

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Dal “paradosso” di Einstein, Podolski e Rosen (EPR)  
alle disuguaglianze di Bell

Relatore

Prof./Dr. Giulio Peruzzi

Laureando

Alessandra Tonel

Anno Accademico 2021/2022



# Indice

<b>1</b>	<b>Il paradosso EPR</b>	<b>1</b>
1.1	Preliminari di meccanica quantistica	1
1.1.1	Funzione d'onda	2
1.1.2	Osservabili compatibili e principio di indeterminazione	2
1.1.3	Stati puri e stati misti	3
1.1.4	Stati entangled	5
1.2	L'articolo di EPR	5
1.2.1	Il Gedankenexperiment	6
1.2.2	Il realismo à la EPR	7
1.3	La risposta di Bohr	7
1.3.1	L'articolo	8
1.3.2	Il realismo di Bohr	9
1.4	La riformulazione moderna	9
<b>2</b>	<b>Il teorema di Bell</b>	<b>13</b>
2.1	Teoria delle variabili nascoste	13
2.1.1	Le correlazioni EPR	13
2.1.2	Le variabili nascoste per Bell	14
2.1.3	L'interpretazione di Bohm	16
2.2	Disuguaglianze di Bell	21
2.3	L'experimentum crucis	23
2.3.1	Disuguaglianza CHSH	23
2.3.2	L'esperimento di Aspect	24
	<b>Conclusioni</b>	<b>29</b>



# Capitolo 1

## Il paradosso EPR

Il 15 maggio del 1935, la nota rivista scientifica *Physical Review* pubblicò un articolo ricevuto qualche mese prima firmato da A. Einstein, B. Podolski e N. Rosen (EPR), con il titolo "*Può la descrizione quantomeccanica della realtà fisica essere considerata completa?*". Nonostante i tre fisici summenzionati non parlarono mai di "paradosso", è con la pubblicazione di questo articolo che ebbe inizio la storia di quello che, in letteratura, è noto come paradosso EPR e che si inserisce nel controverso percorso di accettazione della meccanica quantistica. Gli autori scrissero in un periodo in cui tale teoria stava raccogliendo un grande successo, grazie alle conferme sperimentali delle previsioni teoriche. Data questa premessa, è comprensibile che la risposta negativa di EPR alla domanda che funge da titolo al loro articolo suscitò la reazione in N. Bohr, che rappresenta, assieme ad W. Heisenberg, il padre della cosiddetta "interpretazione di Copenaghen", l'interpretazione oggi più diffusa della teoria dei quanti. La risposta di Bohr, infatti, giunse il 15 ottobre dello stesso anno, pubblicata con lo stesso titolo su *Physical Review*, con lo scopo di confutare lo scetticismo di EPR circa la completezza della meccanica quantistica. La maggior parte dei fisici non prestò, in quel volgere di anni, particolare attenzione alla questione, che appariva prevalentemente di carattere accademico e filosofico: da una parte, la scuola di Copenaghen privilegiava l'aspetto predittivo delle teorie, mentre la visione à la EPR sottolineava la necessità di apparati teorici che, oltre a fornire buone previsioni agli esperimenti, dovessero descrivere la realtà oggettiva che esiste al di là delle osservazioni empiriche.

In questo capitolo verranno trattate le argomentazioni e le posizioni di EPR e di Bohr, attraverso l'esposizione dei principi fisici, matematici ed epistemologici alla loro base, per poi dare una formulazione moderna del paradosso sulla base di quella operativa di D. Bohm e Y. Aharonov. Prima di tutto, però, verranno esposti alcuni capisaldi dell'interpretazione ortodossa della meccanica quantistica, che verranno ripresi più volte durante l'elaborato.

### 1.1 Preliminari di meccanica quantistica

Il seme della meccanica quantistica venne gettato ad inizio del XX secolo, quando diverse evidenze sperimentali, che la fisica classica non riusciva a cogliere, vennero descritte ipotizzando la quantizzazione dei possibili valori assunti dall'energia delle radiazioni elettromagnetiche: celebri esempi sono lo spettro di assorbimento di un corpo nero e l'effetto fotoelettrico, i cui problemi "classici" vennero risolti rispettivamente da M. Planck e A. Einstein. Il lavoro dei due fisici ispirò poi N. Bohr, che nel 1913 teorizzò un modello atomico che prevedeva uno spettro quantizzato per l'energia dell'elettrone dell'atomo di idrogeno. Il resto, come si suol dire, è storia: gli studi indipendenti di W. Heisenberg (1925) e di E. Schrödinger (1926) e l'avvento del formalismo di P. Dirac (1930) spianarono la strada all'approccio fisico che, ancora ai nostri giorni, è utilizzato per descrivere il mondo microscopico, anche conosciuto, proprio in onore alla meccanica quantistica, come "mondo dei quanti".

### 1.1.1 Funzione d'onda

La descrizione corretta dell'effetto fotoelettrico, che motivò l'assegnazione ad Einstein del premio nobel, si basava sull'ipotesi, generalizzata a partire dall'idea di Planck, che le onde elettromagnetiche fossero costituite da "pacchetti" discreti di energia, i fotoni, anche detti quanti di luce, ciascuno del valore  $E = h\nu = \hbar\omega$ , dove  $h$  è la costante di Planck,  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  la costante di Planck ridotta,  $\nu$  la frequenza dell'onda e  $\omega = 2\pi\nu$  la sua pulsazione. Il lavoro di A. Compton sull'effetto che porta il suo nome (1924) confermò l'esistenza del fotone, che venne interpretato come una vera e propria "particella della luce". Parallelamente alla scoperta dei fotoni, esperimenti sugli spettri di assorbimento ed emissione degli atomi mostravano che tali spettri sono caratterizzati da righe distinte l'una dall'altra; questa evidenza empirica era facilmente spiegabile con l'ipotesi di quantizzazione dell'energia degli atomi, che permetteva di interpretare le righe degli spettri come i "salti" di energia da un livello all'altro, nell'assorbimento o emissione di un fotone da parte dell'atomo. Nel 1923 queste considerazioni portarono L. de Broglie ad ipotizzare che tutte le particelle avessero una natura ondulatoria, proprio come i fotoni, associandovi le caratteristiche tipiche di un'onda:

1. una frequenza  $\nu$  e una pulsazione  $\omega$ ;
2. un'energia pari a quella del fotone,  $E = \hbar\omega$ ;
3. una quantità di moto, proporzionale al numero d'onda,  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ ;
4. una lunghezza d'onda, legata alla quantità di moto dalla celebre relazione di de Broglie,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{p}.$$

Gli esperimenti di Davisson e Germer (1927) verificarono quanto ipotizzato sopra e divenne legge uno dei più rivoluzionari aspetti della fisica moderna, il dualismo onda-particella: se prima dell'idea di Planck onde e particelle rappresentavano due nature distinte, a quel punto divennero due facce della stessa medaglia, che in base all'esperimento si mostravano o meno. Le onde sono formate da particelle e alle particelle può essere associata un'onda.

A partire dall'ipotesi de Broglie, la meccanica quantistica associa ad ogni particella una funzione d'onda,  $\psi(\vec{r}, t)$ , che si sostituisce al concetto classico di traiettoria. La funzione d'onda è una funzione in uno spazio di Hilbert, dipendente in generale dalla posizione della particella e dal tempo e, nell'interpretazione della teoria proposta da Born (1926), il suo modulo quadro viene associato alla densità di probabilità di trovare la particella nella posizione  $\vec{r}$  all'istante  $t$ . La funzione d'onda ha anche un altro significato in meccanica quantistica, più matematico che fisico in questo caso: data una generica osservabile  $\mathcal{A}$  associata ad un operatore  $A$ , siano  $a_i$  i suoi autovalori e  $\psi(\vec{r}, t_0) = \psi_{a_i}(\vec{r})$  le relative autofunzioni, pari alle funzioni d'onda a tempo fissato  $t_0$ , che rappresenta l'istante in cui si effettua una misura di  $\mathcal{A}$ . Allora per  $t < t_0$

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_a c_a \psi_{a_i}(\vec{r})$$

e, se la misura dà come risultato un certo  $a_k$ , allora per  $t > t_0$

$$\psi'(\vec{r}, t) = \psi_{a_k}(\vec{r}).$$

Al di là del suo utilizzo, la funzione d'onda rappresenta uno stato puro di un sistema, ovvero ne contiene tutta l'informazione: questa affermazione, di centrale importanza nel formalismo della teoria, è proprio quella che viene messa in discussione da EPR, quando nel loro articolo parlano di incompletezza della meccanica quantistica.

### 1.1.2 Osservabili compatibili e principio di indeterminazione

La questione della misura, accennata al punto precedente, è sicuramente un aspetto che non si può tralasciare nello stilare le differenze tra l'approccio classico e quello quantistico. Se in meccanica classica le misure possono avvenire in linea di principio con precisione arbitraria, in maniera istantanea e

senza disturbare il sistema, in meccanica quantistica le prime due condizioni sono soddisfatte, mentre la terza non è sperimentalmente verificata. Nella teoria quanto-meccanica, una misura determina una variazione dello stato del sistema tra l'istante subito prima della misura e quello subito dopo in maniera brusca, tramite il cosiddetto "collasso del pacchetto d'onda"; esistono situazioni in cui è possibile conoscere lo stato del sistema dopo la misura e quella d'interesse in questo caso riguarda la misura di osservabili compatibili, che verrà ora sintetizzata.

Siano  $A$  e  $B$  operatori autoaggiunti associati alle osservabili  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ : per semplicità della trattazione, si indicherà con  $A$  e  $B$  sia gli operatori che le corrispondenti osservabili.

Si supponga di misurare  $A$  all'istante  $t$  e di ottenere l'autovalore  $a_k \in \sigma(A)$ ; si misuri  $B$  ad un istante successivo a  $t$ , diciamo  $t^+$ , ottenendo  $b_i \in \sigma(B)$ .  $A$  e  $B$  si dicono osservabili compatibili se, dopo aver misurato di nuovo  $A$  all'istante  $t^{++}$ , si ottiene ancora  $a_k$ ,  $\forall a_k \in \sigma(A)$ ,  $\forall b_i \in \sigma(B)$  e per ogni stato del sistema. Esistono due teoremi fondamentali sulle osservabili compatibili:

- i.  $A$  e  $B$  sono compatibili  $\iff$  esiste una base (che poi eventualmente si ortonormalizza) di autovettori comuni per lo spazio di Hilbert in cui  $A$  e  $B$  sono definite.
- ii. Se  $A$  e  $B$  sono compatibili  $\iff$  commutano tra loro, ovvero  $[A, B] = 0$ .

Per quanto riguarda la misura in meccanica quantistica, il principio di indeterminazione permette di dirimere tra il caso di osservabili compatibili e non.

**Principio di indeterminazione:** siano  $a$  e  $b$  due valori reali e sia  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  uno stato del sistema. Allora il prodotto delle fluttuazioni di  $A$  e  $B$  attorno, rispettivamente, ad  $a$  e  $b$  nello stato  $|\psi\rangle$  è maggiore o uguale a modulo del valor medio del commutatore tra  $A$  e  $B$  nello stato  $|\psi\rangle$ , moltiplicato per  $\frac{1}{2}$ .

$$(\Delta A)_{|\psi\rangle, a} (\Delta B)_{|\psi\rangle, b} \geq \frac{1}{2} | \langle [A, B] \rangle_{|\psi\rangle} |. \quad (1.1)$$

In particolare, se  $A = X$ , operatore posizione, e  $B = P$ , operatore momento, allora

$$[X, P] = XP - PX = i\hbar \implies \Delta X \Delta P \geq \frac{1}{2} |i\hbar| = \frac{\hbar}{2}. \quad (1.2)$$

Qui risiede la ragione per cui in meccanica quantistica non esistono traiettorie per le particelle: non è possibile, in linea di principio, misurare in uno stesso istante con precisione grande a piacere posizione e velocità di una particella.

Questi risultati sanciscono l'impossibilità di conoscere con certezza (probabilità unitaria) e simultaneamente il valore di due osservabili non compatibili, dal momento che la misura di una delle due comporta l'annullamento della sua fluttuazione e rende quindi infinita quella dell'altra, affinché valga (1.1). Qui risiede il tanto discusso indeterminismo della meccanica quantistica, che rappresenta uno dei principali ingredienti dell'argomentazione EPR.

### 1.1.3 Stati puri e stati misti

Al punto (1.1.1) si è parlato della funzione d'onda come stato puro del sistema, definendolo come una sorta di contenitore dell'informazione massimale. Mentre in meccanica classica, una volta note le coordinate generalizzate e i rispettivi momenti coniugati, si conosce completamente lo stato di un sistema, in meccanica quantistica non sempre è possibile avere tutta l'informazione sul sistema e in tal caso si parla di stato misto o miscela quantistica. Avere un sistema in uno stato puro e averlo in uno stato misto comporta risultati differenti, in termini di probabilità associata ad una misura.

Si consideri un sistema semplice  $\mathcal{S}$  associato ad uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  bidimensionale, di cui una base ortonormale è quella canonica,  $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ . Sia  $\mathcal{E}_p$  un insieme formato da sistemi  $\mathcal{S}$  descritti dallo stato puro

$$|\psi\rangle = c_1 |e_1\rangle + c_2 |e_2\rangle \quad (1.3)$$

normalizzato, per cui  $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ . Sia invece  $\mathcal{E}_m$  un insieme formato da sistemi  $\mathcal{S}$  descritti dallo stato misto che contiene i due vettori di base associati alla rispettiva probabilità,

$$\begin{cases} |\psi_1\rangle = |e_1\rangle \rightarrow p_1 = |c_1|^2 \\ |\psi_2\rangle = |e_2\rangle \rightarrow p_2 = |c_2|^2 \end{cases}, \quad (1.4)$$

per cui vale anche in questo caso  $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ . Si supponga di misurare per  $\mathcal{E}_p$  l'osservabile  $\mathcal{A}$  di autovettori  $|a_k\rangle$  e autovalori  $a_k$ , per semplicità non degeneri. Allora, un postulato della meccanica quantistica afferma che la probabilità associata all'autovalore  $a_i$  è

$$P_p(a_i) = \|\Pi_i |\psi\rangle\|^2, \quad (1.5)$$

dove  $\Pi_i$  è il proiettore sull'autospazio associato ad  $a_i$ ,

$$\Pi_i = |a_i\rangle \langle a_i|. \quad (1.6)$$

Dalla (1.3) e dalla (1.6), la (1.5) si può scrivere come

$$P_p(a_i) = \left\| \sum_j c_j \langle a_i | e_j \rangle |a_i\rangle \right\|^2 = \sum_j |c_j|^2 |\langle a_i | e_j \rangle|^2 + \sum_{j \neq m} c_m^* c_j \langle e_m | a_1 \rangle \langle a_i | e_j \rangle, \quad (1.7)$$

dove sono stati separati i contributi  $j = m$  e  $j \neq m$ . Se si misura invece  $\mathcal{A}$  per  $\mathcal{E}_m$ , la meccanica quantistica associa all'autovalore  $a_i$  una probabilità data dalla media pesata, tramite le  $p_i$  della (1.4), di probabilità del tipo (1.5) valutate negli stati che appartengono alla miscela, quindi

$$P_m(a_i) = \sum_j |p_j|^2 \|\Pi_i |\psi_j\rangle\|^2 = \sum_j |c_j|^2 |\langle a_i | e_j \rangle|^2. \quad (1.8)$$

La differenza

$$P_p - P_m = \sum_{j \neq m} c_m^* c_j \langle e_m | a_1 \rangle \langle a_i | e_j \rangle \quad (1.9)$$

suggerisce che si possa distinguere stato puro da stato misto quando i termini fuori diagonale ( $j \neq m$ ) sono non nulli, ovvero quando  $\mathcal{A}$  non è diagonale nella base scelta.

Si consideri ora un sistema composto da due sistemi I e II,  $\mathcal{S}_C = I + II$ , quindi associato a  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . Se  $\{|\alpha\rangle\}$  e  $\{|\beta\rangle\}$  sono basi ortonormali rispettivamente di I e II, allora  $\{|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle\} \equiv \{|\alpha\rangle |\beta\rangle\}$  è base ortonormale di  $\mathcal{S}_C$ ; l'insieme  $\mathcal{E}_p$  è dunque descritto da uno stato del tipo

$$|\psi\rangle = c_1 |\alpha_1\rangle |\beta_1\rangle + c_2 |\alpha_2\rangle |\beta_2\rangle, \quad (1.10)$$

mentre l'insieme  $\mathcal{E}_m$  è descritto dallo stato misto

$$\begin{cases} |\psi_1\rangle = |\alpha_1\rangle |\beta_1\rangle \rightarrow p_1 = |c_1|^2 \\ |\psi_2\rangle = |\alpha_2\rangle |\beta_2\rangle \rightarrow p_2 = |c_2|^2 \end{cases}, \quad (1.11)$$

di nuovo con  $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ . Si supponga di misurare un'osservabile  $\mathcal{A}_I$  di autovettori  $|a_k\rangle$  e autovalori  $a_k$ , che agisce banalmente in II, ovvero come l'identità, e non banalmente in I. Allora, per  $\mathcal{E}_p$  vale

$$\begin{cases} P_p(a_i) = \|\Pi_i^I |\psi\rangle\|^2 \\ \Pi_i^I = |a_i\rangle \langle a_i| \otimes \mathbf{1}_{II} \end{cases} \quad (1.12)$$

e, sostituendo la (1.10),

$$P_p(a_i) = \sum_j |c_j|^2 |\langle a_i | \alpha_j \rangle|^2. \quad (1.13)$$

Per  $\mathcal{E}_m$  vale

$$P_m(a_i) = \sum_j |p_j|^2 \|\Pi_i^I |\psi_j\rangle\|^2 = \sum_j |c_j|^2 |\langle a_i | \alpha_j \rangle|^2. \quad (1.14)$$

In questo caso, si nota che le due probabilità coincidono: per i sistemi composti, per poter distinguere tra stato puro e stato misto, non basta dunque un'osservabile relativa ad uno dei due sistemi; si considerino allora l'operatore  $\Omega = A_I \otimes B_{II}$ , associato ad un'osservabile non banale né in I né in II, e gli autovalori  $a_i$  e  $b_j$  rispettivamente di  $A_I$  e  $B_{II}$ . Allora, iterando i passaggi formali di prima, per  $\mathcal{E}_p$  vale

$$\begin{cases} \Pi_{ij} = |a_i\rangle \langle a_i| \otimes |b_j\rangle \langle b_j| \\ P_p(a_i, b_j) = \sum_k |c_k|^2 |\langle a_i | \alpha_k \rangle|^2 |\langle b_j | \beta_k \rangle|^2 + \sum_{k \neq m} c_m^* c_k \langle \alpha_m | a_i \rangle \langle a_i | \alpha_k \rangle \langle \beta_m | b_j \rangle \langle b_j | \beta_k \rangle \end{cases} \quad (1.15)$$

e per  $\mathcal{E}_m$

$$P_m(a_i, b_j) = \sum_k |p_k|^2 |\Pi_{ij} |\psi_k\rangle|^2 = \sum_k |c_k|^2 |\langle a_i | \alpha_k \rangle|^2 |\langle b_j | \beta_k \rangle|^2. \quad (1.16)$$

La differenza tra i due risultati è di nuovo imputabile ai termini fuori diagonale, a patto che  $A_I$  e  $B_{II}$  non siano diagonali rispettivamente sulle basi  $\{|\alpha\rangle\}$  e  $\{|\beta\rangle\}$ .

Questa differenza non nulla rappresenta il risultato contraddittorio nella formulazione moderna del paradosso.

### 1.1.4 Stati entangled

Si consideri un sistema quantistico associato ad uno spazio di Hilbert dato dal prodotto tensoriale di altri due,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . Generalizzando una proprietà utilizzata in (1.1.3), se  $\{|u_{1,i}\rangle\}_{i=1\dots N_1}$  è una base ortonormale di  $\mathcal{H}_1$  e  $\{|u_{2,j}\rangle\}_{j=1\dots N_2}$  è una base ortonormale di  $\mathcal{H}_2$ , allora  $\{|u_{1,i}\rangle \otimes |u_{2,j}\rangle\}_{i=1\dots N_1; j=1\dots N_2}$  è una base ortonormale di  $\mathcal{H}$ , quindi, in generale,

$$\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H} \rightarrow |\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} c_{ij} |u_{1,i}\rangle \otimes |u_{2,j}\rangle.$$

In alcuni casi particolari,

$$\exists |\psi_1\rangle = \sum_{i=1}^{N_1} a_i |u_{1,i}\rangle, |\psi_2\rangle = \sum_{j=1}^{N_2} b_j |u_{2,j}\rangle \quad t.c. \quad |\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} a_i b_j |u_{1,i}\rangle \otimes |u_{2,j}\rangle,$$

ovvero  $c_{ij} = a_i b_j$ , Questi stati sono detti separabili, mentre quando non è possibile fattorizzare i coefficienti  $c_{ij}$  si parla di stati entangled (intrecciati); si può dimostrare che stati entangled non possono diventare separabili. Esempio di stato entangled, che sarà particolarmente rilevante nel corso della trattazione, è una molecola formata da due particelle con spin.

## 1.2 L'articolo di EPR

*"Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?"*[1]

Einstein, Podolsky e Rosen stilano il loro articolo argomentando, attraverso gli strumenti della fisica e della filosofia della scienza, una posizione a sfavore della completezza della meccanica quantistica, come suggerisce la domanda retorica del titolo. L'articolo inizia con una breve introduzione generale sulla bontà di una teoria fisica, con la quale si sostiene che quello che vi si deve richiedere sono la *correttezza* e la *completezza*. La prima si valuta attraverso la capacità predittiva: se il confronto con i dati sperimentali rivela un buon accordo tra la teoria e l'esperienza, allora questa può dirsi corretta. La seconda caratteristica riguarda invece il rapporto tra i modelli della teoria e la realtà: *ogni elemento della realtà fisica deve avere una controparte nella teoria fisica*, scrivono EPR, affinché sia soddisfatta la completezza. Sulla correttezza della meccanica quantistica gli autori dell'articolo non si soffermano, dato l'accordo tra la teoria e l'evidenza empirica che proprio in quegli anni veniva definitivamente confermato e condiviso dalla comunità scientifica, mentre mettono in discussione la sua completezza, attraverso un'argomentazione che vuole usare un principio fondamentale della teoria contro se stessa; se consideriamo, infatti, le seguenti proposizioni

1. la descrizione della realtà data dalla funzione d'onda in meccanica quantistica non è completa
2. due quantità descritte da operatori che non commutano non possono avere una realtà simultanea

allora o vale (1) o vale (2), quindi se (2) è falsa allora (1) è vera. L'articolo di EPR vuole proprio dimostrare quanto appena enunciato attraverso un esperimento mentale, ovvero che il principio di indeterminazione, su cui la meccanica quantistica basa una grande quantità di risultati teorici, non è sperimentalmente verificato e, di conseguenza, viene a mancare la completezza della teoria.

Anzitutto, poiché la buona definizione di completezza prevede una buona definizione di "elemento di realtà", EPR enunciano il principio di realtà.

**Principio di realtà:** se senza disturbare in alcun modo il sistema possiamo predire con certezza (con probabilità uguale a 1) il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento di realtà corrispondente a questa quantità.

Spesso ci si riferisce agli elementi di realtà come proprietà del sistema ed in seguito verranno utilizzate equivalentemente le due espressioni.

### 1.2.1 Il Gedankenexperiment

Gli autori procedono con l'esaminare un esempio fisico di stato entangled, dato da un sistema associato ad uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_{II}$  costituito da due sistemi, I e II, di particella singola, i quali si suppone interagiscano tra di loro dal tempo  $t = 0$  al tempo  $t = T$ , dopo il quale vengono isolati; questa condizione può essere riassunta nel cosiddetto principio di località.

**Principio di località:** dati due sistemi separati da un intervallo di tipo spazio nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ , l'evoluzione delle proprietà di uno dei due durante  $\Delta t$  non può essere influenzata da operazioni eseguite sull'altro.<sup>1</sup>

Dopo aver isolato I e II, proseguono EPR, si suppone di voler effettuare una misura parziale sul sistema, ovvero una misura di un'osservabile associata ad un operatore che agisce non banalmente solo su uno dei due sistemi. Si consideri l'operatore  $A$  tale che su  $\mathcal{H}$  è definito come

$$\tilde{A} = A \otimes \mathbf{1}_{II},$$

di autofunzioni  $u_1(x_1)$ ,  $u_2(x_1)$ ,  $u_3(x_1)$ , dove  $x_1$  è la variabile associata alla posizione della particella nel sistema I. Allora,

$$\forall \Psi \in \mathcal{H}, \quad \Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^3 \psi_n(x_2) u_n(x_1), \quad (1.17)$$

dove  $\psi_n(x_2)$  è la funzione d'onda che descrive lo stato del sistema II. Supponendo che una misura di  $A$  dia come risultato l'autovalore  $a_k$ , relativo all'autofunzione  $u_k$ , allora lo stato del sistema dopo la misura viene proiettato sull'autospazio relativo ad  $a_k$ , ovvero generato da  $u_k$ , quindi

$$\Psi'(x_1, x_2) = \psi_k(x_2) u_k(x_1). \quad (1.18)$$

Il collasso del pacchetto d'onda in seguito alla misura su I dà, dunque, anche un'informazione su II, dal momento che dalla (1.18) si evince che lo stato di II dopo la misura deve essere  $\psi_k(x_2)$ .

Si effettui ora una misura parziale su II di un'osservabile  $B \neq A$ , di autofunzioni  $v_1(x_2)$ ,  $v_2(x_2)$ ,  $v_3(x_2)$ ; si può scrivere allora ogni stato del sistema  $\mathcal{H}$  come

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^3 \phi_n(x_1) v_n(x_2) \quad (1.19)$$

e, se una misura di  $B$  dà il risultato  $b_r$ , dopo di essa lo stato diventa

$$\Psi'(x_1, x_2) = \phi_r(x_1) v_r(x_2). \quad (1.20)$$

<sup>1</sup>Nello spazio di Minkowski una distanza di tipo spazio è tale che  $\Delta x^2 > c^2 \Delta t^2$ , ovvero tale che per percorrerla bisognerebbe viaggiare ad una velocità superiore a quella della luce nel tempo  $\Delta t$ , quindi è sostanzialmente una distanza che serve per isolare due sistemi in relatività speciale.

EPR fanno allora notare che è possibile assegnare due diverse funzioni d'onda ( $\psi_k$  e  $\phi_r$ ) alla stessa realtà.

Sia ora  $A = P$ , operatore momento lineare per la prima particella; allora si possono dare delle espressioni note ad autovalori e autofunzioni:

$$u_n(x_1) \equiv u_p(x_1) = e^{\frac{2\pi i}{h} p x_1} \rightarrow a_k \equiv p. \quad (1.21)$$

Nella base  $\{u_p\}$ ,

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\pi i}{h} p(x_1 - x_2 + x_0)} dp, \quad (1.22)$$

con  $x_0$  costante. Poiché vale la (1.17) per spettro continuo, si ha

$$\begin{cases} \Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1) \\ \psi_p = e^{\frac{2\pi i}{h} p(-x_2 + x_0)} = e^{-\frac{2\pi i}{h} p(x_2 - x_0)}. \end{cases} \quad (1.23)$$

Dal momento che nello spazio delle coordinate l'operatore momento per la seconda particella ha espressione  $P = -\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_2}$  e ha dunque autofunzioni nella forma (1.21), si nota che  $\psi_p$  è anche autofunzione per  $P$  di autovalore  $-p$  per il sistema II.

D'altra parte, se  $B = Q$ , operatore posizione per la prima particella, scrivendo (1.19) per spettro continuo, si ha:

$$\begin{cases} v_r(x_1) \equiv v_x(x_1) = \delta(x_1 - x) \rightarrow b_r \equiv x \\ (1.19), (1.22) \rightarrow \phi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\pi i}{h} p(x - x_2 + x_0)} dp = h\delta(x - x_2 + x_0) \end{cases}, \quad (1.24)$$

quindi  $\phi_r$  è autofunzione di  $Q = x_2$  di autovalore  $x + x_0$  per la particella del sistema II.

Poiché  $Q$  e  $P$  per una stessa particella sono operatori che non commutano, l'esempio precedente porta alla conclusione che è possibile per due operatori non compatibili avere autostati simultanei, dato che si è stabilito sopra che  $\psi_p$  e  $\phi_x$  descrivessero lo stesso stato. EPR giungono in questo modo a negare la proposizione (2) e quindi a dimostrare la verità della propria tesi, ovvero la proposizione (1), per cui la descrizione degli stati dei sistemi fisici, che la meccanica quantistica affida alla funzione d'onda, è da considerarsi incompleta.

### 1.2.2 Il realismo à la EPR

Una possibile obiezione all'argomentazione proposta, scrivono gli autori stessi, riguarda il criterio di realtà: si potrebbe fare riferimento ad un realismo che specifichi che due quantità possono essere simultaneamente elementi di realtà *solo quando possono essere misurate o predette contemporaneamente*. EPR controargomentano attraverso la località, secondo cui non è possibile che operazioni successive condotte su una particella in rapida successione possano influenzare l'esito dei risultati sull'altra, che si trova isolata dalla prima. Il realismo à la EPR, inoltre, ammette la possibilità di considerare come elementi di realtà gli enti del mondo quantistico, mentre la corrente di pensiero legata all'interpretazione di Copenaghen stende un velo di incertezza sull'esistenza oggettiva del mondo microscopico.

## 1.3 La risposta di Bohr

La critica alla completezza della meccanica quantistica mosse la risposta di Bohr, che si mise presto all'opera per confutare l'argomentazione di EPR. Schrödinger, uno dei nomi più importanti della teoria dei quanti, invece reagì in maniera positiva all'articolo e conìò uno dei termini più celebri della scienza moderna e contemporanea, quello di "entanglement", con il quale volle indicare la non separabilità degli stati di due sistemi che hanno interagito tra loro per un certo tempo, quell'intreccio che sembra legarli anche dopo che i due sistemi sono stati isolati. È proprio l'entanglement, combinato al principio di indeterminazione, a rendere la meccanica quantistica inconciliabile con il principio di realismo locale<sup>2</sup>, a cui EPR non erano disposti a rinunciare. Questa considerazione esplicita la visione ancora classica non solo della fisica, ma anche del mondo, che guidò gli autori alla stesura dell'articolo.

<sup>2</sup>principio di realtà e principio di località vengono spesso riassunti in questa locuzione

### 1.3.1 L'articolo

Bohr colse questo problema nella loro trattazione; il suo articolo[2] si apre con un breve riassunto dei punti principali dell'argomentazione di EPR, per poi affermare che

*l'apparente contraddizione infatti mostra solamente un'essenziale inadeguatezza della consueta visione della filosofia naturale per una spiegazione razionale dei fenomeni fisici del tipo di cui ci occupiamo in meccanica quantistica. Infatti l'interazione finita tra gli oggetti e gli agenti di misura [...] comporta [...] la necessità di una rinuncia all'idea classica di causalità e ad una radicale revisione del nostro approccio ai problemi della realtà fisica.*

Per Bohr è necessario appellarsi ad una nuova visione della realtà e riformulare dunque il principio di realismo: è a tale scopo che l'autore propone un esperimento che riproduce la situazione considerata da EPR.

Si consideri un diaframma ancorato ad un supporto e costituito da due fenditure, spaziate da una distanza molto maggiore della larghezza delle fenditure; si considerino poi due particelle, appartenenti ai sistemi I e II in accordo con il formalismo di EPR, che vengono inviate verso il diaframma e si supponga passino ognuna da una fenditura diversa, indipendentemente dall'altra. Misurando la distanza  $d$  tra le fenditure è possibile scrivere una relazione tra le posizioni delle particelle all'istante in cui giungono al diaframma;

$$d = |q_1 - q_2|. \quad (1.25)$$

Inoltre, quando le particelle attraversano le fenditure, trasferiscono parte della loro componente perpendicolare della quantità di moto al diaframma e, misurando dunque il momento di quest'ultimo,  $p_{\text{diaframma}}$ , si può scrivere la relazione:

$$p_{\text{diaframma}} = |p_1 + p_2|. \quad (1.26)$$

$d$  e  $p_{\text{diaframma}}$  commutano, quindi la meccanica quantistica permette di misurarle simultaneamente, inoltre, grazie a queste due relazioni, misurando la posizione/momento di una delle particelle è possibile predire con certezza posizione/momento dell'altra; così facendo, Bohr rese l'entanglement tra i due sistemi. A questo punto si supponga di misurare  $q_1$ : dalla (1.25) è, in linea di principio, possibile predire  $q_2$  con certezza senza misurarla ed è quindi possibile eleggere ad elemento di realtà per il sistema II tale grandezza. Per rispettare il fatto che  $P$  e  $Q$  non commutano, misurando poi  $p_2$  dalla (1.26) si può ricavare con certezza anche  $p_1$ . Questo è il ragionamento che hanno seguito EPR, affidandosi ad un'idea di realtà in cui è totalmente trascurato il rapporto tra la misura dell'oggetto quantistico e l'apparato strumentale, in questo caso, rispettivamente, particelle e diaframma. Bohr mette in luce che in una vera situazione sperimentale, non mentale come quella à la EPR, la misura di  $q_1$  dà un'informazione sulla posizione della particella I relativamente al diaframma, quindi permette di stabilire anche la posizione del diaframma rispetto al sostegno rigido; in questo modo, la quantità di moto del diaframma non si conserva più, per cui non è più possibile conoscere  $p_{\text{diaframma}}$ . Non potendosi applicare la (1.26), non è possibile conoscere con certezza  $p_2$ , che non è dunque un elemento di realtà, mentre lo è  $q_2$ , dal momento che vale la (1.25). Analogamente, se si misura  $p_1$  viene persa la possibilità di dedurre la posizione del diaframma rispetto al sostegno, si può quindi calcolare  $p_2$  con certezza, ma non  $q_2$ .

Bohr risolve il paradosso EPR introducendo il **principio di complementarità**, che si rifà a quello formulato dallo stesso fisico circa il dualismo onda-particella: sperimentalmente ci si trova sempre nelle condizioni di dover necessariamente scegliere tra due apparati di misura complementari e mutualmente escludentesi, in questo caso la misura del momento di una delle due particelle e la perdita di informazioni certe sulla posizione dell'altra, perché a questo punto  $d$  non è più ben definito, e quindi di entrambe, oppure la misura della posizione di una delle due e la perdita di informazioni certe sul momento di entrambe, perché non vale più la conservazione della quantità di moto. Questo fatto sperimentale preclude possibilità predittive in pieno accordo con il principio di indeterminazione. Per Bohr non è dunque la descrizione data dalla funzione d'onda ad essere incompleta, perché il problema risiede nel fatto che, una volta scelto di misurare posizione/ momento di una particella, viene a meno

la relazione (la conservazione della quantità di moto/ posizione del diaframma rispetto al supporto) che permette di prevedere momento/ posizione dell'altra, a causa di correlazioni non classiche tra gli enti fisici e apparati strumentali. Bohr nel suo articolo evidenziò

*questa necessità di discriminare in ogni apparato sperimentale tra quelle parti del sistema fisico da considerare come strumenti di misura e quelle che costituiscono l'oggetto di investigazione.*

### 1.3.2 Il realismo di Bohr

Il problema dell'argomentazione di EPR è dunque il criterio di realtà, che ammette la possibilità di prevedere posizione/momento della particella II solo attraverso misure su I, quindi *senza disturbare in alcun modo* il sistema II. La questione di come definire la misura in meccanica quantistica è molto delicata e ancora aperta; secondo Bohr

*c'è essenzialmente la questione di un'influenza sulle condizioni che definiscono la possibilità di previsione sul comportamento futuro del sistema. [...] queste condizioni costituiscono un elemento intrinseco della descrizione di ogni fenomeno al quale il termine realtà fisica può propriamente essere attribuito.*

Bohr è orientato ad un criterio di realtà che tiene conto delle possibilità e dei limiti dell'esperienza, relativizzando la descrizione della natura al limite umano: se l'essere umano, per sua natura e per la natura del mondo, non può interagire con il mondo quantistico senza eliminare il disturbo e l'indeterminismo, allora non si può nemmeno parlare di universo quantistico in termini oggettivi. Quando a Bohr fu chiesto se la meccanica quantistica rispecchiasse una realtà sottostante, egli rispose:

*"Non esiste un universo quantistico. Esiste solo una descrizione quantistica astratta. È sbagliato pensare che il compito della fisica sia quello di scoprire com'è la Natura. La fisica si occupa di ciò che noi possiamo dire sulla Natura."<sup>3</sup>*

Questa posizione non è nuova nella filosofia della scienza: già all'inizio del '900 i verificazionisti proposero di esprimere la conoscenza scientifica in termini empirici, attribuendo un significato solo a quegli enunciati che potevano essere verificati con l'esperienza. Il significato, per questi filosofi, corrisponde al valore di verità, al legame tra la teoria ed il mondo, è il ponte tra l'ente e la realtà: quando il significato si può attribuire ad un enunciato, allora si può parlare di verità nella realtà, e se il significato è strettamente legato alla possibilità di verifica sperimentale dell'enunciato, allora lo è anche la realtà. I verificazionisti non distinguevano tra mondo classico e mondo quantistico, cercando di ridurre tutta l'attività scientifica ad un questione linguistica, mentre Bohr, come visto, propose con convinzione nel suo articolo la differenza tra l'approccio classico e quello quantistico; al di là di ciò, si vuole sottolineare che la possibilità di pensare alla realtà relativamente alla prassi umana era già presente nella discussione filosofica precedente a Bohr e portò anche altri fisici a condividerne diversi aspetti. Heisenberg ad esempio dichiarò:

*"Negli esperimenti sugli eventi atomici noi abbiamo a che fare con cose e fatti, con fenomeni che sono esattamente altrettanto reali quanto i fenomeni della vita quotidiana. Ma gli atomi e le stesse particelle elementari non sono altrettanto reali; formano un mondo di possibilità e di potenzialità piuttosto che un mondo di cose e fatti."<sup>4</sup>*

## 1.4 La riformulazione moderna

La distanza tra le posizioni di EPR e Bohr sul realismo scientifico, in particolare su quello relativo al mondo quantistico, allontanò dalla disputa la comunità scientifica, che riduceva la questione posta da EPR ad una scelta di un'epistemologia. Il primo noto contributo alla rinascita dell'argomento EPR si attesta nel 1957, quando il 15 novembre di quell'anno *Physical Review* pubblicò l'articolo di D. Bohm e Y. Aharonov, dal titolo *"Discussion of experimental proof for the paradox of Einstein, Rosen, and*

<sup>3</sup>A. Petersen. *The philosophy of Niels Bohr*, The Bulletin of the Atomic Scientists, 1963.

<sup>4</sup>W. Heisenberg. *Fisica e filosofia*, Il Saggiatore, 2003.

*Podolsky*"[3]. L'articolo propone una formulazione operativa dell'esperimento mentale di EPR, con considerazioni che ispireranno successivamente J. Bell, il quale, grazie anche ad altri articoli di Bohm, lavorò per chiarire finalmente la questione della complicata convivenza tra realismo locale e meccanica quantistica. Di seguito verrà dunque esposta la riformulazione moderna del paradosso, che già era presente nel testo di Bohm *Quantum Theory*<sup>5</sup>.

Si consideri una molecola di spin totale uguale a zero, costituita da due atomi ognuno con spin  $\frac{1}{2}$ . Secondo la meccanica quantistica, la parte di spin della funzione d'onda del sistema è uno stato entangled, ovvero il singoletto di spin,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle^I |-\rangle^{II} - |-\rangle^I |+\rangle^{II}] = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle), \quad (1.27)$$

dove  $|+\rangle^I$  è lo stato di singola particella per l'operatore  $S_{zI}$ , che rappresenta la terza componente dell'osservabile di spin per la prima particella (il primo atomo), relativo all'autovalore  $+\frac{\hbar}{2}$ , e analogamente  $|-\rangle^I$ ,  $|+\rangle^{II}$ ,  $|-\rangle^{II}$ . All'istante  $t_0$  si separino i due atomi in modo che non cambi il loro spin e che non interagiscano più, così da poter applicare il principio di località. Il sistema così realizzato è del tipo  $S_C$ , trattato al punto (1.1.3) del primo paragrafo, ed è descritto da uno stato puro, rappresentato dalla (1.27). Si supponga, a titolo d'esempio, di misurare  $S_{xI}$ , la componente  $\hat{x}$  di spin per la prima particella, all'istante  $t_1$  e di trovare l'autovalore  $+\frac{\hbar}{2}$ ; allora la meccanica quantistica afferma che tale misura proietta lo stato iniziale in

$$|\psi\rangle' = |+\rangle^I |-\rangle^{II} = |\psi_1\rangle, \quad (1.28)$$

quindi si può predire con certezza che  $S_{xII}$  ha autovalore  $-\frac{\hbar}{2}$ . Per il realismo locale, allora  $S_{xII}$  è un elemento di realtà del sistema II, quindi anche nell'intervallo di tempo  $t_0 \leq t \leq t_1$   $S_{xII}$  aveva un certo valore, che l'osservatore però non conosceva. È possibile iterare questo ragionamento per l'osservabile  $S_z$  e concludere dunque che, prima della misura, la particella II aveva come proprietà un certo valore di  $S_{zII}$  e di  $S_{xII}$ , contrariamente a quanto affermato dalla meccanica quantistica, secondo la quale le due osservabili non commutano e non possono dunque avere autostati comuni simultaneamente. Inoltre, se si assume la completezza della meccanica quantistica, allora bisogna concludere che in  $t_0 \leq t \leq t_1$  lo stato del sistema è misto, con

$$\begin{cases} |\psi_1\rangle = |+\rangle^I |-\rangle^{II} \rightarrow p_1 = \frac{1}{2} \\ |\psi_2\rangle = |-\rangle^I |+\rangle^{II} \rightarrow p_2 = \frac{1}{2} \end{cases} . \quad (1.29)$$

In questo intervallo di tempo, per la (1.16) la probabilità di trovare per entrambi i sistemi il valore  $+\frac{\hbar}{2}$  per  $S_x$  è

$$\begin{cases} P_m(+\frac{\hbar}{2}, I; +\frac{\hbar}{2}, II) = \frac{1}{2} \|\Pi |\psi_1\rangle\|^2 + \frac{1}{2} \|\Pi |\psi_2\rangle\|^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ \Pi = |+\rangle_x^I \langle +|_x^I \otimes |+\rangle_x^{II} \langle +|_x^{II} \end{cases} . \quad (1.30)$$

D'altra parte, lo stato iniziale del sistema è puro, quindi la meccanica quantistica, in particolare tramite la (1.15), permette anche di concludere che in  $t_0 \leq t \leq t_1$  la probabilità di trovare per entrambe le particelle il valore  $+\frac{\hbar}{2}$  per  $S_x$  è

$$P_p(+\frac{\hbar}{2}, I; +\frac{\hbar}{2}, II) = \|\Pi |\psi\rangle\|^2 = \frac{\|\Pi |\psi_1\rangle\|^2}{2} + \frac{\|\Pi |\psi_2\rangle\|^2}{2} - \frac{\langle \psi_2 | \Pi | \psi_1 \rangle}{2} - \frac{\langle \psi_1 | \Pi | \psi_2 \rangle}{2}. \quad (1.31)$$

Dal momento che  $\|\Pi |\psi_1\rangle\|^2 = \|\Pi |\psi_2\rangle\|^2 = \langle \psi_2 | \Pi | \psi_1 \rangle = \langle \psi_1 | \Pi | \psi_2 \rangle = \frac{1}{4}$ , allora

$$P_p(+\frac{\hbar}{2}, I; +\frac{\hbar}{2}, II) = 0. \quad (1.32)$$

Come preannunciato in forma generale al primo paragrafo, si nota in questo caso particolare che le due probabilità, calcolate per stato puro e stato misto, danno risultati differenti, che rappresentano la contraddizione e danno origine al paradosso.

Il ragionamento seguito è stato portato a termine utilizzando come assunzioni:

<sup>5</sup>D. Bohm. *Quantum theory*, New York, Prentice-Hall, 1951.

- i. il principio di realtà (à la EPR)
- ii. il principio di località
- iii. la completezza della meccanica quantistica.

Il paradosso EPR evidenzia dunque che una descrizione del mondo che sia contemporaneamente realista, deterministica e locale non può essere condotta senza incorrere nella contraddizione. Per risolvere il paradosso, è allora necessario rinunciare ad una delle tre ipotesi, tra le quali EPR erano molto legati a (i) e (ii), al punto che non accettavano di doversi rinunciare e ritenevano sacrificabile la (iii). L'articolo di EPR tuttavia si chiude con un messaggio di speranza, che contraddistingue l'animo degli scienziati:

*"Mentre abbiamo così mostrato che la funzione d'onda non fornisce una descrizione completa della realtà fisica, abbiamo lasciata aperta la questione se una tale descrizione esista oppure no. Noi crediamo tuttavia che una tale teoria sia possibile."*



## Capitolo 2

# Il teorema di Bell

La conclusione dell'articolo di EPR lascia aperta la questione della possibilità del completamento della meccanica quantistica: se la funzione d'onda così com'è non riesce a descrivere completamente la realtà, o almeno entro le ipotesi del realismo locale, è necessario aggiungervi qualche ente matematico e poi interpretarlo, saturarla in modo tale che ogni ente della realtà sia ben rappresentato nella teoria. Questa, in particolare, era la convinzione di Einstein, che può essere considerato una sorta di istante iniziale per la nascita della teoria delle variabili nascoste, il celebre tentativo di completare la meccanica quantistica. La possibilità di tale teoria fu contrastata da J. Von Neumann, a sua volta poi contraddetto dal fisico nordirlandese J. Bell, che, partendo dalla formulazione di Bohm e Aharonov del paradosso, dimostrò come fosse possibile parlare di variabili nascoste in meccanica quantistica, al prezzo, tuttavia, di rinunciare ad uno dei capisaldi dell'argomentazione EPR.

In questo capitolo verranno presentati esempi di teorie a variabili nascoste, ne verranno discussi la possibilità teorica, i limiti, le critiche, il rapporto con la meccanica quantistica ortodossa, in seguito a cui diverse generazioni di fisici furono portati ad allestire esperimenti che hanno chiarito il fenomeno dell'entanglement quantistico, il quale spianò a sua volta la strada all'applicazione tecnologica della teoria dei quanti.

### 2.1 Teoria delle variabili nascoste

#### 2.1.1 Le correlazioni EPR

Si considerino le seguenti proposizioni:

- a. Il dottor Bertlmann indossa sempre un calzino di colore diverso rispetto all'altro.
- b. È impossibile prevedere con certezza il colore di un calzino in un certo giorno.
- c. Si osserva che un calzino è rosa, allora si può concludere che l'altro calzino è non-rosa senza osservarlo.

Il confronto tra l'eccentrico esempio dei calzini del dottor Bertlmann e il Gendakenexperiment di EPR è immediato: le proposizioni (a) e (b) realizzano lo stato entangled di singoletto, mentre la (c) rappresenta la misura di un'osservabile effettuata su uno dei due sistemi, che determina il collasso del pacchetto d'onda e permette di individuare una proprietà per l'altro.

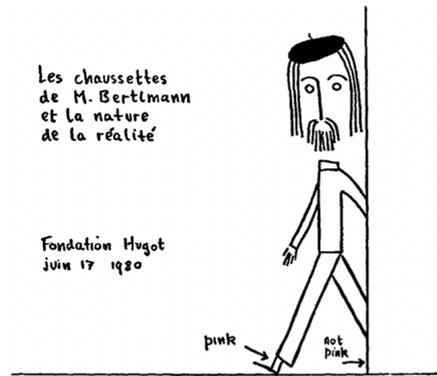


Figura 2.1: le calze del dottor Bertlmann, immagine apparsa su *Fondation Hugot* nel giugno 1980.

È con questo confronto che John Bell, nei suoi articoli *"Gli esperimenti di Einstein-Podolsky-Rosen"* [7] e *"I calzini di Bertlmann e la natura della realtà"* [8], propone un analogo classico delle correlazioni EPR. Si può obiettare che i due calzini non siano ad una distanza di tipo spazio, ma basta cambiare esempio e considerare quello della moneta tagliata a metà.

Si supponga di tagliare una moneta in modo da separare testa e croce e di mettere le due parti nei portafogli di due persone diverse senza che sappiano quale lato vi è stato affidato. Si supponga, quindi, che le due persone compiano viaggi diversi in posti lontani tra loro e che solo allora guardino nel proprio portafogli la parte di moneta che possiedono. Entrambi i viaggiatori, a quel punto, conoscono sia il proprio pezzo che quello dell'altro.

Nel presentare esempi classici di correlazioni EPR, Bell si chiede se sia veramente utile ragionare sulla questione, se esista cioè una differenza rispetto al caso classico, che al contrario di quello quantistico non pone alcun paradosso, che vale la pena sviscerare. Il clamore suscitato dalle correlazioni EPR riguarda il fatto che, mentre nell'universo descritto classicamente è possibile per uno stesso osservatore conoscere simultaneamente le due parti della moneta o il colore di entrambi i calzini di Bertlmann, in quello quantistico non è sempre possibile conoscere contemporaneamente il valore di una qualsiasi coppia di osservabili, come ormai è chiaro a questo punto della trattazione. Affermò Einstein che

*il carattere statistico della presente teoria dovrebbe essere quindi una conseguenza necessaria dell'incompletezza della descrizione dei sistemi della meccanica quantistica* <sup>6</sup>

per cui l'indeterminismo può essere "curato", riempiendo quei vuoti di cui sarebbe caratterizzata la funzione d'onda.

### 2.1.2 Le variabili nascoste per Bell

La teoria delle variabili nascoste ha proprio questo scopo. Nell'articolo di Bell, *"Sul problema delle variabili nascoste in meccanica quantistica"* [9], l'autore ne ripercorre brevemente i principali contributi che ora verranno sintetizzati, anche per entrare nella sua visione della questione.

La teoria nasce da un'ipotesi sulla la natura statistica della meccanica quantistica, partendo da considerazioni circa la meccanica statistica classica. In particolare, un generico stato quantistico  $\psi$  può essere visto come una media di stati, tali che le misure effettuate individualmente su ognuno di essi darebbero risultati univocamente determinati, con una probabilità unitaria. Questi stati ipotetici sono detti *stati senza dispersione* e sono individuati tramite la dipendenza di  $\psi$  da nuove variabili,  $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$ , che sono "nascoste" all'osservatore. In altre parole, non è possibile preparare un sistema in uno stato senza dispersione perchè le  $\vec{\lambda}$  non possono essere conosciute, altrimenti le previsioni della meccanica quantistica non sarebbero compatibili con i dati sperimentali. Secondo questa teoria, esistono allora particolari valori assunti dalle variabili nascoste, che assegnano alle proprietà dei sistemi

<sup>6</sup>Einstein, 1949a, p.45.

entangled degli esempi trattati nel primo capitolo dei particolari valori prima di ogni misura. La teoria delle variabili nascoste si presenta dunque come locale e realista.

Entrando nei dettagli matematici, si consideri un sistema bidimensionale, descritto da uno stato (quantistico)  $\psi$ , associato ad uno spazio di Hilbert nel quale tutte le osservabili possono essere scritte come combinazione lineare dell'identità e del vettore delle matrici di Pauli:

$$\alpha \mathbb{1} + \vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}, \quad (2.1)$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\vec{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)$  un vettore reale. Allora gli autovalori della generica osservabile descritta dalla (2.1) sono

$$\alpha \pm |\vec{\beta}| \quad (2.2)$$

e i valori di aspettazione

$$\langle \alpha \mathbb{1} + \vec{\beta} \cdot \vec{\sigma} \rangle = \langle \psi, [\alpha \mathbb{1} + \vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}] \psi \rangle. \quad (2.3)$$

Si supponga che il sistema sia costituito da una particella di spin  $\frac{1}{2}$ : uno stato senza dispersione è allora determinato da  $\psi$  e dalla variabile nascosta  $\lambda \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . Se si cambia ora sistema di riferimento in modo tale che  $\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , una misura di una generica osservabile sullo stato senza dispersione dà come risultati con certezza gli autovalori così parametrizzati:

$$\alpha + |\vec{\beta}| \text{sign}(\lambda |\vec{\beta}| + \frac{1}{2} |\beta_z|) \text{sign} X, \quad (2.4)$$

con  $X = \begin{cases} \beta_z & \text{se } \beta_z \neq 0 \\ \beta_x & \text{se } \beta_z = 0, \beta_x \neq 0 \\ \beta_y & \text{se } \beta_z = 0, \beta_x = 0 \end{cases}$ . Il valore di aspettazione di una generica osservabile su tale stato

senza dispersione si ottiene tenendo conto che  $\psi$  è dato da una media uniforme su  $\lambda$ , quindi

$$\langle \alpha \mathbb{1} + \vec{\beta} \cdot \vec{\sigma} \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\lambda [\alpha + |\vec{\beta}| \text{sign}(\lambda |\vec{\beta}| + \frac{1}{2} |\beta_z|) \text{sign} X] = \alpha + \beta_z. \quad (2.5)$$

Von Neumann<sup>7</sup> tentò di dimostrare l'impossibilità di realizzare una teoria di questo tipo attraverso un'ipotesi sugli stati senza dispersione, che è caratteristica degli stati quantistici:

*Hp: una qualsiasi combinazione lineare reale di due operatori hermitiani qualsiasi rappresenta un'osservabile e la medesima combinazione lineare dei valori di aspettazione è il valore di aspettazione della combinazione.*

Da questa ipotesi segue che, data la natura non statistica degli stati senza dispersione, il valore di aspettazione di un'osservabile deve essere uguale a uno dei suoi autovalori, ma da un confronto tra la (2.4) e la (2.5) questo non accade mai, perchè gli autovalori della (2.4) non sono lineari in  $\alpha$  e  $\vec{\beta}$ , al contrario dei valori di aspettazione; siccome per ogni spazio con dimensione  $d > 2$  si può sempre considerare un sottospazio bidimensionale, la dimostrazione ha carattere generale.

Bell non è tuttavia convinto della validità dell'ipotesi di Von Neumann, che contesta la pretesa di generalità con cui è stata attribuita una proprietà della media (lo stato quantistico) ai singoli stati che la realizzano (stati senza dispersione). Jauch e Piron (1936) diedero una propria versione della dimostrazione di Von Neumann, che Bell critica per le stesse ragioni; secondo quest'ultimo, dunque, una "nuova" meccanica quantistica, completata con le variabili nascoste, è in linea di principio possibile.

A questo punto della sua trattazione, egli ragiona sul fatto che una buona teoria delle variabili nascoste debba tenere conto dell'eventuale evoluzione spaziale e temporale di tali variabili e propone un'applicazione all'esperimento di EPR.

<sup>7</sup>J. Von Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Verlag Julius-Spinger, Berlino (1932); traduzione inglese: Princeton University Press (1955).

Si consideri la formulazione di Bohm dell'esperimento EPR, in cui è stata utilizzata la notazione di Dirac per scrivere in maniera compatta di autostati di  $S_z$ . Tornando al formalismo della funzione d'onda, si indichi il singoletto con  $|\psi\rangle \rightarrow \psi_{ij} = \psi_{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ , dove gli indici  $i$  e  $j$  rappresentano gli indici di spin; l'evoluzione temporale dello stato è descritta dall'equazione di Schrödinger,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi + [a\sigma_1 \cdot \vec{B}(\vec{r}_1) + b\sigma_2 \cdot \vec{B}(\vec{r}_2)]\psi, \quad (2.6)$$

in cui  $H$  è l'hamiltoniana del sistema, data dalle energie cinetiche delle due particelle e dal loro potenziale di interazione, mentre gli altri due termini tengono conto del fatto che si suppone di misurare lo spin per entrambe, sfruttando due campi magnetici,  $\vec{B}(\vec{r}_1)$  e  $\vec{B}(\vec{r}_2)$ , uno per ogni particella. Si consideri come variabili nascoste le posizioni delle due particelle,  $\vec{X}_1$  e  $\vec{X}_2$ , dal momento che le altre misure si possono ricondurre ad esse; nel caso dello spin, infatti, in un esperimento di Stern-Gerlach misurare una componente dello spin significa misurare la posizione della particella dopo la deflessione operata dal campo magnetico. Si assegni alle variabili nascoste la densità di probabilità

$$\rho(\vec{X}_1, \vec{X}_2) = \sum_{ij} |\psi_{ij}(\vec{X}_1, \vec{X}_2)|^2, \quad (2.7)$$

come è pratica nella meccanica quantistica per uno stato quantistico; l'evoluzione temporale delle due variabili è allora

$$\begin{cases} \frac{d\vec{X}_1}{dt} = \frac{\text{Im} \sum_{ij} \psi_{ij}^*(\vec{X}_1, \vec{X}_2) \frac{\partial \psi_{ij}(\vec{X}_1, \vec{X}_2)}{\partial \vec{X}_1}}{\rho(\vec{X}_1, \vec{X}_2)} \\ \frac{d\vec{X}_2}{dt} = \frac{\text{Im} \sum_{ij} \psi_{ij}^*(\vec{X}_1, \vec{X}_2) \frac{\partial \psi_{ij}(\vec{X}_1, \vec{X}_2)}{\partial \vec{X}_2}}{\rho(\vec{X}_1, \vec{X}_2)} \end{cases} \quad (2.8)$$

Si supponga di poter fattorizzare il singoletto prima della misura degli spin in

$$\psi_{ij}(\vec{X}_1, \vec{X}_2) = \phi_i(\vec{X}_1)\chi_j(\vec{X}_2), \quad (2.9)$$

allora dopo la misura la fattorizzazione è mantenuta, quindi la (2.6) e la (2.8) risultano a variabili separate, in particolare:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{X}_1}{dt} = \frac{\text{Im} \sum_i \phi_i^*(\vec{X}_1) \frac{\partial \phi_i(\vec{X}_1)}{\partial \vec{X}_1}}{\sum_i \phi_i^*(\vec{X}_1)\phi_i(\vec{X}_1)} \\ \frac{d\vec{X}_2}{dt} = \frac{\text{Im} \sum_j \chi_j^*(\vec{X}_2) \frac{\partial \chi_j(\vec{X}_2)}{\partial \vec{X}_2}}{\sum_j \chi_j^*(\vec{X}_2)\chi_j(\vec{X}_2)} \end{cases} \quad (2.10)$$

Ciò permette di applicare la località: si allontanano le due particelle e si misurano le posizioni rispettive con i due campi, senza che una misura influenzi l'altra. Tuttavia, la (2.9) non può essere realizzata in questo caso, perchè il singoletto è uno stato entangled e, come visto nel primo paragrafo del primo capitolo, uno stato entangled non può mai diventare separabile. L'entanglement impedisce la separabilità che è alla base della località, quindi, per quanto in linea di principio la teoria delle variabili nascoste sia realizzabile, bisogna pagare il prezzo, decisamente salato per EPR, di rinunciare al principio di località.

### 2.1.3 L'interpretazione di Bohm

Come dichiarò lo stesso Bell<sup>8</sup>, il suo interesse per le variabili nascoste nacque dalla lettura della cosiddetta meccanica bohmiana, ovvero l'interpretazione della meccanica quantistica di David Bohm, che prevede l'uso di variabili nascoste e la perdita della località alla EPR.

Nell'articolo del 1952 pubblicato su *Physical Review* con il titolo "A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables I." [11], Bohm ripropone il concetto di onda pilota, teorizzato per la prima volta da de Broglie (1927): secondo quest'ultimo, il dualismo onda-particella può essere interpretato supponendo l'esistenza di un potenziale quantistico, che dirige la particella

<sup>8</sup>J. Bell. *Sull'impossibilità dell'onda pilota*, Dicile e indicibile in meccanica quantistica, Adelphi Edizioni, 10<sup>a</sup> edizione (2021).

nel suo moto. Ogni particella risulta vincolata alla propria onda pilota, che la forza lungo una certa direzione attraverso il campo quantistico, come accade qualitativamente ad una carica in un campo elettrico<sup>9</sup>. È bene precisare che sia de Broglie che Bohm sono realisti nei confronti dell'onda pilota e quindi nei confronti del campo quantistico.

L'interpretazione di Bohm si articola su tre punti fondamentali:

1. Il campo quantistico è rappresentato dalla funzione d'onda,  $\psi(\vec{x}, t)$ , e soddisfa quindi l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi, \quad (2.11)$$

dove  $V = V(\vec{x}, t)$  rappresenta una generica interazione esterna.

2. Scrivendo

$$\psi = Re \frac{iS}{\hbar}, \quad (2.12)$$

con  $R(\vec{x}, t)$  ampiezza e  $S(\vec{x}, t)$  fase dell'onda, il momento lineare della particella è  $\vec{p} = \vec{\nabla} S$ . Inserendo infatti la (2.12) nella (2.11), per la parte reale risulta

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = 0, \quad (2.13)$$

per la parte immaginaria

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \frac{R^2 \vec{\nabla} S}{m} = 0. \quad (2.14)$$

Nel limite formale in cui  $\hbar \rightarrow 0$ , ovvero il limite classico, la (2.13) rappresenta l'equazione di Hamilton-Jacobi,

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

in cui  $H$  è l'hamiltoniana del sistema e  $\frac{\partial S}{\partial t}$  l'opposto dell'energia meccanica totale. L'idea di Bohm è quella di estendere tale equazione al caso quantistico, cosicché il termine  $\frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m}$  rappresenti l'energia cinetica della particella e il termine  $V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}$  il potenziale totale, dato dalla somma di quello esterno ( $V$ ) e di quello "intrinseco" della particella, ovvero il potenziale quantistico,

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}.$$

In questa chiave, la velocità della particella è data da

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{\vec{\nabla} S(\vec{x}, t)}{m},$$

quindi

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{\nabla} S(\vec{x}(t), t)}{m}, \quad (2.15)$$

da cui integrando si ottiene la legge oraria della particella. Nota la posizione all'istante iniziale,  $\vec{x}(0)$ , è possibile ricostruire la traiettoria di una particella, perché  $\psi$  già contiene l'informazione sul momento: in questo modo, Bohm realizzò una meccanica quantistica deterministica, "nascondendo" le variabili posizione e momento nella funzione d'onda. Il principio di indeterminazione, che nell'interpretazione ortodossa risulta dalla matematica della teoria, per Bohm è una limitazione solo pratica: è impossibile da eliminare empiricamente perché, Bohr docet, si instaurano correlazioni non classiche tra sistemi quantistici e apparati sperimentali, ma non è più una questione teorica.

---

<sup>9</sup>più precisamente, i campi elettromagnetici vivono nello spazio fisico tridimensionale, mentre la funzione d'onda, a meno che non sia di singola particella, vive nello spazio delle configurazioni del sistema  $3N$  dimensionale, dove  $N$  è il numero di particelle del sistema

È allora possibile introdurre anche un analogo quantistico della legge di Newton,

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}(V + Q), \quad (2.16)$$

nella quale si distinguono una forza "classica", data dall'opposto del gradiente di  $V$ , e una quantistica pari a  $-\vec{\nabla}Q$ , che rende la forte dipendenza del moto della particella dalla forma ( $Q = f(R)$ ) della funzione d'onda.

3. La densità di probabilità associata alla posizione di una particella è  $\rho(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2 = R^2(\vec{x}, t)$ . L'uso della statistica in questo caso non è reso necessario da un'ignoranza "teorica", proprio come ciò che accade per il principio di indeterminazione, ma da un'ignoranza empirica sulla posizione iniziale della particella. Nella seconda parte dell'articolo, Bohm chiarirà questa affermazione con un esempio.

Si noti inoltre che nella (2.14) il primo termine è la derivata temporale della densità di probabilità, quindi la parte immaginaria dell'equazione di Schrödinger rappresenta l'equazione di continuità per  $\rho$ , dove  $\frac{R^2 \vec{\nabla} S}{m}$  è la densità di corrente di probabilità; tale legge esprime in forma locale la conservazione della probabilità, proprio come nell'interpretazione ortodossa.

Bohm espone un esempio di applicazione della propria interpretazione al fenomeno dell'effetto tunnel, ovvero l'attraversamento di una barriera di potenziale,  $V_0$ , da parte di una particella con energia  $E < V_0$ . Nell'interpretazione ortodossa, quando questa giunge alla barriera, la sua funzione d'onda diventa un'esponenziale che decresce rapidamente e, nella meccanica bohmiana, questa improvvisa e forte perturbazione di  $\psi$  determina una violenta fluttuazione anche del potenziale quantistico, con la scomposizione del pacchetto d'onda in uno riflesso e in uno trasmesso. Ciascuno di essi ha associata una propria probabilità, calcolata in termini di indici di riflessione e trasmissione,  $R$  e  $T$  rispettivamente, tali che

$$\begin{cases} T = \frac{4E(E-V_0)}{4E(E-V_0)+V_0^2 \sinh^2[\sqrt{2m(V_0-E)} \frac{L}{\hbar}]} = \frac{4E(E-V_0)}{4E(V_0-E)+V_0^2 \sinh^2(\rho L)} \neq 0 \\ R = 1 - T \end{cases} .$$

L'indice di trasmissione è non nullo, quindi, sebbene nella maggior parte dei casi il pacchetto riflesso abbia una probabilità maggiore di quello trasmesso ( $R > T$ ), talvolta la particella può lasciarsi guidare dall'onda pilota trasmessa e attraversare la barriera.

A questo punto, Bohm estende tale interpretazione a sistemi a più corpi, a cui si associa una funzione d'onda e quindi un campo quantistico

$$\psi = \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t), \quad (2.17)$$

in cui  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$  sono i vettori posizione degli  $n$  corpi, ma anche le loro traiettorie, se viste come funzioni del tempo, come nella (2.15):

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt} = \frac{\vec{\nabla}_i S(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t)}{m_i}. \quad (2.18)$$

L'equazione di Schrödinger diventa

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\hbar^2}{2m_i} \right) \nabla_i^2 + V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t) \right] \psi \quad (2.19)$$

e, scrivendo la funzione d'onda in notazione complessa

$$\begin{cases} \psi = R e^{\frac{iS}{\hbar}} \\ R = R(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t) \\ S = S(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t) \end{cases} , \quad (2.20)$$

dalla (2.18) e dalla (2.19) si ottengono le generalizzazioni dell'equazione di continuità e di Hamilton-Jacobi,

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{(\vec{\nabla}_i S)^2}{2m_i} + V - \sum_{i=1}^n \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\nabla_i^2 R}{R} = 0 \\ \frac{\partial R^2}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \vec{\nabla}_i \cdot \frac{R^2 \vec{\nabla}_i S}{m} = 0 \end{cases} . \quad (2.21)$$

$Q = -\sum_{i=1}^n \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\nabla_i^2 R}{R}$  è il potenziale quantistico, che dipende dalla forma di tutta la funzione d'onda, che dipende a sua volta da tutte le coordinate delle particelle.  $Q$  è tale che vale la legge di Newton quantistica per ogni particella, nella forma della (2.16). La densità di probabilità del sistema è

$$\rho(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t) = R^2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t)$$

e la probabilità si conserva per la seconda equazione della (2.20).

Da questa sintetica generalizzazione, risulta un'importante proprietà dei sistemi a più particelle che non è evidente nel caso di particella singola, ovvero la non località dell'interpretazione di Bohm. Se ci si sofferma sulla (2.18), ad esempio, si nota che la traiettoria di una particelle dipende dalla posizione delle altre, così come il potenziale quantistico, come sottolineato sopra. Questo fatto teorico implica che, mentre nel mondo classico all'aumentare della distanza tra particelle il potenziale tra di loro si annulla e giungono ad essere praticamente libere, nel mondo quantistico anche a grandi distanze il moto di una particella può essere influenzato da quello delle altre particelle con cui è stata in contatto. Se al tempo  $t_0$  si effettua un'operazione su una particella del sistema, allora istantaneamente tutto il campo scalare  $S(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t)$  subirà una modifica e così il moto di tutte le altre particelle, senza dunque che venga effettuata direttamente l'operazione su di esse. Tuttavia, ciò non accade quando la funzione d'onda è fattorizzabile, come nell'interpretazione ortodossa, ma non sempre gli stati quantistici sono separabili e, quando al contrario sono stati entangled, la meccanica quantistica deterministica di Bohm è una teoria a variabili nascoste non locale.

In un articolo successivo pubblicato nello stesso anno e con lo stesso titolo, "*A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables II.*"[12], Bohm vuole dimostrare quanto affermato sulla validità di fatto e non teorica del principio di indeterminazione, proponendo l'esempio di misura di momento e posizione di un elettrone, dal punto di vista della propria interpretazione della meccanica quantistica.

Si consideri un elettrone la cui posizione è rappresentata dal vettore  $\vec{x}$  e un apparato strumentale, per misurare un'osservabile  $Q$  per l'elettrone, di coordinata significativa  $y$  (eventualmente generalizzabile ad un vettore di coordinate). Si supponga di effettuare una misura di  $Q$  in un tempo tanto breve, da rendere trascurabili le variazioni che la particella e l'apparato avrebbero subito in assenza di interazione tra di esse; l'Hamiltoniana del sistema si può allora scrivere come

$$H = -aQp_y, \quad (2.22)$$

dove  $a$  è una costante. La funzione d'onda totale del sistema,  $\Psi$ , è associata ad un campo quantistico che contribuisce al moto, quindi è necessario ricavarla risolvendo l'equazione di Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -aQp_y \Psi = \frac{ia}{\hbar} \frac{\partial \Psi}{\partial y}. \quad (2.23)$$

A tale scopo, è utile scrivere  $\Psi$  come una sommatoria di una componente relativa all'elettrone, che è autostato di  $Q$  di autovalore  $q$ , e di una relativa all'apparato:

$$\Psi(\vec{x}, y, t) = \sum_q \psi_q(\vec{x}) f_q(y, t). \quad (2.24)$$

La (2.23) allora diventa

$$i\hbar \frac{\partial f_q(y, t)}{\partial t} = \frac{ia}{\hbar} q f_q(y, t), \quad (2.25)$$

con condizione iniziale  $f_q^0(y)$ , da cui si ottengono le soluzioni

$$f_q(y, t) = f_q^0\left(y - \frac{aqt}{\hbar^2}\right) \implies \Psi(\vec{x}, y, t) = \sum_q \psi_q(\vec{x}) f_q^0\left(y - \frac{aqt}{\hbar^2}\right). \quad (2.26)$$

All'istante iniziale, ovvero prima della misura, lo stato del sistema è fattorizzabile, dal momento che elettrone e apparato devono ancora interagire, quindi

$$\Psi_0(\vec{x}, y) = \psi_0(\vec{x}) g_0(y) = g_0(y) \sum_q c_q \psi_q(\vec{x}). \quad (2.27)$$

La funzione  $g_0(y)$  rappresenta un pacchetto d'onda, che si suppone centrato in  $y = 0$  e di larghezza  $\Delta y$ . Da un confronto tra la (2.26) e la (2.27),  $f_q^0(y) = c_q g_0(y)$ , quindi la (2.27) evolve nel tempo come

$$\Psi(\vec{x}, y, t) = \sum_q c_q \psi_q(\vec{x}) g_0\left(y - \frac{aqt}{\hbar^2}\right). \quad (2.28)$$

Con la (2.28) Bohm sottolinea la correlazione non classica che si instaura tra elettrone e apparato in seguito alla loro interazione: la coordinata dell'apparato "entra" nel pacchetto d'onda totale e per misurare il valore di  $Q$  per l'elettrone è necessario misurare anche  $y$ . Tale correlazione tuttavia cessa se l'interazione persiste per una lungo tempo; infatti, il pacchetto d'onda nello spazio delle  $y$  è centrato in  $\bar{y} = \frac{aqt}{\hbar^2}$  e la distanza tra due centri adiacenti è  $\delta y = \frac{at\delta q}{\hbar^2}$ , che nel limite  $t \rightarrow +\infty$  tende a infinito. Questo significa per lunghi tempi i pacchetti d'onda nello spazio delle  $y$  hanno una larghezza  $\Delta y$  molto più piccola della distanza tra i loro centri, quindi cessano di sovrapporsi. Ciò tuttavia non è garantito per piccoli tempi, in cui al contrario  $\Delta y \ll \delta y$ . L'osservatore, per misurare  $Q$ , è forzato a misurare  $y$  con un errore pari a  $\Delta y$ , che in questo caso è minore di  $\delta y$ , perché, come detto sopra, si stanno considerando tempi sufficientemente brevi, quindi pacchetti d'onda corrispondenti a diversi  $q$  si sovrappongono in tutto lo spazio delle coordinate e non si può eliminare questa incertezza. Anche nel caso in cui pacchetti d'onda dell'apparato non dovessero sovrapporsi, il moto browniano causa fluttuazioni che riportano alla conclusione precedente. Se  $Q$  ora rappresenta l'osservabile posizione, la conseguenza di queste correlazioni "sperimentali" è l'impossibilità di misurare con certezza la posizione dell'elettrone, nonostante la teoria affermi che, siccome l'elettrone ha funzione d'onda  $\psi_q(\vec{x})$ ,  $Q$  deve avere valori ben definiti.

In particolare, l'incertezza sulla misura di  $\vec{x}_0$  e  $y_0$  rende impossibile conoscere con certezza  $\Psi_0$  e quindi il risultato finale della misura: come nell'interpretazione ortodossa, anche nella meccanica bohmiana è solo possibile conoscere la probabilità di un certo  $q$ , integrando il modulo quadro di  $\Psi$  in  $d^3\vec{x}$  e in  $dy$  in un intervallo di  $q$ .

Se si suppone ora di misurare il momento  $P$  per l'elettrone, osservabile che non commuta con  $Q$ , lo stato dopo la misura può essere scritto in una forma simile alla (2.28), tramite le autofunzioni di  $P$ :

$$\begin{cases} \Psi(\vec{x}, y, t) = \sum_p b_{p,q} \phi_p(\vec{x}) g_0\left(z - \frac{apt}{\hbar^2}\right) \\ \psi_q(x) = \sum_p b_{p,q} \phi_p(\vec{x}) \end{cases}. \quad (2.29)$$

Iterando lo stesso ragionamento effettuato per  $Q$ , si presenta un'incertezza sperimentale anche nella misura di  $P$  e si possono solo effettuare calcoli di probabilità. Al contrario dell'interpretazione ortodossa, in cui la statistica è una necessità teorica, Bohm afferma che

*nella nostra interpretazione [...] le posizioni delle particelle e i momenti determinano i risultati di ogni individuale processo di misura, ma in un modo in cui i dettagli precisi sono così complicati e incontrollabili, e quindi poco noti, che per tutti gli scopi pratici bisogna restringersi alla descrizione statistica della connessione tra i valori delle variabili e i risultati delle misure direttamente osservabili.*

Posizione e momento sono grandezze connesse a proprietà reali e già osservate della materia, ma sono "nascoste" alle possibilità sperimentali di una loro misura simultanea con uguale e arbitraria precisione.

## 2.2 Disuguaglianze di Bell

Nei paragrafi precedenti è già stata data prova del cospicuo contributo teorico che Bell ha dato all'analisi delle teorie delle variabili nascoste; l'articolo più importante in questione uscì nel 1964 *Physical Review*, dal titolo "On the Einstein Podolsky Rosen paradox", nel quale Bell riprende la formulazione di Aharonov e Bohm del paradosso, aggiungendovi un parametro continuo,  $\lambda$ , come variabile nascosta. È indifferente che  $\lambda$  sia uno scalare o un vettore, che vari nel discreto o nel continuo; a  $\lambda$  viene associata una densità di probabilità uniforme,  $\rho(\lambda)$ , tale che

$$\int \rho(\lambda) d\lambda = 1 \quad (2.30)$$

e, essendo una variabile nascosta, non è controllabile dall'osservatore, ma un suo valore assegna prima di ogni misura un certo valore anche alle osservabili di spin. In particolare, se si indica con  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$  lo spin in una direzione generica  $\vec{a}$  per la prima particella e con  $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$  lo spin in una direzione generica  $\vec{b}$  per la seconda, allora i risultati delle misure di tali grandezze sono rispettivamente

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1, \quad B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1 \quad (2.31)$$

e sono tali che la misura di uno dei due non influenza l'altro. In altre parole, se si pensa di misurare i due spin con dei magneti, l'orientazione di uno dei due ( $\vec{a}$  o  $\vec{b}$ ) non influenza la misura operata dall'altro; in questa assunzione risiede la località. Allora, proprio grazie a questa ipotesi di indipendenza tra i risultati delle misure, il valore di aspettazione del prodotto delle due osservabili è

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) d\lambda \quad (2.32)$$

e deve risultare uguale a quello predetto dalla meccanica quantistica,

$$\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a} \quad \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b} \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (2.33)$$

Si osservi, dalla (2.30) e dalla (2.31), che  $P(\vec{a}, \vec{b})$  nella (2.32) ha come valore minimo -1 e solo per

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{b} \\ A(\vec{a}, \lambda) = -B(\vec{b}, \lambda) = -B(\vec{a}, \lambda) \end{cases}, \quad (2.34)$$

da cui

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = - \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) d\lambda. \quad (2.35)$$

Scegliendo un'altra direzione,  $\vec{c}$ , allora

$$P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) = - \int \rho(\lambda) [A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] d\lambda,$$

e, usando la (2.31),

$$\begin{aligned} P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) &= - \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] d\lambda = \\ &= \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) [A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) - 1] d\lambda. \end{aligned}$$

Prendendo i moduli di entrambi i membri e osservando dalla (2.31) che  $|A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda)| = 1$ ,

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq \int \rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] d\lambda,$$

in cui il primo addendo dell'integrale a secondo membro è uguale a 1 per la (2.30) e il secondo è  $P(\vec{b}, \vec{c})$ , quindi

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq 1 + P(\vec{b}, \vec{c}). \quad (2.36)$$

Per piccoli  $|\vec{b} - \vec{c}| \rightarrow |P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \sim |\vec{b} - \vec{c}|$ , ovvero

$$P(\vec{b}, \vec{c}) \sim |\vec{b} - \vec{c}| - 1,$$

che è diverso dalla (2.33), il valore quantomeccanico. Quest'ultimo, a sua volta, non può essere approssimato al valore della teoria locale a variabili nascoste e Bell lo dimostra seguendo questo ragionamento.

Si considerino i valori medi della (2.32) e della (2.33),

$$\begin{cases} \overline{P(\vec{a}, \vec{b})} = \int \rho(\lambda) \overline{A(\vec{a}, \lambda)} \overline{B(\vec{b}, \lambda)} d\lambda \\ \langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a} \quad \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b} \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b} \end{cases}, \quad (2.37)$$

e si supponga che esista un numero  $\epsilon$  che magiori la loro differenza,

$$|\overline{P(\vec{a}, \vec{b})} + \overline{\vec{a} \cdot \vec{b}}| \leq \epsilon; \quad (2.38)$$

si vuole dimostrare che tale  $\epsilon$  non possa essere preso piccolo a piacere e che dunque i due valori medi non possano essere approssimati l'uno all'altro. Se si suppone che

$$|\overline{\vec{a} \cdot \vec{b}} - \vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \delta, \quad (2.39)$$

allora dalla (2.38)

$$|\overline{P(\vec{a}, \vec{b})} + \vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \epsilon + \delta. \quad (2.40)$$

Dalla (2.37) e dalla (2.40), per  $\vec{a} = \vec{b}$ ,

$$\int \rho(\lambda) [\overline{A(\vec{b}, \lambda)} \overline{B(\vec{b}, \lambda)} + 1] d\lambda \leq \epsilon + \delta. \quad (2.41)$$

Dalla (2.37),

$$\begin{aligned} \overline{P(\vec{a}, \vec{b})} - \overline{P(\vec{a}, \vec{c})} &= \int \rho(\lambda) [\overline{A(\vec{a}, \lambda)} \overline{B(\vec{b}, \lambda)} - \overline{A(\vec{a}, \lambda)} \overline{B(\vec{c}, \lambda)}] d\lambda = \\ &= \int \rho(\lambda) \overline{A(\vec{a}, \lambda)} \overline{B(\vec{b}, \lambda)} [1 + \overline{A(\vec{a}, \lambda)} \overline{B(\vec{c}, \lambda)}] d\lambda - \int \rho(\lambda) \overline{A(\vec{a}, \lambda)} \overline{B(\vec{c}, \lambda)} [1 + \overline{A(\vec{b}, \lambda)} \overline{B(\vec{b}, \lambda)}] d\lambda; \end{aligned}$$

poiché  $|\overline{A(\vec{a}, \lambda)}| \leq 1$  e  $|\overline{B(\vec{b}, \lambda)}| \leq 1$ ,

$$|\overline{P(\vec{a}, \vec{b})} - \overline{P(\vec{a}, \vec{c})}| \leq \int \rho(\lambda) [1 + \overline{A(\vec{b}, \lambda)} \overline{B(\vec{c}, \lambda)}] d\lambda + \int \rho(\lambda) [1 + \overline{A(\vec{b}, \lambda)} \overline{B(\vec{b}, \lambda)}] d\lambda.$$

Usando la (2.41) per maggiorare il secondo termine del secondo membro e riconoscendo nel primo  $1 + \overline{P(\vec{b}, \vec{c})}$ ,

$$|\overline{P(\vec{a}, \vec{b})} - \overline{P(\vec{a}, \vec{c})}| \leq 1 + \overline{P(\vec{b}, \vec{c})} + \epsilon + \delta. \quad (2.42)$$

Dalla (2.40), la (2.42) diventa

$$|\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b}| - 2(\epsilon + \delta) \geq 1 - \vec{b} \cdot \vec{c} + 2(\epsilon + \delta),$$

da cui

$$4(\epsilon + \delta) \geq |\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b}| + \vec{b} \cdot \vec{c} - 1. \quad (2.43)$$

Scegliendo  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  tali che  $\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ ,

$$4(\epsilon + \delta) \geq \sqrt{2} - 1,$$

che conclude la dimostrazione: per piccoli  $\delta$  finiti,  $\epsilon$  deve essere maggiore o uguale di una quantità finita non nulla, quindi il valore di aspettazione quantomeccanico non può essere approssimato a quello

previsto dalla teoria delle variabili nascoste locali. Inoltre si possono estendere questi ragionamenti a sistemi di dimensione maggiore di 2, considerando in essi sottospazi bidimensionali e definendo  $\vec{\sigma}$  similmente a quanto usato sopra, in modo tale che esista almeno uno stato, l'analogo del singoletto, tale per cui le previsioni quantistiche sono incompatibili con quelle della predeterminazione separabile.

L'importante conclusione di questo articolo viene sintetizzata nel teorema che porta il nome del suo autore:

**Teorema di Bell:** le teorie a variabili nascoste locali sono soggette alle disuguaglianze di Bell, che vengono violate da certe previsioni della meccanica quantistica.

La (2.36) rappresenta la disuguaglianza formulata da Bell, alla quale seguirono delle variazioni, come la disuguaglianza CHSH, di cui si parlerà nel prossimo paragrafo. Tali disuguaglianze dimostrarono a livello teorico che il realismo locale impone delle restrizioni a certi fenomeni, che vengono violate dalla meccanica quantistica. Si sottolinea che il teorema di Bell riguarda solo le teorie locali, mentre quelle non locali non sono in disaccordo con la meccanica quantistica ortodossa, come mostra l'interpretazione di Bohm. A quel punto, per dirimere tra teoria quantomeccanica e teoria delle variabili nascoste locali, mancava solo l'esecuzione di un *experimentum crucis* che stabilisse da che parte stesse la natura, se violasse o rispettasse le disuguaglianze di Bell.

## 2.3 L'experimentum crucis

Dal 1970 si susseguirono esperimenti con questo fine, tra cui quello più in linea con le assunzioni teoriche di Bell è stato quello di A. Aspect, che sintetizzò premesse teoriche e risultati sperimentali in un articolo del 1982, pubblicato su *Atomic Physics 8*, dal titolo "*Verifiche sperimentali delle disuguaglianze di Bell in fisica atomica*"[13].

### 2.3.1 Disuguaglianza CHSH

L'esperimento si basa sulla misura delle polarizzazioni di coppie di fotoni emessi da una sorgente di atomi che decadono  $\gamma$  in cascata, con energie differenti e quindi diverse frequenze,  $\nu_1$  e  $\nu_2$ . Si vuole misurare la polarizzazione del fotone 1 ( $\nu_1$ ) con l'analizzatore I, orientato in direzione  $\vec{a}$ , e quella del fotone 2 ( $\nu_2$ ) con l'analizzatore II, in direzione  $\vec{b}$ : i risultati di tali misure forniscono i risultati + o - a seconda che il fotone sia o non sia polarizzato linearmente lungo tali direzione. Indicando con  $P_{\pm}(\vec{a})$  la probabilità di ottenere il risultato  $\pm$  da I e analogamente per II, le previsioni della meccanica quantistica sono:

$$\begin{cases} P_+(\vec{a}) = P_-(\vec{a}) = \frac{1}{2} \\ P_+(\vec{b}) = P_-(\vec{b}) = \frac{1}{2} \\ P_{++}(\vec{a}, \vec{b}) = P_{--}(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \cos^2(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ P_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) = P_{-+}(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \sin^2(\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{cases}, \quad (2.44)$$

dove  $P_{\pm\pm}(\vec{a}, \vec{b})$  indica la probabilità di ottenere congiuntamente  $\pm$  per  $\nu_1$  tramite I e per  $\nu_2$  tramite II. Queste probabilità indicano la forte correlazione tra i risultati delle due misure: se  $\nu_1$  viene rivelato con polarizzazione + da I, allora con certezza si trova + per  $\nu_2$  tramite II. La meccanica quantistica descrivere questo fenomeno con il coefficiente di correlazione di polarizzazione quantistico,

$$E_{MQ}(\vec{a}, \vec{b}) = \cos[2(\vec{a} \cdot \vec{b})], \quad (2.45)$$

che è massimo per  $\vec{a} = \vec{b}$ . La teoria delle variabili nascoste locali prevede di aggiungere dei parametri supplementari per dare conto del fatto che deve esistere un elemento di realtà che, quando assume un certo valore, determina la coppia ++, quando ne assume un altro, la coppia --. Riprendendo il formalismo di Bell nell'articolo del paragrafo precedente, il fattore di correlazione per questa teoria è

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) d\lambda. \quad (2.46)$$

Indicate con  $\vec{a}'$  e  $\vec{b}'$  direzioni di polarizzazioni differenti rispettivamente per  $\nu_1$  e  $\nu_2$ , si consideri ora la quantità

$$\begin{aligned} s(\lambda, \vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}') &= A(\lambda, \vec{a})B(\lambda, \vec{b}) - A(\lambda, \vec{a})B(\lambda, \vec{b}') + A(\lambda, \vec{a}')B(\lambda, \vec{b}) + A(\lambda, \vec{a}')B(\lambda, \vec{b}') = \\ &= A(\lambda, \vec{a})[B(\lambda, \vec{b}) - B(\lambda, \vec{b}')] + A(\lambda, \vec{a}')[B(\lambda, \vec{b}) + B(\lambda, \vec{b}')] = \pm 2; \end{aligned}$$

mediando su  $\lambda$ ,

$$-2 \leq \int \rho(\lambda) s(\lambda, \vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}') d\lambda \leq 2$$

e dalla (2.46)

$$\begin{cases} -2 \leq S(\lambda, \vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}') \leq 2 \\ S(\lambda, \vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}') = E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}) + E(\vec{a}', \vec{b}') \end{cases} \quad (2.47)$$

Queste sono le disuguaglianze di CHSH o BCHSH e rappresentano la generalizzazione delle disuguaglianze di Bell operata da Clauser, Horn, Shimony e Holt<sup>10</sup>. Dalla (2.45) è possibile calcolare  $S_{MQ}$ : in particolare, si vuole cercare per quali configurazioni di  $\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}'$  il valore di  $S_{MQ}$  è massimo e per quali minimo, che evidenziano immediatamente la compatibilità o meno con la CHSH. Da tale operazione risulta che per  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}' = \vec{a}' \cdot \vec{b}' = \theta$

$$\begin{cases} S_{MQ} = 3\cos(2\theta) - \cos(6\theta) \\ S_{MQ}^{MAX} = 2\sqrt{2} \\ S_{MQ}^{MIN} = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

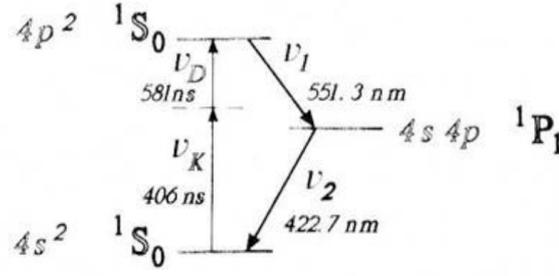
e la (2.47) è violata.

### 2.3.2 L'esperimento di Aspect

Dal momento che l'incompatibilità nasce, stando alla trattazione di Bell, dall'ipotesi di località, è fondamentale che si imbastisca un apparato strumentale che riproduca l'idea di località di Einstein, ovvero la separazione di tipo spazio tra le due misure, che impedisce uno scambio di informazioni, ovvero un'influenza di una misura sull'altra, a velocità maggiori di quella della luce. Come sottolinea Bell nella conclusione del suo articolo[10], è importante che la disposizione degli strumenti di misura cambi nel tempo e, a tal proposito, Aspect prosegue giustificando la scelta di commutare l'orientazione di I e II tra due disposizioni,  $\vec{a}$  e  $\vec{a}'$  per il primo,  $\vec{b}$  e  $\vec{b}'$  per il secondo. Se  $L$  è la distanza tra i due commutatori, tale cambio di commutazione deve avvenire in un tempo minore di  $\frac{L}{c}$  per realizzare la località. È poi importante che lo stato delle particelle sia entangled e la parte di polarizzazione della funzione d'onda dei due fotoni emessi da una stessa sorgente lo è, così come è realizzata la condizione di non commutabilità tra le misure effettuate, scegliendo  $\vec{a}$  e  $\vec{a}'$  né parallele né perpendicolari tra loro e lo stesso per  $\vec{b}$  e  $\vec{b}'$ . Un'ultima condizione da rispettare è la casualità della scelta delle quantità da misurare: le commutazioni non sono veramente casuali, perchè i commutatori sono pilotati da generatori periodici, che tuttavia funzionano in modo scorrelato. Sulla base di queste considerazioni, il team di Aspect realizzò l'esperimento di Orsay (1980-1982), dopo averne effettuati altri due in precedenza, che non rispettavano così rigorosamente le condizioni precedenti come quest'ultimo.

La sorgente utilizzata, rappresentata dalla cascata del calcio (Fig. 2.2), è ad alta efficienza, stabile e ben controllata.

<sup>10</sup>J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony e R. A. Holt. *Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories*, Physical Review, Lett. 23 (1969), pp. 880-84.


 Figura 2.2: cascata del calcio, eccitazione a due fotoni,  $\nu_1$  e  $\nu_2$ .

Tale sorgente (S) è posta tra due commutatori (C1 e C2), che inviano fotoni alternativamente a due polarizzazioni orientati in direzioni opposte (rispettivamente I e I', II e II'), con una periodicità di 10 ns: il tempo di vita del livello intermedio (4s4p) è di 5ns, mentre il tempo di percorrenza della distanza tra i due commutatori è  $\frac{L}{c} = \frac{12m}{c} = 40ns$ , quindi la rivelazione di un evento da un lato e il cambio di orientazione dall'altro sono separati da un intervallo di tipo spazio, come richiesto dalla località. La disposizione descritta è rappresentata in figura 2.3.

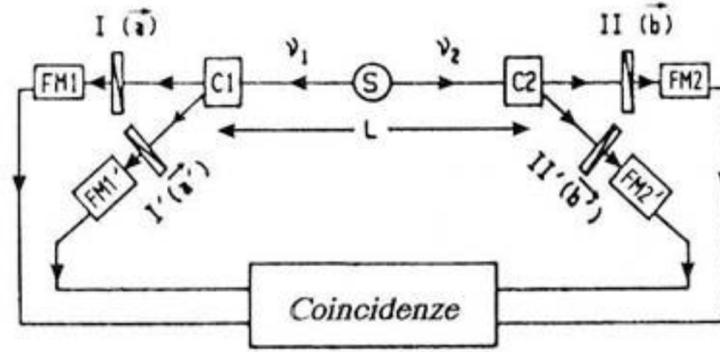


Figura 2.3: apparato strumentale dell'esperimento di Orsay, con polarizzatori a disposizione variabile.

La luce di fluorescenza viene raccolta da un insieme di lenti e polarizzatori; dei fotomoltiplicatori alimentano l'elettronica che misura le coincidenze, costituita da un convertitore tempo-ampiezza e da un quadruplo analizzatore, che raccoglie e analizza i dati dei tempi di coincidenza, distinguendo il fondo di coincidenze tra fotoni provenienti da cascate differenti, dal vero e proprio segnale, ovvero le coincidenze tra fotoni emessi dallo stesso atomo.

I polarizzatori, I I', II, II', trasmettono luce polarizzata parallelamente a  $\vec{a}$ ,  $\vec{a}'$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{b}'$  rispettivamente, bloccando quella polarizzata ortogonalmente, quindi le misure di fatto danno solo i risultati "+"; si effettuano inoltre raccolte dati con uno o entrambi i polarizzatori rimossi (polarizzazione  $\infty$ ). Si consideri dunque l'osservabile

$$S' = \frac{N_{++}(\vec{a}, \vec{b}) - N_{++}(\vec{a}, \vec{b}') + N_{++}(\vec{a}', \vec{b}) + N_{++}(\vec{a}', \vec{b}')}{N(\infty, \infty)},$$

dove con  $N_{++}(\vec{a}, \vec{b})$  s'intende il conteggio di coincidenze in cui  $\nu_1$  è polarizzato parallelamente a  $\vec{a}$  e  $\nu_2$  a  $\vec{b}$  e lo stesso formalismo vale per gli altri termini del numeratore. L'osservabile al denominatore è invece

$$N(\infty, \infty) = N_{++}(\vec{a}, \vec{b}) + N_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) + N_{-+}(\vec{a}, \vec{b}) + N_{--}(\vec{a}, \vec{b}).$$

$S'$  è riconducibile ad una somma di probabilità, proprio come  $S$  nella (2.47): sostituendo opportunamente, si possono riscrivere le disuguaglianze CHSH:

$$-1 \leq S' \leq 0. \quad (2.48)$$

Le misure vengono effettuate nelle configurazioni nelle quali le disuguaglianze CHSH sono massimamente violate dalla meccanica quantistica, di seguito raffigurate.

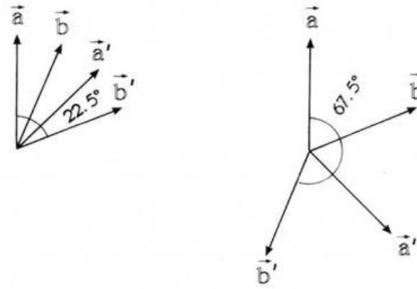


Figura 2.4

Alla fine dell'articolo Aspect riporta il risultato dell'esperimento:

$$S'_{exp} = 0.101 \pm 0.020,$$

che viola la (2.48) di più di cinque deviazioni standard, mentre è compatibile con il valore previsto dalla meccanica quantistica:

$$S'_{MQ} = 0.113 \pm 0.005.$$

Sono state poi effettuate altre misure per un confronto diretto con le previsioni quantomeccaniche, graficando il tasso di coincidenza medio normalizzato ( $\frac{R}{R_0}$ ) in funzione dell'angolo tra le orientazioni dei polarizzatori. In figura 2.4 viene riportato il grafico con i punti sperimentali, che sono interpolati dalla funzione predetta dalla meccanica quantistica (linea tratteggiata) in maniera eccellente.

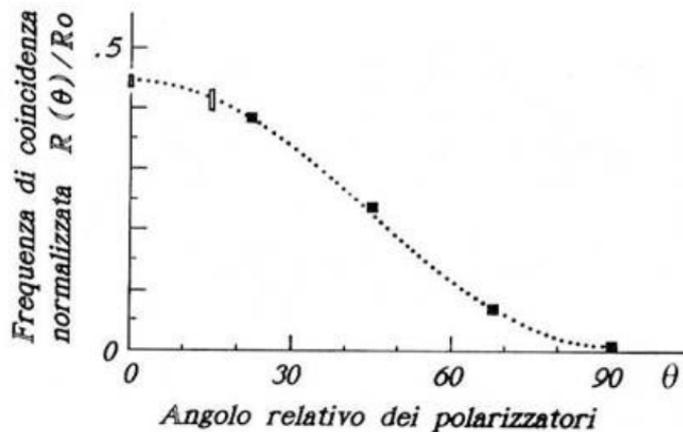


Figura 2.5: accordo tra la meccanica quantistica e i dati sperimentali, gli errori indicati sono  $\pm 1$  deviazione standard.

In seguito a questi risultati o si deve rinunciare alle teorie a parametri supplementari locali o ammettere la possibilità di trasmettere segnali superluminali: gli articoli di Bell hanno dimostrato teoricamente la possibilità di teorie a variabili nascoste non locali, Bohm ne ha fornito un esempio autoconsistente e sperimentalmente indistinguibile dalla meccanica quantistica ortodossa, quindi empiricamente verificata.

L'articolo di Aspect si chiude presentando queste due alternative senza prendere esplicitamente una parte, lasciando quindi la scelta al lettore. Come sottolinea B. C. van Fraassen nel suo saggio "L'immagine scientifica"[14], ogni teoria scientifica sofisticata prevede un "bagaglio metafisico", ovvero un'aggiunta di enti teorici con il fine di ottenere una descrizione adeguata dei fenomeni. Nel momento in cui questa aggiunta risulta necessaria, ovvero utile a far collimare dati sperimentali e previsioni,

allora l'espressione "bagaglio teorico" cessa di essere usata e viene riservata per quelle teorie in cui gli enti "in più" non sono necessari per descrivere le evidenze empiriche. Le teorie a variabili nascoste, che siano locali o meno, ne sono un esempio: esse nascono da un impulso più filosofico che pratico, data la correttezza della meccanica quantistica, ed è del tutto sostenibile una visione della scienza basata sul minimalismo empirico, per cui una teoria è accettabile se è empiricamente adeguata, ovvero se i suoi modelli sono compatibili con i modelli dei dati. In questa ottica, che ricorda il Rasoio di Occam, è preferibile rinunciare a parametri supplementari non necessari all'adeguatezza empirica.



# Conclusione

L'importante lezione del teorema di Bell è stato provare che teorie delle variabili nascoste locali e meccanica quantistica sono due apparati teorici incompatibili e che, dunque, la convinzione di EPR di un futuro completamento della teoria quantomeccanica, tramite variabili locali, era scorretta. È anche vero che il conflitto tra le due teorie appare, a livello sperimentale, solo in pochi casi, ovvero quelli in cui si manifesta l'entanglement; è solo in questi esperimenti che si può riscontrare il successo della meccanica quantistica sulle teorie locali. Inoltre, in un primo momento, può sembrare che meccanica quantistica e relatività speciale siano in contraddizione, tuttavia è stato formulato un teorema che sancisce l'impossibilità di inviare segnali superluminali in meccanica quantistica.

## Teorema dell'impossibilità dei segnali superluminali

Si considerino due osservatori,  $O_L$  e  $O_R$ , che misurano l'osservabile  $S_z$  rispettivamente della particella L e R, che si supponga si trovino in uno stato di singoletto e separate da una distanza di tipo spazio. Allora ad ogni misura di  $S_{z,L}$  da parte di  $O_L$ , quest'ultimo conoscerà anche il valore di  $S_{z,R}$  e viceversa. Dopo una serie di misure, entrambi avranno un campione di risultati "+" e "-" che, avendo la stessa probabilità, danno come media 0. Se  $O_L$  decide di misurare  $S_{x,L}$  senza informare  $O_R$ , otterrà nuovamente un campione di risultati di quel tipo, quindi  $O_R$  non potrà dirimere tra la misura di  $S_{x,L}$  e  $S_{z,L}$ , non potrà cioè ricavare informazioni sulle misure eseguite da  $O_L$ . In conclusione,  $O_L$  e  $O_R$  non possono ricevere né trasmettere messaggi superluminali.

Si noti infatti che il paradosso EPR riguarda il singolo osservatore, che giunge alla conoscenza simultanea del valore di due osservabili che non commutano.

## Soluzione del paradosso

Riprendendo la conclusione del primo capitolo, si aprono tre scenari possibili per la soluzione del paradosso EPR.

1. *Rinuncia alla completezza della meccanica quantistica*

Questa era la posizione di EPR, che vedevano responsabile del paradosso l'indeterminismo della meccanica quantistica. Riconoscendone il successo sperimentale, essa sarebbe allora da interpretare come una teoria fenomenologica che non descrive il mondo *reale*, perché la sua interpretazione non collega tutti gli elementi della realtà con gli enti della teoria. Bisognerebbe allora cercare una teoria più fondamentale, che riproduca i risultati della meccanica quantistica sperimentalmente verificati e che sia realista e locale. Bell mette tuttavia in evidenza che tale teoria non può essere locale, quindi questa posizione è autocontraddittoria.

2. *Rinuncia al principio di realtà*

Questa è la posizione dei sostenitori dell'interpretazione di Copenaghen, basata sulla completezza della meccanica quantistica e sul principio di località, la cui coesistenza è resa possibile dal fatto che le osservazioni influenzano solo la conoscenza dell'osservatore, non le proprietà reali dei sistemi. L'indeterminismo è dunque una caratteristica del mondo microscopico e la meccanica quantistica viene interpretata in maniera strumentalista, nel senso che rappresenta un

”utile strumento” per la conoscenza dell’essere umano, poiché contiene tutte le informazioni che l’osservatore può avere di un sistema fisico.

### 3. *Rinuncia al principio di località*

Rinunciare alla località significa dover considerare il mondo microscopico come un tutt’uno indivisibile, in cui la modifica istantanea di una parte comporta una risposta nelle altre. L’indeterminismo di nuovo ne è una caratteristica e la funzione d’onda è una proprietà di un sistema fisico, ha cioè una corrispondenza nella realtà, e ne contiene l’informazione massimale.

La (2) e la (3) rappresentano le soluzioni migliori o, perlomeno, quelle autoconsistenti e la scelta tra le due è anche, per non dire in buona parte, di tipo filosofico. Bisogna però anche tenere conto del fatto che le correlazioni EPR non sono gli unici fenomeni che evidenziano un conflitto tra la meccanica quantistica e la località: l’effetto Aharonov-Bohm, ad esempio, trova una sua spiegazione proprio nella rinuncia della località nelle equazioni dinamiche in meccanica quantistica. Per quanto dura da digerire, se è stato possibile, con non poca fatica, metabolizzare l’impossibilità di assegnare una traiettoria alle particelle, accettare l’effetto tunnel e le onde evanescenti, osservare comportamenti diversi negli elettroni a seconda che vengano ”guardati” o meno, forse sarà possibile anche rinunciare alla località, senza naturalmente mettere in discussione l’imponenza dell’eredità di Einstein. D’altra parte non è nemmeno così semplice rinunciare al realismo: per quanto nelle intenzioni si possa essere antirealisti, è difficile, nella pratica sperimentale, durante le lezioni di fisica, durante le discussioni tra fisici, parlare del mondo microscopico e delle sue proprietà senza credere che si stia parlando di qualcosa che veramente costituisce ciò che siamo, ciò che percepiamo, ciò che ci circonda, pure il mezzo stesso tramite cui vengono propagate le nostre parole.

Al di là delle questioni profonde, Einstein, Podolsky e Rosen misero in luce la straordinarietà dell’entanglement, uno dei fenomeni più sorprendenti, equivocabili e controintuitivi della meccanica quantistica, che venne studiato e approfondito grazie a diversi contributi sintetizzati in questo elaborato. È grazie a tutti questi scienziati, teorici e sperimentali, e pure grazie alle loro dispute, che nacque l’informazione e la crittografia quantistica, sancendo quella che Aspect definì, nell’introduzione alla raccolta di articoli di Bell, la seconda rivoluzione quantistica.

# Bibliografia

- [1] A. Einstein, B. Podolski, N. Rosen. *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Physical Review, 47:777–780, 15 maggio 1935.
- [2] N. Bohr. *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Physical Review, 48:696–702, 15 ottobre 1935.
- [3] D. Bohm, Y. Aharonov. *Discussion of experimental proof for the paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky*, Physical Review, 108:1070–1076, 15 novembre 1957.
- [4] O. Nicosini. *Paradosso EPR e teorema di Bell*, Università degli Studi di Pavia Dipartimento di fisica nucleare e teorica, edizione web (novembre 2002).
- [5] K. Konishi, G. Paffuti. *Meccanica quantistica: nuova introduzione*, Pisa University Press (2019).
- [6] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe. *Quantum Mechanics*, Vch Pub (1977).
- [7] J. Bell., *Gli esperimenti Einstein-Podolsky-Rosen*, Dicibile e indicibile in meccanica quantistica, Adelphi Edizioni, 10<sup>a</sup> edizione (2021).
- [8] J. Bell. *Bertlmann's socks and the nature of reality*, Journal de Physique Colloques, 1981, 42 (C2), pp.C2-41-C2-62.
- [9] J. Bell. *Sul problema delle variabili nascoste in meccanica quantistica*, Dicibile e indicibile in meccanica quantistica, Adelphi Edizioni, 10<sup>a</sup> edizione (2021).
- [10] J. Bell. *On the Einstein Podolsky Rosen paradox*, Physics Physique Fizika, 1(3):195, 1964.
- [11] D. Bohm. *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. I*, Physical Review, 85:166–179, 15 gennaio 1952.
- [12] D. Bohm. *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. II*, Physical Review, 85:180-193, 15 gennaio 1952.
- [13] A. Aspect. *Verifiche sperimentali delle disuguaglianze di Bell in fisica atomica*, Atomic Physics 8, Rendiconti della "Ottava Conferenza Internazionale sulla Fisica Atomica", 2-6 agosto 1982, Svezia.
- [14] B. C. van Fraassen. *L'immagine scientifica*, Clueb, settembre 1985, Bologna.
- [15] F. Logiurato. *Fondamenti e interpretazioni della teoria quantistica*, Corso di perfezionamento in fisica moderna, Università degli Studi di Trento, settembre 2004.