

Università degli Studi di Padova



Facoltà di Scienze MM. FF. NN.
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata
Corso di Laurea Triennale in Matematica

TESI DI LAUREA

Studio spettrale dell'operatore di Schrödinger con potenziali periodico e quasi periodico

Laureando:

GIANLUIGI POTENTE

Relatore:

DOTT. PAOLO GUIOTTO

Anno Accademico 2008/2009

Indice

Introduzione	iv
1 Studio spettrale dell'operatore di Schrödinger con potenziale periodico	1
1.1 Introduzione	1
1.2 Teoria di Floquet per l'operatore di Schrödinger	3
1.3 Alcuni richiami di Analisi Funzionale	11
1.4 Caratterizzazione dello spettro dell'operatore di Schrödinger	13
1.5 Soluzioni stabili dell'equazione di Schrödinger	20
1.6 Struttura fine dello spettro	32
1.7 La funzione discriminante	33
2 Un esempio di operatore di Schrödinger con potenziale quasi periodico	39
2.1 Introduzione	39
2.2 Funzioni quasi periodiche	41
2.3 Il numero di rotazione	43
2.4 Il funzionale Δ	58
2.4.1 Differenziale primo	59
2.4.2 La derivata seconda di Δ	62
2.5 Costruzione dell'esempio	65
Bibliografia	70

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è lo studio delle proprietà spettrali dell'operatore lineare di Schrödinger, definito come

$$H := -\frac{d^2}{dx^2} + q,$$

cioè

$$(Hf)(x) = -f''(x) + q(x)f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

dove $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Tale operatore è mutuato dalla fisica quantistica ed è di grande importanza in molte applicazioni (si vedano [7] e [12]); per cui, ad esempio, ci si riferirà spesso alla funzione q col nome di potenziale, proprio per il significato che essa ha nell'interpretazione fisica di H . In meccanica quantistica, essenzialmente, H è l'energia del sistema formato da una particella in moto uni-dimensionale in un campo di forze generato dal potenziale q . Per questo motivo, lo spettro, che è di fatto l'insieme dei λ tali che l'operatore $(H - \lambda\mathbb{I})$ non è invertibile in modo continuo, è un oggetto interessante.

Ciò premesso, nella tesi ci interesserà studiare l'operatore di Schrödinger esclusivamente dal punto di vista matematico. Questo studio verrà fatto in due casi, quello in cui il potenziale q è una funzione periodica (*Capitolo 1*) e quello in cui è una funzione quasi periodica (*Capitolo 2*).

Il **Capitolo 1** è dedicato allo studio generale dello spettro dell'operatore H nel caso in cui q sia una funzione periodica di periodo $L > 0$. Questo è un problema "classico", che ha trovato la sua sistemazione definitiva nel 1910 per opera di H.Weyl. Nel capitolo verrà presentata questa teoria classica, i cui risultati serviranno anche nel caso discusso nel successivo Capitolo 2. L'equazione spettrale

$$Hf = \lambda f \tag{1}$$

è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine. Seguendo [9], si svilupperà la *teoria di Floquet* che caratterizza la forma delle soluzioni di (1). Si darà una caratterizzazione dello spettro in riferimento alla teoria di Floquet,

in modo da creare una corrispondenza tra soluzioni stabili (i.e. limitate e in L^2) dell'equazione (1) e spettro. Il risultato principale a cui perverremo è il seguente

Teorema. *Sia q una funzione continua $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periodica di periodo $L > 0$; sia H l'operatore di Schrödinger. Esiste una successione di numeri reali $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, con*

$$-\infty < a_0 < a_1 \leq a_2 < a_3 \leq a_4 < \dots \quad ,$$

tale che

$$\text{spettro}(H) = \bigcup_{i \geq 0} [a_{2i}, a_{2i+1}].$$

Nel **Capitolo 2**, si affronta, invece, il caso in cui q è una funzione quasi periodica. Il problema generale di determinare lo spettro in questo caso è tuttora irrisolto. Tuttavia, nel corso degli anni Ottanta, vari autori - tra cui J.Moser, J.Avron, B.Simon, R.Johnson - hanno dato un contributo importante all'argomento, studiando e sperimentando interessanti esempi. Di particolare rilievo è la congettura che in questo caso lo spettro abbia una struttura simile all'insieme di Cantor. Incidentalmente, vale la pena di citare l'articolo di Avron e Simon [1], nel quale si ipotizza una connessione tra questo fatto e la struttura degli anelli di Saturno.

Oggetto del capitolo sarà il lavoro di Moser [10], nel quale si costruisce un potenziale quasi periodico, che genera come spettro dell'operatore di Schrödinger un insieme cantoriano. La costruzione di tale potenziale a partire dallo spettro è una particolare soluzione del problema spettrale inverso. Per preparare l'esempio, si sviluppa ulteriormente la teoria di Floquet nel caso periodico, in particolare studiando il *numero di rotazione* associato all'equazione spettrale; il grafico del numero di rotazione (pensato come funzione di λ), crescente per i λ appartenenti allo spettro, costante altrimenti, fa pensare a quello di una sorta di funzione di Cantor.

Il numero di rotazione è intimamente legato ad un altro importante funzionale detto discriminante, definito come

$$\Delta(Q) = \text{Tr} [Y_Q(L)] ,$$

dove $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e periodica e Y_Q è la matrice risolvante associata all'equazione di Hill

$$y'' = Q(x)y.$$

Di notevole importanza è il comportamento di Δ in un intorno di un suo punto stazionario, studio che verrà dettagliatamente svolto nel cuore del capitolo e che, come si mostrerà, permetterà di risolvere il problema inverso in

un opportuno contesto. Si troverà che, perturbando opportunamente il potenziale q , si creano, negli intervalli componenti lo spettro, dei buchi: questo passaggio è fondamentale per la costruzione di un insieme di tipo Cantor. Il passo successivo è iterare il procedimento fino a “polverizzare” lo spettro ed ottenere così l’insieme di Cantor richiesto.

Ringrazio il mio relatore per la fiducia dimostrata, per la grande disponibilità, per il supporto - tecnico e non. Ringrazio, infine, tutti coloro che hanno collaborato alla stesura della tesi, in particolare le persone a me più care.

A questo punto, non mi resta che augurare al lettore una **buona lettura**.

Padova, 2 Ottobre 2009

Gianluigi Potente

Capitolo 1

Studio spettrale dell'operatore di Schrödinger con potenziale periodico

1.1 Introduzione

Sia q una funzione continua $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periodica di periodo $L > 0$. Si consideri l'operatore lineare (detto **operatore di Schrödinger**) definito da:

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + q; \quad (1.1)$$

vale a dire che, per $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$(Hf)(x) = -f''(x) + q(x)f(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (1.2)$$

Di grande importanza nelle applicazioni, in particolare alla meccanica quantistica, è l'equazione **spettrale** (o **agli autovalori**)

$$Hg_\lambda = \lambda g_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (1.3)$$

che viene detta **equazione di Schrödinger**, il cui studio sarà l'obiettivo primario di questa trattazione.

Vale la pena di spendere due parole sul senso fisico usuale dell'operatore H e dell'equazione di Schrödinger ad esso associata: H è un particolare operatore hamiltoniano quantistico del tipo

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + q,$$

di un sistema quantistico uni-dimensionale, “riscalato” in maniera che

$$\frac{\hbar^2}{2m} \equiv 1.$$

L'operatore \mathcal{H} rappresenta l'**energia** del sistema; la funzione q è il **potenziale** del sistema; grossomodo; i λ che soddisfano l'equazione (1.3) (quello che sarà detto lo spettro di H) sono i valori possibili che l'energia può assumere: si parlerà di **bande di energia**.

Dal punto di vista matematico, ciò che ci interessa è studiare, appunto, la struttura dello spettro dell'operatore H , secondo la nozione di spettro di un operatore lineare che verrà introdotta nel corso del capitolo e che è un'estensione della ben nota nozione di spettro degli operatori lineari definiti su spazi vettoriali a dimensione finita (le *applicazioni lineari*). A tal fine è fondamentale il legame che c'è tra la struttura dello spettro di H e le cosiddette soluzioni “stabili” (i.e. limitate e in L^2) dell'equazione (1.3).

L'equazione (1.3) è un'equazione differenziale ordinaria, lineare, del secondo ordine, dipendente dal parametro complesso λ , che possiamo scrivere nella forma (detta **equazione di Hill**)

$$y''(x) = P(x)y(x),$$

dove $P(x)$ è una funzione periodica.

Il primo passo sarà la ricerca di soluzioni g_λ dell'equazione (1.3), soddisfacenti la condizione:

$$g_\lambda(x + L) = \mu(\lambda) g_\lambda(x),$$

dove $\mu(\lambda)$ è un fattore complesso, che viene detto **moltiplicatore di Floquet**. Si troverà che tale $\mu(\lambda)$ deve essere in realtà uno dei due autovalori della **matrice di Floquet** M , che è la matrice wronskiana associata al sistema dinamico definito dall'equazione differenziale calcolata in L ; i moltiplicatori μ_\pm si potranno scrivere in forma esponenziale

$$\mu_\pm(\lambda) = e^{\pm w(\lambda)L},$$

con $w(\lambda) \in \mathbb{C}$. Bisognerà poi distinguere il caso in cui $\mu_+ \neq \mu_-$ dal caso $\mu_+ = \mu_-$: infatti il **Teorema di Floquet** mostra che esiste una coppia di soluzioni linearmente indipendenti $g_\lambda^{(\pm)}$ dell'equazione (1.3) che nel primo caso si possono scrivere nella forma

$$g_\lambda^{(+)}(x) = p_+(x)e^{+w(\lambda)x}, \quad g_\lambda^{(-)}(x) = p_-(x)e^{-w(\lambda)x},$$

nel secondo caso nella forma

$$g_\lambda^{(+)}(x) = p_+(x)e^{w(\lambda)x}, \quad g_\lambda^{(-)}(x) = [xp_+(x) + p_-(x)]e^{w(\lambda)x},$$

dove in entrambi i casi $p_+(x)$ e $p_-(x)$ sono funzioni periodiche di periodo L . Il passo successivo sarà definire lo **spettro** dell'operatore H e studiarne alcune proprietà: a tal fine, si introdurranno alcuni importanti nozioni di analisi funzionale, quali quello di risolvente, spettro puntuale, residuo, continuo di un operatore lineare, funzione di Green; si enuncerà, inoltre, un teorema che consente di caratterizzare lo spettro di H , esprimendolo esclusivamente in funzione della parte reale dell'esponente $w(\lambda)$: si troverà, cioè, che

$$\text{spettro}(H) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \Re w(\lambda) = 0\}.$$

Fatte queste considerazioni sullo spettro e sulla sua struttura, si tornerà nuovamente al punto di vista delle E.D.O.: l'obiettivo sarà la ricerca di **soluzioni stabili** dell'equazione di Schrödinger al variare del parametro λ . Questo perché dal teorema di Floquet discende anche che le soluzioni di (1.3) sono stabili solo per i λ tali che $\Re w(\lambda) = 0$. Inizia così a delinearsi l'annunciata corrispondenza tra soluzioni stabili e spettro.

Studiando le proprietà analitiche della funzione $\Delta(\lambda) := \text{Tr}[M]$ (detta **discriminante**), si riesce a determinare per quali λ le soluzioni dell'equazione di Schrödinger siano stabili e per quali no. Si troverà, in particolare, una successione di intervalli aperti, in cui suddette soluzioni sono stabili, che verranno detti **intervalli di stabilità**. Il **Teorema** -cosiddetto- "**di oscillazione**" riassumerà tutte le opportune considerazioni sulla stabilità delle soluzioni dell'equazione (1.3) al variare di λ in \mathbb{C} .

Infine, raccogliendo tutti i risultati ottenuti nel corso del capitolo, si potrà finalmente esprimere lo spettro di H , con il seguente

Teorema. *Sia q una funzione continua $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periodica di periodo $L > 0$; sia H l'operatore definito in (1.1). Esiste una successione di numeri reali $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, con*

$$-\infty < a_0 < a_1 \leq a_2 < a_3 \leq a_4 < \dots \quad ,$$

tale che

$$\text{spettro}(H) = \bigcup_{i \geq 0} [a_{2i}, a_{2i+1}].$$

1.2 Teoria di Floquet per l'operatore di Schrödinger

In questa sezione introduciamo la teoria di Floquet per l'equazione (1.3), cioè la ricerca, al variare di $\lambda \in \mathbb{C}$ di soluzioni periodiche a meno di fattori

moltiplicativi. Più precisamente cerchiamo soluzioni g_λ di (1.3) tali che

$$g_\lambda(x + L) = \mu(\lambda) \cdot g_\lambda(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

per qualche fattore (in generale) complesso $\mu(\lambda)$, ove L è il periodo di q . Il coefficiente $\mu(\lambda)$ si dice usualmente **moltiplicatore di Floquet** associato all'equazione (1.6), mentre le soluzioni g_λ che soddisfano (1.4) sono dette anche **onde di Bloch**.

Per caratterizzare i moltiplicatori di Floquet, è conveniente trasformare l'equazione (1.3) in un sistema dinamico del primo ordine equivalente, secondo la riduzione canonica per le E.D.O. In altre parole, se si scrive (1.3) nella forma canonica per le equazioni differenziali lineari

$$g_\lambda''(x) + [\lambda - q(x)]g_\lambda(x) = 0, \quad (1.5)$$

si ha che g_λ è soluzione di (1.5) se, e solo se, $\begin{pmatrix} g_\lambda \\ g_\lambda' \end{pmatrix}$ risolve il sistema

$$\begin{pmatrix} g_\lambda(x) \\ g_\lambda'(x) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(x) - \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_\lambda(x) \\ g_\lambda'(x) \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Indichiamo ora con $\begin{pmatrix} \phi_\lambda(x) \\ \phi_\lambda'(x) \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \psi_\lambda(x) \\ \psi_\lambda'(x) \end{pmatrix}$ la coppia di soluzioni della (1.6) che verificano le condizioni iniziali

$$\begin{pmatrix} \phi_\lambda(0) \\ \phi_\lambda'(0) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi_\lambda(0) \\ \psi_\lambda'(0) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Tali soluzioni ϕ_λ e ψ_λ esistono e sono univocamente determinate (per il teorema di esistenza e unicità) e formano un **sistema fondamentale** di soluzioni di (1.3) (i.e. una coppia di soluzioni linearmente indipendenti).

Sia inoltre

$$Y_\lambda(x) := \begin{pmatrix} \phi_\lambda(x) & \psi_\lambda(x) \\ \phi_\lambda'(x) & \psi_\lambda'(x) \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

la **matrice wronskiana** (o **fondamentale**) dell'equazione (1.6). La matrice $Y_\lambda(L)$ prende usualmente il nome di **matrice di Floquet**.

È ben noto che, per qualunque coppia di soluzioni g e f di un'equazione lineare del secondo ordine (come è (1.5)) il **Wronskiano**

$$[g, f](x) = \det \begin{pmatrix} g(x) & f(x) \\ g'(x) & f'(x) \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

o è identicamente nullo o mai nullo. Nel caso della (1.5) si ha che vale la seguente

Proposizione 1.1. *Siano $g_\lambda, f_\lambda \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ soluzioni (distinte) di (1.5). Allora $[g_\lambda, f_\lambda]$ è costante. In particolare*

$$\det Y_\lambda(x) \equiv 1.$$

Dimostrazione. Basta farne la derivata rispetto alla variabile x e si ottiene facilmente che essa è nulla.

$$\begin{aligned} ([g_\lambda, f_\lambda])'(x) &= (g_\lambda(x)f'_\lambda(x) - f_\lambda(x)g'_\lambda(x))' \\ &= g'_\lambda(x)f'_\lambda(x) + g_\lambda(x)f''_\lambda(x) - f'_\lambda(x)g'_\lambda(x) - f_\lambda(x)g''_\lambda(x) \\ &= g_\lambda(x)f''_\lambda(x) - f_\lambda(x)g''_\lambda(x) \\ &= g_\lambda(x)(q(x) - \lambda)f_\lambda(x) - f_\lambda(x)(q(x) - \lambda)g_\lambda(x) \\ &\equiv 0. \end{aligned}$$

In particolare, per ϕ_λ e ψ_λ , vale:

$$\det Y_\lambda(x) = [\phi_\lambda, \psi_\lambda](x) \equiv [\phi_\lambda, \psi_\lambda](0) = 1. \quad (1.10)$$

□

Osservazione 1.1. Si ricordi che se si ha un'equazione differenziale lineare nella forma

$$y'' = ay' + by,$$

il Wronskiano $w(x)$ di due soluzioni dell'equazione soddisfa

$$w'(x) = a(x)w(x).$$

Nel caso dell'equazione (1.5), $a \equiv 0$, quindi $w' = 0$, da cui segue che $w = [g_\lambda, f_\lambda]$ è costante.

Dal momento che ϕ_λ e ψ_λ costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni, si può scrivere $g_\lambda = c_1\phi_\lambda + c_2\psi_\lambda$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Alla luce di ciò, l'equazione (1.4) si può esprimere come

$$Y_\lambda(x + L) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mu(\lambda) Y_\lambda(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.11)$$

Ponendo $x = 0$, si ha che

$$Y_\lambda(L) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mu(\lambda) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

ovvero il $\mu(\lambda)$ cercato deve essere uno degli autovalori $\mu_{\pm}(\lambda)$ della matrice $Y_{\lambda}(L)$. Dal momento che $\det Y_{\lambda}(L) = 1$, gli autovalori si possono scrivere come

$$\mu_{\pm}(\lambda) = e^{\pm w(\lambda)L} \quad (1.13)$$

e $w(\lambda) \in \mathbb{C}$ viene anche detto **esponente di Floquet caratteristico** associato all'equazione (1.5).

A questo punto bisognerà distinguere due casi:

- (i) $iw(\lambda) \notin \frac{\pi}{L}\mathbb{Z}$ e quindi $\mu_+(\lambda) \neq \mu_-(\lambda)$;
- (ii) $iw(\lambda) \in \frac{\pi}{L}\mathbb{Z}$ e quindi $\mu_+(\lambda) = \mu_-(\lambda)$.

Tutto ciò è oggetto del seguente, importante, teorema:

Teorema 1.1 (di Floquet). *Sia q una funzione continua $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periodica di periodo $L > 0$. Si consideri l'equazione (di Schrödinger)*

$$y''(x) = [q(x) - \lambda]y(x); \quad (1.14)$$

siano μ_+ e μ_- i moltiplicatori di Floquet associati a (1.14).

- (i) *Se μ_+ e μ_- sono distinti, allora l'equazione (1.14) ha due soluzioni linearmente indipendenti, che si possono scrivere nella forma*

$$\begin{aligned} g_{\lambda}^{(+)}(x) &= p_+(x)e^{+w(\lambda)x}, \\ g_{\lambda}^{(-)}(x) &= p_-(x)e^{-w(\lambda)x}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

dove $p_+(x)$ e $p_-(x)$ sono periodiche di periodo L .

- (ii) *Se $\mu_+ = \mu_- = \mu$, allora l'equazione (1.14) ha una soluzione non banale che è periodica di periodo L (quando $\mu = 1$) oppure $2L$ (quando $\mu = -1$). Si indichi con $g_{\lambda}^{(+)}$ tale soluzione periodica e sia $g_{\lambda}^{(-)}$ un'altra soluzione linearmente indipendente da $g_{\lambda}^{(+)}$. Allora*

$$g_{\lambda}^{(-)}(x + L) = \mu g_{\lambda}^{(-)}(x) + \nu g_{\lambda}^{(+)}(x),$$

con ν costante; $\nu = 0$ è equivalente a

$$\phi_{\lambda}(L) + \psi'_{\lambda}(L) = \pm 2, \quad \psi_{\lambda}(L) = 0, \quad \phi'_{\lambda}(L) = 0.$$

Esistono, inoltre, due soluzioni linearmente indipendenti $\tilde{g}_{\lambda}^{(\pm)}$, che si possono scrivere come:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\lambda}^{(+)}(x) &= p_+(x)e^{w(\lambda)x}, \\ \tilde{g}_{\lambda}^{(-)}(x) &= [xp_+(x) + p_-(x)]e^{w(\lambda)x}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

con $p_+(x)$ e $p_-(x)$ periodiche di periodo L .

Prima di affrontare la dimostrazione del teorema, discutiamone brevemente il significato. Nel caso in cui $\mu_+ \neq \mu_-$

- se iw è reale, allora esiste un maggiorante m per il valore assoluto $|y(x)|$ di qualsiasi soluzione $y(\cdot)$ di (1.14) e m dipende solo dalle condizioni iniziali per y e non da x ;
- se iw non è reale, esiste una soluzione illimitata di (1.14).

Se $\mu_+ = \mu_-$, allora affinché tutte le soluzioni di (1.14) siano limitate è necessario e sufficiente che

$$\phi_\lambda(L) + \psi'_\lambda(L) = \pm 2, \quad \psi_\lambda(L) = \phi'_\lambda(L) = 0.$$

Si può ora procedere con la dimostrazione.

Dimostrazione del Teorema 1.1. Si nota anzitutto che, se una qualche $g_\lambda(x)$ è soluzione di (1.14), anche $g_\lambda(x + L)$ è soluzione. In particolare, $\phi_\lambda(x + L)$ e $\psi_\lambda(x + L)$ definite nella precedente sezione sono ancora soluzioni di (1.14). Inoltre si ha che

$$\begin{aligned} \phi_\lambda(x + L) &= \phi_\lambda(L)\phi_\lambda(x) + \phi'_\lambda(L)\psi_\lambda(x), \\ \psi_\lambda(x + L) &= \psi_\lambda(L)\phi_\lambda(x) + \psi'_\lambda(L)\psi_\lambda(x). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Infatti, dal momento che $\phi_\lambda(\cdot + L), \psi_\lambda(\cdot + L)$ sono soluzioni di (1.14) e che la coppia $(\phi_\lambda, \psi_\lambda)$ è un sistema fondamentale, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si possono trovare a_1, a_2, b_1, b_2 tali che

$$\begin{aligned} \phi_\lambda(x + L) &= a_1\phi_\lambda(x) + a_2\psi_\lambda(x), \\ \psi_\lambda(x + L) &= b_1\phi_\lambda(x) + b_2\psi_\lambda(x). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Per $x = 0$ si trova

$$a_1 = \phi_\lambda(L), \quad b_1 = \psi_\lambda(L).$$

Successivamente, derivando (1.18)

$$\begin{aligned} \phi'_\lambda(x + L) &= a_1\phi'_\lambda(x) + a_2\psi'_\lambda(x), \\ \psi'_\lambda(x + L) &= b_1\phi'_\lambda(x) + b_2\psi'_\lambda(x), \end{aligned} \tag{1.19}$$

e ponendo ancora $x = 0$, segue che

$$a_2 = \phi'_\lambda(L), \quad b_2 = \psi'_\lambda(L).$$

Sia ora $g_\lambda(x) \not\equiv 0$ una soluzione di (1.14) che soddisfi la proprietà (1.4), cioè tale che:

$$g_\lambda(x + L) = \mu g_\lambda(x). \quad (1.20)$$

Scrivendo $g_\lambda(x) = c_1\phi_\lambda(x) + c_2\psi_\lambda(x)$, da (1.17) segue che (1.20) è verificata se, e solo se, c_1 e c_2 soddisfano il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} (\phi_\lambda(L) - \mu)c_1 + \psi_\lambda(L)c_2 = 0, \\ \phi'_\lambda(L)c_1 + (\psi'_\lambda(L) - \mu)c_2 = 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

Pertanto, la condizione necessaria e sufficiente per avere in (1.21) soluzioni c_1, c_2 non entrambe nulle è che il sistema sia “degenere”, i.e. che

$$\det \begin{pmatrix} \phi_\lambda(L) - \mu & \psi_\lambda(L) \\ \phi'_\lambda(L) & \psi'_\lambda(L) - \mu \end{pmatrix} = 0. \quad (1.22)$$

Notiamo che l'equazione (1.22) è l'**equazione caratteristica** della matrice $Y_\lambda(L)$; dal momento che, come visto in (1.10), il Wronskiano di ϕ_λ e ψ_λ è costantemente uguale a 1, tale equazione assume la forma

$$\mu^2 - [\phi_\lambda(L) + \psi'_\lambda(L)]\mu + 1 = 0. \quad (1.23)$$

Gli zeri di (1.23) sono esattamente gli autovalori di $Y_\lambda(L)$, cioè i moltiplicatori di Floquet μ_+ , μ_- dell'ipotesi del teorema. Si possono quindi trovare due soluzioni $g_\lambda^{(+)}$, $g_\lambda^{(-)}$ di (1.14) che soddisfano (1.20), della forma

$$g_\lambda^{(\pm)}(x) = p_\pm(x)e^{\pm w(\lambda)x}, \quad (1.24)$$

dove p_\pm sono opportune funzioni periodiche di periodo L e $w = w(\lambda) \in \mathbb{C}$ è tale che $\mu_\pm = e^{\pm wL}$.

Tali funzioni periodiche esistono: infatti, se si pone

$$p_\pm(x) := g_\lambda^{(\pm)}(x)e^{\mp wx},$$

si ha chiaramente che

$$p_\pm(x)e^{\pm w(\lambda)x} = g_\lambda^{(\pm)}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e che le p_\pm sono periodiche di periodo L , come si vede:

$$\begin{aligned} p_\pm(x + L) &= g_\lambda^{(\pm)}(x + L)e^{\mp w(x+L)} \\ &= e^{\pm wL} g_\lambda^{(\pm)}(x)e^{\mp wx} e^{\mp wL} \\ &= g_\lambda^{(\pm)}(x)e^{\mp wx} \\ &= p_\pm(x). \end{aligned}$$

È a questo punto che bisogna distinguere i due casi, cioè il caso (i) in cui l'altro autovalore μ_- è distinto dal primo ($\mu_- \neq \mu_+$) ed il caso (ii) in cui l'equazione (1.22) ha due soluzioni coincidenti ($\mu_- = \mu_+$).

Caso (i): $\mu_- \neq \mu_+$.

Come già visto, dal momento che $\det Y_\lambda(L) = 1$ e che, di conseguenza, $\mu_- = e^{-w(\lambda)L}$, il caso (i) può verificarsi se, e solo se, $iw(\lambda)$ non è un multiplo intero di $\frac{\pi}{L}$. Siano $g_\lambda^{(\pm)}$ le soluzioni trovate in (1.24).

Vediamo che $g_\lambda^{(+)}$ e $g_\lambda^{(-)}$ così costruite sono linearmente indipendenti. Se non lo fossero, si potrebbero trovare costanti non entrambe nulle k_1 e k_2 tali che

$$k_1 g_\lambda^{(+)}(x) + k_2 g_\lambda^{(-)}(x) \equiv 0.$$

Ma, poiché $g_\lambda^{(+)}$ e $g_\lambda^{(-)}$ soddisfano entrambe la condizione (1.20), vale anche che

$$k_1 g_\lambda^{(+)}(x+L) + k_2 g_\lambda^{(-)}(x+L) = k_1 \mu_+ g_\lambda^{(+)}(x) + k_2 \mu_- g_\lambda^{(-)}(x) \equiv 0$$

Poiché sia $\mu_+ g_\lambda^{(+)}$ che $\mu_- g_\lambda^{(-)}$ sono non identicamente nulle, le equazioni sono compatibili solo se $\mu_+ = \mu_-$, ma ciò contraddice l'ipotesi che $\mu_+ \neq \mu_-$.

Caso (ii): $\mu_- = \mu_+ = \mu$.

Questo caso si può verificare solo quando $iw(\lambda)$ è un multiplo intero di $\frac{\pi}{L}$, i.e. μ_+ e μ_- sono entrambi $+1$ o -1 , dal momento che $\mu_+ \mu_- = 1$. Quindi la soluzione $g_\lambda^{(+)}$ ottenuta in (1.15) (la quale coincide con la $g_\lambda^{(-)}$) è periodica di periodo L o $2L$.

Allo scopo di trovare una (nuova) soluzione $g_\lambda^{(-)}$ linearmente indipendente da $g_\lambda^{(+)}$, si assuma dapprima che $\psi_\lambda(L) \neq 0$. In questo caso, si può scegliere

$$\begin{aligned} g_\lambda^{(+)}(x) &= \psi_\lambda(L) \phi_\lambda(x) + [\mu - \phi_\lambda(L)] \psi_\lambda(x), \\ g_\lambda^{(-)}(x) &= \psi_\lambda(x). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Se si scrive, come sopra,

$$g_\lambda^{(+)}(x) = c_1 \phi_\lambda(x) + c_2 \psi_\lambda(x)$$

e si prendono $c_1 = \psi_\lambda(L)$ e $c_2 = \mu - \phi_\lambda(L)$, questi soddisfano sicuramente la prima equazione del sistema (1.21); per quanto riguarda la seconda, essa è soddisfatta da c_1 e c_2 siffatti, dato che in questo modo essa viene ad essere l'equazione (1.23).

Inoltre, come richiesto $g_\lambda^{(+)}$ è tale che $g_\lambda^{(+)}(x + L) = \mu g_\lambda^{(+)}(x)$.

Infatti,

$$\begin{aligned}
g_\lambda^{(+)}(x + L) &= \psi_\lambda(L)\phi_\lambda(x + L) + [\mu - \phi_\lambda(L)]\psi_\lambda(x + L) \\
&\stackrel{(1.17)}{=} \psi_\lambda(L)[\phi_\lambda(L)\phi_\lambda(x) + \phi'_\lambda(L)\psi_\lambda(x)] + \\
&\quad + [\mu - \phi_\lambda(L)](\psi_\lambda(L)\phi_\lambda(x) + \psi'_\lambda(L)\psi_\lambda(x)) \\
&= \phi_\lambda(L)\psi_\lambda(L)\phi_\lambda(x) + \psi_\lambda(L)\phi'_\lambda(L)\psi_\lambda(x) + \\
&\quad + \psi_\lambda(L)\mu\phi_\lambda(x) - \phi_\lambda(L)\psi_\lambda(L)\phi_\lambda(x) + \\
&\quad + \psi'_\lambda(L)\mu\psi_\lambda(x) - \phi_\lambda(L)\psi'_\lambda(L)\psi_\lambda(x) \\
&= [\phi_\lambda(L)\psi_\lambda(L) + \psi_\lambda(L)\mu - \phi_\lambda(L)\psi_\lambda(L)]\phi_\lambda(x) + \\
&\quad + [\phi'_\lambda(L)\psi_\lambda(L) - \phi_\lambda(L)\psi'_\lambda(L) + \psi'_\lambda(L)\mu]\psi_\lambda(x) \\
&\stackrel{(1.23)}{=} \psi_\lambda(L)\mu\phi_\lambda(x) + \\
&\quad + \{\mu^2 - [\phi_\lambda(L) + \psi'_\lambda(L)]\mu + \psi'_\lambda(L)\mu\}\psi_\lambda(x) \\
&= \mu\{\psi_\lambda(L)\phi_\lambda(x) + [\mu - \phi_\lambda(L)]\psi_\lambda(x)\} \\
&= \mu g_\lambda^{(+)}(x).
\end{aligned}$$

La soluzione $g_\lambda^{(-)}$ indicata in (1.25), chiaramente indipendente da $g_\lambda^{(+)}$ dato che $\psi_\lambda(L) \neq 0$, è inoltre tale che

$$g_\lambda^{(-)}(x + L) = \mu g_\lambda^{(-)}(x) + g_\lambda^{(+)}(x).$$

Ciò segue immediatamente da $2\mu = \phi_\lambda(L) + \psi'_\lambda(L)$, valida perché μ è radice dell'equazione caratteristica (1.22). Similmente, se $\psi_\lambda(L) = 0$, si possono scegliere

$$\begin{aligned}
g_\lambda^{(+)}(x) &= \psi_\lambda(x), \\
g_\lambda^{(-)}(x) &= \phi_\lambda(x).
\end{aligned} \tag{1.26}$$

In questo modo, poiché $\phi_\lambda(L)\psi'_\lambda(L) - \phi'_\lambda(L)\psi_\lambda(L) = 1$, $\psi_\lambda(L) = 0$ e $\phi_\lambda(L) + \psi'_\lambda(L) = 2\mu$, segue che $\phi_\lambda(L) = \psi'_\lambda(L) = \mu$; di conseguenza, si ottiene, utilizzando infine (1.17), che

$$g_\lambda^{(+)}(x + L) = \mu g_\lambda^{(+)}(x), \quad g_\lambda^{(-)}(x + L) = \mu g_\lambda^{(-)}(x) + \phi'_\lambda(L)g_\lambda^{(+)}(x).$$

Si è provato in questo modo che

$$g_\lambda^{(-)}(x + L) = \mu g_\lambda^{(-)}(x) + \nu g_\lambda^{(+)}(x);$$

per quanto fatto, se $\nu = 0$, certamente si ottiene che $\phi_\lambda(L) + \psi'_\lambda(L) = \pm 2$, $\psi_\lambda(L) = 0$, $\phi'_\lambda(L) = 0$, e viceversa.

Si vuole, infine, mostrare che esistono due soluzioni linearmente indipendenti $\tilde{g}_\lambda^{(\pm)}$, che si possono scrivere come nella (1.16). Si è già visto che $g_\lambda^{(+)}$ si può scrivere come:

$$g_\lambda^{(+)}(x) = p_+(x)e^{w(\lambda)x},$$

con p_+ periodica di periodo L . Sia

$$P_-(x) = e^{-w(\lambda)x}g_\lambda^{(-)}(x) - \frac{\nu}{\mu L}xp_+(x).$$

Tale P_- è periodica di periodo L :

$$\begin{aligned} P_-(x + L) &= e^{-w(\lambda)(x+L)}g_\lambda^{(-)}(x + L) - \frac{\nu}{\mu L}(x + L)p_+(x + L) \\ &= \mu e^{-w(\lambda)x} \left[\mu g_\lambda^{(-)}(x) + \nu g_\lambda^{(+)}(x) \right] - \frac{\nu}{\mu L}(x + L)p_+(x) \\ &= e^{-w(\lambda)x}g_\lambda^{(-)}(x) - \frac{\nu}{\mu L}xp_+(x) \\ &= P_-(x). \end{aligned}$$

È sufficiente a questo punto scegliere

$$\begin{aligned} \tilde{g}_\lambda^{(+)}(x) &= g_\lambda^{(+)}(x), \\ \tilde{g}_\lambda^{(-)}(x) &= \frac{\mu L}{\nu}g_\lambda^{(-)}(x). \end{aligned}$$

Infatti, $\tilde{g}_\lambda^{(\pm)}$ sono linearmente indipendenti; inoltre, se si definisce $p_-(x) := \frac{\mu L}{\nu}P_-(x)$, $\tilde{g}_\lambda^{(-)}$ si può scrivere nella forma voluta:

$$\tilde{g}_\lambda^{(-)}(x) = (xp_+(x) + p_-(x))e^{w(\lambda)x}.$$

La dimostrazione del teorema di Floquet è così conclusa. □

1.3 Alcuni richiami di Analisi Funzionale

In questa sezione richiameremo brevemente alcune importanti nozioni di analisi funzionale, che verranno utilizzate nel seguito.

Siano X, Y spazi vettoriali normati. Indicheremo con $\mathcal{L}(X, Y)$ lo spazio degli operatori lineari e continui da X in Y , munito della norma operatoriale usuale $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$, definita nel modo seguente: se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$,

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} := \sup \{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}.$$

Ove il contesto lo permetta senza che si producano ambiguità, si scriverà semplicemente $\|T\|$ per $\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$. Se $Y \equiv X$, allora $\mathcal{L}(X, X)$ si indicherà più concisamente col simbolo $\mathcal{L}(X)$.

Ricordiamo ora la definizione di **risolvente** di un operatore.

Definizione 1.1 (Risolvente). *Siano X uno spazio normato, $\mathcal{D} \subset X$ un sottospazio vettoriale denso in X (i.e. $\overline{\mathcal{D}} = X$); sia $A : \mathcal{D} \subseteq X \rightarrow X$ un operatore lineare. Si definisce **insieme risolvente** di A l'insieme*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (A - \lambda\mathbb{I})^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

Gli elementi di $\rho(A)$ si dicono anche **valori regolari** di A . L'operatore $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ è detto **operatore risolvente** e si indica generalmente col simbolo R_λ .

Il complementare dell'insieme risolvente viene chiamato **spettro**.

Definizione 1.2 (Spettro). *Siano X uno spazio normato, $\mathcal{D} \subset X$ un sottospazio vettoriale denso in X ; sia $A : \mathcal{D} \subseteq X \rightarrow X$ un operatore lineare. Lo **spettro** di A , indicato con il simbolo $\sigma(A)$, è definito come*

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Lo spettro si divide in:

- **Spettro puntuale.**

$$\sigma_{\text{pp}}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda\mathbb{I}) \text{ non è iniettivo}\}.$$

Lo spettro puntuale è semplicemente l'insieme degli autovalori, cioè dei λ tali che esiste $x \in X, x \neq 0$ per cui $Ax = \lambda x$.

- **Spettro residuo.**

$$\sigma_{\text{r}}(A) := \left\{ \lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_{\text{pp}}(A) : \overline{\text{Im}(A - \lambda\mathbb{I})} \subsetneq X \right\}.$$

- **Spettro continuo.**

$$\sigma_c(A) := \{ \lambda \in \sigma(A) \setminus (\sigma_{pp}(A) \cup \sigma_r(A)) : \exists (A - \lambda \mathbb{I})^{-1} \notin \mathcal{L}(Y, X) \},$$

ove si è posto $Y = \overline{\text{Im}(A - \lambda \mathbb{I})}$.

Osservazione 1.2.

- Dal momento che chiaramente $R_\lambda = (A - \lambda \mathbb{I})^{-1}$ è lineare, dire che l'operatore risolvente non appartiene a $\mathcal{L}(Y, X)$ (come nella definizione di spettro continuo) equivale ad affermare semplicemente la sua non continuità.
- Se X è di dimensione finita, lo spettro residuo e quello continuo sono vuoti, quindi c'è soltanto lo spettro puntuale, che è l'insieme degli autovalori.

Notiamo qui una utile caratterizzazione dello spettro continuo.

Proposizione 1.2. *Siano X uno spazio normato, $\mathcal{D} \subset X$ un sottospazio vettoriale denso in X ; sia $A : \mathcal{D} \subseteq X \longrightarrow X$ un operatore lineare; sia $\lambda \in \mathbb{C}$. Sono equivalenti:*

- (i) $\lambda \in \sigma_c(A)$;
- (ii) esiste una successione $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ tale che $\|u_n\| = 1 \forall n \in \mathbb{N}$ e $\|(A - \lambda \mathbb{I})u_n\| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

Dimostrazione. Detto $v_n = (A - \lambda \mathbb{I})u_n$, si avrebbe che, al tendere di $n \rightarrow +\infty$, $(A - \lambda \mathbb{I})^{-1}v_n \rightarrow 0$ poiché $v_n \rightarrow 0$, mentre $u_n \not\rightarrow 0$, dal momento che $\|u_n\|_2 = 1$; vale a dire che $(A - \lambda \mathbb{I})^{-1}$ non è continuo, quindi $\lambda \in \sigma_c(A)$. \square

1.4 Caratterizzazione dello spettro dell'operatore di Schrödinger

In questa sezione applichiamo i risultati della sezione 1.2 al problema di determinare lo spettro dell'operatore di Schrödinger.

Innanzitutto, formalizziamo il setting funzionale. Supporremo

$$H : \mathcal{D} \subset L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}),$$

dove $L^2 = L^2(\mathbb{R})$ è lo spazio delle funzioni misurabili $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ con norma finita $\|u\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ e

$$\mathcal{D} = \{u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) : u, u', u'' \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Il potenziale $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ è periodico di periodo L . In particolare $q \in L^\infty(\mathbb{R})$ (i.e. è limitato), quindi è facile mostrare che, se $u \in \mathcal{D}$, allora $Hu \in L^2(\mathbb{R})$. Lo spettro puntuale di H , che verrà indicato con $\sigma_{\text{pp}}(H)$, è l'insieme degli autovalori di H ; sia, inoltre, \mathcal{H}_{pp} il sottospazio di \mathcal{D} generato dalle autofunzioni (cioè dagli *autovettori*) di H .

Il primo risultato che mostreremo consiste nel fatto che lo spettro di H è ridotto al solo spettro continuo. Per preparare l'enunciato, ricordiamo che i moltiplicatori di Floquet associati all'equazione differenziale di Schrödinger si possono scrivere come:

$$\mu_{\pm}(\lambda) = e^{\pm w(\lambda)L},$$

dove

$$w(\lambda) = -\gamma(\lambda) + i\alpha(\lambda). \quad (1.27)$$

Assumeremo convenzionalmente $\gamma(\lambda) \geq 0$ e $\alpha(\lambda) \geq 0$ (si noti che l'assunzione è lecita vista la simmetria del problema, i.e. si può parlare indifferentemente di w e di $-w$).

È ora possibile enunciare il seguente

Teorema 1.2. *Sia $H : \mathcal{D} \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ l'operatore definito in (1.1). Sia $w(\lambda) = -\gamma(\lambda) + i\alpha(\lambda)$ l'esponente caratteristico associato all'equazione (1.5). Lo spettro dell'operatore H è:*

$$\sigma(H) = \sigma_c(H) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \gamma(\lambda) = 0\}. \quad (1.28)$$

Dimostrazione. La prova di (1.28) si divide, sostanzialmente, in tre passi:

$$\sigma_{\text{pp}}(H) = \emptyset; \quad (1.29)$$

$$\gamma(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda \in \sigma(H); \quad (1.30)$$

$$\gamma(\lambda) > 0 \Rightarrow \lambda \notin \sigma(H). \quad (1.31)$$

Che valga (1.29) è chiaro dal momento che nessuna delle soluzioni dell'equazione di Schrödinger definite in (1.15) e (1.16) sta in $L^2(\mathbb{R})$.

Se $\boxed{\gamma(\lambda) = 0}$, sempre secondo il Teorema 1.1, esiste una soluzione limitata: la si chiami u . Si vuole quindi trovare una successione di funzioni $u_n \in \mathcal{D}$ approssimanti u , tali che

- $\|u_n\|_2 = 1,$

- $\|(H - \lambda I)u_n\|_2 \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$;

in questo modo, per la Proposizione 1.2, si avrà che λ appartiene allo spettro continuo di H .

Appare chiaro, almeno intuitivamente, che, per costruire siffatta u_n , bisognerà modificare u , “troncandola” nell’intervallo $[-n, n]$ e rendendola nulla al di fuori di esso, allo scopo di rendere u_n una funzione in L^2 e di approssimare u al tendere di n all’infinito. La scelta più naturale sarebbe semplicemente definire $u_n(x)$ come prodotto di $u(x)$ per la funzione caratteristica $\chi_{[-n, n]}(x)$ e per un’opportuna costante di normalizzazione; il problema è che, in questo caso specifico, si richiede che u_n e le sue prime due derivate non solo siano in L^2 (cosa che avviene di certo nel caso precedente), ma anche che u_n sia \mathcal{C}^2 , affinché l’operatore H vi si possa applicare.

Si dovrà pertanto definire una funzione $\varphi_n(x)$, che approssimi $\chi_{[-n, n]}(x)$ e che, inoltre, sia \mathcal{C}^2 : in questo modo, se

$$u_n(x) := \varphi_n(x)u(x),$$

si ottiene che

$$u_n \in \mathcal{D} \quad \text{e} \quad u_n \rightarrow u, \quad n \rightarrow \infty;$$

a questo punto è sufficiente ri-definire u_n moltiplicandolo per una costante c_n , scelta in modo che la nuova u_n soddisfi $\|u_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si può scegliere, ad esempio,

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-(x-1)^4} & , \text{ se } \quad x > 1 \\ +1 & , \text{ se } \quad -1 \leq x \leq +1 \\ e^{-(x+1)^4} & , \text{ se } \quad x < -1 \end{cases} .$$

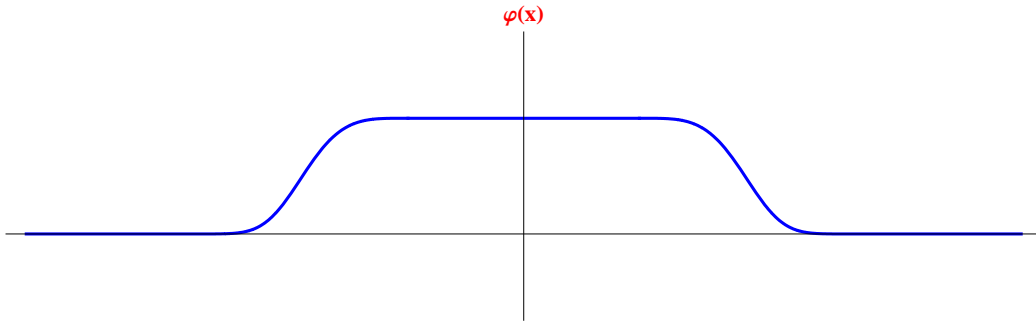


Figura 1.1: Grafico di $\varphi(x)$

Si verifica immediatamente che $\varphi \in L^2$: basta, infatti, osservare che, se $|x| > 1$, $0 < e^{-(x\pm 1)^4} \leq e^{-(x\pm 1)^2}$ ed applicare il criterio del confronto per

gli integrali. Si noti anche che $\varphi \in \mathcal{C}^2$: chiaramente φ è continua e le sue derivate prima e seconda

$$\varphi'(x) = \begin{cases} -4(x-1)^3 e^{-(x-1)^4} & , \text{ se } x > 1 \\ 0 & , \text{ se } -1 \leq x \leq +1 \\ -4(x+1)^3 e^{-(x+1)^4} & , \text{ se } x < -1 \end{cases}$$

$$\varphi''(x) = \begin{cases} -4e^{-(x-1)^4} (x-1)^2 [3 + 4(x-1)^4] & , \text{ se } x > 1 \\ 0 & , \text{ se } -1 \leq x \leq +1 \\ -4e^{-(x+1)^4} (x+1)^2 [3 + 4(x+1)^4] & , \text{ se } x < -1 \end{cases}$$

sono continue. Si osserva inoltre che $\varphi' \in L^2$ e $\varphi'' \in L^2$: infatti, per x sufficientemente grande vale (a meno di costanti moltiplicative) che

$$|\varphi'(x)| \leq e^{-(x-1)^4} e^x \in L^2(\mathbb{R});$$

la stessa maggiorazione vale per $|\varphi''(x)|$; si applica il criterio del confronto e si conclude, come voluto, che

$$\|\varphi'\|_2 < +\infty, \quad \|\varphi''\|_2 < +\infty.$$

Per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si pone

$$\varphi_n(x) := \varphi\left(\frac{x}{n}\right) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x}{n}-1\right)^4} & , \text{ se } x > n \\ +1 & , \text{ se } -n \leq x \leq +n \\ e^{-\left(\frac{x}{n}+1\right)^4} & , \text{ se } x < -n \end{cases}.$$

Per quanto visto, è immediato affermare che $\varphi_n \in \mathcal{D}$. Inoltre, poiché vale la relazione $\varphi_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right)$, si ha che

$$\varphi'_n(x) = \frac{1}{n} \varphi'\left(\frac{x}{n}\right), \quad \varphi''_n(x) = \frac{1}{n^2} \varphi''\left(\frac{x}{n}\right);$$

quindi, con qualche calcolo,

$$\|\varphi'_n\|_2^2 = \frac{1}{n} \|\varphi'\|_2^2, \quad \|\varphi''_n\|_2^2 = \frac{1}{n^3} \|\varphi''\|_2^2, \quad (1.32)$$

da cui segue che, $\forall n \in \mathbb{N}$, φ'_n e φ''_n sono funzioni di L^2 . È anche importante notare, in virtù della relazione (1.32), come le norme $\|\varphi'_n\|_2^2$ e $\|\varphi''_n\|_2^2$ tendano a 0 al tendere di n all'infinito.

Sia allora $u_n = \varphi_n u$; si noti che, dal momento che u è limitata, $u_n \in \mathcal{D}$. Si vuole calcolare $\|(\mathbb{H} - \lambda \mathbb{I})u_n\|_2$. Prima di tutto, ci si occupa di $\mathbb{H}u_n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}u_n = \mathbb{H}\varphi_n u &= -(\varphi_n u)'' + q\varphi_n u = -(\varphi_n' u + \varphi_n u')' + q\varphi_n u = \\ &= -(\varphi_n'' u + 2\varphi_n' u' + \varphi_n u'') + q\varphi_n u; \end{aligned}$$

pertanto, poiché $(\mathbb{H} - \lambda \mathbb{I})u = \mathbb{H}u - \lambda u = 0$, si ha che

$$\begin{aligned} (\mathbb{H} - \lambda \mathbb{I})u_n &= -(\varphi_n'' u + 2\varphi_n' u' + \varphi_n u'') + q\varphi_n u - \lambda \varphi_n u = \\ &= -2\varphi_n' u' - \varphi_n'' u + \varphi_n [\mathbb{H}u - \lambda u] = \\ &= -2\varphi_n' u' - \varphi_n'' u. \end{aligned}$$

E infine

$$\|(\mathbb{H} - \lambda \mathbb{I})u_n\|_2 = \|-2\varphi_n' u' - \varphi_n'' u\|_2 \leq 2\|\varphi_n' u'\|_2 + \|\varphi_n'' u\|_2; \quad (1.33)$$

dal momento che vale

$$\begin{aligned} \|\varphi_n' u'\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\varphi_n' u'|^2 \leq \|u'\|_{\infty}^2 \|\varphi_n'\|_2^2 \leq K \cdot \frac{1}{n} \|\varphi'\|_2^2, \\ \|\varphi_n'' u\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\varphi_n'' u|^2 \leq \|u\|_{\infty}^2 \|\varphi_n''\|_2^2 \leq K \cdot \frac{1}{n^3} \|\varphi''\|_2^2, \end{aligned}$$

da (1.33) si ottiene che

$$\|(\mathbb{H} - \lambda \mathbb{I})u_n\|_2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (1.34)$$

come desiderato. Gli stessi risultati valgono se la successione u_n viene opportunamente normalizzata, cioè se si modifica opportunamente u_n in modo che $\|u_n\|_2 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Segue, pertanto, che $\lambda \in \sigma_c(\mathbb{H}) = \sigma(\mathbb{H})$.

Se, invece, $\boxed{\gamma(\lambda) > 0}$, ci si trova nel caso (i) del teorema di Floquet. Allora esistono due soluzioni linearmente indipendenti $g_{\lambda}^{(\pm)}(\cdot)$ tali che

$$\left| g_{\lambda}^{(\pm)}(x) \right| \leq K e^{\mp \gamma(\lambda)x}, \quad (1.35)$$

ove K è costante.

Come visto, $[g_{\lambda}^{(+)}, g_{\lambda}^{(-)}](x) \equiv [g_{\lambda}^{(+)}, g_{\lambda}^{(-)}](0) \neq 0$. Pertanto

$$G_{\lambda}(x, y) = G_{\lambda}(y, x) := \frac{g_{\lambda}^{(-)}(x)g_{\lambda}^{(+)}(y)}{[g_{\lambda}^{(+)}, g_{\lambda}^{(-)}]}, \quad x \leq y, \quad (1.36)$$

è ben definita e si verifica immediatamente che

$$(\mathbb{H} - \lambda\mathbb{I})G_\lambda(x, y) = \delta_y(x), \quad (1.37)$$

ove δ_y è la “delta” di Dirac. Si dice che G_λ , in quanto soddisfacente la condizione (1.37), è la **funzione di Green** dell’operatore \mathbb{H} . Notiamo che (informalmente), se moltiplichiamo ambo i membri dell’equazione (1.37) per $f(x)$ e integriamo su \mathbb{R} rispetto alla variabile x , otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathbb{H} - \lambda\mathbb{I})G_\lambda(x, y)f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \delta_y(x)f(x) dx,$$

da cui, supponendo che si possa scambiare l’operatore con l’integrale e che il termine di destra sia definito, segue che

$$(\mathbb{H} - \lambda\mathbb{I}) \int_{\mathbb{R}} G_\lambda(x, y)f(x) dx = f(y),$$

cioè

$$G_\lambda f = (\mathbb{H} - \lambda\mathbb{I})^{-1}f.$$

Per affermare che G_λ è proprio l’operatore $(\mathbb{H} - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ è necessario mostrare che

$$G_\lambda : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D},$$

e che G_λ è continuo. Questa affermazione è contenuta nel seguente Lemma, la cui dimostrazione è rinviata al termine della sezione.

Lemma 1.1. *Sia $G_\lambda(\cdot, \cdot)$ la funzione definita dalla (1.36). Allora*

$$f \longmapsto G_\lambda f(x) := \int_{\mathbb{R}} G_\lambda(x, y)f(y) dy \quad (1.38)$$

definisce un operatore lineare e continuo su $L^2(\mathbb{R})$. Inoltre, $\text{Im}(G_\lambda) \subset \mathcal{D}$ e $G_\lambda = (\mathbb{H} - \lambda\mathbb{I})^{-1}$.

Pertanto, $(\mathbb{H} - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ esiste come operatore limitato su L^2 . Di conseguenza, per la Proposizione 1.2, λ non appartiene allo spettro continuo, dal momento che ogni successione $(u_n) \subset L^2$ tale che $\|(\mathbb{H} - \lambda\mathbb{I})u_n\|_2 \rightarrow 0$ converge a zero, poiché:

$$\|u_n\|_2 = \|(\mathbb{H} - \lambda\mathbb{I})^{-1}(\mathbb{H} - \lambda\mathbb{I})u_n\|_2 \leq \|\mathbb{H} - \lambda\mathbb{I}\| \|(\mathbb{H} - \lambda\mathbb{I})u_n\|_2$$

Ciò conclude la dimostrazione del teorema. □

La sezione si conclude con l’annunciata dimostrazione del Lemma 1.1.

Dimostrazione del Lemma 1.1. La linearità dell'operatore definito in (1.38) segue chiaramente dalla proprietà di linearità degli integrali. È quindi sufficiente mostrare la limitatezza degli operatori T_{\pm} definiti, per $f \in L^2$, da:

$$T_+ f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\gamma(y-x)} |f(y)| dy; \quad T_- f(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\gamma(x-y)} |f(y)| dy.$$

In questo modo, infatti, si ottiene che G_{λ} è limitato, quindi anche continuo. Si vuole quindi mostrare che T_- è limitato; il discorso per T_+ sarà pressoché analogo. Per $r > 0$, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (C-S) ed integrando per parti:

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r |T_- f(x)|^2 dx &= \int_{-r}^r \left(\int_{-\infty}^x e^{-\gamma(x-y)} |f(y)| dy \right)^2 dx \\ &= \int_{-r}^r e^{-2\gamma x} \left(\int_{-\infty}^x e^{\gamma y} |f(y)| dy \right)^2 dx \\ &= -\frac{1}{2\gamma} e^{-2\gamma x} \left(\int_{-\infty}^x e^{\gamma y} |f(y)| dy \right)^2 \Big|_{x=-r}^{x=+r} + \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} \int_{-r}^r e^{-\gamma x} |f(x)| \left(\int_{-\infty}^x e^{\gamma y} |f(y)| dy \right) dx \\ &\leq \frac{1}{2\gamma} (T_- f(-r))^2 + \frac{1}{\gamma} \int_{-r}^r |f(x)| |T_- f(x)|^2 dx \\ &\stackrel{\text{C-S}}{\leq} \frac{1}{2\gamma} (T_- f(-r))^2 + \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} \left(\int_{-r}^r |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-r}^r |T_- f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Si ottiene pertanto:

$$\begin{aligned} \left(\int_{-r}^r |T_- f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{1}{2\gamma} (T_- f(-r))^2 \left(\int_{-r}^r |T_-|^2 dx \right)^{-\frac{1}{2}} + \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} \left(\int_{-r}^r |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Applicando nuovamente la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha che

$$|T_- f(-r)| \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty,$$

quindi:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |T_- f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\gamma} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Come accennato, una stima del tutto analoga si può fare per

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |T_+ f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La limitatezza dell'operatore $f \mapsto G_\lambda f$ è così provata.

Dunque, se $f \in L^2$, allora

$$G_\lambda f \in L^2(\mathbb{R}).$$

D'altra parte $G_\lambda f(\cdot) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e $(G_\lambda f)'(\cdot), (G_\lambda f)''(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$: ciò segue da una opportuna applicazione del teorema di derivazione sotto il segno di integrale e del teorema di convergenza monotona. Ad esempio, se $f \in L^2$, si ha che

$$(G_\lambda f)''(x) = \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 G_\lambda(x, y) f(y) dy.$$

Allora

$$\begin{aligned} (\mathbb{H} - \lambda \mathbb{I})G_\lambda f(x) &= -(G_\lambda f)''(x) + q(x)G_\lambda f(x) - \lambda G_\lambda f(x) \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 G_\lambda(x, y) f(y) dy + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} q(x)G_\lambda(x, y) f(y) dy - \lambda \int_{\mathbb{R}} G_\lambda(x, y) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} [-\partial_x^2 G_\lambda(x, y) + (q(x) + \lambda G_\lambda(x, y))] f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{H} - \lambda \mathbb{I})G_\lambda(x, y) f(y) dy \\ &\stackrel{(1.37)}{=} f(x). \end{aligned}$$

Segue la tesi. □

1.5 Soluzioni stabili dell'equazione di Schrödinger

Al fine di comprendere meglio la struttura dello spettro di \mathbb{H} , è opportuno studiare più in dettaglio alcune proprietà della matrice di Floquet $Y_\lambda(L)$. Si è

già visto che $\det Y_\lambda(L) = 1$. Si denoti, anzitutto, la sua traccia, il cosiddetto **discriminante di Floquet**, con

$$\Delta(\lambda) := \text{Tr}[Y_\lambda(L)] = \phi_\lambda(L) + \psi'_\lambda(L).$$

L'utilità di introdurre tale funzione risiede nel fatto che l'equazione caratteristica (1.23) si può riscrivere nella forma seguente

$$(\mu(\lambda))^2 - \Delta(\lambda)\mu(\lambda) + 1 = 0, \quad (1.39)$$

le cui soluzioni (che sono i moltiplicatori di Floquet) sono

$$\mu_\pm(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta(\lambda)}{2}\right)^2 - 1}. \quad (1.40)$$

Pertanto, se $\mu_\pm = e^{\pm wL}$ con

$$w(\lambda) = -\gamma(\lambda) + i\alpha(\lambda),$$

allora

$$2 \cos(i w(\lambda)L) = \Delta(\lambda), \quad (1.41)$$

come si verifica facilmente. In virtù della relazione (1.39), possono verificarsi i seguenti tre casi:

$$|\Delta(\lambda)| > 2 \implies \mu(\lambda) \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \gamma(\lambda) > 0; \quad (1.42)$$

$$|\Delta(\lambda)| = 2 \implies \mu(\lambda) \in \{\pm 1\}, \quad \gamma(\lambda) = 0 \quad \text{e} \quad \alpha(\lambda) \in \frac{\pi}{L} \cdot \mathbb{Z}; \quad (1.43)$$

$$|\Delta(\lambda)| < 2 \implies |\mu(\lambda)| = 1, \quad \gamma(\lambda) = 0 \quad \text{e} \quad \alpha(\lambda) \notin \frac{\pi}{L} \cdot \mathbb{Z}. \quad (1.44)$$

Per quanto visto nel Teorema 1.2, ai fini dello studio dello spettro di H ci interesseranno prevalentemente i casi in cui $\gamma(\lambda) = 0$, vale a dire quelli in (1.43) e (1.44).

Si introduce ora la seguente definizione di **stabilità**.

Definizione 1.3 (Stabilità di soluzioni). *Una soluzione dell'equazione (1.5) si dice **stabile** se è in $L^2 \cap L^\infty$; si dice **instabile** altrimenti.*

Allo scopo di determinare la stabilità delle soluzioni dell'equazione di Schrödinger trovate in (1.15) e (1.16), si consideri il seguente corollario del Teorema di Floquet 1.1.

Corollario 1.1 (Test di stabilità). *Le soluzioni dell'equazione (1.5) sono stabili se, e solo se, $\Delta(\lambda)$ è reale e*

$$|\Delta(\lambda)| < 2,$$

oppure

$$\Delta(\lambda) = \pm 2 \quad \text{e} \quad \psi_\lambda(L) = \phi'_\lambda(L) = 0.$$

Dimostrazione. Se $\mu_+ \neq \mu_-$, allora la stabilità è equivalente al fatto che $iw(\lambda) \neq 0$ e che $w(\lambda)$ è puramente immaginario, il che, a sua volta, equivale a dire che $\Delta(\lambda)$ è reale ed in valore assoluto minore di 2, visto che $\Delta(\lambda) = \mu_+(\lambda) + \mu_-(\lambda)$, $\mu_+ = e^{wL}$ e $\mu_- = e^{-wL}$.

Se $\mu_+ = \mu_-$, allora la stabilità è equivalente a $\phi_\lambda(L) + \psi'_\lambda(L) = \pm 2$ e $\psi_\lambda(L) = \phi'_\lambda(L) = 0$ per il secondo punto del teorema. \square

Dal corollario segue un fatto fondamentale, vale a dire che per i λ che corrispondono a soluzioni stabili dell'equazione di Schrödinger, si ha che $\gamma(\lambda) = 0$, cioè $\lambda \in \sigma(H)$: lo spettro contiene, quindi, l'insieme dei λ tali che le soluzioni di (1.5) sono stabili. Si manifesta così l'annunciata corrispondenza tra stabilità e spettro.

Di vitale importanza in tal senso è il seguente

Teorema 1.3 (di oscillazione). *Sia q una funzione continua $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periodica di periodo $L > 0$; si consideri l'equazione di Schrödinger (1.5):*

$$g''_\lambda(x) + [\lambda - q(x)]g_\lambda(x) = 0.$$

Allora, esistono due successioni $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\lambda'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monotone crescenti di numeri reali che soddisfano le disuguaglianze

$$\lambda_0 < \lambda'_1 \leq \lambda'_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda'_3 \leq \lambda'_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots \quad (1.45)$$

e tali che:

- l'equazione (1.5) ha una soluzione di periodo L se, e solo se, $\lambda = \lambda_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ed una soluzione di periodo $2L$ se, e solo se, $\lambda = \lambda'_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$;
- le soluzioni di (1.5) sono stabili negli intervalli

$$] \lambda_0, \lambda'_1[, \quad] \lambda'_2, \lambda_1[, \quad] \lambda_2, \lambda'_3[, \quad] \lambda'_4, \lambda_3[, \quad \dots ; \quad (1.46)$$

- agli estremi di questi intervalli, le soluzioni di (1.5) sono stabili per $\lambda = \lambda_{2n+1}$ e $\lambda = \lambda_{2n+2}$ se, e solo se, $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$ oppure per $\lambda = \lambda'_{2n+1}$ e $\lambda = \lambda'_{2n+2}$ se, e solo se, $\lambda'_{2n+1} = \lambda'_{2n+2}$; sono instabili altrimenti; in ogni caso sono sempre instabili se $\lambda = \lambda_0$;
- per valori non reali di λ l'equazione (1.5) ha sempre soluzioni instabili.

Valgono inoltre le relazioni:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{-1} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda'_n)^{-1} = 0. \quad (1.47)$$

I λ_n sono le radici dell'equazione $\Delta(\lambda) = 2$ e i λ'_n sono le radici dell'equazione $\Delta(\lambda) = -2$.

Osservazione 1.3. Nel corso della sezione, per riferirsi in maniera immediata alle asserzioni del Teorema 1.3, si useranno le seguenti definizioni:

- i numeri reali λ_n saranno chiamati **valori caratteristici del primo tipo** di (1.5);
- i numeri reali λ'_n saranno detti **valori caratteristici del secondo tipo** di (1.5);
- gli intervalli (1.46) sull'asse reale λ saranno detti **intervalli di stabilità**; un estremo di un intervallo di questo tipo apparterrà ad esso se, e solo se, (1.5) ha una soluzione stabile in corrispondenza di quel valore di λ ;
- similmente si parlerà di **intervalli di instabilità**.

Sia gli intervalli di stabilità che quelli di instabilità sono ordinati in maniera del tutto naturale.

L'intervallo di instabilità $] -\infty, \lambda_0[$ sarà sempre presente; verrà chiamato intervallo **zero-esimo** di instabilità, mentre $] \lambda'_1, \lambda'_2[$ sarà il **primo** intervallo di instabilità.

Si osservi, inoltre, che, secondo il Teorema 1.3, nessuno degli intervalli di stabilità, né di quelli di instabilità, può ridursi ad un punto isolato.

Gli intervalli di stabilità non possono mai scomparire, ma due di essi possono combinarsi se $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$ oppure $\lambda'_{2n+1} = \lambda'_{2n+2}$.

In ogni caso, può accadere che gli intervalli di instabilità (ad eccezione del già citato zero-esimo, sempre presente) scompaiano del tutto. Questo può accadere, infatti, se $q(x)$ è costante. Si potrebbe anche dimostrare che questa è anche la sola circostanza possibile affinché si verifichi questa eventualità; per una dimostrazione di questo fatto, che esula dagli scopi di questa trattazione, si veda ad esempio [9].

Osservazione 1.4. Si considerino le soluzioni normalizzate ϕ_λ e ψ_λ dell'equazione di Schrödinger. Per meglio evidenziare la loro dipendenza da λ , talvolta si scriverà $\phi(x, \lambda)$ e $\psi(x, \lambda)$ invece di $\phi_\lambda(x)$ e $\psi_\lambda(x)$. Pertanto, $\Delta(\lambda) = \phi_\lambda(L, \lambda) + \psi'_\lambda(L, \lambda)$.

Prima di procedere alla dimostrazione del Teorema 1.3, è necessario introdurre e dimostrare i seguenti risultati, alcuni immediate conseguenze del teorema di Floquet, altri più sostanziali ed articolati.

Lemma 1.2. *Sia λ^* tale che $\lambda^* < \min q(x)$. Si ha che, se $\lambda \leq \lambda^*$, allora, per ogni $x > 0$,*

$$\phi_\lambda(x) \geq 1, \quad \psi'_\lambda(x) > 1$$

In particolare se $\lambda \leq \lambda^$ non ci sono soluzioni stabili di (1.5).*

Dimostrazione. Sia λ^* tale che per ogni x

$$\lambda^* - q(x) < 0.$$

Ciò è certamente possibile dal momento che $q(x)$, e quindi anche $-q(x)$, sono periodiche, continue e conseguentemente funzioni limitate di x .

Sia $\lambda \leq \lambda^*$. Si scriva (1.5) nella forma

$$g''_\lambda(x) = Q(x)g_\lambda(x), \tag{1.48}$$

ove $Q(x) = q(x) - \lambda \geq q(x) - \lambda^* > 0$ per ogni x , visto che $\lambda \leq \lambda^*$.

Siano ϕ_λ e ψ_λ le già citate soluzioni normalizzate di (1.5); quindi entrambe soddisfano:

$$\phi''_\lambda(x) = Q(x)\phi_\lambda(x); \quad \psi''_\lambda(x) = Q(x)\psi_\lambda(x).$$

Dal momento che $\phi_\lambda(0) = 1$, $\phi''_\lambda(0) = Q(0)\phi_\lambda(0) > 0$ e $\phi'_\lambda(0) = 0$, segue che per x positivo sufficientemente piccolo $\phi'_\lambda(x) > 0$. Pertanto, se l'insieme S degli zeri positivi di $\phi'_\lambda(x)$ è non vuoto, esso ha un estremo inferiore $\varepsilon > 0$.

Adesso si vuole mostrare che tale ε non esiste e che, di conseguenza, $\phi'_\lambda(x) > 0$ per ogni $x > 0$. A tal fine si osserva che per la continuità di $\phi'_\lambda(x)$ si ha che $\phi'_\lambda(\varepsilon) = 0$. Se -come è usuale- si riscrive (1.48) per ϕ_λ , si moltiplicano ambo i membri dell'uguaglianza per $\phi'_\lambda(x)$ e poi si integrano, si ottiene immediatamente che

$$(\phi'_\lambda(\varepsilon))^2 = 2 \int_0^\varepsilon Q(x)\phi_\lambda(x)\phi'_\lambda(x) dx. \tag{1.49}$$

Poiché $\phi_\lambda(0) = 1$ e $\phi'_\lambda(x) \geq 0$ per $0 \leq x \leq \varepsilon$, si ottiene che $\phi_\lambda(x) > 0$, $Q(x) > 0$ e $\phi'_\lambda(x) > 0$ per $0 < x < \varepsilon$. Il membro destro dell'equazione (1.49)

è così positivo, mentre si è visto che $\phi'_\lambda(\varepsilon) = 0$.

Si ottiene, pertanto, che $\phi_\lambda(x)$ è monotona crescente per $x > 0$, il che significa che $\phi_\lambda(x) \geq 1$ per $x > 0$.

Un argomento del tutto analogo mostra che $\psi'_\lambda(x) > 1$ per $x > 0$, da cui segue la tesi. \square

Lemma 1.3. *Se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, l'equazione (1.5) non ha soluzioni stabili.*

Dimostrazione. Si assuma che $\lambda = \zeta + i\xi$, ove ζ e ξ sono reali e $\xi \neq 0$. Sia $g_\lambda = u + iv$ una soluzione di (1.5) della forma

$$g_\lambda(x) = e^{wx}p(x) = u(x) + iv(x) \quad (1.50)$$

con iw reale e $p(x)$ periodica di periodo L . Secondo il teorema di Floquet, una soluzione del genere esiste se si ha stabilità per le soluzioni di (1.5).

Scrivendo (1.5) in due equazioni, una per la parte reale, una per la parte immaginaria, si trova:

$$u'' + [\zeta - q(x)]u = \xi v; \quad v'' + [\zeta - q(x)]v = -\xi u. \quad (1.51)$$

Se si moltiplica la prima equazione delle (1.51) per v , la seconda per u e si sottraggono, si vede che

$$u''v - v''u = \xi(u^2 + v^2),$$

e, integrando ambo i membri dell'uguaglianza nell'intervallo $[0, x]$ (il lato sinistro per parti, che

$$u'(x)v(x) - v'(x)u(x) = \xi \int_0^x [u^2(t) + v^2(t)] dt + c, \quad (1.52)$$

con c costante.

Per (1.50) le funzioni $|u|$, $|v|$, $|u'|$ e $|v'|$ debbono essere limitate per ogni valore di x (perché $p(x)$ è una funzione periodica derivabile); pertanto anche $|u'v - v'u|$ è limitata, e di conseguenza vale lo stesso per il valore assoluto di

$$I(x) = \int_0^x [u^2(t) + v^2(t)] dt.$$

In ogni caso, $|I(x)| \rightarrow \infty$ se $x \rightarrow \infty$ dal momento che $u^2 + v^2 = |p|^2$ e per n naturale positivo

$$I(nL) = \int_0^{nL} |p(t)|^2 dt = n \int_0^L |p(t)|^2 dt.$$

Pertanto, se λ non è reale non è possibile avere una soluzione del tipo (1.50). \square

Riassumendo tutti i risultati ottenuti finora abbiamo la

Proposizione 1.3. *Sia q fissato; sia $\lambda^* = \min q(x)$. Tutte le radici delle equazioni $\Delta(\lambda) - 2 = 0$ e $\Delta(\lambda) + 2 = 0$ sono reali e maggiori di λ^* .*

Dimostrazione. $\Delta(\lambda) = 2$ vale se, e solo se, $\mu_+ = \mu_- = 1$, mentre $\Delta(\lambda) = -2$ vale se, e solo se, $\mu_+ = \mu_- = -1$. Quindi, se $\Delta(\lambda) = \pm 2$, (1.5) avrà una soluzione della forma

$$g_\lambda(x) = e^{wx}p(x) = u(x) + iv(x)$$

con iw reale e $p(x)$ periodica di periodo L (discende dal teorema di Floquet). Dal momento che, se λ non è reale o $\lambda \leq \lambda^*$, allora (1.5) non ha soluzioni di questo tipo, segue la tesi del lemma. \square

Lemma 1.4. *L'equazione (1.5) ha una soluzione periodica di periodo L se, e solo se, $\Delta(\lambda) = 2$ ed una periodica di periodo $2L$ se, e solo se, $\Delta(\lambda) = -2$*

Dimostrazione. Semplicemente si osserva ancora una volta che la condizione $\mu_+ = \mu_- = 1$ del teorema di Floquet è equivalente alla relazione $\Delta(\lambda) = 2$, mentre $\mu_+ = \mu_- = -1$ corrisponde a $\Delta(\lambda) = -2$ \square

Ben più complicato è il seguente:

Lemma 1.5. *Sia τ una radice dell'equazione $\Delta(\lambda) - 2 = 0$ tale che la derivata $\Delta'(\lambda)$ di $\Delta(\lambda)$ rispetto a λ sia negativa o nulla per $\lambda = \tau$.*

Allora $\Delta'(\lambda) < 0$ in ogni intervallo aperto $\tau < \lambda < \tau_1$ in cui $\Delta(\lambda) > -2$.

Similmente, se τ' è una radice dell'equazione $\Delta(\lambda) + 2 = 0$ tale che $\Delta'(\tau') \geq 0$, allora $\Delta'(\lambda) > 0$ in ogni intervallo aperto $\tau' < \lambda < \tau'_1$ in cui $\Delta(\lambda) < 2$.

Il Lemma 1.5 fornisce un'utile informazione sull'andamento della funzione $\Delta(\lambda)$: spiega, infatti, che nella fascia

$$\{\lambda : -2 < \Delta(\lambda) < 2\}$$

essa è monotona, crescente a partire dai τ' per cui $\Delta(\tau') = -2$ finché il grafico di Δ "tocca" la retta orizzontale di ordinata 2, decrescente a partire dai τ per cui $\Delta(\tau) = 2$ finché il grafico arriva alla retta orizzontale di ordinata -2 . Si può quindi procedere alla dimostrazione del lemma.

Dimostrazione del Lemma 1.5. In questa dimostrazione si userà la seguente notazione:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \phi(x) &= z_1(x, \lambda), & \partial_\lambda \psi(x) &= z_2(x, \lambda), \\ \partial_\lambda \phi'(x) &= z'_1(x, \lambda), & \partial_\lambda \psi'(x) &= z'_2(x, \lambda), \end{aligned}$$

dove il simbolo ' indica la derivata rispetto alla variabile x .

Inoltre, per semplificare la simbologia, si scriverà η_1, η_2, η'_1 e η'_2 per $\phi_\lambda(L), \psi_\lambda(L), \phi'_\lambda(L), \psi'_\lambda(L)$ rispettivamente. Come in precedenza, Δ sta ad indicare $\eta_1 + \eta'_2$ e Δ' la sua derivata di Δ rispetto a λ , cioè:

$$\Delta' = z_1(L, \lambda) + z_2(L, \lambda).$$

Il primo passo della dimostrazione sarà derivare la formula

$$\Delta'(\lambda) = (\eta_1 - \eta'_2) \int_0^L \phi_\lambda(x) \psi_\lambda(x) dx - \eta_2 \int_0^L \phi_\lambda^2(x) dx + \eta'_1 \int_0^L \psi_\lambda^2(x) dx. \quad (1.53)$$

Per provare (1.53), si deriva rispetto a λ (1.5) per $g_\lambda = \phi_\lambda$ e $g_\lambda = \psi_\lambda$ rispettivamente e si ottiene

$$\begin{aligned} z_1'' + (\lambda - q)z_1 &= -\phi_\lambda, \\ z_2'' + (\lambda - q)z_2 &= -\psi_\lambda. \end{aligned} \quad (1.54)$$

La formula generale per la soluzione di un'equazione differenziale lineare, del secondo ordine porge

$$\begin{aligned} z_1(x) &= \phi_\lambda(x) \int_0^x \psi_\lambda(t) \phi_\lambda(t) dt - \psi_\lambda(x) \int_0^x \phi_\lambda^2(t) dt, \\ z_1'(x) &= \phi'_\lambda(x) \int_0^x \psi_\lambda(t) \phi_\lambda(t) dt - \psi'_\lambda(x) \int_0^x \phi_\lambda^2(t) dt; \\ z_2(x) &= \phi_\lambda(x) \int_0^x \psi_\lambda^2(t) dt - \psi_\lambda(x) \int_0^x \phi_\lambda(t) \psi_\lambda(t) dt, \\ z_2'(x) &= \phi'_\lambda(x) \int_0^x \psi_\lambda^2(t) dt - \psi'_\lambda(x) \int_0^x \phi_\lambda(t) \psi_\lambda(t) dt. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Le funzioni z_1 e z_2 in (1.55) sono le soluzioni di (1.54) che soddisfano le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} z_1(0) &= z_1'(0) = 0, \\ z_2(0) &= z_2'(0) = 0. \end{aligned}$$

Dal momento che le condizioni iniziali per ϕ_λ e ψ_λ sono indipendenti da λ , le soluzioni (1.55) sono quelle corrette. L'equazione (1.53) segue immediatamente da (1.55) ponendo $x = L$.

Poiché il Wronskiano $\phi_\lambda \psi'_\lambda - \psi_\lambda \phi'_\lambda \equiv 1$, in particolare per $x = L$

$$\eta_1 \eta'_2 - \eta_2 \eta'_1 = 1.$$

Quindi

$$\Delta^2 - 4 = (\eta_1 + \eta_2')^2 - 4(\eta_1\eta_2' - \eta_2\eta_1') = (\eta_1 - \eta_2')^2 + 4\eta_1'\eta_2$$

Ponendo

$$\operatorname{sgn} \eta_1' = \begin{cases} +1, & \text{se } \eta_1' > 0 \\ 0, & \text{se } \eta_1' = 0 \\ -1, & \text{se } \eta_1' < 0 \end{cases},$$

e, assumendo che $\eta_1' \neq 0$, si trova con facili conti da (1.53):

$$\Delta'(\lambda) = \operatorname{sgn} \eta_1' \left\{ \int_0^L \left(\sqrt{|\eta_1'|} \psi_\lambda + \operatorname{sgn} \eta_1' \frac{\eta_1 - \eta_2'}{2\sqrt{|\eta_1'|}} \phi_\lambda \right)^2 dx - \frac{\Delta^2 - 4}{4|\eta_1'|} \int_0^L \phi_\lambda^2 dx \right\}. \quad (1.56)$$

L'equazione (1.56) mostra che $\Delta'(\lambda)$ ha lo stesso segno di η_1' in ogni intervallo in cui $\eta_1' \neq 0$ e $\Delta^2 \leq 4$. Si consideri ora un valore τ di λ per cui $\Delta(\tau) = 2$ e $\Delta'(\tau) \leq 0$. Si vuole stabilire che, per un δ sufficientemente piccolo, la funzione $\Delta(\lambda)$ è decrescente nell'intervallo $\tau < \lambda < \tau + \delta$.

Se $\Delta'(\tau) < 0$, questo è ovvio. Si assuma ora che $\Delta(\tau) = 2$ e $\Delta'(\tau) = 0$. In questo caso, secondo (1.56), è necessario che $\eta_1'(\tau) = 0$. Inoltre, dal momento che

$$\Delta^2 - 4 = (\eta_1 - \eta_2')^2 + 4\eta_1'\eta_2 = 0,$$

si trova che $\eta_1(\tau) - \eta_2'(\tau) = 0$; mentre da $\eta_1\eta_2' - \eta_2\eta_1' = 1$, discende che $\eta_1(\tau) = \eta_2'(\tau) = 1$. Allora (1.53) si riduce a

$$\Delta'(\tau) = -\eta_2 \int_0^L \phi_\lambda^2(x) dx,$$

e pertanto $\Delta'(\tau) = 0$ implica che $\eta_2(\tau) = 0$.

Si vuole ora calcolare

$$\Delta''(\lambda) = \frac{d\Delta'}{d\lambda}(\tau)$$

ove τ è tale che

$$\eta_1'(\tau) = \eta_2(\tau) = 0, \quad \eta_1(\tau) = \eta_2'(\tau) = 1. \quad (1.57)$$

Per far ciò, si deriva (1.53) rispetto a λ e si usa (1.55) per $x = L$ per ottenere le derivate rispetto a λ di $\eta_1'(\lambda)$, etc., in $\lambda = \tau$. Un facile calcolo diretto mostra che, se vale (1.57),

$$\Delta''(\tau) = 2 \left\{ \int_0^L \phi_\tau(x) \psi_\tau(x) dx \right\}^2 - 2 \int_0^L \phi_\tau^2(x) dx \int_0^L \psi_\tau^2(x) dx. \quad (1.58)$$

Dal momento che $\phi_\lambda(x)$ e $\psi_\lambda(x)$ sono funzioni linearmente indipendenti qualunque sia λ , applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz col segno $<$ a (1.58), si ottiene

$$\Delta''(\tau) < 0.$$

Pertanto si trova nuovamente che $\Delta'(\lambda)$ è decrescente in un intervallo $\tau < \lambda < \tau + \delta$.

Si assuma ora che la tesi del lemma sia falsa. Allora, dovrebbe esistere un $\tau^* > \tau$ tale che $\Delta'(\lambda) < 0$ per $\tau < \lambda < \tau^*$, ma $\Delta'(\tau^*) = 0$ sebbene $\Delta(\tau^*) > -2$. Si avrà allora che

$$\Delta^2(\tau^*) - 4 = (\eta_1 - \eta_2')^2 + 4\eta_1'\eta_2 < 0,$$

da cui segue che necessariamente $\eta_1'\eta_2 < 0$ per $\lambda = \tau^*$. Ma allora $\eta_1' \neq 0$ e così, per (1.56), $\Delta(\tau^*) \neq 0$, che è una contraddizione.

Questo dimostra il lemma nel caso in cui $\Delta(\lambda) = 2$.

Se $\Delta(\lambda) = -2$, basta trascrivere quasi letteralmente la prova appena fatta. \square

Fortuitamente, la dimostrazione appena fatta del Lemma 1.5 mostra anche che vale il seguente:

Lemma 1.6. *Le radici dell'equazione*

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$$

possono essere semplici o doppie. Se, per un particolare valore di $\lambda = \tau$,

$$\Delta^2(\tau) = 4, \quad \Delta'(\tau) = 0,$$

allora $\Delta''(\tau) < 0$ se $\Delta(\tau) = 2$ e $\Delta''(\tau) > 0$ se $\Delta(\tau) = -2$.

Condizioni necessarie e sufficienti per $\Delta^2(\tau) - 4$ e $\Delta'(\tau)$ affinché entrambi si annullino contemporaneamente sono

$$\eta_1(\tau) - \eta_2'(\tau) = \eta_1'(\tau) = \eta_2(\tau) = 0.$$

È necessario a questo punto citare il seguente teorema, la cui prova completa verrà qui omessa. Per una dimostrazione si veda [9, II].

Teorema 1.4. *La funzione*

$$\Delta(\lambda) = \phi_\lambda(L) + \psi_\lambda'(L)$$

è una funzione analitica intera della variabile complessa λ . Il suo ordine di crescita per $|\lambda| \rightarrow \infty$ è esattamente $\frac{1}{2}$: cioè esistono due costanti positive M e m tali che

$$|\Delta(\lambda)| \exp(-M\sqrt{|\lambda|}) \quad (1.59)$$

è limitata per ogni λ e, per λ reale e $\lambda \rightarrow -\infty$,

$$|\Delta(\lambda)| \exp(-m\sqrt{|\lambda|}) \rightarrow \infty. \quad (1.60)$$

Dal Teorema 1.4 discende il seguente

Corollario 1.2. *Le funzioni $\Delta(\lambda) + 2$ e $\Delta(\lambda) - 2$ hanno infiniti zeri.*

Dimostrazione. Per ottenere questo risultato, si utilizza un teorema sulle funzioni intere, il quale afferma che ogni funzione intera, avente ordine di crescita $1/2$, ha infiniti zeri. Una deduzione di questo teorema si può trovare in [8, cap. 1]. \square

Ai fini della dimostrazione del Teorema 1.3 è necessario un altro risultato:

Lemma 1.7. *Sia λ_0 minima tra le radici dell'equazione $\Delta(\lambda)^2 - 4 = 0$. Allora, λ_0 è una radice semplice e $\Delta'(\lambda_0) < 0$.*

Dimostrazione. Si noti, anzitutto, che tra le infinite (Teorema 1.4 e Corollario 1.2) radici reali della funzione $\Delta(\lambda) - 2$ deve essercene una minima, λ_0 come si vede applicando il Lemma 1.2. Si supponga che λ_0 sia una radice doppia, i.e. $\Delta'(\lambda_0) = 0$. È noto dal Lemma 1.2 e dalla continuità di Δ che $\Delta(\lambda) > 2$ se $\lambda < \lambda_0$. Pertanto, $\lambda = \lambda_0$ non può essere un massimo di $\Delta(\lambda)$ se $\Delta(\lambda_0) = 2$. Ma il Lemma 1.6 mostra che $\Delta(\lambda)$ avrebbe un massimo in $\lambda = \lambda_0$ se $\Delta'(\lambda_0) = 0$. Questa è una contraddizione: segue la tesi. \square

Un raffronto tra il Lemma 1.6 ed il Teorema 1.1 permette di affermare inoltre il seguente:

Corollario 1.3. *L'equazione di Hill (1.5) ha due soluzioni linearmente indipendenti, periodiche di periodo L o $2L$ se, e solo se, l'equazione $\Delta^2 - 4 = 0$ ha una radice doppia.*

È ora possibile procedere alla dimostrazione del teorema di oscillazione.

Dimostrazione del Teorema 1.3. Anzitutto, si esclude la possibilità di soluzioni stabili nel caso in cui λ sia complesso: per affermare ciò è sufficiente il Lemma 1.3.

A questo punto, si vuole mostrare che esiste un numero reale λ^* tale che per $\lambda \leq \lambda^*$ le soluzioni di (1.5) sono instabili.

Se si considera il λ^* del Lemma 1.2, allora in particolare $\Delta(\lambda) = \phi_\lambda(L, \lambda) + \psi'_\lambda(L, \lambda) > 2$, quindi per il Corollario 1.1 le soluzioni di (1.5) sono instabili.

Il Teorema 1.4 ed il Corollario 1.2 affermano congiuntamente che $\Delta(\lambda) - 2$ e $\Delta(\lambda) + 2$ sono funzioni analitiche intere di λ che hanno infiniti zeri. Per la Proposizione 1.3 tutti questi zeri sono reali e maggiori di λ^* . Ciò, insieme al Lemma 1.4, stabilisce di fatto l'esistenza delle due successioni (λ_n) e (λ'_n) . Dal momento che $\Delta(\lambda)$ è una funzione analitica intera, i limiti (1.47) sono chiaramente verificati.

Le disuguaglianze (1.45), unitamente all'affermazione che gli intervalli aperti (1.46) sono intervalli di stabilità, sono invece una conseguenza del Lemma 1.5.

Infatti, si vede dal Lemma 1.2 che se $\lambda \leq \lambda^*$, allora $\Delta(\lambda) > 2$. Tra le infinite radici della funzione $\Delta(\lambda) - 2$ deve essercene una minima, λ_0 , tale che $\Delta'(\lambda_0) < 0$ (Lemma 1.7). Pertanto, il Lemma 1.5 mostra che per $\lambda > \lambda_0$, $\Delta(\lambda)$ deve essere una funzione decrescente finché $\Delta(\lambda) = -2$. Di certo, ciò deve accadere per un qualche $\lambda = \lambda'_1 > \lambda_0$, dal momento che $\Delta(\lambda) + 2$ ha infiniti zeri reali senza un punto limite finito. Ora, o $\Delta'(\lambda'_1) = 0$ o $\Delta'(\lambda'_1) < 0$. Se $\Delta'(\lambda'_1) = 0$, λ'_1 è una radice doppia di $\Delta(\lambda) + 2 = 0$ ed avrà il "ruolo", sia di λ'_1 che di λ'_2 (per il Lemma 1.6, $\Delta(\lambda) + 2 = 0$ non può avere radici di molteplicità maggiore di 2). Per il Lemma 1.5, $\Delta'(\lambda'_1) = 0$ implica che $\Delta(\lambda)$ cresce per $\lambda > \lambda'_1 = \lambda'_2$ fino al raggiungimento del valore 2.

D'altra parte, se $\Delta'(\lambda'_1) < 0$, allora $\Delta(\lambda) < -2$ per $\lambda'_1 < \lambda < \lambda'_2$, ove λ'_2 è il più piccolo zero $> \lambda'_1$ dell'equazione $\Delta(\lambda) + 2 = 0$. Dato che $\Delta(\lambda) < -2$ nell'intervallo $]\lambda'_1, \lambda'_2[$, in base al Corollario 1.1, questo risulta un intervallo di instabilità per le soluzioni di (1.5). In questo caso, $\Delta(\lambda'_2) \geq 0$, come si vede facilmente dal fatto che $\Delta(\lambda) < \Delta(\lambda'_2)$ per ogni $\lambda < \lambda'_2$ e sufficientemente "vicino" a λ'_2 . Usando nuovamente il Lemma 1.5, si può pertanto concludere che $\Delta(\lambda)$ è una funzione crescente in ogni intervallo $\lambda'_2 < \lambda < \hat{\lambda}$ in cui $\Delta(\lambda) < 2$. Il più grande intervallo di questo tipo è $]\lambda'_2, \lambda_1[$, dove λ_1 è la più piccola radice di $\Delta(\lambda) - 2$ che è $> \lambda'_2$. Sempre il Corollario 1.1 mostra che quest'intervallo è di stabilità per le soluzioni di (1.5).

Continuando induttivamente con questo metodo, si trova che le disuguaglianze (1.45) valgono e che gli intervalli aperti (1.46) sono i soli intervalli di stabilità per le soluzioni di (1.5).

Infine, i risultati dei Corollari 1.1 e 1.3 ed del Lemma 1.6 portano ad affermare che le soluzioni di (1.5) sono stabili per $\lambda = \lambda_{2n+1}$ (rispettivamente $\lambda = \lambda'_{2n+1}$) se, e solo se, λ_{2n+1} (rispettivamente λ'_{2n+1}) è una radice doppia di $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$, vale a dire se, e solo se, $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$ (rispettivamente $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$).

La dimostrazione del Teorema 1.3 è così conclusa. □

È interessante, ai fini di uno studio analitico più approfondito del discriminante, per capirne il comportamento, anche il seguente teorema:

Teorema 1.5. *Se $q(x)$ è normalizzata in modo che $\int_0^L q(x) dx = 0$, il valore assoluto della funzione*

$$\Delta(\lambda) - 2 \cos(\pi\sqrt{\lambda}) = \frac{o(1)}{\sqrt{\lambda}}$$

per $\lambda \rightarrow +\infty$. Per tutti i valori complessi di $\sqrt{\lambda}$ con parte reale non negativa, vale

$$\left| \Delta(\lambda) - 2 \cos(\pi\sqrt{\lambda}) \right| \leq 2e^{\pi\omega_2} \left[\exp\left(\frac{\pi M^*}{\sqrt{|\lambda|}}\right) - 1 \right]$$

Dimostrazione. La dimostrazione è omessa. □

1.6 Struttura fine dello spettro

Considerando insieme il Teorema 1.1 (di Floquet), il Teorema 1.2 e il Teorema 1.3, insieme a tutti i loro corollari e lemmi, si nota che la stabilità delle soluzioni dell'equazione di Hill (1.5) e lo spettro di H sono oggetti matematici strettamente legati.

Si è visto, infatti, nel Teorema 1.2, che lo spettro di H è formato da tutti i λ tali che

$$\gamma(\lambda) = 0,$$

ove $\gamma(\lambda) = -\Re w(\lambda)$. Ma ciò avviene solo per i λ tali che valgono (1.43) e (1.44), ovvero quelli che appartengono alle chiusure degli intervalli di stabilità definiti in (1.46).

Si può pertanto enunciare il seguente teorema, preannunciato nella sezione 1.1, che conclude il capitolo.

Teorema 1.6. *Esistono due successioni di numeri reali $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ e $(\lambda'_n)_{n \geq 1}$ soddisfacenti le disuguaglianze*

$$-\infty < \lambda_0 < \lambda'_1 \leq \lambda'_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda'_3 \leq \lambda'_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots$$

e tali che

$$\sigma(H) = \sigma_c(H) = \bigcup_{n \geq 0} ([\lambda_{2n}, \lambda'_{2n+1}] \cup [\lambda'_{2n+2}, \lambda_{2n+1}]); \quad (1.61)$$

inoltre, per $\lambda \in \bigcup_{n \geq 0} (]\lambda_{2n}, \lambda'_{2n+1}[\cup]\lambda'_{2n+2}, \lambda_{2n+1}[)$, esistono due soluzioni linearmente indipendenti di (1.5) della forma

$$g^{(\pm)}(\lambda, x) = p_{\pm}(\lambda, x)e^{\pm i\alpha(\lambda)x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.62)$$

dove $p_{\pm}(\lambda, \cdot)$ sono funzioni di x a valori complessi, periodiche di periodo L , e la "fase" $\alpha(\lambda)$ è la parte immaginaria dell'esponente caratteristico $w(\lambda)$.

Osservazione 1.5. Gli intervalli chiusi $[\lambda_{2n}, \lambda'_{2n+1}]$ e $[\lambda'_{2n+2}, \lambda_{2n+1}]$ sono le cosiddette **bande di energia** di H (il nome viene dal senso fisico di H e dell'equazione di Schrödinger); gli intervalli aperti, che di fatto sono le componenti connesse di $\mathbb{R} \setminus \sigma(H)$, $]\lambda'_{2n+1}, \lambda'_{2n+2}[$ e $]\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}[$ si dicono i **buchi** (in inglese **gaps**) dello spettro.

Si noti che i *gaps* possono essere anche vuoti.

1.7 La funzione discriminante

In questa sezione vogliamo dare una ulteriore descrizione della funzione **discriminante**, trattando in particolare, a titolo d'esempio, il caso in cui il potenziale sia costante. Indipendentemente dall'esempio, per le proprietà viste nella sezione 1.5, in generale l'andamento della funzione $\lambda \mapsto \Delta(\lambda)$ appare come in Figura 1.2.

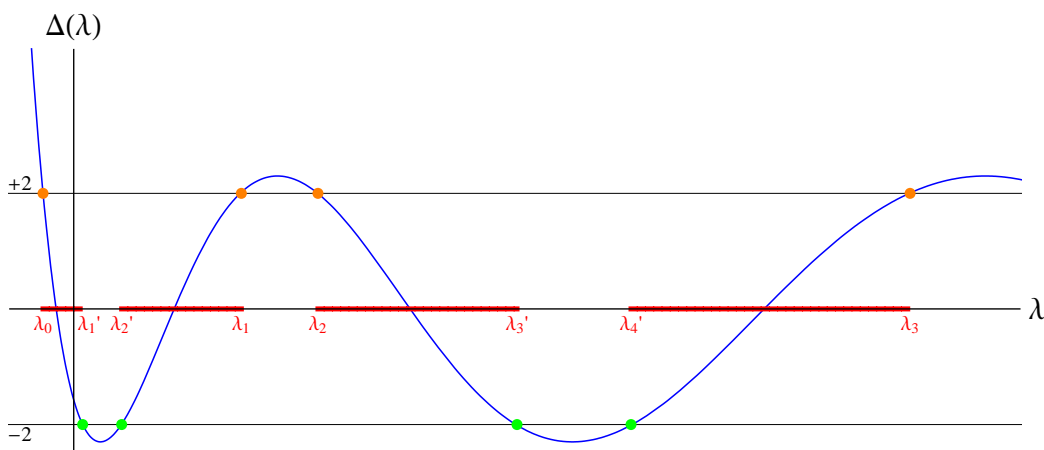


Figura 1.2: Grafico di $\Delta(\lambda)$

Sono evidenziati gli intervalli componenti lo spettro, cioè quelli in cui la funzione $\Delta(\lambda)$ è in valore assoluto ≤ 2 ; le notazioni rispettano quelle utilizzate negli enunciati dei teoremi 1.3 e 1.6.

Si supponga ora che

$$q(x) \equiv q,$$

con q costante. Si noti che le funzioni costanti sono periodiche, di qualunque periodo si voglia. Si vuole studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{C}$ l'equazione di Schrödinger

$$g''_{\lambda}(x) + (\lambda - q)g_{\lambda}(x) = 0 \quad (1.63)$$

e applicare, *in questo caso particolare*, quanto fatto nelle sezioni precedenti: ad esempio, si calcoleranno le soluzioni normalizzate ϕ_{λ} e ψ_{λ} , la matrice wronskiana, i moltiplicatori di Floquet μ_{\pm} , l'esponente caratteristico $w(\lambda)$; si determineranno le soluzioni g_{λ}^{\pm} per (1.63), lo spettro dell'operatore H associato al potenziale $q(x) \equiv q$, la funzione discriminante.

Se $\boxed{\lambda = q}$, le soluzioni ϕ_q e ψ_q sono

$$\phi_q(x) = 1, \quad \psi_q(x) = x;$$

infatti le loro derivate sono

$$\phi'_q(x) = 0, \quad \psi'_q(x) = 1,$$

sono indipendenti e soddisfano la condizione di normalizzazione. La matrice wronskiana è

$$Y_q(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed i suoi autovalori sono le soluzioni dell'equazione

$$\mu^2 - 2\mu + 1 = 0,$$

cioè $\mu_+ = \mu_- = 1$.

Anche nel caso $\boxed{\lambda \neq q}$, l'equazione ha soluzioni note e si possono subito calcolare ϕ_{λ} e ψ_{λ} : se si scelgono, infatti,

$$\phi_{\lambda}(x) = \cos(\sqrt{q - \lambda}x), \quad \psi_{\lambda}(x) = \frac{1}{\sqrt{q - \lambda}} \sin(\sqrt{q - \lambda}x),$$

esse sono soluzioni di (1.63), sono chiaramente indipendenti; dal momento che hanno derivate rispettive

$$\phi'_{\lambda}(x) = -\sqrt{q - \lambda} \sin(\sqrt{q - \lambda}x), \quad \psi'_{\lambda}(x) = \cos(\sqrt{q - \lambda}x),$$

soddisfano la condizione

$$\begin{pmatrix} \phi_{\lambda}(0) \\ \phi'_{\lambda}(0) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \psi_{\lambda}(0) \\ \psi'_{\lambda}(0) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La *matrice wronskiana* è quindi

$$Y_{\lambda}(x) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{q - \lambda}x) & \frac{1}{\sqrt{q - \lambda}} \sin(\sqrt{q - \lambda}x) \\ -\sqrt{q - \lambda} \sin(\sqrt{q - \lambda}x) & \cos(\sqrt{q - \lambda}x) \end{pmatrix}.$$

Si noti che, come già mostrato in precedenza, $\det Y_\lambda(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Prendendo 1 come periodo di q , si ottiene che

$$\Delta(\lambda) = 2 \cos(\sqrt{q - \lambda}). \quad (1.64)$$

I *moltiplicatori di Floquet* sono gli zeri dell'equazione

$$\mu^2 - 2 \cos(\sqrt{q - \lambda})\mu + 1 = 0,$$

cioè

$$\mu_\pm(\lambda) = \cos(\sqrt{q - \lambda}) \pm \sqrt{\cos^2(\sqrt{q - \lambda}) - 1} = \cos(\sqrt{q - \lambda}) \pm i \sin(\sqrt{q - \lambda});$$

si noti che

$$\mu_+ \mu_- = 1.$$

Pertanto, esiste $w(\lambda)$ tale che $\mu_\pm(\lambda) = e^{\pm iw(\lambda)}$; poiché si è visto, in generale, che

$$\Delta(\lambda) = 2 \cos(iw(\lambda)), \quad (1.65)$$

in virtù di (1.64) possiamo prendere

$$w(\lambda) = i\sqrt{q - \lambda};$$

infatti,

$$e^{\pm iw(\lambda)} = e^{\pm i\sqrt{q - \lambda}} = \cos(\sqrt{q - \lambda}) \pm i \sin(\sqrt{q - \lambda}).$$

Per $\lambda \neq q$, esistono due soluzioni linearmente indipendenti nella forma di *onde di Bloch*:

$$g_\lambda^{(\pm)}(x) = e^{\pm i\sqrt{q - \lambda}x}, \quad (1.66)$$

per cui si ha *stabilità* se, e solo se

$$\lambda \in]q, +\infty[.$$

Lo *spettro* viene così ad essere

$$\sigma(\mathbf{H}) = [q, +\infty[. \quad (1.67)$$

I seguenti grafici (tratti da [7]) evidenziano, invece, l'andamento (generale) delle funzioni $\lambda \mapsto \gamma(\lambda)$ e $\lambda \mapsto \alpha(\lambda)$. In particolare, si noti che $\gamma(\cdot)$ e $\alpha(\cdot)$ dipendono strettamente l'una dall'altra: se $\gamma(\lambda) = 0$, λ è in una banda dello spettro e α varia da $j\frac{\pi}{L}$ a $(j + 1)\frac{\pi}{L}$, per qualche $j \in \mathbb{Z}$; se γ diventa positivo, $\alpha(\lambda)$ rimane costante per tutti i λ nei gaps dello spettro. Le considerazioni delle sezioni precedenti non sono tuttavia sufficienti a mostrare la continuità e la monotonia del grafico di α : ciò verrà fatto nel corso del Capitolo 2.

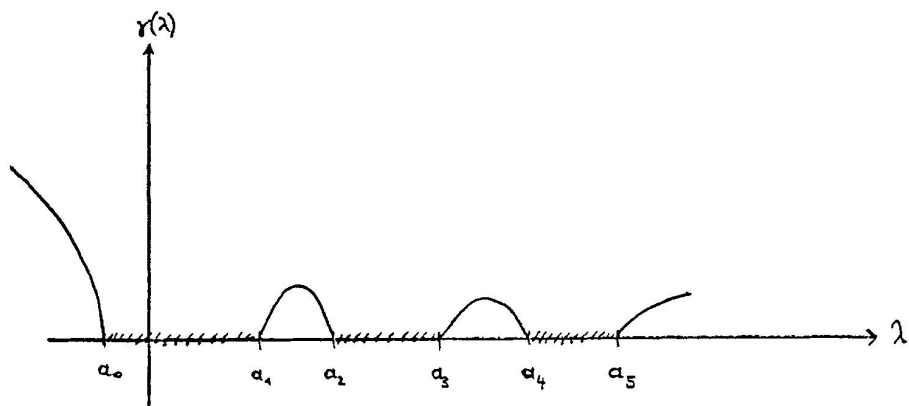


Figura 1.3: Grafico di $\gamma(\lambda)$

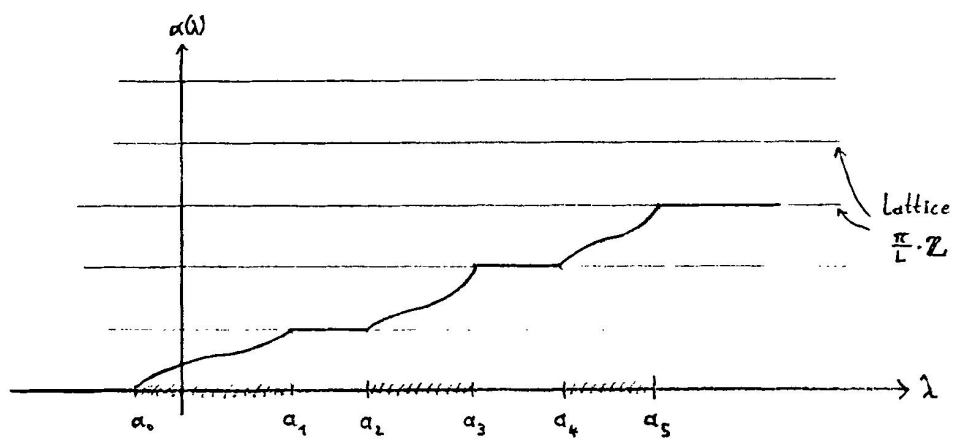


Figura 1.4: Grafico di $\alpha(\lambda)$

Capitolo 2

Un esempio di operatore di Schrödinger con potenziale quasi periodico

2.1 Introduzione

Si è visto, nel capitolo precedente, che, nel caso in cui il potenziale dell'operatore di Schrödinger H definito in (1.1) sia periodico, lo spettro è dato da una successione finita o infinita di intervalli che si estendono all'infinito.

Poco si sa, in generale, dello spettro di tale operatore se il potenziale q è una funzione continua quasi periodica (si veda la Definizione 2.3), dal momento che per le funzioni quasi periodiche non si hanno abbastanza informazioni sulle soluzioni dell'equazione differenziale

$$Hf = \lambda f.$$

Il problema generale di caratterizzare lo spettro dell'operatore di Schrödinger con un potenziale di questo tipo rimane tuttora aperto. Esistono, tuttavia, casi in cui lo spettro assume forme molto interessanti. Per fare un esempio, J. Avron e B. Simon (si veda [1]) hanno costruito un modello per la struttura (notoriamente molto complicata) degli anelli di Saturno tramite lo spettro di un operatore di Schrödinger con potenziale quasi periodico.

L'obiettivo di questo capitolo sarà costruire, a titolo di esempio, uno di questi casi, in cui il potenziale è una funzione periodica al limite (che è anche quasi periodica: si veda la Definizione 2.4) e lo spettro viene ad essere un sottoinsieme della retta reale di tipo Cantor, vale a dire chiuso, privo di punti isolati e "mai denso", i.e. con complementare denso in \mathbb{R} . Ci si baserà principalmente su quanto esposto nell'articolo di Jürgen Moser [10]. Si mostrerà

in particolare che in un intorno di un qualsiasi potenziale periodico (nella topologia di $\mathcal{C}(\mathbb{R})$) ci sono potenziali quasi periodici, a cui corrisponde uno spettro mai denso.

Per costruire l'esempio, si partirà dal problema classico del capitolo precedente; per poter ottenere uno spettro di tipo Cantor si dovrà operare opportunamente sullo spettro (classico) di H, "bucandolo" iterativamente. Per far ciò, si estenderà la Teoria di Floquet alle equazioni di Hill in genere

$$y'' = Q(x)y,$$

in modo da caratterizzare un oggetto ad esse associato, il **numero di rotazione**, insieme alle sue proprietà principali. Si dimostrerà che tale numero esiste, indipendente dalla soluzione particolare dell'equazione di Hill; la sua importanza risiede nel legame stretto che ha con lo spettro di H: infatti, se $Q(x) = q - \lambda$, con q periodica, il numero di rotazione è una funzione di λ indipendente dalla scelta di una soluzione dell'equazione $g''_\lambda(x) = [q(x) - \lambda]g_\lambda(x)$, continua, monotona crescente, strettamente crescente per i λ appartenenti allo spettro, costante altrimenti, derivabile all'interno dello spettro, non derivabile sulla frontiera. Per farsi un'idea, si veda la Figura 1.4, che descrive l'andamento della parte immaginaria dell'esponente di Floquet caratteristico; si può, infatti, dimostrare che la funzione $\lambda \mapsto \alpha(\lambda)$ del Capitolo 1 è esattamente la funzione numero di rotazione, introdotta in questo capitolo.

Si procederà poi con lo studio ulteriore di un'altro oggetto, già introdotto nel capitolo precedente, il **discriminante**, intimamente legato al numero di rotazione dalla relazione

$$\Delta(\lambda) = 2 \cos(L\alpha(\lambda)),$$

che vale nei λ in cui $|\Delta(\lambda)| \leq 2$. Si investigheranno le proprietà di Δ come funzionale di Q ; se ne determineranno in particolare le "derivate" prima e seconda. In particolare, se si considera $Q = q - \lambda$, tutto questo lavoro è finalizzato alla seguente

Proposizione. *Sia $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tale che*

$$|\Delta(\lambda^*, q)| = 2, \quad \Delta'(\lambda^*, q) = 0,$$

ove ' indica la derivata prima rispetto a λ ; sia $q_1(x)$ funzione continua periodica di periodo L, che non appartenga allo spazio generato $\langle 1, N \rangle$.

Allora per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, in qualche punto $\lambda^(\varepsilon)$ in un conveniente intorno di λ^* , si ha che*

$$|\Delta(\lambda^*(\varepsilon), q + \varepsilon q_1)| > 2. \tag{2.1}$$

Questo risultato spiega un fenomeno che avviene e che sarà un tassello fondamentale nella creazione di un insieme tipo Cantor: infatti, esso afferma che si può perturbare q in corrispondenza di un massimo locale per Δ , con l'effetto che il massimo locale si sposta più in alto e l'intervallo di stabilità collassato si "spacca" in due pezzi, creando un buco. In conclusione, si enuncerà un teorema che costruisce una funzione periodica al limite (limite uniforme di potenziali periodici) il cui spettro è un insieme di tipo Cantor. La trattazione procederà piuttosto snella: non ci si soffermerà eccessivamente su dettagli tecnici come nel Capitolo 1, si privilegeranno bensì le definizioni e gli enunciati, si citeranno anche alcuni risultati senza dimostrazione, rimandando alle fonti: ad esempio le più importanti sono [2], [6], [10] e [11]. In molti casi saranno presenti richiami, anche sostanziali, al capitolo precedente, specialmente per quanto riguarda la Teoria di Floquet; per questo motivo ne è fortemente consigliata la lettura, almeno a titolo introduttivo.

2.2 Funzioni quasi periodiche

Si vuole adesso introdurre la nozione di funzione **quasi periodica secondo H. Bohr**, che servirà per costruire il potenziale dell'esempio. La trattazione è semplicemente a titolo introduttivo: compariranno principalmente definizioni e asserzioni/enunciati senza dimostrazione. Ci si è basati principalmente su un testo molto chiaro e completo sull'argomento, che è [2].

Per farsi un'idea, la proprietà di quasi periodicità può essere illustrata tramite il seguente esempio: sia

$$f(x) = \sin(2\pi x) + \sin(2\pi x\sqrt{2}).$$

La f non è una funzione periodica: infatti, non esiste alcun τ che soddisfi l'equazione

$$f(x + \tau) = f(x)$$

per tutti i valori di x in \mathbb{R} . Tuttavia, possiamo stabilire che esistono di valori per cui questa equazione è approssimativamente soddisfatta con un grado arbitrario di precisione. Per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo sempre trovare un intero τ tale che $\sqrt{2}\tau$ differisce da un altro intero meno di $\varepsilon/2\pi$. Si può anche provare che esistono infiniti numeri τ del genere. Per ciascuno di questi numeri si ha che

$$\begin{aligned} f(x + \tau) &= \sin[2\pi(x + \tau)] + \sin[2\pi(x + \tau)\sqrt{2}] \\ &= \sin(2\pi x) + \sin(2\pi x\sqrt{2} + \zeta\varepsilon) && (\zeta \leq 1) \\ &= f(x) + \zeta'\varepsilon && (\zeta' \leq 1). \end{aligned}$$

Per fornire la nozione di funzione quasi periodica, anzitutto, vanno premesse alcune definizioni preliminari.

Definizione 2.1. Un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}$ si dice **relativamente denso** se esiste un $M > 0$ tale che $[a, a + M] \cap S \neq \emptyset$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Definizione 2.2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione continua. Si definisce l'insieme **ε -traslato** di f come:

$$T(f, \varepsilon) := \{\tau : |f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Detto ciò, siamo pronti per la

Definizione 2.3 (Funzione quasi periodica secondo Bohr). Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continua si dice **quasi periodica secondo Bohr** o **uniformemente quasi periodica** (in breve **u.q.p**) se per ogni $\varepsilon > 0$, $T(f, \varepsilon)$ è relativamente denso.

Ciò significa che l'equazione

$$f(x + \tau) = f(x)$$

è soddisfatta con un arbitrario grado di precisione da infiniti valori di τ , "sparsi" su tutta la retta reale in maniera da non lasciare vuoti intervalli di lunghezza arbitrariamente grande. Si può mostrare che la quasi periodicità è una proprietà che invariante per somma, sottrazione e prodotto e, sotto ipotesi più stringenti, rispetto a divisione, derivazione, integrazione e altre operazioni al limite.

All'affinità strutturale tra le funzioni quasi periodiche e quelle periodiche corrisponde anche una somiglianza analitica: infatti, ad ogni funzione quasi periodica può essere associata una "serie di Fourier" nella forma di serie trigonometrica

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n x}, \quad (2.2)$$

dove Λ_n sono numeri reali e A_n sono reali o complessi. Essa si costruisce a partire dalla funzione attraverso lo stesso processo formale che porta alla costruzione della serie di Fourier per le funzioni periodiche.

Si vuole ora introdurre una particolare classe di funzione quasi periodiche, quella delle funzioni **periodiche al limite**, che è la più vicina - come struttura - alla classe delle funzioni periodiche.

Definizione 2.4 (Funzione periodica al limite). Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ si dice **periodica al limite** se è il limite di una successione uniformemente convergente $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di funzioni periodiche continue.

Osservazione 2.1. Le funzioni periodiche al limite sono uniformemente quasi periodiche.

È di una certa importanza, infine, il seguente risultato.

Teorema 2.1. *La serie di Fourier di una qualsiasi funzione periodica al limite f può essere rappresentata nella forma*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{ir_n kx}, \quad (2.3)$$

dove tutti gli r_n sono razionali.

2.3 Il numero di rotazione

Si consideri l'equazione di Hill nella sua forma generale

$$y'' = Q(x)y, \quad (2.4)$$

ove $Q(x)$ è una funzione continua a valori reali periodica di periodo L ed il simbolo $'$ indica la derivata rispetto alla variabile x . In questa sezione introduciamo il cosiddetto **numero di rotazione** associato all'equazione differenziale (2.4), in particolare a Q . L'importanza di questo oggetto risiede nel fatto che, come mostreremo, nel caso in cui $Q(x) = q(x) - \lambda$ (con q periodica), il numero di rotazione risulta essere una funzione di λ , *costante* fuori dalle bande dello spettro, *strettamente monotona* altrimenti.

Al fine di studiare il numero di rotazione e le sue proprietà si svilupperà ulteriormente la Teoria di Floquet: i risultati trovati nella sezione 1.2 del Capitolo 1, che sono stati mostrati per la funzione periodica e continua $Q(x) = q(x) - \lambda$, in realtà sono validi per qualunque scelta di Q (basta, infatti, porre $\lambda \equiv 0$). Nel corso di questa sezione, si estenderà, pertanto, la Teoria di Floquet alle equazioni di Hill della forma (2.4), con Q qualunque e, quando sarà necessario vedere il numero di rotazione come una funzione di λ , si tornerà a considerare $Q(x) = q(x) - \lambda$. È bene tenere presente che in questo capitolo, ci si riferirà talvolta al generico Q col nome di *potenziale*, mutuandolo dal senso fisico brevemente accennato nel Capitolo 1, sezione 1.1.

Come è usuale, si potrà scrivere l'equazione (2.4) nella forma di equazione del primo ordine:

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Passando a coordinate polari nel piano yy' (*trasformata di Prüfer*)

$$y = r \sin \theta, \quad y' = r \cos \theta, \quad r > 0, \quad (2.6)$$

si trova con pochi passaggi l'equazione differenziale per $\theta(x)$:

$$\frac{d\theta}{dx} = \cos^2 \theta - Q(x) \sin^2 \theta. \quad (2.7)$$

Infatti, se si sostituiscono in (2.5) le coordinate polari (2.6), si ottengono le due equazioni (r e θ dipendono chiaramente da x):

$$\begin{cases} r \cos \theta \frac{d\theta}{dx} + \frac{dr}{dx} \sin \theta = r \cos \theta \\ -r \sin \theta \frac{d\theta}{dx} + \frac{dr}{dx} \cos \theta = Q(x)r \sin \theta \end{cases}.$$

Sommandole, dopo aver moltiplicato la prima per $\cos \theta$ e la seconda per $-\sin \theta$, si ottiene:

$$r \cos^2 \theta \frac{d\theta}{dx} + \frac{dr}{dx} \sin \theta \cos \theta + r \sin^2 \theta \frac{d\theta}{dx} - \frac{dr}{dx} \sin \theta \cos \theta = r \cos^2 \theta - Q(x)r \sin^2 \theta,$$

che è equivalente a

$$r \frac{d\theta}{dx} = r \cos^2 \theta - Q(x)r \sin^2 \theta;$$

dividendo per r (positivo: si veda l'Osservazione 2.2) si ottiene (2.7), che è un'equazione differenziale dove $r(x)$ non compare.

Osservazione 2.2. Il fatto che $y(x)$ non possa essere mai nulla, e quindi $r(x) > 0$, è una conseguenza dell'esistenza e unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy per (2.4). Infatti, se esistesse $x^* > 0$ per cui $r(x^*) = 0$, dal momento che $r = \sqrt{y^2 + (y')^2}$, allora necessariamente $y(x^*) = y'(x^*) = 0$; da ciò seguirebbe per esistenza e unicità che $y \equiv 0$, in contraddizione col fatto che esistono punti dove y è non nulla.

Se si identificano $\theta \bmod 2\pi$ e $x \bmod L$, l'equazione (2.7) può essere vista come un campo vettoriale sul toro, dal momento che $A(x, \theta) := \cos^2 \theta - Q(x) \sin^2 \theta$ è tale che

$$A(x + L, \theta) = A(x, \theta) = A(x, \theta + 2\pi).$$

Per tale campo vettoriale, vale il seguente

Teorema 2.2. *Per il campo vettoriale determinato da (2.7), il numero di rotazione, definito come*

$$\alpha := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\theta(x)}{x}, \quad (2.8)$$

esiste ed è indipendente dalla scelta di $\theta(0)$.

Dimostrazione. Rinominiamo θ in funzione del suo valore iniziale: sia $\theta(x, \xi)$ la soluzione di (2.7) soddisfacente la condizione iniziale

$$\theta(0, \xi) = \xi.$$

Assumiamo che tale soluzione sia unica; allora la $\theta(x, \xi)$ è chiaramente una funzione monotona crescente della ξ per ogni x . Inoltre, la mappa $\xi \mapsto \theta(L, \xi)$ è un omeomorfismo della retta reale in sé e pertanto induce un omeomorfismo T di $C = \{(\theta, x) : x = 0\}$ in sé. Infatti, se $P = (0, \xi)$

$$TP = (L, \theta(L, \xi)) = (0, \theta(L, \xi)),$$

in virtù dell'identificazione su x (modulo L). Sempre per unicità delle soluzioni di (2.7), $\theta(L, \xi)$ è una funzione monotona crescente e quindi T conserva l'orientamento di C . In aggiunta a ciò, la periodicità e l'unicità implicano che

$$\theta(x, \xi + 2m\pi) = \theta(x, \xi) + 2m\pi, \quad (2.9)$$

per ogni intero m . È anche abbastanza semplice verificare che se si definisce $T^n(P) := T(T^{n-1}P)$ allora

$$T^n(P) = (0, \theta(n, \xi)); \quad T^{m+n}(P) = T^m(T^n P), \quad T^0 P = P$$

per ogni $m, n \in \mathbb{Z}$.

Terminate le considerazioni di carattere introduttivo, si può adesso passare alla prova vera e propria del teorema, che equivale alla prova del fatto che

$$\alpha = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\theta(n, \xi)}{n}$$

esiste ed è indipendente da ξ .

(a) Indipendenza.

Vogliamo mostrare che, se α esiste per uno $\bar{\xi}$, allora esiste per ogni ξ ed è indipendente da ξ .

È sufficiente considerare $\xi \geq 0$, $\bar{\xi} < 2\pi$ dal momento che $\theta(x, \xi)$ soddisfa (2.9). Utilizzando anche la monotonia di $\theta(x, \xi)$ in ξ , si ottiene che

$$\theta(x, \bar{\xi}) - 2\pi = \theta(x, \bar{\xi} - 2\pi) \leq \theta(x, \xi) \leq \theta(x, \bar{\xi} + 2\pi) = \theta(x, \bar{\xi}) + 2\pi,$$

da cui segue quanto voluto.

(b) Esistenza.

Per il punto (a), è sufficiente considerare soltanto $\xi = 0$. Per ogni reale ξ esiste un intero m tale che $0 \leq \xi - 2m\pi \leq 2\pi$ e quindi

$$\theta(x, 0) \leq \theta(x, \xi - 2m\pi) \leq \theta(x, 2\pi),$$

da cui per (2.9)

$$\theta(x, 0) \leq \theta(x, \xi) - 2m\pi \leq \theta(x, 0) + 2\pi.$$

Se $\zeta = \xi - 2m\pi$, allora $0 \leq \zeta \leq 2\pi$, e quest'ultima relazione implica che $\theta(x, 0) - \zeta \leq \theta(x, \xi) - \xi \leq \theta(x, 0) + 2\pi$, da cui segue che

$$\theta(x, 0) - 2\pi \leq \theta(x, \xi) - \xi \leq \theta(x, 0) + 2\pi.$$

In particolare, per ogni intero m ,

$$\theta(mL, 0) - 2\pi \leq \theta(mL, \xi) - \xi \leq \theta(mL, 0) + 2\pi. \quad (2.10)$$

Da questa equazione deriva che $\theta(2mL, 0) = \theta(mL, \theta(mL, 0))$ soddisfa

$$2\theta(mL, 0) - 2\pi \leq \theta(2mL, 0) \leq 2\theta(mL, 0) + 2\pi.$$

Applicando iterativamente (2.10), si ottiene

$$n\theta(mL, 0) - n\pi \leq \theta(nmL, 0) \leq n\theta(mL, 0) + n\pi$$

e

$$n\theta(-mL, 0) - n\pi \leq \theta(-nmL, 0) \leq n\theta(-mL, 0) - n\pi$$

per ogni $n \geq 0$. Pertanto

$$\left| \frac{\theta(nmL, 0)}{nm} - \frac{\theta(mL, 0)}{m} \right| \leq \frac{\pi}{|m|}$$

per ogni $n, m \neq 0$ e, scambiando il ruolo di m e n ,

$$\left| \frac{\theta(nmL, 0)}{nm} - \frac{\theta(nL, 0)}{n} \right| \leq \frac{\pi}{|n|}$$

per ogni $n, m \neq 0$. Per la disuguaglianza triangolare

$$\left| \frac{\theta(nL, 0)}{n} - \frac{\theta(mL, 0)}{m} \right| \leq \frac{\pi}{|n|} + \frac{\pi}{|m|}.$$

Quindi, passando al limite, α esiste e

$$\left| \alpha - \frac{\theta(mL, 0)}{m} \right| \leq \frac{1}{|m|}$$

per ogni m . □

Osservazione 2.3. Dal momento che $\arg(y - iy') = \theta - \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, segue che per ogni soluzione non banale $y(\cdot)$ di (2.4)

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arg(y(x) - iy'(x))}{x} \quad (2.11)$$

è il numero di rotazione definito in (2.8), esiste ed è indipendente dalla particolare soluzione y scelta. Non è rilevante il fatto che la funzione argomento sia definita solo mod 2π , dal momento che la costante $2k\pi$ scompare al limite. Alla luce di questa caratterizzazione, si capisce il motivo del nome di *numero di rotazione* dato a α : infatti, come si vede da (2.11), α descrive la crescita media dell'angolo nel piano $y'y$.

È utile anche un'altra caratterizzazione di α , quella per cui α si esprime in termini del numero $N(x)$ di zeri nell'intervallo $]0, x[$ di una soluzione non banale di (2.4).

Proposizione 2.1. *Sia $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua periodica; sia $y(\cdot)$ una soluzione non banale di (2.4); sia $N(x)$ il numero di zeri di y nell'intervallo $]0, x[$. Allora:*

$$\alpha = \pi \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{N(x)}{x}. \quad (2.12)$$

Dimostrazione. Si osserva che, in corrispondenza di uno zero ξ di $y(\cdot)$, l'angolo θ è un multiplo intero di π ; allora si vede da (2.7) che

$$\frac{d\theta}{dx}(\xi) = 1 > 0,$$

cioè in ogni zero $x = \xi$ di $y(\cdot)$ si ha che θ è crescente. Dal momento che $r > 0$, gli zeri di y sono gli zeri di $\sin(\theta(\cdot))$, cioè gli x_k tali che

$$\theta(x_k) = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Fissato x , nell'intervallo $]0, x[$, suddetti zeri sono in numero certamente finito:

$$N(x) = n, \quad n \in \mathbb{N},$$

dove $n = \left[\frac{\theta(x)}{\pi} \right]$. Da ciò segue che

$$\theta(x) - \pi N(x)$$

è limitato per ogni x e quindi

$$\alpha = \pi \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{N(x)}{x}.$$

□

È necessario ora citare il seguente:

Teorema 2.3 (del confronto di Sturm). *Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo; siano $Q, \tilde{Q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue tali che*

$$Q(x) \leq \tilde{Q}(x) \quad \forall x \in I.$$

Siano y e \tilde{y} soluzioni non banali rispettivamente delle equazioni differenziali

$$y''(x) + Q(x)y(x) = 0, \quad (2.13)$$

$$\tilde{y}''(x) + \tilde{Q}(x)\tilde{y}(x) = 0. \quad (2.14)$$

Allora tra due zeri consecutivi x_1 e x_2 di y esiste almeno uno zero di \tilde{y} , a meno che $Q(x) \equiv \tilde{Q}(x)$ su $]x_1, x_2[$.

Dimostrazione. Omessa; si veda [5]. □

Da esso deriva un utile corollario.

Corollario 2.1. *Siano $Q, \tilde{Q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni periodiche tali che $Q(x) \leq \tilde{Q}(x)$ per ogni x ; siano $\alpha, \tilde{\alpha}$ i corrispondenti numeri di rotazione associati all'equazione (2.4). Allora*

$$\alpha \geq \tilde{\alpha}, \quad (2.15)$$

per ogni scelta di soluzioni y, \tilde{y} di (2.13), (2.14) rispettivamente.

Fissato Q , detto α il numero di rotazione associato a (2.13), esso è indipendente dalla soluzione di (2.13) scelta. In particolare, se $Q = q(x) - \lambda$, con q periodica, α dipende soltanto da λ e q , cioè

$$\alpha = \alpha(\lambda, q).$$

Inoltre,

$$\alpha \geq 0.$$

Dimostrazione. Si dica $N(x)$ (risp. $\tilde{N}(x)$) il numero di zeri in $]0, x[$ di $Q(x)$ (risp. di $\tilde{Q}(x)$). Per il Teorema 2.3 si ha che $N(x) \geq \tilde{N}(x)$; da cui segue immediatamente, applicando (2.12), che $\alpha \geq \tilde{\alpha}$.

Da ciò segue anche l'indipendenza (già affermata, ma non provata nel Teorema 2.2) di α dalla particolare soluzione scelta: infatti, se y_1, y_2 sono due soluzioni distinte dell'equazione di Hill con lo stesso potenziale Q e α_1, α_2 sono i corrispondenti numeri di rotazione, per quanto affermato nel Corollario 2.1 vale che

$$\alpha_1 \geq \alpha_2, \quad \alpha_2 \geq \alpha_1$$

e quindi

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

Inoltre, da una semplice applicazione di (2.12), si ottiene che $\alpha \geq 0$. □

A questo punto, si vuole interpretare α nel contesto della già sviluppata (v. sezione 1.2) teoria di Floquet, ma ci restringiamo esclusivamente al caso in cui il potenziale Q sia tale che i moltiplicatori di Floquet μ_+ e μ_- non siano reali, vale a dire al caso previsto nell'equazione (1.44) della sezione 1.5, quello in cui le soluzioni di (2.4) sono sicuramente stabili. Come già osservato, il Teorema di Floquet 1.1 vale per ogni λ , in particolare per $\lambda \equiv 0$ e quindi in generale per le soluzioni dell'equazione di Hill

$$y''(x) + Q(x)y(x) = 0.$$

In questo caso, pertanto, (2.4) ammette una soluzione complessa della forma

$$g(x) = e^{i\frac{\beta x}{L}} p(x), \quad (2.16)$$

dove β è definito solo mod 2π , $\mu_+ = e^{i\beta}$, $p(x)$ è periodica di periodo L e non è mai nulla.

Osservazione 2.4. È bene osservare, una volta per tutte, che la soluzione g , e conseguentemente tutti i parametri e le funzioni in gioco nella formula (2.16), dipendono dalla scelta del potenziale Q ; in particolare se $Q = q(x) - \lambda$ esse dipendono da q e da λ . Salvo avviso contrario ed ove ciò non produca ambiguità, si ometterà nel seguito tale dipendenza.

La funzione periodica $p(x)$ descrive una curva chiusa con indice di avvolgimento intero

$$\text{avv}_p = \frac{1}{2\pi i} \int_0^L \frac{p'(x)}{p(x)} dx = j \in \mathbb{Z}.$$

Sostituendo β con $\beta + 2j\pi$, dove $j = \text{avv}_p$ si può ottenere che questo numero di avvolgimento è nullo, come afferma la seguente

Proposizione 2.2. *Sia g una soluzione di (2.4), espressa nella forma (2.16). Allora:*

$$\text{avv}_p = \frac{1}{2\pi i} \int_0^L \frac{p'(x)}{p(x)} dx = 0.$$

Dimostrazione. Si chiami g_j la soluzione in cui β è stato sostituito con $\beta + 2j\pi$ e si ha

$$\begin{aligned} g_j(x) &= \exp \left\{ \frac{i(\beta + 2j\pi)x}{L} \right\} p(x) = \exp \left\{ \frac{i\beta x}{L} \right\} \exp \left\{ \frac{2\pi i j x}{L} \right\} p(x) \\ &= \exp \left\{ \frac{i\beta x}{L} \right\} p_j(x); \end{aligned}$$

si noti che $p_j(x + L) = p_j(x)$. Allora l'indice di avvolgimento per p_j viene ad essere

$$\text{avv}_{p_j} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^L \frac{p_j'(x)}{p_j(x)} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_0^L \left[\frac{p'(x)}{p(x)} + \frac{2\pi i j}{L} \right] dx = j + j = 2j.$$

Ovviamente $p = p_0$, pertanto

$$\text{avv}_p = \text{avv}_{p_0} = 0.$$

□

In questo modo, β resta definito completamente e non solo mod 2π . Si può scegliere $\beta \geq 0$, altrimenti si rimpiazza g con \bar{g} , e quindi β con $-\beta$.

La soluzione g può essere, pertanto, scritta nella forma

$$g(x) = e^{i\frac{\beta x}{L}} \rho(x) e^{is(x)}, \quad (2.17)$$

dove $\rho(x) > 0$ e $s(x)$ sono entrambe funzioni reali di periodo L .

Osservazione 2.5. Il fatto che $\rho(x) > 0$ segue per esistenza e unicità: il discorso è identico a quello fatto nell'Osservazione 2.2. Inoltre, vale quanto espresso nell'Osservazione 2.4 anche per β , ρ e s della formula (2.17).

Il nostro obiettivo è ora mostrare che

$$\beta = L\alpha.$$

A tale scopo, enunciamo la seguente

Proposizione 2.3. *Sia $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, periodica di periodo L e si consideri l'equazione di Hill (2.4); sia α il numero di rotazione corrispondente a Q . Siano μ_{\pm} i moltiplicatori di Floquet associati a (2.4) e si supponga che non siano reali; sia $\beta \in \mathbb{C}$ tale che $\mu_+ = e^{i\beta}$. Allora*

$$\beta = L\alpha. \quad (2.18)$$

Dimostrazione. Si consideri la soluzione reale di (2.4)

$$y = \Re g(x) = \rho(x) \cos \left(\frac{\beta x}{L} + s(x) \right)$$

e sia x fissato. Dal momento che vale (2.17) e che $\rho(x) > 0$, $N(x)$ viene ad essere il numero di zeri di $\cos \left(\frac{\beta x}{L} + s(x) \right)$. Sia

$$\bar{s} = s(0) = s(L) = s(kL) \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 0.$$

Si nota, quindi, che $N(x)$ è il numero di zeri di $\cos\left(\frac{\beta}{L} + s(\cdot)\right)$ tra \bar{s} e $\frac{\beta x}{L} + s(x)$. Il numero di zeri di $\cos\left(\frac{\beta}{L} + s(\cdot)\right)$ tra \bar{s} e $\bar{s} + \beta$, è la parte intera di $\frac{\beta}{\pi}$; Per ogni $n \in \mathbb{N}$, il numero di zeri tra \bar{s} e $\bar{s} + n\beta$ è pari a $n \left\lfloor \frac{\beta}{\pi} \right\rfloor$. Sia $k = \left\lfloor \frac{x}{L} \right\rfloor$; si ha che

$$N(x) = k \left\lfloor \frac{\beta}{\pi} \right\rfloor,$$

da cui segue che

$$N(x) - \frac{\beta x}{\pi L} = o(1), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2.19)$$

Passando al limite per $x \rightarrow +\infty$ in (2.19), dalla caratterizzazione (2.12) si ottiene, come volevasi, (2.18). \square

Nella seguente proposizione calcoliamo effettivamente il Wronskiano $[g, \bar{g}]$ in funzione di ρ , β e s , per poter imporre la condizione (2.21).

Proposizione 2.4. *Sia g una soluzione di (1.5) espressa nella forma (2.17). Allora:*

$$[g, \bar{g}] = -2i\rho^2 \left(\frac{\beta}{L} + s' \right). \quad (2.20)$$

Dimostrazione. Se $g(x) = \rho(x)e^{i\left(\frac{\beta x}{L} + s(x)\right)}$, allora

$$\begin{aligned} \bar{g}(x) &= \rho(x)e^{-i\left(\frac{\beta x}{L} + s(x)\right)}, \\ g'(x) &= \rho'(x)e^{i\left(\frac{\beta x}{L} + s(x)\right)} + i\rho(x) \left(\frac{\beta}{L} + s'(x) \right) e^{i\left(\frac{\beta x}{L} + s(x)\right)}, \\ \bar{g}'(x) &= \rho'(x)e^{-i\left(\frac{\beta x}{L} + s(x)\right)} - i\rho(x) \left(\frac{\beta}{L} + s'(x) \right) e^{-i\left(\frac{\beta x}{L} + s(x)\right)}, \end{aligned}$$

da cui segue facilmente, tramite calcolo diretto, (2.20). \square

La soluzione di Floquet g trovata in (2.17) è determinata a meno di una costante moltiplicativa complessa $c \neq 0$: si vuole qui determinare una particolare g ponendo la seguente condizione di normalizzazione sul Wronskiano

$$[g, \bar{g}] = g\bar{g}' - \bar{g}g' = -2i. \quad (2.21)$$

La (2.21) dice che vale

$$\frac{\beta}{L} + s' = \rho^{-2}, \quad (2.22)$$

che porta all'equazione differenziale

$$\rho'' = Q\rho + \rho^{-3} \quad (2.23)$$

Per giustificare quest'ultimo passaggio è necessario svolgere alcuni conti. Innanzitutto, si fa la derivata seconda della g in (2.17), che è

$$\begin{aligned} g''(x) &= \rho''(x)e^{i\left(\frac{\beta x}{L}+s(x)\right)} + i\rho'(x)\left(\frac{\beta}{L} + s'(x)\right)e^{i\left(\frac{\beta x}{L}+s(x)\right)} + \\ &+ i\rho'(x)\left(\frac{\beta}{L} + s'(x)\right)e^{i\left(\frac{\beta x}{L}+s(x)\right)} - \left(\frac{\beta}{L} + s'(x)\right)^2\rho(x)e^{i\left(\frac{\beta x}{L}+s(x)\right)} + \\ &+ i\rho(x)s''(x)e^{i\left(\frac{\beta x}{L}+s(x)\right)}. \end{aligned}$$

Derivando (2.22), si ottiene una condizione su s'' :

$$s'' = -2\rho^{-3}\rho'. \quad (2.24)$$

Inserendo le condizioni (2.22) e (2.24) nell'espressione di g'' , si ottiene

$$\begin{aligned} g''(x) &= \rho''(x)e^{i\left(\frac{\beta x}{L}+s(x)\right)} + 2i\rho'(x)\rho^{-2}(x)e^{i\left(\frac{\beta x}{L}+s(x)\right)} - \\ &- \rho^{-3}(x)e^{i\left(\frac{\beta x}{L}+s(x)\right)} - 2i\rho'(x)\rho^{-2}(x)e^{i\left(\frac{\beta x}{L}+s(x)\right)} \\ &= \rho''(x)e^{i\left(\frac{\beta x}{L}+s(x)\right)} - \rho^{-3}(x)e^{i\left(\frac{\beta x}{L}+s(x)\right)}. \end{aligned}$$

Poiché g è una soluzione dell'equazione differenziale (2.4), si può scrivere (2.4) in termini di $\rho(x)$ e $s(x)$:

$$[\rho''(x) - \rho^{-3}(x)]e^{i\left(\frac{\beta x}{L}+s(x)\right)} = Q(x)\rho(x)e^{i\left(\frac{\beta x}{L}+s(x)\right)};$$

e, dal momento che $e^{i\left(\frac{\beta x}{L}+s(x)\right)} \neq 0$, si ha (2.23), come desiderato.

È importante anche quest'altra caratterizzazione per il numero di rotazione α .

Proposizione 2.5. *Vale:*

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \rho^{-2}(t) dt. \quad (2.25)$$

Dimostrazione. Anzitutto è noto che

$$\alpha = \frac{\beta}{L}.$$

Da (2.22) segue subito che

$$\int_0^x \alpha dt + \int_0^x s'(t) dt = \int_0^x \rho^{-2}(t) dt;$$

calcolando, ove noto, l'integrale e dividendo ambo i membri dell'uguaglianza per $x > 0$, si ottiene

$$\alpha + \frac{s(x) - s(0)}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x \rho^{-2}(t) dt;$$

passando al limite per $x \rightarrow \infty$ si ha che

$$\alpha + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{s(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \rho^{-2}(t) dt.$$

Dal fatto che $s(x)$ è continua e periodica, quindi limitata, segue la tesi. \square

In seguito si utilizzerà la Proposizione 2.5 nella forma del seguente

Corollario 2.2.

$$\alpha = \frac{1}{L} \int_0^L \rho^{-2}(x) dx \quad (2.26)$$

Dimostrazione. Sia x fissato, $n = \left[\frac{x}{L} \right]$. Allora si ha chiaramente che

$$nL \leq x \leq (n+1)L;$$

in particolare

$$\frac{1}{x} \int_0^{nL} \rho^{-2}(t) dt \leq \frac{1}{x} \int_0^x \rho^{-2}(t) dt \leq \frac{1}{x} \int_0^{(n+1)L} \rho^{-2}(t) dt. \quad (2.27)$$

Si nota che, per la periodicità di ρ ,

$$\frac{1}{x} \int_0^{nL} \rho^{-2}(t) dt = \frac{n}{x} \int_0^L \rho^{-2}(t) dt = \frac{nL}{x} \left(\frac{1}{L} \int_0^L \rho^{-2}(t) dt \right)$$

e poiché $n = \left[\frac{x}{L} \right]$, si ha che

$$\frac{nL}{x} \longrightarrow 1, \quad x \rightarrow +\infty;$$

lo stesso vale certamente mettendo $n+1$ al posto di n .

Passando al limite per $x \rightarrow +\infty$ in (2.27) si ottiene

$$\frac{1}{L} \int_0^L \rho^{-2}(t) dt \leq \alpha \leq \frac{1}{L} \int_0^L \rho^{-2}(t) dt,$$

da cui segue la tesi. \square

Per determinare più precisamente α , si consideri nuovamente la matrice wronskiana dell'equazione (2.4), $Y(x)$, e la relativa matrice di Floquet $M = Y(L)$. Gli autovalori di M , come visto, soddisfano l'equazione caratteristica:

$$\mu^2 - \Delta\mu + 1 = 0,$$

ove $\Delta = \text{Tr}[M]$ è il discriminante studiato minuziosamente nella sezione 1.5. Nel caso che stiamo esaminando in questa sezione, vale a dire quello in cui $\mu_{\pm} = e^{\pm i\beta}$, si ha che

$$\Delta = \mu_+ + \mu_- = 2 \cos \beta,$$

quindi

$$\Delta = 2 \cos(L\alpha). \quad (2.28)$$

È doveroso, a questo punto, notare come il simbolo α , qui utilizzato per rappresentare il numero di rotazione, sia già stato utilizzato nel capitolo precedente per indicare la parte immaginaria dell'esponente caratteristico w : il motivo della scelta dello stesso "nome" è semplicemente che α è lo stesso se

$$Q(\cdot) = q(\cdot) - \lambda,$$

con q funzione continua periodica e $\lambda \in \mathbb{C}$. Riassumiamo il concetto nel seguente

Teorema 2.4. *Sia $w(\lambda)$ l'esponente di Floquet caratteristico associato all'equazione*

$$y'' = (q(x) - \lambda)y.$$

Allora, detto $\alpha(\lambda)$ il numero di rotazione associato, si ha che

$$\alpha(\lambda) = \Im w(\lambda) = \frac{1}{L} \Im \log \mu(\lambda). \quad (2.29)$$

Dimostrazione. Omessa; una prova dettagliata si può trovare, ad esempio, in [6] o in [11]. \square

Euristicamente, si possono notare alcune proprietà comuni tra numero di rotazione e parte reale dell'esponente caratteristico. Ad esempio, si ricordi (si veda in particolare la formula (1.41)) che

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \gamma(\lambda) + i\alpha(\lambda), \\ \Delta(\lambda) &= 2 \cos(i w(\lambda)L); \end{aligned} \quad (2.30)$$

se μ_{\pm} sono non reali, allora $\gamma(\lambda) = 0$ (v. (1.44)), pertanto $w(\lambda) = i\alpha(\lambda)$: l' α definito in (2.30) soddisfa pertanto anche (2.28).

Si fissi ora il potenziale q (funzione continua periodica) e si consideri α come funzione di λ . Per il Corollario 2.1, essa è una funzione *monotona crescente*: se $\lambda_1 \leq \lambda_2$, allora $Q_2(x) = q(x) - \lambda_2 \leq Q_1(x) = q(x) - \lambda_1$ e quindi

$$\alpha_1 = \alpha(\lambda_1) \leq \alpha_2 = \alpha(\lambda_2).$$

Si può anche dimostrare che $\alpha(\cdot)$ è una funzione continua (per la prova si rimanda a [6]). In realtà, per $\alpha = \alpha(\lambda)$ vale un risultato ben più forte della monotonia: vale, infatti, che

$$\frac{d(\alpha^2)}{d\lambda} \geq 1,$$

condizione che implica la monotonia di α (come funzione di λ). Ciò si può dedurre dalla seguente

Proposizione 2.6. *Sia $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo L ; sia $\lambda \in \text{int } \sigma(H)$; sia g la soluzione di Floquet dell'equazione di Hill (2.4) per $Q(x) = q(x) - \lambda$ rappresentata in (2.17), normalizzata secondo (2.21). Sia $\alpha = \alpha(\lambda, q)$ il numero di rotazione ad essa associato. Allora*

$$\partial_\lambda \alpha = \int_0^L \frac{\rho^2(x)}{2L} dx = \int_0^L \frac{|g(x)|^2}{2L} dx. \quad (2.31)$$

Dimostrazione. Denotiamo, inoltre, con u_λ la derivata di ρ_λ rispetto a λ , i.e.

$$u_\lambda = \partial_\lambda \rho_\lambda;$$

nel corso della dimostrazione si ometterà la dipendenza da λ sia di ρ_λ che di u_λ , che si scriveranno semplicemente ρ e u . Si utilizza per $\alpha = \alpha(\lambda)$ la caratterizzazione del Corollario 2.2, vale a dire

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{L} \int_0^L \rho_\lambda^{-2}(x) dx; \quad (2.32)$$

inoltre, è noto (v. ((2.23))) che

$$\rho_\lambda''(x) = (q(x) - \lambda)\rho_\lambda(x) + \rho_\lambda^{-3}(x). \quad (2.33)$$

Supponiamo che α e ρ abbiano sufficiente regolarità in modo che si possa applicare la derivazione sotto il segno di integrale e che si possa scambiare la derivata rispetto a λ con quella rispetto a x : ciò è chiaro per come g è costruita (si veda il Capitolo 1). Pertanto, derivando rispetto a λ la (2.32) si ha che

$$\partial_\lambda \alpha = -\frac{2}{L} \int_0^L \rho_\lambda^{-3}(x) u(x) dx \quad (2.34)$$

e, derivando (2.33), vale

$$u'' = -\rho + (q - \lambda)u - \frac{3}{\rho^4}u,$$

da cui segue, con alcuni semplici passaggi, che

$$-\frac{2}{L} \frac{1}{\rho^3}u = -\frac{2}{3L} [-\rho^2 + (q - \lambda)\rho u - \rho u'']. \quad (2.35)$$

Per evitare che la notazione diventi troppo pesante, nel seguito si ometterà la dipendenza da x delle quantità q , ρ e u (anche negli integrali) e si indicherà la loro derivata rispetto a x col simbolo $'$. Integrando (2.35) si ottiene

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \alpha &= -\frac{2}{3L} \left[-\int_0^L \rho^2 dx + \int_0^L (q - \lambda)\rho u dx - \int_0^L \rho u'' dx \right] \\ &= \frac{2}{3L} \int_0^L \rho^2 dx - \frac{2}{3L} \left\{ \int_0^L (q - \lambda)\rho u dx - \left[\rho u' \Big|_0^L - \int_0^L \rho' u' dx \right] \right\} \\ &= \frac{2}{3L} \int_0^L \rho^2 dx - \frac{2}{3L} \left\{ \int_0^L (q - \lambda)\rho u dx + \int_0^L \rho' u' dx \right\} \\ &= \frac{2}{3L} \int_0^L \rho^2 dx - \frac{2}{3L} \left\{ \int_0^L (q - \lambda)\rho u dx + \rho' u \Big|_0^L - \int_0^L \rho'' u dx \right\} \\ &= \frac{2}{3L} \int_0^L \rho^2 dx - \frac{2}{3L} \int_0^L [(q - \lambda)\rho - \rho''] u dx \\ &\stackrel{(2.33)}{=} \frac{2}{3L} \int_0^L \rho^2 dx + \frac{2}{3L} \int_0^L \rho^{-3} u dx \\ &\stackrel{(2.34)}{=} \frac{2}{3L} \int_0^L \rho^2 dx - \frac{1}{3} \partial_\lambda \alpha, \end{aligned}$$

da cui deriva che

$$\frac{4}{3} \partial_\lambda \alpha = \frac{2}{3L} \int_0^L \rho^2 dx.$$

Segue la tesi. □

Corollario 2.3.

$$\partial_\lambda(\alpha^2) \geq 1 \quad (2.36)$$

Dimostrazione. Infatti, se si scrive α come in (2.26), si ottiene che:

$$\frac{\partial(\alpha^2)}{\partial \lambda} = 2\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} = \frac{1}{L^2} \int_0^L \rho^{-2} dx \int_0^L \rho^2 dx \stackrel{\text{C-S}}{\geq} 1;$$

vale l'uguaglianza (C-S) solo se ρ , e quindi q (si veda a tal proposito la rappresentazione (2.17)), è costante. □

Essenzialmente dalla continuità e dalla monotonia deriva la seguente

Proposizione 2.7. *Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, sia $Q(x) = q(x) - \lambda$ funzione periodica; si consideri l'equazione di Hill per tale Q ; sia $\alpha = \alpha(\lambda)$ il numero di rotazione associato a Q . Allora, per ogni $z \in [0, +\infty[$, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha(\lambda) = z$, i.e. la funzione $\alpha(\cdot)$ assume tutti i valori non negativi.*

Dimostrazione. Per $\lambda < \min q(x)$, si ha che $Q(x) = q(x) - \lambda > 0$, e quindi ogni soluzione di (2.4) ha al massimo uno zero, i.e. $\alpha(\lambda) = 0$. Questo segue per esistenza e unicità.

D'altra parte, è anche vero che

$$\alpha(\lambda) \rightarrow +\infty$$

se $\lambda \rightarrow +\infty$. Per poter mostrare questo risultato, è necessario che per ogni $M > 0$ esista $\Lambda_M > 0$ tale che, se $\lambda \geq \Lambda_M$, allora $|\alpha(\lambda)| = \alpha(\lambda) \geq M$. Sia $M > 0$; se $\lambda \geq \Lambda_M$, allora

$$q(x) - \lambda \leq q(x) - \Lambda_M;$$

per il Corollario 2.1, deve essere

$$\alpha(\lambda) \geq \alpha(\Lambda_M),$$

per cui la tesi segue dalla continuità e dalla monotonia della funzione $\alpha(\cdot)$. \square

Dalla continuità e monotonia segue anche che negli intervalli di instabilità $\alpha(\cdot)$ è costante, multiplo intero di $\frac{\pi}{\lambda}$ (si veda (1.43)). Si spiega così anche in dettaglio il comportamento della funzione $\alpha(\lambda)$, crescente nelle *bande* dello spettro, costante nei *gaps*; la rappresentazione in Figura 1.3 è così giustificata. Infine, se si estende il discriminante nella maniera seguente:

$$\hat{\Delta}(\lambda) := \begin{cases} +2, & \text{se } \Delta(\lambda) > 2 \\ \Delta(\lambda), & \text{se } -2 \leq \Delta(\lambda) \leq +2 \\ -2, & \text{se } \Delta(\lambda) < -2 \end{cases},$$

cioè se $\hat{\Delta}$ è il discriminante ristretto agli intervalli di stabilità ed esteso poi per continuità, allora si ha da (2.28) che

$$\hat{\Delta}(\lambda) = 2 \cos(L\alpha(\lambda)).$$

Ultimo risultato: sebbene $\alpha(\cdot)$ sia una funzione derivabile all'interno degli intervalli di stabilità, non ha neanche la derivata destra o sinistra agli estremi di un intervallo di instabilità "non collassato", dal momento che si comporta ivi come $\sqrt{|\lambda - \lambda_0|}$ (per una dimostrazione di quest'ultimo risultato si vedano [6] e [9, cap. VII]).

Possiamo raccogliere le proprietà principali della funzione $\alpha(\lambda)$ nel seguente

Teorema 2.5. Sia $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione periodica, sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Si consideri l'equazione

$$g''_\lambda(x) = [q(x) - \lambda]g_\lambda(x). \quad (2.37)$$

Sia $\alpha = \alpha(\lambda)$ il numero di rotazione associato a (2.37). Si consideri, inoltre, lo spettro dell'operatore H , $\sigma(H)$, caratterizzato come nel Teorema 1.6. Allora:

- α è indipendente dalla scelta di una soluzione g_λ di (2.37);
- α è una funzione continua della variabile λ ;
- α è una funzione monotona crescente di λ , strettamente crescente nello spettro, costante altrimenti;
- α è una funzione derivabile all'interno dello spettro, non derivabile sulla frontiera.

2.4 Il funzionale Δ

In questa sezione vogliamo studiare nel dettaglio il funzionale $Q \mapsto \Delta(Q)$. In particolare, ci interesserà analizzare il comportamento di $\Delta(q - \lambda)$ quando $\lambda = \lambda^*$ è un valore per cui $|\Delta(q - \lambda^*)| = 2$ ed è anche un punto di massimo locale per tale funzione. Il motivo per cui andiamo a far ciò è che tali λ^* sono estremi di due intervalli di stabilità “collassati” in uno solo. Il risultato principale che mostreremo consiste nel fatto che, in prossimità di un tale punto, è possibile modificare il potenziale q in modo tale che Δ abbia un massimo $\tilde{\lambda}^* \sim \lambda^*$ con $|\Delta| > 2$. Ciò ha l'effetto di creare un “buco” nell'intervallo dello spettro, spezzandolo in due parti, tassello fondamentale per la costruzione di uno spettro di tipo Cantor. La seguente Figura 2.1 dà un'idea grafica di cosa succede se si modifica il potenziale in prossimità (ad esempio) di un massimo.

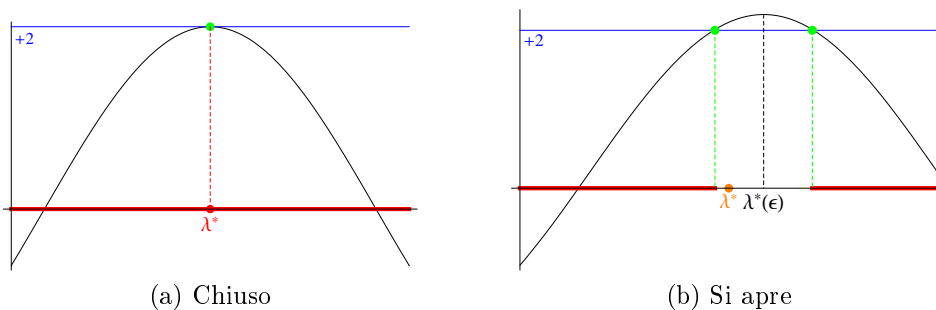


Figura 2.1: $\Delta(q - \lambda)$ in prossimità del massimo λ^*

2.4.1 Differenziale primo

Si vuole, a questo punto, determinare la derivata funzionale del discriminante $\delta\Delta$ ed i suoi punti critici. Sia $Y_Q(x)$ la matrice wronskiana associata all'equazione di Hill

$$y'' = Q(x)y;$$

si ricordi che Y_Q soddisfa le seguenti condizioni:

$$Y'_Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q(x) & 0 \end{pmatrix} Y_Q(x), \quad Y_Q(0) = \mathbb{I} \quad (2.38)$$

e che per definizione $\Delta(Q) = \text{Tr}[Y_Q(L)]$. Per semplificare la notazione, scriviamo che

$$E := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_Q := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

L'obiettivo è ora calcolare il differenziale rispetto a Q di $\Delta(\cdot)$, che, come detto, indicheremo con il simbolo δ . Enunciamo, a tal fine, il seguente

Lemma 2.1. *Il differenziale di Δ vale*

$$\delta\Delta(Q) = \text{Tr}[Y_Q(L)Y_Q^{-1}(\cdot)EY_Q(\cdot)], \quad (2.40)$$

nel senso che

$$\langle \delta\Delta(Q), \tilde{Q} \rangle = \int_0^L \tilde{Q}(x) \text{Tr}[Y_Q(L)Y_Q^{-1}(x)EY_Q(x)] dx. \quad (2.41)$$

Dimostrazione. Data la linearità della derivata e della traccia, vogliamo determinare

$$\delta\Delta(Q) = \text{Tr}[\delta Y_Q(L)];$$

derivando rispetto a Q (2.38) otteniamo

$$\delta Y'_Q = (\delta F_Q)Y_Q + F_Q\delta Y_Q. \quad (2.42)$$

Detto $Z_Q := \delta Y_Q$, si può scrivere che

$$Z'_Q = (\delta F_Q)Y_Q + F_Q Z_Q \quad (2.43)$$

Notiamo che

$$F_{Q+\tilde{Q}} - F_{\tilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{Q} & 0 \end{pmatrix} = \tilde{Q} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{Q}E. \quad (2.44)$$

Indicando con $\#$ il funzionale di moltiplicazione per il valore puntuale, cioè

$$\langle \#(x), \tilde{Q} \rangle = \tilde{Q}(x),$$

si ottiene

$$\begin{cases} Z'_Q = F_Q Z_Q + \# E Y_Q, \\ Z_Q(0) = 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

Che $Z_Q(0) = 0$, dipende dal fatto che $Y_Q(0) = \mathbb{I}$, per cui facendone la derivata funzionale si ha che

$$\delta Y_Q(0) = 0.$$

Esplicitando la dipendenza da $x \in \mathbb{R}$

$$Z'_Q(x) = F_Q(x) Z_Q(x) + \#(x) E Y_Q(x), \quad (2.46)$$

utilizzando la formula di variazione delle costanti per (2.46), si ottiene che

$$\begin{aligned} Z_Q(x) &= Y_Q(x) Z_Q(0) + \int_0^x Y_Q(L) Y_Q^{-1}(y) \#(x) E Y_Q(y) dy. \\ &= \int_0^x Y_Q(L) Y_Q^{-1}(y) \# E Y_Q(y) dy. \end{aligned} \quad (2.47)$$

poiché $Z_Q(0) = 0$. Ora, siamo pronti per determinare la derivata prima di Δ rispetto a Q : infatti per (2.47)

$$\begin{aligned} \delta \Delta(Q)(\tilde{Q}) &= \text{Tr} [Z_Q(L)(\tilde{Q})] = \text{Tr} \left[\int_0^L \tilde{Q}(x) Y_Q(L) Y_Q^{-1}(x) E Y_Q(x) dx \right] \\ &= \int_0^L \tilde{Q}(x) \text{Tr} [Y_Q(L) Y_Q^{-1}(x) E Y_Q(x)] dx. \end{aligned}$$

Quindi

$$\delta \Delta(Q) = \text{Tr} [Y_Q(L) Y_Q^{-1}(\cdot) E Y_Q(\cdot)].$$

□

Nella seguente proposizione, diamo una caratterizzazione dei “punti” critici di Δ .

Proposizione 2.8. *Sia $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, periodica di periodo L ; sia $Y_Q(x)$ la matrice wronskiana associata all'equazione di Hill per Q ; sia, inoltre, $\Delta = \Delta(Q)$ il discriminante associato a Y_Q . Si ha che $\delta \Delta(Q) = 0$ se, e solo se, $Y_Q(L) = \pm \mathbb{I}$. In particolare, ciò accade se, e solo se, le soluzioni dell'equazione di Hill sono periodiche o antiperiodiche (di periodo L).*

Dimostrazione. Se si scrive, come già fatto in precedenza, la matrice fondamentale $Y(x)$ nella forma,

$$Y_Q(x) = \begin{pmatrix} \phi(x) & \psi(x) \\ \phi'(x) & \psi'(x) \end{pmatrix},$$

ove ϕ e ψ sono le soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (2.4) soddisfacenti la condizione iniziale

$$\begin{pmatrix} \phi(0) \\ \phi'(0) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi'(0) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

l'equazione (2.40) si può scrivere come

$$\begin{aligned} \delta\Delta(Q) &= A\phi^2(\cdot) + B\phi(\cdot)\psi(x) + C\psi^2(\cdot), \\ A &= \psi(L), \quad B = \psi'(L) - \phi(L), \quad C = \phi'(L). \end{aligned} \quad (2.48)$$

I tre prodotti ϕ^2 , $\phi\psi$, ψ^2 sono funzioni linearmente indipendenti dal momento che il loro Wronskiano

$$\det \begin{pmatrix} \phi^2 & \phi\psi & \psi^2 \\ 2\phi\phi' & \phi'\psi + \phi\psi' & 2\psi\psi' \\ 2[(\phi')^2 + \phi\phi''] & \phi''\psi + 2\phi'\psi' + \phi\psi'' & 2[(\psi')^2 + \psi\psi''] \end{pmatrix}$$

vale (come si verifica calcolando il determinante)

$$2(\phi\psi' - \phi'\psi)^3 = 2 \neq 0.$$

In particolare, è immediatamente visibile da (2.48) che Δ ha un punto critico, i.e. $\delta\Delta = 0$, se, e solo se, $A = B = C = 0$, cioè se e solo se $Y(L)$ è un multiplo della matrice identità \mathbb{I} . Poiché $Y_Q(L)$ ha determinante pari a 1, segue che $Y_Q(L) = \pm\mathbb{I}$, che a sua volta significa che tutte le soluzioni $y(x)$ di (2.4) sono tali che

$$y(x + L) = \pm y(x), \quad (2.49)$$

(v. sezione 1.2) ovvero che $y^2(x)$ è periodica di periodo L .

In definitiva: il discriminante $\Delta(Q)$ ha un punto critico in Q se, e solo se, $y^2(x)$ ha periodo L per ogni soluzione y di (2.4). \square

Corollario 2.4. *Se $Q = q - \lambda, \delta\Delta$ ha un punto critico se, e solo se, $\Delta^2(q - \lambda) - 4$ ha uno zero doppio.*

Dimostrazione. Basta applicare il Corollario 1.1 e le proprietà di Δ viste nella sezione 1.5 alla precedente proposizione. \square

2.4.2 La derivata seconda di Δ

Il “collasso” di un intervallo di instabilità in un punto λ^* corrisponde, come ampiamente visto nel Capitolo 1, alla presenza di uno zero doppio di $\Delta^2 - 4$, il che equivale (Corollario 2.4) all’annullarsi del differenziale primo del discriminante $\delta\Delta$ in $Q = q(x) - \lambda^*$. In tali “punti”, per meglio comprendere il comportamento di $\Delta(Q)$ al variare di Q , si avrà bisogno di determinare la derivata seconda di Δ .

Lemma 2.2. *Sia $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\delta\Delta(Q) = 0$. Esistono $E_1, E_2, E_3 \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ (i.e. continue, periodiche) linearmente indipendenti tali che, posto*

$$B(\hat{q}) := \left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \Delta(Q + \varepsilon\hat{q}) \right|_{\varepsilon=0},$$

vale

$$B(E_1), B(E_2) > 0, \quad B(E_3) < 0.$$

Dimostrazione. Si noti che per la regola della catena

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Delta(Q + \varepsilon\hat{q}) = \delta\Delta(Q + \varepsilon\hat{q})\hat{q} \quad (2.50)$$

e, per quanto visto nella sezione 2.4.1,

$$\delta\Delta(Q + \varepsilon\hat{q})\hat{q}|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (2.51)$$

Pertanto, posto

$$\frac{d^2\Delta}{d\varepsilon^2} = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \Delta(Q + \varepsilon\hat{q}),$$

si ha che

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2\Delta}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \delta\Delta(Q + \varepsilon\hat{q})\hat{q} \right|_{\varepsilon=0} = \\ &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^L \text{Tr} [Y_{Q+\varepsilon\hat{q}}(L)Y_{Q+\varepsilon\hat{q}}^{-1}(x)EY_{Q+\varepsilon\hat{q}}(x)] \hat{q}(x) dx \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \left. \int_0^L \frac{d}{d\varepsilon} \text{Tr} [Y_{Q+\varepsilon\hat{q}}(L)Y_{Q+\varepsilon\hat{q}}^{-1}(x)EY_{Q+\varepsilon\hat{q}}(x)] \hat{q}(x) dx \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \left. \int_0^L \text{Tr} \left[\frac{d}{d\varepsilon} (Y_{Q+\varepsilon\hat{q}}(L)Y_{Q+\varepsilon\hat{q}}^{-1}(x)EY_{Q+\varepsilon\hat{q}}(x)) \right] \hat{q}(x) dx \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_0^L \int_0^L \text{Tr} [Y_Q(L)Y_Q^{-1}(y)EY_Q(y)Y_Q^{-1}(x)EY_Q(x)] \hat{q}(y)\hat{q}(x) dx dy. \end{aligned}$$

Ricordiamo che, come visto nella dimostrazione della Proposizione 2.8, si ha che $Y_Q(L) = \pm \mathbb{I}$ se, e solo se, $\delta\Delta(Q) = 0$. Definendo

$$S(t) := Y_Q^{-1}(t)EY_Q(t),$$

si ottiene

$$\left. \frac{1}{2} \frac{d^2\Delta}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} = \pm \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^L \text{Tr}[S(y)S(x)] \hat{q}(y)\hat{q}(x) dx dy, \quad (2.52)$$

dove il segno \pm corrisponde a quello di $Y_Q(L) = \pm \mathbb{I}$. È piuttosto facile verificare (facendo il conto esplicito, visto che Y si conosce in termini di ϕ e ψ) che

$$\text{Tr}[S(t)S(s)] = -(\phi(t)\psi(s) - \phi(s)\psi(t))^2,$$

dove ϕ e ψ sono le soluzioni normalizzate di (2.4).

Ovviamente, l'espressione trovata in (2.52) vale per qualunque base (i.e. coppia di soluzioni linearmente indipendenti) $e_1(x)$, $e_2(x)$ con Wronskiano pari a 1; pertanto, si ha che

$$\begin{aligned} \left. \pm \frac{1}{2} \frac{d^2\Delta}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} &= -\frac{1}{2} \int_0^L \int_0^L (e_1(t)e_2(s) - e_1(s)e_2(t))^2 \hat{q}(t)\hat{q}(s) ds dt = \\ &= -\int_0^L e_1^2 \hat{q} dx \int_0^L e_2^2 \hat{q} dx + \left(\int_0^L e_1 e_2 \hat{q} dx \right)^2. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Inoltre, le tre funzioni

$$E_1 := \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2), \quad E_2 := \frac{1}{2}(e_1^2 - e_2^2), \quad E_3 := e_1 e_2 \quad (2.54)$$

hanno tutte periodo L , in conseguenza della condizione (2.49); operando le dovute sostituzioni, si ottiene da (2.53) che

$$\left. \pm \frac{1}{2} \frac{d^2\Delta}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} = -\left(\int_0^L E_1 \hat{q} dx \right)^2 + \left(\int_0^L E_2 \hat{q} dx \right)^2 + \left(\int_0^L E_3 \hat{q} dx \right)^2. \quad (2.55)$$

Da questa formula, si può notare come la derivata seconda di Δ sia una forma quadratica di rango 3, di segnatura $(2, 1)$ ed il suo nucleo N sia il complemento ortogonale dello spazio generato da E_1 , E_2 , E_3 . \square

In particolare, si ha il seguente

Corollario 2.5. *Sia $q \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R})$; sia λ^* tale che $|\Delta(\lambda^*)| = 2$ e $\Delta'(\lambda^*) = 0$. Allora la funzione $\Delta(\lambda^*)$ ha un massimo (risp. minimo) a seconda che $\Delta(\lambda^*) = \pm 2$.*

Dimostrazione. Infatti, considerando $Q = q(x) - \lambda$ e $\hat{q} = 1$, dalla (2.55) si ottiene

$$\pm \frac{1}{2} \frac{d^2 \Delta}{d\lambda^2} = - \int_0^L e_1^2 dx \int_0^L e_2^2 dx + \left(\int_0^L e_1 e_2 dx \right)^2 \stackrel{C-S}{<} 0.$$

Da questo la conclusione è immediata. \square

La seguente proposizione mostra cosa succede se si perturba $q(x)$ in prossimità di un massimo o minimo di Δ (zero doppio dell'equazione $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$) di un termine $\varepsilon q_1(x)$, con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo e $q_1(x)$ periodica di periodo L , come già illustrato in Figura 2.1.

Proposizione 2.9. *Sia $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tale che*

$$|\Delta(\lambda^*, q)| = 2, \quad \Delta'(\lambda^*, q) = 0,$$

ove ' indica la derivata prima rispetto a λ ; sia $q_1(x)$ funzione continua periodica di periodo L , che non appartenga allo spazio generato $\langle 1, N \rangle$.

Allora per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, in qualche punto $\lambda^(\varepsilon)$ in un conveniente intorno di λ^* , si ha che*

$$|\Delta(\lambda^*(\varepsilon), q + \varepsilon q_1)| > 2. \quad (2.56)$$

Dimostrazione. Si farà la dimostrazione nel caso $\Delta(\lambda^*, q) = 2$; l'argomento è del tutto simile se, invece, $\Delta(\lambda^*, q) = -2$.

Sia κ una costante. Si ponga

$$Q(x, \varepsilon) = q(x) - \lambda^* + \varepsilon \hat{q}(x), \quad \hat{q} = q_1(x) - \kappa.$$

Per determinare κ si può imporre

$$0 = \int_0^L E_1 \hat{q} dx = \int_0^L E_1 q_1 dx - \kappa \int_0^L E_1 dx;$$

ciò è possibile dal momento che $E_1 > 0$. In tal modo il membro destro dell'uguaglianza (2.55) è sicuramente positivo, a meno che \hat{q} sia ortogonale a E_2 e E_3 : infatti, per costruzione \hat{q} è ortogonale a E_1 ; pertanto, se \hat{q} fosse ortogonale a E_2 e E_3 , si avrebbe $\hat{q} = q_1 - \kappa \in N$, contraddicendo l'ipotesi secondo cui q_1 non appartiene allo spazio generato da 1 e N .

Quindi, per $\lambda^*(\varepsilon) = \lambda^* + \kappa\varepsilon$, si ha

$$Q(x, \varepsilon) = q(x) - \lambda^*(\varepsilon) + \varepsilon q_1(x);$$

facendo lo sviluppo di Taylor di Δ , arrestato al secondo ordine, in $\varepsilon = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda^*(\varepsilon), q + \varepsilon q_1) &\simeq \Delta(\lambda^*, q) + \Delta'(\lambda^*, q)\varepsilon + \frac{1}{2}\Delta''(\lambda^*, q)\varepsilon^2 = \\ &= 2 + \frac{1}{2} \frac{d^2\Delta}{d\lambda^2} \Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon^2 > 2,\end{aligned}$$

se $\varepsilon \neq 0$ è sufficientemente vicino a 0. □

Il seguente risultato, che non dimostreremo, stabilisce che si possono scegliere E_1, E_2, E_3 (definiti nella dimostrazione della Proposizione 2.9) in modo che siano ortogonali.

Proposizione 2.10. *È sempre possibile trovare una base e_1, e_2 di soluzioni dell'equazione di Hill (2.4), con Wronskiano pari a 1 e tali che le tre funzioni E_1, E_2, E_3 , già definite in (2.54), soddisfino:*

$$\int_0^L E_i E_j = 0 \, dx \quad \text{se } i \neq j.$$

In altri termini, tale base soddisfa le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}\int_0^L e_1^4 \, dx &= \int_0^L e_2^4 \, dx; \\ \int_0^L e_1^3 e_2 \, dx &= \int_0^L e_1 e_2^3 \, dx = 0.\end{aligned}$$

Dimostrazione. Omessa. □

2.5 Costruzione dell'esempio

Fissiamo $l_0 = \pi$ e si consideri una arbitraria funzione continua $q_0(x)$, periodica di periodo l_0 . In un qualsiasi intorno di q_0 , vogliamo costruire una funzione periodica al limite $q(x)$, con serie di Fourier

$$q(x) = a_0 + \sum_{j,s=1}^{\infty} \left(a_{js} \cos\left(\frac{s}{2^j}x\right) + b_{js} \sin\left(\frac{s}{2^j}x\right) \right) \quad (2.57)$$

per cui il numero di rotazione $\alpha(\lambda, q) = \alpha(\lambda)$ assume tutti i numeri razionali della forma $\frac{s}{2^t}$, con $s, t \geq 0$ su intervalli di lunghezza positiva. Si noti che la serie di Fourier (2.57) è analoga alla (2.3) del Teorema 2.1, ma, a sua differenza, è espressa in forma reale, $k \equiv 1$ e $r_n = s 2^{-t}$.

Ai fini della costruzione che si vuole fare è vitale il seguente

Teorema 2.6. *Sia $\eta > 0$; sia $q_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ di periodo π . Allora esiste una funzione periodica al limite q con frequenze di base 2^{-j} , $j = 0, 1, \dots$ in $\|q - q_0\| < \eta$ tale che*

(i) *il numero di rotazione $\alpha(\lambda) = \alpha(\lambda, q)$ esiste ed è continuo;*

(ii) *$\alpha(\lambda)$ assume tutti i valori razionali della forma $\frac{s}{2^t}$, $s \geq 0$, $t \geq 0$ su un intervallo di lunghezza positiva;*

(iii) *l'unione*

$$E = \bigcup_{s, t \geq 0} \text{int } \alpha^{-1}\left(\frac{s}{2^t}\right)$$

è densa in \mathbb{R} . Inoltre, E è contenuta nel complementare dello spettro $\sigma(\mathbf{H})$ di $\mathbf{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + q$

Dal teorema segue, pertanto, che $\sigma(\mathbf{H})$ è mai denso, i.e. con complementare denso in \mathbb{R} . Forniremo una traccia della dimostrazione, molto tecnica.

Traccia di dimostrazione. (a) Impostazione.

Vogliamo anzitutto assegnare i valori razionali $\frac{s}{2^t}$, $s \geq 1$, $t \geq 0$ alla successione $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$: scegliamo $r_1 \equiv \frac{1}{2}$, $r_2 \equiv 1$; poi r_3, r_4, \dots, r_8 denotano, nell'ordine, tutti i razionali ≤ 2 con denominatore $2^2 = 4$ non "nominati" in precedenza; in generale, $r_{\nu(n-1)+1} < \dots < r_{\nu(n)-1} < r_{\nu(n)} \equiv n$ indicano tutti i razionali di denominatore 2^n in $0 < r \leq n$ non ancora assegnati. Pertanto, $r_1, r_2, \dots, r_{\nu(n)}$ è un elenco di tutti i razionali positivi con denominatori $1, 2, 2^2, \dots, 2^n$ nell'intervallo $0 < r \leq n$. Si può verificare facilmente per induzione che $\nu(n) = n 2^n$.

Inoltre, si pone $l_j = \pi 2^n$ per $\nu(n-1) + 1 \leq j \leq \nu(n)$. In questo modo

$$r_j = \pi \frac{s_j}{l_j} = \frac{s_j}{2^n} \tag{2.58}$$

per qualche intero s_j .

Costruiremo $q(x)$ come limite di funzioni continue $q_\nu(x)$, $\nu \geq 0$, di periodo l_ν per cui il numero di rotazione corrispondente $\alpha_\nu(\lambda) = \alpha(\lambda, q_\nu)$ assume il valore r_ν in un intervallo non degenere.

(b) Costruzione di q_ν .

Supponiamo di aver già costruito, per ogni $j = 1, 2, \dots, \nu$, funzioni continue $q_j(x)$ di periodo l_j tali che $\alpha_j(\lambda) = \alpha(\lambda, q_j)$ assuma i valori r_1, \dots, r_j su intervalli non degeneri. Inoltre, sia $\varepsilon_\nu > 0$ un numero positivo che può dipendere da q_0, q_1, \dots, q_ν e $\eta > 0$. Si vuole ora costruire una funzione continua $q_{\nu+1}(x)$ di periodo $l_{\nu+1}$ tale che

$$\|q_{\nu+1} - q_\nu\| < \varepsilon_\nu \tag{2.59}$$

e che $\alpha_{\nu+1}(\lambda) = \alpha(\lambda, q_{\nu+1})$ assuma i valori $r_1, \dots, r_\nu, r_{\nu+1}$ su intervalli di lunghezza positiva.

Dal momento che $\alpha_\nu(\lambda)$ è una funzione continua monotona crescente che assume tutti i valori positivi, in particolare esiste $\lambda^* = \lambda_\nu^*$ tale che

$$\alpha_\nu(\lambda^*) = r_{\nu+1}. \quad (2.60)$$

Se α_ν prende questo valore su un intervallo di lunghezza positiva (cioè su cui α_ν è costantemente uguale a $r_{\nu+1}$), poniamo $q_{\nu+1} = q_\nu$; se invece λ^* è univocamente determinato da (2.60) (nel senso che in corrispondenza α_ν è strettamente crescente) allora il discriminante $\Delta(Q)$ (rispetto al periodo $l_{\nu+1}$ ha un punto critico in $Q = q_\nu - \lambda^*$. In particolare, questo accadrà nel caso in cui $l_{\nu+1} = l_\nu$. Per quanto visto nella sezione 2.4, tutte le soluzioni di

$$y'' = (q_\nu(x) - \lambda^*)y$$

soddisfano la condizione

$$y(x + l_{\nu+1}) = \pm y(x).$$

Pertanto, se e_1, e_2 è un sistema fondamentale con Wronskiano 1, allora le funzioni E_1, E_2, E_3 definite nel Lemma 2.2 hanno periodo $l_{\nu+1}$. Se E_1, E_2 sono normalizzati in modo che le E_j siano ortogonali, allora poniamo

$$q_{\nu+1} = q_\nu + \varepsilon E_3.$$

In questo modo $\Delta(\lambda, q_{\nu+1})$ assume $r_{\nu+1}$ come valore non critico, se $\varepsilon > 0$ è sufficientemente vicino a 0. Inoltre, ha anche periodo $l_{\nu+1}$ dal momento che l_ν divide $l_{\nu+1}$. Inoltre, se ε è abbastanza piccolo, i valori non critici r_1, r_2, \dots, r_ν sono anche non critici per $q_{\nu+1}$ e (2.59) sarà soddisfatta. I q_ν sono così costruiti.

(c) *Costruzione dell'insieme di Cantor.*

Si sceglieranno ricorsivamente ε_ν in modo che

- (i) q_ν converge uniformemente ad una funzione periodica al limite q tale che $\|q - q_0\| < \eta$;
- (ii) $\alpha_\nu(\lambda) = \alpha(\lambda, q_\nu)$ converge uniformemente su intervalli compatti ad una funzione continua $\alpha(\lambda)$, con le proprietà richieste dal teorema;
- (iii) l'interno degli intervalli dove $\alpha(\lambda)$ è costante forma un insieme denso E sulla retta reale;

(iv) Lo spettro di $-\frac{d^2}{dx^2} + q$ è contenuto nel complementare di E .

Omettiamo la dimostrazione, molto tecnica, di queste affermazioni, sperando di aver dato almeno un'idea approssimativa di come si procede per la costruzione. \square

Bibliografia

- [1] J. AVRON, B. SIMON, *Almost Periodic Hill's Equation and the Rings of Saturn*, Physical Review Letters, vol. 46, n. 17, pp. 1166-1168, 1981.
- [2] A. S. BESICOVITCH, *Almost Periodic Functions*, Dover Publications, 1954.
- [3] G. DE MARCO, *Analisi Due*, Decibel-Zanichelli, Padova, 1999.
- [4] J. HALE, *Ordinary Differential Equations*, Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1980.
- [5] E. L. INCE, *Ordinary Differential Equations*, Longmans, Green and Co. Ltd., New York, 1927.
- [6] R. JOHNSON, J. MOSER, *The Rotation Number for Almost Periodic Potentials*, Communications in Mathematical Physics, 84 (1982), pp. 403-438.
- [7] R. LANG, *Spectral Theory of Random Schrödinger Operators. A Genetic Introduction*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1991.
- [8] B. JA. LEVIN, *Distribution of Zeros of Entire Functions*, Traduzioni di Matematiche Monographs, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1964.
- [9] W. MAGNUS, S. WINKLER, *Hill's Equation*, Interscience Publishers, New York, 1966.
- [10] J. MOSER, *An example of a Schrödinger equation with almost periodic potential and nowhere dense spectrum*, Commentarii Mathematici Helvetici, 56 (1981), pp. 198-224.
- [11] J. MOSER, *Integrable Hamiltonian Systems and Spectral Theory*, Lezioni Fermiane, Accademia Nazionale dei Lincei, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1981.

- [12] M. REED, B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. I Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1980.