

# Stabilizzazione in retroazione del moto di una bicicletta

Giulia Prando

30 settembre 2010

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Modello classico</b>	<b>4</b>
2.1	Prima formulazione del modello . . . . .	4
2.1.1	Movimento orizzontale della bicicletta . . . . .	4
2.1.2	Dinamica laterale della bicicletta . . . . .	5
2.1.3	Funzione di trasferimento del sistema . . . . .	6
2.1.4	Modello di stato . . . . .	7
2.1.5	Osservazioni . . . . .	8
2.2	Seconda Formulazione del modello . . . . .	9
2.2.1	Modello di stato in forma canonica di controllo . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Modello con retroazione interna</b>	<b>12</b>
3.1	L'avancorsa e la sua azione di feedback . . . . .	12
3.2	Effetti giroscopici . . . . .	15
3.3	Definizione del modello . . . . .	15
3.4	La funzione di trasferimento . . . . .	16
3.4.1	Modello di stato in forma canonica di controllo . . . . .	17
3.5	Modello che considera gli effetti giroscopici . . . . .	17
3.6	Applicazioni . . . . .	18
3.6.1	Modello di stato in forma canonica di controllo . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Diagrammi di Bode</b>	<b>20</b>
<b>5</b>	<b>Progetto dei compensatori</b>	<b>23</b>
5.1	Compensatore per $G(s)$ . . . . .	23
5.1.1	Compensatore costante . . . . .	24
5.1.2	Compensatore PI . . . . .	25
5.1.3	Compensatore ottimale . . . . .	26
5.2	Compensatore per $G'(s)$ stabile . . . . .	26
5.2.1	Compensatore costante . . . . .	27
5.2.2	Compensatore PI . . . . .	28
5.2.3	Compensatore PI con prestazioni migliori . . . . .	28
5.3	Compensatore per $G'(s)$ instabile . . . . .	29
5.4	Compensatore per $G_{yT}(s)$ . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Retroazione dallo stato</b>	<b>33</b>
6.1	Retroazione dallo stato sul modello di stato di dimensione quattro . . . . .	33
6.2	Retroazione dallo stato sul modello di stato ottenuto da $G(s)$ . . . . .	35
6.3	Retroazione dallo stato sul modello di stato ottenuto da $G'(s)$ . . . . .	36

6.3.1	Modello di stato ottenuto da $G'(s)$ stabile . . . . .	36
6.3.2	Modello di stato ottenuto da $G'(s)$ instabile . . . . .	38
6.4	Retroazione dallo stato sul modello di stato ottenuto da $G_{yT}(s)$ . . . . .	39
<b>7</b>	<b>Controllo dei sistemi non-lineari originari</b>	<b>41</b>
7.1	Sistema descritto da $G(s)$ . . . . .	41
7.1.1	Compensatore costante . . . . .	43
7.1.2	Compensatore PI . . . . .	44
7.1.3	Compensatore ottimale . . . . .	45
7.2	Sistema descritto da $G'(s)$ stabile . . . . .	46
7.2.1	Compensatore costante . . . . .	47
7.2.2	Compensatore PI . . . . .	48
7.2.3	Compensatore PI con prestazioni migliori . . . . .	48
7.3	Sistema descritto da $G'(s)$ instabile . . . . .	49
7.4	Sistema descritto da $G_{yT}(s)$ . . . . .	50
7.5	Nota sull'uso del blocco derivatore in Simulink . . . . .	52
7.5.1	Compensatore per $G(s)$ . . . . .	53
7.5.2	Compensatore per $G'(s)$ stabile . . . . .	55
7.5.3	Compensatore per $G'(s)$ instabile . . . . .	57
7.5.4	Compensatore per $G_{yT}(s)$ . . . . .	58

# Capitolo 1

## Introduzione

Nel presente elaborato verranno presentati due modelli di bicicletta: in un primo momento si considererà l'insieme bicicletta-ciclista come un unico corpo rigido, le ruote saranno supposte prive di massa e verranno trascurati gli effetti giroscopici legati al rotolamento delle ruote, pervenendo così ad un modello piuttosto semplificato, che traslascia alcune importanti caratteristiche geometriche del mezzo; in un secondo tempo verrà invece presentato un modello più completo, dovuto allo svedese Aström.

Entrambi i modelli saranno basati sulle seguenti ipotesi semplificative:

1. il piano stradale su cui si muove il veicolo sarà considerato una superficie piana;
2. le ruote della bicicletta avranno spessore trascurabile, saranno indeformabili e ruoteranno senza scivolare;
3. si assumerà una velocità costante  $V$ , in modo da avere modelli tempo-invarianti per il sistema;
4. il ciclista non si muoverà rispetto al telaio, ma eserciterà la sua funzione di controllo agendo solo sul manubrio;
5. si trascureranno le elasticità, gli attriti e gli effetti legati all'aerodinamica;
6. non verranno considerate frizioni interne tra le parti meccaniche della bicicletta;
7. si riterrà trascurabile l'effetto dinamico della pedalata in termini del movimento del sistema di trasmissione.

La seconda ipotesi porterà alla definizione di un modello di ruota con angolo di deriva nullo: questo permetterà di esprimere la posizione dei punti di contatto tra ruota anteriore e posteriore e il terreno in un riferimento inerziale, come funzione dell'orientazione e della velocità di rotazione delle ruote anteriore e posteriore, rispettivamente.

Nella tabella seguente vengono riportati i vari simboli che compariranno nel corso della trattazione accompagnati dal valore usato per le varie simulazioni:

<b>Parametro</b>	<b>Simbolo</b>	<b>Valore</b>
Velocità	$V$	5 m/s
Momento di inerzia baricentrico del sistema	$I_{CG}$	20 $Kg \cdot m^2$
Distanza orizzontale tra il centro di gravità e il punto di contatto della ruota posteriore	$A$	0.4 m
Distanza orizzontale tra il centro di gravità e il punto di contatto della ruota anteriore	$B$	0.7 m
Passo della bicicletta	$L = A + B$	1.1 m
Accelerazione di gravità	$g$	9.81 $m/s^2$
Altezza del baricentro in configurazione verticale	$H$	1.2 m
Massa del sistema ciclista-bicicletta	$M$	70 Kg
Avancorsa	$t$	0.08 m
Angolo di inclinazione dell'asse di sterzo rispetto alla verticale	$\lambda$	40

Definiti i modelli matematici descrittivi della bicicletta si passerà poi, a partire dal Capitolo 5, al progetto di compensatori dinamici da affiancare alle funzioni di trasferimento, ottenute in seguito alla linearizzazione dei modelli, in modo da assicurare delle buone prestazioni per quanto riguarda la risposta al gradino di tali sistemi. Nel Capitolo 7 tali controllori verranno testati sui sistemi non lineari originariamente trovati, verificando così la loro efficacia anche su di essi. Infine, il Capitolo 6 sarà dedicato alla retroazione dallo stato sui modelli di stato ricavati nei capitoli iniziali, offrendo così lo spunto per un confronto con il metodo di controllo dinamico affrontato nel capitolo precedente.

## Capitolo 2

# Modello classico

### 2.1 Prima formulazione del modello

Assumeremo ora che le ruote siano prive di massa, che non si verifichino effetti giroscopici legati al movimento delle ruote e che il ciclista eserciti la sua funzione di controllo determinando l'angolo di sterzo del manubrio.

#### 2.1.1 Movimento orizzontale della bicicletta

Innanzitutto esaminiamo il movimento orizzontale del sistema bicicletta-ciclista nel piano stradale. Fissata una retta di riferimento, siano:

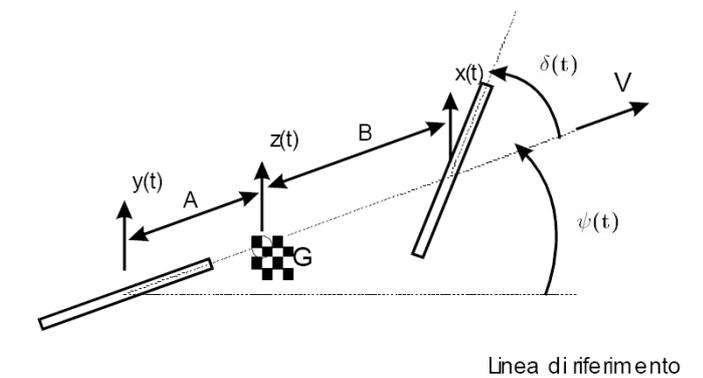
$x(t)$  - la posizione laterale del punto di contatto della ruota anteriore rispetto alla retta di riferimento;

$y(t)$  - la posizione laterale del punto di contatto della ruota posteriore rispetto alla retta di riferimento;

$z(t)$  - la posizione laterale della proiezione sul suolo del centro di massa del sistema rispetto alla retta di riferimento;

$\psi(t)$  - l'angolo di imbardata della bicicletta;

$\delta(t)$  - l'angolo di sterzo della ruota anteriore.



**Figura 2.1:** Proiezione della bicicletta sul piano stradale

Le equazioni che descrivono il movimento laterale sono:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = V \frac{\sin(\delta + \psi)}{\cos \delta} \\ \frac{dy}{dt} = V \sin \psi \\ z = \frac{(Ax + By)}{L} \\ L \sin \psi = x - y \end{cases}$$

Le coordinate indipendenti del sistema risultano pertanto essere  $x$  e  $y$ ; procedendo ora con la linearizzazione attorno al punto di equilibrio  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\delta}) = (0, 0, 0)$  si ricava:

$$\begin{cases} \dot{x} = V(\delta + \psi) \\ \dot{y} = V\psi \\ z = \frac{A}{L}x + \frac{B}{L}y \\ L\psi = x - y \end{cases}$$

Ora, sostituendo nella prima e nella seconda equazione il valore di  $\psi$  ottenuto dall'ultima relazione si perviene al seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{V}{L}x - \frac{V}{L}y + V\delta \\ \dot{y} = \frac{V}{L}x - \frac{V}{L}y \\ z = \frac{A}{L}x + \frac{B}{L}y \end{cases}$$

Considerando l'angolo di sterzo  $\delta$  come ingresso,  $x$  ed  $y$  come stati del sistema e  $z$  come uscita, dal sistema precedente si ricava il seguente modello di stato a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} &= F \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + G\delta(t) = \begin{bmatrix} V/L & -V/L \\ V/L & -V/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t) \\ z(t) &= H \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + D\delta(t) = \begin{bmatrix} A/L & B/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1)$$

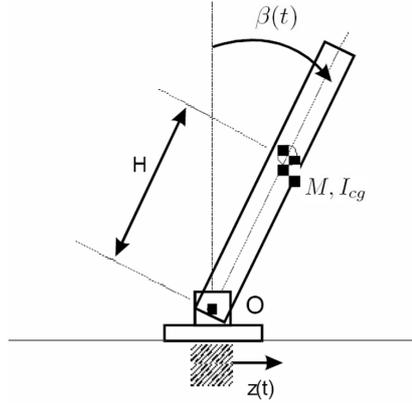
Infine, passando al dominio delle trasformate di Laplace, è possibile esprimere la funzione di trasferimento del sistema nel seguente modo:

$$G_1(s) = \frac{Z(s)}{\Delta(s)} = H(sI_2 - F)^{-1}G = \frac{V(As + V)}{Ls^2} \quad (2.2)$$

dove  $Z(s) \triangleq \mathcal{L}[z(t)]$  e  $\Delta(s) \triangleq \mathcal{L}[\delta(t)]$ .

### 2.1.2 Dinamica laterale della bicicletta

Passiamo ora ad analizzare la dinamica laterale della bicicletta, la quale per piccoli angoli di imbardata  $\psi(t)$ , può essere trattata come un pendolo inverso con massa  $M$ . Sia  $\beta(t)$  l'angolo di inclinazione del sistema bicicletta-ciclista rispetto al piano verticale, mentre l'espressione di  $z(t)$  prima trovata descrive il movimento laterale della base del pendolo, che è soggetta ad un vincolo di carrello. La figura di seguito riportata offre una schematizzazione del sistema:



**Figura 2.2:** Rappresentazione della bicicletta nel piano laterale passante per il baricentro, nel sistema di riferimento solidale con il moto rettilineo uniforme

Indicando con  $I_{cg}$  il momento d'inerzia baricentrico, l'equazione di equilibrio dei momenti rispetto al punto di cerniera  $O$ , per il quale passa la congiungente dei punti di contatto delle ruote con il piano stradale assume la seguente forma:

$$(MH^2 + I_{cg})\ddot{\beta} = MgH \sin \beta - MH\ddot{z} \cos \beta \quad (2.3)$$

dove, a secondo membro, il primo termine rappresenta il momento dovuto alla forza peso, mentre il secondo termine si deve all'accelerazione  $\ddot{z}$ . Procedendo ancora una volta con la linearizzazione per piccoli valori dell'angolo  $\beta$  e ponendo  $MH^2 + I_{cg} = J$ , si ricava:

$$J\ddot{\beta} = MgH\beta - MH\ddot{z} \quad (2.4)$$

Da questa equazione si ottiene la funzione di trasferimento  $G_2(s)$ , che lega lo spostamento laterale  $z(t)$  all'inclinazione  $\beta(t)$  della bicicletta:

$$G_2(s) = \frac{B(s)}{Z(s)} = -\frac{MHs^2}{Js^2 - MgH} \quad (2.5)$$

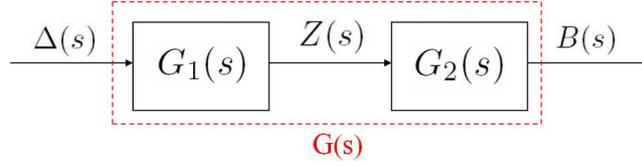
dove  $B(s) \triangleq \mathcal{L}[\beta(t)]$ .

### 2.1.3 Funzione di trasferimento del sistema

Ora, mettendo in serie le due funzioni di trasferimento fin qui trovate,  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$ , è possibile ricavare la funzione di trasferimento del sistema globale,  $G(s)$ , che mette in relazione l'angolo di sterzo  $\delta$  e l'inclinazione laterale  $\beta$ :

$$G(s) = \frac{B(s)}{\Delta(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s) = -\frac{\frac{V}{L}(As + V)MH}{Js^2 - MgH} = -\frac{VAMH}{LJ} \frac{s + \frac{V}{A}}{s^2 - \frac{MgH}{J}} \quad (2.6)$$

Notiamo che  $G(s)$  rappresenta un sistema instabile: ciò non è sorprendente in quanto, almeno per piccole velocità, la bici non rimane in piedi da sola e si rende necessario l'intervento del ciclista, il quale, tramite il suo cervello elabora i dati a disposizione e determina l'angolo di sterzo adeguato per stabilizzare il moto, esercitando così una vera e propria azione di feedback.



**Figura 2.3:** Funzione di trasferimento  $G(s)$

Va inoltre sottolineato il fatto che in  $G(s)$  è possibile soltanto una cancellazione zero-polo, che può aver luogo se i valori scelti per i parametri in gioco verificano:

$$\frac{V}{A} = \frac{MgH}{J} \quad (2.7)$$

In tal caso si avrebbe la cancellazione di uno zero e di un polo stabili, che quindi non comporterebbe alcun problema.

Antitrasformando la funzione di trasferimento  $G(s)$  si ricava la seguente equazione differenziale, che descrive il sistema nel dominio del tempo:

$$\ddot{\beta} - \frac{MgH}{J}\beta = -\frac{VAMH}{LJ}\dot{\delta} - \frac{V^2MH}{LJ}\delta \quad (2.8)$$

dove:

$\frac{MgH}{J}\beta$  è dovuto alla forza di gravità;

$\frac{V^2MH}{LJ}\delta$  è dovuto alla forza centripeta;

$\frac{VAMH}{LJ}\dot{\delta}$  è dovuto all'inerzia.

Le relazioni precedenti suggeriscono che, per poter effettuare una curva in una data direzione, il ciclista dovrà esercitare un'azione di sterzo che permetta al veicolo di percorrere una curva di raggio tale da generare una forza centrifuga sufficiente a bilanciare la forza di gravità: questo consentirà al sistema bicicletta-ciclista di rimanere alla stessa inclinazione  $\beta$ ; se invece il ciclista desidera riportare il mezzo in posizione verticale, la forza centrifuga che avrà origine in seguito all'azione di sterzo dovrà essere superiore alla componente orizzontale della forza di gravità.

Va sottolineato, infine, che nel modello qui presentato si assume che il ciclista determini in modo diretto l'angolo di sterzo del manubrio, a differenza di quanto avverrà nel modello descritto in seguito, dove l'azione di controllo del ciclista sarà data dalla coppia che egli applicherà al manubrio.

#### 2.1.4 Modello di stato

Per la definizione del modello di stato consideriamo inizialmente le due funzioni di trasferimento  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$  separatamente; osserviamo che, per quanto riguarda  $G_1(s)$  il modello è già stato definito in (2.4), mentre, in relazione a  $G_2(s)$ , non strettamente propria, la trasformazione:

$$G_2(s) = \frac{B(s)}{Z(s)} = -\frac{MH}{J} - \frac{\frac{M^2H^2g}{J^2}}{s^2 - \frac{MgH}{J}} \quad (2.9)$$

permette di ricondursi alle equazioni di stato in forma canonica di controllo, dove però le variabili di stato ottenute,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , non hanno un immediato significato fisico:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{MgH}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z \\ \beta = \begin{bmatrix} -\frac{M^2H^2g}{J^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} - \frac{MH}{J} z \end{cases} \quad (2.10)$$

Ora, unendo quanto trovato in (2.4), si ottiene:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V}{L} & -\frac{V}{L} & 0 & 0 \\ \frac{V}{L} & -\frac{V}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{A}{L} & \frac{B}{L} & \frac{MgH}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta \\ \beta = \begin{bmatrix} -\frac{MHA}{JL} & -\frac{MHB}{JL} & -\frac{M^2H^2g}{J^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.11)$$

### 2.1.5 Osservazioni

Nella determinazione della funzione di trasferimento del sistema,  $G(s)$ , come prodotto delle funzioni di trasferimento  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$  dei due sottosistemi analizzati si è verificata la cancellazione zero-polo del fattore  $s^2$ , il quale dava origine al modo instabile  $t$ :

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{V}{L} \frac{(As + V)}{s^2} \cdot \left( -\frac{MHs^2}{Js^2 - MgH} \right) = -\frac{VAMH}{LJ} \frac{s + \frac{V}{A}}{s^2 - \frac{MgH}{J}} \quad (2.12)$$

Risulta quindi necessario determinare a quali variabili di stato sia associato tale modo instabile; calcoliamo dapprima la forma di Jordan della matrice di stato del modello di stato precedentemente definito:

$$J = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{MgH}{J}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{Mgh}{J}} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

dove  $T$  è la matrice di cambiamento di base

$$T = \begin{bmatrix} \frac{V}{L} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{V}{L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AJV+BJV}{gHL^2M} & -\frac{AJ}{gHLM} & \frac{AV\sqrt{J^3+BV\sqrt{J^3+LAJ\sqrt{gHM}}}}{2L^2\sqrt{(gHM)^3}} & \frac{AV\sqrt{J^3-BV\sqrt{J^3-LAJ\sqrt{gHM}}}}{2L^2\sqrt{(gHM)^3}} \\ 0 & -\frac{JV}{gHML^2}(A+B) & \frac{AJV+BJV+AL\sqrt{gMHJ}}{2gHL^2M} & \frac{AJV+BJV-AL\sqrt{gMHJ}}{2gHL^2M} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{L}{V} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{B\sqrt{J}+AV\sqrt{J}-BL\sqrt{gHM}}{BV\sqrt{J}+AV\sqrt{J}+AL\sqrt{gHM}} & \frac{L^2\sqrt{(gHM)^3}}{BV\sqrt{J^3}+AV\sqrt{J^3}+ALJ\sqrt{gHM}} & \frac{gHML^2}{AJV+B JV+AL\sqrt{gHJM}} \\ 1 & -\frac{B\sqrt{J}+AV\sqrt{J}-BL\sqrt{gHM}}{BV\sqrt{J}+AV\sqrt{J}-AL\sqrt{gHM}} & -\frac{L^2\sqrt{(gHM)^3}}{BV\sqrt{J^3}+AV\sqrt{J^3}-ALJ\sqrt{gHM}} & \frac{gHML^2}{AJV+B JV-AL\sqrt{gHJM}} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Se ora consideriamo il modello di stato algebricamente equivalente a quello di partenza che ha  $J$  come matrice di stato e definiamo per esso il seguente vettore di stato:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{\gamma}_1 \\ \bar{\gamma}_2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

si può notare che la variabile di stato corrispondente al modo instabile  $t$  è  $\bar{y}$ , la quale, rispetto alle variabili di stato originarie risulta così espressa:

$$\bar{y} = x - y \quad (2.17)$$

come è possibile notare eseguendo il prodotto  $T^{-1}\mathbf{x}$  tra l'inversa della matrice di cambiamento di base e il vettore di stato originario. Pertanto le variabili di stato effettivamente legate al modo instabile  $t$  sono  $x$  e  $y$ ; in particolare, dal momento che, per quanto scritto nella (2.2), si ha:

$$\bar{y} = x - y = L\psi \quad (2.18)$$

il modo instabile va associato all'angolo  $\psi$  e dunque al fatto di non essersi posti, per lo studio del moto, in un sistema di riferimento solidale con quello della bicicletta, per cui essa tende ad allontanarsi (in evoluzione libera) indefinitamente dalla retta di riferimento. Di conseguenza, il contributo instabile dato dal fattore  $s^2$  è soltanto apparente e non fastidioso, in quanto dovuto alla scelta di un sistema di riferimento non adeguato; tuttavia, la funzione di trasferimento  $G(s)$  rimane instabile a causa del polo a parte reale positiva  $\sqrt{\frac{MgH}{J}}$ .

## 2.2 Seconda Formulazione del modello

Le considerazioni precedenti suggeriscono quindi di analizzare il moto della bicicletta in un sistema di riferimento solidale con essa in modo da ottenerne una descrizione più semplice e soprattutto priva delle cancellazioni zero-polo da cui era affetto il modello precedente.

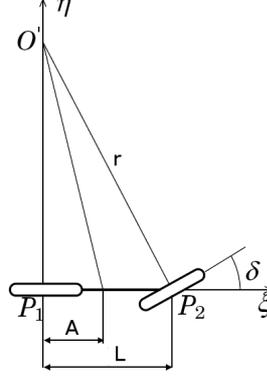
In questo caso si considera ancora una volta il sistema bicicletta-ciclista come un pendolo inverso ma si trascura un eventuale movimento del veicolo rispetto ad una linea di riferimento orizzontale, ovvero si pone  $\psi(t) = 0$ ; indicando con  $O'$  ed  $r$  rispettivamente il centro e il raggio di rotazione istantanea, riscriviamo la legge di equilibrio dei momenti:

$$J\ddot{\beta} = MgH \sin \beta + HN \cos \beta \quad (2.19)$$

$N$  rappresenta la forza che agisce sul centro di massa del sistema ed è costituita da una componente legata all'accelerazione centrifuga e da una legata invece al movimento

laterale della bicicletta, descritto da  $z(t)$ :

$$N = -M \left( \frac{V^2}{r} + \dot{V}_z \right) = -M \left( V^2 \frac{\sin \delta}{L} + \dot{V}_z \right) \quad (2.20)$$



**Figura 2.4:** Rappresentazione della bicicletta sterzante con centro  $O'$  e raggio  $r$  di rotazione istantanea

Da quanto scritto in (2.2) si ha  $z = \frac{A}{L}x + \frac{B}{L}y$ , da cui, considerando  $\psi = 0$ :

$$\begin{aligned} V_z = \dot{z} &= \frac{A}{L}\dot{x} + \frac{B}{L}\dot{y} \\ &= V \left( \frac{A}{L}\delta \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Pertanto, si ricava per la forza  $N$ :

$$N = -M \left( \frac{V^2}{L} \sin \delta + \frac{AV}{L} \frac{d(\tan \delta)}{dt} \right) \simeq -M \left( \frac{V^2}{L} \delta + \frac{AV}{L} \frac{d\delta}{dt} \right) \quad (2.22)$$

dove l'ultima espressione è stata ottenuta per linearizzazione attorno al punto di equilibrio  $\bar{\delta} = 0$ . Sostituendo ora nella (2.22) il valore di  $N$  appena trovato e linearizzando per piccoli valori dell'angolo  $\beta$  si perviene ancora all'equazione (2.11):

$$J\ddot{\beta} = MgH\beta - \frac{MHV^2}{L}\delta - \frac{AMHV}{L}\dot{\delta} \quad (2.23)$$

da cui, passando alle trasformate di Laplace, è poi possibile ottenere  $G(s)$ :

$$G(s) = -\frac{VAMH}{LJ} \frac{s + \frac{V}{A}}{s^2 - \frac{MgH}{J}} \quad (2.24)$$

la quale, come previsto, in questo caso non esibisce alcuna cancellazione zero-polo del fattore instabile  $s^2$ .

### 2.2.1 Modello di stato in forma canonica di controllo

A partire dalla funzione di trasferimento  $G(s)$  appena trovata è possibile ricavare un modello di stato in forma canonica di controllo.

Come già sottolineato in precedenza, in  $G(s)$  è possibile una cancellazione zero-polo se e solo se:

$$\frac{V}{A} = \frac{MgH}{J} \quad (2.25)$$

In tal caso, si avrebbe la cancellazione di uno zero e di un polo stabili, i quali, come è noto, darebbero origine a modi destinati ad esaurirsi dopo un certo transitorio: si andrebbero pertanto a trascurare modi sui quali non vi sarebbe motivo di applicare un controllo.

Da  $G(s)$  si ricava dunque il seguente modello di stato:

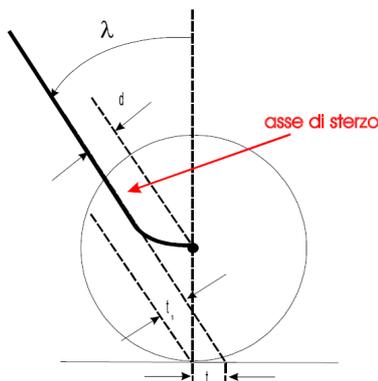
$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{MgH}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta \\ \beta = \begin{bmatrix} -\frac{V^2MH}{LJ} & -\frac{VAMH}{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.26)$$

## Capitolo 3

# Modello con retroazione interna

### 3.1 L'avancorsa e la sua azione di feedback

Il modello precedentemente descritto si basa su alcune semplificazioni di carattere geometrico e non risulta pertanto in grado di giustificare importanti aspetti della dinamica della bicicletta, in particolare la sua capacità di autostabilizzazione a velocità sufficientemente elevate. Nel seguito verrà presentato un modello dovuto allo svedese Aström, il quale prende in particolare considerazione le caratteristiche geometriche della forcella anteriore, schematizzata nella figura seguente:



**Figura 3.1:** La forcella sterzante

Solitamente l'asse di sterzo è eccentrico rispetto al centro di rotazione della ruota e la distanza tra i due elementi è data dal segmento  $d$ , detto *avanzamento dello sterzo*. La grandezza che però gioca un ruolo molto importante nella dinamica della bicicletta risulta essere l'*avancorsa*  $t$  (o *trail*), ovvero la distanza tra il punto di intersezione dell'asse di sterzo con il piano stradale e il punto di contatto della ruota sterzante. Per convenzione, l'avancorsa è considerata positiva se l'asse di sterzo interseca il piano orizzontale in posizione avanzata rispetto al punto sterzante. Se indichiamo con  $\lambda$  l'angolo di inclinazione dell'asse di sterzo, con  $R$  il raggio della ruota e con  $t_n$  l'*avancorsa normale*, è possibile ricavare le seguenti relazioni, che esprimono il legame tra le grandezze citate:

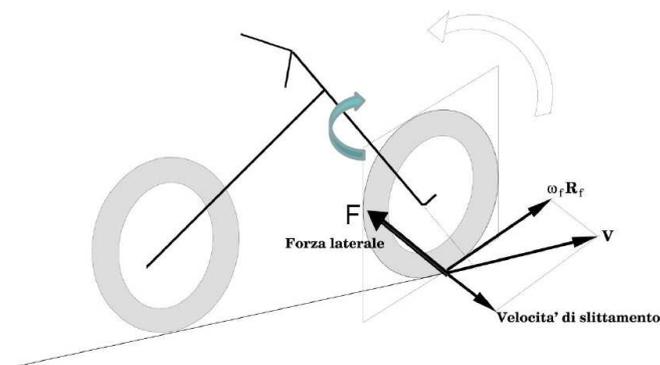
$$t = R \tan \lambda - \frac{d}{\cos \lambda} \quad (3.1)$$

$$t_n = t \cos \lambda \quad (3.2)$$

L'avancorsa riveste un ruolo particolarmente importante in quanto, se positiva, garantisce un certo grado di stabilità mediante l'effetto imbardante e raddrizzante.

Innanzitutto consideriamo l'*avancorsa normale*, ovvero la componente dell'avancorsa normale all'asse dello sterzo: essa è il braccio vettore di tutti i momenti che si creano sullo sterzo, causati da forze applicate nel punto di contatto della ruota anteriore.

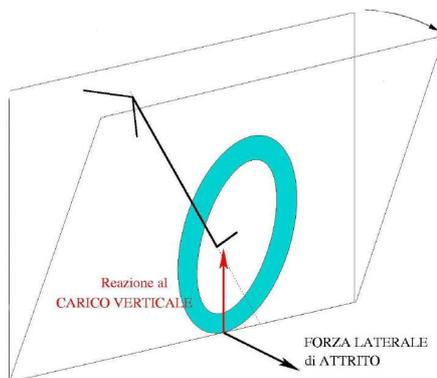
Esaminiamo ora l'effetto raddrizzante dell'avancorsa: immaginiamo di procedere in moto rettilineo uniforme con velocità  $V$ ; in seguito ad una perturbazione che provoca la rotazione dello sterzo verso sinistra, la velocità si decompone in una componente di rotolamento ed una componente che tende a far slittare verso destra. La forza laterale dovuta all'attrito  $F$  genera un momento (in senso orario), a causa del braccio dovuto all'avancorsa, che tende a raddrizzare la ruota sterzante così da evitare lo slittamento verso destra. Se l'avancorsa è positiva, allora il momento è raddrizzante, se invece è negativa allora il momento non è raddrizzante. L'effetto stabilizzante dell'avancorsa viene annullato quando la ruota, a causa di un'irregolarità, urta in un punto anteriore all'usuale punto di contatto ruota-terreno.



**Figura 3.2:** Effetto raddrizzante dell'avancorsa

L'avancorsa genera anche un effetto opposto a quello raddrizzante appena descritto: supponiamo che per ruotare verso destra, invece di girare lo sterzo, si sposti il proprio peso verso destra in modo da fare inclinare la bicicletta verso destra; nel punto di contatto col suolo della ruota anteriore hanno origine due forze di reazione:

- la reazione verticale del peso;
- la forza laterale di attrito (che evita lo slittamento);



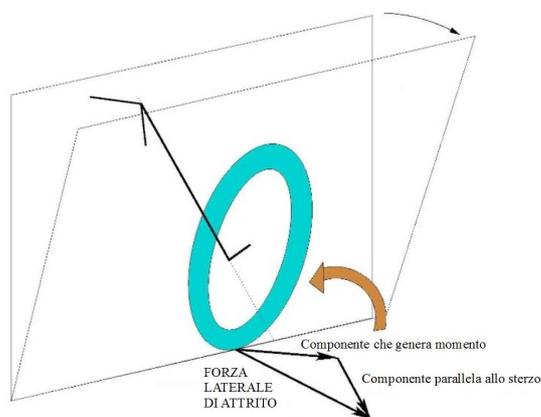
**Figura 3.3:** Effetto imbardante dell'avancorsa

Consideriamo la reazione del peso, che risulta ortogonale al terreno, e la decomponiamo in:

- una componente parallela alla direzione dello sterzo (che non genera momento);
- una componente normale al piano della ruota anteriore (rivolta verso l'esterno della curva), la quale genera un momento che provoca l'imbardata della bicicletta, ovvero fa girare la ruota verso destra.

Passiamo ora alla forza laterale di attrito che invece è orizzontale e decomponiamo anch'essa in:

- una componente parallela alla direzione dello sterzo, che non genera momento;
- una componente normale al piano della ruota anteriore e rivolta verso l'interno della curva, la quale genera un momento che si oppone all'imbardata della bicicletta, ovvero non fa girare la ruota verso destra, ma verso sinistra.



**Figura 3.4:** Componenti della forza laterale di attrito

Riassumendo, nel punto di contatto ruota-terreno ci sono due forze che generano un momento e hanno come braccio l'avancorsa normale:

- la componente della reazione del peso fa girare la ruota verso destra;
- la componente della forza laterale fa girare la ruota verso sinistra.

Poichè però l'effetto del carico verticale è maggiore di quello generato dalla forza laterale di attrito, in seguito ad uno spostamento del peso del ciclista verso destra la bicicletta ruota automaticamente verso destra, provocando l'imbardata della bicicletta verso destra.

Ricapitolando, in caso di un'inclinazione a destra, le forze di contatto sulla ruota anteriore esercitano un momento che fa ruotare la bicicletta (verso la parte in cui la bici si è piegata); di conseguenza la bici gira e subito dopo si genera una forza centrifuga che si oppone alla caduta verso destra, stabilizzando il moto della bici.

Possiamo quindi scrivere l'espressione della coppia totale  $T_{\delta}$  agente sulla ruota rispetto all'asse di sterzo come somma di coppie interne ed esterne:

$$T_{\delta} = T_{\delta,p} + T_{\delta,c} + T_{\delta,g} + T_{\delta,r} \quad (3.3)$$

dove:

$T_{\delta,p}$  è la coppia interna causata dalla reazione normale del terreno alla forza peso;

$T_{\delta,c}$  è la coppia interna dovuta alla forza di attrito laterale che mantiene la bicicletta sulla traiettoria circolare;

$T_{\delta,g}$  è la coppia interna di tipo giroscopico che soddisfa il principio di conservazione del momento angolare per la ruota anteriore;

$T_{\delta,r}$  è la coppia esterna applicata dal ciclista al manubrio.

I vari studi condotti in questo ambito hanno dimostrato che  $T_{\delta,p}$  è indipendente dalla velocità  $V$ , mentre  $T_{\delta,g}$  cresce linearmente con essa e  $T_{\delta,c}$  ha una dipendenza di tipo quadratico da  $V$ .

### 3.2 Effetti giroscopici

Finora sono stati trascurati gli effetti giroscopici legati alle ruote del veicolo rotanti attorno agli assi dei mozzi: tali effetti dipendono in principal modo dalle caratteristiche delle ruote e dalla loro velocità angolare. Sebbene nelle motociclette essi giochino un ruolo fondamentale per la stabilizzazione del mezzo, lo stesso non avviene per quanto riguarda la bicicletta, in quanto le velocità tipiche raggiunte con tale mezzo danno origine ad effetti giroscopici che, ai fini della descrizione semplificata di cui faremo uso in questo studio, possono essere trascurati.

### 3.3 Definizione del modello

Fatte le necessarie premesse, possiamo ora passare alla formulazione del modello vero e proprio, il quale considera l'azione svolta dall'avancorsa nella stabilizzazione del veicolo come un vero e proprio feedback. A differenza di quanto avveniva nel modello classico, dove il ciclista esercitava la propria azione di controllo direttamente sull'angolo di sterzo  $\delta$  della bicicletta, in questo caso, il ciclista governa il mezzo applicando una coppia all'asse di sterzo, tramite il manubrio; questa azione si somma poi a quella dovuta alla retroazione realizzata dalla forcella anteriore.

Nel complesso, il sistema bicicletta-ciclista viene ora suddiviso in due sottosistemi distinti: il telaio e la forcella anteriore. Per quanto riguarda il primo, esso viene descritto in modo analogo al modello classico, mentre per la forcella viene usato un modello statico. Indicata infatti con  $T$  la coppia applicata dal ciclista sull'asse dello sterzo, la descrizione del funzionamento della forcella anteriore può essere fatta mediante un bilancio delle coppie che la caratterizzano:

$$\delta = k_1(V)T + k_2(V)\beta \quad (3.4)$$

dove  $k_1$  e  $k_2$  sono due parametri che dipendono dalla velocità  $V$  e dalla geometria dello sterzo secondo le seguenti relazioni:

$$k_1(V) = \frac{L^2}{tMA \cos \lambda (V^2 \cos \lambda - gL \sin \lambda)} \quad (3.5)$$

$$k_2(V) = \frac{Lg}{V^2 \cos \lambda - Lg \sin \lambda} \quad (3.6)$$

in cui  $\lambda$  è ancora l'angolo di inclinazione dell'asse di sterzo rispetto alla verticale.

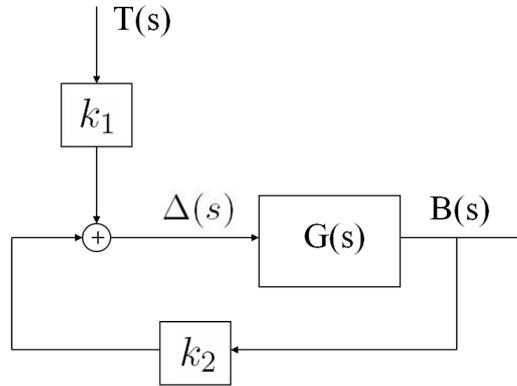
Dalla relazione (3.4) risulta evidente come l'avancorsa leghi l'angolo di caduta  $\beta$  all'angolo di sterzo  $\delta$  per mezzo di un feedback:

- l'angolo di caduta  $\beta$  influenza l'angolo di sterzo  $\delta$ ;
- l'angolo di sterzo  $\delta$  influenza l'angolo di caduta  $\beta$ .

A questo punto possiamo scrivere il modello completo che descrive il comportamento della bicicletta:

$$\begin{cases} \ddot{\beta} - \frac{MgH}{J}\beta = -\frac{VAMH}{LJ}\dot{\delta} - \frac{V^2MH}{LJ}\delta \\ \delta = k_1(V)T + k_2(V)\beta \end{cases} \quad (3.7)$$

Tale modello può inoltre essere schematizzato mediante il seguente diagramma a blocchi:



**Figura 3.5:** Schema a blocchi del sistema con retroazione strutturale

### 3.4 La funzione di trasferimento

La funzione di trasferimento ad anello aperto coincide con quella del modello semplificato e vale pertanto:

$$G(s) = -\frac{VAMH}{LJ} \cdot \frac{s + \frac{V}{A}}{s^2 - \frac{MgH}{J}}$$

Sostituendo ora nella prima equazione in (3.7) il valore di  $\delta$  ricavato dalla seconda, si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$\ddot{\beta} + k_2 \frac{AMHV}{LJ} \dot{\beta} + \frac{MgH}{J} \left( \frac{k_2 V^2}{Lg} - 1 \right) \beta = -k_1 \frac{AMVH}{LJ} \left( \dot{T} + \frac{V}{A} T \right) \quad (3.8)$$

dalla quale si ricava poi la funzione di trasferimento  $G'(s)$  che lega l'angolo  $\beta$  di inclinazione della bicicletta alla coppia  $T$  applicata al manubrio:

$$G'(s) = \frac{B(s)}{T(s)} = -\frac{k_1 VAMH}{LJ} \cdot \frac{s + \frac{V}{A}}{s^2 + \frac{VAMH}{LJ} k_2 s + \frac{MgH}{J} \left( \frac{k_2 V^2}{Lg} - 1 \right)} \quad (3.9)$$

Osserviamo che il polinomio a denominatore risulta di Hurwitz se e solo se:

$$\frac{k_2 V^2}{Lg} > 1 \quad (3.10)$$

Tale condizione risulta verificata per i valori dei parametri scelti e, in particolare, rimane valida per ogni valore della velocità  $V$  che soddisfi:

$$V > 3 \text{ m/s} \quad (3.11)$$

Pertanto, per velocità superiori ai  $3 \text{ m/s}$   $G'(s)$  risulta stabile, a differenza della funzione di trasferimento  $G(s)$  del modello precedente, dove l'intervento del ciclista si dimostrava necessario. Prendendo in considerazione il contributo dell'avancorsa diventa chiaro il motivo per il quale sia più difficile condurre la bicicletta a velocità molto basse e, allo stesso tempo, come sia possibile la guida senza mani a velocità più alte: per velocità inferiori ai  $3 \text{ m/s}$   $G'(s)$  non è stabile e il contributo del ciclista diventa predominante, al contrario, per velocità superiori a quel limite la funzione di trasferimento risulta stabile e il ruolo del ciclista diventa marginale.

### 3.4.1 Modello di stato in forma canonica di controllo

A partire da  $G'(s)$  è possibile ricavare un modello di stato in forma canonica di controllo. Poiché  $G'(s)$  presenta un unico zero stabile per qualunque valore di  $V$  maggiore di 0, l'unica cancellazione zero-polo possibile andrebbe ad eliminare uno zero ed un polo stabili, i quali, come è noto, darebbero origine a modi destinati ad esaurirsi dopo un certo intervallo di tempo: di conseguenza, qualora si avesse una cancellazione zero-polo si andrebbero a trascurare modi sui quali non sarebbe necessario applicare un controllo.

Il modello di stato ottenuto da  $G'(s)$  è dunque il seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{MgH}{J} \left( \frac{k_2 V^2}{Lg} - 1 \right) & -\frac{k_2 V AMH}{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} T \\ \beta = \begin{bmatrix} -\frac{k_1 V^2 MH}{LJ} & -\frac{k_1 V AMH}{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (3.12)$$

## 3.5 Modello che considera gli effetti giroscopici

Aström propone anche un modello che tiene conto dei fenomeni giroscopici legati alla conservazione del momento angolare per le ruote e che permette di dimostrare come tali effetti non svolgano un ruolo significativo nella stabilizzazione della bicicletta, la quale è invece garantita in principal modo dall'azione di feedback svolta dall'avancorsa. In questa sede viene presentato solamente il modello fornito da Aström, senza svolgere su di esso particolari considerazioni, a puro scopo di completezza:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\beta} - \frac{MgH}{J} \beta = -\frac{V AMH}{LJ} \dot{\delta} - \frac{V^2 MH}{LJ} \delta \\ \delta = k_1 T + k_2 \beta + k_g \dot{\beta} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Il termine aggiuntivo  $k_g \dot{\beta}$  presente nella seconda equazione riassume tutti i vari effetti giroscopici che si verificano nel moto della bicicletta. Sostituendo, ancora una volta nella prima equazione, il valore di  $\delta$  ricavato dalla seconda si perviene alla seguente equazione che descrive il sistema in anello chiuso:

$$\left(1 + \frac{AMHk_gV}{LJ}\right)\ddot{\beta} + \left(\frac{AMHk_2V}{LJ} + \frac{MHk_gV^2}{LJ}\right)\dot{\beta} + \frac{MgH}{J} \left(\frac{k_2V^2}{Lg} - 1\right)\beta = -\frac{AMHk_1HV}{LJ} \left(\dot{T} + \frac{V}{A}T\right) \quad (3.14)$$

Da cui si ottiene la funzione di trasferimento:

$$G'_g(s) = \frac{B(s)}{T(s)} = \frac{\frac{AMk_1HV}{LJ} \left(s + \frac{V}{A}\right)}{\left(1 + \frac{AMHk_gV}{LJ}\right)s^2 + \left(\frac{AMHk_2V}{LJ} + \frac{MHk_gV^2}{LJ}\right)s + \frac{MgH}{J} \left(\frac{k_2V^2}{Lg} - 1\right)} \quad (3.15)$$

### 3.6 Applicazioni

Una volta ricavato il modello SISO, può essere interessante valutare come la coppia applicata dal ciclista al manubrio influenzi sia l'angolo di sterzo della bicicletta, sia la direzione stessa che assumerà il veicolo sul piano stradale. Per il primo caso, ricorrendo sempre al sistema (3.7) e sostituendo nella prima equazione il valore di  $\beta$  ricavato dalla seconda, si perviene alla seguente relazione:

$$\frac{1}{k_2}\ddot{\delta} + \frac{VAMH}{LJ}\dot{\delta} + \left(\frac{V^2MH}{LJ} - \frac{MgH}{Jk_2}\right)\delta = \frac{k_1}{k_2}\ddot{T} - \frac{k_1}{k_2}\frac{MgH}{J}T \quad (3.16)$$

dalla quale si ricava la funzione di trasferimento che lega  $\delta$  alla coppia  $T$  applicata al manubrio:

$$G_{\delta T}(s) = \frac{\Delta(s)}{T(s)} = k_1 \cdot \frac{s^2 - \frac{MgH}{J}}{s^2 + \frac{k_2VAMH}{LJ}s + \frac{MH}{J} \left(\frac{k_2V^2}{L} - g\right)} \quad (3.17)$$

Inoltre, dalla cinematica della bicicletta, risultano note anche le seguenti relazioni:

$$\frac{dy}{dt} = V \sin \psi \simeq V\psi \quad (3.18)$$

$$\frac{d\psi}{dt} \simeq \frac{1}{L} \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{L}(V\delta + V\psi - V\psi) = \frac{V}{L}\delta \quad (3.19)$$

Pertanto la funzione di trasferimento che mette in relazione l'angolo di sterzo  $\delta$  e la deviazione  $y$  assunta dalla bici risulta:

$$G_{y\delta}(s) = \frac{V^2}{Ls^2} \quad (3.20)$$

Moltiplicando ora  $G_{\delta T}$  e  $G_{y\delta}$  si ottiene la funzione di trasferimento tra la coppia  $T$  e la deviazione  $y$ :

$$G_{yT}(s) = G_{y\delta}(s) \cdot G_{\delta T}(s) = \frac{k_1V^2}{L} \cdot \frac{s^2 - \frac{MgH}{J}}{s^2 \left[ s^2 + \frac{k_2VAMH}{LJ}s + \frac{MH}{J} \left(\frac{k_2V^2}{L} - g\right) \right]} \quad (3.21)$$

Osserviamo che la condizione necessaria affinché il polinomio a denominatore:

$$s^2 + \frac{k_2VAMH}{LJ}s + \frac{MH}{J} \left(\frac{k_2V^2}{L} - g\right) \quad (3.22)$$

sia di Hurwitz è analoga alla condizione (3.10) e risulta pertanto sempre verificata con i valori scelti per i parametri e per velocità  $V$  superiori ai  $3 \text{ m/s}$ ; ciononostante  $G_{yT}(s)$  non è stabile, a causa della presenza del fattore  $s^2$  a denominatore. Tale fattore viene ereditato dalla funzione di trasferimento  $G_{y\delta}(s)$ , la quale dipende da parametri legati al primo modello descrittivo della bicicletta, nel quale si faceva uso di un sistema di riferimento non solidale con il mezzo; in particolar modo, essa considera l'angolo  $\psi$ , ovvero l'angolo compreso tra il telaio della bicicletta e la retta di riferimento usata.

### 3.6.1 Modello di stato in forma canonica di controllo

Ancora una volta dalla funzione di trasferimento  $G_{yT}(s)$  è possibile ricavare un modello di stato in forma canonica di controllo. Va prima osservato che, per velocità  $V$  superiori ai  $3 \text{ m/s}$  il polinomio a denominatore sarà stabile e sarà dunque possibile soltanto la cancellazione zero-polo di uno zero e di un polo stabili e vale pertanto la stessa considerazione esposta per  $G'(s)$ ; ciò non accade se  $V$  risulta inferiore ai  $3 \text{ m/s}$ , in quanto, in tal caso, potrebbe aver luogo la cancellazione zero-polo di fattori instabili che non potrebbe essere trascurata.

Si ricava il seguente modello di stato:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \\ \dot{\alpha}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{MgH}{J} \left( \frac{k_2 V^2}{Lg} - 1 \right) & -\frac{k_2 V A M H}{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} T \\ y = \begin{bmatrix} -\frac{k_1 V^2 M g H}{LJ} & 0 & \frac{k_1 V^2}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (3.23)$$

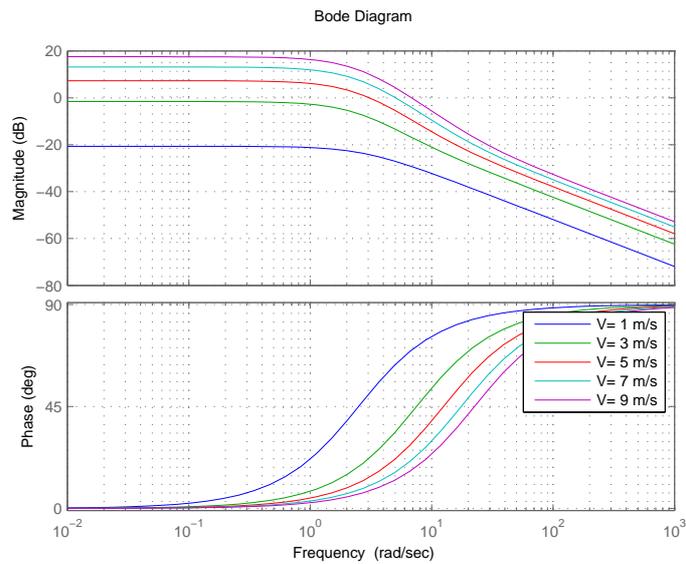
## Capitolo 4

# Diagrammi di Bode

Vengono ora riportati i diagrammi di Bode per le funzioni di trasferimento ricavate in precedenza, in funzione di alcuni valori della velocità  $V$ :

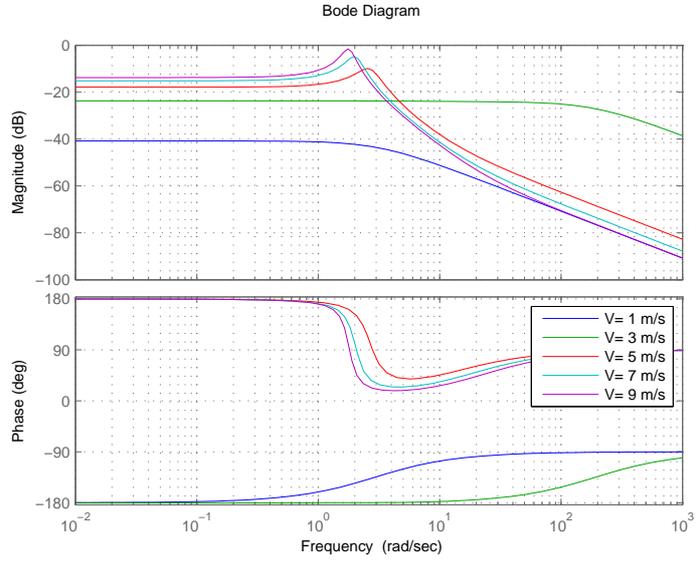
1.

$$G(s) = -\frac{V}{L}(As + V)MH = -\frac{VAMH}{LJ} \frac{s + \frac{V}{A}}{s^2 - \frac{MgH}{J}}$$



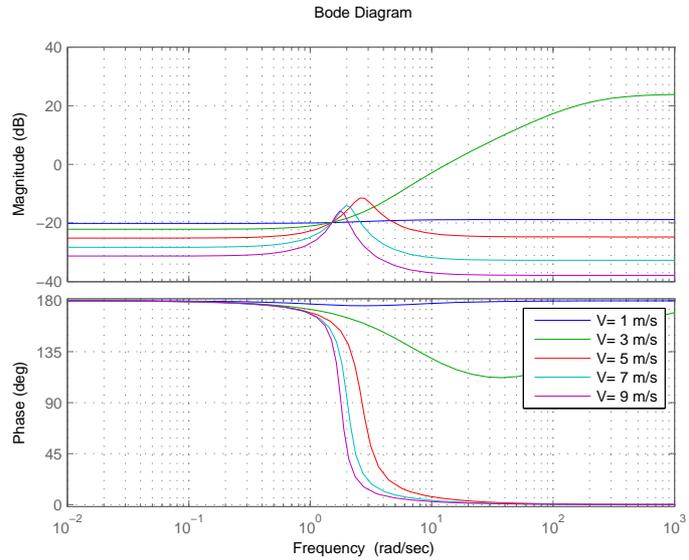
2.

$$G'(s) = \frac{B(s)}{T(s)} = -\frac{k_1 V A M H}{L J} \cdot \frac{s + \frac{V}{A}}{s^2 + \frac{V A M H}{L J} k_2 s + \frac{M g H}{J} \left( \frac{k_2 V^2}{L g} - 1 \right)}$$



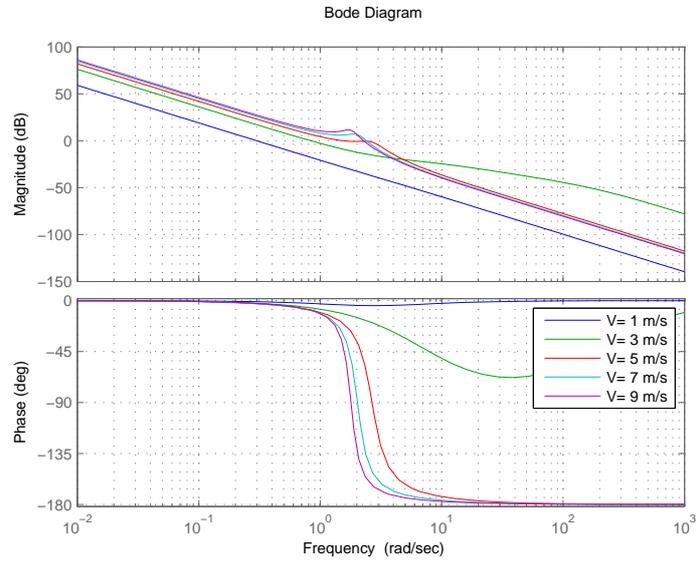
3.

$$G_{\delta T}(s) = \frac{\delta(s)}{T(s)} = k_1 \frac{s^2 - \frac{M g H}{J}}{s^2 + \frac{k_2 V A M H}{L J} s + \frac{M H}{J} \left( \frac{k_2 V^2}{L} - g \right)}$$



4.

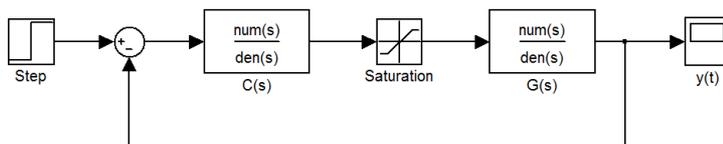
$$G_{yT} = G_{y\delta} \cdot G_{\delta T} = \frac{k_1 V^2}{L} \cdot \frac{s^2 - \frac{MgH}{J}}{s^2 \left[ s^2 + \frac{k_2 V A M H}{L J} s + \frac{M H}{J} \left( \frac{k_2 V^2}{L} - g \right) \right]}$$



## Capitolo 5

# Progetto dei compensatori

In questa sezione ci si pone l'obiettivo di progettare dei controllori dinamici che migliorino le prestazioni dei vari sistemi descritti in precedenza e, in particolare, che consentano ad essi di inseguire un ingresso a gradino con errore di regime permanente all'incirca nullo e con buone prestazioni in termini di *overshoots*, *rise time* e *settling time*. In particolare, si farà uso della retroazione unitaria dall'uscita, la quale può essere presentata per mezzo del seguente schema a blocchi:



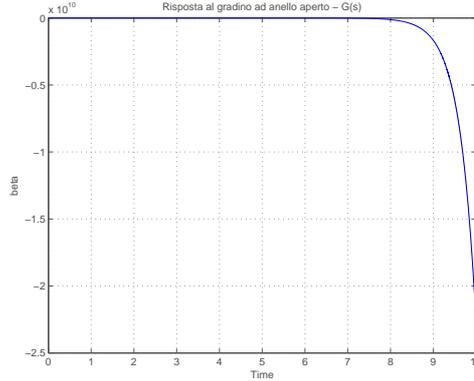
**Figura 5.1:** Schema a blocchi del sistema con retroazione negativa dall'uscita

I parametri del saturatore possono subire variazioni a seconda del controllore utilizzato.

### 5.1 Compensatore per $G(s)$

Come già osservato in precedenza,  $G(s)$  rappresenta un sistema instabile, dal momento che presenta il polo a parte reale positiva  $\sqrt{\frac{MgH}{J}}$ , e necessita pertanto di un controllore che possa stabilizzare il sistema ad anello chiuso. In questo caso il controllore sostituisce il ruolo del ciclista, il quale solitamente, in seguito a sollecitazioni esterne che modifichino l'inclinazione laterale della bicicletta è in grado di rispondere impostando un angolo di sterzo della ruota anteriore che consenta di regolare l'inclinazione del mezzo. Nella vita di tutti i giorni però, il ciclista si aiuta anche spostando il peso del proprio corpo ma in questa sede bicicletta e ciclista vengono considerati come un unico corpo rigido e viene pertanto trascurata tale ulteriore possibilità, supponendo quindi che l'azione umana influenzi soltanto l'angolo di sterzo della ruota anteriore.

Per completezza viene qui riportata la risposta al gradino del sistema descritto da  $G(s)$ , la quale, come prevedibile, risulta divergente a causa dell'instabilità di  $G(s)$ :



**Figura 5.2:** Risposta al gradino ad anello aperto

### 5.1.1 Compensatore costante

Come prima opzione si può pensare di utilizzare un controllore con guadagno costante in modo da stabilizzare il sistema; per determinare il valore del guadagno  $K$  necessario, si ricorre alla funzione di trasferimento ad anello chiuso  $W(s)$ :

$$W(s) = -K \cdot \frac{VAMH}{JL} \cdot \frac{s + \frac{V}{A}}{s^2 - K \frac{VAMH}{JL} s - K \frac{V^2MH}{JL} - \frac{MgH}{J}} \quad (5.1)$$

Applicando il criterio di Cartesio per valutare il segno dei poli di  $W(s)$ , si può notare che l'unico modo per avere poli a parte reale negativa sarà quello di usare un guadagno  $K$  negativo che soddisfi anche la seguente condizione:

$$-\frac{KV^2MH}{JL} - \frac{MgH}{J} > 0 \quad (5.2)$$

dalla quale si ricava:

$$K < -\frac{gL}{V^2} \simeq -0.43 \quad (5.3)$$

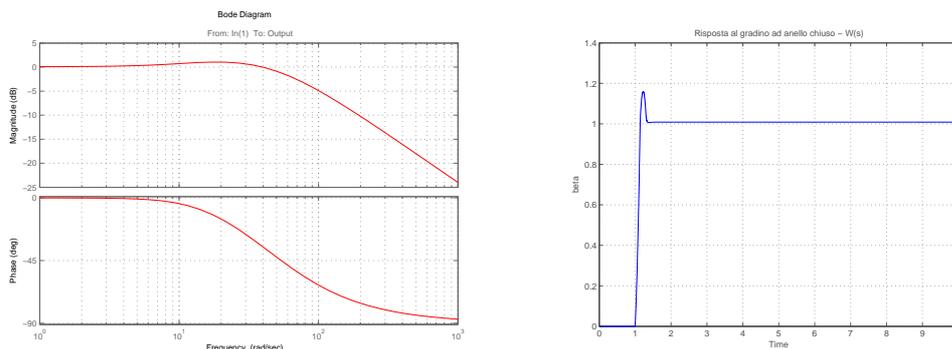
Di conseguenza, possiamo usare un controllore con guadagno costante  $C(s) = K = -50$  con il quale è possibile ottenere i seguenti valori per il margine di fase e la pulsazione di attraversamento ad anello aperto:

$$\begin{aligned} PM &= 79^\circ \\ \omega_A &= 64 \text{ rad/sec} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Per mezzo di tale compensatore, il sistema ad anello chiuso, descritto da  $W(s) = -\frac{50G(s)}{1-50G(s)}$ , presenta il diagramma di Bode e la risposta al gradino di Figura 5.3.

Da quest'ultima si nota un *overshoot* accettabile (minore del 20%), un *rise time* ed un *settling time* decisamente inferiori al secondo; il problema principale causato dall'adozione di questo tipo di compensatore è dato dall'errore a regime permanente che non è nullo, in quanto l'uscita si assesta su di un valore poco al di sopra di 1 (all'incirca 1.01) e ciò avviene a causa dell'assenza di un integratore nel compensatore usato.

Va infine sottolineato che per questa simulazione è stato usato un saturatore con valore massimo e minimo impostati rispettivamente a 3 e -3; usando dei valori meno restrittivi è possibile migliorare ulteriormente le prestazioni di questo sistema, grazie soprattutto ad una riduzione dell'*overshoot*.



(a) Diagramma di Bode

(b) Risposta al gradino

**Figura 5.3:** Sistema ad anello chiuso descritto da  $W(s)$

### 5.1.2 Compensatore PI

Ricorrendo invece ad un compensatore di tipo PI si ha la possibilità di annullare l'errore a regime permanente a discapito però di *overshoot* e *settling time* maggiori.

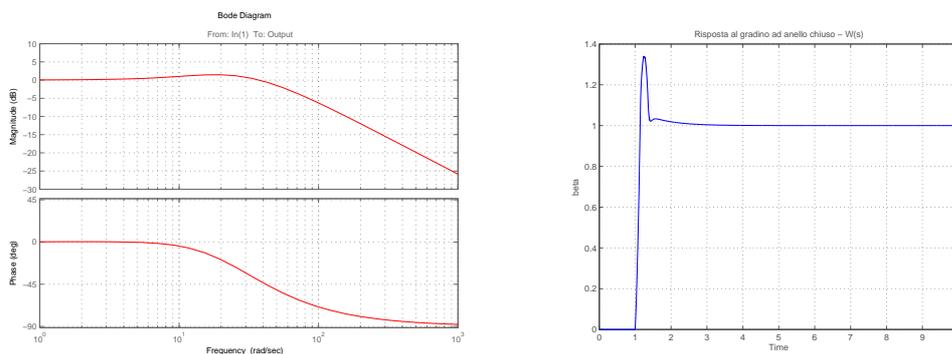
Scegliamo, in particolare, il seguente controllore  $C(s)$ :

$$C(s) = -60 \cdot \frac{1 + 0.67s}{s} \quad (5.5)$$

il quale garantisce i seguenti valori per il margine di fase e pulsazione di attraversamento ad anello aperto:

$$\begin{aligned} PM &= 74.9^\circ \\ \omega_A &= 52.2 \text{ rad/sec} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Il compensatore scelto determina un sistema ad anello chiuso stabile, descritto da  $W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$ , il quale presenta il diagramma di Bode e la risposta al gradino seguenti:



(a) Diagramma di Bode

(b) Risposta al gradino

**Figura 5.4:** Sistema ad anello chiuso descritto da  $W(s)$

L'uso di tale compensatore consente al sistema ad anello chiuso di inseguire il gradino unitario con errore di regime permanente nullo, peggiorando però le prestazioni in termini di *overshoot* (che qui diventa pari al 34 %) e di *settling time* (comunque inferiore al secondo).

Anche in questo caso i valori massimo e minimo del saturatore sono stati impostati a 3 e -3; se, ad esempio, si imponessero i valori 5 e -5 si otterrebbe un *overshoot* pari al 20 % ed un *settling time* di 0.3 s.

### 5.1.3 Compensatore ottimale

Viene qui presentato un ulteriore compensatore che consente di diminuire ulteriormente l'*overshoot*, riducendolo al 12 %, e anche il *settling time*, portandolo a 0.25 s.

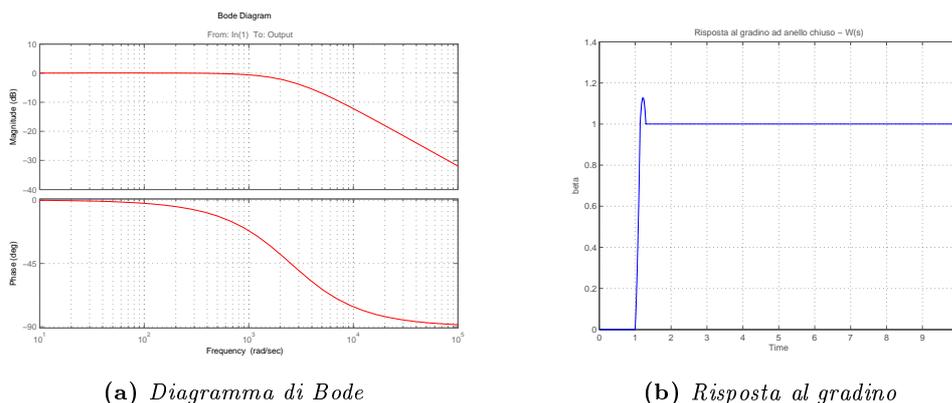
Il compensatore qui descritto è dato da:

$$C(s) = -1 \cdot \frac{1 + 2000s}{s} \quad (5.7)$$

e consente di ottenere un margine di fase e una pulsazione di attraversamento ad anello aperto pari a:

$$\begin{aligned} PM &= 89.7^\circ \\ \omega_A &= 2.53 \cdot 10^3 \text{ rad/sec} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Seguono ora il diagramma di Bode e la risposta al gradino ad anello chiuso:



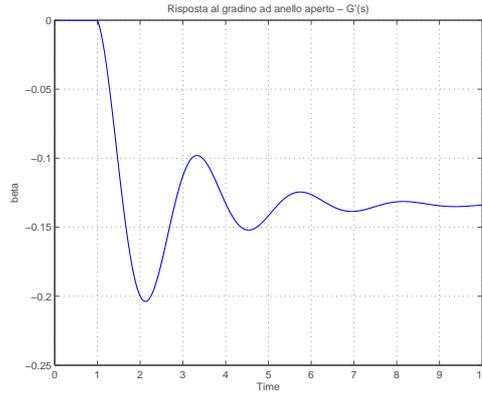
**Figura 5.5:** Sistema ad anello chiuso descritto da  $W(s)$

Anche in questo caso il saturatore è stato impostato con valori massimo e minimo pari a 3 e -3 ma, ancora una volta, portando tali valori a 5 e -5 si migliorano ulteriormente le prestazioni del sistema ad anello chiuso, portando l'*overshoot* al 2% ed il *settling time* a 0.1 s.

## 5.2 Compensatore per $G'(s)$ stabile

Considerando valori di  $V$  per i quali  $G'(s)$  risulti stabile, l'uso del compensatore diventa utile per migliorare le prestazioni del sistema quando viene sollecitato da un ingresso a gradino: in particolare sarà possibile ridurre i tempi di risposta, eventuali sovraelongazioni e limitare l'errore a regime permanente.

Di seguito viene riportata la risposta al gradino ad anello aperto, ovvero del sistema descritto dalla sola  $G'(s)$ , dalla quale si osserva la necessità di adottare un controllore con guadagno negativo ed in modulo sufficientemente elevato in modo da portare il valore dell'uscita a regime permanente vicino ad 1.



**Figura 5.6:** Risposta al gradino ad anello aperto di  $G'(s)$

### 5.2.1 Compensatore costante

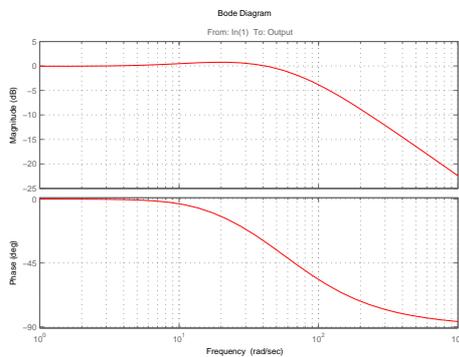
In un primo momento adottiamo dunque un compensatore costante:

$$C'(s) = -1000 \quad (5.9)$$

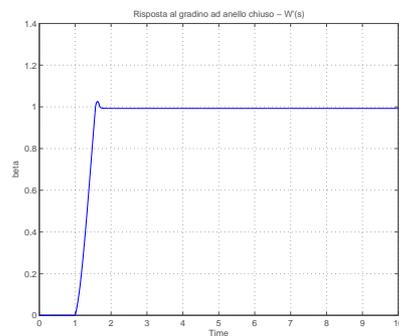
con il quale si ottengono i seguenti valori per il margine di fase e per la pulsazione di attraversamento del sistema ad anello aperto, ovvero di  $C'(s)G'(s)$ :

$$\begin{aligned} PM &= 81.6^\circ \\ \omega_A &= 76.9 \text{ rad/sec} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Eseguendo la simulazione con un saturatore i cui valori massimo e minimo sono stati impostati rispettivamente a 8 e -8, si ottiene una risposta al gradino del sistema ad anello chiuso che presenta un leggero *overshoot* (pari circa al 3%), un *rise time* ed un *settling time* di circa 0.5 s. Tale compensatore non consente però di ottenere un errore di regime permanente nullo, in quanto l'uscita si assesta su un valore a regime di 0.99: risulta dunque necessario introdurre un integratore nel controllore in modo da annullare l'errore a regime.



(a) Diagramma di Bode



(b) Risposta al gradino

**Figura 5.7:** Sistema ad anello chiuso descritto da  $W'(s)$

### 5.2.2 Compensatore PI

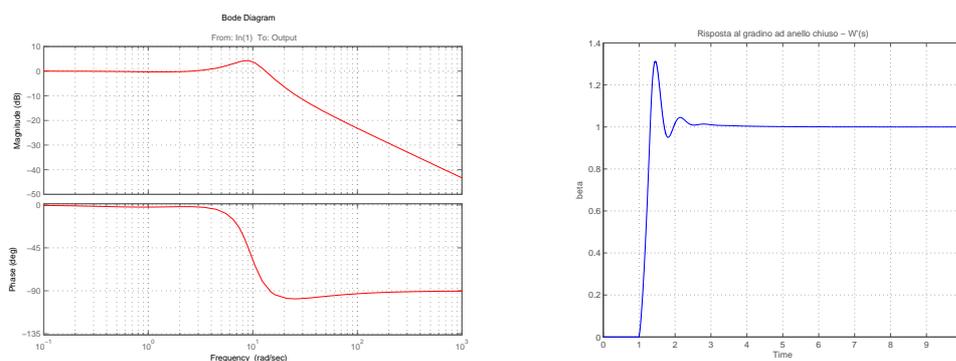
Ricorrendo ad un compensatore di tipo PI si riesce ad annullare l'errore di regime permanente, peggiorando però le prestazioni in termini di *overshoot*, *rise time* e *settling time*. Il compensatore scelto in questo caso è dato da:

$$C'(s) = -90 \cdot \frac{s+1}{s} \quad (5.11)$$

Purtroppo però, diminuisce notevolmente anche il margine di fase, il quale scende al di sotto dei  $45^\circ$ , non garantendo così delle buone prestazioni per i transitori del sistema ad anello chiuso:

$$\begin{aligned} PM &= 42.2^\circ \\ \omega_A &= 11 \text{ rad/sec} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Inoltre, mantenendo inalterati i valori caratteristici del saturatore (a 8 e -8) si ottiene un *settling time* piuttosto elevato, ovvero intorno ai 3 s: per diminuire questo tempo sarà necessario reimpostare i valori massimo e minimo del saturatore rispettivamente a 18 e -18, così da ottenere un *settling time* di circa 0.6 s.



(a) Diagramma di Bode

(b) Risposta al gradino con saturatore impostato a (18,-18)

**Figura 5.8:** Sistema ad anello chiuso descritto da  $W'(s)$

Come si osserva dalla risposta al gradino, tale compensatore garantisce comunque prestazioni accettabili in termini di *overshoot* (intorno al 30 %) e *rise time* (pari a circa 0.3 s).

### 5.2.3 Compensatore PI con prestazioni migliori

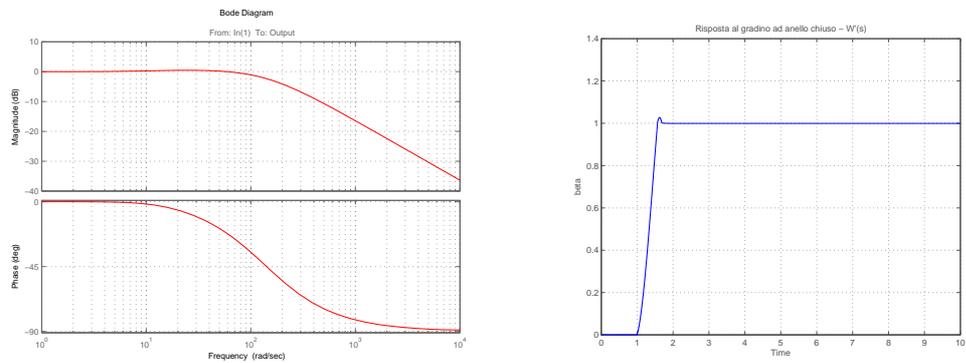
Il compensatore qui usato va a migliorare tutte le proprietà che risultavano scadenti utilizzando il controllore della sezione precedente, ovvero margine di fase e *settling time* e non andando a peggiorare i restanti requisiti. In questo caso il compensatore usato è dato da:

$$C'(s) = -20 \cdot \frac{1+100s}{s} \quad (5.13)$$

In particolare, si rilevano i seguenti valori per il margine di fase e la pulsazione di attraversamento ad anello aperto:

$$\begin{aligned} PM &= 85.7^\circ \\ \omega_A &= 152 \text{ rad/sec} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Impostando ancora una volta a 8 e -8 i valori caratteristici del saturatore, si ottiene una risposta al gradino caratterizzata da un *overshoot* del 3 %, un *rise time* ed un *settling time* di circa 0.5 s. Andando a ridurre in modulo i valori massimo e minimo del saturatore, si va a causare una degenerazione della risposta al sistema, il quale presenterà un notevole errore di regime permanente ed un *settling time* decisamente più elevato.



(a) Diagramma di Bode

(b) Risposta al gradino con saturatore impostato a (8,-8)

Figura 5.9: Sistema ad anello chiuso descritto da  $W'(s)$

### 5.3 Compensatore per $G'(s)$ instabile

Per quanto osservato nelle sezioni precedenti,  $G'(s)$  non risulta stabile per velocità inferiori ai 3 m/s ed in tal caso l'intervento del ciclista diventa necessario; ci poniamo quindi l'obiettivo di progettare un controllore in grado di stabilizzare il sistema ad anello chiuso imponendo  $V = 1$  m/s.

Dapprima viene riportato il grafico della risposta al gradino del sistema descritto da  $G'(s)$  con  $V = 1$  m/s; va comunque sottolineato che il carattere divergente di tale risposta era noto a priori data l'instabilità della funzione di trasferimento:

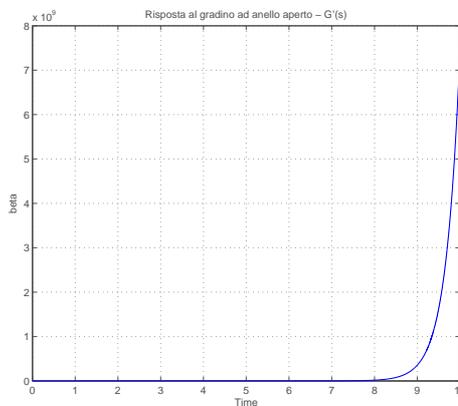


Figura 5.10: Risposta al gradino ad anello aperto di  $G'(s)$

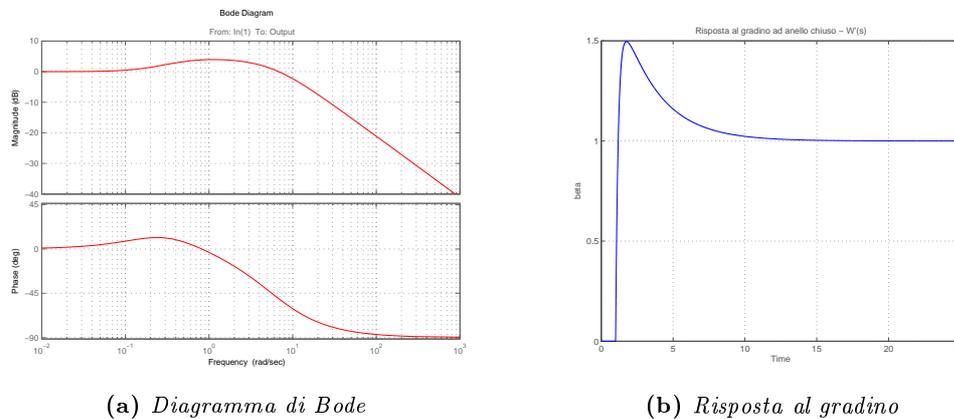
Il controllore che qui viene presentato è ancora una volta di tipo PI ed è dato da:

$$C'(s) = \frac{305s + 70}{s} \quad (5.15)$$

e consente di ottenere i seguenti valori per il sistema ad anello aperto  $C(s)G(s)$ :

$$\begin{aligned} PM &= 68.7^\circ \\ \omega_A &= 8.23 \text{ rad/sec} \end{aligned} \quad (5.16)$$

In questo caso, nello schema a blocchi del sistema ad anello chiuso, necessario per poter valutare la risposta al gradino del sistema, viene omesso il saturatore, in quanto la sua presenza andrebbe ad alterare completamente l'andamento dell'uscita del sistema, rendendola divergente. Omettendo il saturatore l'ingresso  $u(t) = T(t)$  raggiunge valori in modulo piuttosto elevati, compresi tra -165 e 300, che potrebbero non essere ottenibili nella realtà.

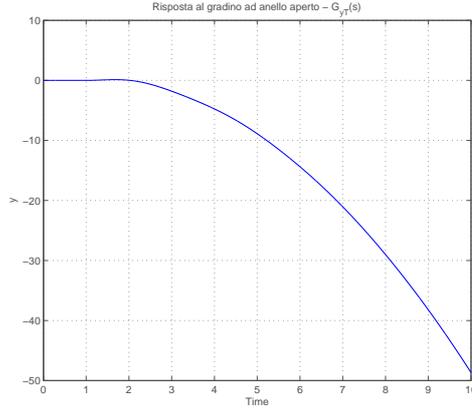


**Figura 5.11:** Sistema ad anello chiuso descritto da  $W'(s)$  senza saturatore

Analizzando la risposta al gradino si osserva un *overshoot* piuttosto elevato, pari al 50 %, un *settling time* che supera i 6 s ed un *rise time* inferiore ai 0.2 s. Questo dimostra come l'instabilità del sistema ad anello aperto renda particolarmente complicato il progetto di un compensatore che garantisca delle buone prestazioni per il sistema in catena chiusa. Si vedrà comunque in seguito che sfruttando la retroazione dallo stato sarà possibile ottenere risultati migliori, dimostrando così che in alcuni casi risulta più conveniente ricorrere al controllo statico rispetto a quello dinamico.

## 5.4 Compensatore per $G_{yT}(s)$

Di seguito viene inserito, per completezza in quanto a priori è nota la sua divergenza, il grafico della risposta al gradino del sistema descritto da  $G_{yT}(s)$  in catena aperta:



**Figura 5.12:** Risposta al gradino ad anello aperto di  $G_{yT}(s)$

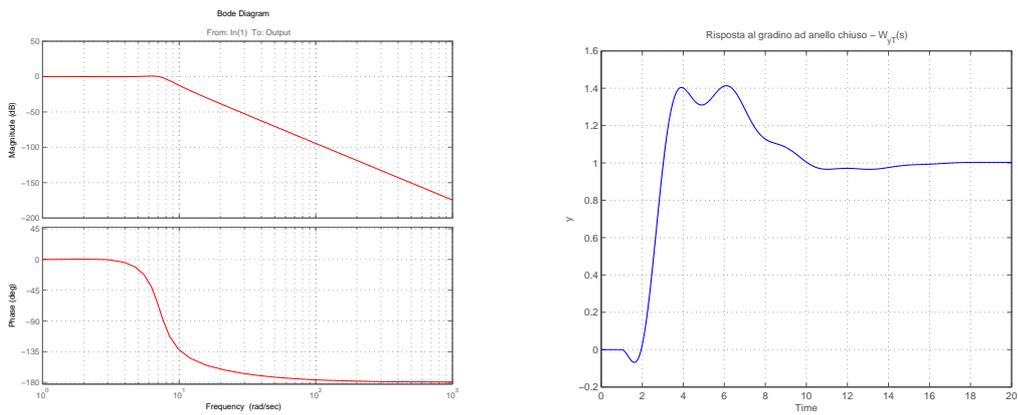
Dal momento che, ancora una volta  $G_{yT}(s)$  descrive un sistema instabile, si ha nuovamente la necessità di utilizzare un compensatore per stabilizzare il sistema ad anello chiuso. In questo caso viene adottato il seguente controllore:

$$C_{yT}(s) = -0.15 \cdot \frac{1 + 3s}{1 + 0.56s} \quad (5.17)$$

il quale consente di rendere stabile il sistema in catena chiusa e di ottenere i seguenti valori per il margine di fase e la pulsazione di attraversamento per la funzione di trasferimento  $C_{yT}(s)G(s)$ :

$$\begin{aligned} PM &= 36.8^\circ \\ \omega_A &= 0.67 \text{ rad/sec} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Il margine di fase non molto elevato non dà garanzie sulla bontà dei transitori del sistema ad anello chiuso ed infatti il grafico seguente, raffigurante la risposta al gradino del sistema in catena chiusa, mette in evidenza le sue prestazioni abbastanza scadenti:



(a) Diagramma di Bode

(b) Risposta al gradino con saturatore impostato a (3,-3)

**Figura 5.13:** Sistema ad anello chiuso descritto da  $W_{yT}(s)$

La risposta al gradino mostra un lieve *undershoot* iniziale, che non va comunque a compromettere le prestazioni in modo rilevante, in quanto la durata di tale sottoe-

longazione è pari a circa 1 s; successivamente però, il grafico è caratterizzato da un *overshoot* composto da due picchi che raggiungono il 40% e che vanno a danneggiare notevolmente le prestazioni del sistema. Infine, per quanto riguarda il *rise time*, esso risulta pari a circa 2 s, mentre il *settling time* appare piuttosto elevato, in quanto raggiunge i 7.5 s.

Si potrebbe essere tentati di addossare la colpa alla presenza del saturatore o ai suoi valori caratteristici troppo bassi in modulo: in realtà, i test compiuti su di uno schema con saturatore avente valori massimo e minimo in modulo più elevati, o addirittura su schemi privi di saturatore mostrano prestazioni analoghe a quelle appena descritte, a dimostrazione dell'irrelevanza del saturatore sul funzionamento globale del sistema in questione.

## Capitolo 6

# Retroazione dallo stato

In questo capitolo verranno presi in considerazione i modelli di stato ricavati a partire dalle funzioni di trasferimento dei sistemi SISO descritti nel capitolo precedente; mediante tali modelli sarà possibile realizzare una retroazione dallo stato che consentirà, se necessario, di stabilizzare i vari sistemi o, in alternativa, di migliorarne le prestazioni in risposta ad un ingresso a gradino unitario.

### 6.1 Retroazione dallo stato sul modello di stato di dimensione quattro

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V}{L} & -\frac{V}{L} & 0 & 0 \\ \frac{V}{L} & -\frac{V}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{A}{L} & \frac{B}{L} & \frac{MgH}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta \\ \\ \beta = \begin{bmatrix} -\frac{MHA}{JL} & -\frac{MHB}{JL} & -\frac{M^2H^2g}{J^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Tale modello descrive il comportamento della bicicletta considerando l'angolo di sterzo della ruota anteriore come ingresso e l'inclinazione laterale del mezzo rispetto alla verticale come uscita; per ricavare questa descrizione è stato però usato un sistema di riferimento non solidale con la bicicletta e questo ha dato origine ad un modello di stato di dimensione quattro.

Mediante opportuni calcoli è possibile verificare la raggiungibilità del sistema e ciò garantisce la completa allocabilità degli autovalori della matrice di stato del sistema retroazionato. Utilizzando ora come matrice di retroazione la matrice  $K$ :

$$K = [ a \quad b \quad c \quad d ] = [ -0.3 \quad -0.0128 \quad -2.1343 \quad -0.2876 ] \quad (6.2)$$

è possibile assegnare alla matrice di stato  $F+GK$  del sistema retroazionato il polinomio caratteristico:

$$\Delta_{F+GK}(s) = (s + 0.5)^2(s + 0.3)(s + 0.2) \quad (6.3)$$

Il sistema retroazionato può essere rappresentato mediante il seguente schema a blocchi:

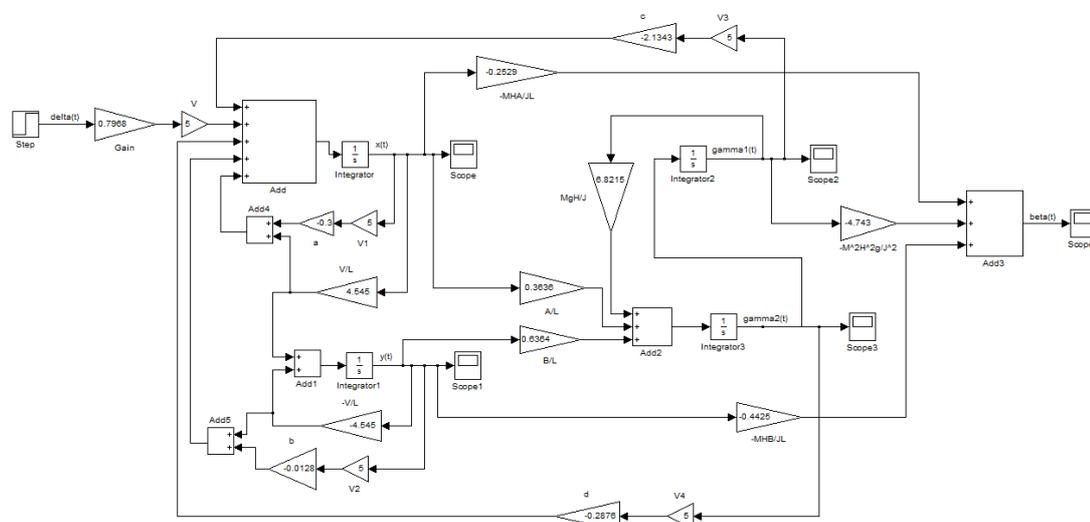


Figura 6.1: Modello di stato con retroazione dallo stato

Questo sistema presenta inoltre la seguente risposta al gradino:

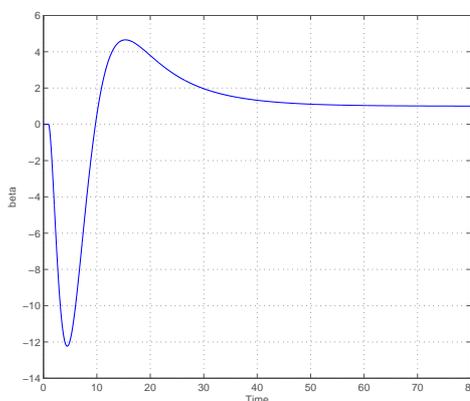


Figura 6.2: Risposta al gradino del sistema retroazionato

Purtroppo questo sistema mostra prestazioni non buone se sollecitato da un gradino unitario, in quanto in un primo momento presenta un *undershoot* eccessivo e successivamente anche un *overshoot* troppo elevato; inoltre, il *rise time* supera i 9 s ed il *settling time* raggiunge i 50 s.

Questo dimostra come il ricorso alla retroazione dallo stato permetta, da un lato di stabilizzare il sistema in modo semplice, ma dall'altro, renda più complicata la ricerca degli autovalori che garantiscano buone prestazioni per quanto riguarda i transitori, specialmente se si lavora, come in questo caso, su sistemi di dimensione maggiore di due, nei quali si hanno a disposizione più gradi di libertà per la scelta degli autovalori.

## 6.2 Retroazione dallo stato sul modello di stato ottenuto da $G(s)$

Passando all'utilizzo di un sistema di riferimento solidale con la bicicletta si è potuta ottenere la funzione di trasferimento  $G(s)$  senza dover ricorrere a cancellazioni zero-polo, dalla quale è stato poi ricavato un modello di stato in forma canonica di controllo di dimensione due, che assume ancora una volta come ingresso l'angolo di sterzo della ruota anteriore e come uscita l'inclinazione laterale della bicicletta rispetto alla verticale:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{MgH}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta \\ \beta = \begin{bmatrix} -\frac{V^2MH}{LJ} & -\frac{VAMH}{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6.4)$$

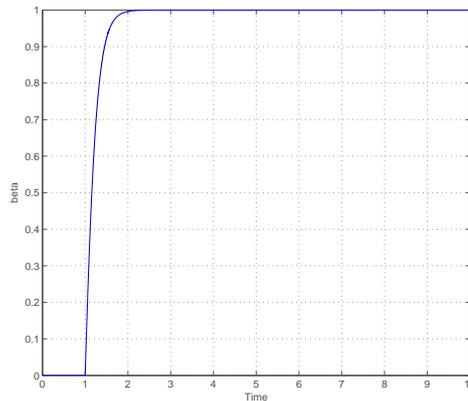
Trattandosi di un modello di stato in forma canonica di controllo, il sistema risulta raggiungibile ed è pertanto possibile la completa allocazione degli autovalori. Usando quindi la seguente matrice di retroazione  $K$ :

$$K = [ a \quad b ] = [ -55.8215 \quad -14 ] \quad (6.5)$$

si va ad attribuire alla matrice di stato del sistema retroazionato il polinomio caratteristico:

$$\Delta_{F+GK}(s) = (s + 7)^2 \quad (6.6)$$

in modo da rendere il sistema stabile ed in grado di rispondere ad un ingresso a gradino secondo quanto illustrato dal seguente grafico:



**Figura 6.3:** Risposta al gradino del sistema retroazionato

Questo sistema mostra prestazioni decisamente migliori rispetto al precedente: l'*overshoot* è assente, il *rise time*, così come il *settling time*, è pari a circa 0.5 s.

A differenza del modello precedente, l'utilizzo di un sistema di dimensione due va a diminuire i gradi di libertà sulla scelta degli autovalori da allocare, consentendo così di determinare in modo più semplice un polinomio caratteristico che garantisca buone prestazioni per la risposta al gradino del sistema retroazionato.

Di seguito si riporta lo schema a blocchi dell'intero modello di stato retroazionato:

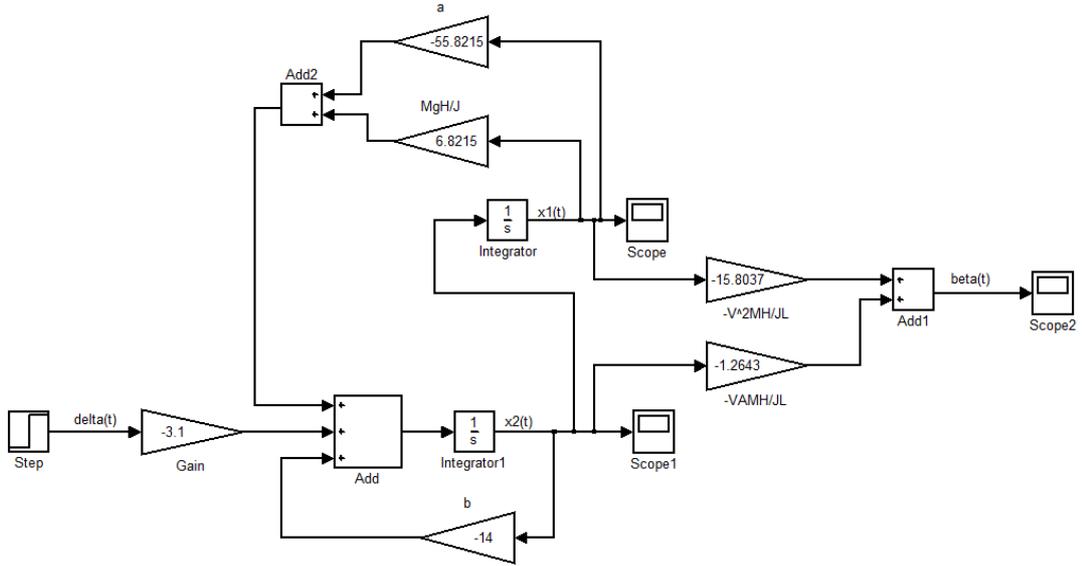


Figura 6.4: Schema a blocchi del modello di stato retroazionato

Subito dopo l'ingresso a gradino è stato inserito un guadagno che ha permesso di annullare l'errore a regime permanente, portando a 1 il valore a regime dell'uscita; si tratta in realtà di uno dei limiti della retroazione dallo stato, in quanto l'allocation degli autovalori non permette di stabilire a priori il valore della costante di Bode che determina poi il valore a regime dell'uscita: da qui la necessità di introdurre un guadagno appropriato a seguito dell'ingresso.

### 6.3 Retroazione dallo stato sul modello di stato ottenuto da $G'(s)$

#### 6.3.1 Modello di stato ottenuto da $G'(s)$ stabile

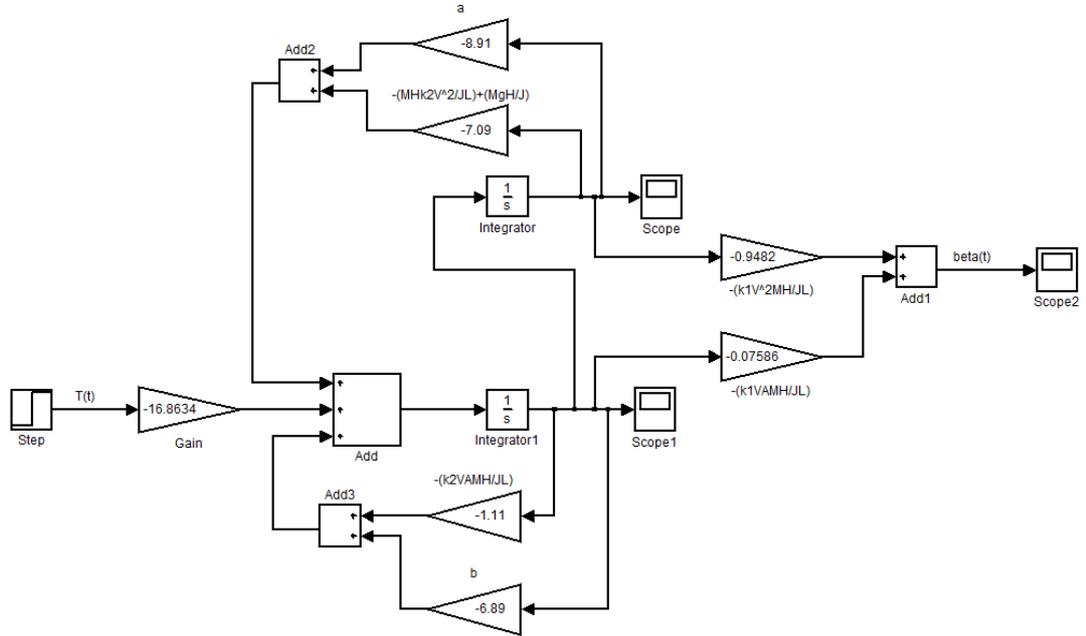
Assumendo  $V = 5 \text{ m/s}$   $G'(s)$  risulta stabile e da essa è possibile ricavare senza problemi un modello di stato in forma canonica di controllo, come è stato fatto in precedenza, ottenendo così il seguente modello, che considera come ingresso la coppia applicata dal ciclista sul manubrio e come uscita ancora l'inclinazione laterale della bicicletta rispetto alla verticale:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{MgH}{J} \left( \frac{k_2 V^2}{Lg} - 1 \right) & -\frac{k_2 V AMH}{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} T \\ \beta = \begin{bmatrix} -\frac{k_1 V^2 MH}{LJ} & -\frac{k_1 V AMH}{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6.7)$$

Essendo il modello di stato ancora una volta in forma canonica di controllo, si ha la completa allocabilità degli autovalori; pertanto, ricorrendo alla seguente matrice  $K'$ :

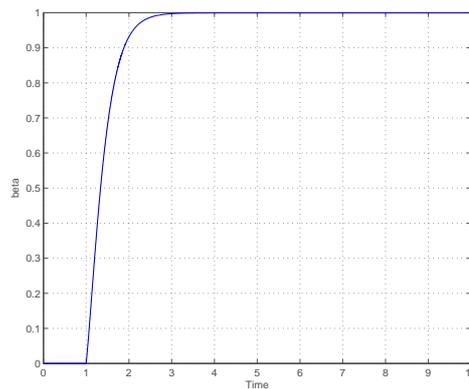
$$K' = [ a \quad b ] = [ -8.91 \quad -6.89 ] \quad (6.8)$$

per imporre alla matrice di stato del sistema retroazionato il polinomio caratteristico  $\Delta_{F+GK'}(s) = (s + 4)^2$  si ottiene il sistema rappresentato mediante il seguente schema a blocchi:



**Figura 6.5:** Schema a blocchi del modello di stato retroazionato

Ancora una volta si è presentato il limite della retroazione dallo stato a cui si è fatto riferimento in precedenza, dal momento che si è reso necessario l'inserimento di un guadagno appropriato dopo l'ingresso a gradino per far sì che l'uscita presenti un errore di regime permanente nullo, come viene mostrato dal seguente grafico:



**Figura 6.6:** Risposta al gradino del sistema retroazionato

Tale risposta non presenta sovraelongazioni e mostra *settling time* e *rise time* praticamente uguali e pari a circa 0.9 s.

### 6.3.2 Modello di stato ottenuto da $G'(s)$ instabile

Imponendo ora  $V = 1 \text{ m/s}$  si ottiene una  $G'(s)$  instabile in quanto non viene rispettata la condizione (3.9); a partire da tale funzione di trasferimento si ricava comunque il modello di stato prima illustrato, sul quale è possibile realizzare una retroazione dallo stato per stabilizzare il sistema e migliorare dunque le sue prestazioni.

Sfruttando la matrice di retroazione  $K'$ :

$$K' = [ a \quad b ] = [ -16.0722 \quad -8.0289 ] \quad (6.9)$$

per assegnare alla matrice di stato del sistema retroazionato lo stesso polinomio caratteristico del caso precedente,  $\Delta_{F+GK'}(s) = (s + 4)^2$ , si ottiene il modello descritto dal seguente schema a blocchi:

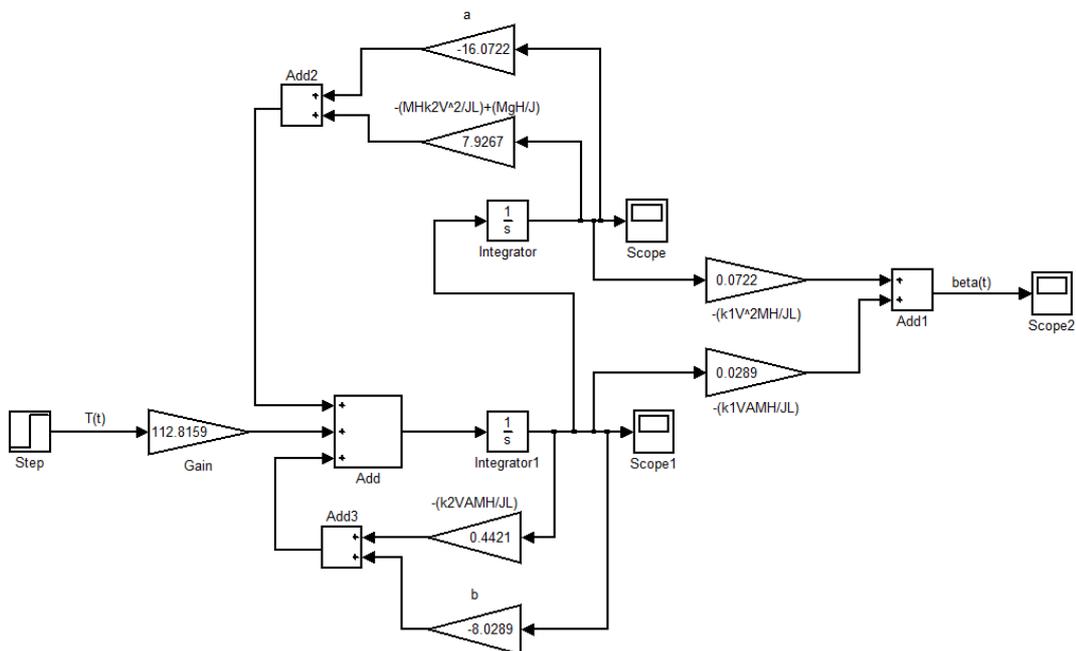


Figura 6.7: Schema a blocchi del modello di stato retroazionato

Tale sistema presenta una risposta al gradino priva di *undershoot* con *rise time* e *settling time* pari a circa 1.4 s, (leggermente maggiori rispetto al sistema stabile, ma più che accettabili come valori), come evidenzia il seguente grafico:

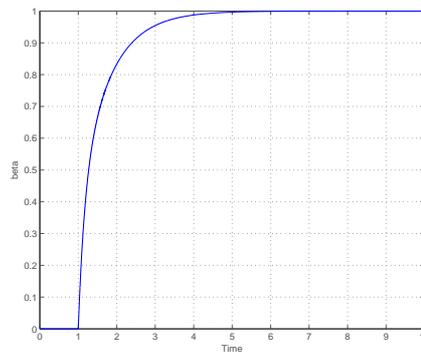


Figura 6.8: Risposta al gradino del sistema retroazionato

In questo caso la retroazione dallo stato consente di ottenere prestazioni decisamente migliori rispetto a quelle raggiunte mediante il progetto di un controllore da affiancare alla funzione di trasferimento  $G'(s)$ , a dimostrazione del fatto che ciascuna delle due tecniche di controllo risulta più indicata in alcuni casi ed in altri meno.

## 6.4 Retroazione dallo stato sul modello di stato ottenuto da $G_{yT}(s)$

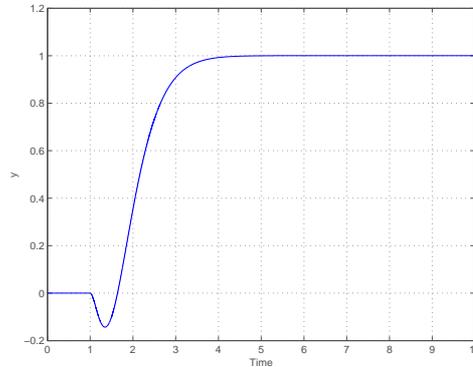
Nella sezione 3.6.1 è stato ottenuto un modello di stato in forma canonica di controllo di dimensione quattro a partire dalla funzione di trasferimento instabile  $G_{yT}(s)$ : tale modello sfrutta come ingresso la coppia  $T$  applicata al manubrio dal ciclista e prevede come uscita la deviazione  $y$  assunta dalla bicicletta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \\ \dot{\alpha}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{MgH}{J} \left( \frac{k_2 V^2}{Lg} - 1 \right) & -\frac{k_2 V A M H}{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} T \\ \\ y = \begin{bmatrix} -\frac{k_1 V^2 M g H}{LJ} & 0 & \frac{k_1 V^2}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (6.10)$$

Anche in questo caso si ha la completa allocabilità degli autovalori, dal momento che il modello di stato è in forma canonica di controllo; pertanto, ricorrendo ad un'opportuna matrice di retroazione  $K_{yT}$  per imporre alla matrice di stato del sistema retroazionato il polinomio caratteristico  $\Delta_{F+GK_{yT}}(s) = (s+3)^2$ :

$$K_{yT} = [ a \quad b \quad c \quad d ] = [ -81 \quad -108 \quad -46.91 \quad -10.89 ] \quad (6.11)$$

è possibile stabilizzare il sistema e far sì che esso risponda ad un ingresso a gradino nel seguente modo:

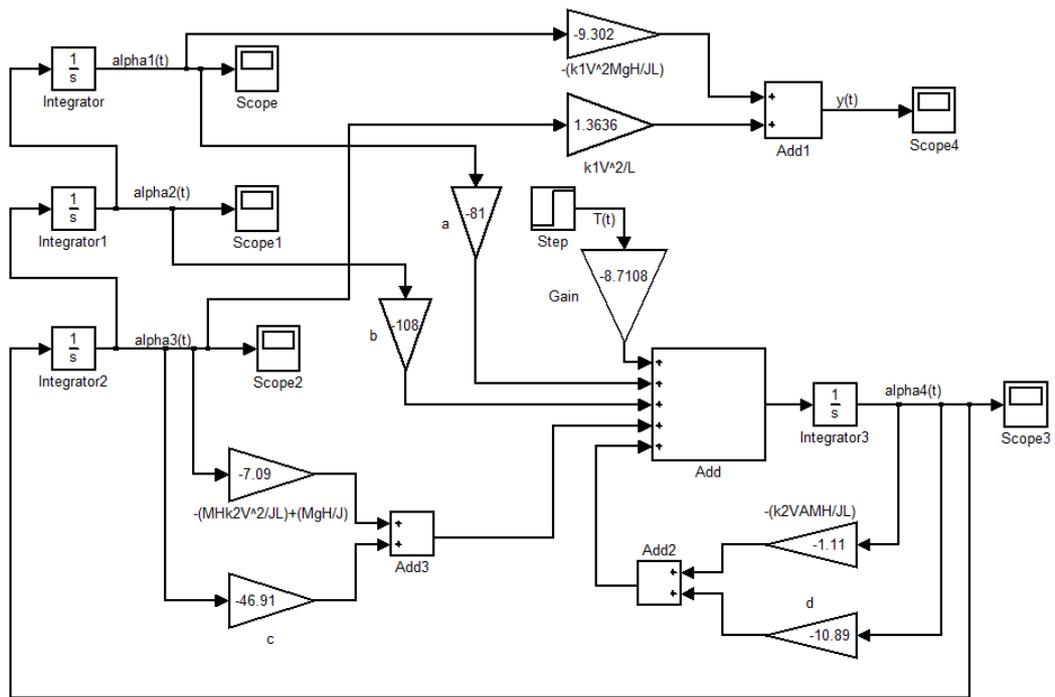


**Figura 6.9:** Risposta al gradino del sistema retroazionato

L'andamento dell'uscita denota un leggero *undershoot* iniziale che ne rallenta il *rise time* ed il *settling time*, portandoli a circa 2 s: si tratta di tempi di risposta piuttosto

buoni viste l'instabilità iniziale del sistema e le prestazioni precedentemente ottenute con il controllore dinamico. Pertanto, in questo caso, la retroazione dallo stato fornisce risultati decisamente migliori rispetto all'utilizzo della tecnica di controllo dinamico.

Viene riportato per completezza lo schema a blocchi del sistema retroazionato, dove è possibile notare la presenza del guadagno inserito subito dopo l'ingresso a gradino per garantire un errore a regime permanente nullo:



**Figura 6.10:** Schema a blocchi del modello di stato retroazionato

## Capitolo 7

# Controllo dei sistemi non-lineari originari

In un primo momento, nella definizione dei modelli matematici descrittivi della bicicletta, sono stati ricavati sistemi non lineari e si è fatto dunque ricorso alla linearizzazione per poter poi ottenere le varie funzioni di trasferimento e i modelli di stato descritti. Nel presente capitolo verranno ripresi in considerazione i sistemi non lineari originariamente definiti per testare su di essi il funzionamento dei compensatori illustrati nel Capitolo 5.

I vari sistemi precedentemente analizzati sono stati ottenuti per linearizzazione attorno allo zero, ovvero per piccoli valori degli angoli  $\delta$ ,  $\beta$  e  $\psi$  (quest'ultimo in alcuni casi, ovvero nella definizione delle funzioni di trasferimento  $G(s)$  e  $G'(s)$ , è stato posto pari a zero a priori): tali sistemi lineari consentono lo studio degli originari sistemi non-lineari in un piccolo intorno del punto di equilibrio, ovvero, in questo caso, dello zero. Di conseguenza, i controllori progettati in precedenza per le varie funzioni di trasferimento descritte saranno in grado di agire in modo efficiente anche sui modelli non-lineari ma soltanto in un piccolo intorno del punto di equilibrio, la cui entità non è nota a priori e va ricercata mediante opportuni test sui sistemi implementati con Simulink. Ciò significa che sarà di volta in volta necessario applicare in ingresso un gradino di ampiezza opportuna per poter effettivamente constatare l'efficienza dei compensatori prima illustrati anche sui sistemi non-lineari: in questo modo infatti, si renderà il sistema in grado di funzionare in un intervallo di valori che non andranno ad interferire con le non-linearità che lo caratterizzano. In modo analogo, anche alle condizioni iniziali del sistema dovranno esser attribuiti valori pari al punto di equilibrio o, eventualmente, molto vicini ad esso: dal momento che nello studio qui svolto è stata effettuata la linearizzazione attorno al punto di equilibrio  $(\bar{\delta}, \bar{\beta}) = (0, 0)$ , le condizioni iniziali verranno poste pari a zero.

### 7.1 Sistema descritto da $G(s)$

La funzione di trasferimento  $G(s)$  lega l'ingresso  $\delta(t)$ , ovvero l'angolo di sterzo della ruota anteriore all'uscita  $\beta(t)$ , data dall'inclinazione rispetto alla verticale del corpo rigido costituito da bicicletta e ciclista:  $G(s) = \frac{B(s)}{\Delta(s)}$ ; essa è stata ricavata per mezzo di una linearizzazione attorno al punto di equilibrio  $(\bar{\delta}, \bar{\beta}) = (0, 0)$ .

Per ottenere tale funzione di trasferimento si era partiti (nella Sezione 2.2) dalla legge di equilibrio dei momenti:

$$J\ddot{\beta} = MgH \sin \beta + HN \cos \beta \quad (7.1)$$

dove  $N$  rappresenta la forza agente sul centro di massa del sistema, così definita:

$$N = -M \left( \frac{V^2}{r} + \dot{V}_z \right) = -M \left( V^2 \frac{\sin \delta}{L} + \dot{V}_z \right) \quad (7.2)$$

con, per quanto scritto nella (2.1):

$$V_z = \dot{z} = \frac{A}{L}\dot{x} + \frac{B}{L}\dot{y} \quad (7.3)$$

Sempre dalla (2.1) si ricavano poi le espressioni di  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$ :

$$\dot{x} = V \frac{\sin(\delta + \psi)}{\cos \delta} = V \tan \delta \cos \psi + V \sin \psi \quad (7.4)$$

$$\dot{y} = V \sin \psi \quad (7.5)$$

Poiché nella Section 2.2 era stato utilizzato un sistema di riferimento solidale con la bicicletta, ponendo  $\psi = 0$ , le due relazioni appena scritte diventano:

$$\dot{x} = V \tan \delta \quad (7.6)$$

$$\dot{y} = 0 \quad (7.7)$$

Di conseguenza:

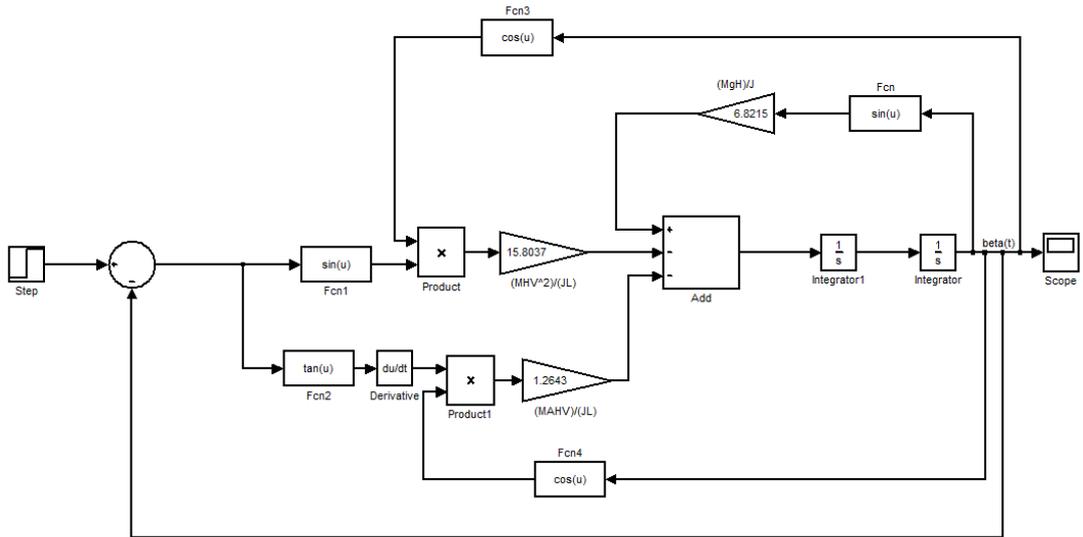
$$\dot{V}_z = \ddot{z} = \frac{AV}{L} \frac{d(\tan \delta)}{dt} \quad (7.8)$$

$$N = -\frac{MV^2}{L} \sin \delta - \frac{MAV}{L} \frac{d(\tan \delta)}{dt} \quad (7.9)$$

A questo punto è dunque possibile riscrivere la legge di equilibrio dei momenti, ottenendo così l'equazione differenziale non lineare descrittiva del sistema:

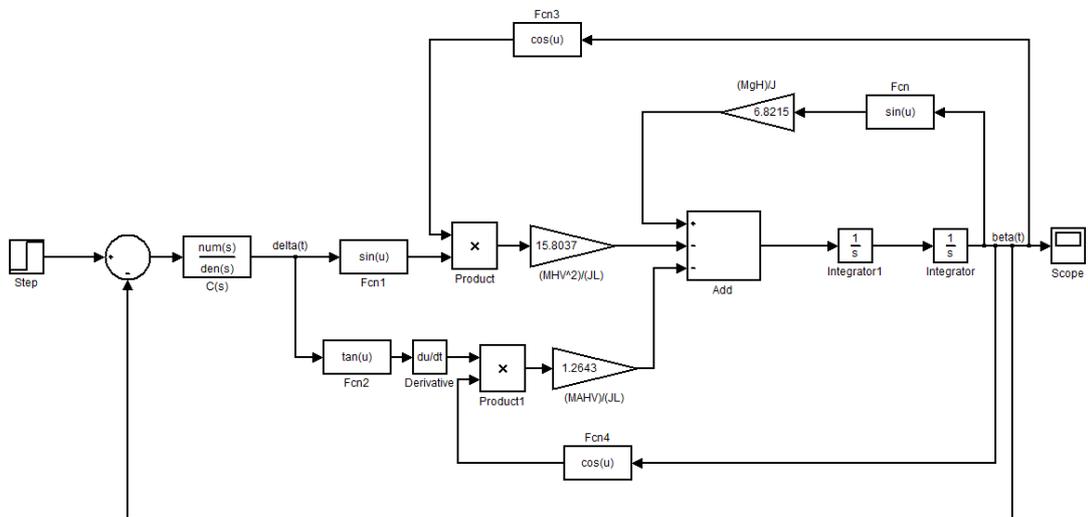
$$\ddot{\beta} = \frac{MgH}{J} \sin \beta - \frac{MV^2H}{JL} \sin \delta \cdot \cos \beta - \frac{MAVH}{JL} \frac{d(\tan \delta)}{dt} \cos \beta \quad (7.10)$$

Una volta ricavata tale equazione è possibile passare alla fase di implementazione del sistema mediante uno schema a blocchi di Simulink, ottenendo il seguente modello:



**Figura 7.1:** Schema a blocchi del sistema non-lineare con ingresso  $\delta(t)$  ed uscita  $\beta(t)$

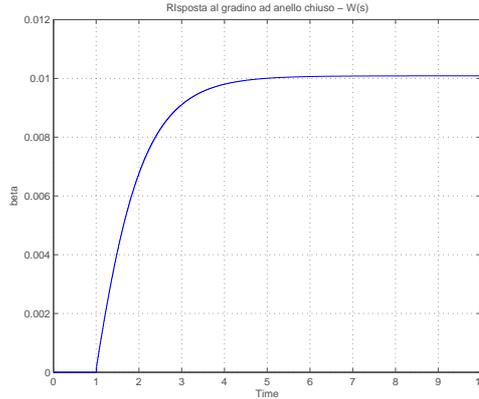
Andremo ora ad effettuare su tale sistema la retroazione negativa dall'uscita, utilizzando i controllori progettati in precedenza per la funzione di trasferimento  $G(s)$  ma sfruttando in questo caso il seguente schema:



**Figura 7.2:** Schema a blocchi della retroazione negativa dall'uscita sul sistema non-lineare con ingresso  $\delta(t)$  ed uscita  $\beta(t)$

### 7.1.1 Compensatore costante

Inserendo nello schema di Figura 7.2 il compensatore costante  $C(s) = -50$  progettato per la funzione di trasferimento  $G(s)$  nella Sezione 5.1.1 e applicando in ingresso un gradino di ampiezza 0.01 si ottiene la seguente risposta al gradino per il sistema ad anello chiuso:



**Figura 7.3:** Risposta al gradino ad anello chiuso

Il grafico mette in evidenza come il sistema sia in grado di inseguire il gradino in ingresso a meno di un errore di regime permanente pari a circa 0.0001, dovuto all'assenza di un integratore nel compensatore; per quanto riguarda invece *rise time* e *settling time*, essi risultano entrambi pari a circa 2 s.

Andando ad applicare un gradino di ampiezza ancora minore a quello illustrato si osserva un comportamento analogo del sistema, che insegue ancora molto bene il gradino in ingresso; al contrario, aumentando l'ampiezza della sollecitazione di ingresso anche di un solo ordine di grandezza si ottiene un andamento dell'uscita che va a stabilizzarsi su di un valore negativo: ciò significa che il sistema viene fatto funzionare al di fuori dell'intorno del punto di equilibrio nel quale la linearizzazione risulta valida e pertanto esso non è in grado di garantire le prestazioni previste.

### 7.1.2 Compensatore PI

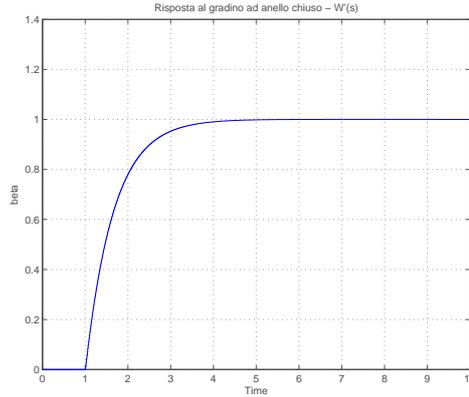
Viene ora valutato il comportamento del compensatore di tipo PI (presentato nella sezione 5.1.2) all'interno dello schema di retroazione negativa dall'uscita di Figura 7.2:

$$C(s) = -60 \cdot \frac{1 + 0.67s}{s} \quad (7.11)$$

Per il sistema in questione è ancora possibile applicare in ingresso un gradino di ampiezza unitaria, consentendo comunque al sistema di agire nel proprio intervallo di linearizzazione; sollecitando dunque tale sistema in catena chiusa con un gradino unitario si ottiene l'andamento per l'uscita  $\beta(t)$  riportato in Figura 7.4.

In questo caso l'errore di regime permanente risulta nullo e, data l'assenza di *overshoot*, *rise time* e *settling time* coincidono e sono pari a 1.5 s.

Se in ingresso si applica un gradino di ampiezza minore, ad esempio pari a 0.01, l'uscita mostra un *overshoot* del 20 % ma ancora una volta un errore di regime permanente nullo; andando invece ad aumentare l'ampiezza del gradino (portandola anche soltanto a 2) si ottiene una risposta al gradino caratterizzata da un andamento a rampa, compromettendo così le prestazioni.



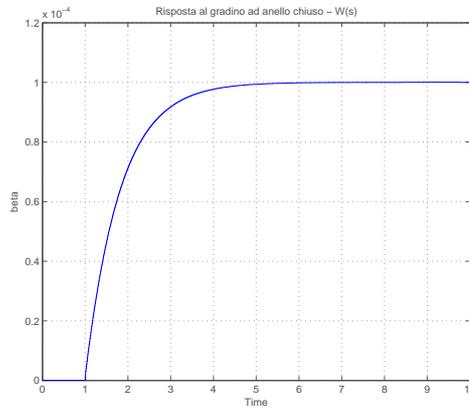
**Figura 7.4:** Risposta al gradino ad anello chiuso

### 7.1.3 Compensatore ottimale

Ora viene invece inserito nello schema a blocchi di Figura 7.2 il compensatore presentato nella Sezione 5.1.3, ovvero:

$$C(s) = -1 \cdot \frac{1 + 2000s}{s} \quad (7.12)$$

e viene analizzata la risposta al gradino di tale sistema; in questo caso è stato necessario applicare un gradino di ingresso abbastanza piccolo, di ampiezza 0.0001 per far operare il sistema in un range di valori compatibili con la linearizzazione. Di seguito viene riportato l'andamento dell'uscita  $\beta(t)$  in risposta a tale gradino:



**Figura 7.5:** Risposta al gradino ad anello chiuso

Il grafico mostra una risposta priva di *overshoot*, con errore di regime permanente nullo e con *rise time* e *settling time* entrambi pari 1.9 s.

In questo caso, andando ad aumentare l'ampiezza del gradino in ingresso di due ordini di grandezza si osserva che il sistema è ancora in grado di inseguire l'ingresso ma con un errore di regime permanente troppo elevato e, di conseguenza, inaccettabile. Incrementando ulteriormente l'entità della sollecitazione di ingresso si vanno a compromettere totalmente le prestazioni del sistema, in quanto l'uscita mostra un andamento sempre crescente anche dopo 100 s dalla sollecitazione iniziale.

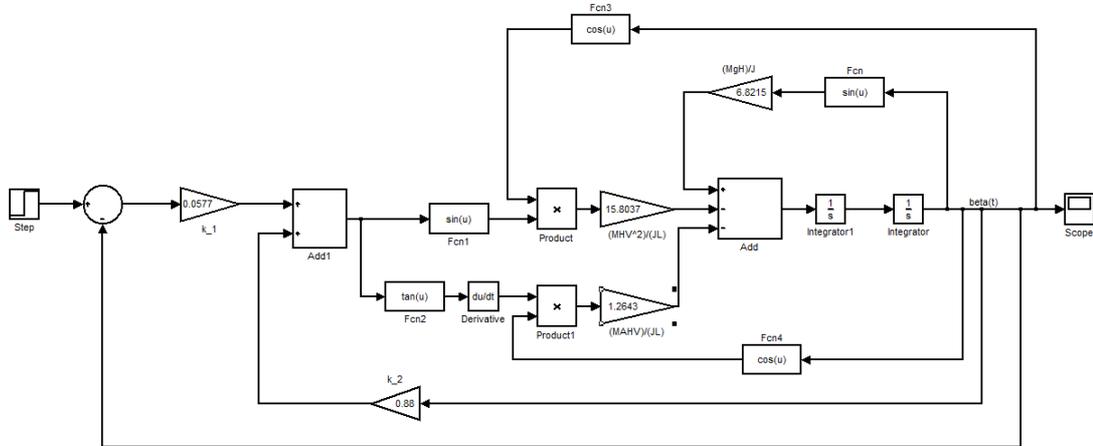
## 7.2 Sistema descritto da $G'(s)$ stabile

La funzione di trasferimento  $G'(s)$  mette in relazione l'ingresso  $T(t)$ , dato dalla coppia applicata dal ciclista sul manubrio con l'uscita  $\beta(t)$ , rappresentante ancora una volta l'inclinazione rispetto alla verticale del corpo rigido formato da bicicletta e ciclista:  $G'(s) = \frac{B(s)}{T(s)}$ ; poiché tale funzione di trasferimento risulta stabile per valori di  $V$  superiori ai  $3 \text{ m/s}$ , in questa sezione verrà assunto  $V = 5 \text{ m/s}$  (come del resto è stato fatto nell'intero elaborato, ad eccezione delle sezioni relative a  $G'(s)$  instabile). Va inoltre sottolineato il fatto che anche nella definizione di  $G'(s)$  si è fatto ricorso alla linearizzazione attorno al punto di equilibrio  $(\bar{\delta}, \bar{\beta}) = (0, 0)$ .

La funzione di trasferimento in esame è stata ricavata anch'essa a partire dalla legge di equilibrio dei momenti (7.1), dalla quale si è poi giunti a definire l'equazione differenziale non lineare (7.10), sufficiente per descrivere il sistema precedentemente analizzato; in questo caso però, a tale relazione va aggiunta un'ulteriore equazione che permette di esprimere la coppia  $T$  in funzione delle altre variabili in gioco, ovvero  $\delta$  e  $\beta$ :

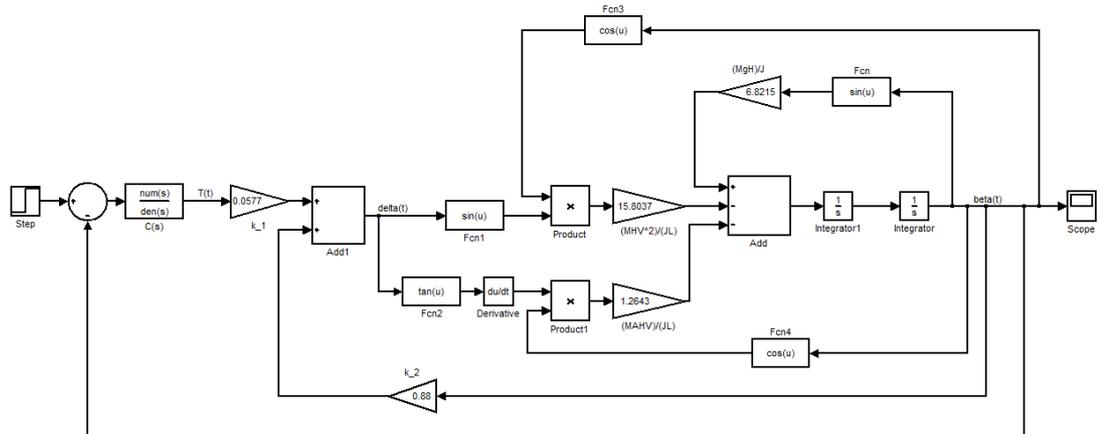
$$\begin{cases} \ddot{\beta} = \frac{MgH}{J} \sin \beta - \frac{MV^2H}{JL} \sin \delta \cdot \cos \beta - \frac{MAVH}{JL} \frac{d(\tan \delta)}{dt} \cos \beta \\ \delta = k_1 T + k_2 \beta \end{cases} \quad (7.13)$$

Definito il sistema, quest'ultimo può essere ora implementato mediante uno schema a blocchi in Simulink:



**Figura 7.6:** Schema a blocchi del sistema non-lineare con ingresso  $T(t)$  ed uscita  $\beta(t)$

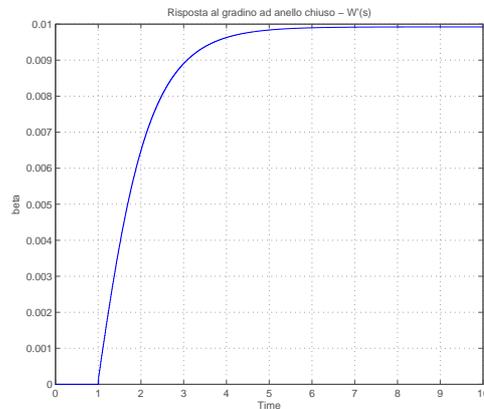
Su tale sistema è poi possibile effettuare la retroazione negativa dall'uscita, ottenendo il seguente modello:



**Figura 7.7:** Schema a blocchi della retroazione negativa dall'uscita sul sistema non-lineare con ingresso  $T(t)$  ed uscita  $\beta(t)$

### 7.2.1 Compensatore costante

Inserendo ora nello schema a blocchi di Figura 7.7 il compensatore costante  $C'(s) = -1000$  illustrato nella Sezione 5.2.1 ed applicando in ingresso un gradino di ampiezza 0.01 si ottiene la seguente risposta al gradino:



**Figura 7.8:** Risposta al gradino ad anello chiuso

Essa, non presentando *overshoot*, gode di *rise time* e *settling time* analoghi e pari a circa 2.1 s; data l'assenza di un integratore nel compensatore  $C'(s)$  non è possibile ottenere un errore di regime permanente nullo, nonostante si presenti comunque di piccola entità.

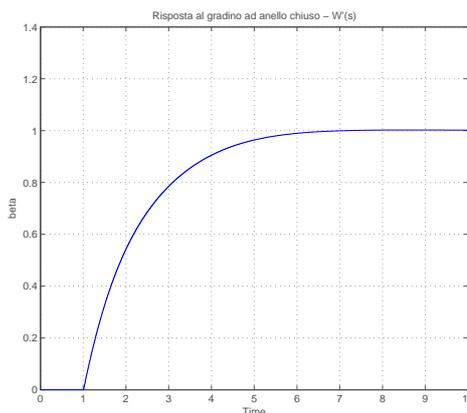
Diminuendo l'ampiezza del gradino di ingresso il sistema risulta ancora in grado di inseguire quest'ultimo in modo efficace; questo non avviene se invece si va ad aumentare l'ampiezza della sollecitazione in ingresso, in quanto il sistema non risponde più nel modo previsto, andando a stabilizzarsi su valori positivi o negativi a seconda del particolare valore scelto per l'entità del gradino.

### 7.2.2 Compensatore PI

Viene ora introdotto nello schema a retroazione negativa dall'uscita di Figura 7.7 il compensatore di tipo PI presentato nella Sezione 5.2.2 al fine di valutare il comportamento del sistema non lineare. Si tratta di:

$$C'(s) = -90 \cdot \frac{s+1}{s} \quad (7.14)$$

Applicando in questo caso in ingresso un gradino di ampiezza unitaria si ottiene la seguente risposta:



**Figura 7.9:** Risposta al gradino ad anello chiuso

Dal grafico si rileva, oltre alla mancanza di *overshoot*, un errore di regime permanente nullo con *rise time* e *settling time* pari a circa 3 s. Se si va a diminuire l'ampiezza del gradino in ingresso si ottiene una risposta con la presenza di un *overshoot* leggermente superiore al 10 % ma con un *rise time* decisamente inferiore ai 3 s; raddoppiando invece l'ampiezza del gradino e portandola a 2, la risposta mostra un andamento a rampa, dimostrando così che il sistema non risulta più in grado di inseguire il gradino in maniera adeguata, a differenza di quanto era in grado di fare il corrispondente sistema lineare, a patto di aver impostato correttamente i valori del saturatore.

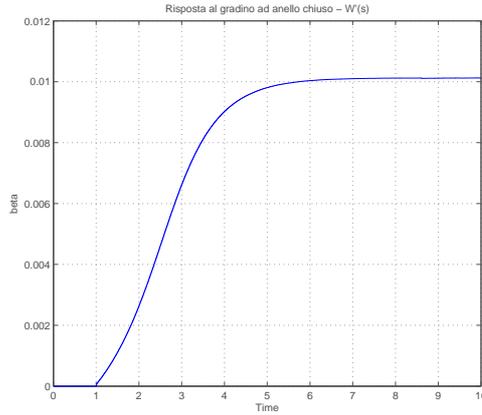
### 7.2.3 Compensatore PI con prestazioni migliori

Si va ora ad inserire sempre nello schema di Figura 7.7 il compensatore illustrato nella Sezione 5.2.3, dato da:

$$C'(s) = -20 \cdot \frac{1+100s}{s} \quad (7.15)$$

e viene valutata la risposta di tale sistema al gradino di ampiezza 0.01, riportata in Figura 7.10.

Il grafico mostra un errore di regime permanente pari a 0.0001 con *rise time* e *settling time* pari a 3 s. Se si sceglie di diminuire l'ampiezza del gradino in ingresso si ottengono prestazioni simili a quelle appena descritte (migliorano però *rise time* e *settling time*); andando invece ad aumentare l'entità della sollecitazione d'ingresso si causa una completa alterazione delle prestazioni del sistema, in quanto la risposta al



**Figura 7.10:** Risposta al gradino ad anello chiuso

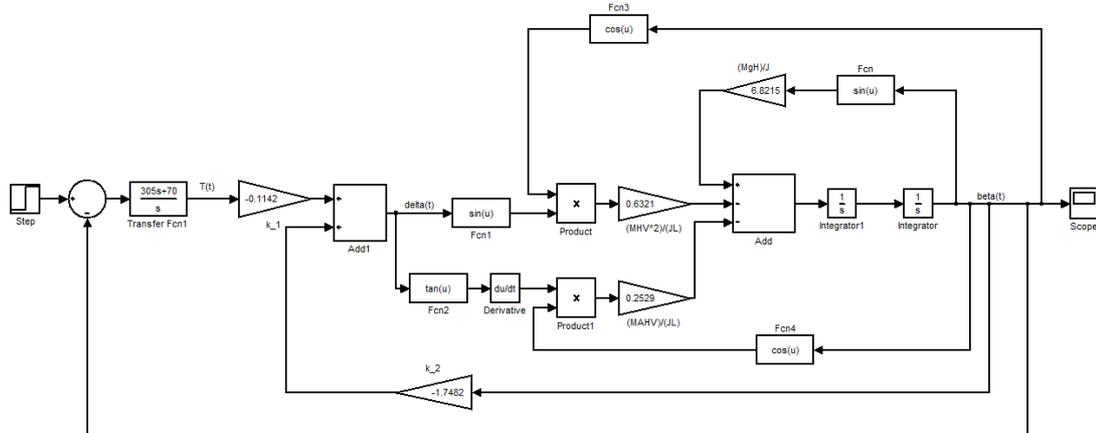
gradino appare crescente e incapace di stabilizzarsi su di un valore fisso anche dopo 100 s dall'istante in cui viene applicato il gradino.

### 7.3 Sistema descritto da $G'(s)$ instabile

Come già evidenziato in precedenza la funzione di trasferimento  $G'(s)$  risulta instabile per valori di  $V$  inferiori ai 3 m/s: nella presente sezione si andrà a testare il comportamento del compensatore progettato nella Sezione 5.3 (per  $G'(s)$  con  $V = 1$  m/s) se inserito a fianco del sistema non lineare, dal quale, una volta linearizzato, è stata poi ricavata  $G'(s)$ . Il compensatore illustrato in precedenza è così descritto:

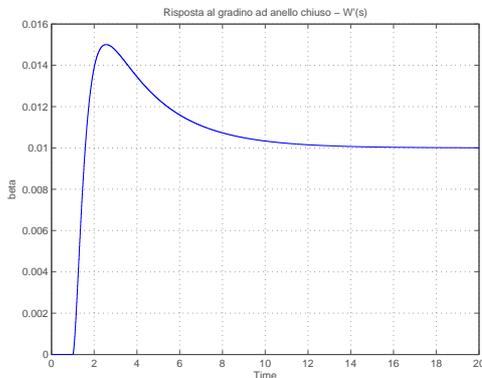
$$C'(s) = \frac{305s + 70}{s} \quad (7.16)$$

Ponendo ancora una volta  $V = 1$  m/s, si ricava il seguente schema a blocchi:



**Figura 7.11:** Schema a blocchi della retroazione negativa dall'uscita sul sistema non-lineare con ingresso  $T(t)$  ed uscita  $\beta(t)$

Tale sistema, se sollecitato con un gradino di ampiezza 0.01 presenta un'uscita caratterizzata da un *overshoot* del 50 %, da errore di regime permanente nullo, da un *rise time* di 0.5 s e da un *settling time* di circa 6 s, come dimostra la seguente immagine:



**Figura 7.12:** Risposta al gradino ad anello chiuso

Riducendo l'ampiezza del gradino d'ingresso si ottiene ancora una risposta caratterizzata da un *overshoot* del 50 %, mostrando proprio un andamento analogo a quello ricavato per il corrispondente sistema lineare. Se si va invece ad incrementare l'ampiezza del gradino in ingresso (fino ad ottenere un'ampiezza unitaria) si nota che il sistema è ancora in grado di inseguire molto bene l'ingresso a gradino; se invece si porta tale grandezza anche soltanto a 2 si vanno a compromettere notevolmente le prestazioni del controllore, dal momento che l'uscita mostra un carattere a rampa, a differenza di quanto accadeva nel sistema lineare, il quale, impostando correttamente i valori del saturatore, era in grado di inseguire molto bene ingressi a gradino di ampiezza superiore a quella unitaria.

## 7.4 Sistema descritto da $G_{yT}(s)$

La funzione di trasferimento  $G_{yT}(s)$  rappresenta un sistema avente ancora una volta come ingresso la coppia  $T$  applicata dal ciclista sul manubrio, mentre l'uscita è data in questo caso dalla deviazione  $y$  che assumerà la bicicletta in seguito all'azione del ciclista:  $G_{yT}(s) = \frac{Y(s)}{T(s)}$ . Tale funzione di trasferimento è stata in precedenza ottenuta, grazie alla linearizzazione intorno al punto di equilibrio  $(\bar{\delta}, \bar{\beta}, \bar{\psi}) = (0, 0, 0)$ , a partire dal sistema descritto in (7.13) e dalle seguenti due equazioni aggiuntive che permettono di descrivere il valore della deviazione  $y$ :

$$\dot{y} = V \sin \psi \quad (7.17)$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{L}(\dot{x} - \dot{y}) = \frac{V}{L}(\tan \delta \cdot \cos \psi + \sin \psi - \sin \psi) = \frac{V}{L} \tan \delta \cos \psi \quad (7.18)$$

Mediante tali relazioni il sistema non lineare può essere rappresentato attraverso uno schema a blocchi in Simulink, nel seguente modo:

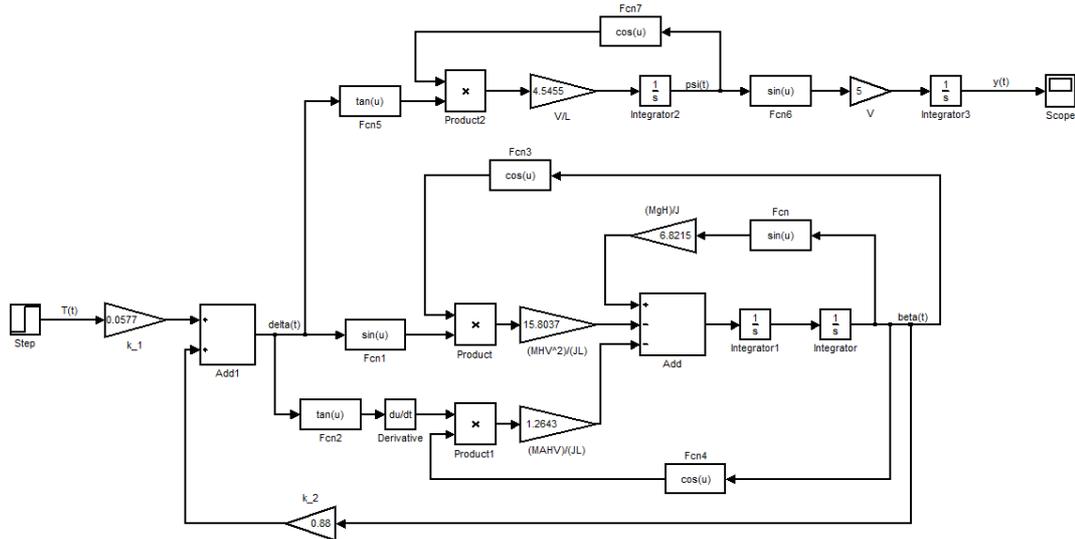


Figura 7.13: Schema a blocchi del sistema non-lineare con ingresso  $T(t)$  ed uscita  $y(t)$

Su tale modello si va ora ad applicare, per mezzo della retroazione negativa dall'uscita, il compensatore  $C_{yT}(s) = -0.15 \cdot \frac{1+3s}{1+0.56s}$  presentato in precedenza:

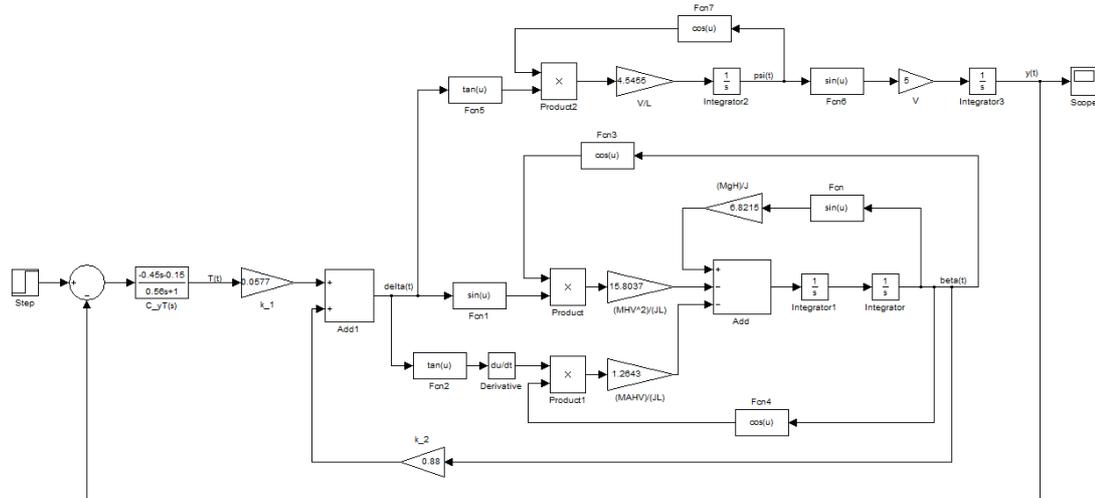
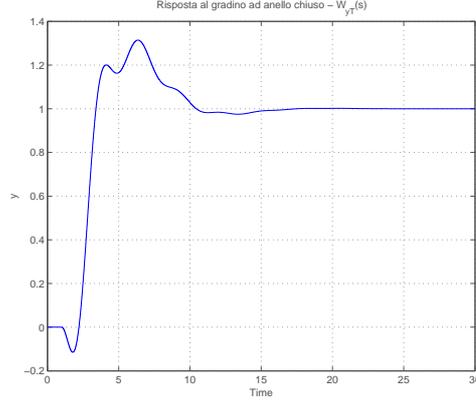


Figura 7.14: Schema a blocchi della retroazione negativa dall'uscita sul sistema non-lineare con ingresso  $T(t)$  ed uscita  $y(t)$

Sollecitando tale sistema con un gradino di ampiezza unitaria si ottiene la risposta al gradino di Figura 7.15.

Il grafico mostra un andamento molto simile a quello del sistema lineare, presentando un errore di regime permanente nullo, un *undershoot* del 10 % circa e due picchi di *overshoot* di cui quello più evidente supera il 30 %; il *rise time* risulta di poco superiore ai 2.5 s, mentre il *settling time* supera di poco i 7.5 s.

Diminuendo l'ampiezza del gradino in ingresso il sistema risulta in grado di inseguire l'ingresso perfettamente; se invece si sceglie un'ampiezza del gradino maggiore (per la precisione inferiore a 10), le prestazioni del sistema vanno a peggiorare, a causa della presenza di *overshoots* maggiori e di *rise time* e *settling time* più elevati. Ciononostante



**Figura 7.15:** Risposta al gradino ad anello chiuso

la risposta al gradino riesce comunque ad assestarsi al valore a regime, anche se dopo un intervallo di tempo maggiore, cosa che invece non accade se si imposta un gradino di ampiezza pari a 10 o superiore, al quale il sistema risponde con uscita a rampa; questo a differenza di quello che accadeva con il sistema lineare, il quale era in grado di inseguire ingressi al gradino di ampiezza superiore a 10.

## 7.5 Nota sull'uso del blocco derivatore in Simulink

Il funzionamento del blocco derivatore che Simulink mette a disposizione e che è stato utilizzato nella realizzazione dei modelli appena descritti risulta particolare e può talvolta alterare le prestazioni dei sistemi implementati. In questa sezione si andranno pertanto a ricavare modelli equivalenti a quelli non lineari presentati in precedenza che però non richiederanno l'uso del derivatore nella loro implementazione con Simulink e su di essi verranno nuovamente testati i compensatori illustrati nel Capitolo 5 per mettere così in evidenza le differenze di prestazione tra le due modalità di implementazione.

Negli schemi precedenti l'uso del derivatore risultava necessario per la presenza del termine  $\frac{d(\tan \delta)}{dt}$  nell'espressione (7.10):

$$\ddot{\beta} = \frac{MgH}{J} \sin \beta - \frac{MV^2H}{JL} \sin \delta \cdot \cos \beta - \frac{VAMH}{JL} \frac{d(\tan \delta)}{dt} \cos \beta \quad (7.19)$$

Dividendo l'intera equazione per  $\cos \beta$  si ricava:

$$\frac{\ddot{\beta}}{\cos \beta} = \frac{MgH}{J} \tan \beta - \frac{MV^2H}{JL} \sin \delta - \frac{VAMH}{JL} \frac{d(\tan \delta)}{dt} \quad (7.20)$$

A questo punto, ponendo  $z = \frac{\dot{\beta}}{\cos \beta}$  si ha:

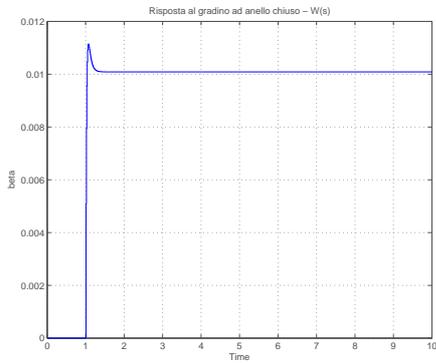
$$\dot{z} = \frac{\ddot{\beta} \cos \beta + \dot{\beta} \dot{\beta} \sin \beta}{\cos^2 \beta} = \frac{\ddot{\beta}}{\cos \beta} + \frac{\dot{\beta}}{\cos \beta} \frac{\dot{\beta}}{\cos \beta} \sin \beta \quad (7.21)$$

Pertanto:

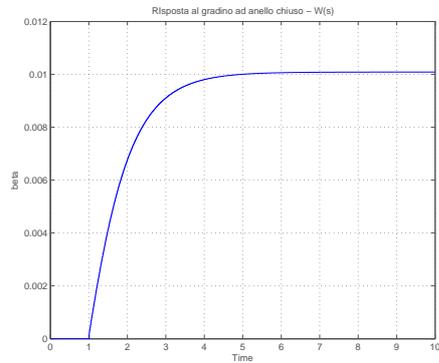
$$\dot{z} = \frac{\dot{\beta}}{\cos \beta} \frac{\dot{\beta}}{\cos \beta} \sin \beta + \frac{MgH}{J} \tan \beta - \frac{MV^2H}{JL} \sin \delta - \frac{VAMH}{JL} \frac{d(\tan \delta)}{dt} \quad (7.22)$$



## Compensatore costante



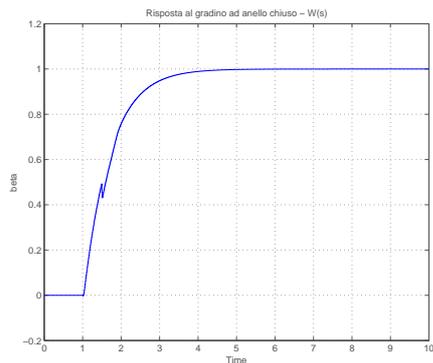
(a) *Senza derivatore*



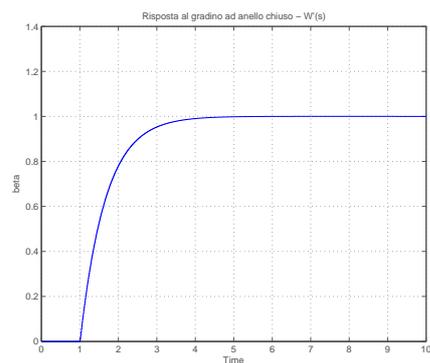
(b) *Con derivatore*

**Figura 7.17:** Risposta al gradino di ampiezza 0.01 del sistema ad anello chiuso con  $C(s) = -50$

## Compensatore PI



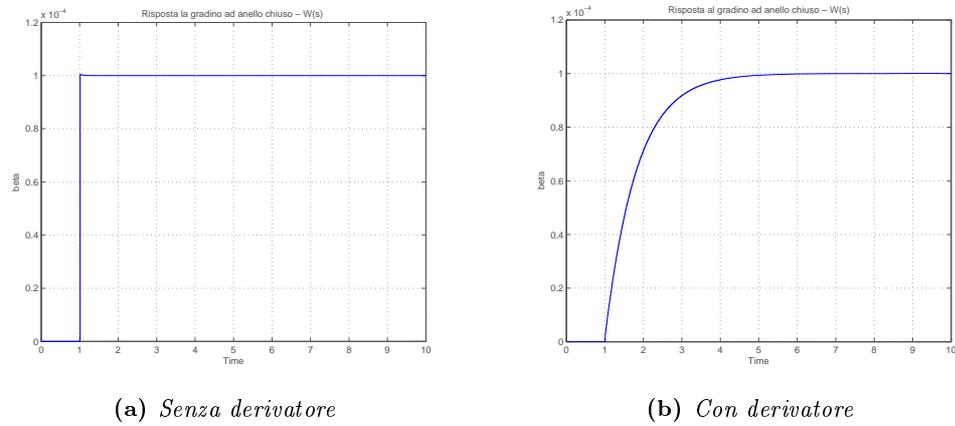
(a) *Senza derivatore*



(b) *Con derivatore*

**Figura 7.18:** Risposta al gradino di ampiezza unitaria del sistema ad anello chiuso con  $C(s) = -60 \cdot \frac{1+0.67s}{s}$

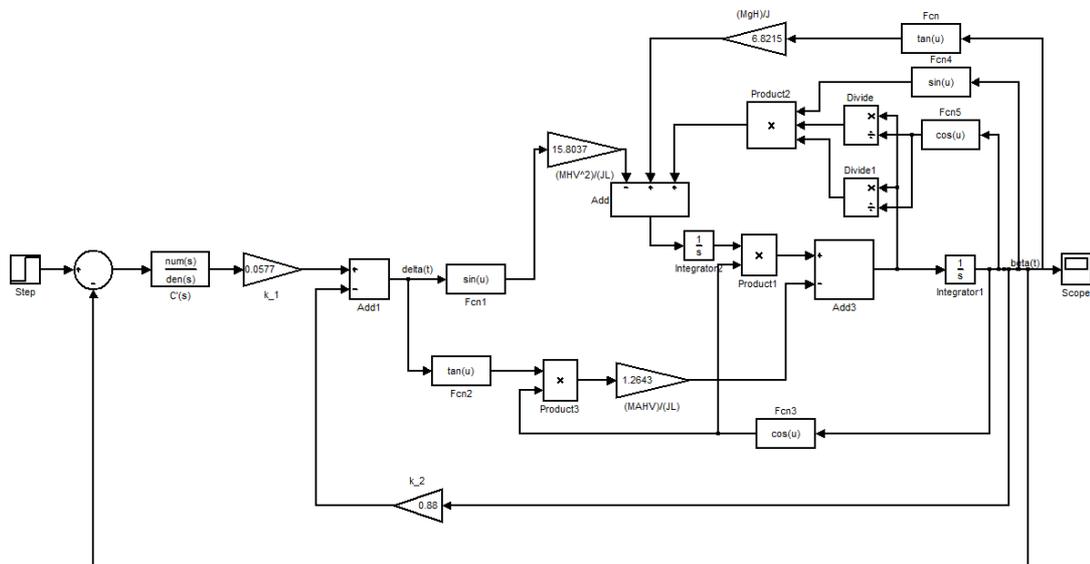
## Compensatore ottimale



**Figura 7.19:** Risposta al gradino di ampiezza 0.0001 del sistema ad anello chiuso con  $C(s) = -1 \cdot \frac{1+2000s}{s}$

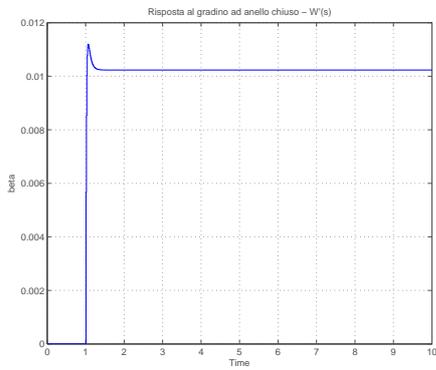
### 7.5.2 Compensatore per $G'(s)$ stabile

Si andrà ora a sfruttare il seguente schema a blocchi e a valutare il comportamento dei compensatori prima illustrati:

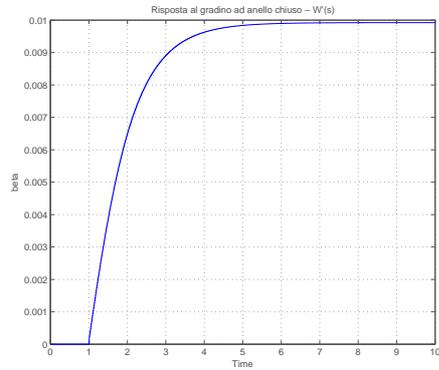


**Figura 7.20:** Schema a blocchi del sistema non-lineare con ingresso  $T(t)$  ed uscita  $\beta(t)$

## Compensatore costante



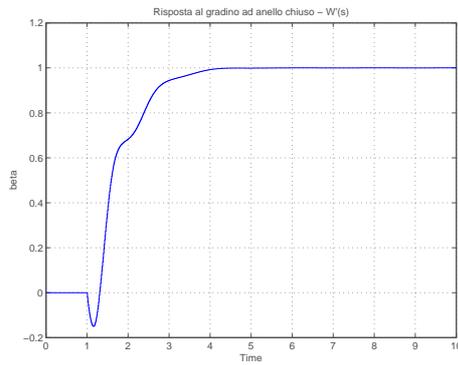
(a) Senza derivatore



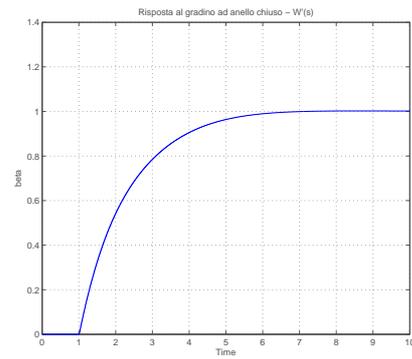
(b) Con derivatore

**Figura 7.21:** Risposta al gradino di ampiezza 0.01 del sistema ad anello chiuso con  $C'(s) = -1000$

## Compensatore PI



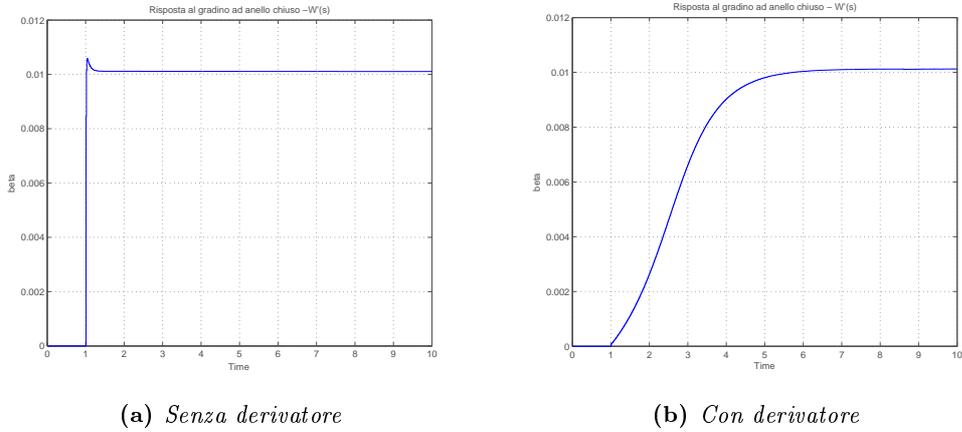
(a) Senza derivatore



(b) Con derivatore

**Figura 7.22:** Risposta al gradino di ampiezza unitaria del sistema ad anello chiuso con  $C'(s) = -90 \cdot \frac{s+1}{s}$

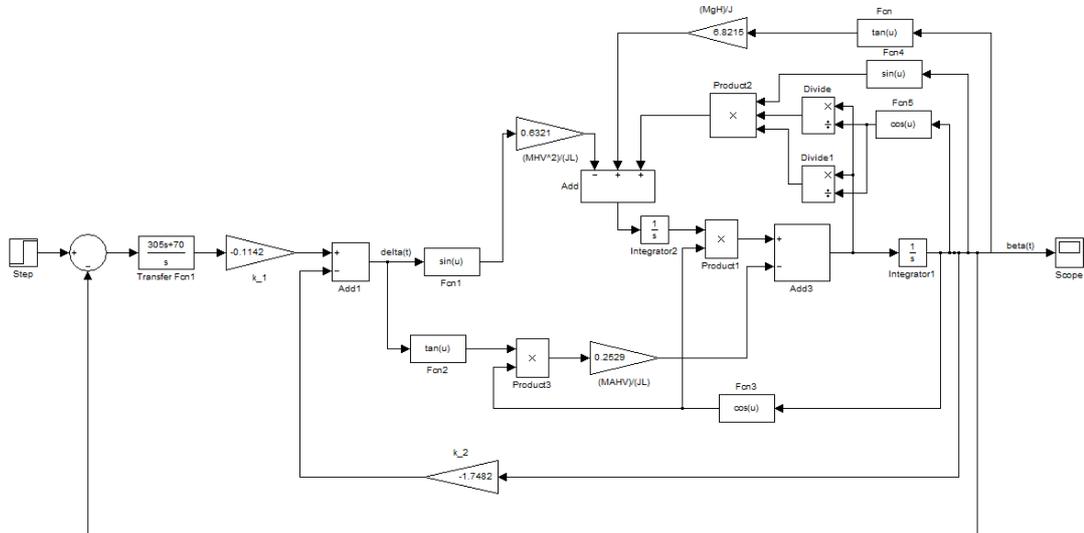
## Compensatore PI con prestazioni migliori



**Figura 7.23:** Risposta al gradino di ampiezza 0.01 del sistema ad anello chiuso con  $C'(s) = -20 \cdot \frac{1+100s}{s}$

### 7.5.3 Compensatore per $G'(s)$ instabile

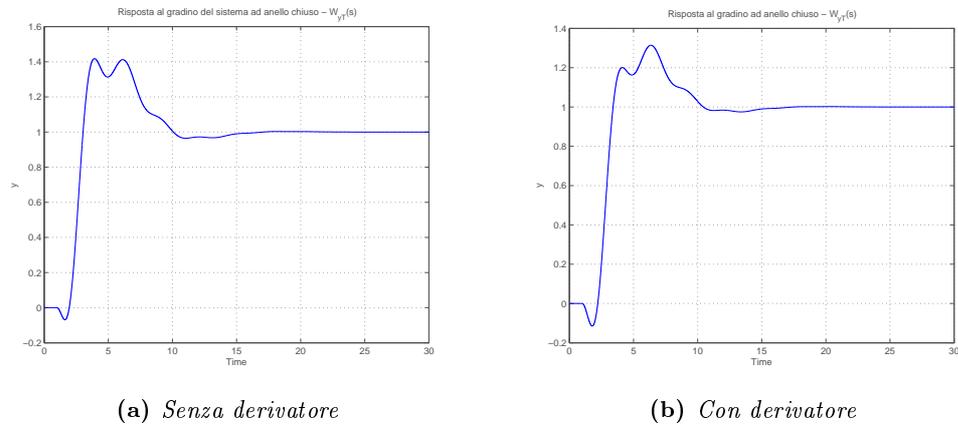
Nello schema a blocchi di Figura 7.24 viene inserito il compensatore  $C'(s) = \frac{305s+70}{s}$  ottenendo la risposta al gradino riportata in Figura 7.25.



**Figura 7.24:** Schema a blocchi del sistema non-lineare instabile con ingresso  $T(t)$  ed uscita  $\beta(t)$



Tale sistema presenta la seguente risposta al gradino:



**Figura 7.27:** Risposta al gradino di ampiezza unitaria del sistema ad anello chiuso con  $C_{yT}(s) = -0.15 \cdot \frac{1+3s}{1+0.56s}$

I grafici ora inseriti mostrano, nella maggior parte dei casi (soprattutto quelli relativi a compensatori costanti), degli andamenti più simili a quelli ottenuti per i sistemi lineari, mettendo così in luce una diversità di comportamento data proprio dall'utilizzo o meno del derivatore. Inoltre, anche in questo caso, andando a diminuire l'ampiezza del gradino di ingresso i sistemi si dimostrano ancora in grado di inseguire molto bene il gradino, a differenza di quello che accade se invece si va ad aumentare tale grandezza: in quel caso infatti i sistemi presentano uscite con andamenti a rampa o vanno addirittura ad assumere valori negativi.