot Product as a Projection in No-context, Work and Electric Flux Problems

[81] P. Barniol and G. Zavala, Students' Understanding of the Concepts of Vector Components and Vector Products, Physics Education Research and Innovation Group Department of Physics, Tecnológico de Monterrey. (2010) <https://www.researchgate.net/publication/253357422>