

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"
Corso di Laurea Magistrale in Fisica

Tesi di laurea magistrale

ECCITAZIONI COLLETTIVE DI UN SISTEMA DI FERMIONI ULTRAFREDDO IN 2-D CON INTERAZIONE REPULSIVA ED ACCOPIAMENTO SPIN-ORBITA

Laureando:
LORENZO GIGLI
MATRICOLA 1058053

Relatore:
PROF. FLAVIO TOIGO

Indice

Introduzione	iii
1 Gas di Fermi ultrafreddi	1
1.1 Tecniche di raffreddamento e confinamento	1
1.1.1 I problemi del raffreddamento	1
1.1.2 Raffreddamento tramite laser ed evaporazione forzata	3
1.1.3 Confinamento	6
1.2 Interazioni tra atomi freddi	8
1.2.1 Teoria dello scattering a due corpi	8
1.2.2 La risonanza di Feshbach	10
1.3 L'interazione spin-orbita	13
1.3.1 Gli accoppiamenti Rashba e Dresselhaus su atomi ultrafreddi	14
1.4 L'hamiltoniana del sistema	16
2 Analisi del sistema non interagente	17
2.1 La formulazione integrale-funzionale	18
2.2 Il ruolo della simmetria di gauge	20
2.3 Diagonalizzazione dell'hamiltoniana	21
2.4 Proprietà delle leggi di dispersione	24
2.5 La topologia della superficie di Fermi	27
2.6 Il legame con la termodinamica	29
2.7 Analisi dell'equazione di stato	32
2.7.1 Il limite $\frac{m\Omega}{\hbar^2 k_0^2} \gg 1$	34
2.7.2 Il limite $\frac{m\Omega}{\hbar^2 k_0^2} \ll 1$	37
3 Il sistema interagente	41
3.1 I campi di Hubbard-Stratonovich	42
3.2 Fisica di campo medio	44
3.3 La fase ferromagnetica	47
3.3.1 Magnetizzazione spontanea a $k_0 = 0$	47

3.3.2	Magnetizzazione spontanea a $k_0 \neq 0$	50
3.4	La RPA	51
3.5	Teoria della risposta lineare	56
3.6	Calcolo delle funzioni di risposta interagenti	59
3.7	Definizioni alternative dei campi H-S	61
4	I modi collettivi	63
4.1	Equazioni del moto delle $\chi_{\mu\nu}^0$	64
4.2	Eccitazioni elementari	67
4.3	I tensori di correlazione in assenza di spin-orbita	69
4.4	Equazioni per i modi collettivi	73
4.5	Il continuo particella-buca	78
4.6	Il suono zero in assenza di interazione spin-orbita	80
4.7	Sintesi dei risultati analitici	83
	Conclusioni	89
	Appendice A	93
	Appendice B	95
	Appendice C	99
	Bibliografia	105

Introduzione

Nell'ultimo ventennio, la fisica degli atomi ultrafreddi ha costituito un ambito di ricerca della fisica della materia in costante espansione. Da un punto di vista sperimentale, la realizzazione nel 1995 del primo condensato di Bose-Einstein [1], ha aperto nuove e stimolanti prospettive per la concreta possibilità di osservare effetti di degenerazione quantistica a livello macroscopico. Alla condensazione di Bose-Einstein hanno fatto seguito, infatti, lo studio delle proprietà superfluide della fase condensata e l'osservazione dei primi vortici quantizzati.

Parallelamente allo studio delle proprietà dei gas bosonici, si sviluppò l'interesse per i gas di atomi fermionici. La ragione principale è che, sebbene gli effetti di degenerazione si verificassero su scale di temperature simili per gas fermionici e bosonici, le proprietà fisiche si rivelarono differenti per i due sistemi. In primo luogo, la fase superfluida per i gas fermionici (il cosiddetto regime BCS) emergeva per mezzo di una debole interazione attrattiva tra gli atomi, mentre per i bosoni si verificava anche in assenza di interazioni. In secondo luogo, le due tipologie di gas presentavano differenti proprietà collisionali: contrariamente ai bosoni, il processo di scattering in onda s per un gas di fermioni polarizzato veniva completamente inibito a basse temperature per effetto del principio di esclusione di Pauli. Ciò rese difficoltosa la ricerca di un meccanismo di raffreddamento per i gas fermionici, il quale normalmente richiedeva l'aggiunta di un gas di bosoni come refrigerante.

Un ulteriore motivo di interesse fu dettato dalla possibilità di manipolare perfettamente i sistemi in gioco, modulando non solo la temperatura e la dimensionalità, ma anche la natura e l'intensità delle interazioni tra gli atomi. La tecnica della risonanza di Feshbach fu una svolta in questo senso, in quanto consentiva l'indagine sperimentale del "crossover BCS-BEC": modulando l'intensità dell'interazione tra gli atomi si poteva passare da un regime BCS, in cui il gas era formato da coppie di Cooper con un raggio molto maggiore rispetto alla distanza media tra le particelle, ad un regime BEC, in cui gli atomi erano strettamente legati e formavano dei veri e propri dimeri bosonici. Questa transizione avveniva attraverso un regime intermedio, chiamato regime unitario, in cui la lunghezza

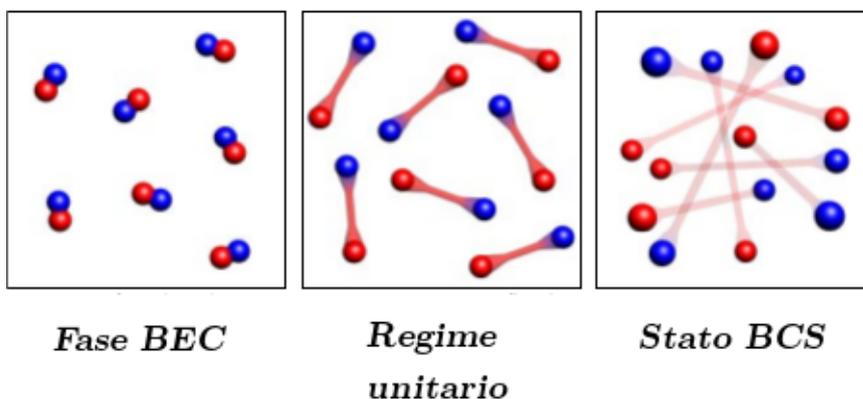


Figura 1: Crossover BCS-BEC [2]

caratteristica di una coppia di atomi interagente era comparabile alla distanza media interatomica.

In definitiva, i gas ultrafreddi divennero un importante banco di prova per evidenziare effetti di coerenza macroscopici e furono utilizzati come base per sperimentare nuovi tipi di accoppiamento. L'interesse principale consisteva in particolare nell'osservare come, in situazioni sperimentali perfettamente sotto controllo come quelle descritte, questi accoppiamenti potessero modificare le proprietà collettive del sistema.

Ne è un esempio il caso dell'interazione spin-orbita, tema centrale della tesi. Negli ultimi anni, l'interesse per questo tipo di interazione è stato motivato dal ruolo fondamentale che essa svolge nella spintronica, nella progettazione di nuovi dispositivi a semiconduttore e nella realizzazione di isolanti topologici. La possibilità di riprodurre questo accoppiamento per mezzo di un sistema di fasci laser su un gas ultrafreddo permette di studiare l'effetto dell'interazione spin-orbita sul sistema a livello di fisica dei molti corpi. Gli articoli [3] e [4] descrivono alcuni degli esperimenti effettuati recentemente, con l'obiettivo di comprendere la fisica sia del sistema non interagente (in assenza di interazione di coppia) sia del sistema interagente. Essi sono stati presi come riferimento e punto di partenza per la tesi.

Il sistema oggetto della tesi è un gas ultrafreddo di fermioni bidimensionale con accoppiamento spin-orbita. La scelta di considerare un sistema bidimensionale deriva dal fatto che, al diminuire della dimensionalità, si accentuano effetti di correlazione a lungo raggio, che caratterizzano l'interesse principale di questi sistemi.

Il tipo di accoppiamento spin-orbita scelto è dato dalla somma di un contributo di tipo Rashba e un contributo di tipo Dresselhaus, analoghi a quelli prodotti

negli esperimenti [3] e [4]. La forma esplicita dell'hamiltoniana del sistema, invece, è stata presa dall'articolo [5] ed utilizzata per descrivere un sistema di fermioni.

Obiettivo centrale della tesi è lo studio del ruolo dell'interazione spin-orbita sulle proprietà collettive del sistema.

Nel primo capitolo si dà una sommaria descrizione delle tecniche sperimentali che si utilizzano per studiare i gas di atomi ultrafreddi, giustificando l'utilizzo dell'hamiltoniana dell'articolo [5].

Nel secondo capitolo si studia la termodinamica del sistema non interagente, in particolare il legame tra densità e potenziale chimico, verificando l'emergere delle due transizioni di fase di Lifshitz osservate nell'articolo [4].

Nel terzo capitolo si passa all'analisi del sistema interagente tramite l'utilizzo della tecnica dell'integrale funzionale di Feynman. Si studiano dapprima le proprietà magnetiche di equilibrio del sistema, caratterizzando in particolare il regime in cui il sistema può transire da una fase paramagnetica ad una fase ferromagnetica. Si valuta inoltre se l'interazione spin-orbita possa o meno favorire la fase magnetizzata.

Successivamente si introduce lo studio dei modi collettivi del sistema. Di particolare interesse è la ricerca del modo di *zero sound*, attraverso l'analisi delle funzioni di risposta del sistema non interagente e del sistema interagente. Per il sistema interagente si utilizza l'approssimazione RPA (*Random Phase Approximation*) per determinare analiticamente l'espressione delle funzioni di risposta in presenza di piccole fluttuazioni rispetto alla configurazione di equilibrio.

Nel quarto capitolo, si determinano le funzioni di risposta non interagenti, mettendo in evidenza le caratteristiche peculiari introdotte dall'accoppiamento spin-orbita. Si cerca di valutare in particolare se il sistema sviluppi delle correlazioni non banali densità-spin che possano modificare la velocità dei modi collettivi del sistema rispetto al caso in cui l'interazione spin-orbita è assente.

Il calcolo esplicito delle leggi di dispersione per i modi collettivi del sistema viene effettuato numericamente, e il risultato viene confrontato con quello del sistema di fermioni privo di interazioni spin-orbita.

Capitolo 1

Gas di Fermi ultrafreddi

In questo capitolo si introducono in modo sommario i principi fisici che a livello sperimentale consentono di manipolare le proprietà di un gas ultrafreddo.

La prima sezione è dedicata alle tecniche di raffreddamento e di confinamento dei gas. Successivamente, si passa alla descrizione delle proprietà delle interazioni interatomiche, illustrando come sia possibile controllarle tramite la tecnica della risonanza di Feshbach. Solo da ultimo ci soffermeremo sull'origine dell'interazione spin-orbita e su come sia possibile riprodurla su un gas ultrafreddo.

Questo quadro complessivo darà una panoramica sulle problematiche sperimentali nel realizzare questi sistemi e consentirà una caratterizzazione precisa del sistema in oggetto tramite la scrittura di un' hamiltoniana.

1.1 Tecniche di raffreddamento e confinamento

1.1.1 I problemi del raffreddamento

Come è noto, gli effetti di degenerazione quantistica si ottengono quando la lunghezza d'onda termica di De Broglie ($\Lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_bT}$) è dello stesso ordine della distanza media interparticellare ($R = (3/4\pi n)^{1/3}$). Ciò significa che l'ordine di grandezza della temperatura di degenerazione è dato da

$$T_{deg} \sim \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{mk_b} \quad (1.1)$$

dove n rappresenta la densità numerica, m la massa delle particelle e k_b la costante di Boltzmann. Nelle comuni situazioni sperimentali le temperature da raggiungere sono dell'ordine dei 100 nK , per effetto delle alte diluizioni cui sono soggetti i gas. Questo pone delle problematiche sperimentali non banali. Il

primo problema consiste nel creare una condizione di isolamento termico per il gas rispetto all'ambiente esterno, che si trova necessariamente a temperature più elevate rispetto a quelle cui si vuole portare il gas. Per risolvere l' "impasse", si introduce il gas all'interno di una camera a vuoto e si applica un sistema di confinamento basato su trappole magneto-ottiche (le cosiddette MOT) oppure trappole ottiche di dipolo. L'obiettivo è evitare che le particelle di gas termalizzino attraverso gli urti con le pareti della camera. Un approfondimento sulle tecniche di confinamento sarà data nella sezione 1.1.3.

Una volta creato l'isolamento termico si passa alla fase di raffreddamento vera e propria. Per un sistema di bosoni essa si articola in due step: il primo consente di raggiungere temperature dell'ordine del millikelvin utilizzando un sistema di laser, il secondo abbassa ulteriormente la temperatura fino a 100 nK tramite la tecnica dell'evaporazione forzata. Per un gas di fermioni polarizzato tuttavia vi è un'ulteriore difficoltà: l'evaporazione forzata sfrutta la ritermalizzazione delle particelle di gas in seguito all'espulsione delle particelle più energetiche. Poiché la statistica dei fermioni obbedisce al principio di esclusione di Pauli, la sezione d'urto di scattering elastico fra fermioni spin-polarizzati è nulla; perciò, non è possibile utilizzare le collisioni per permettere al sistema di raggiungere l'equilibrio ad una temperatura più bassa.

La tecnica che si utilizza allora per evitare questo problema è quella del raffreddamento simpatetico: si crea una miscela di due specie atomiche, una fermionica ed una bosonica, in cui il gas di bosoni funge da refrigerante. In questo modo, si sfruttano le proprietà collisionali fra bosoni e fermioni per termalizzare il sistema e rendere efficiente il raffreddamento per evaporazione forzata. Questa tecnica è stata applicata nell'esperimento [6].

L'utilizzo di queste tecniche in luogo del raffreddamento ad elio superfluido, utilizzato comunemente per raggiungere condizioni criogeniche, è giustificato dal fatto di poter mantenere il sistema in condizioni di elevate diluizioni. Ciò è importante per un duplice motivo: da una parte le interazioni tra gli atomi rimangono deboli ed impediscono al gas di liquefarsi o solidificarsi; dall'altra è possibile descrivere il sistema, assumendo che avvengano solamente interazioni a due corpi. Ciò risulta chiaro se confrontiamo i tempi caratteristici, τ_2 e τ_3 che intercorrono fra due collisioni successive a due o tre corpi. Poiché ci aspettiamo che $\tau_2 \sim n^2$ e $\tau_3 \sim n^3$, $\tau_2 \ll \tau_3$ se il gas è sufficientemente diluito. Pertanto, possiamo trascurare l'effetto delle interazioni a più di due corpi. Ciò porta ad una considerevole semplificazione, come vedremo nella sezione 1.2.1.

1.1.2 Raffreddamento tramite laser ed evaporazione forzata

La tecnica del raffreddamento tramite laser sfrutta il processo di scattering risonante di luce laser sulle particelle di gas.

Supponiamo che per atomi a riposo un'onda elettromagnetica di frequenza ω_R sia in grado di produrre una transizione risonante fra lo stato fondamentale ed uno stato eccitato. Immaginiamo inoltre di preparare un fascio laser propagante lungo la direzione positiva dell'asse x con una frequenza ω_L leggermente minore rispetto a quella richiesta per eccitare la transizione ($\omega_L < \omega_R$). Per effetto Doppler, gli atomi che casualmente si muovono in verso opposto alla propagazione del fascio tenderanno ad entrare in risonanza e ad assorbire i fotoni incidenti con un rate relativamente elevato. Viceversa, gli atomi che si muovono nello stesso verso della propagazione dell'onda incidente escono dalla risonanza.

Il risultato è che, per effetto dell'assorbimento, gli atomi che si muovono contro il fascio incidente subiscono una decelerazione. In effetti, per la conservazione del momento, la variazione di velocità sperimentata da un atomo in un singolo processo di assorbimento sarà data da

$$\Delta \vec{v} = \frac{\hbar \vec{k}}{m} \quad (1.2)$$

dove \vec{k} rappresenta il vettore d'onda del fotone incidente e m la massa di un singolo atomo.

In seguito all'eccitazione, l'atomo nello stato eccitato decade nuovamente nello stato fondamentale per emissione spontanea. In questo processo, il fotone emesso avrà lo stesso momento del fotone assorbito; poichè però una singola emissione avviene in modo isotropo, mediando su un numero sufficientemente elevato di processi di emissione/assorbimento, il contributo dato dal processo di emissione alla variazione di momento dell'atomo è nullo. Pertanto, l'effetto della radiazione sugli atomi che si muovono verso la sorgente tende a rallentarli, con una variazione di velocità data dalla (1.2).

E' importante notare a questo proposito che il rate di transizione di un singolo atomo tra lo stato fondamentale e lo stato eccitato dipende dalla velocità per effetto dello spostamento Doppler. Accendendo due fasci laser contropropaganti con uguale frequenza ed intensità, si può mostrare che la forza media dovuta alla pressione di radiazione su un elevato numero di cicli di assorbimento/emissione è legata alla velocità dalla relazione

$$\vec{F} = -\gamma \vec{v} \quad (1.3)$$

Pertanto, l'effetto frenante della radiazione è descrivibile tramite una forza media dissipativa.

Questo meccanismo può essere utilizzato nella pratica per diminuire la temperatura del gas. In effetti, una volta confinato il gas tramite una MOT, è sufficiente accendere un set di laser contropropaganti in tre direzioni perpendicolari con un leggero detuning dalla risonanza: $\delta = \omega_R - \omega_L > 0$. In questo modo si può ottenere una decelerazione complessiva di tutto il gas, in quanto viene limitata la velocità degli atomi in ogni direzione. Ciò riduce l'energia cinetica media delle particelle e di conseguenza la temperatura del sistema.

La temperatura minima che si può ottenere tramite questa tecnica è limitata dal principio di indeterminazione. In effetti, l'energia termica delle particelle di gas non può mai essere minore della larghezza caratteristica di riga della transizione. Ciò è dovuto all'indeterminazione sull'energia del fotone emesso, e quindi alla vita media finita dello stato eccitato. In formule, se chiamiamo Γ la larghezza caratteristica di riga e T_D la temperatura minima, detta temperatura Doppler, si ha che

$$T_D = \frac{\hbar\Gamma}{2k_b} \quad (1.4)$$

Per esempio, per la transizione $5s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$ di un gas di ^{87}Rb , il limite Doppler è $T_D = 143 \mu\text{K}$. In ogni caso, la tecnica del raffreddamento tramite laser cessa di essere efficiente al di sotto dei $100 \mu\text{K}$.

Per poter raffreddare ulteriormente il gas una volta raggiunta la temperatura Doppler, si sfrutta la tecnica dell'evaporazione forzata.

L'evaporazione forzata consiste nella sistematica rimozione delle particelle più energetiche di gas, seguita dalla ritermalizzazione delle particelle rimanenti. Supponiamo ad esempio che il gas si trovi in condizioni di equilibrio in corrispondenza della temperatura Doppler $T_0 = T_D$ e che sia stato confinato per mezzo di una MOT. Se il sistema è sufficientemente diluito, possiamo trascurare le interazioni a corto raggio fra le coppie di atomi e la distribuzione in energia del gas alla temperatura T_D è la distribuzione di Maxwell-Boltzmann¹.

Per abbassare la temperatura, si applica un campo a radiofrequenza con una lunghezza d'onda tale da far transire le particelle di energia massima nella distribuzione dallo stato iniziale ad uno stato non intrappolato. Modulando la frequenza del campo è possibile rimuovere in questo modo le particelle con un'energia cinetica maggiore di una certa energia di cutoff E_c . Questa procedura consente di espellere dal sistema una frazione relativamente elevata dell'energia iniziale, minimizzando però la perdita delle particelle.

¹Alla temperatura Doppler, il sistema non ha ancora raggiunto il limite di degenerazione quantistica e gli effetti dovuti alla statistica, bosonica o fermionica, sono trascurabili.

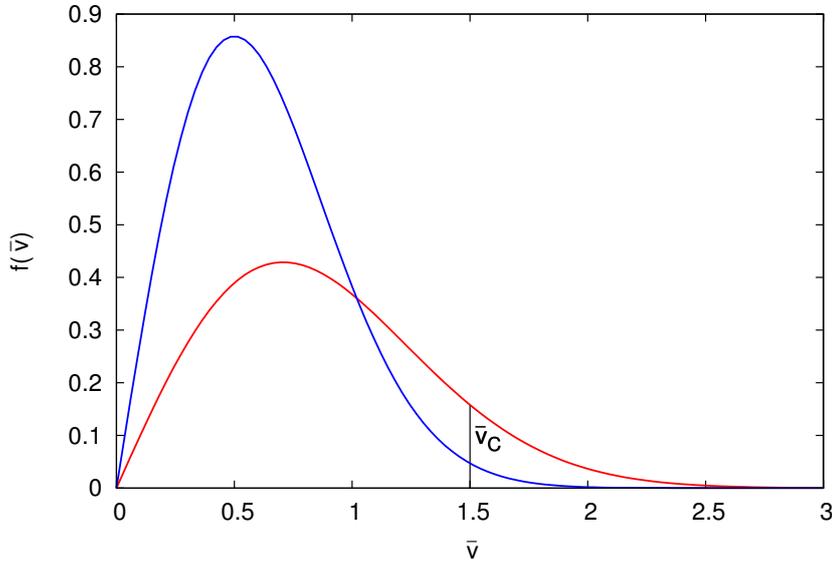


Figura 1.1: Distribuzioni di Maxwell-Boltzmann alle temperature T_0 (linea rossa) e T_1 (linea blu).

Una volta rimosse le particelle più energetiche, il sistema si riporta in equilibrio per mezzo delle collisioni fra le particelle restanti. Poiché l'energia totale è diminuita, la distribuzione di equilibrio finale raggiunta dal gas sarà una distribuzione di Maxwell con una temperatura $T_1 < T_0$. In figura 1.1 riportiamo le due distribuzioni di Maxwell che corrispondono rispettivamente alla temperatura T_0 (linea rossa) e alla temperatura T_1 (linea blu) in funzione della velocità espressa dal parametro adimensionale $\bar{v} = \sqrt{\frac{1}{2}mv^2}$. La linea verticale nera rappresenta la velocità di cutoff $\bar{v}_C = \sqrt{\frac{E_C}{k_b T}}$ imposta dal campo a radiofrequenza.

In questo modo, si riesce a raggiungere la temperatura critica di degenerazione per i gas bosonici. Per i gas fermionici polarizzati, come già accennato nella sezione 1.1.1, il processo di scattering in onda s è completamente inibito e il sistema non è in grado di riportarsi in equilibrio ad una temperatura più bassa. Pertanto, l'evaporazione forzata nel caso dei fermioni viene effettuata aggiungendo un gas di atomi bosonici come refrigerante oppure utilizzando una miscela di due specie fermioniche in due stati di spin differenti. In queste condizioni sono gli urti tra fermioni e bosoni, oppure tra fermioni con differente polarizzazione, a garantire l'approccio al nuovo equilibrio.

1.1.3 Confinamento

In questo paragrafo si illustra brevemente la tecnica principale di confinamento utilizzata sperimentalmente: il confinamento tramite trappola magneto-ottica (MOT).

Il confinamento richiede l'azione di una forza dipendente dalle coordinate spaziali e diretta verso una posizione di equilibrio. Per realizzare una forza con queste caratteristiche si sfrutta l'effetto di un campo magnetico dipendente dalla posizione sui livelli energetici della struttura iperfine.

A questo proposito, supponiamo che

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{I} \quad (1.5)$$

rappresenti il momento angolare atomico totale, inteso come somma dello spin nucleare e del momento angolare elettronico. Chiaramente, se consideriamo che il nucleo è soggetto al campo magnetico generato dagli elettroni, il momento angolare elettronico e nucleare si accoppiano generando una struttura iperfine. In queste condizioni, il momento angolare totale F e la sua proiezione lungo un asse di quantizzazione m_F , preso come asse z del sistema di riferimento, diventano i buoni numeri quantici con cui descrivere gli stati $|F, m_F\rangle$ della struttura iperfine.

Consideriamo ora per semplicità un sistema a quattro stati: lo stato fondamentale $|0, 0\rangle$ e i tre stati eccitati degeneri $|1, -1\rangle$, $|1, 0\rangle$ e $|1, 1\rangle$. Se si applica un campo magnetico esterno non omogeneo $\vec{B}(\vec{x}) = B(\vec{x})\vec{e}_z$ diretto lungo z , i tre stati con $F = 1$ perdono la degenerazione per effetto Zeemann; in particolare, lo shift in energia dei tre stati rispetto alla configurazione iniziale è definito dalla legge

$$\Delta E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \mu_B g_F m_F B(\vec{x}) \quad (1.6)$$

dove $\vec{\mu}$ è il momento magnetico dell'atomo, μ_B è il magnetone di Bohr, g_F il fattore di Landè relativo al particolare stato della struttura iperfine, dipendente da I , J ed F , e m_F la proiezione di \vec{F} nella direzione del campo magnetico.

Notiamo così che, oltre ad avere la dipendenza da m_F a causa dell'effetto Zeemann, ΔE dipende anche dalla posizione. Questo fatto può essere utilizzato per generare una forza confinante.

La configurazione sperimentale che si utilizza nella pratica per effettuare il confinamento lungo un asse è formata da due bobine circolari in configurazione anti-Helmholtz e due fasci laser contropropaganti con polarizzazione circolare opposta σ_+ e σ_- .

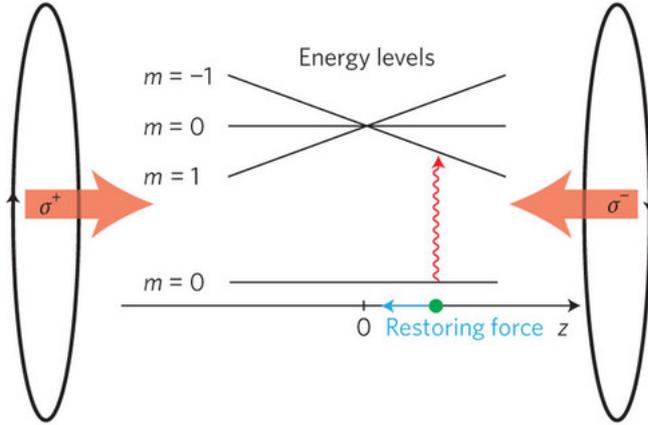


Figura 1.2: Schema di funzionamento di una trappola magneto-ottica [7].

Le bobine circolari generano un campo magnetico lineare lungo l'asse di confinamento (asse z), crescente e nullo in corrispondenza del punto medio fra le due bobine. Perciò, in base all'equazione (1.6), le energie degli stati $|1, 1\rangle$ e $|1, -1\rangle$ variano linearmente attorno all'origine in modo crescente e decrescente rispettivamente, come rappresentato in figura 1.2.

In queste condizioni, si preparano i due fasci laser con un leggero detuning dalla frequenza di risonanza della transizione fra lo stato $|0, 0\rangle$ e i tre stati eccitati, degeneri in assenza di campo magnetico.

A causa del detuning dalla risonanza dei due fasci incidenti, risulta chiaro che per valori negativi di z gli atomi tenderanno ad assorbire principalmente fotoni con polarizzazione positiva provenienti da sinistra, mentre assorbiranno fotoni con polarizzazione negativa provenienti da destra per valori di z positivi. Questo perché, per z negativi, l'effetto Zeemann prodotto dal campo magnetico abbassa l'energia necessaria per eccitare la transizione dallo stato fondamentale allo stato $|1, 1\rangle$ facendola entrare in risonanza; viceversa, per z positivi viene messa in risonanza la transizione dallo stato fondamentale allo stato $|1, -1\rangle$.

Chiaramente questo effetto dipenderà dalla posizione, a causa della dipendenza dalle coordinate spaziali dello shift in energia dei tre stati eccitati.

In definitiva, gli atomi che casualmente si trovano nella regione degli z negativi sentono una forza diretta verso l'origine dovuta alla pressione generata dal fascio con polarizzazione circolare positiva; gli atomi che invece si trovano nella regione degli z positivi sentono una forza diretta sempre verso l'origine a causa della pressione generata dal fascio con polarizzazione negativa. Perciò, l'effetto complessivo della MOT è quello di generare una forza di richiamo dipendente dalla posizione, e diretta verso l'origine.

Questa procedura può essere applicata per ottenere un confinamento spaziale in tutte le direzioni, introducendo tre coppie di magneti circolari e tre coppie di laser contropropaganti nelle direzioni degli assi di riferimento.

Il sistema oggetto della tesi, come vedremo, è bidimensionale. Questo fatto lo si può giustificare pensando, ad esempio, di aver realizzato il confinamento lungo una sola direzione, in modo da creare un sottile strato quasi-bidimensionale di gas con uno spessore trascurabile rispetto alla lunghezza caratteristica occupata sul piano perpendicolare.

1.2 Interazioni tra atomi freddi

Un elemento essenziale con cui la fisica degli atomi ultrafreddi ha potuto svilupparsi è stata la comprensione delle proprietà delle interazioni interatomiche. A livello teorico, questa fase di studio è servita per cercare di descrivere le proprietà di nuove fasi termodinamiche, come ad esempio la fase superfluida di un gas di bosoni e di fermioni in presenza di un'interazione a corto raggio. Questo obiettivo è in parte in comune con quello della tesi.

A livello sperimentale, la scoperta che ha rivoluzionato lo studio dei gas ultrafreddi è stata proprio la possibilità di manipolare le interazioni interatomiche, sfruttando la tecnica della risonanza di Feshbach.

Nella prima parte di questa sezione si dà perciò un breve riassunto della teoria dello scattering a basse energie, con lo scopo di mostrare che le interazioni in un gas ultrafreddo a basse densità sono riassunte da pochi e ben definiti parametri. Successivamente si descrive la tecnica della risonanza di Feshbach, mettendo in evidenza come sia possibile modificare l'interazione tra gli atomi modulando un campo magnetico esterno.

1.2.1 Teoria dello scattering a due corpi

Come già notato nella sezione 1.1.1, se le densità sono sufficientemente basse è possibile trascurare l'effetto dovuto a collisioni che coinvolgono più di due particelle. Pertanto, per caratterizzare le proprietà collisionali del sistema è sufficiente descrivere le proprietà dell'interazione a due corpi.

Supponiamo che due atomi di massa m interagiscano per mezzo di un potenziale di interazione generico $V(\vec{x})$, in modo tale che l'hamiltoniana relativa al moto della massa ridotta delle due particelle sia

$$H = \frac{p^2}{4m} + V(\vec{x}) \quad (1.7)$$

L'obiettivo è ricavare gli stati stazionari relativi all'hamiltoniana H risolvendo l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo

$$\left[-\frac{\hbar^2}{4m}\nabla^2 + V(\vec{x}) \right] \psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}) \quad (1.8)$$

dove $\psi(\vec{x})$ rappresenta la funzione d'onda associata allo stato stazionario ed E la corrispondente energia nel sistema di riferimento del centro di massa. Scegliendo lo zero di energia nella configurazione in cui le particelle si trovano a distanza infinita, risulta chiaro che gli stati ad energia negativa corrispondono a stati legati.

Nel limite $r = |\vec{x}| \rightarrow \infty$, la funzione d'onda di un generico stato stazionario ha un contributo dato da un'onda piana incidente ed un contributo dato da un'onda sferica uscente, entrambe di vettore d'onda \vec{k} :

$$\psi(\vec{x}) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\approx} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + f_{\vec{k}}(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (1.9)$$

dove la quantità $f_{\vec{k}}(\theta, \phi)$ è detta ampiezza di scattering, in quanto è correlata alla probabilità di diffusione nella direzione (θ, ϕ) rispetto alla direzione del fascio incidente.

L'ampiezza di scattering è completamente determinata dal potenziale di interazione. In particolare, per potenziali di interazione a simmetria sferica, $f_{\vec{k}}(\theta, \phi)$ dipende solamente dall'angolo di scattering θ . Sviluppando allora la funzione d'onda dello stato stazionario in polinomi di Legendre, si ottiene la seguente espressione per l'ampiezza di scattering [8]:

$$f_{\vec{k}}(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1)P_l(\cos\theta) \quad (1.10)$$

Ora, nel caso di un sistema di fermioni degenere e diluito, il range spaziale del potenziale di interazione è molto piccolo rispetto alla lunghezza d'onda termica $\Lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_bT}}$. In queste condizioni, se i fermioni non sono spin-polarizzati, il contributo di gran lunga dominante dello sviluppo (1.10) è dato dal termine con $l = 0$. In questo caso, si parla di scattering in onda s .

In formule si ha che, per piccoli valori di k , l'ampiezza di scattering totale dello stato stazionario tende ad un valore costante, i.e. indipendente da θ :

$$f_{\vec{k}}(\theta) \stackrel{k \rightarrow 0}{\approx} -a_s \quad (1.11)$$

dove a_s è detta ampiezza di scattering in onda s e caratterizza completamente il processo di scattering a due corpi, definendone in modo particolare la sezione d'urto totale σ , tramite la relazione

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \int |f_{\vec{k}}(\theta, \phi)|^2 d\Omega \stackrel{k \rightarrow 0}{\approx} a_s^2 \quad (1.12)$$

Chiaramente, se invece il sistema è costituito da fermioni polarizzati, il contributo dato dallo scattering in onda s è nullo per antisimmetria della funzione d'onda totale ed è perciò necessario considerare ordini superiori nello sviluppo. Il piccolo contributo dato dai termini con $l > 0$ alla sezione d'urto di scattering totale ne rende difficoltosa soprattutto la fase di raffreddamento, come già messo in evidenza nella precedente sezione.

Come mostrato dall'equazione (1.12), l'ampiezza di scattering in onda s determina l'intensità dell'interazione tra coppie di atomi in un sistema di fermioni non polarizzato. Questa conclusione risulta ancor più chiara quando l'interazione tra gli atomi può essere espressa in termini di un potenziale di contatto, cioè un potenziale proporzionale alla delta di Dirac $\delta^{(3)}(\vec{x})$. In questo caso, l'ampiezza di scattering determina l'ampiezza del potenziale di interazione.

Infatti, utilizzando l'approssimazione di Born [8], si ha che

$$f_{\vec{k}}(\theta, \phi) = -\frac{m}{4\pi\hbar^2} \int d^3x e^{ik\vec{u}\cdot\vec{x}} V(\vec{x}) \quad (1.13)$$

dove \vec{u} è un versore che definisce la direzione di scattering. Assumendo che $V(\vec{x}) = C\delta^{(3)}(\vec{x})$, dove C è una costante da determinare, e sostituendo nell'equazione 1.13, si ottiene che

$$f_{\vec{k}}(\theta, \phi) \stackrel{k \rightarrow 0}{\approx} -a_s = -\frac{mC}{4\pi\hbar^2} \quad (1.14)$$

Perciò, $V(\vec{x}) = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_s \delta^{(3)}(\vec{x})$.

In conclusione, è corretto rappresentare l'interazione tra le coppie di atomi con un potenziale di contatto, la cui intensità è regolabile, modificando l'ampiezza di scattering in onda s . In particolare, si nota che è possibile transire da un regime di potenziale attrattivo con $a_s < 0$ ad un regime di potenziale repulsivo con $a_s > 0$. A questo scopo si utilizza la tecnica della risonanza di Feshbach.

1.2.2 La risonanza di Feshbach

Nella trattazione fatta nella precedente sezione sullo scattering a due corpi, si è trascurato il fatto che le particelle interagenti sono particelle con spin. L'esistenza di questo grado di libertà interno rende il processo di scattering un processo multicanale.

Il processo di scattering a due corpi da un potenziale a simmetria sferica descritto nella sezione 1.2.1, infatti, assume implicitamente che siano verificate le regole di commutazione $\{H, L^2\} = 0 = \{H, L_z\}$ a causa dell'invarianza per rotazioni

dell'hamiltoniana. Questa relazione non sussiste se consideriamo anche i gradi di libertà di spin.

E' necessario infatti tenere conto degli effetti dovuti alla struttura iperfine, cioè all'accoppiamento fra il momento angolare elettronico e lo spin nucleare, ed eventualmente, all'interazione fra lo spin totale dell'atomo (somma dello spin elettronico e nucleare) ed un campo magnetico esterno.

In definitiva, l'hamiltoniana totale che dobbiamo considerare nel sistema di riferimento del centro di massa è data da

$$H = \frac{P^2}{4m} + \frac{p^2}{m} + V(r) + H_{spin}(1) + H_{spin}(2) \quad (1.15)$$

dove P è il momento del centro di massa, p il momento associato al moto della massa ridotta, $V(r)$ il potenziale di interazione a simmetria sferica e H_{spin} l'hamiltoniana associata alla struttura iperfine e all'accoppiamento Zeemann per i due atomi interagenti. La sua forma esplicita è data da

$$H_{spin} = b\mathbf{I} \cdot \mathbf{J} + g_F \mu_B B F_z \quad (1.16)$$

Il primo termine corrisponde alla struttura iperfine, mentre il secondo all'interazione tra momento angolare atomico totale e campo magnetico esterno.

In conclusione, per effetto di questi accoppiamenti, un singolo stato stazionario soluzione dell'equazione di Schrödinger (1.8), ha uno splitting in un set di sottolivelli non degeneri, identificati da diversi valori di F (momento angolare atomico totale) e di m_F (proiezione di \vec{F} lungo un asse).

Consideriamo ora per semplicità un processo a due canali, cioè supponiamo che le particelle interagenti possano trovarsi solo su due livelli della struttura iperfine. I due livelli, come detto, avranno differente momento magnetico ed energie diverse. Se perciò le due particelle che interagiscono si trovano inizialmente nello stato di più bassa energia, l'altro stato non è accessibile tramite il processo di scattering, per non violare la conservazione dell'energia. Si avrà allora un canale aperto, rappresentato dallo stato di energia minore, e un canale chiuso. Questa situazione può cambiare se è presente un campo magnetico esterno: a causa del termine di Zeemann è possibile modificare, regolando B opportunamente, la separazione in energia fra canale aperto e canale chiuso.

Più precisamente, supponiamo che l'interazione tra le particelle nei due canali sia descritto da un potenziale di Van der Waals con un raggio tipico molto piccolo rispetto alla distanza media fra le particelle, come rappresentato in figura 1.3. Sia ΔE la differenza di energia tra i livelli del continuo dei due potenziali dovuta alla struttura iperfine. Ora, se si accende un campo magnetico B , si ottiene una separazione dei due livelli iperfini in una serie di stati non degeneri, con diversi

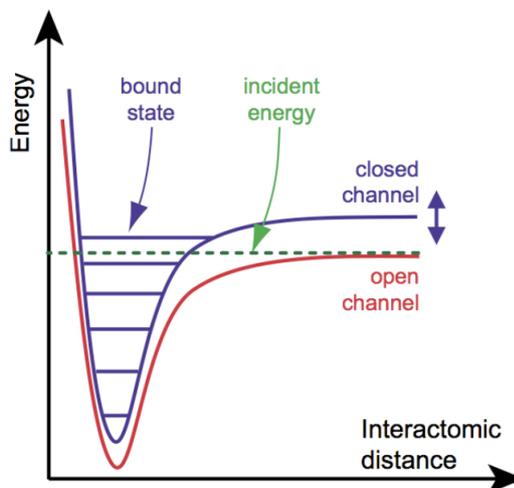


Figura 1.3: Modello a due canali della risonanza di Feshbach.

valori di m_F . L'obiettivo è allora modulare B , in modo da portare il continuo del canale aperto vicino ad uno stato legato del canale chiuso. Quando ciò avviene, le particelle interagenti possono compiere una transizione allo stato legato, e successivamente decadere nello stato iniziale con un tempo caratteristico inversamente proporzionale alla differenza di energia fra i due stati. Si realizza in questo modo un processo di scattering a due corpi chiamato risonanza di Feshbach.

Quanto più vicino si porta il livello del continuo del canale aperto alla risonanza con lo stato legato, tanto più lunga sarà la vita media dello stato legato e tanto più grande sarà l'ampiezza di scattering in onda s del processo. In particolare, se i due stati hanno energie uguali, si ottiene un processo di scattering risonante e l'ampiezza di scattering in onda s diverge.

Questa procedura mostra che c'è un legame fra l'ampiezza di scattering del processo e il campo magnetico applicato. La loro relazione è la seguente:

$$a_s(B) = a_{bg} \left(1 + \frac{C}{B - B_0} \right) \quad (1.17)$$

dove a_{bg} è detta ampiezza di scattering di background, mentre C e B_0 sono costanti. Dall'equazione (1.17) si vede che variando B è possibile modificare il valore dell'ampiezza di scattering in onda in s e perciò il potenziale di interazione.

Notiamo che a_s può essere sia positiva che negativa: nel primo caso, l'interazione è repulsiva, nel secondo è attrattiva. Ciò significa che la variazione del campo magnetico esterno permette di passare in modo continuo dalla parte attrattiva

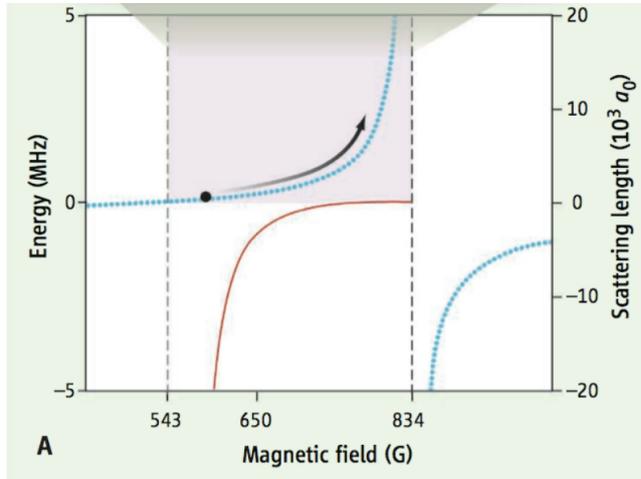


Figura 1.4: Dipendenza della lunghezza di scattering e dell'energia di interazione dal campo magnetico. a_0 indica il raggio di Bohr.

alla parte repulsiva della risonanza e viceversa, attraverso una fase intermedia in cui a_s diverge (limite unitario). L'andamento della lunghezza di scattering in funzione del campo magnetico è riportata in figura 1.4 (linea azzurra).

La linea rossa in figura 1.4 rappresenta invece l'energia E dello stato metastabile, e mostra che lo stato legato è lo stato fondamentale ($E < 0$) dalla parte repulsiva della risonanza. Ciò significa che un sistema di fermioni con interazione fortemente repulsiva è molto instabile, a causa del processo di ricombinazione degli atomi in dimeri bosonici. Dal momento che gli atomi tendono a formare stati legati molecolari, il gas assume le caratteristiche di un condensato di Bose-Einstein.

In definitiva, la vita media del sistema nella fase con interazione repulsiva è molto breve, e ciò rende difficoltosa l'analisi a livello sperimentale. Tuttavia, in [9] è stata dimostrata l'esistenza di una finestra di metastabilità, con cui sarebbe possibile osservare sperimentalmente l'emergere di una fase ferromagnetica.

1.3 L'interazione spin-orbita

Nelle sezioni 1.1 e 1.2 si sono descritte in modo sommario le tecniche che si utilizzano sperimentalmente per ottenere un gas atomico degenere, in cui le interazioni sono perfettamente sotto controllo.

Una volta ottenute queste condizioni sperimentali, il gas atomico in oggetto rappresenta la piattaforma ideale su cui sperimentare nuovi accoppiamenti e i loro effetti a livello macroscopico. Questo è il caso dell'interazione spin-orbita.

L'interesse per questo accoppiamento è stato destato recentemente dall'espansione della spintronica a semiconduttore, motivata a sua volta dalla realizzazione di dispositivi con nuove proprietà elettroniche ed optoelettroniche. L'articolo [10] mostra in dettaglio l'intima connessione fra le proprietà microscopiche dell'accoppiamento spin-orbita e i recenti successi ottenuti nell'ambito della spintronica.

In questa sezione, si mostra il meccanismo che permette di riprodurre sperimentalmente l'accoppiamento spin-orbita su un gas ultrafreddo e si introduce infine l'accoppiamento che verrà studiato in dettaglio nel corso della tesi.

1.3.1 Gli accoppiamenti Rashba e Dresselhaus su atomi ultrafreddi

L'interazione spin-orbita accoppia lo spin di una particella al suo momento, ed in sistemi convenzionali è dovuto agli effetti relativistici che si originano quando la particella si muove nel campo elettrico presente all'interno del materiale.

Questo modo di produrre l'interazione spin-orbita è possibile solo negli atomi, dove dà origine alla struttura fine ed iperfine, e nei solidi, in particolare nei semiconduttori. Per riprodurlo in laboratorio su un sistema di atomi degeneri, si utilizzano due differenti transizioni Raman, generate da una coppia di laser contropropaganti, che modificano lo spin atomico. L'accoppiamento risultante viene detto anche accoppiamento sintetico.

Supponiamo di selezionare due stati di spin atomici differenti con autovalore del momento angolare totale $F = 1$, ma con un diverso valore di m_F . In analogia con gli stati di spin elettronici, possiamo rappresentare questi due stati come stati di pseudospin su e giù: $|\uparrow\rangle = |F = 1, m_F = 0\rangle$ e $|\downarrow\rangle = |F = 1, m_F = -1\rangle$, non degeneri per effetto dell'accoppiamento Zeemann con il campo magnetico esterno.

Ora, supponiamo che lo stato iniziale sia lo stato di pseudospin $|\downarrow\rangle$. Un laser Raman viene regolato con una frequenza tale da provocare una transizione ad uno stato eccitato, che genericamente indichiamo con $|s\rangle$, mentre la frequenza dell'altro viene fissata in modo tale che l'atomo decada per emissione stimolata dallo stato eccitato $|s\rangle$ allo stato $|\uparrow\rangle$.

In questo modo, si riesce a produrre una risonanza fra i due stati di pseudospin differente. L'accoppiamento fra i due stati è spin-dipendente, e dipende anche dal momento, perchè se l'atomo è in moto con una certa velocità nel sistema del laboratorio, lo spostamento Doppler risultante fa sì che i due laser Raman escano dalla risonanza. Il risultato perciò è che i due laser generano un'interazione che accoppia spin e momento atomico. Come vedremo, questo accoppiamento

modifica la legge di dispersione energia-momento rispetto al caso di fermioni liberi, dando origine a due branche di elicità diversa.

Il fatto importante è che, differentemente da quanto accade nei solidi cristallini, l'interazione spin-orbita nel caso di un sistema di atomi degeneri può essere perfettamente controllata, ed è possibile realizzarla in diverse forme.

I casi più interessanti sono quelli degli accoppiamenti Rashba e Dresselhaus, in quanto descrivono al primo ordine gli accoppiamenti presenti nei solidi. L'origine di questi accoppiamenti può essere spiegata utilizzando il semplice modello semi-classico di una particella con spin che si muove in un campo elettrico, generato ad esempio da un nucleo atomico oppure dai nuclei di un cristallo.

Assumiamo che il campo elettrico sia per semplicità statico, uniforme e diretto lungo l'asse z , cioè $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z$. La particella in moto nel sistema del laboratorio sente un campo magnetico \vec{B}_{SO} , dato da

$$\vec{B}_{SO} = -\frac{\gamma \hbar}{mc^2} (\vec{k} \times \vec{E}) \approx \frac{\hbar E_0}{mc^2} (-k_y, k_x, 0) \quad (1.18)$$

dove $\gamma \approx 1$ è il fattore di Lorentz relativo al moto (non relativistico) della particella, m la massa, c la velocità della luce e $\hbar \vec{k} = \hbar(k_x, k_y, k_z)$ il momento della particella.

Se la particella ha spin $\frac{1}{2}$, il campo magnetico nel sistema di riferimento della particella si accoppia con il momento magnetico di spin $\vec{\mu}_s = \frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma}$, dando luogo ad un'energia di interazione

$$\mathcal{E} = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_{SO} = \alpha (\sigma_x k_y - \sigma_y k_x) \quad (1.19)$$

dove α è una costante.

L'equazione (1.19) descrive l'interazione Rashba, mentre nel caso dell'interazione Dresselhaus si ha $\mathcal{E} \propto (-\sigma_x k_y - \sigma_y k_x)$.

L'accoppiamento spin-orbita che verrà studiato nella tesi è dato da due contributi di uguale intensità derivanti dall'interazione Rashba e dall'interazione Dresselhaus.

Le interazioni di tipo Rashba e Dresselhaus non sono le uniche che possono essere prodotte sperimentalmente. Vi sono altre interazioni che possono condurre ad effetti collettivi potenzialmente diversi. Questo è il caso ad esempio dell'accoppiamento di Weyl

$$\lambda \vec{k} \cdot \vec{\sigma} \quad (1.20)$$

che ha il vantaggio di essere isotropo. Questo tipo di accoppiamento è analizzato su un sistema tridimensionale nell'articolo [11].

Uno degli obiettivi della tesi sarà verificare eventuali differenze prodotte dai diversi accoppiamenti sulle proprietà del sistema. Ci soffermeremo in particolare sulle proprietà magnetiche di equilibrio e sull'analisi dei modi collettivi.

1.4 L'hamiltoniana del sistema

Nelle precedenti sezioni, si sono introdotti tutti gli elementi necessari per la scrittura di un'hamiltoniana, che sarà il punto di riferimento dell'intera tesi. L'hamiltoniana efficace di singola particella [5] che consideriamo è la seguente:

$$h_{SO} = \frac{\hbar^2}{2m} [(k_x - k_0\sigma_z)^2 + k_y^2] + \frac{\Omega}{2}\sigma_x + \frac{\delta}{2}\sigma_z \quad (1.21)$$

Il sistema è perciò bidimensionale, l'interazione spin-orbita è nella forma $\frac{\hbar^2 k_0}{m} k_x \sigma_z$ ed è data dalla somma di un contributo di tipo Rashba ed un contributo di tipo Dresselhaus di uguale intensità².

Come abbiamo visto nella sezione 1.3.1, per generare l'interazione spin-orbita è necessario far interagire il sistema atomico con una coppia di laser Raman, che accoppiano due stati di pseudospin diversi. L'effetto dei due laser Raman sul sistema può essere espresso tramite due accoppiamenti Zeemann efficaci $\frac{\Omega}{2}\sigma_x$ e $\frac{\delta}{2}\sigma_z$. Ω rappresenta l'intensità dell'accoppiamento Raman fra i due stati iperfini, mentre δ è un parametro che stima il detuning dei due fasci Raman dalle rispettive risonanze. Poichè i fasci laser si trovano tipicamente molto vicini alla risonanza, nel seguito assumeremo quasi sempre che $\delta = 0$.

Nel corso della tesi, si descriveranno dapprima le proprietà del sistema non interagente; in particolare si ricaverà la legge di stato del gas $\mu = \mu(n)$, cioè il legame fra potenziale chimico e densità numerica, e si determinerà la velocità del suono associata al modo di *first sound* a partire dalla dinamica microscopica. Successivamente si introdurrà l'interazione tra le coppie di atomi per mezzo di un potenziale di contatto

$$V(\vec{x}) = g\delta^{(2)}(\vec{x}) \quad (1.22)$$

dove g rappresenta l'intensità dell'interazione ed è legata all'ampiezza di scattering in onda s dalla relazione $g = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_s$. In questo contesto ci concentreremo sullo studio delle proprietà magnetiche di equilibrio del sistema e sui modi collettivi di *zero sound* nel regime $g > 0$ (accoppiamento ferromagnetico).

²Nell'articolo [5] viene studiato l'effetto dell'accoppiamento spin-orbita su un condensato di bosoni; nel nostro caso, invece, verrà studiato su un gas di fermioni a temperatura $T \rightarrow 0$.

Capitolo 2

Analisi del sistema non interagente

In questo capitolo, si vuole costruire la termodinamica di un sistema di fermioni ultrafreddi non interagenti, con hamiltoniana data dall'espressione (1.21).

Inizialmente, si introduce l'approccio al problema tramite la formulazione del path integral di Feynman e si analizza il ruolo della simmetria di gauge quando $\Omega = 0$. Si mostra in particolare come sia necessaria l'azione combinata dell'accoppiamento spin-orbita e di un campo di Zeemann per ottenere degli effetti fisici significativi. Questa discussione mette in evidenza le caratteristiche peculiari dell'accoppiamento spin-orbita scelto e le differenze con l'accoppiamento di Weyl, studiato nell'articolo [11].

Nella sezione successiva, si passa alla diagonalizzazione dell'hamiltoniana analizzando le proprietà dello spettro di singola particella e delle corrispondenti relazioni di dispersione. Questa analisi è necessaria per ricavare la legge di stato $\mu = \mu(n)$ del gas e permettere perciò lo studio della termodinamica. Un aspetto importante che si fa notare è il cambiamento della topologia della superficie di Fermi all'aumentare del potenziale chimico; ciò porta ad osservare le due transizioni di fase di Lifshitz studiate nell'articolo [4].

Nell'ultima sezione si studia la legge di stato nei limiti di interazione spin-orbita forte e debole rispetto all'accoppiamento di Zeemann ($\frac{m\Omega}{\hbar^2 k_0^2} \ll 1$ e $\frac{m\Omega}{\hbar^2 k_0^2} \gg 1$). Si mostra in particolare come le transizioni di fase della superficie di Fermi si rispecchino in punti di non-analiticità della legge di stato. Ciò permette di individuare un metodo per osservare sperimentalmente le transizioni di fase.

2.1 La formulazione integrale-funzionale

L'approccio che viene utilizzato per descrivere le proprietà collettive del sistema, in particolare per la determinazione delle funzioni di risposta in presenza di interazioni, è quello del path integral di Feynman. In questa sezione, si introduce perciò il formalismo dell'integrale funzionale e lo si utilizza per analizzare il ruolo della simmetria di gauge sul sistema fisico in oggetto.

Il path integral di Feynman è una costruzione matematica, introdotta storicamente per dare una riformulazione della meccanica quantistica e della meccanica statistica dei sistemi a molti gradi di libertà.

L'idea che sta alla base di questo approccio, nello studio dell'evoluzione temporale di un sistema fisico descritto da un'hamiltoniana generica H , è la seguente: classicamente è noto che la traiettoria compiuta dal sistema nello spazio delle fasi con date condizioni iniziali è quella che rende stazionaria l'azione classica

$$S[x(t), p(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(p(t)\dot{x}(t) - H(x(t), p(t)) \right) \quad (2.1)$$

dal momento che le traiettorie che minimizzano l'azione sono soluzioni delle equazioni di Hamilton.

L'idea di Feynman è di generalizzare questa formulazione alla meccanica quantistica. Allo scopo, Feynman mette in evidenza il seguente fatto: poichè $x(t)$ e $p(t)$ sono due variabili canonicamente coniugate, a livello quantistico le traiettorie con date condizioni iniziali non possono essere determinate univocamente a causa del principio di indeterminazione

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \quad (2.2)$$

In definitiva decade lo stesso concetto di traiettoria nello spazio delle fasi e l'informazione massimale che si cerca di ottenere è l'ampiezza di probabilità che il sistema si trovi in un dato stato. Pertanto, per determinare l'evoluzione complessiva delle osservabili del sistema, o si ricorre ad una descrizione basata sulle funzioni d'onda di Schrödinger, oppure si calcola l'effetto medio di tutte le traiettorie nello spazio delle fasi, opportunamente pesate, che soddisfano le condizioni al contorno del problema. Quest'ultima è l'idea che sta alla base della formulazione integrale-funzionale.

A livello matematico, questa formulazione del problema si traduce nell'utilizzo di integrali su cammini. Ad esempio, l'evolvente temporale tra due stati generici $|x_i\rangle$ e $|x_f\rangle$ relativo ad una particella soggetta ad un potenziale $V(x)$ è dato da [12]

$$U(x_i, t_i, x_f, t_f) = \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 - V(x(t)) \right)} \quad (2.3)$$

dove m è la massa della particella.

L'aspetto interessante da notare è che l'ampiezza di probabilità di trovare la particella nello stato $|x_f\rangle$ al tempo t_f è data da un integrale funzionale su tutte le traiettorie che hanno come stato iniziale $|x_i\rangle$ al tempo t_i , ciascuna delle quali è pesata con una fase che dipende dall'azione classica del sistema $S[x(t)]$.

Questa costruzione si può estendere alla meccanica statistica, esprimendo la funzione di partizione di un sistema fisico nell'ensemble grancanonico in termini di un integrale funzionale a tempo immaginario $\tau = it$, dato da [12]

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\psi_s \mathcal{D}\bar{\psi}_s e^{-\frac{1}{\hbar} S[\psi_s, \bar{\psi}_s]} \quad (2.4)$$

con un'azione S espressa nel modo seguente

$$S[\psi_s, \bar{\psi}_s] = \int_0^\beta d\tau \int d\vec{x} \left\{ \sum_s [\bar{\psi}_s(\vec{x}, \tau) (\partial_\tau - \mu) \psi_s(\vec{x}, \tau)] + H(\psi_s, \bar{\psi}_s) \right\} \quad (2.5)$$

dove μ rappresenta il potenziale chimico, H l'hamiltoniana del sistema e $d\vec{x} = d^n x$ è l'elemento di volume per un sistema n -dimensionale con $n = 1, 2, 3$.

In questo contesto, $\psi_s(\vec{x}, \tau)$ e $\bar{\psi}_s(\vec{x}, \tau)$ rappresentano una coppia di campi complessi o grassmanniani coniugati di spin s , a seconda che il sistema sia bosonico o fermionico. Nella fattispecie $s = \uparrow$ oppure \downarrow nel caso di un sistema di fermioni di spin $\frac{1}{2}$.

Inoltre, si sottintende che l'integrale funzionale sia calcolato su tutte le traiettorie tali che $\psi_s(\vec{x}, \beta) = \zeta \psi_s(\vec{x}, 0)$, dove $\zeta = 1$ se il sistema è bosonico, -1 se è fermionico.

Nel caso del sistema con accoppiamento spin-orbita che si vuole analizzare nella tesi, l'azione è data da

$$S[\Psi, \Psi^\dagger] = \int_0^\beta d\tau \int d^2 x \left\{ \Psi^\dagger \left(\partial_\tau - \mu - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \sigma_0 \Psi \right. \\ \left. + \Psi^\dagger \left[\left(i \frac{\hbar^2 k_0}{m} \partial_x + \frac{\delta}{2} \right) \sigma_3 + \frac{\Omega}{2} \sigma_1 \right] \Psi + \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \Psi^\dagger \sigma_0 \Psi \right\} \quad (2.6)$$

dove $\Psi = (\psi_\uparrow, \psi_\downarrow)$ è il campo spinoriale che descrive il sistema di fermioni, σ_0

è la matrice identità 2×2 e σ_3 ¹ la terza matrice di Pauli. Riconosciamo nel primo termine l'azione di un sistema di fermioni liberi, mentre il secondo e terzo termine descrivono gli accoppiamenti spin-orbita e Raman. L'ultimo termine è semplicemente uno shift di energia del sistema.

2.2 Il ruolo della simmetria di gauge

La difficoltà principale che si incontra nello studio dell'azione (2.6) è che è sempre necessario tenere il parametro di accoppiamento Raman Ω diverso da 0 per poter ottenere degli effetti fisici significativi a livello macroscopico.

Ciò è dovuto alla simmetria di gauge: se infatti $\Omega = 0$, si mostra che il sistema in oggetto è gauge-equivalente ad un sistema di fermioni liberi. In altre parole, è possibile riassorbire l'accoppiamento spin-orbita tramite una trasformazione unitaria, e quindi il sistema è fisicamente indistinguibile da un sistema di fermioni non interagenti.

Per mostrare questa proprietà, consideriamo l'azione di partenza dell'equazione (2.6) con $\Omega = 0$ ed applichiamo una trasformazione di gauge locale nella forma

$$\Psi' = e^{-ik_0 x \sigma_3} \Psi \quad (2.7)$$

Vediamo come cambia l'azione passando agli spinori trasformati Ψ' e Ψ'^{\dagger} . A questo scopo, conviene scrivere l'azione esplicitamente in termini dei campi di Grassmann ψ_{\uparrow} e ψ_{\downarrow} , ottenendo

$$S[\psi_s, \bar{\psi}_s] = \int_0^\beta d\tau \int d^2x \left\{ [\bar{\psi}_s (\partial_\tau - \mu) \psi_s] + \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \bar{\psi}_\uparrow \cdot \nabla \psi_\uparrow + \nabla \bar{\psi}_\downarrow \cdot \nabla \psi_\downarrow) \right. \\ \left. + i \frac{\hbar^2 k_0}{m} (\bar{\psi}_\uparrow \partial_x \psi_\uparrow - \bar{\psi}_\downarrow \partial_x \psi_\downarrow) + \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \bar{\psi}_s \psi_s \right\} \quad (2.8)$$

Si sottintende la somma su s .

Il primo addendo è invariante rispetto a trasformazioni di gauge locali, perciò basta vedere come trasformano ψ_s , $\nabla \psi_s$ e $\partial_x \psi_s$. Si hanno le seguenti leggi di trasformazione:

¹D'ora in poi si sottintenderà che le matrici σ_i , con $i = 1, 2, 3$, rappresentano le tre matrici di Pauli.

$$\psi_{\uparrow} = e^{ik_0x}\psi'_{\uparrow} \quad \psi_{\downarrow} = e^{-ik_0x}\psi'_{\downarrow} \quad (2.9)$$

$$\nabla\psi_{\uparrow} = e^{ik_0x}(\nabla + ik_0\vec{e}_x)\psi'_{\uparrow} \quad \nabla\psi_{\downarrow} = e^{-ik_0x}(\nabla - ik_0\vec{e}_x)\psi'_{\downarrow} \quad (2.10)$$

$$\partial_x\psi_{\uparrow} = e^{ik_0x}(\partial_x + ik_0)\psi'_{\uparrow} \quad \partial_x\psi_{\downarrow} = e^{-ik_0x}(\partial_x - ik_0)\psi'_{\downarrow} \quad (2.11)$$

Dalla seconda riga inoltre si ricava che

$$\nabla\bar{\psi}_{\uparrow} \cdot \nabla\psi_{\uparrow} = \nabla\bar{\psi}'_{\uparrow} \cdot \nabla\psi'_{\uparrow} - ik_0\bar{\psi}'_{\uparrow}\partial_x\psi'_{\uparrow} + c.c. + k_0^2\bar{\psi}'_{\uparrow}\psi'_{\uparrow} \quad (2.12)$$

e in modo analogo si ha che

$$\nabla\bar{\psi}_{\downarrow} \cdot \nabla\psi_{\downarrow} = \nabla\bar{\psi}'_{\downarrow} \cdot \nabla\psi'_{\downarrow} + ik_0\bar{\psi}'_{\downarrow}\partial_x\psi'_{\downarrow} + c.c. + k_0^2\bar{\psi}'_{\downarrow}\psi'_{\downarrow} \quad (2.13)$$

Sostituendo il set di equazioni (2.9)-(2.13) in (2.8), si ottiene che nei campi trasformati l'azione assume la semplice forma

$$S[\psi'_s, \bar{\psi}'_s] = \int_0^{\beta} d\tau \int d^2x \left[\bar{\psi}'_s \left(\partial_{\tau} - \mu - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \psi'_s \right] \quad (2.14)$$

che è l'azione di un sistema di fermioni liberi di spin $\frac{1}{2}$. Ciò significa che il sistema di fermioni con accoppiamento spin-orbita, in assenza di interazione Raman, è gauge-equivalente ad un sistema di fermioni liberi.

Questo fatto ci permette di concludere che il sistema di fermioni in oggetto necessita sempre dell'azione combinata dell'interazione spin-orbita e di un campo di Zeemann per mettere in evidenza effetti fisici significativi, poichè a $\Omega = 0$ il sistema è sostanzialmente indistinguibile da un sistema di fermioni privo di interazioni.

Questo rende il problema dello studio della termodinamica e dei modi collettivi particolarmente complesso, in quanto il sistema non presenta a $\Omega \neq 0$ alcuna simmetria dinamica facilmente visibile. In particolare, il sistema non è invariante per rotazioni, come accade ad esempio per l'accoppiamento di Weyl (1.20), e non presenta invarianza rispetto a time-reversal.

2.3 Diagonalizzazione dell'hamiltoniana

Allo scopo di studiare la termodinamica del sistema non interagente, è conveniente cercare di determinare una base di stati in cui l'hamiltoniana sia diagonale. Se ciò è possibile, infatti, il sistema è rappresentabile come una miscela di due specie fermioniche non interagenti, ciascuna delle quali obbedisce alla statistica di Fermi-Dirac a temperatura $T = 0$.

In questo contesto, è subito chiaro che la corretta base in cui esprimere l'hamiltoniana di singola particella (1.21) non è costituita dagli stati $|\vec{k}, s\rangle$, con $s = \uparrow$ oppure \downarrow , a causa dell'accoppiamento Raman Ω che rende h_{SO} non diagonale negli indici di spin. In forma matriciale, si ha infatti che²

$$h_{SO}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \left(\frac{\delta}{2} - \frac{\hbar^2 k_0}{m} k_x\right) & \frac{\Omega}{2} \\ \frac{\Omega}{2} & \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \left(\frac{\delta}{2} - \frac{\hbar^2 k_0}{m} k_x\right) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

e si vede che Ω può provocare un flip di spin. Pertanto, la proiezione dello spin lungo una direzione non può più essere utilizzata come buon numero quantico per descrivere gli autostati dell'hamiltoniana.

Per diagonalizzare l'hamiltoniana, si utilizza una procedura standard: prima si determinano gli autovalori di h_{SO} in funzione del vettore d'onda \vec{k} , cioè si trova lo spettro in energia di singola particella e la relativa legge di dispersione, dopodiché si individuano gli autovettori normalizzati corrispondenti alle energie trovate.

Per quanto riguarda la determinazione degli autovalori, si utilizza la nota condizione

$$\det(h_{SO}(\vec{k}) - \epsilon(\vec{k})\sigma_0) = 0 \quad (2.16)$$

da cui si ottiene un'equazione quadratica in $\epsilon(\vec{k})$. Le due soluzioni dell'equazione (2.16) sono date da

$$\epsilon_{\pm}(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta}{2} - \frac{\hbar^2 k_0}{m} k_x\right)^2 + \frac{\Omega^2}{4}} \quad (2.17)$$

Questo mostra che, nella base in cui l'hamiltoniana è diagonale, lo spettro in energia di singola particella è formato da due bande non degeneri e le relative leggi di dispersione subiscono una correzione dipendente dagli accoppiamenti Ω , k_0 e δ rispetto al caso di un sistema di fermioni libero. In particolare, le leggi di dispersione non sono più paraboliche. Questo è un fatto che avrà delle forti conseguenze sulla termodinamica.

Determiniamo ora gli autovettori normalizzati di h_{SO} di energie $\epsilon_{\pm}(\vec{k})$ e mostriamo che la trasformazione che fa passare dalla base di spin alla nuova base coincide con una rotazione di angolo dipendente da \vec{k} .

Se indichiamo con $|\vec{k}, \pm\rangle$ gli stati che diagonalizzano l'hamiltoniana, si dovrà avere che

²Si è scelto per semplicità di omettere d'ora in poi il termine additivo $\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}\sigma_0$. In effetti, non dà contributo alla fisica in quanto rappresenta solo uno shift di energia per il sistema.

$$h_{SO}(\vec{k}) |\vec{k}, \pm\rangle = \epsilon_{\pm}(\vec{k}) |\vec{k}, \pm\rangle \quad (2.18)$$

Espandendo allora lo stato $|\vec{k}, \pm\rangle$ nella base di spin, si ha che

$$|\vec{k}, \pm\rangle = c_{\uparrow}^{\pm} |\vec{k}, \uparrow\rangle + c_{\downarrow}^{\pm} |\vec{k}, \downarrow\rangle \quad (2.19)$$

ed inserendo quest'espressione nell'equazione (2.18), si ottiene un sistema lineare che ha come incognite i coefficienti c_{\uparrow}^{\pm} e c_{\downarrow}^{\pm} . Inoltre, poichè gli stati nella nuova base devono essere normalizzati, dovrà valere la condizione

$$|c_{\uparrow}^{\pm}|^2 + |c_{\downarrow}^{\pm}|^2 = 1 \quad (2.20)$$

Alla fine si ottiene che

$$c_{\downarrow}^{-} = c_{\uparrow}^{+} = \cos(\theta_{\vec{k}}) = \frac{\frac{\hbar^2 k_0}{m} k_x - \frac{\delta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k_0}{m} k_x - \frac{\delta}{2}\right)^2 + \frac{\Omega^2}{4}}}{\left[\frac{\Omega^2}{4} + \left(\frac{\hbar^2 k_0}{m} k_x - \frac{\delta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k_0}{m} k_x - \frac{\delta}{2}\right)^2 + \frac{\Omega^2}{4}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.21)$$

$$c_{\uparrow}^{-} = -c_{\downarrow}^{+} = \sin(\theta_{\vec{k}}) = \frac{\frac{\Omega}{2}}{\left[\frac{\Omega^2}{4} + \left(\frac{\hbar^2 k_0}{m} k_x - \frac{\delta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k_0}{m} k_x - \frac{\delta}{2}\right)^2 + \frac{\Omega^2}{4}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.22)$$

da cui si deduce che la matrice di cambio di base è data da

$$U_{\vec{k}}(+, \uparrow \downarrow) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{\vec{k}}) & -\sin(\theta_{\vec{k}}) \\ \sin(\theta_{\vec{k}}) & \cos(\theta_{\vec{k}}) \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Notiamo perciò che si tratta della matrice di una rotazione antioraria di angolo $\theta_{\vec{k}}$.

Nella nuova base le due bande non sono più identificate dalla proiezione dello spin lungo un asse. Perciò nasce il problema di determinare un numero quantico con cui descrivere gli stati nella nuova base. Questo comporta l'individuazione di un operatore che commuti con l'hamiltoniana e che abbia gli stati $|\vec{k}, \pm\rangle$ come autovettori.

L'operatore che serve allo scopo è l'operatore di elicità

$$\hat{s} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{h}_k}{|\vec{\sigma} \cdot \vec{h}_k|} \quad (2.24)$$

In particolare, esso stabilisce se lo spin $\vec{\sigma}$ è parallelo o antiparallelo al campo di Zeemann efficace $\vec{h}_k = (\frac{\Omega}{2}, 0, \frac{\delta}{2} - \frac{\hbar^2 k_0}{m} k_x)$ ed è pari a $+1$ per la banda di energia $\epsilon_+(\vec{k})$, -1 per la banda di energia $\epsilon_-(\vec{k})$.

2.4 Proprietà delle leggi di dispersione

In questa sezione, si analizzano le proprietà delle leggi di dispersione delle due bande di elicità, concentrandosi in particolare sul caso $\delta = 0$. Su quest'ultimo infatti ci soffermeremo per lo studio della termodinamica.

La figura 2.1 mostra l'andamento delle due leggi di dispersione (2.17) in funzione di k_x a k_y fissato. Più precisamente, si sono riportati gli andamenti di $\epsilon_{\pm}(k_x, 0)$, esprimendo il momento $p_x = \hbar k_x$ in unità del momento di spin-orbita $p_0 = \hbar k_0$ e le energie in unità di $\epsilon_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$. Per tracciare le due curve si sono impostati i seguenti parametri: $\bar{\Omega} = \frac{m\Omega}{\hbar^2 k_0^2} = 0.5$ e $\bar{\delta} = \frac{m\delta}{\hbar^2 k_0^2} = 0.5$.

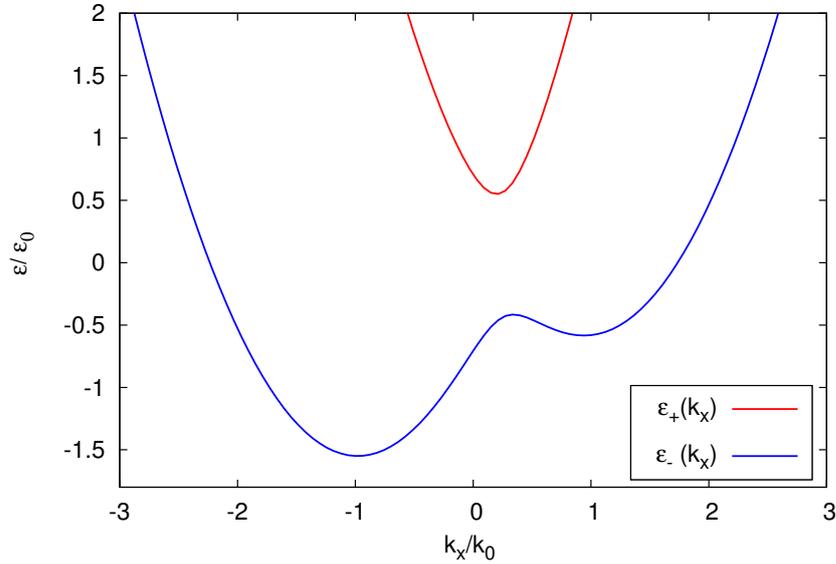


Figura 2.1: Spettri di energia per $\bar{\Omega} = 0.5$ e $\bar{\delta} = 0.5$.

L'aspetto cruciale da sottolineare è che, a causa della non-degenerazione delle due bande di elicità, le particelle occupano solamente stati di elicità negativa se il potenziale chimico del sistema non supera una certa energia di soglia corri-

spondente al minimo della banda di elicità $+$. Pertanto, la fisica del sistema a basse densità è determinata completamente dalle particelle con elicità negativa.

Poichè nel seguito assumeremo quasi sempre che l'accoppiamento di detuning δ sia nullo, analizziamo le proprietà delle due leggi di dispersione quando $\delta = 0$. Il fatto saliente è che viene ristabilita l'invarianza per riflessioni $k_x \rightarrow -k_x$ con il risultato che la banda di energia più bassa assume due minimi simmetrici, come mostrato nella figura 2.2.

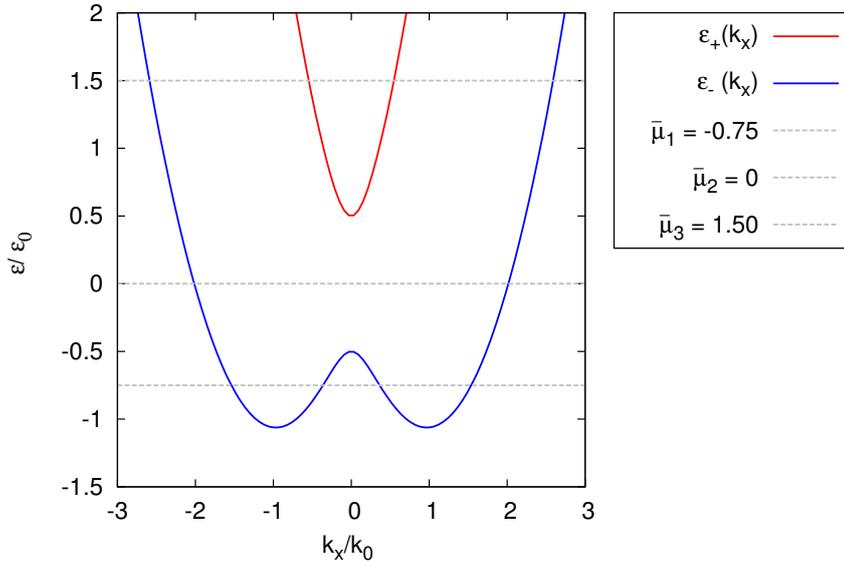


Figura 2.2: Spettri di energia per $\bar{\Omega} = 0.5$ e $\bar{\delta} = 0$. $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$ e $\bar{\mu}_3$ sono tre livelli di potenziali chimico rappresentativi.

I due valori \bar{k}_x e $-\bar{k}_x$ per cui $\epsilon_-(k_x)$ è minima si ottengono dalla condizione di stazionarietà

$$\epsilon'_-(\pm\bar{k}_x) = 0 \quad (2.25)$$

con il vincolo che $\epsilon''_-(\pm\bar{k}_x) > 0$. In definitiva, si ottiene che

$$\bar{k}_x = \sqrt{k_0^2 - \frac{m^2\Omega^2}{4\hbar^4 k_0^2}} \quad (2.26)$$

e la corrispondente energia minima è data da $\epsilon_{min} = \epsilon_-(\pm\bar{k}_x) = -\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} - \frac{m\Omega^2}{8\hbar^2 k_0^2}$. Dall'equazione (2.26) si vede che i due minimi simmetrici esistono soltanto se

$$\Omega \leq \frac{2\hbar^2 k_0^2}{m} \quad (2.27)$$

Quando questa condizione non è verificata, la banda di elicità $-$ ha uno spettro qualitativamente simile alla banda di elicità $+$, con una dispersione quasi-parabolica ed un minimo in corrispondenza di $k_x = 0$.

Ciò significa che la struttura a due minimi della relazione di dispersione per gli stati di elicità negativa è un effetto ottenibile quando l'interazione spin-orbita è dominante rispetto all'interazione Zeemann. Qualitativamente ci si aspetta quindi che gli effetti peculiari dovuti all'accoppiamento spin-orbita emergano a basse densità, in modo da popolare unicamente stati con energie in prossimità dei due minimi.

Il motivo principale per cui il procedimento di diagonalizzazione è importante è che l'hamiltoniana non presenta termini fuori-diagonale che possono accoppiare stati di elicità differente. In altre parole, il sistema si comporta come se fosse costituito da una miscela di due specie fermioniche non interagenti di elicità opposta. Per ricavare perciò la termodinamica, è sufficiente fissare un valore di potenziale chimico e riempire gli stati delle due bande di elicità in accordo con la distribuzione di Fermi-Dirac, mostrando il legame tra densità e potenziale chimico. Questa procedura diventa così analoga a quella che normalmente si effettua per un sistema di fermioni liberi, con la sola differenza data dalla diversa relazione di dispersione per i due sistemi.

Basandoci sulla figura 2.2 notiamo subito che al variare del potenziale chimico ridotto $\bar{\mu} = \frac{2m\mu}{\hbar^2 k_0^2}$ emergono tre diversi regimi, rappresentati in figura da $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$ e $\bar{\mu}_3$. Il primo regime è quello che si ottiene quando

$$-\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} - \frac{m\Omega^2}{8\hbar^2 k_0^2} \leq \mu < -\frac{\Omega}{2} \quad (2.28)$$

nel caso sia verificata la (2.27). Questo è il caso interessante in cui vengono popolati solo stati di elicità negativa in prossimità dei minimi; il potenziale chimico in questo regime è minore dell'energia del massimo locale in $k_x = 0$, perciò il momento lungo x delle particelle non è mai nullo. Infatti, il momento di singola particella è sempre contenuto nei due intervalli simmetrici

$$I_1 = \{-k_x^+, -k_x^-\}, \quad I_1' = \{k_x^-, k_x^+\} \quad (2.29)$$

dove k_x^\pm dipendono dal potenziale chimico nel modo seguente

$$k_x^\pm = \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} \left(\mu + \frac{\hbar^2 k_0^2}{m} \right) \pm \sqrt{\frac{4m^2}{\hbar^4} \left(\mu + \frac{\hbar^2 k_0^2}{m} \right)^2 - \frac{4m^2}{\hbar^4} \left(\mu^2 - \frac{\Omega^2}{4} \right)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.30)$$

Questo fatto non ha un analogo per un gas di fermioni liberi. In questo regime ci si aspettano gli effetti fisici più significativi dovuti all'interazione spin-orbita. Il secondo regime si ottiene quando

$$-\frac{\Omega}{2} \leq \mu < \frac{\Omega}{2} \quad (2.31)$$

In questo caso, vengono sempre occupati solo stati con elicità negativa, ma il momento può variare all'interno di un solo intervallo simmetrico e contenente 0:

$$I_2 = \{-k_x^+, k_x^+\} \quad (2.32)$$

Infine, il terzo regime si ottiene per

$$\mu \geq \frac{\Omega}{2} \quad (2.33)$$

In quest'ultimo caso vengono occupati stati di entrambe le bande di elicità, e il momento di singola particella può variare all'interno di un intervallo simmetrico contenente 0 su entrambe le bande

$$I_3^- = I_2, \quad I_3^+ = \{-k_x^-, k_x^-\} \quad (2.34)$$

I_3^- è l'intervallo di momento per la banda di elicità negativa, I_3^+ per la banda di elicità positiva.

La distinzione fra i tre diversi regimi si vede a questo livello solo studiando l'elicità degli stati occupati e gli intervalli di momento di singola particella. Vedremo in realtà che i diversi comportamenti riscontrabili nei tre regimi si manifestano attraverso delle transizioni termodinamiche. L'aspetto interessante è che queste fasi saranno identificate dalla topologia della superficie di Fermi, che cambierà in modo discontinuo in corrispondenza dei punti critici che separano le tre fasi.

2.5 La topologia della superficie di Fermi

Nella precedente sezione si è osservato come, a partire dalle proprietà delle relazioni di dispersione, emergano in modo naturale tre diversi regimi di potenziale chimico. In realtà, il modo più diretto di identificare i tre regimi consiste nell'osservare le proprietà della superficie di Fermi, notando soprattutto il cambiamento della topologia da una fase all'altra.

Le seguenti figure riportano pertanto la forma delle superfici di Fermi nei tre regimi, fissando $\bar{\Omega} = 0.8$: le superfici di Fermi relative alle bande di elicità positiva e negativa sono rappresentate rispettivamente dalle linee rosse e blu.

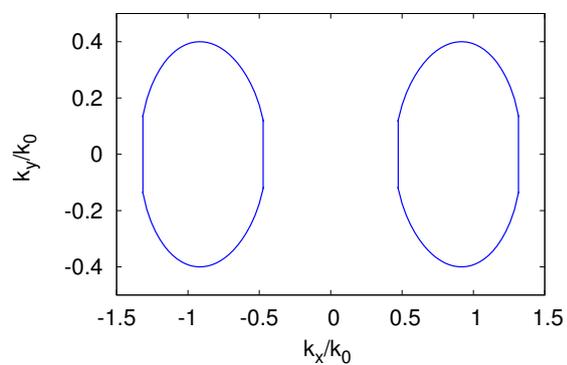


Figura 2.3: Primo regime: $-\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} - \frac{m\Omega^2}{8\hbar^2 k_0^2} \leq \mu < -\frac{\Omega}{2}$.

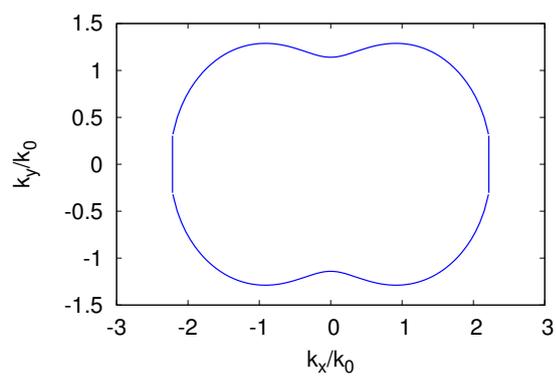


Figura 2.4: Secondo regime: $-\frac{\Omega}{2} \leq \mu < \frac{\Omega}{2}$.

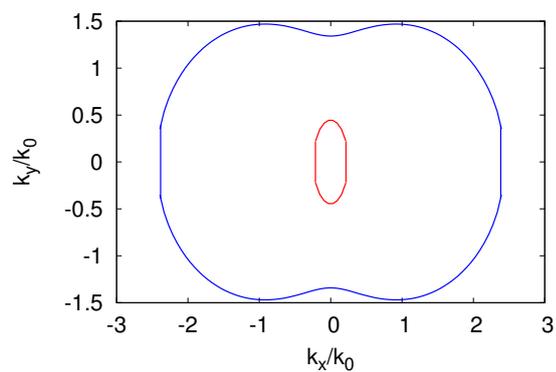


Figura 2.5: Terzo regime: $\mu \geq \frac{\Omega}{2}$.

Dalle tre figure si vede chiaramente il cambiamento nella topologia all'aumentare del potenziale chimico: nel primo regime, la superficie di Fermi ha una forma a due lobi; nel secondo i due lobi si uniscono dando luogo ad una singola superficie chiusa; infine nel terzo la superficie di Fermi ritorna ad assumere una forma a due lobi, a causa dell'occupazione degli stati di entrambe le elicità. Si hanno pertanto due transizioni di fase di Lifshitz in corrispondenza dei potenziali critici $\mu_1 = -\frac{\Omega}{2}$ e $\mu_2 = \frac{\Omega}{2}$.

Ciò è particolarmente importante perchè all'aumentare del potenziale chimico il cambiamento della topologia può determinare un punto di non-analiticità dell'equazione di stato. Pertanto, l'effetto della transizione di fase dovrebbe essere visibile nell'andamento della compressibilità del gas in funzione di μ e della velocità del primo suono.

Un ulteriore aspetto che occorre sottolineare è che la struttura della superficie di Fermi è intimamente connessa al tipo di accoppiamento spin-orbita scelto. In effetti, nell'articolo [11] si studia l'accoppiamento di Weyl (1.20) e si nota che, contrariamente all'accoppiamento Rashba-Dresselhaus che si sta analizzando, la superficie di Fermi è invariante per rotazioni nel piano (k_x, k_y) . Inoltre, cambia radicalmente la topologia della superficie di Fermi: a basse densità le particelle occupano soltanto stati di elicità negativa e momento totale diverso da 0. Come risultato la superficie di Fermi è formata da una corona circolare, in luogo dei due lobi separati che abbiamo osservato nel caso dell'accoppiamento Rashba-Dresselhaus.

2.6 Il legame con la termodinamica

Finora ci siamo concentrati principalmente sullo studio delle proprietà microscopiche del sistema, in particolare sull'analisi degli spettri e delle superfici di Fermi. In questa sezione vedremo come queste proprietà possono essere collegate allo studio della termodinamica.

Come noto, per un sistema fisico descritto da un potenziale gran canonico $\Omega(T, p, \mu)$, funzione della temperatura, della pressione e del potenziale chimico, la termodinamica si costruisce tramite la relazione

$$d\Omega(T, p, \mu) = -SdT + Vdp - Nd\mu \quad (2.35)$$

che si ottiene dal primo e dal secondo principio della termodinamica per trasformazioni reversibili.

Ora, a causa delle condizioni a cui sperimentalmente è sottoposto il gas di fermioni, possiamo assumere che il sistema sia termicamente isolato e a pressione

costante. Questo fatto è dovuto all'azione della MOT, che mantiene il gas confinato in condizioni di equilibrio termodinamico.

Da ciò si conclude che, per studiare la termodinamica del sistema, è sufficiente conoscere la legge di stato $n = n(\mu)$, dove n è la densità numerica. In particolare, se si vuole studiare la propagazione delle onde sonore, si può supporre di perturbare il sistema facendo variare localmente il potenziale chimico (per esempio inviando luce laser) e osservando la variazione conseguente della densità numerica.

Il fatto interessante è che in queste condizioni si genera un'onda di densità, con una velocità data da [13]

$$c_1^2 = \frac{n}{m} \frac{\partial \mu}{\partial n} \quad (2.36)$$

che è la velocità del suono ordinario o primo suono. Il coefficiente $\frac{\partial n}{\partial \mu}$, inversamente proporzionale a c_1 , descrive invece la compressibilità del gas. L'andamento di queste quantità in funzione del potenziale chimico verrà utilizzato per mostrare l'effetto macroscopico delle due transizioni di fase di Lifshitz viste nella sezione 2.5.

Per descrivere la termodinamica del sistema resta perciò solamente da ricavare il potenziale grancanonico $\Omega(T, p, \mu)$. Allo scopo, facciamo uso nuovamente del formalismo integrale-funzionale: partiamo dall'azione (2.6) e scriviamola espandendo i campi $\psi_s(\vec{x}, \tau)$ e $\bar{\psi}_s(\vec{x}, \tau)$ in trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} \psi_s(\vec{x}, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{\beta A}} \sum_{\vec{k}, \omega_n} \psi_s(\vec{k}, \omega_n) e^{-i(\omega_n \tau - \vec{k} \cdot \vec{x})} \\ \bar{\psi}_s(\vec{x}, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{\beta A}} \sum_{\vec{k}, \omega_n} \bar{\psi}_s(\vec{k}, \omega_n) e^{i(\omega_n \tau - \vec{k} \cdot \vec{x})} \end{aligned} \quad (2.37)$$

dove $\omega_n = \frac{\pi}{\beta}(2n + 1)$ sono le frequenze di Matsubara fermioniche. L'azione in trasformata di Fourier diventa perciò

$$\begin{aligned} S[\Psi, \Psi^\dagger] &= \sum_{\vec{k}, \omega_n} \left\{ \Psi^\dagger(\vec{k}, \omega_n) \left[\left(-i\omega_n - \mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) \sigma_0 \right] \Psi(\vec{k}, \omega_n) \right. \\ &\quad \left. + \Psi^\dagger(\vec{k}, \omega_n) \left[\left(\frac{\delta}{2} - \frac{\hbar^2 k_0}{m} k_x \right) \sigma_3 + \frac{\Omega}{2} \sigma_1 \right] \Psi(\vec{k}, \omega_n) \right\} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Passiamo ora alla base di elicità, introducendo i campi di Grassmann associati agli stati di elicità ψ_\pm e $\bar{\psi}_\pm$. Per determinare il legame fra i campi di Grassmann nella nuova e vecchia base, introduciamo il campo spinoriale $\Phi = (\psi_+, \psi_-)$. Poi-

chè il cambio di base nello spazio di spin è espresso da una rotazione antioraria di matrice $U_{\vec{k}}$, come mostrato nella sezione 2.3, il passaggio nella nuova base si effettua tramite la trasformazione

$$\Phi(\vec{k}, \omega_n) = U_{\vec{k}}(+, \uparrow\downarrow) \Psi(\vec{k}, \omega_n) \quad (2.39)$$

Come ci si aspetta, nei nuovi campi Φ e Φ^\dagger l'azione del sistema si semplifica. Infatti, sostituendo la trasformazione (2.39) in (2.38), il propagatore di singola particella si diagonalizza tramite la relazione

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{G}}_0^{-1} &= U_{\vec{k}}^\dagger \left\{ \left(-i\omega_n - \mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) \sigma_0 + \left(\frac{\delta}{2} - \frac{\hbar^2 k_0}{m} k_x \right) \sigma_3 + \frac{\Omega}{2} \sigma_1 \right\} U_{\vec{k}} \\ &= \left(-i\omega_n - \mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) \sigma_0 + \sqrt{\left(\frac{\delta}{2} - \frac{\hbar^2 k_0}{m} k_x \right)^2 + \frac{\Omega^2}{4}} \sigma_3 \end{aligned} \quad (2.40)$$

In definitiva, la nuova azione è data da

$$S[\Phi, \Phi^\dagger] = \sum_{\vec{k}, \omega_n} \Phi^\dagger(\vec{k}, \omega_n) \tilde{\mathbb{G}}_0^{-1}(\vec{k}, \omega_n) \Phi(\vec{k}, \omega_n) \quad (2.41)$$

Poichè il nuovo propagatore è diagonale, i due campi di elicità $+$ e $-$ non interagiscono. È importante osservare che l'azione è quadratica nei campi fermionici, perciò la funzione di partizione è calcolabile analiticamente tramite la relazione

$$\mathcal{Z}_0 = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^\dagger e^{-\frac{S[\Phi, \Phi^\dagger]}{\hbar}} = \prod_{\vec{k}, \omega_n} \det(\tilde{\mathbb{G}}_0^{-1}(\vec{k}, \omega_n)) \quad (2.42)$$

Resta perciò da calcolare esclusivamente il determinante della funzione di Green (2.40), che dà come risultato

$$\mathcal{Z}_0 = \prod_{\vec{k}, \omega_n} \left[\left(i\omega_n + \mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{2} - \frac{\hbar^2 k_0}{m} k_x \right)^2 - \frac{\Omega^2}{4} \right] \quad (2.43)$$

Ricaviamo così il potenziale grancanonico tramite la relazione [14]

$$\Omega_0(\mu, T, A) = -k_b T \ln \mathcal{Z}_0 \quad (2.44)$$

In quest'espressione³, consideriamo come variabile termodinamica indipendente l'area occupata dal gas in luogo della pressione, visto che il sistema è bidimensionale.

³Il pedice 0 indica che stiamo considerando il sistema in assenza di interazione repulsiva.

A questo punto, possiamo ricavare la legge di stato del gas grazie alla relazione termodinamica (2.35), la quale stabilisce la nota relazione fra numero di particelle e potenziale chimico

$$N = -\frac{\partial \Omega_0(\mu, T, A)}{\partial \mu} = 2k_b T \sum_{\vec{k}, \omega_n} \frac{i\omega_n + \mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}{\det(\tilde{\mathbb{G}}_0^{-1}(\vec{k}, \omega_n))} \quad (2.45)$$

La legge di stato si deriva da quest'espressione sommando sulle frequenze di Matsubara fermioniche. Alla fine si trova che

$$n = \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}} \left[f(\epsilon_+(\vec{k}) - \mu) + f(\epsilon_-(\vec{k}) - \mu) \right] = n_+ + n_- \quad (2.46)$$

dove n e n_{\pm} sono rispettivamente la densità numerica totale e le densità numeriche delle particelle di elicità \pm , e f è la distribuzione di Fermi. I dettagli del calcolo sono riportati in Appendice A.

La conclusione che ne ricaviamo è che in effetti il sistema si comporta come se fosse costituito da due specie di fermioni non interagenti di elicità opposta. Essi riempiono le rispettive bande in accordo con la distribuzione di Fermi alla temperatura T . Se il sistema è ultrafreddo, cioè $T \rightarrow 0$, la relazione fra densità numerica delle particelle $+$ e $-$ e potenziale chimico può essere scritta nella seguente forma:

$$n_{\pm} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \Theta \left(\mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \mp \sqrt{\left(\frac{\delta}{2} - \frac{\hbar^2 k_0}{m} k_x \right)^2 + \frac{\Omega^2}{4}} \right) \quad (2.47)$$

La relazione (2.47) si ricava a partire dalla (2.46) passando al limite termodinamico, cioè effettuando la sostituzione $\frac{1}{A} \sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k$ e poi ricordando che la distribuzione di Fermi a temperatura nulla corrisponde ad una funzione Θ di Heaviside.

L'obiettivo finale diventa perciò studiare l'equazione (2.47) nelle tre fasi che si sono individuate nelle sezioni 2.4 e 2.5, osservando in particolare il comportamento critico del sistema nel passare da una fase all'altra.

2.7 Analisi dell'equazione di stato

Nella sezione precedente si sono dati gli elementi essenziali per lo studio della termodinamica. Si è data in particolare un'espressione analitica (2.47) per la densità delle particelle di entrambe le elicità in funzione del potenziale chimico. Tuttavia, l'equazione di stato non è risolvibile analiticamente per arbitrari valori degli accoppiamenti Ω , k_0 e δ . La strategia che si adotta pertanto è quella di

fissare $\delta = 0$ e di analizzare l'equazione di stato in due casi limite trattabili analiticamente: $\frac{m\Omega}{\hbar^2 k_0^2} \ll 1$ e $\frac{m\Omega}{\hbar^2 k_0^2} \gg 1$. Essi corrispondono ai limiti di accoppiamento spin-orbita grande e piccolo rispetto all'accoppiamento di Zeemann. A causa della presenza simultanea dei due accoppiamenti, ci si aspetta che il sistema mostri anche in questi limiti le transizioni di fase evidenziate nella sezione 2.5.

Chiaramente, questi due limiti presentano una differenza importante: la struttura a due minimi della relazione di dispersione degli stati di elicità negativa è presente solo se $\frac{m\Omega}{2\hbar^2 k_0^2} < 1$. Pertanto, nel caso in cui l'accoppiamento di Zeemann è dominante ci aspettiamo solamente una transizione di fase quando si raggiunge il potenziale critico $\mu_2 = \frac{\Omega}{2}$. Superata questa soglia, infatti, si ha l'occupazione di stati di entrambe le elicità.

Nel caso invece di interazione spin-orbita dominante, oltre ad avere la transizione di fase a $\mu_2 = \frac{\Omega}{2}$, si ha una seconda transizione a $\mu_1 = -\frac{\Omega}{2}$. Il valore critico separa due fasi con occupazione di soli stati con elicità $-$, ma con differente topologia della superficie di Fermi.

Come base di partenza per calcolare gli integrali (2.47) esprimiamo k_y in funzione di k_x per mezzo della funzione Θ di Heaviside e separiamo i tre regimi di potenziale chimico incontrati nello studio della superficie di Fermi. Si ottengono i seguenti risultati:

- per $-\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} - \frac{m\Omega^2}{8\hbar^2 k_0^2} \leq \mu < -\frac{\Omega}{2}$ e $\frac{m\Omega}{2\hbar^2 k_0^2} \leq 1$, si ha $n_+ = 0$ e

$$n_- = \frac{1}{\pi^2} \int_{k_x^-}^{k_x^+} dk_x \left\{ \frac{2m\mu}{\hbar^2} - k_x^2 + \frac{2m}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\hbar^4 k_0^2}{m^2} k_x^2 + \frac{\Omega^2}{4}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.48)$$

- per $-\frac{\Omega}{2} \leq \mu < \frac{\Omega}{2}$ si ha $n_+ = 0$ e

$$n_- = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_x^+} dk_x \left\{ \frac{2m\mu}{\hbar^2} - k_x^2 + \frac{2m}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\hbar^4 k_0^2}{m^2} k_x^2 + \frac{\Omega^2}{4}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.49)$$

- per $\mu \geq \frac{\Omega}{2}$ si ha

$$n_{\pm} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_x^{\mp}} dk_x \left\{ \frac{2m\mu}{\hbar^2} - k_x^2 \mp \frac{2m}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\hbar^4 k_0^2}{m^2} k_x^2 + \frac{\Omega^2}{4}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.50)$$

dove k_x^{\pm} sono dati dall'equazione (2.30). Risolvere questi integrali corrisponde a determinare completamente la legge di stato del gas.

2.7.1 Il limite $\frac{m\Omega}{\hbar^2 k_0^2} \gg 1$

Il limite $\frac{m\Omega}{\hbar^2 k_0^2} \gg 1$ si studia analizzando l'equazione di stato nei due regimi $-\frac{\Omega}{2} < \mu \leq \frac{\Omega}{2}$ e $\mu > \frac{\Omega}{2}$.

Per risolvere gli integrali delle equazioni (2.49) e (2.50), si effettua il riscalamento $x = \frac{\hbar k_x}{\sqrt{2m|\mu|}}$ e si sviluppa la funzione integranda e gli estremi di integrazione $x^\pm = \frac{\hbar k_x^\pm}{\sqrt{2m|\mu|}}$ al primo ordine nel parametro $\epsilon = \frac{\hbar^2 k_0^2}{m\Omega} \ll 1$. Notiamo a questo proposito che lo sviluppo della funzione integranda al primo in ordine in ϵ è garantito in entrambi i regimi di potenziali chimico dal fatto che l'intervallo di integrazione è limitato.

E' chiaro che i riscalamenti effettuati sono validi solamente per $\mu \neq 0$; tuttavia, è possibile studiare la legge di stato per μ arbitrariamente piccoli purchè diversi da 0 e passare alla fine al limite per $\mu \rightarrow 0$. Poichè $\mu = 0$ non è un punto critico in cui avviene una transizione di fase, ci aspettiamo che il limite dia il corretto risultato della densità a $\mu = 0$.

Alla fine si ottengono le seguenti formule approssimate:

- per $-\frac{\Omega}{2} \leq \mu < \frac{\Omega}{2}$ ($\mu \neq 0$) si ha $n_+ = 0$ e

$$n_- \approx \frac{2m|\mu|}{\pi^2 \hbar^2} \int_0^{x^+} dx \left\{ \text{sign}(\mu) + \frac{\Omega}{2|\mu|} - \left(1 - \frac{2\hbar^2 k_0^2}{m\Omega}\right) x^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.51)$$

- per $\mu \geq \frac{\Omega}{2}$ si ha

$$n_\pm \approx \frac{2m\mu}{\pi^2 \hbar^2} \int_0^{x^\mp} dx \left\{ 1 \mp \frac{\Omega}{2\mu} - \left(1 \pm \frac{2\hbar^2 k_0^2}{m\Omega}\right) x^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.52)$$

dove

$$x_\pm \approx \left[\text{sign}(\mu) \pm \frac{\Omega}{2|\mu|} \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 \pm \frac{\hbar^2 k_0^2}{m\Omega} \right] \quad (2.53)$$

I dettagli dei calcoli sono riportati in Appendice B.

In questa forma, gli integrali che definiscono la legge di stato sono risolvibili analiticamente. Sfruttando la primitiva della funzione integranda

$$\int dx \sqrt{a - bx^2} = \frac{1}{2} x \sqrt{a - bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{b}{a}} x \right) + \text{cost.} \quad (2.54)$$

si trovano i seguenti risultati per n_+ ed n_- :

- per $-\frac{\Omega}{2} \leq \mu < \frac{\Omega}{2}$, si ha $n_+ = 0$ e

$$n_-(\mu) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \left(\mu + \frac{\Omega}{2} \right) \left(1 + \frac{\hbar^2 k_0^2}{m\Omega} \right) \quad (2.55)$$

- per $\mu \geq \frac{\Omega}{2}$, si ha

$$n_{\pm}(\mu) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \left(\mu \mp \frac{\Omega}{2} \right) \left(1 \mp \frac{\hbar^2 k_0^2}{m\Omega} \right) \quad (2.56)$$

Da queste espressioni, si deriva la legge di stato nella forma $\mu = \mu(n)$, sostituendo agli intervalli di potenziale chimico i corrispondenti intervalli in densità:

$$\mu(n) = \begin{cases} \frac{2\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{1 + \frac{\hbar^2 k_0^2}{m\Omega}} n - \frac{\Omega}{2} & \text{se } 0 \leq n < n_c \\ \frac{\pi\hbar^2}{m} n - \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} & \text{se } n \geq n_c. \end{cases}$$

dove $n_c = \frac{m}{\pi\hbar^2} \left(\frac{\Omega}{2} + \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \right)$ è la densità critica che si ottiene per $\mu = \frac{\Omega}{2}$, cioè il valore massimo della densità per il quale vengono riempiti solo stati di elicità negativa.

Si nota che per $n \geq n_c$ la legge di stato non dipende da Ω ed assume la stessa forma della legge di stato di un gas di fermioni libero. Ciò significa, come già puntualizzato nella sezione 2.4, che gli effetti significativi prodotti dall'interazione spin-orbita sono visibili a basse densità, dove vengono occupati solo stati di elicità negativa.

In figura 2.6 si riporta l'andamento della legge di stato in termini delle seguenti variabili riscalate: $\bar{\mu} = \frac{2m\mu}{\hbar^2 k_0^2}$, $\bar{\Omega} = \frac{m\Omega}{\hbar^2 k_0^2} = 10.0$ e $\bar{n} = \frac{2\pi}{k_0^2} n$. La linea rossa indica l'equazione di stato ottenuta tramite approssimazione numerica, mentre la linea blu l'equazione di stato analitica al primo ordine in $\bar{\Omega}^{-1}$.

E' interessante notare che la legge di stato, sebbene sia continua in corrispondenza della densità critica n_c , non è analitica. Infatti, si ha che

$$\lim_{n \rightarrow n_c^-} \frac{\partial \mu}{\partial n} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{1 + \frac{\hbar^2 k_0^2}{m\Omega}} \neq \lim_{n \rightarrow n_c^+} \frac{\partial \mu}{\partial n} = \frac{\pi\hbar^2}{m} \quad (2.57)$$

In corrispondenza perciò del punto critico si ha una transizione di Lifshitz del primo ordine, che si rispecchia nella non-analiticità della legge di stato. Notiamo in particolare che il punto di non-analiticità è presente anche sulla curva numerica, a dimostrazione che l'espansione al primo ordine è sufficiente per cogliere l'effetto della transizione.

Il risultato trovato mette in evidenza una strategia sperimentalmente applicabile per rintracciare la transizione di fase: poichè la velocità del primo suono,

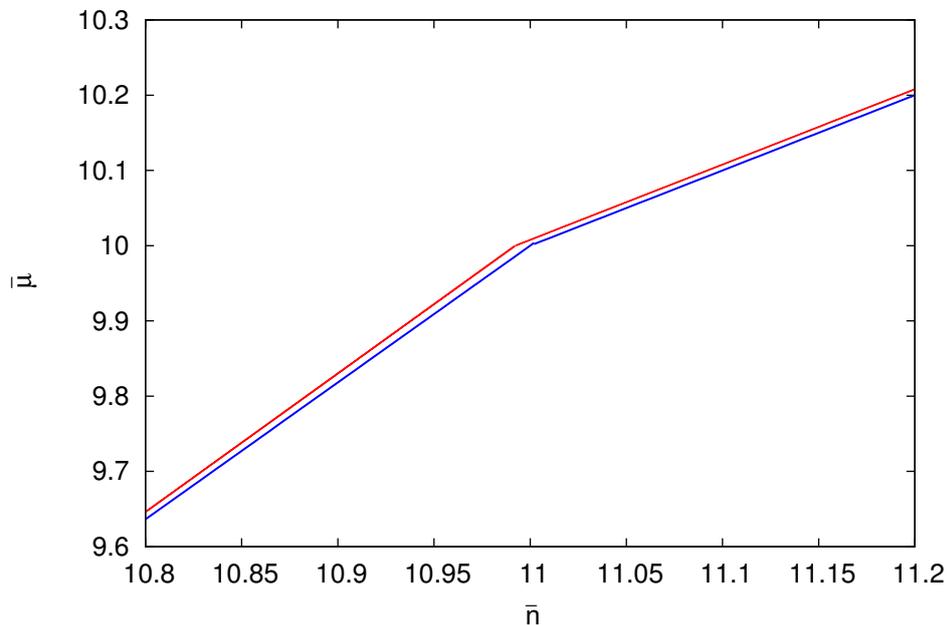


Figura 2.6: Legge di stato nel limite $\frac{m\Omega}{\hbar^2 k_0^2} \gg 1$.

espressa dalla legge (2.36), presenta una discontinuità di prima specie in corrispondenza della densità critica, è chiaro che la compressibilità del gas dovrà variare molto rapidamente in un piccolo intervallo attorno ad n_c , passando dal valore $\frac{m}{2\pi\hbar^2} \left(1 + \frac{\hbar^2 k_0^2}{m\Omega}\right)$ al valore $\frac{m}{\pi\hbar^2}$. In figura 2.7 mettiamo in evidenza questo fatto, rappresentando l'andamento analitico della quantità

$$C_{T=0} = \frac{\pi\hbar^2}{m} \left. \frac{\partial n}{\partial \mu} \right|_{T=0} \quad (2.58)$$

in funzione della densità normalizzata \bar{n} . La grandezza (2.58) è proporzionale alla compressibilità, e viene resa adimensionale dal fattore moltiplicativo $\frac{\pi\hbar^2}{m}$. Si nota chiaramente la discontinuità in corrispondenza della densità critica $\bar{n}_c \approx 11$, ottenuta fissando $\bar{\Omega} = 10$.

La variazione della compressibilità rappresenta perciò un modo indiretto di verificare il cambiamento della topologia della superficie di Fermi, che è in definitiva la manifestazione più evidente dell'accoppiamento spin-orbita in assenza di interazioni di coppia. Come osservato nell'articolo [4] questa transizione di fase diventa un crossover continuo a temperatura finita.

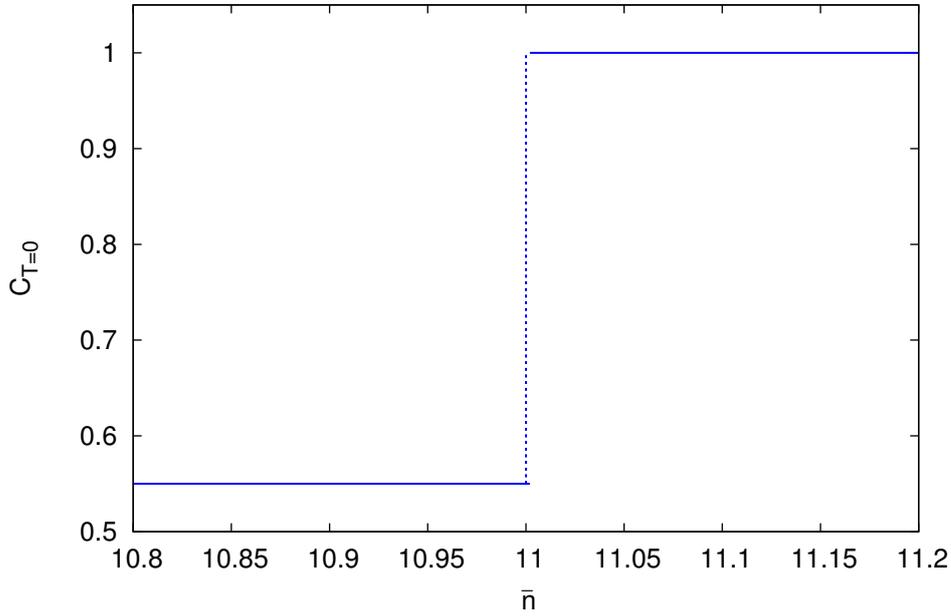


Figura 2.7: Andamento della compressibilità al variare della densità nel limite $\frac{m\Omega}{\hbar^2 k_0^2} \gg 1$.

2.7.2 Il limite $\frac{m\Omega}{\hbar^2 k_0^2} \ll 1$

Come già evidenziato all'inizio della sezione, il punto di partenza per l'analisi della legge di stato è il set di equazioni (2.48)-(2.50). Tuttavia, il limite che si vuole studiare in questo paragrafo presenta delle difficoltà non banali. Il motivo principale è dovuto all'impossibilità di espandere la funzione integranda al primo ordine in $\epsilon = \frac{m\Omega}{\hbar^2 k_0^2}$ quando la variabile di integrazione k_x può avvicinarsi arbitrariamente a 0.

In effetti, l'espansione in serie si effettua considerando la funzione

$$f(k_x) = \sqrt{\frac{\hbar^4 k_0^2}{m^2} k_x^2 + \frac{\Omega^2}{4}} \quad (2.59)$$

e studiando le condizioni in cui uno dei due termini sotto radice domina rispetto all'altro. Nel caso analizzato nel paragrafo precedente si è considerato dominante il termine contenente l'accoppiamento di Zeemann Ω , e la procedura era sensata dal momento che k_x variava in un intervallo limitato. In questo caso invece si vuole studiare il limite opposto in cui domina il termine contenente il parametro di spin-orbita k_0 . Ciò però è possibile solo se k_x non può avvicinarsi arbitrariamente a 0; in caso contrario, infatti, non si è più in grado di stabilire

quale sia il termine dominante.

L'unico regime di potenziale chimico nel quale k_x non si avvicina arbitrariamente a 0 è quello di bassa densità, espresso dalla condizione (2.28). Pertanto, questo regime è l'unico in cui la trattazione analitica del limite $\frac{m\Omega}{\hbar^2 k_0^2} \ll 1$ è giustificata. Ciò impedisce di analizzare le transizioni di fase fra i diversi regimi di μ in modo analogo a quanto effettuato nel paragrafo 2.7.1.

La trattazione analitica nel regime di bassa densità risulta semplificata partendo dall'equazione (2.47) e sviluppandola all'ordine più basso nel parametro $\epsilon = \frac{m\Omega}{\hbar^2 k_0^2}$. Si ottiene che

$$n(\mu) = n^{(0)}(\mu) + n^{(1)}(\mu) \quad (2.60)$$

dove

$$n^{(0)}(\mu) = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \Theta \left(\mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_0}{m} |k_x| \right), \quad (2.61)$$

$$n^{(1)}(\mu) = \frac{m^2 \Omega^2}{8\hbar^4 k_0^2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{\delta \left(\mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_0}{m} |k_x| \right)}{|k_x|} \quad (2.62)$$

Il primo termine corrisponde all'approssimazione di ordine zero in ϵ , cioè al caso $\Omega = 0$. Come però si è già sottolineato nella sezione 2.2, il sistema in assenza di interazioni Zeemann è gauge-equivalente ad un sistema di fermioni liberi. Pertanto $n^{(0)}(\mu)$ corrisponde alla legge di stato di un gas di fermioni liberi con un potenziale chimico $\tilde{\mu} = \mu + \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$. Questo perchè si è trascurato il termine additivo $\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \sigma_0$ nello studio delle leggi di dispersione. Pertanto,

$$n^{(0)}(\mu) = \frac{m}{\pi \hbar^2} \left(\mu + \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \right) \quad (2.63)$$

Resta da calcolare perciò la correzione al primo ordine. Si nota che la potenziale divergenza prodotta dal denominatore $|k_x|$ rimane sotto controllo quando k_x non può avvicinarsi arbitrariamente a 0, cosa che avviene nel regime di potenziale chimico che stiamo considerando. Negli altri regimi, l'impossibilità di effettuare l'espansione al primo ordine si traduce perciò in una divergenza (non fisica) della funzione integranda.

Per effettuare il calcolo esplicito, si nota che l'integrale (2.62) va effettuato sulla superficie di Fermi del sistema a $\Omega = 0$ a causa della funzione δ di Dirac. Passando inoltre in coordinate polari

$$k_x = k \cos \varphi \quad k_y = k \sin \varphi \quad (2.64)$$

l'integrale è risolubile, e dà come risultato la seguente formula

$$n^{(1)}(\mu) = \left\{ \frac{|\mu|}{2\pi} \left(-\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \arctan \sqrt{\frac{\hbar k_0 - (2m\mu + \hbar^2 k_0^2)^{\frac{1}{2}}}{\hbar k_0 + (2m\mu + \hbar^2 k_0^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} \frac{m^2 \Omega^2}{\hbar^4 k_0^4} \quad (2.65)$$

L'aspetto interessante è che la correzione è quadratica in ϵ e non-lineare in μ per effetto dell'interazione spin-orbita.

A causa dell'impossibilità di effettuare in modo consistente l'espansione al primo ordine, non è possibile verificare analiticamente l'emergere delle transizioni di fase che si hanno in corrispondenza dei punti critici $\mu_1 = -\frac{\Omega}{2}$ e $\mu_2 = \frac{\Omega}{2}$. Pertanto, ci limitiamo ad osservare qualitativamente l'andamento dato dall'approssimazione numerica.

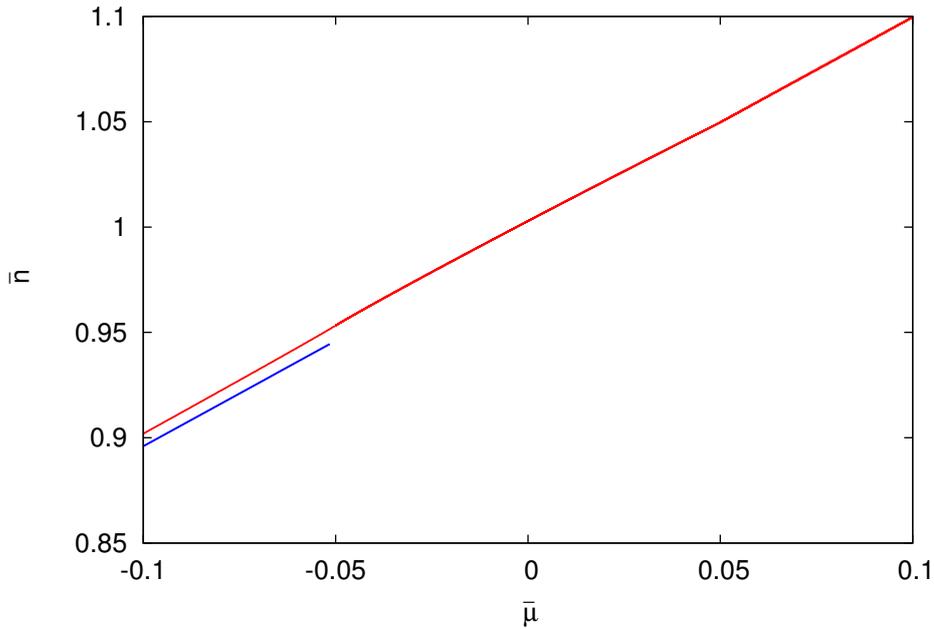


Figura 2.8: Legge di stato nel limite $\frac{m\Omega}{\hbar^2 k_0^2} \ll 1$.

In figura 2.8 si è rappresentata la legge di stato nella forma $n = n(\mu, \Omega)$ utilizzando nuovamente le variabili riscalate \bar{n} , $\bar{\Omega}$ e $\bar{\mu}$. Si è impostato $\bar{\Omega} = 0.05$; in rosso è evidenziata la curva numerica e in blu l'approssimazione al primo ordine nel regime di bassa densità.

L'andamento non presenta dei punti di non-analiticità così evidenti come osservato invece nel limite di Ω grande.

Nell'impossibilità di determinare un'approssimazione della legge di stato in vicinanza dei punti critici, il problema di stabilire se la legge di stato abbia forme funzionali diverse e se il raccordo in corrispondenza dei punti critici sia o meno analitico resta aperto in questo limite.

Capitolo 3

Il sistema interagente: instabilità paramagnetica e funzioni suscettività

Nel capitolo 2 si sono analizzate le proprietà del sistema non interagente, concentrandosi in particolare sullo studio delle transizioni di fase di Lifshitz e sulla possibilità di osservarle sperimentalmente. Il passo successivo consiste nell'introdurre un'interazione di contatto repulsiva fra le particelle e determinare sia le proprietà di equilibrio del sistema per mezzo di un'approssimazione di campo medio sia le proprietà dinamiche (modi collettivi) per mezzo di una RPA.

Per realizzare questo programma, si introdurrà anzitutto l'analisi del sistema interagente attraverso la tecnica del path integral di Feynman. Tramite la trasformata di Hubbard-Stratonovich si definiranno i campi associati alla densità e alla magnetizzazione, cruciali per descrivere le proprietà del sistema sia in approssimazione di campo medio sia nella RPA.

Successivamente ci soffermeremo sull'analisi delle proprietà di equilibrio del sistema. L'obiettivo è mostrare sotto quali condizioni il sistema può transire spontaneamente da una fase paramagnetica ad una fase ferromagnetica, e se l'interazione spin-orbita possa o meno favorire la transizione.

La parte finale comprenderà lo studio delle fluttuazioni attorno alle configurazioni di equilibrio del sistema. Nel quadro della teoria della risposta lineare, ricaveremo un'espressione analitica per le funzioni di risposta del sistema in approssimazione RPA e ne analizzeremo il legame con le funzioni di risposta non interagenti.

Questi risultati verranno sfruttati nel seguito per ottenere un set di equazioni che descrivano i modi collettivi del sistema.

3.1 I campi di Hubbard-Stratonovich

Nella sezione 2.1 abbiamo introdotto la formulazione integrale-funzionale per il sistema non interagente. Per analizzare il sistema interagente, consideriamo l'azione (2.6) ed aggiungiamo un'interazione di contatto, rappresentata da un potenziale nella forma

$$V(\vec{x}) = g\delta^{(2)}(\vec{x}) \quad (3.1)$$

L'azione del sistema interagente è data perciò da

$$S[\Psi, \Psi^\dagger] = \int_0^\beta d\tau \int d^2x \{ \Psi^\dagger \mathbb{G}_0^{-1} \Psi + g\bar{\psi}_\uparrow \bar{\psi}_\downarrow \psi_\downarrow \psi_\uparrow \} \quad (3.2)$$

dove \mathbb{G}_0 è la funzione di Green del sistema non interagente, ed è data da

$$\mathbb{G}_0^{-1} = \left(\partial_\tau - \mu - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \sigma_0 + \left(i \frac{\hbar^2 k_0}{m} \partial_x + \frac{\delta}{2} \right) \sigma_3 + \frac{\Omega}{2} \sigma_1 \quad (3.3)$$

Data l'azione (3.2), la funzione di partizione del sistema interagente è espressa tramite il seguente integrale funzionale:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\Psi^\dagger e^{-\frac{S[\Psi, \Psi^\dagger]}{\hbar}} \quad (3.4)$$

Notiamo a questo proposito che il potenziale $V(\vec{x})$ può accoppiare solamente particelle con spin opposto, in quanto l'interazione agisce solo quando le particelle si trovano a contatto. Questo fatto fa sì che il termine di interazione contenga due coppie di campi di Grassmann coniugati di spin opposto.

L'idea a questo punto è di riscrivere il termine di interazione in una forma equivalente tramite i campi spinoriali Ψ e Ψ^\dagger . Un modo di scriverlo è, ad esempio, il seguente:

$$g\bar{\psi}_\uparrow \bar{\psi}_\downarrow \psi_\downarrow \psi_\uparrow = \frac{g}{4} (\Psi^\dagger \sigma_0 \Psi)^2 - \frac{g}{4} (\Psi^\dagger \sigma_3 \Psi)^2 \quad (3.5)$$

Intuitivamente, abbiamo separato il termine di interazione in due contributi, il primo dei quali è coniugato alla densità $(\Psi^\dagger \Psi)$, il secondo alla magnetizzazione lungo l'asse z $(\Psi^\dagger \sigma_3 \Psi)$. Questo fatto è importante perchè suggerisce la possibilità di introdurre due campi, coniugati rispettivamente alla densità e alla magnetizzazione, per descrivere il sistema interagente.

Notiamo anche un secondo fatto: il termine di interazione accoppia particelle con spin opposto, senza tuttavia specificare un preciso asse di quantizzazione. In altre parole, l'asse z che abbiamo utilizzato per scrivere il termine di interazione è arbitrario, ed è possibile adottare la seguente espressione invariante per rotazioni:

$$g\bar{\psi}_\uparrow\bar{\psi}_\downarrow\psi_\downarrow\psi_\uparrow = \frac{g}{4} (\Psi^\dagger\sigma_0\Psi)^2 - \frac{g}{4} (\Psi^\dagger\vec{\sigma}\Psi \cdot \hat{\phi})^2 \quad (3.6)$$

dove $\vec{\sigma}$ rappresenta le matrici di Pauli e $\hat{\phi}$ il versore che identifica l'asse di quantizzazione.

Possiamo a questo punto effettuare la trasformata di Hubbard-Stratonovich. L'idea è di introdurre due campi bosonici scalari $\rho(\vec{x}, \tau)$ e $\phi(\vec{x}, \tau)$ in modo da disaccoppiare il termine di interazione. Sfruttando le regole di integrazione gaussiana, si ha

$$e^{-\frac{g}{4} \int dx (\Psi^\dagger\sigma_0\Psi)^2} = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\rho e^{-\int dx \left\{ \frac{\rho^2}{g} + i\rho\Psi^\dagger\sigma_0\Psi \right\}} \quad (3.7)$$

$$e^{\frac{g}{4} \int dx (\Psi^\dagger\vec{\sigma}\Psi \cdot \hat{\phi})^2} = \frac{1}{M} \int \mathcal{D}\phi e^{-\int dx \left\{ \frac{\phi^2}{g} + \vec{\phi} \cdot \Psi^\dagger\vec{\sigma}\Psi \right\}} \quad (3.8)$$

In queste uguaglianze si sottintende che $\int dx = \int_0^\beta d\tau \int d^2x$. Con queste sostituzioni, si ottiene la seguente azione trasformata:

$$S[\Psi, \Psi^\dagger, \rho, \phi] = \int_0^\beta d\tau \int d^2x \left\{ \frac{1}{g} (\rho^2 + \phi^2) + \Psi^\dagger (\mathbb{G}_0^{-1} + i\rho\sigma_0 + \vec{\phi} \cdot \vec{\sigma}) \Psi \right\} \quad (3.9)$$

mentre la funzione di partizione è data da

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\Psi^\dagger \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\phi e^{-\frac{S[\Psi, \Psi^\dagger, \rho, \phi]}{\hbar}} \quad (3.10)$$

L'aspetto importante, oltre al fatto di aver introdotto dei campi rappresentanti delle osservabili di interesse fisico, è che l'azione è diventata quadratica nei campi fermionici. Perciò l'integrale funzionale nei campi Ψ e Ψ^\dagger è risolubile analiticamente, e dà come risultato l'azione efficace

$$S[\rho, \phi] = \int_0^\beta d\tau \int d^2x \left\{ \frac{1}{g} (\rho^2 + \phi^2) \right\} - \text{Tr} \ln(\mathbb{G}^{-1}) \quad (3.11)$$

dove $\mathbb{G} = (\mathbb{G}_0^{-1} + i\rho\sigma_0 + \vec{\phi} \cdot \vec{\sigma})^{-1}$ corrisponde alla funzione di Green vestita. La funzione di partizione diventa quindi un integrale funzionale solo sui campi bosonici.

Per ottenere nel seguito formule più compatte, conviene introdurre il formalismo quadrivettoriale utilizzato nell'articolo [16]. A questo scopo, definiamo i quadrivettori

$$\sigma^\mu = (\sigma_0, \vec{\sigma}) \quad \phi^\mu = (i\rho, \vec{\phi}) \quad (3.12)$$

e riscriviamo l'azione nel modo seguente:

$$S[\phi^\mu] = \int_0^\beta d\tau \int d^2x \left\{ \frac{\eta_{\mu\nu}}{g} \phi^\mu \phi^\nu \right\} - \text{Tr} \ln(\mathbb{G}^{-1}) \quad (3.13)$$

dove $\mathbb{G} = (\mathbb{G}_0^{-1} + \phi^\mu \sigma_\mu)^{-1}$ e $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. Nell'utilizzo di questa notazione, adottiamo la convenzione di somma di Einstein e non facciamo distinzione fra indici alti e bassi.

L'azione (3.13) rappresenta un punto di partenza per le approssimazioni. Nel nostro caso, vogliamo anzitutto studiare la fisica di campo medio, che si ottiene se ρ e ϕ sono campi statici ed uniformi. Fermandosi a questo ordine di approssimazione, la domanda che ci si pone è se il sistema possa o meno ammettere una fase a magnetizzazione totale ϕ diversa da 0. In particolare, cercheremo di valutare se l'interazione spin-orbita possa modificare il valore dell'interazione critica g_c per avere magnetizzazione spontanea.

Una volta studiate le configurazioni di equilibrio del sistema a livello di campo medio, valuteremo l'effetto delle fluttuazioni dei campi ρ e ϕ attraverso una RPA. L'obiettivo sarà vedere se, in condizioni debolmente fuori equilibrio, il sistema possa o meno ammettere dei modi collettivi di densità e di spin.

3.2 Fisica di campo medio: le equazioni di punto sella

L'approssimazione di campo medio si ottiene assumendo che i campi di Hubbard-Stratonovich ρ e ϕ siano statici, e che descrivano pertanto una configurazione di equilibrio per il sistema. Nel nostro caso assumiamo che la densità e la magnetizzazione siano anche uniformi. Pertanto l'azione di campo medio è data da

$$S_{mf}(\phi_0^\mu) = \frac{\beta A}{g} \eta_{\mu\nu} \phi_0^\mu \phi_0^\nu - \text{Tr} \ln(\hat{\mathbb{G}}_0^{-1}) \quad (3.14)$$

dove ϕ_0^μ è un quadrivettore costante e $\hat{\mathbb{G}}_0 = (\mathbb{G}_0^{-1} + \phi_0^\mu \sigma^\mu)^{-1}$ è il propagatore di campo medio.

Le equazioni che descrivono le configurazioni di equilibrio del sistema sono quelle che soddisfano il principio di minima azione

$$\frac{\delta S_{mf}}{\delta \phi_0^\mu} = 0 \quad (3.15)$$

da cui segue il set di equazioni

$$\phi_0^\mu = \frac{g}{2\beta A} \eta^{\mu\nu} \text{Tr}(\hat{\mathbb{G}}_0 \sigma_\nu) \quad (3.16)$$

Scritte in termini dei campi medi ρ_0 e $\vec{\phi}_0$, le equazioni (3.16) sono date da

$$\rho_0 = \frac{ig}{2\beta A} \text{Tr} \hat{\mathbb{G}}_0 \quad \vec{\phi}_0 = \frac{g}{2\beta A} \text{Tr}(\hat{\mathbb{G}}_0 \vec{\sigma}) \quad (3.17)$$

Le equazioni (3.17)¹ sono dette equazioni di punto sella, e determinano i campi di densità e di magnetizzazione in condizioni di equilibrio. La prima equazione permette di ricavare la densità di Hubbard-Stratonovich in termini della densità numerica n , mentre le seconde determinano la magnetizzazione.

Per studiarne le soluzioni, è necessario calcolare le tracce delle matrici $\hat{\mathbb{G}}_0$ e $\hat{\mathbb{G}}_0 \vec{\sigma}$. Allo scopo, sfruttiamo l'invarianza della traccia rispetto a cambiamenti di base, e scriviamo la matrice $\hat{\mathbb{G}}_0^{-1}$ nello spazio dei momenti. Dopodichè invertiamo la matrice risultante, ottenendo

$$\hat{\mathbb{G}}_0(\vec{k}, \omega_n) = \frac{1}{\det \hat{\mathbb{G}}_0^{-1}} \begin{pmatrix} \gamma(\vec{k}, \omega_n) + i\rho_0 - \hbar_0^z & -\hbar_0^x + i\hbar_0^y \\ -\hbar_0^x - i\hbar_0^y & \gamma(\vec{k}, \omega_n) + i\rho_0 + \hbar_0^z \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Per semplicità si è definita la quantità scalare

$$\gamma(\vec{k}, \omega_n) = -i\omega_n - \mu + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (3.19)$$

e il campo di Zeemann efficace

$$\vec{h}_0 = \left(\phi_0^x + \frac{\Omega}{2}, \phi_0^y, \phi_0^z - \frac{\hbar^2 k_0}{m} k_x \right) \quad (3.20)$$

Inoltre si ha $\det \hat{\mathbb{G}}_0^{-1} = (\gamma(\vec{k}, \omega_n) + i\rho_0)^2 + |\vec{h}_0|^2$. La (3.18) consente di calcolare le tracce delle equazioni (3.17). Il risultato è il seguente:

$$\rho_0 = \frac{ig}{\beta A} \sum_{\vec{k}, \omega_n} \frac{\gamma(\vec{k}, \omega_n) + i\rho_0}{(\gamma(\vec{k}, \omega_n) + i\rho_0)^2 - |\vec{h}_0|^2} \quad (3.21)$$

$$\vec{\phi}_0 = \frac{g}{\beta A} \sum_{\vec{k}, \omega_n} \frac{\vec{h}_0}{(\gamma(\vec{k}, \omega_n) + i\rho_0)^2 - |\vec{h}_0|^2} \quad (3.22)$$

Le equazioni di punto sella possono essere ulteriormente semplificate sommando sulle frequenze di Matsubara. Data infatti una generica funzione complessa $F(z)$ che ammette un set di poli semplici $\{z_i\}_{i=1, \dots, n}$ nel piano complesso z , vale la relazione

¹La traccia va effettuata sia sugli indici di quadrimomento, cioè (\vec{k}, ω_n) , sia sugli indici di spin.

$$\frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} F(i\omega_n) = - \sum_i \text{Res} (f(z)F(z))|_{z=z_i} \quad (3.23)$$

dove $f(z) = \frac{1}{e^{\beta z} + 1}$ è la distribuzione di Fermi. Applicando questa relazione, si ottengono le seguenti equazioni per ρ_0 e $\vec{\phi}_0$:

$$\rho_0 = -\frac{ig}{2A} \sum_{\vec{k}} \left(f(z_{\vec{k}}^+) + f(z_{\vec{k}}^-) \right) = -\frac{ig}{2} (n_+ + n_-) \quad (3.24)$$

$$\vec{\phi}_0 = -\frac{g}{2A} \sum_{\vec{k}} \left(f(z_{\vec{k}}^+) - f(z_{\vec{k}}^-) \right) \frac{\vec{h}_0}{|\vec{h}_0|} \quad (3.25)$$

dove $z_{\vec{k}}^{\pm} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu + i\rho_0 \pm |\vec{h}_0|$. Dalla struttura di queste equazioni si deduce che a livello di campo medio il sistema si comporta ancora come se fosse costituito da una miscela di due specie fermioniche non interagenti di elicità opposta, con densità n_+ ed n_- . I potenziali chimici delle due bande di elicità vengono tuttavia modificati dall'interazione tra le singole particelle e i campi medi ρ_0 e $\vec{\phi}_0$.

Come si nota dalla (3.20), \vec{h}_0 è funzione di ρ_0 e $\vec{\phi}_0$; pertanto le equazioni di punto sella sono equazioni autoconsistenti. La prima equazione mette in relazione ρ_0 con la densità numerica n , che è a sua volta funzione di ρ_0 e del potenziale chimico. Essa è perciò in grado di determinare la legge di stato del gas a livello di campo medio. Nella pratica quest'equazione non si risolve analiticamente, a meno che $\vec{\phi}_0 = 0$, nel qual caso la legge di stato del gas si ricava in modo immediato. Infatti, esprimendo ρ_0 in funzione della densità fisica n , si ottiene che $\tilde{\mu} = \mu - \frac{g}{2}n$. Pertanto, l'equazione di stato riceve una correzione lineare nella densità rispetto al caso non interagente.

La vera novità, introdotta dalle equazioni (3.25), consiste nella possibilità di avere una soluzione con una magnetizzazione spontanea, cioè una magnetizzazione totale diversa da 0 anche in assenza di un campo magnetico esterno (rappresentato da Ω). Questo effetto non si verifica a livello di fisica non interagente, in quanto è assente un'interazione che accoppi tra loro gli spin di particelle diverse. Vi è tuttavia una difficoltà: le equazioni per la magnetizzazione non sono risolvibili analiticamente, a causa del campo di Zeemann efficace \vec{h}_0 che introduce una dipendenza non banale dalla componente x del momento nella somma su \vec{k} .

La strategia che adotteremo quindi per stabilire se il sistema ammetta una fase ferromagnetica sarà studiare il sistema in assenza di accoppiamento spin-orbita in modo da rimuovere la dipendenza problematica da k_x e valuteremo se esista una fase magnetizzata a $k_0 = 0$. Successivamente supporremo di accen-

dere lentamente k_0 e studieremo in quali condizioni la fase magnetizzata viene favorita.

3.3 La fase ferromagnetica

3.3.1 Magnetizzazione spontanea a $k_0 = 0$

Il motivo principale per cui utilizziamo come base di partenza le equazioni (3.25) con $k_0 = 0$ per descrivere il ferromagnetismo è che una fase magnetizzata è frutto di una rottura spontanea di simmetria. Nel caso di un sistema privo di accoppiamento spin-orbita, la simmetria rotta è la simmetria per rotazioni di spin, rappresentata dal gruppo $SU(2)$. Da un punto di vista fisico, perciò, l'instaurarsi di una fase ferromagnetica si interpreta in modo immediato: il campo esterno, rappresentato dal campo di Zeemann Ω , produce una magnetizzazione in direzione x . Se il campo viene spento, a livello microscopico si ristabilisce l'invarianza per rotazioni del sistema, mentre a livello macroscopico si può ottenere, dipendentemente dall'intensità dell'interazione e dalla temperatura, uno stato a simmetria rotta con una magnetizzazione spontanea nella direzione del campo Ω .

Questo è quanto accade ad esempio nel modello di Ising tridimensionale [14], di hamiltoniana

$$H = \sum_i \vec{h} \cdot \vec{S}_i + J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad (3.26)$$

La stessa logica può essere utilizzata per descrivere le soluzioni delle equazioni per la magnetizzazione media. Nel caso in cui $k_0 = 0$, il campo di Zeemann efficace \vec{h}_0 perde la dipendenza da k_x e le equazioni per la magnetizzazione (3.25) diventano

$$\vec{\phi}_0 = -\frac{g}{2}(n_+ - n_-) \frac{\vec{h}_0}{\sqrt{(\phi_0^x + \frac{\Omega}{2})^2 + (\phi_0^y)^2 + (\phi_0^z)^2}} \quad (3.27)$$

dove $\vec{h}_0 = (\phi_0^x + \frac{\Omega}{2}, \phi_0^y, \phi_0^z)$. Le equazioni (3.27) ammettono due classi distinte di soluzioni:

- $\Omega \neq 0$, $\phi_0^x = -\frac{g}{2}(n_+ - n_-)$, $\phi_0^y = \phi_0^z = 0$. Questo è il caso in cui è applicato un campo esterno lungo l'asse x : si sviluppa una magnetizzazione unicamente in direzione parallela al campo e proporzionale alla differenza di popolazione $n_+ - n_-$.
- $\Omega = 0$, $|\vec{\phi}_0| = -\frac{g}{2}(n_+ - n_-) > 0$. In queste condizioni le equazioni di campo medio individuano solamente il modulo della magnetizzazione, non la

direzione. In particolare, le equazioni per le tre componenti della magnetizzazione sono identiche, in accordo con la simmetria per rotazioni dell'hamiltoniana.

Tuttavia, notiamo che se $n_+ \neq n_-$ c'è una magnetizzazione diversa da 0, con una direzione arbitraria. Questa è la condizione che assicura l'esistenza di una fase ferromagnetica per il sistema in assenza di interazioni spin-orbita. Se invece $n_+ = n_-$, non c'è magnetizzazione e il sistema si trova nella fase paramagnetica.

Quest'analisi permette di concludere che il sistema è in grado di sviluppare una fase ferromagnetica, purchè l'interazione repulsiva sia sufficientemente intensa. Questo perchè, all'aumentare di g , aumenta la probabilità che gli spin atomici sviluppino una correlazione a lungo raggio.

Per determinare il valore critico della costante di accoppiamento g_c per cui si ha la transizione di fase, possiamo analizzare il comportamento dell'energia libera di campo medio, data da

$$F_{mf}[\rho_0, \vec{\phi}_0] = \frac{1}{\beta\hbar} S_{mf}[\rho_0, \vec{\phi}_0] \quad (3.28)$$

Abbiamo già stabilito, infatti, che possono esistere sia una fase paramagnetica sia una fase ferromagnetica quando $\Omega \rightarrow 0^+$. In base al principio di minima azione, questi due stati per il sistema dovranno presentarsi come punti stazionari dell'energia libera. L'idea pertanto è studiare se lo stato paramagnetico sia o meno stabile al variare dell'intensità dell'interazione g : se in un certo regime di g lo stato paramagnetico è stabile, le fluttuazioni di magnetizzazione lasciano il sistema vicino alla configurazione di equilibrio e non si sviluppa alcuna magnetizzazione spontanea. Se invece lo soluzione paramagnetica è instabile, l'ampiezza delle fluttuazioni aumenta e il sistema decade in un nuovo stato, con magnetizzazione totale diversa da 0.

In definitiva, il punto critico viene raggiunto quando lo stato paramagnetico diventa un massimo per l'energia libera. Questo suggerisce una procedura per valutare analiticamente il valore critico di g . L'equazione da analizzare è la seguente:

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0^+} \frac{\delta^2 F_{mf}[\rho_0, \vec{\phi}_0]}{\delta \phi_0^x} \Big|_{\phi_0^x=0} = 0 \quad (3.29)$$

In questa condizione assumiamo che $\phi_0^y = \phi_0^z = 0$, in quanto il campo esterno Ω agisce solamente nella direzione dell'asse x . Il significato è che stiamo valutando per quale valore di g la derivata funzionale seconda dell'energia libera cambia segno nella configurazione $\phi_0^x = 0$. Il cambio di segno indica il passag-

gio della configurazione paramagnetica da stato di minimo a stato di massimo, determinando quindi il punto critico cercato.

Calcoliamo le derivate dell'energia libera, utilizzando l'espressione dell'azione di campo medio (3.14):

$$\frac{\delta F_{mf}}{\delta \phi_0^x} = \frac{2A}{g\hbar} \phi_0^x - \frac{1}{\beta\hbar} \text{Tr}(\hat{\mathbb{G}}_0 \sigma_1) \quad (3.30)$$

$$\frac{\delta^2 F_{mf}}{\delta \phi_0^x{}^2} = \frac{2A}{g\hbar} - \frac{1}{\beta\hbar} \text{Tr} \left(\frac{\delta \hat{\mathbb{G}}_0}{\delta \phi_0^x} \sigma_1 \right) \quad (3.31)$$

Per calcolare la derivata funzionale della funzione di Green, sfruttiamo la seguente relazione:

$$\hat{\mathbb{G}}_0 = \frac{1}{\det \hat{\mathbb{G}}_0^{-1}} \begin{pmatrix} \gamma_{22} & -\gamma_{12} \\ -\gamma_{21} & \gamma_{11} \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

dove γ_{ij} sono gli elementi della matrice $\hat{\mathbb{G}}_0^{-1}$. Da ciò segue che

$$\frac{\delta \hat{\mathbb{G}}_0}{\delta \phi_0^x} = \frac{1}{\det \hat{\mathbb{G}}_0^{-1}} \left(-\frac{1}{\det \hat{\mathbb{G}}_0^{-1}} \frac{\delta \det \hat{\mathbb{G}}_0^{-1}}{\delta \phi_0^x} + \frac{\delta}{\delta \phi_0^x} \right) \begin{pmatrix} \gamma_{22} & -\gamma_{12} \\ -\gamma_{21} & \gamma_{11} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Inserendo ora l'equazione (3.33) nella (3.31), si ottiene che

$$\frac{\delta^2 F_{mf}}{\delta \phi_0^x{}^2} = \frac{2A}{g\hbar} - \frac{1}{\beta\hbar} \text{Tr} \left[\frac{\hat{\mathbb{G}}_0 \sigma_1}{\det \hat{\mathbb{G}}_0^{-1}} \left(\phi_0^x + \frac{\Omega}{2} \right) - \frac{\sigma_0}{\det \hat{\mathbb{G}}_0^{-1}} \right] \quad (3.34)$$

Impostando $\phi_0^x = 0$ ed eseguendo il limite $\Omega \rightarrow 0^+$, si ottiene che $\vec{h}_0 \rightarrow 0$, perciò la funzione di Green $\hat{\mathbb{G}}_0$ diventa una matrice diagonale. Ciò significa che il primo addendo nell'operazione di traccia non dà contributo, essendo $\text{Tr}(\hat{\mathbb{G}}_0 \sigma_1) \propto \text{Tr} \sigma_1 = 0$. Pertanto,

$$\begin{aligned} \lim_{\Omega \rightarrow 0^+} \frac{\delta^2 F_{mf}}{\delta \phi_0^x{}^2} \Big|_{\phi_0^x=0} &= \frac{2A}{g\hbar} + \frac{1}{\beta\hbar} \sum_{\vec{k}, \omega_n} \frac{\text{Tr} \sigma_0}{\det \hat{\mathbb{G}}_0^{-1}} \\ &= \frac{2A}{g\hbar} + \frac{2}{\beta\hbar} \sum_{\vec{k}, \omega_n} \frac{1}{(i\omega_n + \mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - i\rho_0)^2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Eseguiamo la somma sulle frequenze di Matsubara. Utilizzando la relazione (3.23) per $T \rightarrow 0$, si ottiene che

$$\frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \frac{1}{(i\omega_n + \mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - i\rho_0)^2} = -\delta \left(\mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - i\rho_0 \right) \quad (3.36)$$

La somma su \vec{k} ora si calcola agevolmente passando al limite termodinamico: si rimpiazza la somma con un integrale sullo spazio dei momenti, e si risolve l'integrale passando in coordinate polari nel piano (k_x, k_y) . Il risultato finale è il seguente:

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0^+} \frac{\delta^2 F_{mf}}{\delta \phi_0^2} \Big|_{\phi_0^x=0} = \frac{2A}{\hbar} \left\{ \frac{1}{g} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \right\} \quad (3.37)$$

Notiamo che il membro di destra è positivo soltanto se $g < \frac{2\pi\hbar^2}{m}$, mentre è negativo se $g > \frac{2\pi\hbar^2}{m}$. In definitiva, nel primo caso si ha che lo stato paramagnetico rappresenta una configurazione di minima energia libera, nel secondo una configurazione di massimo. Il valore critico dell'interazione è pertanto $g_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m}$, che coincide con il valore critico di Stoner [15].

3.3.2 Magnetizzazione spontanea a $k_0 \neq 0$

Nella precedente sezione, abbiamo analizzato le equazioni di punto sella nel caso di un sistema di fermioni privo di interazione spin-orbita, e abbiamo illustrato come si possa sviluppare una fase ferromagnetica, individuando l'interazione critica g_c . Perciò, la domanda che ci si pone in modo naturale è la seguente: come varia il valore critico dell'interazione se si accende un'interazione spin-orbita?

Sperimentalmente il problema può essere caratterizzato in questo modo: si suppone di accendere il campo di Zeemann Ω , e di spegnerlo in modo adiabatico per diversi valori di k_0 . E' possibile che il sistema possa sviluppare una magnetizzazione spontanea anche se l'interazione ha un'intensità minore di g_c ? Ciò che si vuole ottenere è una relazione $\tilde{g}_c = \tilde{g}_c(k_0)$ fra il valore critico dell'interazione e il parametro di spin-orbita k_0 , che mostri se esistono degli intervalli di valori per k_0 in cui l'andamento è decrescente. Se ciò accade, l'interazione spin-orbita sarebbe in grado di favorire l'instaurarsi di una fase magnetizzata.

Per affrontare questo problema, prendiamo in considerazione l'equazione (3.29) tenendo $k_0 \neq 0$, cioè cercando i punti stazionari dell'energia libera di campo medio \tilde{F}_{mf} ². Ripetendo esattamente la procedura utilizzata nella precedente sezione, si giunge alla seguente equazione:

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0^+} \frac{\delta^2 \tilde{F}_{mf}}{\delta \phi_0^2} \Big|_{\phi_0^x=0} = \frac{2A}{g\hbar} + \frac{2}{\beta\hbar} \sum_{\vec{k}, \omega_n} \frac{1}{(i\omega_n + \mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - i\rho_0)^2 - \frac{\hbar^4 k_0^2}{m^2} k_x^2} \quad (3.38)$$

²Le quantità con la \sim indicano che il sistema è soggetto all'interazione spin-orbita.

L'equazione è formalmente identica alla (3.35), con l'aggiunta di un termine dovuto all'interazione spin-orbita che introduce un'ulteriore dipendenza da k_x nell'integrando. Sommando sulle frequenze di Matsubara e prendendo il limite $T \rightarrow 0$, otteniamo:

$$\frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \frac{1}{\left(i\omega_n + \mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - i\rho_0\right)^2 - \frac{\hbar^4 k_0^2}{m^2} k_x^2} = \frac{\Theta\left(\mu - i\rho_0 - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_0}{m} |k_x|\right) - \Theta\left(\mu - i\rho_0 - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_0}{m} |k_x|\right)}{\frac{2\hbar^2 k_0}{m} |k_x|} \quad (3.39)$$

Come si nota, la somma su \vec{k} è decisamente più complessa rispetto al caso in cui il sistema è privo di interazione spin-orbita e richiede di fatto un'approssimazione numerica.

Perciò, invece che procedere direttamente al calcolo della somma nell'equazione (3.38), è preferibile analizzare il problema da un'altra prospettiva: se la fase paramagnetica è stabile significa che, applicando delle piccole fluttuazioni, il sistema torna nella configurazione a magnetizzazione totale nulla, una volta ristabilito l'equilibrio. Poichè nella prossima sezione analizzeremo le proprietà dinamiche del sistema attraverso una RPA, principalmente con lo scopo di determinare i modi collettivi, potremo utilizzare i risultati dell'analisi per individuare in modo equivalente la condizione di instabilità paramagnetica.

Questa procedura è sensata, in quanto alla fine otterremo un set di equazioni che descrivono i modi collettivi nello stato paramagnetico e un'equazione che descrive l'instabilità paramagnetica. Esse saranno completamente espresse in termini delle funzioni di risposta del sistema; ricavando perciò un'approssimazione numerica per le funzioni di risposta, potremo analizzare contemporaneamente tutte le quantità di interesse fisico. Studieremo dapprima il suono zero prodotto da fluttuazioni di densità e successivamente l'intensità critica per avere ferromagnetismo al variare di k_0 .

3.4 Fluttuazioni nello stato paramagnetico: la RPA

Nella precedente sezione, abbiamo ricavato le proprietà fisiche del sistema in approssimazione di campo medio, cioè supponendo che i campi di densità e di magnetizzazione fossero statici ed uniformi.

Il passaggio successivo consiste nell'analizzare le proprietà dinamiche del sistema, ovvero il comportamento che esso esibisce quando si trova debolmente fuori equilibrio.

A questo scopo, assumiamo che il sistema si trovi inizialmente in una configurazione di equilibrio, in modo che la densità e la magnetizzazione soddisfino le equazioni di campo medio, e introduciamo una piccola perturbazione disomogenea e dipendente dal tempo. L'obiettivo è studiare la risposta del sistema alla perturbazione esterna, valutando l'evoluzione nel tempo della densità e della magnetizzazione per effetto della perturbazione. Si potrà capire in questo modo se il sistema possa sviluppare dei modi collettivi, cioè onde di densità e di magnetizzazione a grande lunghezza d'onda.

L'analisi sarà svolta tramite la determinazione delle funzioni di risposta del sistema in approssimazione RPA.

Il punto di partenza per l'analisi del sistema in condizioni di non-equilibrio consiste nel supporre che i campi di densità e magnetizzazione possano essere separati in una parte media, soluzione delle equazioni di punto sella ed una parte fluttuante, con una dipendenza per ora arbitraria dalle coordinate spaziali e dal tempo. In altre parole, utilizziamo il seguente Ansatz:

$$\phi^\mu = \phi_0^\mu + \phi_{fl}^\mu(\vec{x}, \tau) \quad (3.40)$$

ϕ_0^μ descrive nel nostro caso lo stato di equilibrio, mentre ϕ_{fl}^μ un debole scostamento dall'equilibrio.

In questo quadro, la RPA (*Random phase approximation*) consiste nell'approssimare l'azione dell'equazione (3.13) al secondo ordine nei campi fluttuanti, in modo da poter ricavare analiticamente le funzioni di correlazione fra due generici campi. Infatti, se si esegue l'espansione, si ottiene un'espressione nella forma

$$S[\phi_0^\mu, \phi_{fl}^\mu] = S_{mf}[\phi_0^\mu] + \frac{1}{2} \int d\tau d\tau' d^2x d^2x' K_{\mu\nu}(\vec{x}\tau, \vec{x}'\tau') \phi_{fl}^\mu \phi_{fl}^\nu + \mathcal{O}(\phi^3) \quad (3.41)$$

dove

$$K_{\mu\nu}(\vec{x}\tau, \vec{x}'\tau') = \left. \frac{\delta^2 S}{\delta\phi^\mu(\vec{x}, \tau) \delta\phi^\nu(\vec{x}', \tau')} \right|_{\phi^\mu = \phi_0^\mu} \quad (3.42)$$

è la matrice 4×4 contenente le derivate funzionali dell'azione³. E' possibile pertanto calcolare il valor medio $\langle \phi_{fl}^\mu \phi_{fl}^\nu \rangle$ tramite la seguente definizione

³Notiamo che non è presente un termine di primo ordine in quanto lo stato di partenza è uno stato di equilibrio per il sistema.

$$\langle \phi_{fl}^\mu \phi_{fl}^\nu \rangle = \frac{\int \prod_\lambda \mathcal{D}\phi^\lambda \phi_{fl}^\mu \phi_{fl}^\nu e^{-\frac{S}{\hbar}}}{\int \prod_\lambda \mathcal{D}\phi^\lambda e^{-\frac{S}{\hbar}}} \quad (3.43)$$

Poichè l'integrale è gaussiano per effetto dell'espansione (3.41), la soluzione è immediata ed è data da

$$\langle \phi_{fl}^\mu \phi_{fl}^\nu \rangle = [K^{-1}]^{\mu\nu} \quad (3.44)$$

I valori medi $\langle \phi_{fl}^\mu \phi_{fl}^\nu \rangle$ sono cruciali per descrivere le proprietà collettive del sistema, in quanto rappresentano le funzioni di correlazione fra due generici campi. Le funzioni di risposta, come vedremo, saranno espresse tutte in termini di questi valori medi.

Per espandere l'azione al second'ordine nei campi fluttuanti, partiamo dall'espressione (3.13) passando dallo spazio reale (\vec{x}, τ) allo spazio dei quadrimomenti $q = (\vec{q}, \omega_n)$, come già effettuato nella sezione 2.6. Si ottiene che

$$S[\phi^\mu] = \sum_q \left\{ \frac{\eta_{\mu\nu}}{g} \phi^\mu(q) \phi^\nu(-q) \right\} - \text{Tr} \ln(\mathbb{G}^{-1}) = S_1 + S_2 \quad (3.45)$$

Espandiamo il primo termine, imponendo che $\phi = \phi_0 + \phi_{fl}$:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\beta A}{g} \eta_{\mu\nu} \phi_0^\mu \phi_0^\nu + \sum_q \frac{2\eta_{\mu\nu}}{g} \phi_{fl}^\mu(q) \phi_0^\nu + \sum_q \frac{\eta_{\mu\nu}}{g} \phi_{fl}^\mu(q) \phi_{fl}^\nu(-q) \\ &= S_1^{(0)} + S_1^{(1)} + S_1^{(2)} \end{aligned} \quad (3.46)$$

I termini $S_1^{(i)}$, con $i = 0, 1, 2$, rappresentano rispettivamente i termini di ordine 0, 1 e 2 nello sviluppo di S_1 . Utilizzeremo la stessa notazione anche per S_2 e per S .

Riconosciamo nel termine di ordine 0 il primo addendo dell'azione di campo medio (3.14). All'ordine più basso ricostruiremo l'espressione di S_{mf} , una volta sommato il termine di ordine 0 di S_2 .

Passiamo ora al calcolo di $S_1^{(1)}$. Utilizziamo la seguente proprietà:

$$\begin{aligned} \sum_q \phi_{fl}^\mu(q) &= \sum_q \int d\tau d^2x \phi_{fl}^\mu(\vec{x}, \tau) e^{i(\omega_n \tau - \vec{q} \cdot \vec{x})} \\ &= \beta A \int d\tau d^2x \phi_{fl}^\mu(\vec{x}, \tau) \delta^{(2)}(\vec{x}) \delta(\tau) = \beta A \phi_{fl}^\mu(0) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Da ciò si deduce che

$$S_1^{(1)} = \sum_q \frac{2\eta_{\mu\nu}}{g} \phi_{fl}^\mu(q) \phi_0^\nu = \frac{2\beta A}{g} \eta_{\mu\nu} \phi_{fl}^\mu(0) \phi_0^\nu \quad (3.48)$$

Resta da calcolare lo sviluppo al secondo ordine di S_2 . Facciamo uso delle seguenti relazioni:

$$\text{Tr} \ln(\mathbb{G}^{-1}) = \text{Tr} \ln(\hat{\mathbb{G}}_0^{-1}) + \text{Tr} \ln(\sigma_0 + \phi_{fl}^\mu \hat{\mathbb{G}}_0 \sigma_\mu) \quad (3.49)$$

$$\ln(\sigma_0 + \mathbb{A}) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\mathbb{A}^n}{n} = \mathbb{A} - \frac{\mathbb{A}^2}{2} + \mathcal{O}(\mathbb{A}^3) \quad (3.50)$$

dove \mathbb{A} rappresenta una matrice generica.

Alla fine si ottiene che

$$\begin{aligned} S_2 &= -\text{Tr} \ln(\hat{\mathbb{G}}_0^{-1}) - \text{Tr}(\phi_{fl}^\mu \hat{\mathbb{G}}_0 \sigma_\mu) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\phi_{fl}^\mu \hat{\mathbb{G}}_0 \sigma_\mu \phi_{fl}^\nu \hat{\mathbb{G}}_0 \sigma_\nu) + \mathcal{O}(\phi_{fl}^3) \\ &= S_2^{(0)} + S_2^{(1)} + S_2^{(2)} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Il termine di ordine 0, assieme al primo termine dell'equazione (3.46), ricostruisce l'azione di campo medio.

Passando al calcolo di $S_2^{(1)}$, si ha che

$$\begin{aligned} S_2^{(1)} &= -\text{Tr}(\phi_{fl}^\mu \hat{\mathbb{G}}_0 \sigma_\mu) = -\sum_{q,q'} \text{Tr}(\phi_{fl}^\mu(q-q') \hat{\mathbb{G}}_0(q) \delta_{q,q'} \sigma_\mu) \\ &= -\phi_{fl}^\mu(0) \sum_q \text{Tr}(\hat{\mathbb{G}}_0(q) \sigma_\mu) = -\phi_{fl}^\mu(0) \text{Tr}(\hat{\mathbb{G}}_0 \sigma_\mu) \end{aligned} \quad (3.52)$$

L'operazione di traccia nella prima ed ultima uguaglianza indica la traccia sia sugli indici di quadrimomento che di spin; nelle rimanenti, invece, è calcolata solo sugli indici di spin.

Calcoliamo infine il termine del second'ordine di S_2 , cioè il termine che descrive gli effetti a molti corpi del sistema:

$$\begin{aligned} S_2^{(2)} &= -\frac{1}{2} \text{Tr}(\phi_{fl}^\mu \hat{\mathbb{G}}_0 \sigma_\mu \phi_{fl}^\nu \hat{\mathbb{G}}_0 \sigma_\nu) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} \text{Tr}(\phi_{fl}^\mu(k_1 - k_2) \hat{\mathbb{G}}_0(k_2) \delta_{k_2, k_3} \sigma_\mu \phi_{fl}^\nu(k_3 - k_4) \hat{\mathbb{G}}_0(k_4) \delta_{k_4, k_1} \sigma_\nu) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Sfruttando le δ di Kronecker, si ha che $k_2 = k_3$ e $k_4 = k_1$; introducendo inoltre i quadrimomenti k e q in modo tale che $k_1 = k + \frac{q}{2}$ e $k_2 = k - \frac{q}{2}$, si ottiene che

$$S_2^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{k,q} \text{Tr} \left(\hat{\mathbb{G}}_0 \left(k + \frac{q}{2} \right) \sigma_\mu \hat{\mathbb{G}}_0 \left(k - \frac{q}{2} \right) \sigma_\nu \right) \phi_{fl}^\mu(q) \phi_{fl}^\nu(-q) \quad (3.54)$$

Sommiamo ora i termini di uguale ordine in ϕ_{fl} di S_1 ed S_2 . Si ha

$$S^{(0)} = S_1^{(0)} + S_2^{(0)} = \frac{\beta A}{g} \eta_{\mu\nu} \phi_0^\mu \phi_0^\nu - \text{Tr} \ln(\hat{\mathbb{G}}_0^{-1}) = S_{mf} \quad (3.55)$$

$$S^{(1)} = S_1^{(1)} + S_2^{(1)} = \left\{ \frac{2\beta A}{g} \eta_{\mu\nu} \phi_0^\nu - \text{Tr}(\hat{\mathbb{G}}_0 \sigma_\mu) \right\} \phi_{fl}^\mu(0) = 0 \quad (3.56)$$

$$S^{(2)} = S_1^{(2)} + S_2^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_q \left\{ \frac{2\eta_{\mu\nu}}{g} - \chi_{\mu\nu}^0(\vec{q}, \omega_n) \right\} \phi_{fl}^\mu(q) \phi_{fl}^\nu(-q) \quad (3.57)$$

dove abbiamo definito la funzione suscettività

$$\chi_{\mu\nu}^0(\vec{q}, \omega_n) = \sum_k \text{Tr} \left(\hat{\mathbb{G}}_0 \left(k + \frac{q}{2} \right) \sigma_\mu \hat{\mathbb{G}}_0 \left(k - \frac{q}{2} \right) \sigma_\nu \right) \quad (3.58)$$

L'espressione finale dell'azione al second'ordine è quindi

$$S[\phi_{fl}^\mu] = S_{mf} + \frac{1}{2} \sum_q \left\{ \frac{2\eta_{\mu\nu}}{g} - \chi_{\mu\nu}^0(\vec{q}, \omega_n) \right\} \phi_{fl}^\mu(q) \phi_{fl}^\nu(-q) \quad (3.59)$$

Il termine di ordine 0 corrisponde come atteso all'azione di campo medio. Il primo ordine non dà contributo, in quanto i campi ϕ_0^μ sono soluzioni delle equazioni (3.16). Il motivo di questo risultato è che le soluzioni delle equazioni di punto sella sono configurazioni di equilibrio per il sistema. Questo garantisce la validità dell'espansione (3.41).

Il secondo ordine introduce invece una novità sostanziale. Infatti, in base all'equazione (3.41), si ha che la funzione di correlazione di una generica coppia di campi è data da

$$\langle \phi_{fl}^\mu(\vec{q}, \omega_n) \phi_{fl}^\nu(-\vec{q}, -\omega_n) \rangle = \left(\frac{1}{\frac{2\eta}{g} - \chi^0(\vec{q}, \omega_n)} \right)^{\mu\nu} \quad (3.60)$$

dove $\frac{1}{\mathbb{A}}$ rappresenta l'inversa della matrice \mathbb{A} . Pertanto, gli effetti a molti corpi che si originano dalla correlazione di due campi sono descrivibili per mezzo della matrice delle funzioni suscettività χ^0 .

Un altro aspetto da sottolineare è che, sebbene l'espressione formale che abbiamo scritto per i correlatori sia valida indipendentemente dal fatto che lo stato di equilibrio sia paramagnetico o ferromagnetico, in realtà l'analisi deve essere fatta separatamente per le due fasi. In effetti, da un punto di vista matematico le funzioni di risposta sono diverse per la presenza del propagatore di campo medio

\hat{G}_0 , che assume forme differenti nelle due fasi: nello stato paramagnetico infatti $\phi_0^x = 0$, mentre nello stato ferromagnetico $\phi_0^x \neq 0$.

Anche da un punto di vista fisico ci aspettiamo fenomeni differenti. Se pensiamo, infatti, ad un sistema di fermioni privo di interazione spin-orbita e supponiamo che si trovi nella fase paramagnetica, ci aspettiamo che le fluttuazioni siano isotrope e diano luogo ad un modo collettivo di spin con la stessa velocità in ogni direzione. Viceversa, se il sistema si trova nella fase ferromagnetica, la simmetria per rotazioni di spin viene rotta dando luogo ad una magnetizzazione spontanea. Perciò, le fluttuazioni di bassa energia per la magnetizzazione intervengono in direzione perpendicolare a quella di magnetizzazione spontanea per cercare di ristabilire la simmetria rotazionale. Il risultato è che si avrà un modo collettivo massivo in direzione parallela alla direzione di magnetizzazione spontanea ed un modo di Goldstone in direzione perpendicolare. Questo è ciò che avviene ad esempio nei superfluidi per effetto della rottura della simmetria $U(1)$ [17].

Nella restante parte di tesi, ci soffermeremo sullo studio delle sole fluttuazioni nella fase paramagnetica.

In conclusione, siamo riusciti tramite la RPA ad esprimere matematicamente i correlatori di due generici campi in condizioni di piccole fluttuazioni rispetto all'equilibrio.

Nella prossima sezione, cercheremo perciò di capire quali informazioni fisiche si possono estrarre dalle funzioni di risposta, e quali conseguenze esse hanno sulla dinamica del sistema in presenza di perturbazioni.

3.5 Teoria della risposta lineare

Per comprendere il ruolo delle funzioni di risposta nel descrivere le proprietà dinamiche di un sistema debolmente fuori equilibrio, è utile ricorrere alla teoria della risposta lineare [18]. In questa sezione ci limiteremo a darne i risultati salienti, mostrandone la connessione con la trattazione svolta nelle precedenti sezioni.

Supponiamo che un generico sistema, in equilibrio al tempo t' , sia soggetto ad una perturbazione infinitesima dipendente dal tempo, descritta dall'hamiltoniana

$$H_{ext}(t) = \int d\vec{x} \varphi(\vec{x}, t) \mathcal{O}_1(\vec{x}, t) \quad (3.61)$$

dove $\varphi(\vec{x}, t)$ rappresenta il potenziale della perturbazione e $\mathcal{O}_1(\vec{x}, t)$ l'operatore a cui si accoppia. Un esempio è dato da un sistema soggetto ad un campo magnetico esterno dipendente dal tempo: il campo magnetico agisce da perturbazione, mentre la grandezza fisica perturbata è la magnetizzazione.

Come abbiamo già notato nella precedente sezione, l'obiettivo è analizzare la risposta del sistema alla perturbazione. Si vuole pertanto calcolare la fluttuazione del valor medio di un'osservabile \mathcal{O}_2 rispetto al valor medio di equilibrio a tempi $t > t'$. Il risultato che si trova [18], all'ordine lineare nel potenziale perturbante, è il seguente:

$$\chi_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1}^{ret}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \frac{\delta\langle\mathcal{O}_2(\vec{x}, t)\rangle}{\delta\varphi(\vec{x}', t')} = -\frac{i}{\hbar}\Theta(t-t')\langle[\mathcal{O}_2^H(\vec{x}, t), \mathcal{O}_1^H(\vec{x}', t')]\rangle \quad (3.62)$$

dove $\mathcal{O}^H(t) = e^{\frac{iHt}{\hbar}}\mathcal{O}e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$ indica l'evoluzione temporale in visuale di interazione, $\langle\bullet\rangle$ rappresenta la media grancanonica alla temperatura T e $\chi_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1}^{ret}$ è detta funzione di risposta ritardata.

Si definisce usualmente anche una funzione di risposta di Matsubara, data da

$$\chi_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1}^M(\vec{x}, \tau; \vec{x}', \tau') = -\frac{1}{\hbar}\langle T_\tau[\mathcal{O}_2(\vec{x}, \tau)\mathcal{O}_1(\vec{x}', \tau')]\rangle \quad (3.63)$$

dove T_τ rappresenta l'operatore di ordinamento cronologico. Il fatto importante è che le trasformate di Fourier delle due funzioni di risposta sono collegate dalla continuazione analitica

$$\chi_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1}^{ret}(\omega) = \chi_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1}^M(i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta) \quad (3.64)$$

dove ω_n rappresenta una frequenza di Matsubara fermionica o bosonica.

Questa proprietà è cruciale, in quanto le funzioni di risposta di Matsubara sono esprimibili facilmente per mezzo di integrali funzionali, e sono pertanto calcolabili tramite la RPA così come costruita nella sezione 3.4.

Nel problema di interesse nella tesi si vogliono studiare le funzioni di risposta $\chi_{\mu\nu}$, vale a dire le funzioni di risposta che accoppiano il campo di densità e le tre componenti della magnetizzazione. Pertanto, le osservabili che ci interessa descrivere corrispondono agli operatori quantistici

$$\hat{\sigma}_\mu(\vec{x}, t) = \hat{\Psi}^\dagger(\vec{x}, t)\sigma_\mu\hat{\Psi}(\vec{x}, t) \quad (3.65)$$

dove $\hat{\Psi}$ e $\hat{\Psi}^\dagger$ sono gli operatori di creazione e distruzione fermionici.

Le funzioni di risposta di Matsubara sono date, per mezzo della definizione (3.63), dai seguenti integrali funzionali⁴:

⁴Per semplicità poniamo d'ora in poi $\hbar = 1$ nella trattazione integrale-funzionale. Li reintrodurremo solo alla fine per avere le corrette dimensioni fisiche.

$$\begin{aligned} \chi_{\mu\nu}^M(\vec{x}, \tau; \vec{x}', \tau') &= -\langle T_\tau [\hat{\sigma}_\mu(\vec{x}, \tau) \hat{\sigma}_\nu(\vec{x}', \tau')] \rangle = \\ &= -\frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\Psi^\dagger \Psi^\dagger \sigma_\mu \Psi \Psi^\dagger \sigma_\nu \Psi e^{-S[\Psi, \Psi^\dagger]} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Abbiamo così costruito un ponte fra teoria della risposta lineare e path integral. Nella prossima sezione vedremo come risolvere gli integrali (3.66).

Dalla teoria della risposta lineare, possiamo dedurre delle proprietà importanti riguardanti la dinamica del sistema in presenza di perturbazioni. Il primo fatto da analizzare è che cosa accade fisicamente se la funzione di risposta si avvicina ad un polo. Quando ciò si verifica, si ha che per piccole ampiezze di perturbazione il sistema è in grado di presentare fluttuazioni molto grandi rispetto al valore di equilibrio. In queste condizioni perciò il sistema dovrebbe manifestare gli effetti collettivi più rilevanti.

L'analisi viene effettuata tipicamente studiando i poli della funzione di risposta, intesa come funzione di \vec{q} e di ω . Questo perchè si assume di aver introdotto una perturbazione oscillante e di studiare la risposta del sistema in forma di onde. Il polo descrive in questo caso un modo collettivo, e il risultato analitico corrisponde alla legge di dispersione del modo, cioè ad una relazione nella forma

$$\omega = f(\vec{q}) \quad (3.67)$$

dove f indica una generica funzione di \vec{q} . Nella pratica i modi collettivi che interessano particolarmente sono quelli di grande lunghezza d'onda in quanto divengono visibili a livello macroscopico. Questo è il motivo per cui si studia il limite $|\vec{q}| \rightarrow 0$ della relazione (3.67).

In particolare, le leggi di dispersione che otterremo studiando i modi collettivi nell'ultimo capitolo della tesi saranno di tipo acustico, perciò avranno la forma

$$\omega = s(\theta)|\vec{q}| \quad (3.68)$$

dove $s(\theta)$ è la velocità del suono del modo collettivo e θ l'angolo che definisce la direzione di \vec{q} nel piano (x, y) rispetto all'asse x . L'eventuale dipendenza angolare di s tiene conto della possibilità che il modo collettivo non sia isotropo.

Nella parte rimanente di tesi, descriveremo i modi collettivi di densità e di magnetizzazione del sistema studiando i poli della funzione di risposta interagente $\chi_{\mu\nu}^{ret}(\vec{q}, \omega)$.

3.6 Calcolo delle funzioni di risposta interagenti

Il calcolo delle funzioni di risposta interagenti $\chi_{\mu\nu}$ si effettua calcolando la trasformata di Fourier dell'equazione (3.66). Più precisamente, se il sistema in oggetto è invariante per traslazioni, spaziali e temporali, la funzione di risposta di Matsubara dipende solamente dalla differenza dei tempi $\theta = \tau - \tau'$ e dei vettori posizione $\vec{z} = \vec{x} - \vec{x}'$. Pertanto è possibile passare allo spazio dei momenti tramite la relazione

$$\chi_{\mu\nu}^M(\vec{q}, \omega_n) = \int d\theta d\vec{z} \chi_{\mu\nu}^M(\vec{z}, \theta) e^{-i(\omega_n \theta - \vec{q} \cdot \vec{z})} \quad (3.69)$$

Ricordando il legame fra funzione di risposta ritardata e quella di Matsubara (3.64), si deduce che la funzione di risposta ritardata è la continuazione analitica in ω di

$$\chi_{\mu\nu}^M(q) = -\frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\Psi^\dagger \sigma_\mu(q) \sigma_\nu(-q) e^{-S} = -\langle \sigma_\mu(q) \sigma_\nu(-q) \rangle \quad (3.70)$$

dove $\sigma_\mu(q) = \sum_k \Psi^\dagger(k + \frac{q}{2}) \sigma_\mu \Psi(k - \frac{q}{2})$ sono le componenti a quadrimomento costante della densità e della magnetizzazione.

Per non appesantire eccessivamente la notazione, scegliamo di indicare d'ora in poi le funzioni di risposta ritardate e di Matsubara con lo stesso simbolo; sarà evidente dal contesto a quale quantità ci si sta riferendo.

Calcoliamo ora i valori medi dell'equazione (3.70). A questo scopo, conviene utilizzare un espediente matematico: consideriamo l'azione

$$S'[\Psi, \Psi^\dagger] = S[\Psi, \Psi^\dagger] + \sum_q j^\mu(q) \sigma_\mu(-q) \quad (3.71)$$

corrispondente all'azione di partenza a cui abbiamo aggiunto un termine di sorgente che si accoppia alla densità (j^0) e alla magnetizzazione (j^i). Le funzioni di risposta si ricavano calcolando le derivate seconde della funzione di partizione rispetto ai campi di sorgente. Si ha infatti che

$$\chi_{\alpha\beta}(q) = -\langle \sigma_\alpha(q) \sigma_\beta(-q) \rangle = -\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\delta^2 \mathcal{Z}_j}{\delta j^\beta(q) \delta j^\alpha(-q)} \Big|_{j=0} \quad (3.72)$$

dove \mathcal{Z}_j è la funzione di partizione in presenza delle sorgenti. L'idea per determinare le funzioni di risposta è di calcolare la funzione di partizione \mathcal{Z}_j ripercorrendo tutti i passaggi fatti per eseguire la RPA. Effettuando la trasformata di Hubbard-Stratonovich tramite le equazioni (3.7)-(3.8), otteniamo la nuova azione

$$S'[\Psi, \Psi^\dagger, \phi^\mu] = \int_0^\beta d\tau \int d^2x \left\{ \frac{\eta_{\mu\nu}}{g} \phi^\mu \phi^\nu + \Psi^\dagger (\mathbb{G}_0^{-1} + (\phi^\mu + j^\mu) \sigma_\mu) \Psi \right\} \quad (3.73)$$

mentre la funzione di partizione è data dall'espressione

$$\mathcal{Z}_j = \int \prod_\lambda \mathcal{D}\phi^\lambda \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\Psi^\dagger e^{-S'} \quad (3.74)$$

Effettuiamo il cambiamento di variabile $\phi_n^\mu = \phi^\mu + j^\mu$; l'azione nei campi trasformati diventa

$$S'[\Psi, \Psi^\dagger, \phi_n^\mu] = \int_0^\beta d\tau \int d^2x \left\{ \frac{\eta_{\mu\nu}}{g} (\phi_n^\mu - j^\mu) (\phi_n^\nu - j^\nu) + \Psi^\dagger (\mathbb{G}_0^{-1} + \phi_n^\mu \sigma_\mu) \Psi \right\} \quad (3.75)$$

Si vede in questo modo che la dipendenza dai campi di sorgente è contenuta solo nel primo termine dell'azione, ed è quadratico in j ; perciò le derivate della funzione di partizione \mathcal{Z}_j si calcolano in modo immediato. Scrivendo l'azione (3.73) nello spazio dei quadrimomenti ed effettuando l'integrazione (3.74) sui campi fermionici, si ottengono i risultati seguenti:

$$\frac{\delta \mathcal{Z}_j}{\delta j^\alpha(-q)} = \int \prod_\lambda \mathcal{D}\phi_n^\lambda \left\{ \frac{2\eta_{\alpha\mu}}{g} (\phi_n^\mu(q) - j^\mu(q)) \right\} e^{-S'} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \mathcal{Z}_j}{\delta j^\beta(q) \delta j^\alpha(-q)} &= \\ &= \int \prod_\lambda \mathcal{D}\phi_n^\lambda \left\{ -\frac{2\eta_{\alpha\beta}}{g} + \frac{4}{g^2} \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} (\phi_n^\mu(q) - j^\mu(q)) (\phi_n^\nu(-q) - j^\nu(-q)) \right\} e^{-S'} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Da quest'ultima equazione, sfruttando la proprietà (3.72), otteniamo che

$$\chi_{\mu\nu}(q) = \frac{2\eta_{\mu\nu}}{g} - \frac{4}{g^2} \eta_{\mu\alpha} \langle \phi_n^\alpha(q) \phi_n^\beta(-q) \rangle \eta_{\beta\nu} \quad (3.78)$$

In definitiva, si sono ricavate le funzioni suscettività del sistema in termini dei correlatori a due punti dei campi ϕ_n . Inserendo allora la (3.60) nella (3.78), otteniamo le funzioni di risposta in approssimazione RPA:

$$\begin{aligned}
\chi_{\mu\nu}(q) &= -\frac{2\eta_{\mu\nu}}{g} + \frac{4}{g^2}\eta_{\mu\alpha} \left(\frac{1}{\frac{2\eta}{g} - \chi^0(q)} \right)^{\alpha\beta} \eta_{\beta\nu} \\
&= \left[-\frac{2\eta}{g} + \frac{4}{g^2}\eta \frac{1}{\frac{2\eta}{g} - \chi^0(q)} \eta \right]_{\mu\nu} \\
&= \left[-\frac{2\eta}{g} \frac{1}{\frac{2\eta}{g} - \chi^0(q)} \left(\frac{2\eta}{g} - \chi^0(q) - \frac{2\eta}{g} \right) \right]_{\mu\nu} = \left[\frac{\chi^0(q)}{\sigma_0 - \frac{g}{2}\eta\chi^0(q)} \right]_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.79}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è sfruttata la proprietà $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, valida per due generiche matrici $n \times n$ invertibili A e B .

L'equazione (3.79) può essere anche riscritta nella seguente forma più comoda:

$$\chi_{\mu\nu}(\vec{q}, \omega) = \chi_{\mu\lambda}^0(\vec{q}, \omega) \left[\frac{1}{\sigma_0 - \frac{g}{2}\eta\chi^0(\vec{q}, \omega)} \right]_{\lambda\nu} \tag{3.80}$$

che dimostra la validità dell'analogia equazione ottenuta nell'articolo [16], utilizzando lo sviluppo perturbativo tramite diagrammi di Feynman.

Tramite la teoria della risposta lineare e l'approccio integrale-funzionale di Feynman, siamo riusciti a ricavare un'espressione analitica per le funzioni di risposta interagenti che potremo utilizzare per lo studio dei modi collettivi. Notiamo che per $g \rightarrow 0$, si ha $\chi \rightarrow \chi^0$, a dimostrazione che le funzione di risposta che si sono introdotte tramite la definizione (3.58) corrispondono proprio alle funzioni di risposta del sistema in assenza di interazione repulsiva. Per studiare quindi le proprietà dinamiche del sistema sarà necessario studiare la matrice χ^0 , obiettivo dell'ultimo capitolo della tesi.

3.7 Definizioni alternative dei campi H-S

In quest'ultima sezione si vuole mettere in evidenza la non-univocità della trasformata di Hubbard-Stratonovich effettuata nella sezione 3.1. In effetti, si nota che l'intero apparato costruito per effettuare la RPA si basa sulla definizione dei campi coniugati alla densità e alla magnetizzazione, introdotti per mezzo delle relazioni integrali (3.7) e (3.8). A loro volta le trasformate di Hubbard-Stratonovich sono rette dalla decomposizione (3.5), che separa il termine di interazione in un contributo di densità ed in un contributo di magnetizzazione. Il fatto importante da notare è che la decomposizione dell'equazione (3.5) non è univoca. Due modi alternativi per eseguirli sono ad esempio i seguenti:

$$\begin{aligned}
g\bar{\psi}_\uparrow\bar{\psi}_\downarrow\psi_\downarrow\psi_\uparrow &= -\frac{1}{4}(\Psi^\dagger\sigma_0\Psi)^2 - \frac{1}{4}|\Psi^\dagger\vec{\sigma}\Psi|^2 \\
g\bar{\psi}_\uparrow\bar{\psi}_\downarrow\psi_\downarrow\psi_\uparrow &= \frac{1}{8}(\Psi^\dagger\sigma_0\Psi)^2 - \frac{1}{8}|\Psi^\dagger\vec{\sigma}\Psi|^2
\end{aligned}
\tag{3.81}$$

Queste due scritte danno luogo a definizioni diverse dei campi di Hubbard-Stratonovich e sono problematiche, a differenza di quelle utilizzate nella sezione 3.1, in quanto non conducono a risultati corretti a livello di campo medio. Nella fattispecie, il valore critico dell'interazione per ottenere magnetizzazione spontanea quando $k_0 = 0$ è in entrambi i casi doppio rispetto al valore corretto trovato nella sezione 3.3.1. Questo stesso risultato viene ricavato nell'articolo [11].

Si conclude pertanto che non tutte le trasformate di Hubbard-Stratonovich conducono ai risultati corretti a livello di campo medio, nonostante la loro correttezza formale. La ragione di questa apparente anomalia è che l'approssimazione di campo medio rappresenta in realtà il primo ordine di uno sviluppo perturbativo formato da un'infinità di termini. Se calcolassimo i valori esatti per la densità e la magnetizzazione tenendo conto di tutti gli ordini perturbativi, otterremmo gli stessi risultati utilizzando le tre trasformate di Hubbard-Stratonovich proposte. Se invece cerchiamo di descrivere il sistema utilizzando un numero limitato di termini dello sviluppo, come avviene per esempio nella RPA, i risultati possono essere differenti. La conseguenza è che sarà necessario scegliere, a seconda del particolare problema posto, la trasformata di Hubbard-Stratonovich che consenta di cogliere la fisica del sistema all'ordine più basso.

Nel caso del sistema che si è analizzato, per mostrare la presenza di una fase magnetizzata, si è utilizzata una decomposizione del termine di interazione che già in sé incorporava la possibilità di avere una magnetizzazione spontanea; infatti, si è introdotto un versore $\hat{\phi}$, precludendo al fatto che può esistere un asse lungo cui la magnetizzazione residua è diversa da 0. L'analisi in definitiva è stata condotta già pensando ad una rottura di simmetria.

Le decomposizioni (3.81), al contrario, non preludono a questa possibilità, in quanto non si specifica l'esistenza di un asse di magnetizzazione spontanea.

Questo è il motivo per cui la trasformata di Hubbard-Stratonovich che abbiamo adottato nella tesi predice il valore corretto dell'interazione critica per avere magnetizzazione spontanea.

Capitolo 4

I modi collettivi

Obiettivo centrale di questo capitolo è l'analisi dei modi collettivi del sistema attraverso lo studio dei poli delle funzioni suscettività $\chi_{\mu\nu}$.

Nella parte iniziale si calcoleranno esplicitamente le funzioni di risposta non interagenti, da inserire successivamente nell'equazione (3.80). Il calcolo verrà effettuato risolvendo l'equazione del moto delle $\chi_{\mu\nu}^0$. Questa parte preliminare sarà importante perchè permetterà di osservare le caratteristiche peculiari dell'accoppiamento spin-orbita. In particolare, noteremo che le eccitazioni elementari del sistema non interagente sono eccitazioni particella-buca di due diverse tipologie: intrabanda ed interbanda. Eccitando cioè il sistema con un momento \vec{q} piccolo, si verificano transizioni di singola particella sia tra stati che appartengono alla stessa banda di elicità sia tra bande diverse. Questo effetto non ha un analogo per un gas di fermioni in assenza di interazione spin-orbita.

Un altro aspetto che metteremo in evidenza sarà l'emergere di correlazioni spin-densità non banali, che daranno contributo all'equazione finale per i modi collettivi del sistema interagente.

Successivamente scriveremo un'equazione approssimata per i modi collettivi in presenza di deboli interazioni repulsive e daremo le espressioni finali delle funzioni di risposta.

Lo scopo della trattazione è effettuare una simulazione numerica per determinare la velocità del suono del modo di *zero sound* assumendo di perturbare il sistema in una direzione arbitraria. La simulazione consiste pertanto nel ricavare la legge

$$c_0 = c_0(g, k_0, \Omega, \theta) \quad (4.1)$$

che esprime la velocità del suono in termini del parametro di spin-orbita, dell'intensità di interazione repulsiva, del parametro Raman e dell'angolo polare θ ,

rappresentante la direzione del momento di perturbazione nel piano (x, y) .

Nella parte finale ci soffermeremo in particolare sullo studio del modo collettivo di densità più semplice, ovvero il modo collettivo di *zero sound* per perturbazione lungo y . Ci limiteremo invece a riassumere brevemente i risultati analitici ricavati per studiare i modi collettivi di spin. L'obiettivo sarà in questo caso valutare l'esistenza di eventuali modi con un gap di energia a $\vec{q} \rightarrow 0$.

4.1 Equazioni del moto delle $\chi_{\mu\nu}^0$

Le funzioni di risposta non interagenti possono essere determinate in due modi differenti. Il primo consiste nel partire dalla definizione (3.62) e ricavare da essa un'equazione di evoluzione temporale per le funzioni di risposta ritardate. Il secondo invece sfrutta direttamente l'espressione (3.58) determinata per mezzo della RPA.

Si è considerato preferibile il primo metodo in quanto evita il problema di calcolare le complicate somme sulle frequenze di Matsubara dovute all'operazione di traccia dell'equazione (3.58). Il calcolo esplicito delle funzioni di risposta ricalca quello effettuato in [19] per il gas di Coulomb.

Se assumiamo di perturbare il sistema a $t' = 0$, sfruttando l'invarianza del sistema per traslazioni temporali, si ha che

$$\chi_{\mu\nu}^0(\vec{q}, t) = -\frac{i}{A\hbar} \Theta(t) \langle [\hat{\sigma}_\mu(\vec{q}, t), \hat{\sigma}_\nu(-\vec{q})] \rangle_0 \quad (4.2)$$

dove $\langle \bullet \rangle_0$ rappresenta il valor medio grancanonico relativo al sistema in assenza di interazione repulsiva, A l'area occupata dal gas e $\hat{\sigma}_\mu(\vec{q}) = \sum_{\vec{k}, \lambda, \lambda'} \hat{C}_\lambda^\dagger(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}) \sigma_\mu^{\lambda\lambda'} \hat{C}_{\lambda'}(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2})$ è l'operatore densità per $\mu = 0$ e l'operatore di magnetizzazione lungo gli assi di riferimento per $\mu = 1, 2, 3$ ¹.

Per semplicità di notazione, il calcolo delle funzioni di risposta non interagenti verrà effettuato con gli indici greci alti. In altre parole, effettuiamo il seguente cambio di notazione: $\chi_{\mu\nu}^0 \rightarrow \chi_0^{\mu\nu}$. Questo cambio di notazione verrà utilizzato anche per scrivere le equazioni per i modi collettivi.

Deriviamo rispetto al tempo in modo da ottenere un'equazione di evoluzione temporale per la $\chi_0^{\mu\nu}$.

$$i\hbar \partial_t \chi_0^{\mu\nu}(\vec{q}, t) = \frac{\delta(t)}{A} \langle \hat{\sigma}^\mu(\vec{q}), \hat{\sigma}^\nu(-\vec{q}) \rangle_0 - \frac{i}{A\hbar} \Theta(t) \langle [[\hat{\sigma}^\mu(\vec{q}, t), \hat{H}_0], \hat{\sigma}^\nu(-\vec{q})] \rangle_0 \quad (4.3)$$

¹Nel seguito utilizzeremo gli indici greci $\lambda, \lambda', \sigma$ e σ' per indicare gli stati di spin \uparrow e \downarrow , gli indici latini r e s per indicare gli stati di elicità $+$ e $-$.

Nel primo termine si è derivata la funzione Θ di Heaviside, nel secondo l'operatore quantistico $\hat{\sigma}^\mu(\vec{q}, t)$; successivamente si è sfruttato il fatto che l'equazione del moto dell'operatore $\hat{\sigma}^\mu$ corrisponde all'equazione di Heisenberg

$$i\hbar\partial_t\hat{\sigma}^\mu(\vec{q}, t) = [\hat{\sigma}^\mu(\vec{q}, t), \hat{H}_0] \quad (4.4)$$

dove $\hat{H}_0 = \sum_{\vec{k}, \lambda, \lambda'} \left(h_{SO}^{\lambda\lambda'} \hat{C}_\lambda^\dagger \hat{C}_{\lambda'} \right) (\vec{k})$ è l'hamiltoniana del sistema non interagente.

Poichè ci interessa valutare le funzioni di risposta nello spazio delle frequenze, effettuiamo la trasformata di Fourier ad ambo i membri dell'equazione (4.3):

$$\begin{aligned} (\hbar\omega + i\eta)\chi_0^{\mu\nu}(\vec{q}, \omega) &= \\ &= \frac{1}{A} \langle [\hat{\sigma}^\mu(\vec{q}), \hat{\sigma}^\nu(-\vec{q})]_0 \rangle - \frac{i}{A\hbar} \int_0^{+\infty} dt \langle [[\hat{\sigma}^\mu(\vec{q}, t), \hat{H}_0], \hat{\sigma}^\nu(-\vec{q})]_0 \rangle e^{i(\omega + i\frac{\eta}{\hbar})t} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Abbiamo aggiunto una piccola parte immaginaria $\frac{\eta}{\hbar}$ alla frequenza ω in modo da rendere finito l'integrale temporale a secondo membro.

In accordo con la trattazione fatta nel capitolo 2, conviene passare nella base di elicità per mezzo della matrice di rotazione

$$U_{\vec{k}}(+, -, \uparrow\downarrow) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{\vec{k}}) & -\sin(\theta_{\vec{k}}) \\ \sin(\theta_{\vec{k}}) & \cos(\theta_{\vec{k}}) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Essa permette di esprimere gli operatori di creazione e distruzione degli stati di spin \uparrow e \downarrow in termini degli operatori di creazione e distruzione degli stati di elicità $+$ e $-$ tramite le relazioni

$$\hat{C}_\lambda(\vec{k}) = \sum_{r=\pm} U_{\lambda r}(\vec{k}) \hat{\gamma}_r(\vec{k}) \quad \hat{C}_\lambda^\dagger(\vec{k}) = \sum_{r=\pm} \hat{\gamma}_r^\dagger(\vec{k}) U_{r\lambda}^T(\vec{k}) \quad (4.7)$$

dove l'apice T rappresenta l'operazione di trasposizione. Queste relazioni semplificano il calcolo della funzione di risposta, in quanto l'hamiltoniana del sistema diventa diagonale negli indici di elicità.

Scriviamo l'hamiltoniana non interagente \hat{H}_0 e gli operatori di densità e di magnetizzazione in termini degli operatori $\hat{\gamma}_r$ e $\hat{\gamma}_r^\dagger$. Si ha

$$\hat{H}_0 = \sum_{\vec{k}, r=\pm} \epsilon_r(\vec{k}) \hat{\gamma}_r^\dagger(\vec{k}) \hat{\gamma}_r(\vec{k}) \quad (4.8)$$

dove $\epsilon_\pm(\vec{k})$ rappresentano le energie degli stati di elicità ricavate nella sezione

2.3. Inoltre,

$$\hat{\sigma}^\mu(\vec{q}) = \sum_{\vec{k}, \lambda, \lambda', r, s} \hat{\gamma}_r^\dagger \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) U_{r\lambda}^T \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \sigma_{\lambda\lambda'}^\mu U_{\lambda's} \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \hat{\gamma}_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \quad (4.9)$$

Le espressioni (4.8) e (4.9) consentono di calcolare i commutatori dell'equazione (4.5).

L'unica quantità che resta da ricavare è perciò l'evoluto temporale dell'operatore $\hat{\sigma}^\mu$. Poichè la dipendenza temporale è racchiusa negli operatori di creazione e distruzione, conviene risolvere preventivamente l'equazione di Heisenberg per gli operatori $\hat{\gamma}_r$ e $\hat{\gamma}_r^\dagger$. Si ha

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \hat{\gamma}_r(\vec{k}, t) &= [\hat{\gamma}_r(\vec{k}, t), \hat{H}_0] = e^{\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} [\hat{\gamma}_r(\vec{k}), \hat{H}_0] e^{-\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} \\ &= \sum_{\vec{k}', s} \epsilon_s(\vec{k}') e^{\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} [\hat{\gamma}_r(\vec{k}), \hat{\gamma}_s^\dagger(\vec{k}') \hat{\gamma}_s(\vec{k}')] e^{-\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} \\ &= \sum_{\vec{k}', s} \epsilon_s(\vec{k}') e^{\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} \{ \hat{\gamma}_r(\vec{k}), \hat{\gamma}_s^\dagger(\vec{k}') \} \hat{\gamma}_s(\vec{k}') e^{-\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} = \epsilon_r(\vec{k}) \hat{\gamma}_r(\vec{k}, t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

dove $\hat{\gamma}_r(\vec{k}, t)$ è l'evoluto temporale al tempo t dell'operatore $\hat{\gamma}_r$. In queste uguaglianze si sono sfruttate le proprietà di anticommutazione degli operatori $\hat{\gamma}_r$ e $\hat{\gamma}_r^\dagger$, date da

$$\{ \hat{\gamma}_r(\vec{k}), \hat{\gamma}_s^\dagger(\vec{k}') \} = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{r, s} \quad \{ \hat{\gamma}_r(\vec{k}), \hat{\gamma}_s(\vec{k}') \} = 0 \quad (4.11)$$

In definitiva, l'equazione di evoluzione temporale per l'operatore $\hat{\gamma}_r$ diventa

$$i\hbar \partial_t \hat{\gamma}_r(\vec{k}, t) = \epsilon_r(\vec{k}) \hat{\gamma}_r(\vec{k}, t) \quad (4.12)$$

che ha come soluzione $\hat{\gamma}_r(\vec{k}, t) = \hat{\gamma}_r(\vec{k}) e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon_r(\vec{k}) t}$. Da essa ricaviamo anche l'evoluzione temporale dell'operatore aggiunto: $\hat{\gamma}_r^\dagger(\vec{k}, t) = \hat{\gamma}_r^\dagger(\vec{k}) e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon_r(\vec{k}) t}$.

Queste leggi consentono di scrivere l'evoluto temporale dell'operatore $\hat{\sigma}^\mu$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^\mu(\vec{q}, t) &= \sum_{\vec{k}, \lambda, \lambda', r, s} \hat{\gamma}_r^\dagger \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) U_{r\lambda}^T \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \\ &\quad \sigma_{\lambda\lambda'}^\mu U_{\lambda's} \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \hat{\gamma}_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) e^{\frac{i}{\hbar} (\epsilon_r(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}) - \epsilon_s(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2})) t} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Tramite le (4.8), (4.9) e (4.13) è possibile calcolare i valori medi della (4.5). Gli elementi essenziali per il calcolo sono le proprietà di anticommutazione degli operatori di elicità e i seguenti valori di aspettazione:

$$\langle \hat{\gamma}_r^\dagger(\vec{k}) \hat{\gamma}_s(\vec{k}) \rangle_0 = f(\epsilon_r(\vec{k})) \delta_{rs} \quad (4.14)$$

dove f è la distribuzione di Fermi alla temperatura T . E' importante notare che $\langle \hat{\gamma}_r^\dagger(\vec{k}) \hat{\gamma}_s(\vec{k}) \rangle_0 \propto \delta_{rs}$. Questo fatto si verifica perchè l'hamiltoniana del sistema non interagente è diagonale negli indici di elicità; perciò, il valore medio di una coppia di operatori di creazione e distruzione è diversa da 0 solo se gli stati in cui una particella viene creata e distrutta coincidono. In tal caso, il valor medio restituisce, come noto, l'occupazione dello stato $|\vec{k}, r\rangle$.

I calcoli espliciti per determinare i valori medi dell'equazione (4.5) sono riportati in Appendice C. Il risultato finale per la funzione di risposta del sistema non interagente è il seguente:

$$\chi_0^{\mu\nu}(\vec{q}, \omega) = \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}, r, s} F_{rs}^{\mu\nu} \frac{f\left(\epsilon_r\left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}\right)\right) - f\left(\epsilon_s\left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}\right)\right)}{\hbar\omega + i\eta - \left(\epsilon_r\left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}\right) - \epsilon_s\left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}\right)\right)} \quad (4.15)$$

dove $F^{\mu\nu}$ è un tensore definito dalla relazione

$$F_{rs}^{\mu\nu} = \sum_{\lambda, \lambda', \sigma, \sigma'} \left[U_{r\lambda}^T\left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}\right) \sigma_{\lambda\lambda'}^\mu U_{\lambda's} \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}\right) U_{s\sigma}^T\left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}\right) \sigma_{\sigma\sigma'}^\nu U_{\sigma'r} \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}\right) \right] \quad (4.16)$$

Introducendo i proiettori sugli stati di elicità

$$(P_r)_{\alpha\beta}(\vec{k}) = U_{\alpha r}(\vec{k}) U_{r\beta}^T(\vec{k}) \quad (4.17)$$

possiamo scrivere il tensore $F^{\mu\nu}$ in forma più compatta:

$$F_{rs}^{\mu\nu} = \text{Tr} \left(P_r \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \sigma^\mu P_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \sigma^\nu \right) \quad (4.18)$$

4.2 Eccitazioni elementari del sistema non interagente

Le equazioni (4.15)-(4.18) danno le informazioni necessarie per comprendere le proprietà dinamiche del sistema non interagente.

Anzitutto, notiamo che l'espressione delle funzioni di risposta coincide formalmente con la funzione di Lindhard trovata in [19] per il gas di Coulomb. L'interpretazione fisica è immediata: se si applica una perturbazione di momento \vec{q} ed energia $\hbar\omega$, il sistema risponde con eccitazioni elementari date da transizioni particella-buca. In altre parole, una particella che risiede in uno stato di mo-

mento $\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}$ può transire ad uno stato di momento $\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}$, purchè esso non sia già occupato.

Queste conclusioni si ricavano matematicamente dal fatto che le energie delle eccitazioni elementari del sistema corrispondono ai poli delle funzioni di risposta. Poichè i poli corrispondono alle energie

$$\hbar\omega = \epsilon_r \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) - \epsilon_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \quad (4.19)$$

deduciamo che le uniche eccitazioni che il sistema può avere sono eccitazioni di singola particella fra due stati generici $|\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}, s\rangle$ e $|\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}, r\rangle$, a patto che

$$f \left(\epsilon_r \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \right) - f \left(\epsilon_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \right) \neq 0 \quad (4.20)$$

Ciò avviene se uno dei due stati è occupato e l'altro è libero.

Queste proprietà sono analoghe a quelle del gas di Coulomb. La novità essenziale consiste nella presenza del tensore $F_{rs}^{\mu\nu}$: a causa della dipendenza dagli indici di elicità, le transizioni particella-buca possono verificarsi sia all'interno della stessa banda di elicità quando $s = r$ (transizioni intrabanda), sia tra bande diverse quando $s = -r$ (transizioni interbanda). Queste ultime tuttavia potranno verificarsi solo se l'energia ceduta al sistema è maggiore del gap Ω che separa le due bande. In definitiva le due tipologie di transizioni permesse saranno distinguibili, differentemente da quanto accade per i fermioni liberi, in quanto le bande di elicità non sono degeneri.

Inoltre, poichè in generale il tensore $F^{\mu\nu}$ non è diagonale, si possono avere correlazioni spin-densità oppure spin-spin diverse da 0.

Quest'ultimo fatto non ha un analogo per un sistema di fermioni libero. Se infatti consideriamo il caso limite $\Omega = 0$ e $k_0 = 0$, gli stati di elicità e di spin coincidono e $U_{\lambda r}(\vec{k}) = \delta_{\lambda r}$; pertanto, i proiettori di elicità sono dati da

$$(P_r(\vec{k}))_{\alpha\beta} = U_{\alpha r}^T(\vec{k}) U_{r\beta}(\vec{k}) = \delta_{\alpha r} \delta_{r\beta} \quad (4.21)$$

e non dipendono da \vec{k} .

Da questa relazione ricaviamo il tensore $F^{\mu\nu}$:

$$F_{rs}^{\mu\nu} = \sum_{\lambda, \lambda', \sigma, \sigma'} [(P_r)_{\lambda\lambda'} \sigma_{\lambda'\sigma}^\mu (P_s)_{\sigma\sigma'} \sigma_{\sigma'\lambda}^\nu] = \sigma_{rs}^\mu \sigma_{sr}^\nu \quad (4.22)$$

Questo risultato consente di esplicitare i tensori intrabanda $F_{ss}^{\mu\nu}$ ed interbanda $F_{s-s}^{\mu\nu}$ ²:

²In queste espressioni esplicitiamo solamente le entrate diverse da 0 dei tensori $F_{rs}^{\mu\nu}$.

$$F_{ss}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad F_{s-s}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Le componenti diagonali dei due tensori esprimono le autocorrelazioni dei campi di densità e di magnetizzazione, mentre le entrate fuori diagonale le funzioni di correlazione fra campi distinti. Si nota perciò che non sono presenti correlazioni spin-densità oppure spin-spin in direzioni ortogonali diverse da 0.

Mostreremo che l'accoppiamento spin-orbita è in grado di produrre funzioni di correlazione diverse da 0 calcolando i tensori $F^{\mu\nu}$ quando k_0 e Ω sono entrambi accesi. Ricordiamo infatti che solo con $\Omega \neq 0$ si possono ottenere effetti collettivi non banali, come mostrato nella sezione 2.2.

La presenza di correlazioni fra campi distinti e la possibilità di avere transizioni interbanda con un gap di energia determineranno le principali differenze fra i modi collettivi del sistema in presenza ed in assenza di interazione spin-orbita.

4.3 I tensori di correlazione in assenza di interazione spin-orbita

Come si è visto nella precedente sezione, le proprietà di correlazione del sistema non interagente sono espresse dai tensori $F^{\mu\nu}$. In questo paragrafo, si vuole dare un'espressione dei tensori di correlazione quando $\vec{q} \rightarrow 0$, mostrando come essi introducano delle correlazioni spin-densità e spin-spin inedite nel caso di fermioni liberi.

Separiamo anzitutto le funzioni di risposta del sistema in una componente intrabanda ed una componente interbanda:

$$\chi_0^{\mu\nu}(\vec{q}, \omega) = \chi_{intra}^{\mu\nu}(\vec{q}, \omega) + \chi_{inter}^{\mu\nu}(\vec{q}, \omega) \quad (4.24)$$

Prendendo il limite $T \rightarrow 0$ dell'equazione (4.15), si ha che

$$\chi_{intra}^{\mu\nu}(\vec{q}, \omega) = \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}, s=\pm} F_{ss}^{\mu\nu} \frac{\Theta(\mu - \epsilon_s(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2})) - \Theta(\mu - \epsilon_s(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}))}{\hbar\omega + i\eta - (\epsilon_s(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}) - \epsilon_s(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}))} \quad (4.25)$$

$$\chi_{inter}^{\mu\nu}(\vec{q}, \omega) = \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}, s=\pm} F_{s-s}^{\mu\nu} \frac{\Theta(\mu - \epsilon_s(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2})) - \Theta(\mu - \epsilon_{-s}(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}))}{\hbar\omega + i\eta - (\epsilon_s(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}) - \epsilon_{-s}(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}))} \quad (4.26)$$

Il nostro obiettivo finale è descrivere i modi collettivi del sistema a piccole perturbazioni esterne di momento \vec{q} . Occorre pertanto espandere numeratore e denominatore delle funzioni di risposta intrabanda ed interbanda all'ordine più basso in \vec{q} , cioè l'ordine lineare. Ciò comporta la necessità di espandere sia la parte matriciale espressa dai tensori $F^{\mu\nu}$, sia le funzioni di Lindhard³.

Si nota allora un fatto importante: se consideriamo le transizioni intrabanda, notiamo che a $\vec{q} \rightarrow 0$ il numeratore della funzione di Lindhard tende ad annullarsi. Pertanto, per ottenere l'ordine dominante in \vec{q} della funzione di risposta, basterà valutare il tensore di correlazione $F_{ss}^{\mu\nu}$ per $\vec{q} = 0$, in quanto la funzione di Lindhard è già lineare in \vec{q} .

Viceversa, se consideriamo transizioni interbanda, il numeratore della funzione di Lindhard può essere diverso da 0 per $\vec{q} \rightarrow 0$, in quanto stati ad uguale \vec{k} delle due bande di elicità non sono degeneri. In questo caso occorrerà espandere al primo ordine sia la funzione di Lindhard sia il tensore di correlazione.

Mostriamolo esplicitamente scrivendo il tensore $F^{\mu\nu}$ come somma di un contributo di ordine 0 e di un contributo di ordine 1 in \vec{q} :

$$F_{rs}^{\mu\nu} = F_{0,rs}^{\mu\nu} + F_{1,rs}^{\mu\nu} \quad (4.27)$$

Espandiamo ora i termini dipendenti da \vec{q} delle funzioni di Lindhard intrabanda ($L_{intra}(\vec{k}, \vec{q}, \omega)$) ed interbanda ($L_{inter}(\vec{k}, \vec{q}, \omega)$). Si ottengono i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} L_{intra}(\vec{k}, \vec{q}, \omega) &= \frac{\Theta(\mu - \epsilon_s(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2})) - \Theta(\mu - \epsilon_s(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}))}{\hbar\omega + i\eta - (\epsilon_s(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}) - \epsilon_s(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}))} \\ &\approx - \frac{\delta(\mu - \epsilon_s(\vec{k})) \nabla_{\vec{k}} \epsilon_s(\vec{k}) \cdot \vec{q}}{\hbar\omega + i\eta - \nabla_{\vec{k}} \epsilon_s(\vec{k}) \cdot \vec{q}} = L_{intra}^{(1)}(\vec{k}, \vec{q}, \omega) \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} L_{inter}(\vec{k}, \vec{q}, \omega) &= \frac{\Theta(\mu - \epsilon_s(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2})) - \Theta(\mu - \epsilon_{-s}(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}))}{\hbar\omega + i\eta - (\epsilon_s(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}) - \epsilon_{-s}(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}))} \\ &\approx \frac{\Theta(\mu - \epsilon_s(\vec{k})) - \Theta(\mu - \epsilon_{-s}(\vec{k}))}{\hbar\omega + i\eta - (\epsilon_s(\vec{k}) - \epsilon_{-s}(\vec{k}))} + \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{[\delta(\mu - \epsilon_s(\vec{k})) \nabla_{\vec{k}} \epsilon_s(\vec{k}) + \delta(\mu - \epsilon_{-s}(\vec{k})) \nabla_{\vec{k}} \epsilon_{-s}(\vec{k})] \cdot \vec{q}}{\hbar\omega + i\eta - (\epsilon_s(\vec{k}) - \epsilon_{-s}(\vec{k})) - \frac{1}{2} (\nabla_{\vec{k}} \epsilon_s(\vec{k}) + \nabla_{\vec{k}} \epsilon_{-s}(\vec{k})) \cdot \vec{q}} \\ &= L_{inter}^{(0)}(\vec{k}, \vec{q}, \omega) + L_{inter}^{(1)}(\vec{k}, \vec{q}, \omega) \end{aligned} \quad (4.29)$$

³Per rendere la trattazione più fluida, d'ora in poi utilizzeremo (impropriamente) il termine "funzione di Lindhard" per indicare le funzioni $L(\vec{k}, \vec{q}, \omega)$ che non contengono la dipendenza dagli indici di spin μ e ν nelle equazioni (4.25) e (4.26).

Come si nota, la funzione di Lindhard relativa alle transizioni interbanda contiene anche un termine di ordine 0 in \vec{q} , mentre la funzione di Lindhard intrabanda corrisponde a quella del gas di Coulomb al primo ordine in \vec{q} .

Le funzioni di risposta sono quindi date da

$$\chi_{intra}^{\mu\nu}(\vec{q}, \omega) \approx \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}, s=\pm} F_{0,ss}^{\mu\nu} L_{intra}^{(1)}(\vec{k}, \vec{q}, \omega) \quad (4.30)$$

e

$$\begin{aligned} \chi_{inter}^{\mu\nu}(\vec{q}, \omega) \approx \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}, s=\pm} [F_{0,s-s}^{\mu\nu} L_{inter}^{(0)}(\vec{k}, \vec{q}, \omega) + F_{0,s-s}^{\mu\nu} L_{inter}^{(1)}(\vec{k}, \vec{q}, \omega) + \\ F_{1,s-s}^{\mu\nu} L_{inter}^{(0)}(\vec{k}, \vec{q}, \omega)] \end{aligned} \quad (4.31)$$

In conclusione, la presenza di transizioni interbanda complica notevolmente lo studio delle funzioni di risposta e di conseguenza dei modi collettivi del sistema interagente. Esploreremo dei casi in cui si possono avere delle semplificazioni, analizzando la struttura dei tensori $F_0^{\mu\nu}$ e $F_1^{\mu\nu}$.

Partiamo dal calcolo dei tensori di correlazione di ordine 0. Essi si ottengono dall'equazione (4.18), imponendo che $\vec{q} = 0$:

$$F_{0,rs}^{\mu\nu} = \text{Tr} \left(P_r(\vec{k}) \sigma^\mu P_s(\vec{k}) \sigma^\nu \right) \quad (4.32)$$

Conviene pertanto ricavare i proiettori sugli stati di elicità P_\pm . Sapendo che

$$(P_\pm(\vec{k}))_{\alpha\beta} = U_{\alpha\pm}(\vec{k}) U_{\pm\beta}^T(\vec{k}) \quad (4.33)$$

si ottengono le seguenti matrici:

$$P_s(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \frac{1+s \cos 2\theta_{\vec{k}}}{2} & -\frac{s \sin 2\theta_{\vec{k}}}{2} \\ -\frac{s \sin 2\theta_{\vec{k}}}{2} & \frac{1-s \cos 2\theta_{\vec{k}}}{2} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Quest'espressione per i proiettori P_\pm , inserita nella (4.32), porge i tensori interbanda (per $r = -s$) ed intrabanda (per $r = s$) all'ordine 0 in \vec{q} . Le espressioni finali per i due tensori sono:

$$F_{0,ss}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & -s \sin 2\theta_{\vec{k}} & 0 & s \cos 2\theta_{\vec{k}} \\ -s \sin 2\theta_{\vec{k}} & \sin^2(2\theta_{\vec{k}}) & 0 & -\frac{1}{2} \sin 4\theta_{\vec{k}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s \cos 2\theta_{\vec{k}} & -\frac{1}{2} \sin 4\theta_{\vec{k}} & 0 & \cos^2(2\theta_{\vec{k}}) \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

$$F_{0,s-s}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\theta_{\vec{k}}) & -is \cos 2\theta_{\vec{k}} & \frac{1}{2} \sin 4\theta_{\vec{k}} \\ 0 & -is \cos 2\theta_{\vec{k}} & 1 & -is \sin 2\theta_{\vec{k}} \\ 0 & \frac{1}{2} \sin 4\theta_{\vec{k}} & is \sin 2\theta_{\vec{k}} & \sin^2(2\theta_{\vec{k}}) \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Come si nota, la struttura dei due tensori di correlazione è cambiata rispetto al caso di fermioni liberi, in quanto appaiono dei termini diversi da 0 nelle entrate fuori diagonale. Pertanto, l'azione combinata dell'interazione spin-orbita e del campo di Zeemann determina delle correlazioni non banali densità-spin e spin-spin. Ciò vale sia per quanto riguarda le transizioni interbanda che intrabanda. Inoltre notiamo che le componenti della prima riga e della prima colonna del tensore interbanda sono nulle. Ciò significa che, se studiamo la risposta in densità del sistema non interagente, contribuisce solamente il terzo addendo della (4.31) alla funzione di risposta interbanda. Abbiamo perciò una prima semplificazione, che sarà utile nello studio dei modi collettivi di densità.

Per un'analisi completa delle funzioni di risposta è necessario considerare anche il termine di primo ordine nello sviluppo del tensore interbanda. Il calcolo esplicito si esegue partendo dalla (4.18) ed espandendo all'ordine lineare in \vec{q} . Il risultato è che

$$F_{1,s-s}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\text{Tr}(\nabla_{\vec{k}} P_s(\vec{k}) \sigma^\mu P_{-s}(\vec{k}) \sigma^\nu) - \text{Tr}(P_s(\vec{k}) \sigma^\mu \nabla_{\vec{k}} P_{-s}(\vec{k}) \sigma^\nu) \right] \cdot \vec{q} \quad (4.37)$$

Ora notiamo che il proiettore di elicità P_r dipende da \vec{k} , per effetto della (4.17), solo tramite l'angolo $\theta_{\vec{k}}$. Perciò vale la seguente proprietà:

$$\nabla_{\vec{k}} P_s(\vec{k}) = \partial_{\theta_{\vec{k}}} P_s(\vec{k}) \nabla_{\vec{k}} \theta_{\vec{k}} \quad (4.38)$$

Poichè l'angolo $\theta_{\vec{k}}$ dipende solo dalla componente x del momento, risulta chiaro che

$$\nabla_{\vec{k}} \theta_{\vec{k}} = (\partial_{k_x} \theta_{\vec{k}}) \vec{e}_x \quad (4.39)$$

dove \vec{e}_x rappresenta un versore diretto lungo l'asse x . Da ciò si deduce che

$$F_{1,s-s}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\text{Tr}(\partial_{\theta_{\vec{k}}} P_s(\vec{k}) \sigma^\mu P_{-s}(\vec{k}) \sigma^\nu) - \text{Tr}(P_s(\vec{k}) \sigma^\mu \partial_{\theta_{\vec{k}}} P_{-s}(\vec{k}) \sigma^\nu) \right] \partial_{k_x} \theta_{\vec{k}} (\vec{q} \cdot \vec{e}_x) \quad (4.40)$$

Si vede quindi che il tensore interbanda $F_{1,s-s}^{\mu\nu}$ dà contributo soltanto se la perturbazione esterna è parallela all'asse x . Questo risultato mostra che il sistema può presentare dei modi collettivi anisotropi. In effetti, a perturbazioni che agi-

scono in direzioni differenti corrispondono diverse espressioni delle funzioni di risposta.

Se in particolare ci interessa la risposta in densità, è facile dedurre che una perturbazione lungo x produce transizioni particella-buca di entrambe le tipologie descritte; viceversa, se la perturbazione agisce in direzione y , contribuiscono soltanto le transizioni intrabanda, in quanto le componenti di densità dei tensori interbanda all'ordine 0 e 1 in \vec{q} sono nulle.

In questa tesi ci limitiamo a discutere in dettaglio solamente il caso più semplice, cioè il modo collettivo di *zero sound* e la corrispondente velocità del suono per perturbazioni lungo y . Un'analisi più approfondita dovrebbe mostrare che la velocità del suono dipende dall'angolo formato con l'asse x , come conseguenza dell'anisotropia introdotta dall'interazione spin-orbita.

Il nostro obiettivo sarà inoltre mostrare come le correlazioni densità-spin possano modificare la velocità del suono rispetto al caso in cui l'accoppiamento spin-orbita è assente.

Se scegliamo perturbazioni lungo y e studiamo la risposta in densità, come detto, le transizioni interbanda non sono visibili. Un modo di osservarle, come si può notare guardando le espressioni dei tensori $F_0^{\mu\nu}$, consiste nell'analizzare eventuali modi collettivi di spin. Infatti, le componenti del tensore interbanda che accoppiano diverse componenti di spin sono non nulle. L'effetto inedito che si verificherà come conseguenza di queste transizioni sarà la presenza di tre modi collettivi di spin massivi. Ciò significa che le corrispondenti leggi di dispersione saranno nella forma [16]

$$\omega = \Delta_i + s_i |\vec{q}| \quad (4.41)$$

con $i = x, y, z$. Scriveremo delle equazioni che permettano di ricavare il gap di questi modi.

4.4 Equazioni per i modi collettivi

Nella sezione 3.5, si è puntualizzato che le leggi di dispersione dei modi collettivi di densità e spin del sistema in presenza di interazione repulsiva si ricavano come poli della funzione suscettività $\chi^{\mu\nu}$.

In questa sezione, si vogliono scrivere delle equazioni approssimate per i modi collettivi del sistema assumendo che l'interazione fra le coppie di atomi sia debole.

Cominciamo col descrivere i modi collettivi di densità, determinando la funzione di risposta $\chi^{00}(\vec{q}, \omega)$. Come già fatto nella sezione 4.1, conviene effettuare

i seguenti cambiamenti di notazione: $\chi_{\mu\nu} \rightarrow \chi^{\mu\nu}$ e $\chi_{\mu\nu}^0 \rightarrow \chi_0^{\mu\nu}$. Partendo dall'espressione (3.80), la funzione di risposta densità-densità si ricava tramite la relazione

$$\chi^{00}(\vec{q}, \omega) = \chi_0^{0\lambda}(\vec{q}, \omega) \left[\frac{1}{\sigma_0 - \frac{g}{2}\eta\chi_0(\vec{q}, \omega)} \right]^{\lambda 0} \quad (4.42)$$

dove $\eta = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ e $\sigma_0 = \text{diag}(+1, +1, +1, +1)$.

Introducendo allora la matrice $\mathbb{A}(\vec{q}, \omega) = \sigma_0 - \frac{g}{2}\eta\chi_0(\vec{q}, \omega)$, si avrà che

$$\chi^{00}(\vec{q}, \omega) = \frac{1}{\det \mathbb{A}(\vec{q}, \omega)} [\chi_0^{0\lambda}(\vec{q}, \omega) \mathbb{A}_C^{0\lambda}(\vec{q}, \omega)] = \frac{(-1)^\lambda}{\det \mathbb{A}(\vec{q}, \omega)} [\chi_0^{0\lambda} \det \mathbb{A}^{0\lambda}] (\vec{q}, \omega) \quad (4.43)$$

dove \mathbb{A}_C è la matrice dei complementi di \mathbb{A} e $\det \mathbb{A}^{\mu\nu}$ è il determinante della matrice che si ottiene da \mathbb{A} rimuovendo la μ -esima riga e la ν -esima colonna.

Scriviamo esplicitamente la matrice \mathbb{A} e calcoliamone il determinante, esprimendolo in termini dei determinanti delle matrici $\mathbb{A}^{\mu\nu}$. Si ha

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{g}{2}\chi^{00} & \frac{g}{2}\chi^{01} & \frac{g}{2}\chi^{02} & \frac{g}{2}\chi^{03} \\ -\frac{g}{2}\chi^{10} & 1 - \frac{g}{2}\chi^{11} & -\frac{g}{2}\chi^{12} & -\frac{g}{2}\chi^{13} \\ -\frac{g}{2}\chi^{20} & -\frac{g}{2}\chi^{21} & 1 - \frac{g}{2}\chi^{22} & -\frac{g}{2}\chi^{23} \\ -\frac{g}{2}\chi^{30} & -\frac{g}{2}\chi^{31} & -\frac{g}{2}\chi^{32} & 1 - \frac{g}{2}\chi^{33} \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

da cui si deduce che

$$\det \mathbb{A} = \left(1 + \frac{g}{2}\chi^{00}\right) \det \mathbb{A}^{00} - \frac{g}{2}\chi^{01} \det \mathbb{A}^{01} + \frac{g}{2}\chi^{02} \det \mathbb{A}^{02} - \frac{g}{2}\chi^{03} \det \mathbb{A}^{03} \quad (4.45)$$

Sviluppamo ora il numeratore e il denominatore della (4.43). Si ha che

$$\begin{aligned} \chi^{00}(\vec{q}, \omega) &= \frac{\chi_0^{00} \det \mathbb{A}^{00} - \chi_0^{01} \det \mathbb{A}^{01} + \chi_0^{02} \det \mathbb{A}^{02} - \chi_0^{03} \det \mathbb{A}^{03}}{\left(1 + \frac{g}{2}\chi_0^{00}\right) \det \mathbb{A}^{00} - \frac{g}{2}\chi_0^{01} \det \mathbb{A}^{01} + \frac{g}{2}\chi_0^{02} \det \mathbb{A}^{02} - \frac{g}{2}\chi_0^{03} \det \mathbb{A}^{03}} \\ &= \frac{2}{g} \left\{ 1 - \frac{\det \mathbb{A}^{00}(\vec{q}, \omega)}{\det \mathbb{A}(\vec{q}, \omega)} \right\} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Nel passare alla seconda uguaglianza si è moltiplicato e diviso per $\frac{g}{2}$ e si è sommato e sottratto a numeratore il fattore additivo $\det \mathbb{A}^{00}$ in modo da ricostruire il determinante di \mathbb{A} .

Da quest'equazione si vede che i poli della funzione di risposta sono determinati dalla condizione

$$\frac{\det \mathbb{A}}{\det \mathbb{A}^{00}} = 0 \quad (4.47)$$

da cui segue che

$$\left(1 + \frac{g}{2}\chi_0^{00}\right) - \frac{g}{2}\chi_0^{01}\frac{\det \mathbb{A}^{01}}{\det \mathbb{A}^{00}} + \frac{g}{2}\chi_0^{02}\frac{\det \mathbb{A}^{02}}{\det \mathbb{A}^{00}} - \frac{g}{2}\chi_0^{03}\frac{\det \mathbb{A}^{03}}{\det \mathbb{A}^{00}} = 0 \quad (4.48)$$

Da questo risultato ricaviamo un'importante conseguenza. Notiamo che il primo addendo è lo stesso che compare nell'equazione per il modo di *zero sound* in assenza di interazione spin-orbita. I termini aggiuntivi contengono le funzioni di risposta densità-spin, che sono diverse da 0 solo nel caso in cui l'accoppiamento spin-orbita è presente.

In definitiva, la presenza dell'interazione spin-orbita introduce una correzione nell'equazione dei modi collettivi di densità. Per calcolarla esplicitamente, assumiamo che l'interazione repulsiva sia debole ed approssimiamo l'equazione (4.48) all'ordine minimo in g che consenta di osservare l'effetto delle correlazioni.

Ciò significa che approssimiamo $\det \mathbb{A}^{0\lambda}$ all'ordine più basso in g . I risultati sono i seguenti:

$$\begin{aligned} \det \mathbb{A}^{00} &= 1 + \mathcal{O}(g) & \det \mathbb{A}^{01} &= \frac{g}{2}\chi_0^{10} + \mathcal{O}(g^2) \\ \det \mathbb{A}^{02} &= -\frac{g}{2}\chi_0^{20} + \mathcal{O}(g^2) & \det \mathbb{A}^{03} &= \frac{g}{2}\chi_0^{30} + \mathcal{O}(g^2) \end{aligned} \quad (4.49)$$

L'equazione per i modi di densità diventa perciò

$$\left(1 + \frac{g}{2}\chi_0^{00}\right) - \frac{g^2}{4}\chi_0^{01}\chi_0^{10} - \frac{g^2}{4}\chi_0^{02}\chi_0^{20} - \frac{g^2}{4}\chi_0^{03}\chi_0^{30} + \mathcal{O}(g^3) = 0 \quad (4.50)$$

In conclusione, l'interazione spin-orbita introduce una correzione quadratica in g , in cui contribuiscono correlazioni di coppie di campi. Ad ordini più elevati appariranno correlazioni più complesse con un numero di campi corrispondenti alla potenza di g .

Notiamo che l'approssimazione fatta corrisponde ad aver effettuato uno sviluppo perturbativo in g trascurando i diagrammi di Feynman a più di due vertici. Questa procedura approssima il risultato esatto solo per i modi collettivi nello stato paramagnetico; nello stato ferromagnetico infatti non è possibile eseguire il limite $g \rightarrow 0$ e danno contributo anche le correlazioni di ordine superiore al secondo.

Risultati analoghi si ricavano anche per le funzioni di risposta di spin χ^{jj} , dove $j = 1, 2, 3$. Ripercorrendo esattamente la stessa procedura effettuata per ricavare l'equazione dei modi collettivi di densità, si ottiene il seguente set di equazioni per i modi collettivi di spin:

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{g}{2}\chi_0^{11}\right) - \frac{g^2}{4}\chi_0^{10}\chi_0^{01} - \frac{g^2}{4}\chi_0^{12}\chi_0^{21} - \frac{g^2}{4}\chi_0^{13}\chi_0^{31} + \mathcal{O}(g^3) &= 0 \\
\left(1 - \frac{g}{2}\chi_0^{22}\right) - \frac{g^2}{4}\chi_0^{20}\chi_0^{02} - \frac{g^2}{4}\chi_0^{21}\chi_0^{12} - \frac{g^2}{4}\chi_0^{23}\chi_0^{32} + \mathcal{O}(g^3) &= 0 \\
\left(1 - \frac{g}{2}\chi_0^{33}\right) - \frac{g^2}{4}\chi_0^{30}\chi_0^{03} - \frac{g^2}{4}\chi_0^{31}\chi_0^{13} - \frac{g^2}{4}\chi_0^{32}\chi_0^{23} + \mathcal{O}(g^3) &= 0
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Il nostro obiettivo è utilizzare l'equazione (4.48) per determinare la velocità del modo di *zero sound* prodotto da una perturbazione \vec{q}/\vec{e}_y e il set di equazioni (4.51) per ricavare i gap dei modi collettivi di spin. Ciò significa che è necessario conoscere le funzioni di risposta

$$\chi_{intra}^{0\mu}(q\vec{e}_y, \omega) \text{ e } \chi_{inter}^{ij}(0, \Delta) \tag{4.52}$$

Se infatti consideriamo la risposta in densità per perturbazioni lungo y , danno contributo solo le transizioni intrabanda, perciò le $\chi_{intra}^{0\mu}$ sono sufficienti per risolvere le equazioni per i modi collettivi di densità. Contemporaneamente, se cerchiamo i gap relativi ai modi collettivi di spin, danno contributo solo le funzioni di risposta spin-spin interbanda, dovendo le funzioni χ_{intra}^{ij} annullarsi a $\vec{q} \rightarrow 0$. In particolare, dà contributo alla funzione di risposta solamente il primo addendo della (4.31), essendo l'unico termine non nullo per $\vec{q} \rightarrow 0$.

Calcoliamo esplicitamente la funzione di risposta densità-densità partendo dall'equazione (4.30). Mettendo in evidenza la dipendenza da \vec{k} del tensore di correlazione $F_{0,rs}^{\mu\nu}$, si ha che

$$\begin{aligned}
\chi_{intra}^{0\mu}(q\vec{e}_y, \omega) &= -\frac{1}{A} \sum_{\vec{k}, s=\pm} F_{0,ss}^{0\mu}(\vec{k}) \frac{\delta(\mu - \epsilon_s(\vec{k}))(q\vec{e}_y \cdot \nabla_{\vec{k}} \epsilon_s(\vec{k}))}{\hbar\omega + i\eta - q\vec{e}_y \cdot \nabla_{\vec{k}} \epsilon_s(\vec{k})} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \sum_{s=\pm} F_{0,ss}^{0\mu}(\vec{k}) \frac{\delta(\mu - \epsilon_s(\vec{k}))q\partial_{k_y} \epsilon_s(\vec{k})}{\hbar\omega + i\eta - q\partial_{k_y} \epsilon_s(\vec{k})}
\end{aligned} \tag{4.53}$$

dove sappiamo che $\epsilon_{\pm}(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta}{2} - \frac{\hbar^2 k_0}{m} k_x\right)^2 + \frac{\Omega^2}{4}}$. Nel passare dalla prima alla seconda uguaglianza si è effettuata la sostituzione $\sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{A}{(2\pi)^2} \int d^2k$. Introducendo la velocità del suono zero $c_0 = \frac{\omega}{q}$ e mandando η a 0, si ottiene la seguente equazione:

$$\chi_{intra}^{0\mu}(c_0, \vec{e}_y) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \sum_{s=\pm} F_{0,ss}^{0\mu}(\vec{k}) \frac{\delta(\mu - \epsilon_s(\vec{k}))k_y}{\frac{m}{\hbar}c_0 - k_y} \tag{4.54}$$

dove $F_{0,ss}^{\mu\nu}$ ha la struttura (4.35) e θ_k è definito dalle relazioni (2.21)-(2.23). Si è esplicitata la dipendenza da \vec{e}_y per sottolineare che la (4.54) è valida solo se la perturbazione è lungo y .

Effettuiamo ora i seguenti riscalamanti: $x = \frac{\hbar k_x}{\sqrt{2m|\mu|}}$, $y = \frac{\hbar k_y}{\sqrt{2m|\mu|}}$, $\bar{e}_s = \frac{\epsilon_s}{|\mu|}$, $\bar{c}_0 = \sqrt{\frac{m}{2|\mu|}}c_0$, $\bar{\Omega} = \frac{\Omega}{|\mu|}$, $\bar{k}_0 = \frac{\hbar k_0}{\sqrt{2m|\mu|}}$, $\bar{\delta} = \frac{\delta}{|\mu|}$. In altre parole, scegliamo il modulo del potenziale chimico come unità di misura di energia.

Effettuando le dovute sostituzioni si ottiene che

$$\chi_{intra}^{0\mu}(\bar{c}_0, \vec{e}_y) = -\frac{m}{2\pi^2\hbar^2} \int dx dy \sum_{s=\pm} F_{0,ss}^{0\mu}(x) \frac{\delta(\text{sign}(\mu) - \bar{e}_s(x, y))y}{\bar{c}_0 - y} \quad (4.55)$$

dove $\epsilon_{\pm}(x, y) = x^2 + y^2 \pm \sqrt{(\bar{\delta} - \bar{k}_0 x)^2 + \bar{\Omega}^2}$ e $F_{0,ss}^{0\mu}(x)$ è il tensore di correlazione intrabanda ottenuto sostituendo \vec{k} con le nuove variabili x e y . Ciò significa che si esprime l'angolo di rotazione $\theta_{\vec{k}}$ in termini di x e degli accoppiamenti ridotti $\bar{\Omega}$ e \bar{k}_0 :

$$\cos \theta_x = \frac{\bar{k}_0 x - \bar{\delta} + \sqrt{(\bar{k}_0 x - \bar{\delta})^2 + \bar{\Omega}^2}}{\left[\bar{\Omega}^2 + \left(\bar{k}_0 x - \bar{\delta} + \sqrt{(\bar{k}_0 x - \bar{\delta})^2 + \bar{\Omega}^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.56)$$

$$\sin \theta_x = \frac{\bar{\Omega}}{\left[\bar{\Omega}^2 + \left(\bar{k}_0 x - \bar{\delta} + \sqrt{(\bar{k}_0 x - \bar{\delta})^2 + \bar{\Omega}^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.57)$$

L'equazione (4.55) può essere trattata numericamente.

Applicando la stessa procedura, cioè prendendo prima il limite termodinamico della (4.31) ed effettuando successivamente i riscalamanti definiti sopra, si ricavano le funzioni di risposta interbanda $\chi_{inter}^{ij}(0, \bar{\Delta})$. Il risultato finale è il seguente:

$$\chi_{inter}^{ij}(0, \bar{\Delta}) = \frac{m}{2\pi^2\hbar^2} \int dx dy \sum_{s=\pm} F_{0,s-s}^{ij}(x) \frac{\Theta(\text{sign}(\mu) - \bar{e}_s(x, y)) - \Theta(\text{sign}(\mu) - \bar{e}_{-s}(x, y))}{\bar{\Delta} + \bar{e}_s(x, y) - \bar{e}_{-s}(x, y)} \quad (4.58)$$

dove $\bar{\Delta} = \frac{\Delta}{|\mu|}$ rappresenta l'energia di gap in unità del potenziale chimico.

I risultati che si vogliono ottenere sono la velocità del suono zero \bar{c}_0 inserendo le $\chi_{intra}^{0\mu}$ nell'equazione per i modi collettivi di densità (4.50) e i gap $\bar{\Delta}_x$, $\bar{\Delta}_y$ e $\bar{\Delta}_z$ dei tre modi collettivi di spin inserendo le χ_{inter}^{ij} nelle equazioni (4.51). Per

quanto riguarda la velocità del suono zero, si vuole determinare una legge nella forma

$$\bar{c}_0 = \varphi(\gamma, \bar{k}_0, \bar{\Omega}) \quad (4.59)$$

dove $\gamma = \frac{mg}{2\pi\hbar^2}$ è il parametro che definisce l'intensità di interazione in unità del valore critico di Stoner e φ una funzione da determinare. Il passo successivo consisterà nel confrontare la legge (4.59) con quella di un sistema di fermioni in assenza di interazione spin-orbita in modo da evidenziare l'effetto combinato di k_0 e di Ω .

Per quanto riguarda invece l'analisi dei modi collettivi di spin, vorremmo determinare delle leggi nella forma

$$\bar{\Delta}_i = \Phi_i(\gamma, \bar{k}_0, \bar{\Omega}) \quad (4.60)$$

che esprimano i gap dei modi di spin in termini dei parametri riscaldati γ , \bar{k}_0 e $\bar{\Omega}$.

Ci aspettiamo che i tre modi che si ottengono perturbando le diverse componenti della magnetizzazione siano non degeneri, pertanto le corrispondenti energie di gap risulteranno diverse.

4.5 Il continuo particella-buca

Un aspetto importante che si deve tenere sotto controllo nella determinazione della velocità del suono zero è che il modo collettivo non decada sotto forma di eccitazioni particella-buca. Se ciò avviene, infatti, si ha un processo di dissipazione dovuto alla conversione dell'energia del modo in energia interna.

E' necessario pertanto determinare la regione nel piano (q, ω) che corrisponde ad eccitazioni di singola particella del sistema non interagente. Questa regione prende il nome di continuo particella-buca: se il modo collettivo entra nel continuo, allora c'è dissipazione; se invece resta fuori, il modo appare come una risonanza. Quest'ultimo è il caso in cui un modo collettivo può essere osservato sperimentalmente.

Dall'equazione (4.19) si nota che, nel caso di transizioni intrabanda, le frequenze necessarie per dare luogo ad eccitazioni particella-buca sono date da

$$\omega_{qk}^{\pm} = \frac{\epsilon_{\pm}(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}) - \epsilon_{\pm}(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2})}{\hbar} \quad (4.61)$$

Per perturbazioni lungo y l'equazione (4.61) diventa

$$\omega_{qk}^{\pm} = \frac{\hbar q^2}{2m} + \frac{\hbar}{m} \vec{k} \cdot \vec{q} = \frac{\hbar q^2}{2m} + \frac{\hbar}{m} k_y q \cos \theta \quad (4.62)$$

Ora, a causa della statistica di Fermi, il momento lungo y è limitato dalle condizioni

$$-\sqrt{2m \left(\mu \mp \frac{1}{2} \sqrt{\Omega^2 + \delta^2} \right)} \leq k_y \leq +\sqrt{2m \left(\mu \mp \frac{1}{2} \sqrt{\Omega^2 + \delta^2} \right)} \quad (4.63)$$

rispettivamente per particelle di elicità \pm . Perciò, l'intervallo di frequenze per avere transizioni particella-buca in funzione di \bar{q} si ricava calcolando il minimo e il massimo del membro di destra dell'equazione (4.62). Il minimo si trova imponendo che $\cos \theta = -1$ e che k_y sia pari al massimo dell'intervallo (4.63); viceversa, il massimo si ottiene quando $\cos \theta = 1$. Mettendo insieme le condizioni si ottiene l'intervallo di frequenze cercato:

$$\frac{\hbar q^2}{2m} - \frac{\hbar}{m} q \sqrt{2m \left(\mu + \frac{1}{2} \sqrt{\Omega^2 + \delta^2} \right)} \leq \omega \leq \frac{\hbar q^2}{2m} + \frac{\hbar}{m} q \sqrt{2m \left(\mu + \frac{1}{2} \sqrt{\Omega^2 + \delta^2} \right)} \quad (4.64)$$

Le proprietà generali delle funzioni di risposta relative a sistemi fermionici ultrafreddi garantiscono [13] che l'area che compete alle eccitazioni particella-buca nel piano (q, ω) per perturbazioni di densità coincide con la regione in cui $\text{Im} \chi_0^{00} \neq 0$. In figura 4.1 si mostra la regione del piano (q, ω) corrispondente all'intervallo (4.64), utilizzando i riscalamanti $\bar{q} = \frac{\hbar q}{\sqrt{2m|\mu|}}$ e $\bar{\omega} = \frac{\hbar \omega}{|\mu|}$, ed imponendo che $\bar{\Omega} = \frac{\Omega}{2|\mu|} = 0.5$ e $\bar{\delta} = \frac{\delta}{2|\mu|} = 0.5$.

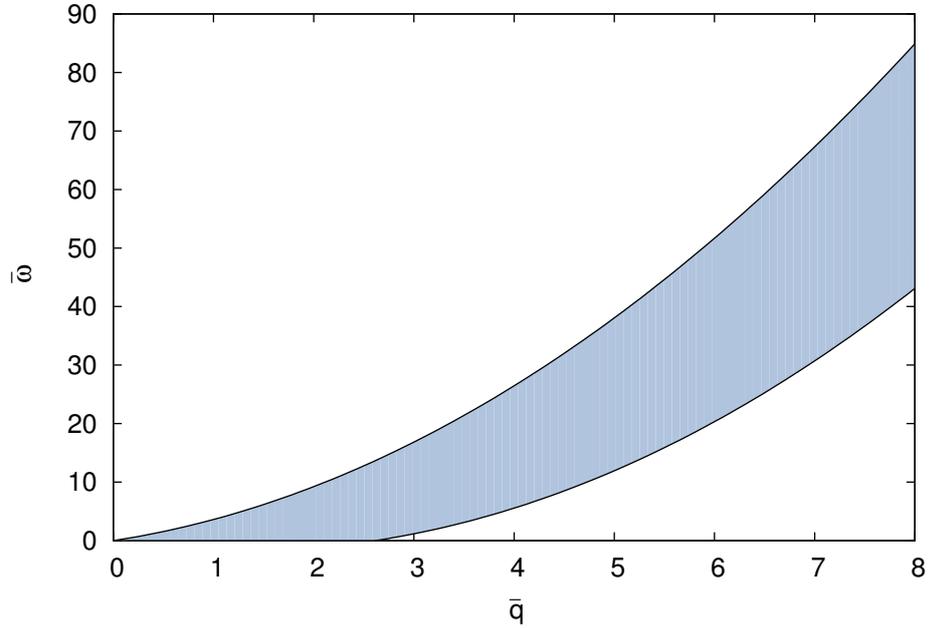


Figura 4.1: Continuo particella-buca in presenza di spin-orbita per perturbazioni lungo y .

4.6 Il suono zero in assenza di interazione spin-orbita

In questa sezione, studiamo brevemente il modo di *zero sound* per un sistema di fermioni non soggetto a campi di Zeemann ($\Omega = 0$) e ad interazione spin-orbita ($k_0 = 0$) come caso limite del nostro sistema fermionico ultrafreddo. Questo consentirà di confrontare le relazioni di dispersione in presenza ed in assenza di interazione spin-orbita, mettendo così in luce l'effetto di k_0 sulla velocità del suono zero.

Poichè in un sistema fermionico con $\Omega = 0$ e $k_0 = 0$ non sono presenti correlazioni spin-densità, come già puntualizzato nella sezione 4.2, l'equazione per i modi collettivi di densità è semplicemente

$$1 + \frac{g}{2} \chi_0^{00}(\vec{q}, \omega) = 0 \quad (4.65)$$

dove

$$\begin{aligned}
 \chi_0^{00}(\vec{q}, \omega) &= -\frac{1}{A} \sum_{\vec{k}, \lambda=\uparrow, \downarrow} \frac{\delta(\mu - \epsilon_\lambda(\vec{k}))(\vec{q} \cdot \nabla_{\vec{k}} \epsilon_\lambda(\vec{k}))}{\hbar\omega + i\eta - \vec{q} \cdot \nabla_{\vec{k}} \epsilon_\lambda(\vec{k})} \\
 &= -\frac{1}{2\pi^2} \int d^2k \frac{\delta(\mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}) \frac{\hbar^2}{m} \vec{k} \cdot \vec{q}}{\hbar\omega + i\delta - \frac{\hbar^2}{m} \vec{k} \cdot \vec{q}}
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

è la funzione di risposta densità-densità del sistema non interagente valutata a piccoli \vec{q} e $\epsilon_{\uparrow, \downarrow}(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ è l'energia cinetica di singola particella.

Il fatto interessante è che l'equazione (4.65) si risolve analiticamente. Infatti, passando in coordinate polari nel piano ed assumendo \vec{q} come asse di riferimento, si ottiene che

$$\chi_0^{00}(\vec{q}, \omega) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k \delta\left(\mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right) \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\frac{\hbar^2}{m} k q \cos \varphi}{\hbar\omega + i\delta - \frac{\hbar^2}{m} k q \cos \varphi} \tag{4.67}$$

da cui segue che

$$\chi_0^{00}(\bar{c}_0) = -\frac{m}{2\pi^2 \hbar^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos \varphi}{\bar{c}_0 - \cos \varphi} \tag{4.68}$$

dove \bar{c}_0 ha la stessa definizione data nella sezione 4.4. Come si nota, la funzione di risposta densità-densità non dipende dalla direzione di perturbazione; ciò significa che il modo collettivo di *zero sound* ha la stessa velocità in ogni direzione, come conseguenza dell'isotropia del sistema quando $\Omega = 0$ e $k_0 = 0$. L'integrale della (4.68) è risolubile e dà luogo alla seguente funzione di risposta definita per tratti:

$$\chi_0^{00}(\bar{c}_0) = \frac{m}{\pi \hbar^2} \begin{cases} 1 - \frac{\bar{c}_0}{\sqrt{\bar{c}_0^2 - 1}} & \text{se } \bar{c}_0 > 1 \\ +\infty & \text{se } \bar{c}_0 = 1 \\ 1 - i \frac{\bar{c}_0}{\sqrt{1 - \bar{c}_0^2}} & \text{se } \bar{c}_0 < 1 \end{cases} \tag{4.69}$$

La funzione di risposta densità-densità diverge per $\bar{c}_0 = 1$, cioè quando $c_0 = v_F = \sqrt{\frac{2\mu}{m}}$. Ciò significa, come mostrato in [13], che un sistema di fermioni non interagente privo di interazione spin-orbita presenta un modo collettivo di densità con velocità pari alla velocità di Fermi.

Inoltre, la presenza di una parte immaginaria non banale per $\bar{c}_0 < 1$ indica che un eventuale modo collettivo con una velocità minore della velocità di Fermi decade in eccitazioni particella-buca. Cerchiamo perciò un modo collettivo per il sistema interagente, soluzione dell'equazione (4.65), per $\bar{c}_0 > 1$.

L'equazione da risolvere è:

$$1 + \frac{mg}{2\pi\hbar^2} \left(1 - \frac{\bar{c}_0}{\sqrt{c_0^2 - 1}} \right) = 0 \quad (4.70)$$

Introducendo il parametro $\gamma = \frac{mg}{2\pi\hbar^2}$, la soluzione è data da

$$\bar{c}_0(\gamma) = \frac{1 + \gamma}{\sqrt{1 + 2\gamma}} > 1 \quad (4.71)$$

Cercheremo di capire nel seguito come l'azione combinata del campo di Zeemann e dell'interazione spin-orbita modifichino questa relazione.

In figura 4.2 riportiamo l'andamento della legge di dispersione del modo di *zero sound*⁴ (linea rossa tratteggiata) per $\gamma = 0.8$. L'aspetto interessante è che il modo collettivo è visibile per q piccoli in quanto resta fuori dal continuo particella-buca per il sistema con $\Omega = 0$ e $k_0 = 0$.

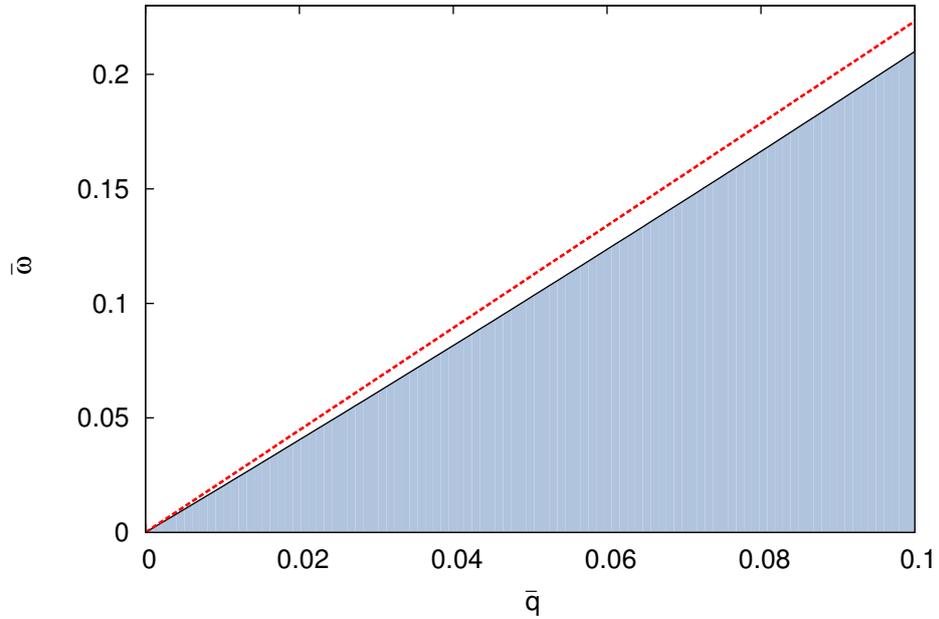


Figura 4.2: Modo di *zero sound* per il sistema in assenza di spin-orbita. Come si nota, il modo non decade sotto forma di eccitazioni particella-buca.

⁴Nelle variabili riscalate $\bar{\omega}$, \bar{q} e \bar{c}_0 , la legge di dispersione è nella forma $\bar{\omega} = 2\bar{c}_0\bar{q}$.

4.7 Sintesi dei risultati analitici

In questa sezione finale della tesi, vogliamo riassumere i risultati ottenuti scrivendo un set di equazioni che permettano di ricavare alcune quantità di interesse fisico tramite simulazione numerica. La parte di calcolo numerico necessaria per rendere la trattazione più esaustiva non è stata affrontata per limiti di tempo. In base a quanto discusso nei capitoli 3 e 4, gli effetti fisici in cui abbiamo ricercato le peculiarità dell'interazione spin-orbita sono i seguenti.

- Il primo è l'analisi dell'instabilità paramagnetica: si è cercato di stabilire se l'interazione spin-orbita possa o meno favorire l'instaurarsi di una fase magnetizzata, andando a definire il valore critico dell'interazione al variare di k_0 .
- Il secondo consiste nell'analizzare il modo collettivo di *zero sound* per perturbazioni di densità lungo y , studiandone in particolare la relazione di dispersione. Questo modo è il più semplice da analizzare in quanto coinvolge solamente transizioni intrabanda. L'obiettivo è definire la relazione fra la velocità del suono e i parametri Raman e di spin-orbita, confrontandola con quella del sistema privo di entrambi gli accoppiamenti.
- Il terzo consiste nell'analisi dei modi collettivi di spin. Questi modi sono particolarmente interessanti, perchè coinvolgono solamente transizioni interbanda. Poichè in presenza dell'interazione Raman vi è un gap di energia Ω che separa le due bande di elicità, ci aspettiamo che i modi collettivi di spin abbiano a loro volta un'energia di gap Δ . L'obiettivo di quest'analisi diventa perciò calcolare i gap Δ_x , Δ_y e Δ_z dei modi di spin lungo le direzioni dei tre assi, mostrando che essi possono essere non degeneri per effetto dell'anisotropia introdotta dall'accoppiamento spin-orbita.

Per ciascuno dei tre fenomeni vogliamo scrivere un'equazione o un set di equazioni da risolvere numericamente.

Per quanto riguarda il problema dell'instabilità dello stato paramagnetico, abbiamo già esaminato nella sezione 3.3 una procedura in grado di determinare la corretta relazione fra il valore critico di g e il parametro di spin-orbita. Tuttavia, nella necessità di ricorrere ad un'approssimazione numerica, è preferibile adottare un punto di vista diverso, che consenta di esprimere la condizione di instabilità facendo uso delle funzioni di risposta del sistema.

Più precisamente, la condizione di instabilità si ottiene quando, eseguendo il limite $\Omega \rightarrow 0^+$, le fluttuazioni della componente x del campo di magnetizzazione (ϕ_x) fanno diminuire l'energia libera. Ciò avviene, in base a quanto visto eseguendo la RPA nella sezione 3.4, se

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{2}{g} - \chi_0^{11}(\vec{q} \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0) \right\} < 0 \quad (4.72)$$

Questa condizione si ricava dalla (3.59) imponendo che il contributo quadratico nei campi fluttuanti abbia media non nulla e sia negativo. Lo stesso risultato è stato ricavato nell'articolo [11].

Per scrivere i risultati per mezzo di quantità adimensionali, ricordiamo le definizioni di γ , $\bar{\Omega}$ e \bar{k}_0 , date nella sezione 4.4 ed introduciamo delle funzioni di risposta adimensionali $\bar{\chi}_0^{\mu\nu} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \chi_0^{\mu\nu}$.

Dalla (4.72) si ha che il valore critico di γ per cui il sistema ha una transizione spontanea alla fase ferromagnetica coincide con la soluzione dell'equazione

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0^+} \left\{ 1 - \frac{\gamma_c}{2} \bar{\chi}_0^{11}(\vec{q} \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0) \right\} = 0 \quad (4.73)$$

L'equazione può essere risolta ricavando un'approssimazione numerica per la funzione suscettività $\bar{\chi}_0^{11}(0, 0)$. Chiaramente, poichè le funzioni di risposta intrabanda danno contributo solo per $\vec{q} \neq 0$, è sufficiente trovare un'approssimazione per la $\bar{\chi}_{inter}^{11}(0, 0)$ a partire dalla (4.58). Il risultato dell'equazione è una legge nella forma

$$\gamma_c = \gamma_c(\bar{k}_0) \quad (4.74)$$

e permette perciò di valutare se l'interazione spin-orbita favorisca o meno l'instaurarsi della fase magnetizzata.

Per quanto riguarda invece i modi collettivi di densità, ci siamo limitati per semplicità a studiare la legge di dispersione del modo di *zero sound* per perturbazioni lungo y . Questa procedura non è in grado di mostrare gli effetti di anisotropia prodotti dall'interazione spin-orbita, però permette di concludere quale sia la dipendenza della velocità del suono da k_0 . Per studiare questo modo, dobbiamo determinare le soluzioni dell'equazione

$$\left(1 + \frac{\gamma}{2} \bar{\chi}_0^{00} \right) - \frac{\gamma^2}{4} \bar{\chi}_0^{01} \bar{\chi}_0^{10} - \frac{\gamma^2}{4} \bar{\chi}_0^{02} \bar{\chi}_0^{20} - \frac{\gamma^2}{4} \bar{\chi}_0^{03} \bar{\chi}_0^{30} = 0 \quad (4.75)$$

approssimando numericamente le funzioni di risposta $\bar{\chi}_{intra}^{0\mu}(\bar{c}_0, \vec{e}_y)$. Il punto di partenza per l'approssimazione numerica è l'integrale della (4.55), e il risultato della (4.75) dovrà essere una legge nella forma

$$\bar{c}_0 = \varphi(\gamma, \bar{k}_0, \bar{\Omega}) \quad (4.76)$$

da confrontare successivamente con la (4.71) relativa al sistema di fermioni privo di interazione Raman e spin-orbita.

Lo stesso procedimento deve essere utilizzato per determinare le energie di gap dei tre modi collettivi di spin. In questo caso le equazioni da risolvere sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{\gamma}{2}\bar{\chi}_0^{11}\right) - \frac{\gamma^2}{4}\bar{\chi}_0^{10}\bar{\chi}_0^{01} - \frac{\gamma^2}{4}\bar{\chi}_0^{12}\bar{\chi}_0^{21} - \frac{\gamma^2}{4}\bar{\chi}_0^{13}\bar{\chi}_0^{31} &= 0 \\
\left(1 - \frac{\gamma}{2}\bar{\chi}_0^{22}\right) - \frac{\gamma^2}{4}\bar{\chi}_0^{20}\bar{\chi}_0^{02} - \frac{\gamma^2}{4}\bar{\chi}_0^{21}\bar{\chi}_0^{12} - \frac{\gamma^2}{4}\bar{\chi}_0^{23}\bar{\chi}_0^{32} &= 0 \\
\left(1 - \frac{\gamma}{2}\bar{\chi}_0^{33}\right) - \frac{\gamma^2}{4}\bar{\chi}_0^{30}\bar{\chi}_0^{03} - \frac{\gamma^2}{4}\bar{\chi}_0^{31}\bar{\chi}_0^{13} - \frac{\gamma^2}{4}\bar{\chi}_0^{32}\bar{\chi}_0^{23} &= 0
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Occorre pertanto approssimare per via numerica le funzioni di risposta $\bar{\chi}_{inter}^{1j}(0, \bar{\Delta}_x)$, $\bar{\chi}_{inter}^{2j}(0, \bar{\Delta}_y)$ e $\bar{\chi}_{inter}^{3j}(0, \bar{\Delta}_z)$. I risultati del set di equazioni sono le leggi che esprimono i gap dei tre modi collettivi di spin in termini dei parametri γ , Ω e \bar{k}_0 , cioè

$$\bar{\Delta}_i = \Phi_i(\gamma, \bar{k}_0, \bar{\Omega}) \tag{4.78}$$

Per concludere, riportiamo di seguito le equazioni che esprimono le funzioni di risposta $\bar{\chi}_{inter}^{ij}(0, \Delta_i)$ e $\bar{\chi}_{intra}^{0\mu}(\bar{c}_0, \bar{e}_y)$ da calcolare numericamente.

$$\bar{\chi}_{intra}^{0\mu}(\bar{c}_0, \bar{e}_y) = -\frac{1}{\pi} \int dx dy F_{0,ss}^{0\mu}(x) \frac{\delta(\text{sign}(\mu) - \bar{e}_s(x, y))y}{\bar{c}_0 - y} \tag{4.79}$$

$$\bar{\chi}_{inter}^{ij}(0, \bar{\Delta}_i) = \frac{1}{\pi} \int dx dy F_{0,s-s}^{ij}(x) \frac{\Theta(\text{sign}(\mu) - \bar{e}_s(x, y)) - \Theta(\text{sign}(\mu) - \bar{e}_{-s}(x, y))}{\bar{\Delta}_i + \bar{e}_s(x, y) - \bar{e}_{-s}(x, y)} \tag{4.80}$$

La somma su s è sottintesa.

Un aspetto interessante è che le funzioni δ e Θ che compaiono nelle equazioni (4.79) e (4.80) selezionano come intervallo di integrazione rispettivamente il contorno e l'area racchiusa dalle superfici di Fermi degli stati di elicità $+$ e $-$. Pertanto, le due funzioni di risposta assumono espressioni diverse dipendentemente dal regime di potenziale chimico scelto, come già è accaduto per le leggi di stato relative al sistema non interagente nel capitolo 2. In particolare, per $\mu < \frac{\Omega}{2}$ danno contributo solo le eccitazioni relative a particelle di elicità negativa.

Le funzioni Θ e δ inoltre consentono di scrivere le funzioni di risposta tramite un singolo integrale sulla variabile x . Riportiamo di seguito i risultati finali nelle diverse regioni di potenziale chimico e separando le funzioni di risposta interbanda ed intrabanda nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_{intra} &= \bar{\chi}_{--} + \bar{\chi}_{++} \\ \bar{\chi}_{inter} &= \bar{\chi}_{-+} + \bar{\chi}_{+-}\end{aligned}\tag{4.81}$$

Si esplicitano cioè i contributi dovuti alle transizioni particella-buca con diversa elicità iniziale e finale. Imponiamo inoltre che l'accoppiamento di detuning sia assente, cioè $\delta = 0$.

- Primo regime: $-\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} - \frac{m\Omega^2}{8\hbar^2 k_0^2} \leq \mu < -\frac{\Omega}{2}$. In termini dei parametri ridotti $\bar{\Omega}$ e \bar{k}_0 , le condizioni che identificano il primo regime sono $\bar{\Omega} < 1$, $\frac{\bar{\Omega}}{2\bar{k}_0} < 1$ che devono essere contemporaneamente verificate. Inoltre, deve valere una delle due condizioni seguenti: $0 \leq \bar{k}_0 < \sqrt{1 - \sqrt{1 - \bar{\Omega}^2}}$ oppure $\bar{k}_0 > \sqrt{1 + \sqrt{1 - \bar{\Omega}^2}}$.

In questo regime, si ha che

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_{intra}^{0\mu}(\bar{c}_0, \vec{e}_y) &= \bar{\chi}_{--}^{0\mu}(\bar{c}_0, \vec{e}_y) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{I_1} dx F_{0,-}^{0\mu}(x) \left\{ \frac{1}{\bar{c}_0 - f_-(x)} - \frac{1}{\bar{c}_0 + f_-(x)} \right\}\end{aligned}\tag{4.82}$$

e

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_{inter}^{ij}(0, \bar{\Delta}_i) &= \bar{\chi}_{-+}^{ij}(0, \bar{\Delta}_i) + \bar{\chi}_{+-}^{ij}(0, \bar{\Delta}_i) = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{I_1} dx \left\{ F_{0,-}^{ij}(x) \frac{f_-(x)}{\bar{\Delta}_i - g(x)} - F_{0,+}^{ij}(x) \frac{f_-(x)}{\bar{\Delta}_i + g(x)} \right\}\end{aligned}\tag{4.83}$$

dove $I_1 = [-x_+, -x_-] \cup [x_-, x_+]$, $x_{\pm} = \sqrt{-1 + \bar{k}_0^2 \pm \sqrt{(1 - \bar{k}_0^2)^2 - (1 - \bar{\Omega}^2)}}$, $f_-(x) = \sqrt{-1 - x^2 + \sqrt{2\bar{k}_0^2 x^2 + \bar{\Omega}^2}}$ e $g(x) = \sqrt{2\bar{k}_0^2 x^2 + \bar{\Omega}^2}$. Da notare che la funzione di risposta interbanda riceve due contributi. Il primo rappresenta l'eccitazione di particelle da stati di elicità negativa a stati di elicità positiva, il secondo la diseccitazione di particelle precedentemente promosse a stati di elicità positiva in stati di elicità negativa.

- Secondo regime: $-\frac{\Omega}{2} < \mu \leq 0$. In termini degli accoppiamenti ridotti, la condizione che identifica il secondo regime è $\bar{\Omega} > 1$ e potenziale chimico negativo. Le equazioni che descrivono le funzioni di risposta sono identiche a quelle del primo regime. L'unica differenza è data dall'intervallo di integrazione: in luogo di I_1 si ha l'intervallo $I_2 = [-x_+, x_+]$, dove x_+ ha la definizione specificata sopra.

- Terzo regime: $0 < \mu \leq \frac{\Omega}{2}$. La condizione in termini di $\bar{\Omega}$ diventa in questo caso $\bar{\Omega} \leq 1$ e potenziale chimico positivo. Gli integrali da calcolare sono identici a quelli del secondo regime; l'unica differenza è rappresentata da una nuova espressione per f_- e per x_+ , a causa del cambio di segno di μ . Infatti si ha che $x_+ = \sqrt{1 + \bar{k}_0^2 + \sqrt{(1 + \bar{k}_0)^2 - (1 - \bar{\Omega}^2)}}$ e $f_-(x) = (1 - x^2 + \sqrt{2\bar{k}_0^2 x^2 + \bar{\Omega}^2})^{\frac{1}{2}}$.
- Quarto regime: $\mu > \frac{\Omega}{2}$. In questo caso si ha $\bar{\Omega} > 1$ e potenziale chimico positivo. In questo regime, le funzioni di risposta ricevono contributi da transizioni di particelle con entrambe le elicità. Perciò si avrà

$$\bar{\chi}_{intra}^{0\mu}(\bar{c}_0, \vec{e}_y) = \bar{\chi}_{--}^{0\mu}(\bar{c}_0, \vec{e}_y) + \bar{\chi}_{++}^{0\mu}(\bar{c}_0, \vec{e}_y) \quad (4.84)$$

dove le funzioni $\bar{\chi}_{++}^{0\mu}$ e $\bar{\chi}_{--}^{0\mu}$ sono date da

$$\bar{\chi}_{++}^{0\mu}(\bar{c}_0, \vec{e}_y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{I_4^+} dx F_{0,++}^{0\mu}(x) \left\{ \frac{1}{\bar{c}_0 - f_+(x)} - \frac{1}{\bar{c}_0 + f_+(x)} \right\} \quad (4.85)$$

e

$$\bar{\chi}_{--}^{0\mu}(\bar{c}_0, \vec{e}_y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{I_4^-} dx F_{0,--}^{0\mu}(x) \left\{ \frac{1}{\bar{c}_0 - f_-(x)} - \frac{1}{\bar{c}_0 + f_-(x)} \right\} \quad (4.86)$$

Per quanto riguarda invece le funzioni di risposta interbanda, si ha che

$$\bar{\chi}_{inter}^{ij}(0, \bar{\Delta}_i) = \bar{\chi}_{+-}^{ij}(0, \bar{\Delta}_i) + \bar{\chi}_{-+}^{ij}(0, \bar{\Delta}_i) \quad (4.87)$$

dove le funzioni $\bar{\chi}_{+-}^{ij}$ e $\bar{\chi}_{-+}^{ij}$ sono date da

$$\begin{aligned} & \bar{\chi}_{+-}^{ij}(0, \bar{\Delta}_i) = \\ & -\frac{2}{\pi} \left[\int_{I_4^+} dx F_{0,+}^{ij}(x) \frac{f_+(x)}{\bar{\Delta}_i + g(x)} + \int_{I_4^-} dx F_{0,+}^{ij}(x) \frac{f_-(x)}{\bar{\Delta}_i + g(x)} \right] \quad (4.88) \end{aligned}$$

e

$$\bar{\chi}_{-+}^{ij}(0, \bar{\Delta}_i) = \frac{2}{\pi} \left[\int_{I_4^+} dx F_{0,-+}^{ij}(x) \frac{f_+(x)}{\bar{\Delta}_i - g(x)} + \int_{I_4^-} dx F_{0,-+}^{ij}(x) \frac{f_-(x)}{\bar{\Delta}_i - g(x)} \right] \quad (4.89)$$

dove $I_4^\pm = [-x_\mp, x_\mp]$, $x_\pm = (1 + \bar{k}_0^2 \pm \sqrt{(1 + \bar{k}_0^2)^2 - (1 - \bar{\Omega}^2)})^{\frac{1}{2}}$, $f_\pm(x) = (1 - x^2 \mp \sqrt{2\bar{k}_0^2 x^2 + \bar{\Omega}^2})^{\frac{1}{2}}$ e $g(x) = \sqrt{2\bar{k}_0^2 x^2 + \bar{\Omega}^2}$.

Notiamo che le funzioni suscettività interbanda $\bar{\chi}_{+-}$ e $\bar{\chi}_{-+}$ hanno due contributi. Ciò è ovvio perchè alla risposta alla perturbazione esterna contribuiscono sia eccitazioni che diseccitazioni di singola particella tra le due bande di elicità. Se per esempio scegliamo la $\bar{\chi}_{+-}$, ad essa contribuiscono sia processi in cui particelle di elicità $-$ vengono promosse a stati di elicità $+$, sia processi in cui si ha il decadimento di particelle di elicità $+$ in stati con elicità $-$.

Conclusioni

Nel presente lavoro di tesi, si sono analizzate le proprietà collettive di un sistema di fermioni ultrafreddo bidimensionale soggetto ad interazione spin-orbita.

Nel capitolo iniziale, si sono descritte in modo sommario le tecniche sperimentali che si utilizzano per ottenere un gas di atomi ultrafreddo. In particolare ci siamo soffermati sui seguenti aspetti:

- le fasi di raffreddamento e confinamento, necessarie per ottenere uno strato quasi-bidimensionale di gas a temperature più basse del limite di degenerazione quantistica,
- la risonanza di Feshbach per controllare la natura e l'intensità delle interazioni tra gli atomi,
- ed infine la tecnica utilizzata per riprodurre gli accoppiamenti Rashba e Dresselhaus su gas ultrafreddi.

Questa parte introduttiva ha fornito gli elementi necessari per caratterizzare il sistema in oggetto nella tesi tramite la scrittura di un'hamiltoniana. L'interazione spin-orbita che si è introdotta nell'hamiltoniana contiene in particolare un termine di accoppiamento Rashba ed un termine di accoppiamento Dresselhaus di uguale intensità.

Nel secondo capitolo si sono studiate le proprietà termodinamiche del sistema non interagente. Si è analizzato anzitutto il ruolo della simmetria di gauge e si è mostrato che il sistema è in grado di presentare degli effetti collettivi significativi soltanto se è presente l'azione combinata dell'accoppiamento spin-orbita e di un'interazione Raman.

Il procedimento di diagonalizzazione dell'hamiltoniana ha consentito di determinare analiticamente la legge di stato del gas nel limite $\frac{m\Omega}{\hbar^2 k_0^2} \gg 1$. Si è mostrato in particolare che il sistema compie una transizione di fase di Lifshitz del primo ordine quando si attraversa la densità critica $n_c = \frac{m}{\pi\hbar^2} \left(\frac{\Omega}{2} + \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \right)$ e si è sottolineato come la transizione possa essere individuata a livello sperimentale tramite la misura della compressibilità del gas.

La trattazione è risultata più difficile nel limite $\frac{m\Omega}{\hbar^2 k_0^2} \ll 1$. In questo caso, la legge di stato è stata ricavata solamente nel regime $-\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} - \frac{m\Omega^2}{8\hbar^2 k_0^2} < \mu < -\frac{\Omega}{2}$ e non è stato possibile osservare le transizioni di fase attese in corrispondenza dei potenziali critici $\mu_1 = -\frac{\Omega}{2}$ e $\mu_2 = \frac{\Omega}{2}$.

Nel terzo e quarto capitolo si sono studiate le proprietà collettive del sistema in presenza di interazione repulsiva. Facendo uso della tecnica dell'integrale funzionale di Feynman, si è eseguita dapprima un'approssimazione di campo medio per descrivere le proprietà di equilibrio del sistema. Successivamente, si è effettuata una RPA per analizzare la risposta del sistema a perturbazioni esterne.

La teoria di campo medio si è rivelata utile per descrivere le proprietà magnetiche del sistema. In particolare, si è notato che il sistema in assenza di interazione spin-orbita è in grado di sviluppare una fase ferromagnetica, individuando l'intensità critica dell'interazione repulsiva. L'obiettivo finale era verificare se l'interazione spin-orbita potesse favorire la fase magnetizzata, facendo diminuire l'interazione critica. Si è quindi cercata una legge nella forma

$$g_c = g_c(k_0) \quad (4.90)$$

che esprimesse g_c in funzione del parametro di spin-orbita. Nella necessità di ricorrere ad un'approssimazione numerica, si sono utilizzati i risultati della RPA per ottenere in modo equivalente un'equazione che descrivesse l'instabilità paramagnetica.

Tramite la RPA si è ricavata un'espressione per le funzioni di risposta del sistema in presenza di interazione repulsiva, gettando le basi per lo studio dei modi collettivi. Tramite lo studio dei poli delle funzioni suscettività, si è analizzato il modo di *zero sound* assumendo che il sistema venisse perturbato lungo y . L'obiettivo era la determinazione della velocità del suono in termini dei parametri di spin-orbita e Raman. Si è perciò cercata una legge nella forma

$$c_0 = c_0(g, k_0, \Omega) \quad (4.91)$$

da confrontare successivamente con il risultato analitico trovato per i fermioni con $k_0 = 0$ e $\Omega = 0$. Si è scelto di studiare il modo di densità lungo y in quanto coinvolge solamente transizioni intrabanda e rappresenta pertanto il modo collettivo più semplice da analizzare da un punto di vista numerico.

Successivamente si sono analizzati i modi collettivi di spin supponendo che la perturbazione fosse omogenea, cioè tale che $\vec{q} \rightarrow 0$. Questo consente di evidenziare due effetti: in primo luogo, è possibile determinare eventuali energie di gap per i tre modi come conseguenza delle transizioni interbanda, in secondo

luogo è possibile studiare al livello più semplice possibile un'eventuale anisotropia prodotta dall'interazione spin-orbita. Se si produce un'anisotropia, infatti, i tre modi di spin non sono degeneri e presentano tre energie di gap diverse. In definitiva, si è cercato di determinare un set di equazioni che esprimano le energie di gap in termini degli accoppiamenti g, k_0 e Ω , cioè le leggi

$$\Delta_i = \Delta_i(g, k_0, \Omega) \quad (4.92)$$

con $i = 1, 2, 3$.

Le equazioni per i modi collettivi, necessarie per descrivere la velocità del suono del modo di densità e i gap dei modi di spin, sono state approssimate all'ordine di g minimo tale da cogliere le correlazioni fra campi distinti, di densità e di magnetizzazione.

Il risultato di quest'analisi è stata la scrittura di un set di equazioni che descrivono i fenomeni fisici studiati in termini delle funzioni di risposta densità-densità, densità-spin e spin-spin. La risoluzione delle equazioni, da svolgersi per via numerica, non è stata affrontata nella presente tesi per limiti di tempo.

La naturale prosecuzione di questo lavoro consiste nel ricavare le soluzioni delle equazioni trovate, verificando l'emergere degli effetti fisici che si sono menzionati nella tesi. Gli effetti principali da mettere in luce sono fenomeni di anisotropia, la comparsa di modi non degeneri con un gap di energia e il cambiamento della velocità del suono per effetto dell'interazione spin-orbita.

Vi sono tuttavia altri effetti che non è stato possibile studiare nel corso della tesi ma che sarebbe interessante approfondire per dare un quadro più esaustivo delle proprietà dell'interazione spin-orbita. Infatti, nella tesi, abbiamo analizzato solamente un sistema in presenza di interazione repulsiva, con sole fluttuazioni nello stato paramagnetico. Sarebbe interessante anzitutto studiare le fluttuazioni nello stato ferromagnetico per determinare eventuali modi di Goldstone ed, in secondo luogo, le proprietà dinamiche del sistema in presenza di interazione attrattiva. In questo caso si dovrebbe osservare una fase superfluida, analoga a quella prevista dalla teoria BCS per i superconduttori.

Appendice A

La legge di stato relativa al sistema non interagente si ricava dalla relazione (2.45) sommando sulle frequenze di Matsubara fermioniche. Il calcolo si effettua seguendo una procedura standard: data una funzione $\gamma(z)$ che ammette un set di poli semplici z_1, \dots, z_n nel piano complesso z , vale la relazione

$$\frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \gamma(i\omega_n) = - \sum_{i=1}^n \text{Res}(f(z)\gamma(z)) \Big|_{z=z_i} \quad (4.93)$$

dove f è la distribuzione di Fermi alla temperatura T .

Pertanto, dalla (2.45) si ha che

$$\begin{aligned} N &= 2k_b T \sum_{\vec{k}, \omega_n} \frac{i\omega_n + \mu - \epsilon(\vec{k})}{(i\omega_n + \mu - \epsilon_+(\vec{k}))(i\omega_n + \mu - \epsilon_-(\vec{k}))} \\ &= 2 \sum_{\vec{k}} \left\{ \text{Res}(f(z)F(z)) \Big|_{z=\epsilon_+(\vec{k})} + \text{Res}(f(z)F(z)) \Big|_{z=\epsilon_-(\vec{k})-\mu} \right\} \end{aligned} \quad (4.94)$$

dove $\epsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, $\epsilon_{\pm}(\vec{k}) = \epsilon(\vec{k}) \pm \sqrt{\left(\frac{\delta}{2} - \frac{\hbar^2 k_0}{m} k_x\right)^2 + \frac{\Omega^2}{4}}$ e F è una funzione complessa data da

$$F(z) = \frac{z + \mu - \epsilon(\vec{k})}{(z + \mu - \epsilon_+(\vec{k}))(z + \mu - \epsilon_-(\vec{k}))} \quad (4.95)$$

Calcoliamo ora i residui. Poichè $\epsilon_{\pm}(\vec{k}) - \mu$ sono due poli semplici, si ha che

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z)F(z)) \Big|_{z=\epsilon_{\pm}(\vec{k})-\mu} &= \lim_{z \rightarrow \epsilon_{\pm}(\vec{k})-\mu} f(z) \frac{z + \mu - \epsilon(\vec{k})}{z + \mu - \epsilon_{\mp}(\vec{k})} \\ &= f(\epsilon_{\pm}(\vec{k}) - \mu) \frac{\epsilon_{\pm}(\vec{k}) - \epsilon(\vec{k})}{\epsilon_{\pm}(\vec{k}) - \epsilon_{\mp}(\vec{k})} \end{aligned} \quad (4.96)$$

Inserendo la (4.96) nella (4.94), si ottiene che

$$N = 2 \sum_{\vec{k}} \left\{ f(\epsilon_+(\vec{k}) - \mu) \frac{\epsilon_+(\vec{k}) - \epsilon(\vec{k})}{\epsilon_+(\vec{k}) - \epsilon_-(\vec{k})} + f(\epsilon_-(\vec{k}) - \mu) \frac{\epsilon_-(\vec{k}) - \epsilon(\vec{k})}{\epsilon_-(\vec{k}) - \epsilon_+(\vec{k})} \right\} \quad (4.97)$$

Sfruttando ora le definizioni di $\epsilon(\vec{k})$ e $\epsilon_{\pm}(\vec{k})$ ed introducendo la densità numerica $n = \frac{N}{A}$, si perviene al risultato finale:

$$n = \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}} \left(f(\epsilon_+(\vec{k}) - \mu) + f(\epsilon_-(\vec{k}) - \mu) \right) \quad (4.98)$$

Appendice B

Per studiare la legge di stato del sistema non interagente nel limite $\epsilon = \frac{\hbar^2 k_0^2}{m\Omega} \ll 1$, approssimiamo le funzioni integrande e gli estremi di integrazione delle (2.49) e (2.50) al primo ordine in ϵ .

Anzitutto, effettuiamo il riscaldamento $x = \frac{\hbar k_x}{\sqrt{2m|\mu|}}$. Si ottengono le seguenti espressioni per le densità numeriche n_+ ed n_- :

- per $-\frac{\Omega}{2} \leq \mu < \frac{\Omega}{2}$, si ha $n_+ = 0$ e

$$n_- = \frac{2m|\mu|}{\pi^2 \hbar^2} \int_0^{x^+} dx \left\{ \text{sign}(\mu) - x^2 + \sqrt{\frac{2\hbar^2 k_0^2}{m|\mu|} x^2 + \frac{\Omega^2}{4\mu^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.99)$$

- per $\mu \geq \frac{\Omega}{2}$, si ha

$$n_{\pm} = \frac{2m\mu}{\pi^2 \hbar^2} \int_0^{x^{\mp}} dx \left\{ 1 - x^2 \mp \sqrt{\frac{2\hbar^2 k_0^2}{m\mu} x^2 + \frac{\Omega^2}{4\mu^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.100)$$

dove

$$x_{\pm} = \left\{ \text{sign}(\mu) + \frac{\hbar^2 k_0^2}{m|\mu|} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\hbar^2 k_0^2}{m\mu}\right)^2 - \left(1 - \frac{\Omega^2}{4\mu^2}\right)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.101)$$

Espandiamo x_{\pm} al primo ordine $\frac{\hbar^2 k_0^2}{m\Omega}$. A questo scopo, sviluppiamo il quadrato nella radice e raccogliamo un fattore $\frac{\Omega}{2|\mu|}$:

$$x_{\pm} = \left\{ \text{sign}(\mu) + \frac{\hbar^2 k_0^2}{m|\mu|} \pm \frac{\Omega}{2|\mu|} \sqrt{1 + \frac{8\mu\hbar^2 k_0^2}{m\Omega^2} + \frac{4\hbar^4 k_0^4}{m^2\Omega^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.102)$$

Vediamo che nella radice abbiamo ricostruito i rapporti tra le intensità degli accoppiamenti spin-orbita e Zeemann. Perciò, sviluppiamo al primo ordine il termine $\sqrt{1 + \frac{8\mu\hbar^2 k_0^2}{m\Omega^2} + \frac{4\hbar^4 k_0^4}{m^2\Omega^2}}$:

$$\sqrt{1 + \frac{8\mu\hbar^2 k_0^2}{m\Omega^2} + \frac{4\hbar^4 k_0^4}{m^2\Omega^2}} = \sqrt{1 + \frac{8\mu}{\Omega}\epsilon + 4\epsilon^2} \approx 1 + \frac{4\mu}{\Omega}\epsilon \quad (4.103)$$

Sostituendo quest'espansione nella (4.102), si ottiene che

$$\begin{aligned} x_{\pm} &\approx \left\{ \text{sign}(\mu) + \frac{\hbar^2 k_0^2}{m|\mu|} \pm \frac{\Omega}{2|\mu|} \left(1 + \frac{4\mu}{\Omega} \frac{\hbar^2 k_0^2}{m\Omega} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \text{sign}(\mu) \pm \frac{\Omega}{2|\mu|} + \frac{2\hbar^2 k_0^2}{m\Omega} \frac{\Omega}{2|\mu|} \pm 2 \text{sign}(\mu) \frac{\hbar^2 k_0^2}{m\Omega} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \text{sign}(\mu) \pm \frac{\Omega}{2|\mu|} \pm \frac{2\hbar^2 k_0^2}{m\Omega} \left(\text{sign}(\mu) \pm \frac{\Omega}{2|\mu|} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \text{sign}(\mu) \pm \frac{\Omega}{2|\mu|} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 \pm \frac{2\hbar^2 k_0^2}{m\Omega} \right\}^{\frac{1}{2}} \approx \left\{ \text{sign}(\mu) \pm \frac{\Omega}{2|\mu|} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 \pm \frac{\hbar^2 k_0^2}{m\Omega} \right\} \end{aligned} \quad (4.104)$$

dove nell'ultima uguaglianza si è approssimato al primo ordine in ϵ il secondo fattore.

Sviluppiano ora le funzioni integrande degli integrali (4.99) e (4.100), vale a dire le funzioni

$$\gamma_{\pm}(x) = \left\{ \text{sign}(\mu) - x^2 \mp \sqrt{\frac{2\hbar^2 k_0^2}{m|\mu|} x^2 + \frac{\Omega^2}{4\mu^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.105)$$

Conviene anche in questo caso raccogliere un fattore moltiplicativo $\frac{\Omega}{2|\mu|}$ dalla radice nel modo seguente

$$\gamma_{\pm}(x) = \left\{ \text{sign}(\mu) - x^2 \mp \frac{\Omega}{2|\mu|} \sqrt{\frac{8|\mu|\hbar^2 k_0^2}{m\Omega^2} x^2 + 1} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.106)$$

e successivamente sviluppare il radicando al primo ordine in ϵ . Si ha

$$\sqrt{1 + \frac{8|\mu|\hbar^2 k_0^2}{m\Omega^2} x^2} = \sqrt{1 + \frac{8|\mu|}{\Omega}\epsilon x^2} \approx 1 + \frac{4|\mu|}{\Omega}\epsilon x^2 \quad (4.107)$$

Notiamo che questa procedura è sensata perchè x varia in un intervallo limitato, perciò il termine proporzionale a ϵ sotto radice rappresenta una piccola correzione rispetto a 1.

Sostituendo la (4.107) nella (4.106), si ottiene che

$$\begin{aligned}
\gamma_{\pm}(x) &\approx \left\{ \text{sign}(\mu) - x^2 \mp \frac{\Omega}{2|\mu|} \left(1 + \frac{4|\mu|\hbar^2 k_0^2}{m\Omega^2} x^2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{ \text{sign}(\mu) - x^2 \mp \frac{\Omega}{2|\mu|} \mp \frac{2\hbar^2 k_0^2}{m\Omega} x^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{ \text{sign}(\mu) \mp \frac{\Omega}{2|\mu|} - \left(1 \pm \frac{2\hbar^2 k_0^2}{m\Omega} \right) x^2 \right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{4.108}$$

Inserendo infine la (4.104) e la (4.108) nelle (4.99)-(4.100), si ottengono i risultati della sezione 2.7.1.

Appendice C

In quest'appendice vogliamo ricavare l'espressione delle funzioni suscettività non interagenti (4.15), cruciali per descrivere i modi collettivi in presenza di interazione repulsiva.

A questo scopo, partiamo dall'equazione (4.5) e calcoliamo i commutatori

$$[\hat{\sigma}^\mu(\vec{q}), \hat{\sigma}^\nu(-\vec{q})] \quad \text{e} \quad [[\hat{\sigma}^\mu(\vec{q}, t), \hat{H}_0], \hat{\sigma}^\nu(-\vec{q})] \quad (4.109)$$

Si ha

$$\begin{aligned} [\hat{\sigma}^\mu(\vec{q}), \hat{\sigma}^\nu(-\vec{q})] &= \sum_{\vec{k}, \vec{k}', \lambda, \lambda', \sigma, \sigma', r, s, r', s'} \left[\hat{\gamma}_r^\dagger \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) U_{r\lambda}^T \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \sigma_{\lambda\lambda'}^\mu U_{\lambda's} \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. \hat{\gamma}_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right), \hat{\gamma}_{r'}^\dagger \left(\vec{k}' - \frac{\vec{q}}{2} \right) U_{r'\sigma}^T \left(\vec{k}' - \frac{\vec{q}}{2} \right) \sigma_{\sigma\sigma'}^\mu U_{\sigma's'} \left(\vec{k}' + \frac{\vec{q}}{2} \right) \hat{\gamma}_{s'} \left(\vec{k}' + \frac{\vec{q}}{2} \right) \right] \\ &= \sum_{\vec{k}, \vec{k}', \lambda, \lambda', \sigma, \sigma', r, s, r', s'} U_{r\lambda}^T \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \sigma_{\lambda\lambda'}^\mu U_{\lambda's} \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) U_{r'\sigma}^T \left(\vec{k}' - \frac{\vec{q}}{2} \right) \\ &\quad \sigma_{\sigma\sigma'}^\nu U_{\sigma's'} \left(\vec{k}' + \frac{\vec{q}}{2} \right) \left[\hat{\gamma}_r^\dagger \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \hat{\gamma}_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right), \hat{\gamma}_{r'}^\dagger \left(\vec{k}' - \frac{\vec{q}}{2} \right) \hat{\gamma}_{s'} \left(\vec{k}' + \frac{\vec{q}}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.110)$$

E' necessario perciò calcolare il commutatore

$$\left[\hat{\gamma}_r^\dagger \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \hat{\gamma}_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right), \hat{\gamma}_{r'}^\dagger \left(\vec{k}' - \frac{\vec{q}}{2} \right) \hat{\gamma}_{s'} \left(\vec{k}' + \frac{\vec{q}}{2} \right) \right] \quad (4.111)$$

Si ha

$$\begin{aligned}
& \left[\hat{\gamma}_r^\dagger \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \hat{\gamma}_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right), \hat{\gamma}_{r'}^\dagger \left(\vec{k}' - \frac{\vec{q}}{2} \right) \hat{\gamma}_{s'} \left(\vec{k}' + \frac{\vec{q}}{2} \right) \right] = \hat{\gamma}_r^\dagger \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \\
& \left[\hat{\gamma}_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right), \hat{\gamma}_{r'}^\dagger \left(\vec{k}' - \frac{\vec{q}}{2} \right) \hat{\gamma}_{s'} \left(\vec{k}' + \frac{\vec{q}}{2} \right) \right] + \left[\hat{\gamma}_r^\dagger \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right), \hat{\gamma}_{r'}^\dagger \left(\vec{k}' - \frac{\vec{q}}{2} \right) \right. \\
& \left. \hat{\gamma}_{s'} \left(\vec{k}' + \frac{\vec{q}}{2} \right) \right] \hat{\gamma}_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) = \hat{\gamma}_r^\dagger \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \left\{ \hat{\gamma}_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right), \hat{\gamma}_{r'}^\dagger \left(\vec{k}' - \frac{\vec{q}}{2} \right) \right\} \\
& \hat{\gamma}_{s'} \left(\vec{k}' + \frac{\vec{q}}{2} \right) - \hat{\gamma}_{r'}^\dagger \left(\vec{k}' - \frac{\vec{q}}{2} \right) \left\{ \hat{\gamma}_r^\dagger \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right), \hat{\gamma}_{s'} \left(\vec{k}' + \frac{\vec{q}}{2} \right) \right\} \hat{\gamma}_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) = \\
& \delta^{(2)}(\vec{k} - \vec{k}') \left[\delta_{sr'} \hat{\gamma}_r^\dagger \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \hat{\gamma}_{s'} \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) - \delta_{rs'} \hat{\gamma}_{r'}^\dagger \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \hat{\gamma}_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.112}$$

Inserendo questo risultato nella (4.110) e prendendo il valor medio ad ambo i membri, si ottiene che

$$\langle [\hat{\sigma}^\mu(\vec{q}), \hat{\sigma}^\nu(-\vec{q})] \rangle_0 = \sum_{\vec{k}, r, s} F_{rs}^{\mu\nu} \left(f \left(\epsilon_r \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \right) - f \left(\epsilon_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \right) \right) \tag{4.113}$$

dove

$$F_{rs}^{\mu\nu} = \sum_{\lambda, \lambda', \sigma, \sigma'} \left[U_{r\lambda}^T \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \sigma_{\lambda\lambda'}^\mu U_{\lambda's} \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) U_{s\sigma}^T \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \sigma_{\sigma\sigma'}^\nu U_{\sigma'r} \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \right] \tag{4.114}$$

Per ricavare la relazione (4.113) si sono sfruttate le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\gamma}_r^\dagger \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \hat{\gamma}_{s'} \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \rangle_0 &= \delta_{rs'} f \left(\epsilon_r \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \right) \\
\langle \hat{\gamma}_{r'}^\dagger \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \hat{\gamma}_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \rangle_0 &= \delta_{r's} f \left(\epsilon_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.115}$$

Passiamo ora al calcolo del valor medio $\langle [[\hat{\sigma}^\mu(\vec{q}, t), \hat{H}_0], \hat{\sigma}^\nu(-\vec{q})] \rangle_0$.

Calcoliamo anzitutto il commutatore $[\hat{\sigma}^\mu(\vec{q}, t), \hat{H}_0]$, utilizzando la relazione (4.13):

$$\begin{aligned}
[\hat{\sigma}^\mu(\vec{q}, t), \hat{H}_0] &= \sum_{\vec{k}, \vec{k}', \lambda, \lambda', r, s, s'} \epsilon_{s'}(\vec{k}') U_{r\lambda}^T \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \sigma_{\lambda\lambda'}^\mu U_{\lambda's} \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \\
& e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_r(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}) - \epsilon_s(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}))t} \left[\hat{\gamma}_r^\dagger \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \hat{\gamma}_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right), \hat{\gamma}_{s'}^\dagger(\vec{k}') \hat{\gamma}_{s'}(\vec{k}') \right]
\end{aligned} \tag{4.116}$$

Il commutatore

$$\left[\hat{\gamma}_r^\dagger \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \hat{\gamma}_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right), \hat{\gamma}_{s'}^\dagger(\vec{k}') \hat{\gamma}_{s'}(\vec{k}') \right] \quad (4.117)$$

si calcola in modo esattamente analogo a quanto già effettuato per ottenere la relazione (4.112). Il risultato è il seguente:

$$\begin{aligned} & \left[\hat{\gamma}_r^\dagger \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \hat{\gamma}_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right), \hat{\gamma}_{s'}^\dagger(\vec{k}') \hat{\gamma}_{s'}(\vec{k}') \right] = \\ & \left(\delta^{(2)} \left(\vec{k}' - \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \right) \delta_{ss'} - \delta^{(2)} \left(\vec{k}' - \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \delta_{rs'} \right) \right) \hat{\gamma}_r^\dagger \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \hat{\gamma}_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.118)$$

Sostituendo nella (4.116), si ottiene che

$$\begin{aligned} [\hat{\sigma}^\mu(\vec{q}, t), \hat{H}_0] &= \sum_{\vec{k}, \lambda, \lambda', r, s} \left(\epsilon_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) - \epsilon_r \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \right) U_{r\lambda}^T \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \\ & \sigma_{\lambda\lambda'}^\mu U_{\lambda's} \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) e^{\frac{i}{\hbar} (\epsilon_r(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}) - \epsilon_s(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2})) t} \hat{\gamma}_r^\dagger \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \hat{\gamma}_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.119)$$

Calcoliamo ora il commutatore $[[\hat{\sigma}^\mu(\vec{q}, t), \hat{H}_0], \hat{\sigma}^\nu(-\vec{q})]$, facendo uso della relazione (4.119):

$$\begin{aligned} [[\hat{\sigma}^\mu(\vec{q}, t), \hat{H}_0], \hat{\sigma}^\nu(-\vec{q})] &= \sum_{\vec{k}, \vec{k}', \lambda, \lambda', \sigma, \sigma', r, r', s, s'} \left(\epsilon_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) - \epsilon_r \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \right) \\ & U_{r\lambda}^T \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \sigma_{\lambda\lambda'}^\mu U_{\lambda's} \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) U_{r'\sigma}^T \left(\vec{k}' - \frac{\vec{q}}{2} \right) \sigma_{\sigma\sigma'}^\nu U_{\sigma's} \left(\vec{k}' + \frac{\vec{q}}{2} \right) \\ & e^{\frac{i}{\hbar} (\epsilon_r(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}) - \epsilon_s(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2})) t} \left[\hat{\gamma}_r^\dagger \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \hat{\gamma}_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right), \hat{\gamma}_{r'}^\dagger \left(\vec{k}' - \frac{\vec{q}}{2} \right) \hat{\gamma}_{s'} \left(\vec{k}' + \frac{\vec{q}}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.120)$$

Sostituendo nella (4.120) la relazione (4.112) e prendendo il valor medio ad ambo i membri si ottiene che

$$\begin{aligned}
\langle [[\hat{\sigma}^\mu(\vec{q}, t), \hat{H}_0], \hat{\sigma}^\nu(-\vec{q})] \rangle_0 &= \sum_{\vec{k}, \lambda, \lambda', \sigma, \sigma', r, s} \left(\epsilon_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) - \epsilon_r \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \right) \\
U_{r\lambda}^T \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \sigma_{\lambda\lambda'}^\mu U_{\lambda's} \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) U_{s\sigma}^T \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \sigma_{\sigma\sigma'}^\nu U_{\sigma'r} \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \\
\left[f \left(\epsilon_r \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \right) - f \left(\epsilon_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \right) \right] e^{\frac{i}{\hbar} (\epsilon_r (\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}) - \epsilon_s (\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2})) t} = \\
- \sum_{\vec{k}, r, s} F_{rs}^{\mu\nu} \left(\epsilon_r \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) - \epsilon_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \right) \left[f \left(\epsilon_r \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \right) - f \left(\epsilon_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \right) \right] \\
e^{\frac{i}{\hbar} (\epsilon_r (\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}) - \epsilon_s (\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2})) t}
\end{aligned} \tag{4.121}$$

Inseriamo ora i valori medi (4.113) e (4.121) nella (4.5) per ottenere l'espressione finale delle funzioni di risposta. Calcoliamo anzitutto l'integrale

$$\int_0^{+\infty} dt \langle [[\hat{\sigma}^\mu(\vec{q}, t), \hat{H}_0], \hat{\sigma}^\nu(-\vec{q})] \rangle_0 e^{i(\omega + i\frac{\eta}{\hbar})t} \tag{4.122}$$

che compare a secondo membro. Si ha che

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} dt \langle [[\hat{\sigma}^\mu(\vec{q}, t), \hat{H}_0], \hat{\sigma}^\nu(-\vec{q})] \rangle_0 e^{i(\omega + i\frac{\eta}{\hbar})t} &= - \sum_{\vec{k}, r, s} F_{rs}^{\mu\nu} \\
\left(\epsilon_r \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) - \epsilon_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \right) \left[f \left(\epsilon_r \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \right) - f \left(\epsilon_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \right) \right] \\
\int_0^{+\infty} dt e^{\frac{i}{\hbar} (\hbar\omega + i\eta + \epsilon_r (\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}) - \epsilon_s (\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2})) t} = \\
- \sum_{\vec{k}, r, s} F_{rs}^{\mu\nu} \left(\epsilon_r \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) - \epsilon_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \right) \left[f \left(\epsilon_r \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \right) - f \left(\epsilon_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \right) \right] \\
\frac{i\hbar}{\hbar\omega + i\eta + \left(\epsilon_r \left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2} \right) - \epsilon_s \left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \right)}
\end{aligned} \tag{4.123}$$

Sommando allora i due addendi al membro di destra dell'equazione (4.5), otteniamo che

$$\begin{aligned}
(\hbar\omega + i\eta)\chi_0^{\mu\nu}(\vec{q}, \omega) &= \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}, r, s} F_{rs}^{\mu\nu} \left[f\left(\epsilon_r\left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}\right)\right) - f\left(\epsilon_s\left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}\right)\right) \right] \\
&\quad \left\{ 1 - \frac{\epsilon_r\left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}\right) - \epsilon_s\left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}\right)}{\hbar\omega + i\eta + \epsilon_r\left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}\right) - \epsilon_s\left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}\right)} \right\} \quad (4.124)
\end{aligned}$$

da cui, dividendo per $\hbar\omega + i\eta$ e sommando i due addendi a secondo membro, si ottiene l'espressione finale per le funzioni di risposta:

$$\chi_0^{\mu\nu}(\vec{q}, \omega) = \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}, r, s} F_{rs}^{\mu\nu} \frac{f\left(\epsilon_r\left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}\right)\right) - f\left(\epsilon_s\left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}\right)\right)}{\hbar\omega + i\eta - \left(\epsilon_r\left(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}\right) - \epsilon_s\left(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}\right)\right)} \quad (4.125)$$

che coincide con la (4.15).

Bibliografia

- [1] Anderson M. H., Ensher J. R., Matthews M. R., Wieman C. E., Cornell E. A., *Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor*. Science, **269**, 198 (1995)
- [2] Ketterle W., Zwierlein M. W., *Making, probing and understanding ultracold Fermi gases*. Rivista del Nuovo Cimento, Vol. **31** (2008)
- [3] Lin Y.-J., Jiménez-García K., Spielman I. B., *Spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates*. Nature, Vol. **471** (2011)
- [4] Wang Pengjun, Yu Zeng-Qiang, Fu Zhengkun, Miao Jiao, Huang Lianghai, Chai Shijie, Zhai Hui, Zhang Jing, *Spin-orbit coupled degenerate Fermi gases*. Physical Review Letters **109**, 095301 (2012)
- [5] Martone Giovanni L., Li Yun, Pitaevskii Lev P., Stringari Sandro, *Anisotropic dynamics of a spin-orbit coupled Bose-Einstein condensate*. Physical Review Letters **86**, 063621 (2012)
- [6] Mudrich M., Kraft S., Singer K., Grimm R., Mosk A., Weidemüller M., *Sympathetic cooling with two atomic species in an optical trap*. Physical Review Letters **88**, 253001 (2002)
- [7] Estève Jerome, *Cold atoms: trapped by nanostructures*. Nature Nanotechnology **8**, 317-318 (2013)
- [8] Cohen-Tannoudji C. et al., *Quantum mechanics*. Hermann, Paris (1977)
- [9] Jo G.-B., Lee Y.-R., Choi J.-H., Christensen C. A., Kim T. H., Thywissen J. H., Pritchard D. E., Ketterle W., *Itinerant ferromagnetism in a Fermi gas of ultracold atoms*. Science **325**, 1521 (2009)
- [10] Rashba Emmanuel I., *Spin-orbit coupling and spin transport*. Elsevier, Physica E: Low-dimensional systems and nanostructures, Vol. **34**, Issues 1-2 (2006)

- [11] Zhang Shang-Shun, Ye Jinwu, Liu Wu-Ming, *Itinerant ferromagnetism in repulsively interacting spin-orbit coupled Fermi gas*. e-print arXiv:1403.7031v2 (2014)
- [12] Negele John W., Orland Henri, *Quantum Many-particle Systems*. Addison-Wesley, New York (1988)
- [13] Nozierès Philippe, Pines David, *Theory of quantum liquids*. W.A. Benjamin (1966)
- [14] Huang Kerson, *Meccanica statistica*. Zanichelli (1997)
- [15] Conduit G.J., Simons B.D., *Itinerant ferromagnetism in an atomic Fermi gas: influence of population imbalance*. Physical Review Letters **79**, 053606 (2009)
- [16] Zhang Shang-Shun, Yu Xiao-Lu, Ye Jinwu, Liu Wu-Ming, *Collective modes of spin-orbit-coupled Fermi gases in the repulsive regime*. Physical Review Letters **87**, 063623 (2013)
- [17] Nagaosa Naoto, *Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics*. Springer (1999)
- [18] Chaikin P.M., Lubensky T.C., *Principles of condensed matter physics*. Cambridge University Press (1995)
- [19] Bruus Henrik, Flensberg Karsten, *Many-body quantum theory in condensed matter physics*. Oxford University Press (2004)