



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

---

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Teorema di Abel-Jacobi  
per superficie di Riemann compatte

Relatore:  
Prof. Maurizio Cailotto

Laureando: Klara Metaliu  
Matricola: 2003584

---

Anno Accademico 2022/2023

22/09/2023



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 Topologia e Omologia</b>	<b>7</b>
1.1 Richiami di topologia . . . . .	7
1.2 Il primo gruppo di omologia . . . . .	9
<b>2 Superficie di Riemann</b>	<b>13</b>
2.1 Definizione di superficie di Riemann . . . . .	13
2.2 Funzioni olomorfe e meromorfe su superficie di Riemann . . . . .	15
2.3 1-Forme differenziali olomorfe e meromorfe su superficie di Riemann . . . . .	23
<b>3 Teorema di Riemann-Roch</b>	<b>29</b>
3.1 Divisori . . . . .	29
3.2 Teorema di Riemann-Roch . . . . .	32
<b>4 Teorema di Abel-Jacobi per superficie di Riemann compatte</b>	<b>35</b>
4.1 Definizione di Jacobiana . . . . .	35
4.2 Teorema di Abel-Jacobi . . . . .	39
4.3 Costruzione algebrica della Jacobiana . . . . .	47



# Introduzione

Lo scopo di questa tesi è quello di illustrare il percorso che a partire dalla definizione di superficie di Riemann porta al teorema di Abel-Jacobi per superficie di Riemann compatte.

Dopo aver richiamato alcuni concetti di base della topologia e aver introdotto il primo gruppo di omologia di una superficie, passeremo alla costruzione delle superficie di Riemann compatte. Su tali superficie studieremo com'è possibile definire funzioni e 1-forme differenziali olomorfe e meromorfe. Ci soffermeremo sulle funzioni e sulle 1-forme meromorfe, in particolare sui rispettivi zeri e poli: a tal proposito introdurremo i divisori su una superficie di Riemann. Questi oggetti matematici ci permetteranno di “raccolgere” zeri e poli di una funzione o 1-forma meromorfa con le loro rispettive molteplicità.

Come spesso accade in matematica, ci poniamo il problema opposto: dato un insieme di punti su una superficie di Riemann, esistono funzioni meromorfe che hanno per zeri e poli tali punti con molteplicità “controllata”? Quando diciamo che una funzione meromorfa ha zeri e poli controllati da un divisore  $D$  intendiamo dire che se  $p \in \text{Supp}(D)$  e  $D(p) < 0$  allora  $p$  è uno zero di molteplicità almeno  $-D(p)$ ; se invece  $p \in \text{Supp}(D)$  soddisfa  $D(p) > 0$  allora  $p$  è un polo di molteplicità al più  $D(p)$ . A questa domanda risponde il teorema di Riemann-Roch in modo molto preciso, ovvero fornendo una formula per il calcolo della dimensione dello spazio vettoriale delle funzioni meromorfe cercate.

Passeremo poi alla definizione di Jacobiana di una superficie di Riemann compatta: la prima definizione di Jacobiana è di tipo analitico, come quoziente dello spazio duale dei differenziali olomorfi sulla superficie di Riemann, modulo il sottogruppo dei periodi. Si vede essere una varietà abeliana di dimensione pari al genere della superficie di Riemann e in cui la superficie di Riemann si immerge. L'immersione di una superficie di Riemann nella sua Jacobiana è una conseguenza del teorema di Abel-Jacobi.

In particolare il teorema di Abel permette di caratterizzare i divisori principali sulla superficie di Riemann come quelli di grado zero e immagine nulla tramite la mappa di Abel-Jacobi. Insieme al teorema di Jacobi possiamo ottenere una interpretazione puramente algebrica della Jacobiana come quoziente dei divisori di grado zero con quelli principali. Questo permette di estendere definizioni e risultati anche per curve algebriche su campi diversi da  $\mathbb{C}$ , in cui non si possono usare strumenti analitici.

Illustreremo qualche esempio, specie per superficie di Riemann (compatte) di genere 1 e 2.

---

La conclusione di questa tesi rappresenta una delle caratteristiche che a mio parere rendono magica la matematica: definire un oggetto in modo analitico come fatto per la Jacobiana e scoprire poi che quest'oggetto è tanto analitico quanto algebrico simboleggia quanto la matematica sia unità. Le divisioni che sussistono tra algebra, geometria, analisi e tutto il resto sono solo una questione di stile: l'essenza della matematica è la stessa per tutti i matematici, ed appartiene a noi tanto quanto noi apparteniamo a lei.

Prima di intraprendere questo percorso di studi la matematica mi piaceva (anche) perché si trattava per me di un'altra dimensione, staccata dalla realtà, qualcosa di intangibile. Quello che invece ho capito in questi tre anni è che questo mondo delle idee è reale, è dentro i matematici che mi hanno insegnato quello che so oggi, ed è dentro la matematica che spero di diventare.

# Capitolo 1

## Topologia e Omologia

### 1.1 Richiami di topologia

Richiamiamo ora alcune definizioni di topologia.

**Definizione 1.1.** Uno spazio topologico  $X$  è Hausdorff o separato se per ogni coppia di punti distinti  $x, y \in X$  esistono due aperti  $U, V$  tali che  $x \in U$ ,  $y \in V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .

**Definizione 1.2.** Uno spazio topologico si dice a base numerabile se esiste una base numerabile della sua topologia.

**Definizione 1.3.** Uno spazio topologico è connesso se non è unione disgiunta di due aperti.

**Definizione 1.4.** Un ricoprimento di uno spazio topologico  $X$  è una famiglia di sottoinsiemi  $\{U_i\}$  la cui unione è tutto lo spazio. Il ricoprimento è aperto se i suoi elementi  $U_i$  sono aperti dello spazio.

**Definizione 1.5.** Uno spazio topologico è compatto se ogni suo ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.

**Definizione 1.6.** Sia  $X$  spazio topologico Hausdorff. Una carta reale 2-dimensionale su  $X$  è un omeomorfismo  $\phi : U \rightarrow V$ , dove  $U \subset X$  è un aperto di  $X$  e  $V \subset \mathbb{R}^2$  è un aperto di  $\mathbb{R}^2$ . Due carte  $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$  e  $\phi_j : U_j \rightarrow V_j$  sono compatibili ( $\mathcal{C}^\infty$ -compatibili) se  $U_i \cap U_j = \emptyset$  oppure la mappa  $\phi_{i,j} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ , detta mappa di transizione, è diffeomorfismo (diffeomorfismo  $\mathcal{C}^\infty$ ).

**Definizione 1.7.** Sia  $X$  spazio topologico Hausdorff. Un atlante è una collezione di carte  $\{\phi_i : U_i \rightarrow V_i\}_i$  su  $X$  tra loro compatibili tale che  $X = \bigcup_i U_i$ . Due atlanti si dicono equivalenti se la loro unione è ancora un atlante.

L'atlante è detto  $\mathcal{C}^\infty$  se le carte sono tra loro  $\mathcal{C}^\infty$ -compatibili. Una struttura  $\mathcal{C}^\infty$  su  $X$  è una classe di equivalenza di atlanti.

**Definizione 1.8.** Una superficie reale  $S$  è uno spazio topologico separato e connesso localmente omeomorfo ad aperti di  $\mathbb{R}^2$  con mappe di transizione differenziabili. La superficie si dirà compatta se lo è in quanto spazio topologico.

---

**Definizione 1.9.** Una superficie  $S$  si dice orientabile se ogni cammino chiuso sulla superficie, ovvero ogni mappa  $\phi : [0, 1] \rightarrow S$  tale che  $\phi(0) = \phi(1)$  conserva l'orientamento, o equivalentemente se ammette un atlante tale che le mappe di transizione abbiano Jacobiane di determinante positivo in ogni punto.

Ricordiamo che per orientamento intendiamo la scelta di un orientamento nello spazio tangente ad  $S$  nel punto iniziale (e finale).

Data una superficie  $S$ , un triangolo di  $S$  è una mappa iniettiva e continua  $i : \Delta \rightarrow S$  che è un omeomorfismo sull'immagine, dove  $\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 0 \leq x, y, x+y \leq 1 \right\}$  è il triangolo euclideo standard. Chiamiamo lati e vertici dei triangoli di  $S$  le immagini dei lati e dei vertici dei corrispondenti triangoli euclidei.

**Definizione 1.10.** Una triangolazione di una superficie reale  $S$  è una collezione di triangoli di  $S$  tale che:

- (i) ogni punto  $P$  di  $S$  che non sia un vertice e non appartenga ad un lato, appartiene ad un unico triangolo che ne è un intorno;
- (ii) ogni punto  $P$  di  $S$  che non sia un vertice ma appartenga ad un lato, appartiene ad esattamente due triangoli che si intersecano esattamente in quel lato, e la cui unione è un intorno di  $P$ ;
- (iii) ogni punto  $P$  di  $S$  che sia un vertice appartiene ad un numero finito di triangoli che sono numerabili in modo tale che ciascuno abbia esattamente un lato in comune con il successivo nell'ordine ciclico, e l'unione di tutti è un intorno di  $P$ .

**Definizione 1.11** (Caratteristica di Eulero-Poincaré). Data una superficie reale compatta  $S$  e una sua triangolazione  $\mathcal{T}$ , siano  $t$  il numero di triangoli,  $l$  il numero di lati,  $v$  il numero di vertici. La caratteristica di Eulero - Poincaré di  $S$  è per definizione l'intero  $\chi(S) = t - l + v$ . Tale intero non dipende dalla triangolazione scelta, ma solo dalla superficie  $S$ .

Tale definizione è ben posta in quanto valgono i seguenti risultati:

**Teorema 1.12.** *Ogni superficie reale ammette triangolazione.*

**Teorema 1.13.** *Una superficie reale ammette triangolazione finita se e solo è compatta.*

**Definizione 1.14** (Genere Topologico). Data una superficie reale compatta  $S$ , definiamo il genere topologico di  $S$  come l'intero dato da:

$$g(S) = \begin{cases} \frac{2 - \chi(S)}{2} & \text{se } S \text{ orientabile,} \\ 2 - \chi(S) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dalla classificazione delle superficie reali compatte si trova il primo significato topologico del genere: il genere corrisponde al numero di "buchi" presenti nella superficie, nel caso orientabile, e al numero di *cross-cap* (autointersezioni), nel caso non orientabile.



## 1.2 Il primo gruppo di omologia

Ricordiamo che  $n + 1$  punti  $v_0, \dots, v_n$  in  $\mathbb{R}^n$  si dicono in posizione generale se i vettori differenza  $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$  sono linearmente indipendenti.

**Definizione 1.15** ( $n$ -simpleso). Un  $n$ -simpleso  $[v_0, \dots, v_n]$  in  $\mathbb{R}^n$  è il più piccolo insieme convesso che contiene gli  $n + 1$  punti  $v_0, \dots, v_n$  in posizione generale. I punti  $v_i$  sono detti vertici del simpleso.

Denotiamo con  $\Delta^n$  l' $n$ -simpleso standard:

$$\Delta^n = [e_0, \dots, e_n] = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_i t_i = 1, t_i \geq 0 \quad \forall i \right\} \quad (1.1)$$

In un  $n$ -simpleso l'ordine dei vertici conta: naturalmente, due semplici generati dallo stesso insieme di punti ma con diverso ordine dei vertici sono omeomorfi. Inoltre specificare l'ordinamento dei vertici permette di definire un omeomorfismo naturale dall' $n$ -simpleso standard  $\Delta^n$  a qualsiasi altro  $n$ -simpleso  $[v_0, \dots, v_n]$  che preserva l'ordine dei vertici:

$$\begin{aligned} \Delta^n &\longrightarrow [v_0, \dots, v_n] \\ (t_0, \dots, t_n) &\longmapsto \sum_i t_i v_i \end{aligned}$$

**Definizione 1.16.** Dato un  $n$ -simpleso, una sua faccia è l'  $(n - 1)$ -simpleso che si ottiene eliminando uno degli  $n + 1$  vertici del simpleso.

L'ordine dei vertici in una faccia è per convenzione quello ereditato dall'ordine dei vertici nel simpleso.

**Definizione 1.17.** Il bordo di un  $n$ -simpleso è l'unione di tutte le facce del simpleso. Il bordo del  $n$ -simpleso standard  $\Delta^n$  si indica con  $\partial \Delta^n$ .

Data una superficie reale  $X$ , definiamo  $C_n$  come il gruppo abeliano libero generato dagli  $n$ -simplessi  $e_\alpha^n$  di  $X$ . I suoi elementi possono essere scritti come somme formali finite  $\sum_\alpha n_\alpha e_\alpha^n$  a coefficienti interi  $n_\alpha \in \mathbb{Z}$ . In particolare si ha:

$$\begin{aligned} C_0(X) &= \text{gruppo abeliano libero generato dai punti di } X \\ C_1(X) &= \text{gruppo abeliano libero generato dai segmenti di } X \\ C_2(X) &= \text{gruppo abeliano libero generato dai triangoli di } X \end{aligned}$$

Definiamo poi le mappe

$$\begin{aligned} \partial_n : C_n(X) &\longrightarrow C_{n-1}(X) \\ [v_0, \dots, v_n] &\longmapsto \sum_i (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \end{aligned} \quad (1.2)$$

dove con  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$  indichiamo l' $(n - 1)$ -simpleso ottenuto eliminando il vertice  $v_i$  da  $[v_0, \dots, v_n]$ . Si osservi che l'attribuzione dei segni alle facce è in accordo con l'orientazione determinata dall'ordine dei vertici. Vale il seguente:

---

**Lemma 1.18.** *La composizione  $\partial_n \circ \partial_{n-1} : C_n(X) \rightarrow C_{n-2}(X)$  è identicamente nulla.*

*Dimostrazione.* Si ha  $\partial_n([v_0, \dots, v_n]) = \sum_i (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ , dunque:

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(\partial_n([v_0, \dots, v_n])) &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \\ &+ \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j-1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n] = 0 \end{aligned}$$

La somma è zero in quanto scambiando i due indici nella seconda sommatoria si ottiene esattamente l'opposto della prima. □

Segue  $\text{im } \partial_n \subseteq \ker \partial_{n-1}$ . Dunque è ben definito il loro quoziente.

**Definizione 1.19** (*n*-esimo gruppo di omologia). Data una superficie reale  $X$ , l'*n*-esimo gruppo di omologia di  $X$  è il gruppo quoziente  $H_n(X) = \ker \partial_{n-1} / \text{im } \partial_n$ .

Il primo gruppo di omologia è quindi  $H_1(X) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$ , dove le mappe  $\partial_1$  e  $\partial_2$  sono:

$$\begin{array}{ccccc} C_2(X) & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(X) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(X) \\ \Delta & \longmapsto & l_0 - l_1 + l_2 & & \\ & & l & \longmapsto & P_1 - P_0 \end{array}$$

dove  $\Delta = [P_0, P_1, P_2]$  è il triangolo in  $X$  di vertici  $P_0, P_1, P_2$  e lati  $l_0, l_1, l_2$ , con  $l_i$  lato opposto al vertice  $P_i$ , mentre  $l = [P_0, P_1]$  è il lato in  $X$  di vertici  $P_0 = l(0)$  e  $P_1 = l(1)$ . Gli elementi di  $\text{im } \partial_2$  sono detti bordi dei triangoli, quelli di  $\ker \partial_1$  sono detti catene chiuse: il primo gruppo di omologia di  $X$  è quindi il quoziente tra il gruppo abeliano generato dalle catene chiuse e il suo sottogruppo generato dai bordi dei triangoli. Vengono cioè identificati tra loro tutti i cammini chiusi in  $X$  che differiscono per bordi di triangoli: infatti integrare su tali cammini delle forme differenziali olomorfe dà lo stesso risultato.

È interessante osservare la relazione che sussiste tra il primo gruppo di omologia e il gruppo fondamentale di una superficie  $X$ . Ricordiamo la seguente

**Definizione 1.20** (Gruppo fondamentale). Il gruppo fondamentale  $\pi_1(X, x)$  di uno spazio topologico  $X$  centrato in un punto  $x \in X$  è il gruppo dei cammini chiusi di base un punto  $x$  a meno di omotopia relativa al punto.

Quindi se indichiamo con  $C(X, x)$  l'insieme dei cammini chiusi in  $X$  di punto base  $x$  e con  $\sim$  la relazione di omotopia, possiamo scrivere

$$\pi_1(X, x) = C(X, x) / \sim.$$

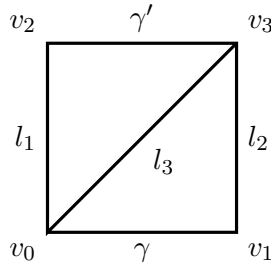
La scelta del punto  $x$  porta a gruppi isomorfi: se  $X$  è connesso per archi, scelto un altro punto  $y \in X$  esiste sempre un cammino da  $x$  in  $y$ , e dunque è ben definito l'isomorfismo di gruppi indotto dalla composizione con tale cammino (e il suo inverso). In tal caso, che è quello che studieremo, scriviamo semplicemente  $\pi_1(X)$ .

Dato che ogni cammino chiuso in  $X$  è una catena chiusa, è naturale considerare l'immersione  $i : C(X, x) \rightarrow \ker(\partial_1)$ . Componendo con la proiezione  $\pi$  di  $\ker(\partial_1)$  sul quoziente  $H_1(X)$ , otteniamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
C(X, x) & \xrightarrow{i} & \ker \partial_1 \\
& \searrow & \downarrow \pi \\
& & H_1(X)
\end{array}$$

Siano  $\gamma, \gamma'$  due cammini in  $C(X, x)$ . Se  $\gamma \sim \gamma'$  allora  $[\gamma] = [\gamma']$ , dove  $[\gamma] = \pi(i(\gamma))$ .

Infatti se  $\gamma \sim \gamma'$  allora esiste un'omotopia  $H : I \times I \rightarrow X$ , che possiamo rappresentare come in figura.



Detti  $l_1 = [v_0, v_2], l_2 = [v_1, v_3], l_3 = [v_0, v_3]$ , dalla definizione di omotopia si hanno le seguenti uguaglianze:  $v_0 = v_1 = v_2 = v_3 = x$ ,  $l_1 = l_2 = e_x$  cammino costante in  $x$ ,  $[v_0, v_1] = \gamma$ ,  $[v_2, v_3] = \gamma'$ . Definisco i due triangoli  $A = [v_0, v_3, v_2]$ ,  $B = [v_0, v_1, v_3]$  e calcolo le loro immagini tramite la mappa  $\partial_2$ :

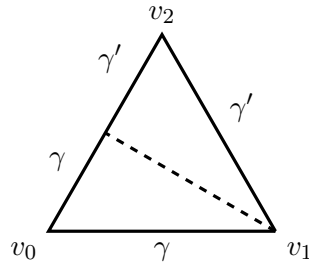
$$\begin{aligned}
\partial_2(A) &= -\gamma' - l_1 + l_3 \\
\partial_2(B) &= l_2 - l_3 + \gamma
\end{aligned}$$

Segue  $\gamma - \gamma' = \partial_2(A) + \partial_2(B) \in \text{im } \partial_2$ , da cui  $[\gamma] = [\gamma']$ .

Ha senso quindi considerare l'applicazione:

$$\begin{array}{ccc}
\psi : C(X, x) / \sim = \pi_1(X) & \longrightarrow & H_1(X) \\
& & \gamma \longmapsto [\gamma]
\end{array}$$

Si osservi che la mappa  $\psi$  è morfismo di gruppi. Presi  $\gamma, \gamma'$  due cammini in  $\pi_1(X)$  vale  $[\gamma \cdot \gamma'] = \gamma + \gamma'$ . Come si può vedere in figura infatti, il triangolo in  $X$  dato dalla composizione della proiezione ortogonale sul lato  $[v_0, v_2]$  con il prodotto di cammini  $\gamma \cdot \gamma'$  ha come bordo  $[\gamma'] - [\gamma \cdot \gamma'] + [\gamma]$ .



Segue  $[\gamma'] - [\gamma \cdot \gamma'] + [\gamma] \in \text{im } \partial_2$ , cioè  $[\gamma \cdot \gamma'] = \gamma + \gamma'$ .

Consideriamo la proiezione di  $\pi_1(X)$  sul suo abelianizzato  $\pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ : poichè si tratta di una mappa universale per i morfismi di gruppi tra  $\pi_1(X)$  e un qualsiasi gruppo abeliano, esiste unica  $\psi'$  che rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(X) & \xrightarrow{\psi} & H_1(X) \\
\downarrow & \nearrow \psi' & \\
\pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)] & & 
\end{array}$$

La funzione  $\psi'$ , oltre ad essere morfismo di gruppi in quanto lo è  $\psi$ , si dimostra essere biettiva.

Essa infatti ammette inversa  $(\psi')^{-1} : H_1(X) \rightarrow \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ , definita mandando ogni elemento  $\sum n_i \sigma_i$  di  $H_1(X)$  nel prodotto di cammini  $(\sigma_1)^{n_1} \dots (\sigma_m)^{n_m}$ .

In realtà si può osservare che la mappa  $\psi$  è suriettiva, e quindi dedurre da ciò la suriettività di  $\psi'$ . Consideriamo un elemento  $\sum_i n_i \sigma_i \in H_1(X)$ : rinominando i  $\sigma_i$  possiamo assumere che  $n_i = 1$  per ogni  $i$ . Inoltre si può supporre che ogni  $\sigma_i$  sia un cammino chiuso, poiché se così non fosse, componendo  $\sigma_i$  con un numero finito opportuno di  $\sigma_j$  si ottiene un cammino chiuso. Infine, la connessione per archi di  $X$  garantisce l'esistenza di un cammino  $\gamma$  da  $x$  a  $x_i$  punto base del cammino chiuso  $\sigma_i$ . Dunque tramite la mappa  $\sigma_i \mapsto \gamma \sigma_i \bar{\gamma}$  possiamo assumere che ogni cammino chiuso abbia come punto base  $x$ . Abbiamo quindi che ogni elemento  $\sum_i n_i \sigma_i \in H_1(X)$  è somma di cammini chiusi di punto base  $x$ , e dunque è un cammino chiuso di punto base  $x$ .

Si ha quindi il seguente isomorfismo di gruppi:

$$H_1(X) = \ker(\partial_1) / \text{im}(\partial_2) \cong \pi_1(X) / [\pi_1(X), \pi_1(X)]$$

Il primo gruppo di omologia di una superficie  $X$  coincide quindi con l'abelianizzato del gruppo fondamentale di  $X$ . In questi termini, conoscendo il gruppo fondamentale di una superficie, risulta veloce calcolarne il primo gruppo di omologia.

*Esempio 1.21.* (Sfera di Riemann) Sia  $X = \mathbb{S}^2$  definita da  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . È noto che  $\pi_1(X) = 1$ , dunque segue  $H_1(X) = 1$ .

*Esempio 1.22.* (Toro) Sia  $X = \mathbb{T}$  definito da  $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Essendo  $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ , vale  $\pi_1(X) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  e quindi  $H_1(X) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

*Esempio 1.23.* (Wedge sum di tori) Sia  $X = \mathbb{T} \vee \mathbb{T}$ , superficie ottenuta identificando un punto del primo toro con un punto del secondo. Essendo  $\pi_1(\mathbb{T}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , vale  $\pi_1(X) = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) * (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ , dove  $*$  indica il prodotto libero di gruppi. Dunque  $H_1(X) = \mathbb{Z}^4$ .

*Esempio 1.24.* (Somma connessa di tori) Sia  $X = \mathbb{T} \# \mathbb{T}$ , dove  $\#$  indica la somma connessa di superfici. Essendo  $\pi_1(\mathbb{T}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle a, b \rangle$ , vale

$$\pi_1(X) = \frac{\langle a, b, c, d \rangle}{\langle aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} \rangle}.$$

Dunque  $H_1(X) = \mathbb{Z}^4$ .

## Capitolo 2

# Superficie di Riemann

### 2.1 Definizione di superficie di Riemann

**Definizione 2.1.** Dato uno spazio topologico  $X$ , una carta complessa su  $X$  è un omeomorfismo  $\phi : U \rightarrow V$ , dove  $U \subset X$  è un aperto di  $X$  e  $V \subset \mathbb{C}$  è un aperto di  $\mathbb{C}$  tale che  $0 \in V$ . La carta è centrata in  $p \in \mathbb{C}$  se  $\phi(p) = 0$ .

**Definizione 2.2.** Una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $U \subset \mathbb{C}$  aperto, si dice olomorfa se è derivabile in senso complesso, cioè se per ogni punto  $z \in U$  esiste il seguente limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(z)}{\epsilon},$$

con  $\epsilon \in \mathbb{C}$ .

Si osservi che tale scrittura ha senso in quanto  $\mathbb{C}$  può essere dotato di una topologia, in questo caso assumiamo che abbia la topologia di  $\mathbb{R}^2$ .

**Definizione 2.3.** Due carte complesse  $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$  e  $\phi_j : U_j \rightarrow V_j$  su  $X$  si dicono compatibili se  $U_i \cap U_j = \emptyset$  oppure la mappa  $\phi_{i,j} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$  è olomorfa. La mappa  $\phi_{i,j}$  è detta di transizione.

**Definizione 2.4.** Dato uno spazio topologico  $X$ , un atlante complesso per  $X$  è una collezione di carte complesse  $\{\phi_i : U_i \rightarrow V_i\}_i$  su  $X$  tra loro compatibili e tali che  $X = \bigcup_i U_i$ .

**Definizione 2.5** (Superficie di Riemann). Una Superficie di Riemann è uno spazio topologico Hausdorff, a base numerabile e connesso, dotato di un atlante complesso. Una superficie di Riemann si dice compatta se è compatta in quanto spazio topologico.

Dalla definizione si può riconoscere che una superficie di Riemann è una varietà complessa di dimensione complessa 1 e una superficie reale di dimensione reale 2.

**Definizione 2.6.** Una varietà reale 2-dimensionale è uno spazio topologico Hausdorff tale per cui per ogni punto esiste un intorno aperto omeomorfo al disco aperto unitario  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ . È detta  $\mathcal{C}^\infty$  se dotata di una struttura  $\mathcal{C}^\infty$ .

Dato che funzioni olomorfe di variabile complessa  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  sono  $\mathcal{C}^\infty$  in  $x, y$  segue che una superficie di Riemann è una varietà reale 2-dimensionale  $\mathcal{C}^\infty$ . Da questo segue che ogni superficie di Riemann è localmente connessa.

Inoltre, ogni superficie di Riemann è orientabile in quanto le mappe di transizione del suo atlante hanno Jacobiane di determinante positivo in ogni punto. Infatti chiediamo che in un atlante complesso le mappe di transizione siano olomorfe, e questo equivale, dalle equazioni di Cauchy-Riemann, ad avere determinante della Jacobiana positivo.

Siano  $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$  e  $\phi_j : U_j \rightarrow V_j$  due carte complesse su  $X$  e  $\phi = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$  la mappa di transizione tra le due. Il dominio e il codominio di  $\phi$  sono aperti di  $\mathbb{C}$ , quindi per ogni  $x + iy = z \in \phi_i(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{C}$  possiamo scrivere  $\phi(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ , con  $u(x, y) = \operatorname{Re} \phi(x, y)$  e  $v(x, y) = \operatorname{Im} \phi(x, y)$ . Se  $\phi$  è olomorfa, allora  $\partial_x u = \partial_y v$  e  $\partial_y u = -\partial_x v$ , da cui segue

$$\det J_\phi(x, y) = \det \begin{pmatrix} \partial_x u(x, y) & \partial_y u(x, y) \\ \partial_x v(x, y) & \partial_y v(x, y) \end{pmatrix} = \partial_x^2 u(x, y) + \partial_y^2 v(x, y) > 0.$$

È possibile quindi attribuire alle superficie di Riemann compatte, così come per le superfici reali compatte, il genere topologico.

*Esempio 2.7.* Sia  $X = \mathbb{R}^2$ : è uno spazio topologico Hausdorff, a base numerabile e connesso. Considero la famiglia di funzioni  $\mathcal{A} = \{\phi_U : U \rightarrow \mathbb{C}\}$  definite da  $\phi_U(x, y) = x + iy$  al variare di  $U \subset \mathbb{R}^2$  aperto: le funzioni  $\phi_U$  sono omeomorfismi, e dunque carte complesse perché le mappe di transizione sono funzioni olomorfe. Presi  $U, V$  aperti non disgiunti di  $\mathbb{R}^2$  si ha infatti:

$$\begin{array}{ccccc} \phi_U(U \cap V) & \xrightarrow{\phi_U^{-1}} & U \cap V & \xrightarrow{\phi_V} & \phi_V(U \cap V) \\ x + iy & \mapsto & (x, y) & \mapsto & x + iy. \end{array}$$

In particolare per ogni coppia di aperti  $U, V$  vale  $\phi_V \circ \phi_U^{-1} = \operatorname{id}$ , che è funzione olomorfa. Dunque  $\mathcal{A}$  è atlante complesso per  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^2$  è superficie di Riemann.

*Esempio 2.8.* (Sfera di Riemann) Sia  $X = \mathbb{S}^2$  definita da  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ : è uno spazio topologico Hausdorff, a base numerabile, connesso e compatto. Detto  $N = (0, 0, 1)$  considero la mappa  $\phi_1$ :

$$\begin{array}{ccc} \phi_1 : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y, w) & \mapsto & \frac{x}{1-w} + i \frac{y}{1-w}. \end{array}$$

Detto  $S = (0, 0, -1)$  considero la mappa  $\phi_2$ :

$$\begin{array}{ccc} \phi_2 : \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y, w) & \mapsto & \frac{x}{1+w} - i \frac{y}{1+w}. \end{array}$$

Le due funzioni così definite sono omeomorfismi, e vale

$$\phi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}) = \phi_2(\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Si verifica inoltre che  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = \frac{1}{z}$ , che è funzione olomorfa fuori 0. Dunque le carte complesse sono compatibili e formano un atlante complesso per  $\mathbb{S}^2$ .

---

*Esempio 2.9.* (Retta proiettiva complessa) Sia  $X = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  la retta proiettiva complessa: essa costituisce uno spazio topologico Hausdorff, a base numerabile, connesso e compatto. Siano  $\mathbf{0} = [1 : 0]$  e  $\infty = [0 : 1]$ . È possibile coprire  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  con due carte complesse:

$$\begin{array}{ccc} \phi_1 : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ [x : y] & \longmapsto & \frac{y}{x} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \phi_2 : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{\mathbf{0}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ [x : y] & \longmapsto & \frac{x}{y} \end{array}$$

Tali funzioni sono omeomorfismi tra loro compatibili in quanto  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  manda  $z$  in  $\frac{1}{z}$ , ed è quindi funzione olomorfa su  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . L'aperto  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{\mathbf{0}\}$  verrà indicato con  $\mathbb{C}_\infty$ , mentre osserviamo che  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} \cong \mathbb{C}$ .

*Esempio 2.10.* Sia  $X$  una curva algebrica proiettiva liscia definita dall'equazione  $f = f(x, y)$ : si tratta di una superficie di Riemann compatta in quanto applicando attorno ad ogni punto il teorema della funzione implicita si ottiene un atlante. Le funzioni di transizione sono l'identità oppure la stessa funzione implicita, dunque l'atlante è olomorfo.

In particolare questo è vero per le curve ellittiche, ovvero curve piane lisce di grado 3.

*Esempio 2.11.* Sia  $X = \mathbb{T}$  il toro complesso. Ricordiamo che  $\mathbb{T}$  è definito come quoziente di  $\mathbb{C}$  su un reticolo  $L$  definito da

$$L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\},$$

con  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  linearmente indipendenti su  $\mathbb{R}$ . Quindi  $\mathbb{T} = \mathbb{C}/L$ .

Tramite la proiezione  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{T}$  è possibile munire  $\mathbb{T}$  della topologia quoziente;  $\mathbb{T}$  è connesso poiché  $\mathbb{C}$  lo è e  $\pi$  è continua. Inoltre fissato un punto  $z \in \mathbb{C}$  si dimostra che l'immagine del parallelogramma  $P_z = \{z + \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 : \lambda_i \in [0, 1]\}$  è tutto  $\mathbb{T}$ : quindi  $\mathbb{T}$  è compatto perché lo è  $P_z$ .

Costruiamo ora su  $\mathbb{T}$  un atlante. Il reticolo  $L$  è discreto, quindi esiste  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $z_0 \in \mathbb{C}$ , nel disco aperto  $D(z_0, \varepsilon)$  vi è al più un elemento di  $L$ . Per tale scelta di  $\varepsilon$ , la restrizione della funzione  $\pi$  mappa ogni disco  $D$  nella sua immagine  $\pi(D)$  in modo omeomorfo. Allora per ogni  $z_0 \in \mathbb{C}$ , definiamo la carta complessa  $\phi_{z_0} : \pi(D_{z_0}) \rightarrow D_{z_0}$  con  $\phi_{z_0} = (\pi|_{D_{z_0}})^{-1}$ . Rimane da verificare la compatibilità delle carte. Siano  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  e consideriamo le due carte  $\phi_1 = \phi_{z_1} : \pi(D_{z_1}) \rightarrow D_{z_1}$ ,  $\phi_2 = \phi_{z_2} : \pi(D_{z_2}) \rightarrow D_{z_2}$ . Sia  $U = \pi(D_{z_1}) \cap \pi(D_{z_2})$ : se  $U \neq \emptyset$ , detta  $T = \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U) \rightarrow \phi_2(U)$ , bisogna controllare che  $T$  sia olomorfa in tutto il suo dominio. Osserviamo che  $\pi(T(z)) = \pi(z)$  per ogni  $z \in \phi_1(U)$ , dunque  $T(z) - z = \omega(z) \in L$  per ogni  $z \in \phi_1(U)$  con  $\omega : \phi_1(U) \rightarrow L$  continua. Ma  $L$  è un insieme discreto, dunque  $\omega$  è costante su  $\phi_1(U)$ . Segue quindi che  $T(z) = z + \omega$  per un  $\omega \in L$  fissato, il che significa che  $T$  è olomorfa e la collezione di carte complesse  $\{\phi_z : z \in \mathbb{C}\}$  è un atlante complesso per  $\mathbb{T}$ .

## 2.2 Funzioni olomorfe e meromorfe su superficie di Riemann

Consideriamo ora funzioni definite su superficie di Riemann: per studiarne le proprietà si sfrutta la struttura complessa che caratterizza una superficie di Riemann e si trasporta localmente il problema su  $\mathbb{C}$  tramite le carte complesse.

**Definizione 2.12** (Funzione olomorfa). Sia  $X$  superficie di Riemann,  $p \in X$  un suo punto,  $f : W \rightarrow \mathbb{C}$  funzione con  $p \in W$  e  $W$  aperto di  $X$ . La funzione  $f$  è olomorfa in  $p$  se esiste una

carta complessa  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  con  $p \in U$  tale che  $f \circ \phi^{-1}$  è olomorfa in  $\phi(p)$ . La funzione  $f$  è olomorfa se è olomorfa in ogni punto del suo dominio.

In particolare, con  $f \circ \phi^{-1}$  si intende la composizione di  $\phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow U \cap W$  con  $f : U \cap W \rightarrow \mathbb{C}$ . Si osservi che la proprietà di essere olomorfa in un punto è indipendente dalla scelta della carta complessa. Vale infatti il seguente

**Lemma 2.13.** *Sia  $X$  superficie di Riemann,  $p \in X$  un suo punto,  $f : W \rightarrow \mathbb{C}$  funzione con  $p \in W$  e  $W$  aperto di  $X$ . La funzione  $f$  è olomorfa in  $p$  se e solo se per ogni carta complessa  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  con  $p \in U$  la composizione  $f \circ \phi^{-1}$  è olomorfa in  $\phi(p)$ .*

*Dimostrazione.* La sufficienza segue direttamente dalla definizione di funzione olomorfa su una superficie di Riemann. Per dimostrare la necessità supponiamo  $f$  olomorfa in  $p$ , ovvero esiste  $\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$  con  $p \in U_1$  tale che la composizione  $f \circ \phi_1^{-1}$  è olomorfa in  $\phi_1(p)$ . Sia poi  $\phi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}$  un'altra carta complessa, con  $p \in U_2$ : bisogna dimostrare che  $f \circ \phi_2^{-1}$  è olomorfa in  $\phi_2(p)$ . Si osservi che

$$f \circ \phi_2^{-1} = (f \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \phi_2^{-1}).$$

Segue che  $f \circ \phi_2^{-1}$  è olomorfa in quanto composizione di funzioni olomorfe. In particolare  $f \circ \phi_2^{-1}$  è olomorfa in  $p$ .  $\square$

Indicheremo con  $\mathcal{O}(X)$  l'insieme delle funzioni olomorfe su una superficie di Riemann  $X$ , che costituisce una  $\mathbb{C}$ -algebra di dimensione almeno 1, in quanto le funzioni costanti su  $\mathbb{C}$  sono olomorfe.

*Esempio 2.14.* Sia  $X = \mathbb{S}^2$ . Quali sono le funzioni olomorfe sulla sfera di Riemann? Consideriamo una funzione olomorfa  $f$  sull'aperto  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ , utilizzando le notazioni precedenti, e ci chiediamo se è definita e se è olomorfa nel punto  $N$ . Sia  $f(z) = \sum_i a_i z^i$  lo sviluppo in serie di Laurent della funzione  $f$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \downarrow \phi_1 & & \\ \mathbb{C} \setminus \{0\} & & \end{array}$$

Sia  $\phi_1$  la carta complessa definita su  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  e  $\phi_2$  quella definita su  $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ . Siccome i due aperti sono in biezione e la mappa di transizione olomorfa tra le due carte è  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = \frac{1}{z}$ ,  $f$  è olomorfa in  $N$  se  $f(\frac{1}{z}) = \sum_i \frac{a_i}{z^i}$  è olomorfa in  $z = 0$ . Ma questo accade se e solo se  $f$  è costante. Dunque deduciamo che le funzioni olomorfe sulla sfera di Riemann sono tutte e sole le costanti, ovvero  $\mathcal{O}(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{C}$ .

*Esempio 2.15.* Sia  $X$  una curva algebrica piana liscia  $X$  definita dall'equazione  $f = f(x, y)$ . Si tratta di una superficie di Riemann compatta, dunque le uniche funzioni olomorfe su  $X$  sono quelle costanti:  $\mathcal{O}(X) \cong \mathbb{C}$ .

Dopo aver studiato funzioni da superficie di Riemann in  $\mathbb{C}$ , vediamo com'è possibile costruire funzioni che mappano una superficie di Riemann in un'altra.

La definizione è quella naturale, ovvero quella che richiede l'esistenza di carte locali: se nel caso precedente chiedevamo una carta sul dominio, ora sarà necessario averne una anche nel codominio.



---

**Definizione 2.16** (Mappa olomorfa). Siano  $X$  e  $Y$  superficie di Riemann,  $p \in X$  e  $F : X \rightarrow Y$ . La funzione  $F$  è olomorfa in  $p$  se esistono due carte complesse  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  su  $X$  con  $p \in U_1$  aperto di  $X$  e  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  su  $Y$  con  $F(p) \in U_2$  aperto di  $Y$  tali che  $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$  è olomorfa in  $\phi_1(p)$ . La funzione  $F$  è olomorfa se è olomorfa in ogni punto del suo dominio.

Questa definizione in un certo senso estende la definizione di funzione olomorfa su una superficie di Riemann, in quanto  $\mathbb{C}$  è una superficie di Riemann.

**Definizione 2.17.** Sia  $F : X \rightarrow Y$  mappa olomorfa tra superficie di Riemann. Diremo che  $F$  è isomorfismo tra superficie di Riemann se è biettiva ed ha inversa olomorfa. Un isomorfismo di una superficie di Riemann  $X$  in se stessa è detto automorfismo di  $X$ .

Ricordiamo che data una mappa tra superficie di Riemann compatte  $F : X \rightarrow Y$  e un punto  $p \in X$  è sempre possibile trovare due carte complesse  $\phi : U \rightarrow U'$  e  $\varphi : V \rightarrow V'$ , con  $U$  aperto di  $X$  che contiene  $p$ ,  $V$  aperto di  $Y$  che contiene  $F(p)$  e  $U', V'$  aperti di  $\mathbb{C}$ , tali che  $\varphi \circ F \circ \phi^{-1}(z) = z^m$  con  $m \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{array}{ccc} X \supseteq U & \xrightarrow{F} & V \subseteq Y \\ \downarrow \phi & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{C} \supseteq U' & & V' \subseteq \mathbb{C} \end{array}$$

Il numero naturale  $m$  è detto molteplicità di  $F$  in  $p$  e si indica con  $\text{mult}_p(F)$ .

**Definizione 2.18.** Siano  $X, Y$  superfici di Riemann e  $F : X \rightarrow Y$  mappa olomorfa. Il grado di  $F$  è dato da  $\deg(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} \text{mult}_p(F)$  per qualche  $y \in Y$

La dimostrazione dell'indipendenza del grado dalla scelta di  $y$  non è banale e viene omessa.

Vale inoltre un importante risultato noto come formula di Riemann-Hurwitz, che tornerà utile più avanti:

**Teorema 2.19** (Formula di Riemann-Hurwitz). *Sia  $F : X \rightarrow Y$  mappa olomorfa non costante tra superficie di Riemann compatte. Allora*

$$2g(X) - 2 = \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} [\text{mult}_p(F) - 1].$$

Ricordiamo ora alcune definizioni dell'analisi complessa:

**Definizione 2.20.** Un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  è detto singolarità della funzione olomorfa  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  se  $\Omega$  contiene un intorno puntato  $U \setminus \{z_0\}$  di  $z_0$ .

È possibile distinguere tre diversi tipi di singolarità.

**Definizione 2.21.** Data una funzione  $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa, il punto  $z_0$  è detto:

- *singolarità eliminabile* di  $f$  se la funzione ammette un'estensione  $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa.
- *polo* di  $f$  se la funzione ammette in  $z_0$  uno sviluppo di Laurent finito negativamente, cioè  $f = \sum_{n \geq -m} c_n (z - z_0)^n$  con  $m > 0$ .

- *singolarità essenziale* per  $f$  se la funzione non ammette in  $z_0$  uno sviluppo di Laurent finito, cioè  $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ .

Tali definizioni possono essere “trasportate” su una superficie di Riemann nel modo usuale, ovvero tramite le carte complesse.

**Definizione 2.22.** Sia  $X$  superficie di Riemann,  $p \in X$  e  $f : U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa definita in un intorno puntato di  $p$ . Diciamo che:

- $f$  ha una singolarità eliminabile in  $p$  se esiste una carta  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $p \in U$  tale che  $f \circ \phi^{-1}$  ha una singolarità eliminabile in  $\phi(p)$ .
- $f$  ha un polo in  $p$  se esiste una carta  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $p \in U$  tale che  $f \circ \phi^{-1}$  ha un polo in  $\phi(p)$ .
- $f$  ha una singolarità essenziale in  $p$  se esiste una carta  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $p \in U$  tale che  $f \circ \phi^{-1}$  ha una singolarità essenziale in  $\phi(p)$ .

Analogamente a quanto visto per le funzioni olomorfe, vale ancora l'indipendenza dalle carte, ovvero una funzione  $f$  ha una singolarità eliminabile (risp. polo, singolarità essenziale) in un punto  $p$  se e solo se per ogni carta  $\phi$  la composizione  $f \circ \phi^{-1}$  ha una singolarità eliminabile (risp. polo, singolarità essenziale) in  $p$ .

**Definizione 2.23** (Funzione meromorfa). Sia  $X$  superficie di Riemann,  $p \in X$  un suo punto,  $f : W \rightarrow \mathbb{C}$  funzione con  $p \in W$  e  $W$  aperto di  $X$ . La funzione  $f$  è meromorfa in  $p$  se è olomorfa in  $p$ , oppure ha un polo o una singolarità eliminabile in  $p$ . La funzione  $f$  è meromorfa se è meromorfa in ogni punto del suo dominio.

Indicheremo con  $\mathcal{M}(X)$  l'insieme delle funzioni meromorfe su una superficie di Riemann  $X$ . Tale insieme ha struttura di campo e contiene il campo dei quozienti di  $\mathcal{O}(X)$ , ma non necessariamente coincide con esso. Un esempio di questo fatto è dato dalla sfera di Riemann, come vedremo in seguito.

Abbiamo visto che ad ogni funzione olomorfa su  $X$  è possibile associare una mappa olomorfa tra superficie di Riemann, in quanto  $\mathbb{C}$  è una superficie di Riemann.

È possibile associare una mappa tra superfici di Riemann anche ad una funzione meromorfa, nel modo seguente: data  $f$  funzione meromorfa non costante su  $X$ , definiamo  $F : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$  ponendo:

$$F(p) = \begin{cases} \infty & \text{se } p \text{ è polo} \\ f(p) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove con  $\infty$  si indica il punto  $[0 : 1]$ . Tale mappa è olomorfa e induce una biezione tra l'insieme delle funzioni meromorfe all'insieme delle mappe olomorfe non costantemente  $\infty$  sulla retta proiettiva complessa.

Inoltre se  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione meromorfa su  $X$  e  $F : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$  la mappa olomorfa ad essa associata allora l'ordine di  $f$  coincide con la molteplicità di  $F$  ovunque tranne che nei poli; se  $p \in X$  è polo vale  $\text{mult}_p(F) = -\text{ord}_p(f)$ .

**Proposizione 2.24.** La sfera di Riemann  $\mathbb{S}^2$  è isomorfa alla retta proiettiva complessa  $\mathbb{CP}^1$ .

*Dimostrazione.* Si consideri la mappa  $F$ :

$$F : \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^2$$

$$[v : w] \longmapsto \left( \frac{2 \operatorname{Re}(\bar{v}w)}{|w|^2 + |v|^2}, \frac{2 \operatorname{Im}(\bar{v}w)}{|w|^2 + |v|^2}, \frac{|w| - |v|}{|w|^2 + |v|^2} \right).$$

Tale mappa è biettiva in quanto sono biettive le restrizioni ai due aperti  $\mathbb{CP}^1 \setminus \{N\}$  e  $\mathbb{CP}^1 \setminus \{S\}$ . Abbiamo infatti le due funzioni  $F_1$  e  $F_2$ :

$$F_1 : \mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$$

$$[1 : w] \longmapsto \frac{(2 \operatorname{Re}(w), 2 \operatorname{Im}(w), |w| - 1)}{|w|^2 + 1}$$

$$F_2 : \mathbb{CP}^1 \setminus \{[1 : 0]\} \longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$$

$$[v : 1] \longmapsto \frac{(2 \operatorname{Re}(\bar{v}), 2 \operatorname{Im}(\bar{v}), 1 - |v|)}{1 + |v|^2}$$

con inverse, rispettivamente:

$$F_1^{-1} : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty\} \qquad F_2^{-1} : \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{CP}^1 \setminus \{[1 : 0]\}$$

$$(x, y, z) \longmapsto \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z} = w \qquad (x, y, z) \longmapsto \frac{x}{1+z} - i \frac{y}{1+z} = v$$

Resta da provare che  $F$  è olomorfa con inversa olomorfa. Per fare ciò è sufficiente verificare che  $F_{1,2}$  e  $F_{1,2}^{-1}$  lo sono. Sviluppriamo i conti per  $F_1^{-1}$ : sull'aperto  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$  considero la carta complessa data da  $F_2^{-1}$ :

$$\mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \xrightarrow{F_1^{-1}} \mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty, 0\}$$

$$\downarrow F_2^{-1}$$

$$\mathbb{C}$$

Ora  $F_1^{-1}$  è olomorfa se la mappa  $F_1^{-1} \circ F_2$  lo è, ovvero se  $v = \frac{x}{1+z} - i \frac{y}{1+z} \mapsto w = \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z}$  lo è. Osservando che

$$vw = \left( \frac{x}{1+z} - i \frac{y}{1+z} \right) \left( \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z} \right) = \frac{x^2 + y^2}{1-z^2} = 1$$

si deduce che  $w = \frac{1}{v}$ , da cui  $v \mapsto \frac{1}{v}$  è olomorfa. Con conti analoghi si dimostra quindi che  $\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{CP}^1$ .  $\square$

Sul campo  $\mathcal{M}(X)$  privato dello zero, fissato un punto  $p$  in  $X$ , introduciamo una funzione tra insiemi:

$$\operatorname{ord}_p : \mathcal{M}(X)^* \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Per definire l'immagine di  $f \in \mathcal{M}(X)^*$  tramite  $\operatorname{ord}_p$  è necessario scegliere una carta  $\phi : U \rightarrow X$  su  $X$ , definita in un intorno di  $p$ . Sia  $\phi(p) = z_0$  e  $f = \sum_n c_n (z - z_0)^n$  lo sviluppo di  $f$  in serie

di Laurent nella coordinata  $z$  data dalla carta  $\phi$ . L'ordine di  $f$  in  $p$  è il più piccolo indice con corrispondente coefficiente non nullo nella serie di Laurent, cioè

$$\text{ord}_p(f) = \min_n \{n : c_n \neq 0\}.$$

Per verificare che l'ordine è ben definito, ovvero non dipende dalla scelta della carta  $\phi$ , si procede come nei casi precedenti e si sfrutta il fatto che le mappe di transizione su una superficie di Riemann sono olomorfe.

Dalle proprietà delle serie di Laurent segue che per ogni punto  $p$  di  $X$ , la funzione ordine è morfismo di gruppi tra  $(\mathcal{M}(X)^*, \cdot)$  e  $(\mathbb{Z}, +)$ , ovvero  $\text{ord}_p(fg) = \text{ord}_p(f) + \text{ord}_p(g)$  e  $\text{ord}_p(1) = 0$ , dove  $f, g$  sono funzioni meromorfe su  $X$  non identicamente nulle e 1 è la funzione costantemente uguale ad 1, elemento neutro per l'operazione di prodotto puntuale di funzioni su  $\mathcal{M}(X)^*$ .

Dall'ordine di una funzione meromorfa in un punto, è immediato stabilire se la funzione ha in quel punto uno zero, un polo o nessuno dei due:

- $\text{ord}_p(f) \geq 0$  se e solo se la funzione è olomorfa in  $p$ .
- $\text{ord}_p(f) = n > 0$  se e solo se  $f$  ha uno zero in  $p$ . In tal caso diremo che  $p$  è uno zero di ordine  $n$  di  $f$ .
- $\text{ord}_p(f) = 0$  se e solo se la funzione non ha né uno zero né un polo in  $p$ .
- $\text{ord}_p(f) = -n < 0$  se e solo se  $f$  ha un polo in  $p$ . In tal caso diremo che  $p$  è polo di ordine  $n$  di  $f$ .

Infine ricordiamo il seguente teorema, che segue dalle proprietà delle funzioni meromorfe su  $\mathbb{C}$ .

**Proposizione 2.25.** *Sia  $X$  superficie di Riemann e  $f$  funzione meromorfa non identicamente nulla su  $X$ . Gli zeri e i poli di  $f$  formano un sottoinsieme discreto di  $X$ .*

In particolare, se  $X$  è superficie di Riemann compatta,  $f$  ha un numero finito di zeri e poli. Vale inoltre la seguente

**Proposizione 2.26.** *Sia  $X$  superficie di Riemann compatta,  $f$  funzione meromorfa non costante su  $X$ . Allora*

$$\sum_{p \in X} \text{ord}_p(f) = 0.$$

*Dimostrazione.* Data  $f$  funzione meromorfa non costante su  $X$ , consideriamo la mappa olomorfa  $F : X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  ad essa associata.

Sia  $P$  l'insieme dei poli di  $f$  e  $Z$  l'insieme degli zeri di  $f$ : per definizione di ordine si ha

$$d(F) = \sum_{p \in P} \text{mult}_p(F) = \sum_{p \in Z} \text{mult}_p(F).$$

Gli unici punti ad avere ordine non nullo sono zeri e poli. Inoltre per gli zeri la molteplicità coincide con l'ordine mentre i poli hanno molteplicità pari all'opposto dell'ordine. Dunque segue

$$\begin{aligned} \sum_{p \in X} \text{ord}_p(f) &= \sum_{p \in Z} \text{ord}_p(f) + \sum_{p \in P} \text{ord}_p(f) \\ &= \sum_{p \in Z} \text{mult}_p(F) - \sum_{p \in P} \text{mult}_p(F) = 0. \end{aligned}$$

□

*Esempio 2.27.* Sia  $X = \mathbb{S}^2$ . Abbiamo già visto che  $\mathcal{O}(X) \cong \mathbb{C}$ : il campo dei quozienti di  $\mathcal{O}(X)$  è quindi ancora  $\mathbb{C}$  ma  $\mathcal{M}(X) \not\cong \mathbb{C}$ . Infatti è facile osservare che tutte le funzioni razionali  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ , con  $p, q \in \mathbb{C}(z)$  polinomi, sono meromorfe nel punto  $\infty$ . Mostriamo ora che le funzioni razionali sono tutte e sole le funzioni meromorfe su  $\mathbb{S}^2$ . Sia  $f$  funzione meromorfa su  $\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{CP}^1$ . Dato che la sfera di Riemann è una superficie di Riemann compatta,  $f$  ha un numero finito di zeri e di poli. Sia  $\Lambda = \{\lambda_i : i = 0, \dots, n.\}$  l'insieme di zeri e poli di  $f$  e  $\text{ord}_{\lambda_i}(f) = e_i$  l'ordine di ciascuno di essi. Consideriamo la funzione razionale data da

$$r(z) = \prod_i (z - \lambda_i)^{e_i}.$$

Tale funzione ha, con lo stesso ordine, gli stessi zeri e poli di  $f$  nell'aperto  $\mathbb{C}$ . Definiamo  $g(z) = \frac{f(z)}{r(z)}$ : si tratta di una funzione meromorfa sulla sfera di Riemann, ma priva di zeri e poli su  $\mathbb{C}$ , dunque olomorfa su  $\mathbb{C}$ . L'unico punto in cui risulta meromorfa è infatti  $\infty \in \mathbb{C}$ . Essa ammette quindi sviluppo in serie di Taylor

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

che risulta convergere ovunque su  $\mathbb{C}$ . Passando all'aperto  $\mathbb{C}_\infty$ , che ha per coordinata locale  $w = \frac{1}{z}$ , otteniamo

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^{-n},$$

che è meromorfa nel punto  $z = \infty$ , ovvero  $w = 0$ , se e solo se la serie ha un numero finito di termini, che equivale a richiedere che  $g$  sia un polinomio. Il polinomio  $g$  deve essere costante: se così non fosse,  $g$  ammetterebbe uno zero in  $\mathbb{C}$ , il che è assurdo. Dunque  $g = \frac{f}{r}$  è costante, ovvero  $f$  è una funzione razionale.

*Esempio 2.28.* Sia  $X = \mathbb{CP}^1$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  funzione meromorfa su  $X$  definita da  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ , dove  $p$  e  $q$  sono polinomi a coefficienti in  $\mathbb{C}$  senza zeri in comune. Consideriamo la funzione ristretta all'aperto  $\mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty\}$ : gli zeri di  $f$  coincidono con gli zeri di  $p$ , e la molteplicità algebrica di ciascuno di essi come zero di  $p$  è uguale all'ordine di  $f$  in quel punto. Gli zeri di  $q$  invece costituiscono i poli di  $f$  e l'ordine di ciascun polo coincide con l'opposto della molteplicità algebrica di ciascuno di essi come zero di  $q$ . Per quanto riguarda il punto  $\infty$ , distinguiamo tre diversi casi:

- se  $\deg(p) < \deg(q)$  allora  $\infty$  è zero di ordine  $\deg(q) - \deg(p)$ ;
- se  $\deg(p) > \deg(q)$  allora  $\infty$  è polo di ordine  $\deg(p) - \deg(q)$ ;
- se  $\deg(p) = \deg(q)$  allora  $\infty$  non è né zero né polo di  $f$ .

In tutti e tre i casi, è verificata la proposizione 2.26. Nel primo caso per esempio la somma degli ordini degli zeri coincide con il grado di  $p$  a cui va aggiunto l'ordine di  $\infty$ , mentre la somma degli ordini dei poli coincide con  $-\deg(q)$ . Segue quindi:

$$\begin{aligned} \sum_{z \in X} \text{ord}_z(f) &= \sum_{z \text{ zero}, z \neq \infty} \text{ord}_z(f) + \text{ord}_\infty(f) + \sum_{z \text{ polo}} \text{ord}_z(f) \\ &= \deg(p) + \deg(q) - \deg(p) - \deg(q) = 0. \end{aligned}$$

*Esempio 2.29.* Sia  $X$  una curva algebrica proiettiva piana liscia  $X$  definita dall'equazione  $f = f(x, y)$ . Il campo delle funzioni meromorfe  $\mathcal{M}(X)$  è il campo quoziente di  $\frac{\mathbb{C}[x, y]}{(f)}$ .

*Esempio 2.30.* Mostriamo come il toro complesso  $\mathbb{T}$  è isomorfo ad una curva ellittica. Per costruire la mappa tra superficie di Riemann che dà l'isomorfismo dobbiamo prima introdurre la funzione di Weierstrass  $\mathfrak{p}$ . Se  $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Lambda$  con  $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$  e  $\omega_1, \omega_2$  elementi di  $\mathbb{C}$  linearmente indipendenti su  $\mathbb{R}$ , allora  $\mathfrak{p} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  è definita da

$$\mathfrak{p}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{T}.$$

Si verifica che  $\mathfrak{p}$  è funzione meromorfa su  $\mathbb{C}$  con poli in  $\Lambda$ , così come la sua derivata  $\mathfrak{p}'$ , che vale

$$\mathfrak{p}'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \left( \frac{1}{(z - \omega)^3} \right) \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{T}.$$

Dunque la funzione di Weierstrass e la sua derivata sono due funzioni olomorfe su  $\mathbb{T}$ . Definiamo allora la funzione

$$F : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$$

$$z \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ \mathfrak{p}(z) \\ \mathfrak{p}'(z) \end{pmatrix}.$$

L'immagine di tale funzione è esattamente la curva ellittica  $\mathcal{C}$  di equazione  $y^2 = 4x^3 - g_2(\Lambda)x - g_3(\Lambda)$ . Infatti si vede che è soddisfatta la seguente relazione:

$$\mathfrak{p}'(z)^2 = 4\mathfrak{p}(z)^3 - g_2(\Lambda)\mathfrak{p}(z) - g_3(\Lambda)$$

con  $g_2(\Lambda) = 60 \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \frac{1}{\omega^4}$  e  $g_3(\Lambda) = 140 \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \frac{1}{\omega^6}$ . Per vederlo, consideriamo gli sviluppi in serie di Laurent delle funzioni  $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^3, (\mathfrak{p}')^2$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}(z) &= \frac{1}{z^2} + az^2 + bz^4 + o(z^6) \\ \mathfrak{p}(z)^3 &= \frac{1}{z^6} + \frac{3a}{z^2} + 3b + o(z^2) \\ \mathfrak{p}'(z)^2 &= \frac{4}{z^6} - \frac{8a}{z^2} - 16b + o(z^2) \end{aligned}$$

e osserviamo che la combinazione  $\mathfrak{p}'(z)^2 - (4\mathfrak{p}(z)^3 - 20a\mathfrak{p}(z))$  è intera limitata, quindi costante, e in particolare vale

$$\mathfrak{p}'(z)^2 - (4\mathfrak{p}(z)^3 - 20a\mathfrak{p}(z)) = -28b,$$

da cui

$$\mathfrak{p}'(z)^2 = 4\mathfrak{p}(z)^3 - 20a\mathfrak{p}(z) - 28b$$

con

$$\begin{aligned} g_2(\Lambda) &= 20a = 20 \frac{1}{2!} \frac{\partial^2(\mathfrak{p} - 1/z^2)}{\partial z^2}(0) = 60 \sum \frac{1}{\omega^4} \\ g_3(\Lambda) &= 28b = 28 \frac{1}{4!} \frac{\partial^4(\mathfrak{p} - 1/z^2)}{\partial z^4}(0) = 140 \sum \frac{1}{\omega^6}. \end{aligned}$$

Ci rimane da dimostrare che  $F$  è biettiva e con inversa anch'essa olomorfa. A tale scopo consideriamo le mappe  $\pi$  e  $F$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{T} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C} \\ z & \mapsto & z + \Lambda & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ \mathfrak{p}(z) \\ \mathfrak{p}'(z) \end{pmatrix} \end{array}$$

e il differenziale  $\alpha = \frac{dx}{y}$  sulla curva  $\mathcal{C}$ . Allora, detto  $\eta = F^*(\alpha)$  il pull-back di  $\alpha$  tramite  $F$ , vale  $dz = \pi^*(\eta)$ : questo è vero perché su  $\mathbb{C}$  si ha

$$(F \circ \pi)^* = \frac{d\mathfrak{p}(z)}{\mathfrak{p}'(z)}.$$

Allora è possibile costruire il reticolo  $\Lambda$  tramite

$$\begin{aligned} \Lambda &= \left\{ \int_{\gamma} dz : \gamma \text{ cammino con estremi su } \Lambda \right\} \\ &= \left\{ \int_{\gamma'} \eta : \gamma' = \pi \circ \gamma \text{ cammino chiuso in } \mathbb{T} \right\} \\ &= \left\{ \int_{\gamma''} \alpha : \gamma'' = F \circ \pi \circ \gamma \text{ cammino chiuso in } \mathcal{C} \right\} \end{aligned}$$

a partire dalla curva ellittica  $\mathcal{C}$ . A questo punto possiamo definire la funzione

$$\begin{array}{ccc} G : \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbb{T} \\ P & \longmapsto & G(P) = \int_{\gamma} \alpha \pmod{\Lambda} \end{array}$$

con  $\gamma$  cammino qualsiasi da  $\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  a  $P$ , che risulta essere l'inversa di  $F$ . Se mostriamo che  $G(F(z)) = z$  per ogni  $z \in \mathbb{T}$  abbiamo finito: sia  $P = F(z)$ , allora

$$G(P) = \int_{\infty}^{P=F(z)} \alpha = \int_0^z \eta = \int_0^z dz = z + \lambda \equiv z \pmod{\Lambda}.$$

Questo prova che  $G(F(z)) = z$  e quindi che il toro complesso è una curva ellittica.

## 2.3 1-Forme differenziali olomorfe e meromorfe su superficie di Riemann

**Definizione 2.31.** Una 1-forma olomorfa su un aperto  $\Omega \subset \mathbb{C}$  è un'espressione  $\omega$  della forma  $\omega = f(z)dz$  con  $f$  funzione olomorfa su  $\Omega$ .

Per trasportare questa nozione su una superficie di Riemann tramite le carte complesse, è necessario richiedere un certo tipo di compatibilità affinché la 1-forma olomorfa sia ben definita nelle intersezioni dei domini delle carte.

---

**Definizione 2.32.** Siano  $\omega_1 = f(z)dz$ ,  $\omega_2 = g(w)dw$  due 1-forme olomorfe definite rispettivamente su  $V_1, V_2$  aperti di  $\mathbb{C}$ , e sia  $T(w) = z$  una mappa olomorfa da  $V_2$  a  $V_1$ . Diciamo che  $T$  trasforma  $\omega_1$  in  $\omega_2$  se vale  $g(w) = f(T(w))T'(w)$ .

Osserviamo che se  $T$  è invertibile, con inversa  $S$ , allora  $T$  trasforma  $\omega_1$  in  $\omega_2$  se e solo se  $S$  trasforma  $\omega_2$  in  $\omega_1$ . Infatti se  $S(z) = T^{-1}(z) = w$ , allora  $S$  trasforma  $\omega_2$  in  $\omega_1$  se e solo se

$$\begin{aligned} f(z) &= g(S(z))S'(z) \\ f(T(w)) &= g(w)(T^{-1})'(T(w)) \\ f(T(w))T'(w) &= g(w). \end{aligned}$$

**Definizione 2.33.** Sia  $X$  superficie di Riemann. Una 1-forma olomorfa su  $X$  è una famiglia di 1-forme olomorfe  $\{\omega_\phi\}$  al variare di  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  carta complessa per  $X$ , tale che per ogni coppia di carte  $\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\phi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}$  con  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$  la mappa di transizione  $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$  trasforma  $\omega_{\phi_1}$  in  $\omega_{\phi_2}$ .

Tuttavia, per definire una 1-forma olomorfa su una superficie di Riemann è sufficiente dare una 1-forma per le carte di un atlante. Vale infatti il seguente:

**Lemma 2.34.** *Sia  $X$  una superficie di Riemann e  $\mathcal{A}$  un atlante complesso su  $X$ . Se ad ogni carta di  $\mathcal{A}$  è associata una 1-forma olomorfa e le mappe di transizione trasformano le 1-forme olomorfe diverse l'una nell'altra, allora esiste un'unica 1-forma olomorfa su  $X$  che estende le 1-forme olomorfe delle carte di  $\mathcal{A}$ .*

Indichiamo con  $\Omega^1(X)$  l'insieme delle 1-forme olomorfe su  $X$ . Si osservi che tale insieme forma uno spazio vettoriale complesso di dimensione  $\dim_{\mathbb{C}}(\Omega^1(X)) = g$ , dove  $g = g(X)$  è il genere della superficie di Riemann  $X$ . Questo risultato è una delle conseguenze del teorema di Riemann-Roch che vedremo nel capitolo successivo.

**Definizione 2.35.** Una 1-forma meromorfa su un aperto  $\Omega \subset \mathbb{C}$  è un'espressione  $\omega$  della forma  $\omega = f(z)dz$  con  $f$  funzione meromorfa su  $\Omega$ .

La compatibilità che richiediamo per definire le 1-forme olomorfe è la stessa che richiediamo ora per le 1-forme meromorfe.

**Definizione 2.36.** Siano  $\omega_1 = f(z)dz$ ,  $\omega_2 = g(w)dw$  due 1-forme meromorfe definite rispettivamente su  $V_1, V_2$  aperti di  $\mathbb{C}$ , e sia  $T(w) = z$  una mappa olomorfa da  $V_2$  a  $V_1$ . Diciamo che  $T$  trasforma  $\omega_1$  in  $\omega_2$  se vale  $g(w) = f(T(w))T'(w)$ .

**Definizione 2.37.** Sia  $X$  superficie di Riemann. Una 1-forma meromorfa su  $X$  è una famiglia di 1-forme meromorfe  $\{\omega_\phi\}$  al variare di  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  carta complessa per  $X$ , tale che per ogni coppia di carte  $\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\phi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}$  con  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$  la mappa di transizione  $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$  trasforma  $\omega_{\phi_1}$  in  $\omega_{\phi_2}$ .

Analogamente al caso olomorfo, si ha il seguente:

**Lemma 2.38.** *Sia  $X$  una superficie di Riemann e  $\mathcal{A}$  un atlante complesso su  $X$ . Se ad ogni carta di  $\mathcal{A}$  è associata una 1-forma meromorfa e le mappe di transizione trasformano le 1-forme meromorfe diverse l'una nell'altra, allora esiste un'unica 1-forma meromorfa su  $X$  che stende le 1-forme meromorfe delle carte di  $\mathcal{A}$ .*



Data una 1-forma meromorfa  $\omega$  definita in un intorno di  $p \in X$  e una carta  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  di  $X$  centrata in  $p$ , si definisce l'ordine di  $\omega = f(z)dz$  in  $p$ , indicato con  $\text{ord}_p(\omega)$ , come l'ordine della funzione  $f$  in 0.

Osserviamo che si tratta di una buona definizione, indipendente dalla scelta della carta. Diremo che  $p$  è uno zero di  $\omega$  di ordine  $n$  se  $\text{ord}_p(\omega) = n > 0$  mentre è un polo di  $\omega$  di ordine  $n$  se  $\text{ord}_p(\omega) = -n < 0$ .

A differenza di quanto accade per le funzioni meromorfe, la somma degli ordini di una 1-forma meromorfa al variare del punto sulla superficie  $X$  non è 0: tuttavia vale il seguente risultato:

**Proposizione 2.39.** *Sia  $X$  superficie di Riemann compatta. Per ogni 1-forma meromorfa  $\omega$  su  $X$*

$$\sum_{p \in X} \text{ord}_p(\omega) = 2g(X) - 2$$

dove  $g(X)$  è il genere della superficie  $X$ .

Ciò significa che la somma degli ordini di una 1-forma meromorfa su una superficie di Riemann compatta dipende solo dalla superficie e non dalla 1-forma.

*Dimostrazione.* Sia  $\omega = f dz$  1-forma meromorfa su  $X$ , con  $f \in \mathcal{M}(X)$  non nulla. Consideriamo la sua estensione olomorfa  $F : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ . Dato che  $g(\mathbb{CP}^1) = 0$ , per il teorema di Riemann-Hurwitz vale:

$$2g(X) - 2 = -2 \deg(F) + \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(f) - 1)$$

Dunque è sufficiente dimostrare che  $\deg(\omega) = -2 \deg(f) + \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(f) - 1)$ . Per definizione  $\deg(\omega) = \sum_{p \in X} \text{ord}_p(\omega)$ . Introduciamo ora il *pullback* di 1-forme meromorfe: data  $G : X \rightarrow Y$  mappa olomorfa tra superficie di Riemann e  $V$  aperto di  $Y$ , è ben definita l'applicazione

$$\begin{aligned} G^* : \quad \mathcal{M}^1(V) &\longrightarrow \mathcal{M}^1(G^{-1}(V)) \\ \omega = f(z)dz &\longmapsto G^*\omega = (f \circ G)(z)dG(z). \end{aligned}$$

Tale mappa si estende facilmente a tutto lo spazio  $\mathcal{M}^1(Y)$ : in tal caso l'immagine di una 1-forma meromorfa  $\omega = \{(U_i, \omega_i = f_i dz_i)\}_i$  è data da  $G^*\omega = \{(G^{-1}(U_i), G^*\omega_i = (f_i \circ G)dG(z_i))\}_i$  ed è detta *pullback* di  $\omega$  tramite  $G$ .

È importante osservare che l'applicazione  $G^*$  non rispetta l'ordine, ovvero dato un punto  $p \in X$ , si ha  $\text{ord}_p(G^*\omega) \neq \text{ord}_{G(p)}(\omega)$ . È vera invece la seguente relazione:

$$\text{ord}_p(G^*\omega) = \text{ord}_{G(p)}(\omega) \text{mult}_p(G) + \text{mult}_p(G) - 1$$

Infatti intorno a  $p$  la funzione  $G$  assume la forma  $G(z) = z^{\text{mult}_p(G)}$  mentre la 1-forma meromorfa  $\omega$  si può scrivere come  $\omega = z^{\text{ord}_{G(p)}(\omega)} dz$ , sviluppando al primo ordine la funzione  $f(z)$ . Allora

$$\begin{aligned} G^*\omega &= (f \circ G)(z)dG(z) \\ &= f(z^{\text{mult}_p(G)})d(z^{\text{mult}_p(G)}) \\ &= z^{\text{mult}_p(G) \cdot \text{ord}_{G(p)}(\omega)} \cdot \text{mult}_p(G) \cdot z^{\text{mult}_p(G)-1} dz \\ &= \text{mult}_p(G) z^{\text{ord}_{G(p)} \text{mult}_p(G) + \text{mult}_p(G) - 1} dz \end{aligned}$$

da cui segue  $\text{ord}_p(G * \omega) = \text{ord}_{G(p)}(\omega) \text{mult}_p(G) + \text{mult}_p(G) - 1$ .

A questo punto basta osservare che ogni 1-forma meromorfa su  $X$  è *pullback* della 1-forma meromorfa  $dz$  su  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . Dunque nel nostro caso

$$\text{ord}_p(\omega) = \text{ord}_{F(p)}(dz) \text{mult}_p(f) + \text{mult}_p(f) - 1 = \begin{cases} \text{mult}_p(f) - 1 & \text{se } f(p) \neq \infty \\ \text{mult}_p(f) - 1 - 2 \text{mult}_\infty(f) & \text{se } f(p) = \infty \end{cases}$$

Segue

$$\begin{aligned} \deg(\omega) &= \sum_{f(p) \neq \infty} (\text{mult}_p(f) - 1) + \sum_{f(p) = \infty} (\text{mult}_p(f) - 1 - 2 \text{mult}_\infty(f)) \\ &= \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(f) - 1) - 2 \deg(f). \end{aligned}$$

□

Forme meromorfe differenti sulla stessa superficie di Riemann sono legate da funzioni meromorfe, come afferma il seguente

**Lemma 2.40.** *Date due 1-forme meromorfe  $\omega_1$  e  $\omega_2$  su  $X$  superficie di Riemann, con  $\omega_1$  non identicamente nulla, esiste unica  $f$  funzione meromorfa su  $X$  tale che  $\omega_2 = f\omega_1$ .*

*Dimostrazione.* Scelta una carta  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  su  $X$  tale che  $\phi(p) = z$  per ogni  $p \in U$ , scriviamo le due forme nella coordinata locale  $z$ :

$$\omega_1 = g_1(z)dz, \quad \omega_2 = g_2(z)dz$$

con  $g_1, g_2$  funzioni meromorfe su  $\phi(U)$ . Sia  $h = \frac{g_2}{g_1}$ , anch'essa funzione meromorfa a valori in  $\phi(U)$ : definisco  $f = h \circ \phi$ , che risulta essere meromorfa su  $U$ , ben definita e indipendente dalla scelta della carta  $\phi$ . Vale

$$f(p) = \frac{g_2}{g_1}(\phi(p)) = \frac{g_2}{g_1}(z)$$

da cui  $g_2(z) = f(p)g_1(z)$ . Segue  $\omega_2 = f\omega_1$ . □

Questo risultato dimostra anche che  $\mathcal{M}^1(X)$  è spazio vettoriale su  $\mathcal{M}(X)$  di dimensione 1.

Osserviamo che quest'ultimo risultato è coerente con quanto visto finora: se ogni forma  $\omega_2$  diversa da  $\omega_1$  può essere scritta come  $\omega_2 = f\omega_1$  per qualche funzione meromorfa  $f$ , allora

$$\begin{aligned} \sum_{p \in X} \text{ord}_p(\omega_2) &= \sum_{p \in X} \text{ord}_p(f\omega_1) = \sum_{p \in X} (\text{ord}_p(f) + \text{ord}_p(\omega_1)) \\ &= \sum_{p \in X} \text{ord}_p(f) + \sum_{p \in X} \text{ord}_p(\omega_1) = \sum_{p \in X} \text{ord}_p(\omega_1), \end{aligned}$$

ovvero la somma degli ordini non dipende dalla 1-forma  $\omega$ .

*Esempio 2.41.* Sia  $X = \mathbb{S}^2$  la sfera di Riemann. Poiché le funzioni olomorfe su  $\mathbb{S}^2$  sono le costanti, non esistono su  $\mathbb{S}^2$  1-forme olomorfe diverse da zero. Infatti se consideriamo la forma  $\omega = dz$  sull'aperto  $\mathbb{C}$ , passando all'aperto  $\mathbb{C}_\infty$  la forma diventa  $\omega = -\frac{1}{(z')^2} dz'$  con  $z'$  coordinata locale

in  $\mathbb{C}_\infty$ . Osserviamo che la funzione  $\frac{1}{(z')^2}$  non è olomorfa nel suo aperto di definizione e quindi  $\omega$  non è olomorfa. Dunque  $\Omega^1(\mathbb{S}^2) = \{0\}$ , come ci aspettavamo da  $g(\mathbb{S}^2) = 0$ .

Per quanto riguarda le 1-forme meromorfe su  $\mathbb{S}^2$ , ricordiamo che  $\mathcal{M}^1(X)$  è spazio vettoriale di dimensione 1 su  $\mathcal{M}(X)$ . Da quanto visto sopra,  $\omega = dz$  è una 1-forma meromorfa su  $\mathbb{S}^2$  quindi possiamo scegliere tale forma come generatore dello spazio  $\mathcal{M}^1(\mathbb{S}^2)$  come spazio vettoriale su  $\mathcal{M}(\mathbb{S}^2)$  e concludere che  $\mathcal{M}^1(\mathbb{S}^2) = \langle dz \rangle$ .

*Esempio 2.42.* Sia  $X$  una curva ellittica. Sappiamo che  $g(X) = 1$  dunque  $\dim_{\mathbb{C}}(\Omega^1(X)) = 1$ . Questo significa che  $\Omega^1(X)$  è generato da una 1-forma olomorfa. Come facciamo a capire chi genera questo spazio?

Consideriamo una generica curva ellittica nella forma  $x_0x_2^2 = x_1(x_1 - x_0)(x_1 - \lambda x_0)$  con  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ . Disomogeneizziamo l'equazione della curva nel piano affine complesso, ovvero dove  $x_0 = 1$ , ponendo  $y = \frac{x_2}{x_0}$  e  $x = \frac{x_1}{x_0}$ :

$$y^2 = x^3 - (\lambda + 1)x^2 + \lambda x.$$

I differenziali  $dx$  e  $dy$  sono olomorfi sul piano affine, ma non è detto che lo siano sulla curva. Tuttavia l'appartenenza alla curva da una relazione tra i due differenziali:

$$\begin{aligned} 2ydy &= 3x^2dx \\ \frac{2dy}{3x^2} &= \frac{dx}{y} \end{aligned}$$

Mostriamo che il differenziale  $\frac{dx}{y}$  è olomorfo ed è dunque generatore per  $\Omega^1(X)$ . Per farlo calcoliamo zeri e poli della funzione  $y$  e della 1-forma  $dx$ .

Osserviamo che  $y$  ha tre zeri nel piano affine, che corrispondono ai punti  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(0, \lambda)$ , e nessun polo. Il suo comportamento all'infinito è uguale a quello della curva ellittica di equazione  $y^2 = x^3 + 1$  dunque per semplicità esplicitiamo i conti relativi a quest'ultimo caso. Nel piano proiettivo tale curva ha equazione

$$x_0x_2^2 = x_1^3 + x_0^3,$$

dunque disomogeneizzando nell'aperto corrispondente a  $x_2 = 1$  e ponendo  $\zeta = \frac{x_0}{x_2}$ ,  $\xi = \frac{x_1}{x_2}$ , otteniamo

$$\zeta = \xi^3 + \zeta^3,$$

da cui  $\zeta \sim \xi^3$ . Allora

$$y = \frac{x_2}{x_0} = \frac{x_2/x_2}{x_0/x_2} = \frac{1}{\zeta} \sim \frac{1}{\xi^3}$$

cioè la funzione  $y$  ha un polo di ordine 3 nel punto  $\infty = [0 : 0 : 1]$ . Concludiamo quindi che

$$\operatorname{div}(y) = P_0 + P_1 + P_\lambda - 3 \cdot \infty.$$

Procedendo in modo analogo per  $dx$  otteniamo

$$\operatorname{div}(dx) = P_0 + P_1 + P_\lambda - 3 \cdot \infty,$$

da cui  $\operatorname{div}(\frac{dx}{y}) = 0$ , ovvero  $\frac{dx}{y}$  è 1-forma olomorfa.

Infine per quanto riguarda  $\mathcal{M}^1(X)$  basta osservare che rimane vero il fatto che  $\mathcal{M}^1(X)$  è  $\mathcal{M}(X)$ - spazio vettoriale di dimensione 1 e quindi basta trovare una 1-forma meromorfa su  $X$  per determinare tutte le altre.



## Capitolo 3

# Teorema di Riemann-Roch

### 3.1 Divisori

**Definizione 3.1.** Sia  $X$  superficie di Riemann. Un divisore di  $X$  è una funzione  $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$  che ha per supporto un sottoinsieme discreto di  $X$ .

L'insieme dei divisori di  $X$ , dotato dell'operazione di somma puntuale, forma un gruppo che indicheremo con  $\text{Div}(X)$ . Se  $X$  è una superficie di Riemann compatta, ogni divisore di  $X$  ha supporto finito dunque  $\text{Div}(X)$  coincide con il gruppo abeliano libero generato dai punti di  $X$ .

$$\text{Div}(X) = \mathbb{Z}^{(X)}$$

Scriviamo  $D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p$  per rappresentare un divisore e chiamiamo supporto del divisore l'insieme  $\text{Supp}(D) = \{p \in X : D(p) \neq 0\}$ .

*Esempio 3.2.* Ogni punto  $p \in X$  superficie di Riemann è banalmente un divisore.

**Definizione 3.3.** Il grado di un divisore  $D$  di  $X$  superficie di Riemann compatta è la somma dei suoi valori, cioè

$$\text{deg}(D) = \sum_{p \in X} D(p).$$

Osserviamo che il grado è una funzione ben definita sul gruppo dei divisori di  $X$ :

$$\text{deg} : \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Si tratta di un morfismo di gruppi

$$\text{deg}(D + S) = \sum_{p \in X} (D + S)(p) = \sum_{p \in X} D(p) + \sum_{p \in X} S(p) = \text{deg}(D) + \text{deg}(S)$$

il cui nucleo è dato dal sottogruppo dei divisori di grado zero di  $X$ :

$$\text{Div}_0(X) = \ker(\text{deg}) = \{D \in \text{Div}(X) : \text{deg}(D) = 0\}.$$

Vogliamo utilizzare i divisori per, in un certo senso, "raccolgere" con le rispettive molteplicità gli zeri e i poli delle funzioni e 1-forme meromorfe sulle superficie di Riemann.

---

**Definizione 3.4.** Sia  $X$  superficie di Riemann,  $f$  funzione meromorfa su  $X$  non identicamente nulla. Il divisore di  $f$  è

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(f) \cdot p.$$

Ogni divisore di questo tipo è detto divisore principale e il sottogruppo dei divisori principali di  $X$  è indicato con  $\operatorname{PDiv}(X)$ .

Si tratta di una buona definizione poiché  $p \in X$  non è né zero né polo per  $f$  se e solo se  $\operatorname{ord}_p(f) = 0$ , e l'insieme degli zeri e dei poli di una funzione meromorfa  $f$  non nulla è un insieme finito come segue dalla proposizione 2.25.

**Lemma 3.5.** *Sia  $X$  superficie di Riemann compatta. Allora  $\operatorname{PDiv}(X) \leq \operatorname{Div}_0(X)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $f \in \mathcal{M}(X)$ . Indicando con  $Z$  l'insieme degli zeri di  $f$  e con  $P$  l'insieme dei suoi poli, dall'osservazione precedente si ha che

$$\begin{aligned} \deg(\operatorname{div}(f)) &= \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(f) \\ &= \sum_{p \in Z} \operatorname{ord}_p(f) + \sum_{p \in P} \operatorname{ord}_p(f) \end{aligned}$$

e tale somma è uguale a 0 per la proposizione 2.26. □

Allo stesso modo è possibile associare ad una 1-forma meromorfa il suo divisore.

**Definizione 3.6.** Sia  $X$  superficie di Riemann,  $\omega$  1-forma meromorfa su  $X$  non identicamente nulla. Il divisore di  $\omega$  è

$$\operatorname{div}(\omega) = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(\omega) \cdot p.$$

Ogni divisore di questo tipo è detto divisore canonico e il sottogruppo dei divisori canonici di  $X$  è indicato con  $\operatorname{KDiv}(X)$ .

Con tale definizione possiamo riformulare la proposizione 2.39 come segue:

**Proposizione 3.7.** *Sia  $X$  superficie di Riemann compatta,  $K$  divisore canonico su  $X$ . Allora  $\deg(K) = 2g(X) - 2$ .*

Ricordando il lemma 2.40, è possibile stabilire una relazione tra divisori principali e canonici. Se  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono due 1-forme meromorfe su  $X$  superficie di Riemann, allora esiste un'unica funzione meromorfa  $f$  tale che  $\omega_2 = f\omega_1$ . Segue che  $\operatorname{div}(f\omega_1) = \operatorname{div}(\omega_2)$ . Osserviamo inoltre che, poiché  $\operatorname{ord}_p(f\omega) = \operatorname{ord}_p(f) + \operatorname{ord}_p(\omega)$  per ogni  $p \in X$ ,  $f \in \mathcal{M}(X)$  e  $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ , vale:

$$\operatorname{div}(\omega_2) = \operatorname{div}(f\omega_1) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(\omega_1)$$

Ogni divisore canonico, se sommato ad un divisore principale, è un (altro) divisore canonico. Dunque fissato  $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ , abbiamo

$$\operatorname{KDiv}(X) = \operatorname{div}(\omega) + \operatorname{PDiv}(X)$$

ovvero i divisori canonici  $\operatorname{KDiv}(X)$  costituiscono una classe laterale di  $\operatorname{PDiv}(X)$  in  $\operatorname{Div}(X)$ .

---

Il gruppo dei divisori  $\text{Div}(X)$  può essere munito di un ordine parziale. Diremo che  $D \geq 0$  se  $D(p) \geq 0$  per ogni  $p \in X$  e che  $D_1 \geq D_2$  se  $D_1 - D_2 \geq 0$ . Si osservi che se  $f$  è una funzione meromorfa su  $X$ , l'ordine così definito permette di stabilire se è olomorfa: infatti  $f$  è olomorfa se e solo se  $\text{div}(f) \geq 0$ . Analogamente  $\omega$  forma meromorfa è olomorfa se e solo se  $\text{div}(\omega) \geq 0$ .

Definiamo poi una relazione  $\sim$  su  $\text{Div}(X)$ : diremo che due divisori  $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$  sono linearmente equivalenti, e scriveremo  $D_1 \sim D_2$ , se  $D_1 - D_2 \in \text{PDiv}(X)$ . Tale relazione è effettivamente un'equivalenza sull'insieme  $\text{Div}(X)$ :

- $D \sim D$  per ogni  $D \in \text{Div}(X)$  in quanto  $D - D = 0 = \text{div}(0)$  e la funzione identicamente nulla è olomorfa, quindi in particolare meromorfa;
- se  $D_1 \sim D_2$ , allora  $D_2 \sim D_1$ : da  $D_1 - D_2 = \text{div}(f)$  per qualche  $f \in \mathcal{M}(X)$ , segue  $D_2 - D_1 = -\text{div}(f) = \text{div}(\frac{1}{f})$  dalle proprietà dei divisori principali. Ricordando poi che le funzioni meromorfe formano un campo, si ha  $\frac{1}{f} \in \mathcal{M}(X)$ , da cui  $D_2 \sim D_1$ ;
- se  $D_1 \sim D_2$  e  $D_2 \sim D_3$ , allora  $D_1 \sim D_3$ : da  $D_1 - D_2 = \text{div}(f)$  e  $D_2 - D_3 = \text{div}(g)$  per qualche  $f, g \in \mathcal{M}(X)$  segue  $D_1 - D_3 = \text{div}(f) + \text{div}(g) = \text{div}(fg)$  dalle proprietà dei divisori principali. Si ha  $fg \in \mathcal{M}(X)$ , da cui  $D_1 \sim D_3$ .

Definiamo allora il gruppo quoziente, detto *gruppo di Picard* di  $X$

$$\text{Pic}(X) = \frac{\text{Div}(X)}{\text{PDiv}(X)}.$$

Osserviamo che se  $D_1 \sim D_2$  allora  $\text{deg}(D_1) = \text{deg}(D_2)$ , cioè divisori nella stessa classe in  $\text{Pic}(X)$  hanno lo stesso grado. Questo fatto segue immediatamente dal lemma 3.5 e dal fatto che la funzione  $\text{deg}$  è morfismo di gruppi.

**Definizione 3.8.** Sia  $X$  superficie di Riemann compatta,  $D \in \text{Div}(X)$ . Definiamo lo spazio vettoriale delle funzioni meromorfe con zeri e poli controllati da  $D$

$$L(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) : \text{div}(f) + D \geq 0\}.$$

Diciamo che  $f \in L(D)$  ha zeri e poli controllati da  $D$  poiché se  $p$  è uno zero di  $f$  e  $D(p) < 0$  allora

$$\text{ord}_p(f) \geq -D(p),$$

cioè  $p$  è uno zero di molteplicità almeno  $-D(p)$ . Se invece  $p$  è un polo di  $f$  e  $D(p) > 0$  allora

$$D(p) \geq -\text{ord}_p(f),$$

cioè  $p$  è un polo di molteplicità al più  $D(p)$ .

Osserviamo subito che  $L(0) = \mathcal{O}(X)$ , poiché  $f$  è olomorfa se e solo se  $\text{div}(f) \geq 0$ . In particolare se  $X$  è superficie di Riemann compatta, dato che le funzioni olomorfe su  $X$  sono le costanti, si ha  $L(0) \cong \mathbb{C}$ .

---

## 3.2 Teorema di Riemann-Roch

In questo capitolo presenteremo il teorema di Riemann-Roch, il quale fornirà una formula per il calcolo della dimensione dello spazio vettoriale  $L(D)$ . Per arrivare a tale risultato facciamo dei passi intermedi e cerchiamo di stimare  $\dim_{\mathbb{C}}(L(D))$  in alcuni casi "semplici".

**Lemma 3.9.** *Sia  $X$  superficie di Riemann compatta e  $D \in \text{Div}(X)$ . Se  $\deg(D) < 0$  allora  $L(D) = 0$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $f \in L(D)$  non identicamente nulla e  $E = \text{div}(f) + D \in \text{Div}(X)$ . Da  $f \in L(D)$  segue  $E \geq 0$ , dunque  $\deg(E) \geq 0$ . Ma

$$\deg(E) = \deg(\text{div}(f)) + \deg(D) = \deg(D) < 0,$$

da cui l'assurdo. □

Questo lemma sostanzialmente ci dice che gli unici divisori che ha senso considerare, nel senso che esistono funzioni meromorfe da essi controllate, sono quelli di grado maggiore o uguale a zero.

Abbiamo inizialmente visto che ogni punto  $p$  della superficie di Riemann è banalmente un divisore, quindi dato  $D \in \text{Div}(X)$  ha senso considerare il divisore  $D - p$ .

**Proposizione 3.10.** *Sia  $X$  superficie di Riemann compatta,  $p \in X$  un suo punto e  $D \in \text{Div}(X)$  un suo divisore. Allora  $\dim(L(D) - 1) \leq \dim(L(D - p)) \leq \dim(L(D))$ . In particolare  $L(D - p) = L(D)$  oppure  $L(D - p)$  ha codimensione 1 in  $L(D)$ .*

Introduciamo ora un analogo degli spazi di funzioni  $L(D)$  per le 1-forme meromorfe:

**Definizione 3.11.** Sia  $X$  superficie di Riemann compatta,  $D \in \text{Div}(X)$ . Definiamo lo spazio vettoriale delle 1-forme meromorfe controllate da  $D$

$$I(D) = \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) : \text{div}(\omega) \geq D\}.$$

Vale il seguente isomorfismo:

**Lemma 3.12.** *Sia  $X$  superficie di Riemann compatta,  $D \in \text{Div}(X)$  un suo divisore e  $K \in \text{KDiv}(X)$  un suo divisore canonico. Allora  $I(D) \cong L(K - D)$ .*

*Dimostrazione.* Si consideri la mappa insiemistica

$$\begin{aligned} \phi : L(K - D) &\longrightarrow I(D) \\ f &\longmapsto f\sigma \end{aligned}$$

dove  $\sigma \in \mathcal{M}^1(X)$  è tale che  $K = \text{div}(\sigma)$ . Da  $\text{div}(f) \geq -(K - D)$  segue

$$\text{div}(f\sigma) = \text{div}(f) + \text{div}(\sigma) \geq -(K - D) + K = D.$$

Tale funzione ha inversa data da

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : I(D) &\longrightarrow L(K - D) \\ \omega &\longmapsto g \end{aligned}$$



---

dove  $g \in \mathcal{M}(X)$  è l'unica funzione meromorfa tale che  $\omega = g\sigma$ , la cui esistenza è garantita dal lemma 2.40. Da

$$\operatorname{div}(\omega) = \operatorname{div}(g\sigma) = \operatorname{div}(g) + \operatorname{div}(\sigma) \geq D$$

segue  $\operatorname{div}(g) + K - D \geq 0$ . Infine  $\phi$  è morfismo di spazi vettoriali in quanto  $\phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g)$  e  $\phi(\lambda f) = \lambda\phi(f)$  per ogni  $f, g \in L(K - D)$  e  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ .  $\square$

**Teorema 3.13** (Riemann-Roch). *Sia  $X$  superficie di Riemann compatta e  $D \in \operatorname{Div}(X)$ . Vale*

$$\dim L(D) = \operatorname{deg}(D) + 1 - g + \dim I(D)$$

dove  $g = g(X)$  è il genere della superficie di Riemann  $X$ .

Tra le numerose conseguenze di questo teorema vi è la seguente

**Proposizione 3.14.** *Sia  $X$  superficie di Riemann compatta di genere topologico  $g(X)$ . Lo spazio vettoriale delle 1-forme olomorfe ha dimensione uguale al genere:*

$$\dim_{\mathbb{C}}(\Omega^1(X)) = g(X).$$

*Dimostrazione.* Dalle osservazioni precedenti abbiamo che una 1-forma meromorfa  $\omega$  è olomorfa se e solo se  $\operatorname{div}(\omega) \geq 0$ : dunque  $I(0) = \Omega^1(X)$ . Per  $X$  superficie di Riemann compatta vale  $L(0) \cong \mathbb{C}$ , da cui  $\dim_{\mathbb{C}} L(0) = 1$ , e infine  $\operatorname{deg}(0) = 0$ . Sostituendo nella formula di Riemann-Roch troviamo:

$$\begin{aligned} 1 = \dim L(0) &= \operatorname{deg}(0) + 1 - g + \dim I(0) \\ &= 1 - g + \dim I(0) \end{aligned}$$

da cui segue la tesi.  $\square$

Il teorema di Riemann-Roch non risponde solo al problema dell'esistenza delle funzioni meromorfe, ma anche all'esistenza di 1-forme meromorfe su superficie di Riemann compatte. Dal teorema infatti deduciamo che se  $\operatorname{deg}(D) > g(X)$  allora  $\dim L(D) > 1$ , ovvero  $X$  ammette funzioni meromorfe non costanti. Per quanto riguarda le 1-forme meromorfe abbiamo il seguente:

**Teorema 3.15.** *Sia  $X$  una superficie di Riemann compatta,  $\{p_i\}_i$  un insieme finito di punti su  $X$  e  $\{r_i\}_i$  un insieme di numeri complessi. Allora esiste una 1-forma meromorfa  $\omega$  su  $X$  che ha per poli semplici i punti  $p_i$ , e nessun altro polo, con  $\operatorname{Res}_{p_i}(\omega) = r_i$  per ogni  $i$  se e solo se  $\sum_i r_i = 0$ .*



## Capitolo 4

# Teorema di Abel-Jacobi per superficie di Riemann compatte

### 4.1 Definizione di Jacobiana

Come abbiamo già visto, data una superficie di Riemann compatta  $X$ , il primo gruppo di omologia di  $X$  è  $H_1(X) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$ , ovvero il quoziente tra il gruppo abeliano generato dalle catene chiuse e il suo sottogruppo generato dai bordi dei triangoli.

Consideriamo ora una 1-forma  $\mathcal{C}^\infty$  chiusa su  $X$ . Per il teorema di Stokes:

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega = 0$$

dove  $D$  è un sottoinsieme di  $X$  che ammette triangolazione. Da ciò deduciamo che l'integrale di  $\omega$  lungo bordi di triangoli è sempre nullo, e quindi l'integrale di  $\omega$  lungo catene chiuse dipende dalla classe di omologia della catena in  $H_1(X)$ .

Osserviamo a questo punto che le 1-forme olomorfe sono chiuse: sia  $\omega = f dz$  con  $f$  olomorfa il che equivale alle condizioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x(x, y) = v_y(x, y) \\ u_y(x, y) = -v_x(x, y) \end{cases}$$

dove  $z = x + iy$  e  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Poiché  $dz = dx + idy$ , possiamo riscrivere  $\omega$  come

$$\omega = (u + iv)dx - (v - iu)dy$$

da cui risulta evidente che è soddisfatta la seguente uguaglianza

$$\frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = -\frac{\partial}{\partial y}(v - iu),$$

dunque  $\omega$  è chiusa.

Si ha quindi che gli integrali delle 1-forme olomorfe lungo classi di omologia in  $H_1(X)$  sono ben definiti, e ogni classe di omologia determina un funzionale:

$$\int_{[c]} : \Omega^1(X) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Ogni funzionale di questo tipo è detto *periodo*:

---

**Definizione 4.1.** Un funzionale lineare  $\lambda : \Omega^1(X) \rightarrow \mathbb{C}$  è detto periodo se esiste una classe di omologia  $[c] \in H_1(X)$  tale che  $\lambda = \int_{[c]}$ .

L'insieme dei periodi si indica con  $\Lambda$  e costituisce un sottogruppo dello spazio duale di  $\Omega^1(X)$ : dati  $\lambda_1 = \int_{[c_1]}$  e  $\lambda_2 = \int_{[c_2]}$  si ha infatti che per ogni  $\omega \in \Omega^1(X)$  vale

$$\lambda_1(\omega) + \lambda_2(\omega) = \int_{[c_1]} \omega + \int_{[c_2]} \omega = \int_{[c_1 \cdot c_2]} \omega.$$

Dunque è ben posta la seguente

**Definizione 4.2** (Jacobiana). Data una superficie di Riemann compatta  $X$ , la Jacobiana di  $X$  è il quoziente dei funzionali sullo spazio delle 1-forme olomorfe modulo il sottogruppo dei periodi.

$$\text{Jac}(X) = \Omega^1(X)^* / \Lambda$$

Si osservi che  $\text{Jac}(X)$  è gruppo abeliano.

*Esempio 4.3.* Sia  $X = \mathbb{S}^2$ . Da  $\Omega^1(\mathbb{S}^2) = \{0\}$ , segue immediatamente  $\text{Jac}(\mathbb{S}^2) = \{0\}$ .

Come osservato nei capitoli precedenti,  $\Omega^1(X)$  è un  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale di dimensione pari al genere  $g(X)$  della superficie  $X$ : allora anche il suo duale  $\Omega^1(X)^*$  è  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale di dimensione  $g(X)$ . Questo ci permette di interpretare  $\text{Jac}(X)$  come un quoziente di  $\mathbb{C}^g$ .

$$\text{Jac}(X) \cong \mathbb{C}^g / \Lambda.$$

In questo caso con  $\Lambda$  si intende il sottogruppo generato da elementi del tipo  $\int_{a_i}$  e  $\int_{b_i}$ , detti  $a$ - e  $b$ -periodi, dove  $a_i, b_i$  sono lati di una rappresentazione poligonale standard  $\mathcal{P}$  di  $X$ .

Ricordiamo infatti che se  $X$  è superficie di Riemann compatta di genere  $g$ , essa ammette rappresentazione poligonale standard  $\mathcal{P}$  costituita da  $4g$  lati  $\{a_i, b_i, a'_i, b'_i\}_{i=1}^g$  opportunamente identificati. Nel poligono  $\mathcal{P}$  i lati  $a_i, b_i$  vengono percorsi in senso antiorario mentre  $a'_i, b'_i$  in senso orario, per ogni  $i$ ; inoltre  $a_i$  viene identificato con  $a'_i$ , mentre  $b_i$  con  $b'_i$ , nelle direzioni date. Si osservi anche che  $a_i$  e  $b_i$  sono curve chiuse in  $X$ , in quanto i vertici del poligono  $\mathcal{P}$  sono tutti identificati ad un unico punto di  $X$ .

*Esempio 4.4.* Sia  $X = \mathbb{T} = \mathbb{C}/L$  il toro complesso. Vogliamo calcolare  $\text{Jac}(\mathbb{T})$ . Da  $g(\mathbb{T}) = 1$  segue  $\dim_{\mathbb{C}}(\Omega^1(\mathbb{T})) = 1$  e quindi possiamo assumere che la 1-forma  $dz$  generi  $\Omega^1(\mathbb{T})$ . Per cui l'insieme dei periodi  $\Lambda$  è

$$\Lambda = \left\{ \int_{[c]} dz : [c] \in H_1(\mathbb{T}) \right\}.$$

Consideriamo poi i due cammini  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  definiti da

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} & \gamma_2 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto tz_1 & t &\longmapsto tz_2 \end{aligned}$$

dove  $z_1, z_2$  sono i due elementi  $\mathbb{R}$ -linearmente indipendenti di  $\mathbb{C}$  che generano il reticolo  $L$ , ovvero  $L = \{m_1 z_1 + m_2 z_2 : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$ . Allora le classi  $a = \pi \circ \gamma_1$  e  $b = \pi \circ \gamma_2$  generano il primo gruppo di omologia  $H_1(\mathbb{T})$ , con  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L$  proiezione canonica.

Segue quindi

$$\Lambda = \left\{ m \int_{[a]} dz + n \int_{[b]} dz : m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Valgono poi le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\int_{[a]} dz &= \int_{\gamma_1} dz = \int_0^1 z_1 = z_1 \\ \int_{[b]} dz &= \int_{\gamma_2} dz = \int_0^1 z_2 = z_2\end{aligned}$$

che ci permettono di concludere che  $\Lambda = L$  e dunque  $\text{Jac}(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$ .

Per ogni  $\omega \in \Omega^1(X)$  definiamo gli *a-* e *b-periodi* di  $\omega$ :

$$A_i(\omega) = \int_{a_i} \omega \quad \text{e} \quad B_i(\omega) = \int_{b_i} \omega$$

Data  $\sigma$  1-forma  $\mathcal{C}^\infty$  chiusa su  $X$ , e quindi anche su  $\mathcal{P}$ , fissiamo un punto  $x$  all'interno di  $\mathcal{P}$  e definiamo la funzione  $f_\sigma$  come segue:

$$f_\sigma(p) = \int_x^p \sigma \quad \text{per } p \in \mathcal{P}.$$

Con tale scrittura si intende che  $\sigma$  viene integrata lungo un qualsiasi cammino da  $x$  a  $p$  contenuto in  $\mathcal{P}$ . La funzione è ben definita in quanto  $\sigma$  è chiusa e  $\mathcal{P}$  è semplicemente connessa, dunque l'integrale è indipendente dalla scelta del cammino. Vale il seguente

**Lemma 4.5.** *Sia  $X$  superficie di Riemann compatta di genere  $g$ ,  $\sigma$  una 1-forma olomorfa chiusa  $\mathcal{C}^\infty$  su  $X$  e  $\tau$  una 1-forma meromorfa su  $X$  i cui poli non appartengono a nessuna curva del tipo  $a_i$  o  $b_i$ . Allora*

$$\int_{\partial\mathcal{P}} f_\sigma \tau = \sum_{i=1}^g A_i(\sigma) B_i(\tau) - A_i(\tau) B_i(\sigma)$$

dove  $\partial\mathcal{P} = \sum_{i=1}^g (a_i + b_i - a'_i - b'_i)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $p$  un punto che giace sul lato  $a_i$ . Chiamiamo  $p'$  il suo corrispondente sul lato  $a'_i$  e  $\alpha_p$  un cammino contenuto in  $\mathcal{P}$  che va da  $p$  a  $p'$ . Allora vale

$$f_\sigma(p) - f_\sigma(p') = \int_x^p \sigma - \int_x^{p'} \sigma = \int_{p'}^p \sigma = - \int_{\alpha_p} \sigma.$$

Il cammino  $\alpha_p$  è chiuso in  $X$ , dato che  $p'$  è identificato a  $p$ , ed è omotopo a  $b_i$ . Dunque, per ogni  $p \in a_i$  vale

$$f_\sigma(p) - f_\sigma(p') = - \int_{b_i} \sigma = -B_i(\sigma).$$

Ragionando in modo analogo sui lati  $b_i$ , otteniamo che per ogni  $q \in b_i$  vale

$$f_\sigma(q) - f_\sigma(q') = \int_{a_i} \sigma = A_i(\sigma).$$

Osserviamo poi che  $\tau$  assume gli stessi valori su  $a_i$  e  $a'_i$  essendo i due lati identificati in  $X$ , e naturalmente vale lo stesso per  $b_i$  e  $b'_i$ .

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathcal{P}} f_\sigma \tau &= \sum_{i=1}^g \left( \int_{a_i} - \int_{a'_i} + \int_{b_i} - \int_{b'_i} \right) f_\sigma \tau \\
&= \sum_{i=1}^g \left( \int_{p \in a_i} [f_\sigma(p) - f_\sigma(p')] \tau + \int_{q \in b_i} [f_\sigma(q) - f_\sigma(q')] \tau \right) \\
&= \sum_{i=1}^g \left( \int_{p \in a_i} [-B_i(\sigma)] \tau + \int_{q \in b_i} [A_i(\omega)] \tau \right) \\
&= \sum_{i=1}^g -B_i(\sigma) A_i(\tau) + A_i(\sigma) B_i(\tau).
\end{aligned}$$

□

**Lemma 4.6.** *Sia  $\omega$  una 1-forma olomorfa non nulla su  $X$ . Allora vale*

$$\operatorname{Im} \left( \sum_{i=1}^g A_i(\omega) \overline{B_i(\omega)} \right) < 0.$$

*Dimostrazione.* Sia  $\omega = f(z)dz$  una 1-forma olomorfa non nulla su  $X$ , dunque  $\bar{\omega} = \overline{f(z)}d\bar{z}$ . Vale

$$\omega \wedge \bar{\omega} = |f|^2 dz \wedge d\bar{z} = -2i|f|^2 dx \wedge dy.$$

e quindi

$$\iint_X \omega \wedge \bar{\omega} = -2i \iint_X |f|^2 dx \wedge dy$$

da cui si deduce che  $\operatorname{Im}(\iint_X \omega \wedge \bar{\omega}) < 0$ . Applicando ora il lemma 4.5 con  $\sigma = \omega$  e  $\tau = \bar{\omega}$ , otteniamo:

$$\int_{\partial\mathcal{P}} f_\omega \bar{\omega} = \sum_{i=1}^g A_i(\omega) B_i(\bar{\omega}) - A_i(\bar{\omega}) B_i(\omega)$$

Osserviamo inoltre che  $\int_{\partial\mathcal{P}} f_\omega \bar{\omega} = \iint_P d(f_\omega \bar{\omega})$  per il teorema di Stokes; poi essendo  $df_\omega = \omega$  per il teorema fondamentale del calcolo e  $d\bar{\omega} = 0$  perchè  $\omega$  olomorfa, vale

$$d(f_\omega \bar{\omega}) = df_\omega \wedge \bar{\omega} + f_\omega d\bar{\omega} = \omega \wedge \bar{\omega}.$$

Deduciamo quindi che

$$\operatorname{Im} \left( \sum_{i=1}^g [A_i(\omega) B_i(\bar{\omega}) - A_i(\bar{\omega}) B_i(\omega)] \right) < 0.$$

Per concludere è sufficiente notare che  $A_i(\bar{\omega}) = \overline{A_i(\omega)}$  e  $B_i(\bar{\omega}) = \overline{B_i(\omega)}$ . Ora, ponendo  $\sum_{i=1}^g A_i(\omega) B_i(\bar{\omega}) = z_0 = x_0 + iy_0$  vale

$$\operatorname{Im} \left( \sum_{i=1}^g [A_i(\omega) B_i(\bar{\omega}) - A_i(\bar{\omega}) B_i(\omega)] \right) = \operatorname{Im}(z_0 - \bar{z}_0) = \operatorname{Im}(2iy_0) = 2y_0 < 0$$

ovvero  $y_0 = \operatorname{Im}(\sum_{i=1}^g A_i(\omega) B_i(\bar{\omega})) = \operatorname{Im}(\sum_{i=1}^g A_i(\omega) \overline{B_i(\omega)}) < 0$ . □

Da questo lemma deduciamo inoltre che se una 1-forma olomorfa su  $X$ , detta  $\omega$ , soddisfa  $A_i(\omega) = 0$  per ogni  $i$  oppure  $B_i(\omega) = 0$  per ogni  $i$  allora  $\omega = 0$ . Infatti se per esempio  $A_i(\omega) = 0$  per ogni  $i$  allora  $\sum_{i=1}^g A_i(\omega)B_i(\omega) = 0$ , il che contraddice 4.6.

Scegliamo ora una base  $\omega_1, \dots, \omega_g$  di  $\Omega^1(X)$  su  $\mathbb{C}$ : i  $2g$  vettori di  $\mathbb{C}^g$  dati da

$$A_i(\omega_j) = \begin{pmatrix} \int_{a_i} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{a_i} \omega_g \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_i(\omega_j) = \begin{pmatrix} \int_{b_i} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{b_i} \omega_g \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, g.$$

formano due matrici  $A$  e  $B$  dette *matrici dei periodi* nelle basi scelte  $a_j, b_j$  di  $H_1(X)$  e  $\omega_j$  di  $\Omega^1(X)$ . Le matrici dei periodi sono invertibili. Supponendo per assurdo  $A$  matrice singolare, ovvero esiste  $c = (c_1, \dots, c_g) \in \mathbb{C}^g$  non nullo tale che  $Ac = 0$ , si arriva ad una contraddizione. Basta infatti considerare la 1-forma olomorfa non nulla data da  $\omega = \sum_j c_j \omega_j$  e osservare che

$$A_i(\omega) = \sum_j c_j A_i(\omega_j) = 0$$

per ogni  $i = 1, \dots, g$ , il che è assurdo per quanto segue dal lemma 4.6.

**Lemma 4.7.** *Le matrici dei periodi  $A$  e  $B$  soddisfano le relazioni bilineari di Riemann:*

- $A^\top B = B^\top A$
- $i(A^\top B - B^\top A) > 0$

*Dimostrazione.* Dimostriamo solo la prima relazione, che è quella che useremo in seguito. Fissiamo gli indici  $j$  e  $k$  e applichiamo il lemma 4.5 con  $\sigma = \omega_j$  e  $\tau = \omega_k$ :

$$\int_{\partial \mathcal{P}} f_{\omega_j} \omega_k = \sum_{i=1}^g A_i(\omega_j) B_i(\omega_k) - A_i(\omega_k) B_i(\omega_j)$$

Osserviamo poi che

$$\int_{\partial \mathcal{P}} f_{\omega_j} \omega_k = \iint_P d(f_{\omega_j} \omega_k) = \iint_P \omega_j \wedge \omega_k + f_{\omega_j} d\omega_k = 0$$

per il teorema di Stokes, perchè  $\omega_j \wedge \omega_k = 0$  e  $d\omega_k = 0$  in quanto  $\omega$  è 1-forma olomorfa. Concludiamo quindi

$$\sum_{i=1}^g A_i(\omega_j) B_i(\omega_k) = \sum_{i=1}^g A_i(\omega_k) B_i(\omega_j),$$

ovvero  $A^\top B = B^\top A$ . □

## 4.2 Teorema di Abel-Jacobi

Data una superficie di Riemann compatta  $X$ , vogliamo ora capire qual è la relazione che sussiste tra  $X$  e la sua Jacobiana  $\text{Jac}(X)$ .

Per fare ciò fissiamo  $p_0 \in X$  e definiamo l'insieme  $C_{p_0}$ :

$$C_{p_0} = \{(p, \gamma_p) : p \in X, \gamma_p \text{ cammino in } X \text{ da } p_0 \text{ a } p\}.$$

Su tale insieme di coppie definiamo la mappa  $A : C_{p_0} \rightarrow \Omega^1(X)^*$  che manda ogni coppia  $(p, \gamma_p)$  nel funzionale dato dall'integrazione lungo  $\gamma_p$ .

$$\begin{aligned} A : C_{p_0} &\longrightarrow \Omega^1(X)^* \\ (p, \gamma_p) &\longmapsto \int_{\gamma_p} \end{aligned}$$

Si vede subito che tale mappa dipende dal punto fissato  $p_0$ : se  $p'_0$  è un altro punto fissato e  $\gamma'_p$  è il cammino da  $p'_0$  a  $p$  abbiamo che  $\gamma_p = \delta + \gamma'_p$  dove  $\delta$  è un cammino da  $p_0$  a  $p'_0$ . Si osservi che il cammino  $\delta$  è indipendente dalla scelta del punto  $p$  e che quindi scegliendo un altro punto base, la mappa  $A$  cambia per una costante. Consideriamo ora la composizione  $\pi \circ A$ , dove  $\pi$  è la proiezione canonica di  $\Omega^1(X)^*$  sul quoziente  $\text{Jac}(X)$ :

$$\begin{array}{ccc} C_{p_0} & \xrightarrow{A} & \Omega^1(X)^* \\ & \searrow & \downarrow \pi \\ & & \text{Jac}(X) \end{array}$$

Si può notare che se  $\gamma'_p$  è un altro cammino in  $X$  da  $p_0$  a  $p \in X$ , vale  $\pi \circ A(p, \gamma_p) = \pi \circ A(p, \gamma'_p)$ . Infatti per linearità vale

$$A(p) = \int_{\gamma_p} = \int_{\gamma'_p} + \int_{\gamma_p - \gamma'_p}$$

Ma  $\gamma_p - \gamma'_p$  è una catena chiusa, quindi in  $\text{Jac}(X)$  vale  $\int_{\gamma_p - \gamma'_p} = 0$ . Dunque  $A : C_{p_0} \rightarrow \text{Jac}(X)$  non dipende dalla scelta del cammino  $\gamma_p$ : è naturale quindi considerare la proiezione di  $C_{p_0}$  su  $X$ , data da  $(p, \gamma_p) \mapsto p$ .

$$\begin{array}{ccc} C_{p_0} & \longrightarrow & \Omega^1(X)^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{A} & \text{Jac}(X) \end{array}$$

Otteniamo quindi la funzione  $A : X \rightarrow \text{Jac}(X)$ , che risulta essere ben definita e che prende il nome di *mappa di Abel-Jacobi*.

*Esempio 4.8.* Sia  $X = \mathbb{T}$  il toro complesso. Abbiamo già visto che  $\text{Jac}(\mathbb{T}) \cong \mathbb{T}$ , quindi la mappa di Abel-Jacobi è in questo caso una biezione. Mostriamo che si tratta anche di un morfismo di gruppi.

Ricordiamo che l'unico differenziale olomorfo su  $\mathbb{T}$  è, a meno di costanti moltiplicative,  $dz$ . Presi  $z_1, z_2 \in \mathbb{T}$ , vogliamo verificare che è soddisfatta la seguente uguaglianza:

$$\int_0^{z_1} dz + \int_0^{z_2} dz = \int_0^{z_1+z_2} dz.$$



Consideriamo l'integrale  $\int_0^{z_2} dz$  e poniamo  $w = z + z_1$ : allora  $dw = dz$  e quindi, tramite un cambio di variabile, otteniamo

$$\int_0^{z_2} dz = \int_{z_1}^{z_1+z_2} dw.$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_0^{z_1+z_2} dz &= \int_0^{z_1} dz + \int_{z_1}^{z_1+z_2} dz \\ &= \int_0^{z_1} dz + \int_0^{z_2} dz, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

La mappa di Abel-Jacobi si estende per linearità al gruppo dei divisori:

$$\begin{aligned} A: \text{Div}(X) &\longrightarrow \text{Jac}(X) \\ D = \sum n_p p &\longmapsto \sum n_p A(p) \end{aligned}$$

e costituisce un omomorfismo di gruppi. La restrizione di  $A$  al gruppo dei divisori di grado 0 viene indicata con  $A_0: \text{Div}_0(X) \rightarrow \text{Jac}(X)$ .

Si osservi che la restrizione  $A_0$  della mappa di Abel-Jacobi  $A$  è indipendente dalla scelta del punto  $p_0$ . Scelto infatti un altro punto  $p'_0$ , l'immagine di un divisore  $D = \sum_i n_i p_i$  tramite  $A$  con punto iniziale  $p_0$  differisce dall'immagine di  $D$  tramite  $A$  con punto iniziale  $p'_0$  per

$$A(D) - A'(D) = \sum_i n_i \int_{\gamma_{p_i}} - \sum_i n_i \int_{\gamma'_{p_i}} = \sum_i n_i \int_{\gamma_{p_i} - \gamma'_{p_i}} = 0$$

dove  $\gamma_{p_i}$  cammino in  $X$  da  $p_0$  a  $p_i$  e  $\gamma'_{p_i}$  cammino in  $X$  da  $p'_0$  a  $p_i$ . L'ultima uguaglianza è data dal fatto che, per ogni  $i$ , il cammino  $\gamma_{p_i} - \gamma'_{p_i}$  va da  $p_0$  a  $p'_0$ , indipendentemente dal punto  $p_i$  e che  $\sum_i n_i = 0$  in quanto  $D \in \text{Div}_0(X)$ .

Siamo ora pronti ad enunciare il teorema centrale di questo capitolo:

**Teorema 4.9** (Teorema di Abel). *Sia  $X$  superficie di Riemann compatta di genere  $g$ ,  $D \in \text{Div}_0(X)$ . Allora  $D$  è un divisore principale se e solo se  $A_0(D) = 0$  in  $\text{Jac}(X)$ .*

Per dimostrare tale teorema ci occorre introdurre alcuni nuovi strumenti.

Consideriamo una funzione olomorfa  $F: X \rightarrow Y$  non costante tra superficie di Riemann compatte e  $h: X \rightarrow \mathbb{C}$  funzione meromorfa su  $X$ . Prendiamo ora un punto  $q \in Y$  che non sia di ramificazione per  $F$ : allora  $q$  ha esattamente  $d = \deg(F)$  preimmagini tramite  $F$ , siano  $p_1, \dots, p_d$ . Sia  $U \subseteq Y$  aperto fondamentale per  $F$ ,  $q \in U$ , ovvero  $F^{-1}(U) = \sqcup_i V_i$  con  $p_i \in V_i$  aperto e  $F|_{V_i}: V_i \rightarrow U$  isomorfismo olomorfo per ogni  $i$ . Sia poi  $\phi_i = (F|_{V_i})^{-1}: U \rightarrow V_i$ . Definiamo allora la traccia di  $h$ , che indicheremo con  $\text{Tr}(h)$ , come una funzione su  $U$  che associa ad ogni elemento  $q$  di  $U$  la somma delle immagini tramite  $h$  delle antimmagini di  $q$  tramite  $F$ , ovvero:

$$\mathrm{Tr}(h)(q) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} h(p)$$

Tale scrittura ha senso quando  $h$  non ha poli in  $F^{-1}(q)$ . In questo modo però è facile osservare che  $\mathrm{Tr}(h)$  è olomorfa in  $q$  se  $h$  lo è in ogni  $p$ . In generale la traccia di  $h$  è definita come somma di funzioni

$$\mathrm{Tr}(h) = \sum_{i=1}^d h \circ \phi_i$$

Se scegliamo  $q \in Y$  punto di ramificazione per  $F$  la situazione cambia: assumiamo che  $q$  abbia un'unica preimmagine  $p$  di molteplicità  $m$ . Allora localmente  $F$  si può scrivere come  $z = w^m$ , dove  $z$  è coordinata locale centrata in  $q$  e  $w$  è coordinata locale centrata in  $p$ . Se  $h(z) = \sum_n c_n w^n$  è la serie di Laurent di  $h$  allora

$$\mathrm{Tr}(h)(z) = \mathrm{Tr}(h)(w^m) = \sum_{i=0}^{m-1} h(\zeta^i w)$$

poiché le antimmagini di  $z = w^m$  sono date da  $\zeta^i w$  con  $\zeta = \exp(\frac{2\pi i}{m})$  al variare di  $i = 0, \dots, m-1$ . Sostituendo  $h$  con la sua serie di Laurent otteniamo:

$$\mathrm{Tr}(h)(z) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_n c_n (\zeta^i w)^n = \sum_n c_n \left[ \sum_{i=0}^{m-1} \zeta^{in} \right] w^n.$$

Ora se  $m$  divide  $n$  allora  $\zeta^{in} = 1$  per ogni  $i$ , da cui  $\sum_{i=0}^{m-1} \zeta^{in} = m$ . Altrimenti, nel caso in cui  $n$  non sia multiplo di  $m$ , la somma delle radici  $m$ -esime dell'unità è nulla. Dunque

$$\mathrm{Tr}(h)(z) = \sum_k m c_{km} w^{km} = \sum_k m c_{km} z^k.$$

Da questa formula è immediato osservare che se  $h$  è olomorfa o meromorfa in  $p$  allora  $\mathrm{Tr}(h)$  è rispettivamente olomorfa o meromorfa in  $q$ .

Se infine  $q \in Y$  è di ramificazione per  $F$  ma ha più di una antimmagine allora  $\mathrm{Tr}(h)(q)$  è data dalla somma delle tracce calcolate in intorni disgiunti nelle antimmagini. Vale ancora quindi che  $\mathrm{Tr}(h)$  è olomorfa o meromorfa se lo è  $h$ .

Possiamo definire la traccia di una 1-forma meromorfa in modo del tutto analogo al caso delle funzioni:

$$\mathrm{Tr}(\omega) = \sum_{i=1}^d \omega \circ \phi_i$$

con  $\omega$  1-forma meromorfa su  $X$ ,  $q \in U \subseteq Y$  non di ramificazione per  $F$ ,  $U$  e  $\phi_i$  come sopra. Se  $q$  è non di ramificazione per  $F$ , allora  $\mathrm{Tr}(\omega)(q)$  è una 1-forma meromorfa. Altrimenti, come prima, assumiamo inizialmente che  $q$  abbia una sola antimmagine  $p$  di molteplicità  $m$  e che quindi sia possibile scrivere  $F$  localmente come  $z = w^m$ . Allora  $\omega$  si può scrivere localmente come  $\omega = h(w)dw$  con  $h$  meromorfa con serie di Laurent  $h(w) = \sum_n c_n w^n$ . Da  $z = w^m$  segue  $\omega = \frac{h(w)}{mw^{m-1}} dz$  e quindi:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\omega) &= \sum_{i=0}^{m-1} \omega(\zeta^i w) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h(\zeta^i w)}{m(\zeta^i w)^{m-1}} dz \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_n c_n (\zeta^i w)^{n-m+1} dz \\
&= \frac{1}{m} \sum_n c_n \left[ \sum_{i=0}^{m-1} \zeta^{i(n-m+1)} \right] w^{n-m+1} dz.
\end{aligned}$$

Gli unici termini non nulli in questa sommatoria sono quelli corrispondenti ad  $n$  che divide  $n - m + 1$ , ovvero  $n = km - 1$  per qualche  $k$ . Otteniamo la seguente formula

$$\mathrm{Tr}(\omega) = \sum_k c_{km-1} z^{k-1} dz$$

che mostra come anche in questo caso  $\mathrm{Tr}(\omega)$  sia meromorfa in  $q$  punto di ramificazione per  $F$ . Inoltre  $\mathrm{Tr}(\omega)$  è olomorfa in  $q$  se  $\omega$  lo è in tutte le preimmagini di  $q$ . Se  $q$  è di ramificazione per  $F$  ma ha più di una preimmagine procediamo come fatto per le funzioni e sommiamo le tracce calcolate negli intorni disgiunti delle preimmagini.

Il nostro interesse per la funzione traccia appena definita è dovuta al fatto che tra l'integrale di una 1-forma meromorfa e quello della sua traccia sussiste una relazione che utilizzeremo per dimostrare la necessità del teorema di Abel-Jacobi.

Prima di enunciare tale risultato è importante capire lungo quali curve integriamo  $\omega$  e  $\mathrm{Tr}(\omega)$ .

Sia  $\gamma$  un cammino in  $Y$  e  $\omega$  una 1-forma meromorfa su  $X$  i cui poli non appartengano alla preimmagine della curva  $\gamma$  tramite  $F$ : in questo modo è possibile integrare la forma  $\mathrm{Tr}(\omega)$  lungo  $\gamma$ . Come già osservato, lontano dai punti di ramificazione  $F$  è un omeomorfismo locale di grado  $d$ , quindi ogni punto ammette  $d$  antimmagini. Se scegliamo  $\gamma$  non passante per punti di ramificazione allora esistono esattamente  $d$  cammini  $\gamma_1, \dots, \gamma_d$  la cui immagine tramite  $F$  è  $\gamma$ . Nel caso in cui  $\gamma$  contenga punti di ramificazione, che ricordiamo essere in numero finito, i cammini  $\gamma_1, \dots, \gamma_d$  si uniscono nei punti di  $X$  che stanno nelle antimmagini dei punti di ramificazione: in questi casi prendiamo al posto di  $\gamma_i$  la sua chiusura, per ottenere ancora  $d$  cammini  $\gamma'_1, \dots, \gamma'_d$ . La catena che si ottiene sommando questi  $d$  cammini è detta pullback di  $\gamma$  tramite  $F$

$$F^* \gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_d,$$

e si estende per linearità alle catene in  $Y$ .

**Lemma 4.10.** *Sia  $F : X \rightarrow Y$  una mappa olomorfa non costante tra superficie di Riemann compatte,  $\omega$  una 1-forma olomorfa su  $X$  e  $\gamma$  una catena in  $Y$ . Allora*

$$\int_{F^* \gamma} \omega = \int_{\gamma} \mathrm{Tr}(\omega).$$

---

*Dimostrazione.* Assumiamo che  $\gamma$  non passi per punti di ramificazione di  $F$ . Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \text{Tr}(\omega) &= \int_{\gamma} \sum_{i=1}^d \omega \circ \phi_i \\ &= \sum_{i=1}^d \int_{\gamma_i} \omega = \int_{F^*\gamma} \omega \end{aligned}$$

□

Ora abbiamo tutto quello che ci serve per dimostrare la necessità del teorema di Abel-Jacobi.

*Dimostrazione.* (Necessità) Sia  $D = \text{div}(f)$  divisore principale su  $X$  superficie di Riemann compatta, con  $f$  funzione meromorfa su  $X$ . Sia  $F : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$  la funzione olomorfa associata ad  $f$ , di grado  $d$ : ricordando che  $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$ , possiamo vedere  $F$  come  $F : X \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Scegliamo ora un cammino  $\gamma$  su  $\mathbb{S}^2$  che va dal polo nord  $N$  al polo sud  $S$  e che non passi per nessun punto di ramificazione di  $F$ . Allora

$$F^*\gamma = \sum_{i=1}^d \gamma_i$$

dove ogni cammino  $\gamma_i$  collega un polo di  $f$ , sia  $p_i = \gamma_i(0)$ , ad uno zero di  $f$ , che indichiamo con  $z_i = \gamma_i(1)$ . Con tali notazioni possiamo scrivere  $D = \text{div}(f)$  come

$$D = \sum_{i=1}^d (z_i - p_i).$$

Sia poi  $\omega_1, \dots, \omega_g$  una base per lo spazio vettoriale  $\Omega^1(X)$  e sia  $x \in X$  un punto fissato: per ogni  $i$ , sia  $\alpha_i$  un cammino da  $x$  a  $z_i$  e  $\beta_i$  un cammino da  $x$  a  $p_i$ . Applicando la mappa di Abel-Jacobi a  $D$  otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} A_0(D) &= \sum_{i=1}^d \left( \int_{\alpha_i} \omega_1, \dots, \int_{\alpha_i} \omega_g \right) - \left( \int_{\beta_i} \omega_1, \dots, \int_{\beta_i} \omega_g \right) \pmod{\Lambda} \\ &= \sum_{i=1}^d \left( \int_{\alpha_i - \beta_i} \omega_1, \dots, \int_{\alpha_i - \beta_i} \omega_g \right) \pmod{\Lambda}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Indichiamo con  $\eta_i$  il cammino dato da  $\alpha_i - \beta_i$ : tale cammino è chiuso di punto base  $x$ , dunque il vettore  $(\int_{\eta_i} \omega_1, \dots, \int_{\eta_i} \omega_g)$  è un periodo in  $\Lambda$ . Questo significa che è possibile sottrarlo da 4.1 ed avere ancora una formula per  $A_0(D)$ :

$$\begin{aligned} A_0(D) &= \sum_{i=1}^d \left( \int_{\alpha_i - \beta_i - \eta_i} \omega_1, \dots, \int_{\alpha_i - \beta_i - \eta_i} \omega_g \right) \pmod{\Lambda} \\ &= \sum_{i=1}^d \left( \int_{\gamma_i} \omega_1, \dots, \int_{\gamma_i} \omega_g \right) \pmod{\Lambda} \\ &= \left( \int_{F^*\gamma} \omega_1, \dots, \int_{F^*\gamma} \omega_g \right) \pmod{\Lambda}. \end{aligned}$$

Fissata una coordinata  $j$ -esima del vettore  $A_0(D)$ , per il lemma 4.10 si ha

$$(A_0(D))_j = \int_{F^*\gamma} \omega_j = \int_{\gamma} \text{Tr}(\omega_j).$$

Ma  $\text{Tr}(\omega_j)$  è una 1-forma olomorfa, in quanto lo è  $\omega_j$ , ma non esistono forme olomorfe non nulle sulla sfera di Riemann dunque  $\text{Tr}(\omega_j) = 0$  per ogni  $j$  e quindi

$$\int_{F^*\gamma} \omega_j = \int_{\gamma} \text{Tr}(\omega_j) = 0.$$

Questo dimostra che  $A_0(D) = 0$  in  $\text{Jac}(X)$ . □

Per dimostrare poi la sufficienza del teorema di Abel-Jacobi, ci occorre prima dimostrare il seguente

**Lemma 4.11.** *Sia  $X$  superficie di Riemann compatta e  $D \in \text{Div}_0(X)$  tale che  $A_0(D) = 0$  in  $\text{Jac}(X)$ . Allora esiste una 1-forma meromorfa  $\omega$  su  $X$  che soddisfa le seguenti proprietà:*

- $\omega$  ha poli semplici in corrispondenza dei punti del supporto di  $D$ , ovvero dove  $D \neq 0$ ;
- $D(p) = \text{Res}_p(\omega)$  per ogni  $p \in X$ ;
- Gli  $a$ - e  $b$ -periodi di  $\omega$  sono multipli interi di  $2\pi i$ .

*Dimostrazione.* Dato che il divisore  $D$  ha per ipotesi grado 0, sono soddisfatte le ipotesi del teorema 3.15 e quindi esiste una 1-forma meromorfa  $\tau$  che soddisfa le prime due condizioni. Allora anche la forma  $\omega = \tau - \sum_{i=1}^g c_i \omega_i$ , con  $c_i$  costanti, soddisfa le prime due condizioni. Cerchiamo allora le costanti  $c_i$  in modo che  $\omega$  soddisfi anche la terza condizione del teorema. Assumiamo che nessun punto del supporto di  $D$  appartenga alle curve  $a_i$  o  $b_i$ . Per ogni  $k = 1, \dots, g$  definiamo

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^g (A_i(\omega_k) B_i(\tau) - A_i(\tau) B_i(\omega_k)).$$

Per il lemma 4.5 e per il teorema dei Residui, osserviamo che vale

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{P}} f_{\omega_k} \tau = \sum_{p \in \mathcal{P}} \text{Res}_p(f_{\omega_k} \tau) = \sum_{p \in X} \text{Res}_p(f_{\omega_k} \tau).$$

Dato che  $f_{\omega_k}$  è olomorfa e  $\tau$  ha poli semplici nei punti del supporto di  $D$ , ciascun con residuo  $\text{Res}_p(\tau) = D(p)$ , vale  $\text{Res}_p(f_{\omega_k} \tau) = f_{\omega_k}(p) \cdot D(p)$ , da cui

$$\rho_k = \sum_p D(p) f_{\omega_k}(p) = \sum_p D(p) \int_{p_0}^p \omega_k$$

con  $p_0$  punto fissato su  $X$ . A questo punto osserviamo che  $\rho_k$  è esattamente la  $k$ -esima coordinata del vettore  $A_0(D)$ , ma per ipotesi  $A_0(D) = 0$  quindi il vettore  $(\rho_1, \dots, \rho_g)$  è un periodo in  $\Lambda$ . In quanto tale lo possiamo scrivere come

$$(\rho_1, \dots, \rho_g) = \sum_{i=1}^g m_i (A_i(\omega_1), \dots, A_i(\omega_g)) - \sum_{i=1}^g n_i (B_i(\omega_1), \dots, B_i(\omega_g))$$

con  $n_i, m_i$  interi. Esistono dunque degli interi  $n_i, m_i$  tali che

$$\rho_k = \sum_{i=1}^g m_i A_i(\omega_k) - \sum_{i=1}^g n_i B_i(\omega_k) \quad \text{per ogni } k.$$

Dalla definizione di  $\rho_k$  abbiamo

$$\rho_k = \sum_{i=1}^g \frac{B_i(\tau)}{2\pi i} A_i(\omega_k) - \sum_{i=1}^g \frac{A_i(\tau)}{2\pi i} B_i(\omega_k),$$

dunque confrontando le due scritture otteniamo che per ogni  $k$  vale

$$\sum_{i=1}^g (B_i(\tau) - 2\pi i m_i) A_i(\omega_k) = \sum_{i=1}^g (A_i(\tau) - 2\pi i n_i) B_i(\omega_k).$$

Sia  $a$  il vettore che ha  $A_i(\tau) - 2\pi i n_i$  per  $i$ -esima coordinata,  $b$  il vettore che ha  $B_i(\tau) - 2\pi i m_i$  per  $i$ -esima coordinata. L'equazione sopra può allora essere espressa come  $A^\top b = B^\top a$ , dove  $A$  e  $B$  sono le matrici dei periodi.

Poiché  $A$  e  $B$  sono matrici non singolari, le trasformazioni lineari  $\alpha : \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}^{2g}$  e  $\beta : \mathbb{C}^{2g} \rightarrow \mathbb{C}^g$  definite come

$$\alpha = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \beta = (B^\top \quad -A^\top)$$

hanno rango massimo. Inoltre, per il lemma 4.7 vale  $\beta \circ \alpha = 0$ : concludiamo quindi che  $\ker(\beta) = \text{im}(\alpha)$ . Dunque il vettore  $(a, b)$ , che appartiene al nucleo di  $\beta$  per quanto osservato sopra, è un elemento dell'immagine di  $\alpha$ , ovvero esiste un vettore  $c \in \mathbb{C}^g$  tale che

$$Ac = a \quad \text{e} \quad Bc = b.$$

Il vettore  $c = (c_1, \dots, c_g)$  è il vettore che cercavamo. Vale infatti

$$\begin{aligned} A_i(\omega) &= A_i(\tau) - \sum_j c_j A_i(\omega_j) \\ &= A_i(\tau) - a_i \\ &= A_i(\tau) - (A_i(\tau) - 2\pi i n_i) = 2\pi i n_i, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B_i(\omega) &= B_i(\tau) - \sum_j c_j B_i(\omega_j) \\ &= B_i(\tau) - b_i \\ &= B_i(\tau) - (B_i(\tau) - 2\pi i m_i) = 2\pi i m_i. \end{aligned}$$

□

Ora siamo finalmente pronti a concludere la dimostrazione del teorema di Abel-Jacobi.

*Dimostrazione.* (Sufficienza) Sia  $D$  un divisore di grado zero con  $A_0(D) = 0$  in  $\text{Jac}(X)$ . Vogliamo provare che esiste  $f \in \mathcal{M}(X)$  tale che  $D = \text{div}(f)$ . Sia  $\omega$  una 1-forma meromorfa che soddisfa le proprietà del lemma 4.11. Fissato un punto  $p_0 \in X$ , definiamo la funzione

$$f(p) = \exp\left(\int_{p_0}^p \omega\right).$$

Vogliamo mostrare che questa è la funzione meromorfa che stiamo cercando. Si osservi che  $f$  è ben definita in quanto i periodi di  $\omega$  sono multipli di  $2\pi i$  e i suoi residui sono numeri interi. La funzione inoltre è indipendente dalla scelta del cammino da  $p_0$  a  $p$ . Questo perché la differenza di due cammini appartiene ad  $H_1(X)$  e quindi l'integrazione lungo tale differenza è combinazione lineare di  $a$  e  $b$ -periodi: per il lemma 4.11 tale integrale è multiplo intero di  $2\pi i$  e dunque passando all'esponenziale il valore della funzione  $f$  non cambia.

Possiamo anche notare che  $f$  è olomorfa dove lo è  $\omega$ , ovvero per ipotesi ovunque tranne nei punti del supporto di  $D$ . Sia poi  $p$  un punto del supporto di  $D$ ,  $D(p) = n \neq 0$ : sempre dalle ipotesi abbiamo che  $p$  è un polo semplice per  $\omega$  e  $\text{Res}_p(\omega) = n$ , dunque in un intorno di  $p$  la forma  $\omega$  ammette sviluppo in serie del tipo

$$\omega = \frac{n}{z} + g(z)$$

con  $z$  coordinata locale intorno a  $p$  e  $g$  funzione olomorfa. Passando all'integrale si ha

$$\int_{p_0}^p \omega = \int_{p_0}^p \left(\frac{n}{z} + g(z)\right) = n \ln(z) + h(z).$$

dove  $h$  è funzione olomorfa. Infine otteniamo

$$f(z) = z^n e^{h(z)}$$

che è funzione meromorfa. In particolare  $\text{ord}_p(f) = n = D(p)$ , quindi  $D = \text{div}(f)$  come volevasi dimostrare.  $\square$

### 4.3 Costruzione algebrica della Jacobiana

Dal teorema di Abel abbiamo quindi che il nucleo della mappa di Abel-Jacobi ristretta al gruppo dei divisori di grado zero  $\text{Div}_0(X)$  coincide con il gruppo dei divisori principali  $\text{PDiv}(X)$ .

**Teorema 4.12** (Teorema di Jacobi.). *Sia  $X$  superficie di Riemann compatta. Allora*

$$\text{Jac}(X) \cong \text{Div}_0(X) / \text{PDiv}(X).$$

*Dimostrazione.* È sufficiente dimostrare che  $A_0 : \text{Div}_0(X) \rightarrow \text{Jac}(X)$  è suriettiva. Dimostriamo in modo più generico la suriettività della mappa di Abel-Jacobi ristretta all'insieme dei divisori non negativi di grado  $n \geq g(X)$  fissato, che indicheremo con  $X^{(n)} \subseteq \text{Div}(X)$ .

$$\begin{aligned} A : X^{(n)} &\longrightarrow \text{Jac}(X) \\ (P_1, \dots, P_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^n \int_{P_0}^{P_i} \end{aligned}$$

Osserviamo innanzitutto che  $X^{(n)}$  può essere descritto come il prodotto cartesiano di  $n$  volte  $X$  modulo l'azione del gruppo simmetrico su  $n$  elementi  $S_n$ :

$$X^{(n)} = (X \times \cdots \times X)/S_n.$$

In questo modo siamo in grado di dare a  $X^{(n)}$  una struttura analitica (ovvero un atlante analitico), che fuori dalla diagonale  $\Delta^n = \{(x, \dots, x) \in X^n : x \in X\}$  è quella ovvia: se  $P = \sum_i P_i \in X^{(d)} \setminus \Delta^n$  allora per ogni elemento  $\sum_i Q_i$  in un suo intorno definiamo la carta

$$\sum_i Q_i \mapsto (z_1(Q_1), \dots, z_d(Q_d))$$

dove  $z_i$  è carta locale su  $X$  per  $P_i$ . Nei punti  $P = \sum_i P_i$  della diagonale la struttura analitica è data tramite le funzioni elementari simmetriche: per  $d = 2$ , per esempio, abbiamo una carta su  $X^{(2)}$  data da

$$Q_1 + Q_2 \mapsto (z(Q_1) + z(Q_2), z(Q_1)z(Q_2))$$

per ogni elemento  $Q_1 + Q_2$  in un intorno di  $P + P \in \Delta^2$ . La struttura analitica di  $X^{(n)}$  da localmente una struttura analitica a  $\text{Div}_0(X)$ .

Ora per dimostrare la suriettività, fisso su  $X$   $g$  punti  $p_i$ : sia  $V_i$  intorno di  $p_i$  per ogni  $i$  e sia  $z_i$  un punto in  $V_i$  diverso da  $p_i$ . Definisco il divisore  $D = \sum_{i=1}^g (z_i - p_i)$  di grado 0. Allora la mappa di Abel-Jacobi definisce una mappa

$$X^{(d)} \supseteq \prod V_i \longrightarrow \text{Jac}(X)$$

tra due varietà complesse di dimensione  $g$  su  $\mathbb{C}$ . Il determinante della matrice jacobiana di questa funzione è diverso da zero

$$\det \begin{pmatrix} \omega_1(z_1) & \cdots & \omega_1(z_g) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_g(z_1) & \cdots & \omega_g(z_g) \end{pmatrix} \neq 0$$

per una scelta generica dei punti  $z_i$ . Quindi  $A$  è isomorfismo locale, e dunque  $A$  è localmente suriettiva. Questo dimostra la suriettività di  $A_0$ .  $\square$

L'interesse in questo risultato sta nel fatto che un oggetto matematico costruito in modo analitico, come quoziente di spazi di funzioni, ammette un'interpretazione algebrica, come quoziente di gruppi.

Dal teorema di Abel-Jacobi e dall'interpretazione algebrica di  $\text{Jac}(X)$  segue

**Teorema 4.13.** *Sia  $X$  una superficie di Riemann compatta di genere  $g \geq 1$ . La mappa di Abel-Jacobi  $A : X \rightarrow \text{Jac}(X)$  è iniettiva.*

*Dimostrazione.* Siano  $p, q \in X$  tali che  $A(p) = A(q)$ . Supponiamo per assurdo  $p \neq q$ . Allora  $A(p - q) = 0$  in  $\text{Jac}(X) \cong \text{Div}_0(X)/\text{PDiv}(X)$ , ovvero  $A(p - q)$  è un divisore principale. Esiste dunque una funzione meromorfa  $f$  con uno zero semplice in  $p$  e un polo semplice in  $q$ . La mappa olomorfa  $F : X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  associata ad  $f$  è quindi una mappa olomorfa non costante di grado 1, dunque isomorfismo. Segue  $X \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , il che è assurdo in quanto  $g(X) \geq 1$  mentre  $g(\mathbb{C}\mathbb{P}^1) = 0$ .  $\square$



Si osservi che nonostante la mappa di Abel-Jacobi sia un'immersione,  $X$  non è sottogruppo di  $\text{Jac}(X)$ , tranne nel caso  $g(X) = 1$  (ovvero il toro complesso), in cui  $X \cong \text{Jac}(X)$ . Da questo punto di vista la Jacobiana ha una proprietà minimale nel senso che rappresenta la più piccola varietà algebrica con struttura di gruppo che contiene  $X$ .

*Esempio 4.14.* Sia  $X = \mathcal{C}$  una curva ellittica. Studiamo la mappa di Abel-Jacobi  $A : \mathcal{C} \rightarrow \text{Jac}(\mathcal{C})$ . Sappiamo che per le curve ellittiche tale mappa non è solo iniettiva ma anche suriettiva, dato che  $\mathcal{C} \cong \mathbb{T}$  e  $\mathbb{T} \cong \text{Jac}(\mathbb{T})$ . Quello che vogliamo fare in questo esempio è rivedere questo risultato usando la costruzione algebrica di  $\text{Jac}(X)$ .

$$\begin{aligned} A : \mathcal{C} &\longrightarrow \text{Jac}(\mathcal{C}) = \text{Div}_0(\mathcal{C}) / \text{PDiv}(\mathcal{C}) \\ P &\longmapsto [P - \infty]. \end{aligned}$$

Vogliamo provare che dati due punti  $P, Q \in \mathcal{C}$ , vale

$$[P - \infty] + [Q - \infty] = [\sigma T - \infty] \quad \text{con } \sigma T = P \oplus Q$$

dove  $\oplus$  è l'operazione su  $\mathcal{C}$ . Per fare questo consideriamo un punto  $P \in \mathcal{C}$  e una retta verticale  $r$  che interseca  $\mathcal{C}$  solamente in due punti  $P$  e il suo simmetrico che indicheremo con  $sP$ . Il divisore di questa retta è  $\text{div}(r) = [P + sP - 2 \cdot \infty] = [0]$  da cui deduciamo

$$[P - \infty] = [-sP + \infty],$$

o equivalentemente

$$[-P + \infty] = [sP - \infty]. \quad (4.2)$$

Consideriamo poi una generica retta  $s$  che interseca la curva in tre punti distinti  $R, S, T$ : otteniamo in questo caso  $\text{div}(s) = [R + S + T - 3 \cdot \infty] = [0]$ . Applicando il risultato 4.2, segue

$$\begin{aligned} [R + S - 2 \cdot \infty] &= [-T + \infty] \\ &= [sT - \infty]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Questo significa che presi due punti  $P, Q \in \mathcal{C}$  e detto  $R = (P \vee Q) \cdot \mathcal{C}$ , vale

$$[P + Q - 2 \cdot \infty] = [sR - \infty]$$

ma  $sR = P \oplus Q$ . Abbiamo quindi dimostrato

$$A(P) + A(Q) = A(P \oplus Q) \quad \text{per ogni } P, Q \in \mathcal{C}.$$

Non solo, da queste osservazioni segue anche che ogni divisore di grado 0 (modulo divisori principali) sulla curva  $\mathcal{C}$ , può sempre essere scritto come immagine di un unico punto  $P \in \mathcal{C}$ . Infatti se  $D = [\sum_{i=1}^n P_i - n \cdot \infty] \in \text{Div}_0(\mathcal{C}) / \text{PDiv}(\mathcal{C})$ , tramite operazioni del tipo 4.3 e 4.2 arriviamo alla forma  $[P - \infty]$  per un opportuno  $P \in \mathcal{C}$ . Questo dimostra la suriettività della mappa  $P \mapsto [P - \infty]$ .

L'iniettività è immediata in quanto se  $[P - \infty] = [Q - \infty]$  allora  $[P - Q] = 0$  in  $\text{Div}_0(\mathcal{C}) / \text{PDiv}(\mathcal{C})$ , cioè esiste una funzione meromorfa su  $\mathcal{C}$  con un unico polo semplice in  $Q$ . Tale funzione induce un isomorfismo di  $\mathcal{C}$  in  $\mathbb{CP}^1$ , il che è assurdo poiché  $g(\mathcal{C}) = 1$  mentre  $g(\mathbb{CP}^1) = 0$ .

L'interpretazione algebrica di  $\text{Jac}(X)$  come quoziente di gruppi di divisori  $\text{Div}_0(X) / \text{PDiv}(X)$  ci fornisce quindi un modo alternativo per verificare che ogni curva ellittica è isomorfa alla sua Jacobiana.

---

*Esempio 4.15.* Possiamo estendere quanto visto per le curve ellittiche alle curve iperellittiche di genere 2, ovvero superficie di Riemann compatte  $X$  definite da  $y^2 = f(x)$  con  $f$  polinomio di quinto grado senza zeri multipli. Vale ancora la relazione 4.2, ma non più 4.3. In questo caso infatti se consideriamo una generica retta  $s$ , essa interseca la curva iperellittica  $\mathcal{I}$  in 5 punti distinti, siano  $P, Q, R, S, T$ . Allora

$$\begin{aligned} [P + Q + R - 3 \cdot \infty] &= [-S - T + 2 \cdot \infty] \\ &= [sS + sT - 2 \cdot \infty]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Tuttavia questa relazione vale per terne  $P, Q, R$  allineate di punti: cosa succede se scegliamo  $P, Q, R \in \mathcal{C}$  non allineati? Sappiamo che per 5 punti passa una sola conica quindi prendendo i tre punti  $P, Q, R$  e imponendo il passaggio per  $\infty$  con la stessa tangente di  $\mathcal{I}$ , abbiamo una conica tangente all'infinito e che interseca  $\mathcal{I}$  in almeno 3 punti. Ci chiediamo se vi sono altri punti di intersezione, ed eventualmente quanti sono.

Studiando l'intersezione di  $\mathcal{I}$  con la conica costruita, si verifica che  $\infty$  compare nell'intersezione con ordine 5: dunque la conica per  $P, Q, R$  interseca  $\mathcal{I}$  in altri due punti  $S, T \in \mathcal{I}$ . Possiamo concludere quindi che la relazione 4.4 vale in generale.

Questo ci suggerisce che mentre la mappa  $\mathcal{I} \rightarrow \text{Jac}(\mathcal{I})$  è iniettiva, ma non suriettiva, la mappa

$$\begin{aligned} (\mathcal{I} \times \mathcal{I})/S_2 &\rightarrow \text{Jac}(\mathcal{I}) \\ (P, Q) &\mapsto [P + Q - 2 \cdot \infty]. \end{aligned} \tag{4.5}$$

è suriettiva. La funzione 4.5 non è isomorfismo in quanto le fibre non hanno tutte la stessa cardinalità. Basta osservare infatti che la fibra di  $[0]$  è costituita da tutte le coppie di punti simmetrici  $(P, sP)$  al variare di  $P \in \mathcal{I}$ , e dunque la fibra di  $[0]$  è isomorfa a  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . Tuttavia si verifica che questo è l'unico caso "problematico", ovvero che al di fuori dello zero la mappa è iniettiva e dunque isomorfismo.

# Bibliografia

- [1] Cailotto M., Geometria e Topologie elementari.
- [2] Cailotto M., Superficie di Riemann compatte.
- [3] Hatcher A., Algebraic Topology, Cambridge University Press, Dicembre 2001.
- [4] Massey W. S., Algebraic Topology: An Introduction, Springer, Novembre 1977.
- [5] Miranda, Algebraic Curves and Riemann Surfaces, American Mathematical Society, Aprile 1995.
- [6] Reyssat E., Quelques aspects des surfaces de Riemann, Birkhauser Boston, 1989.