

**Università degli Studi di Padova**

---

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"  
Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA

**Il teorema di Kochen-Specker  
e il problema della contestualità  
in Meccanica Quantistica**

Candidato:  
**Michele Guerra**

Relatore:  
**Prof. Pieralberto Marchetti**

---

Anno Accademico 2015/2016



# Indice

<b>Introduzione</b>	III
<b>1 Teorema di Kochen-Specker</b>	1
1.1 Giustificazione ipotesi . . . . .	1
1.2 Algebre parziali . . . . .	4
1.3 Teorema di Kochen-Specker . . . . .	5
1.4 Dimostrazione del Teorema KS . . . . .	6
<b>2 Confronti e applicazioni</b>	11
2.1 Modello classico di spin $1/2$ . . . . .	11
2.2 Confronto col teorema di von Neumann . . . . .	14
2.3 Esempio in quattro dimensioni . . . . .	15
2.4 Confronto col teorema di Bell . . . . .	16
<b>3 Meccanica bohiana e contestualità</b>	19
3.1 Premessa . . . . .	19
3.2 Teoria di Bohm . . . . .	20
3.3 Misura di spin . . . . .	24
3.4 Argomento di Mermin . . . . .	26
3.5 Limiti del teorema e contestualità . . . . .	27
<b>A Misura di probabilità del modello classico di spin <math>1/2</math></b>	31
<b>Bibliografia</b>	35



# Introduzione

Nel luglio del 2011, nella conferenza “Quantum Physics and the Nature of Reality”, Schlosshauer et al. [13] fecero un sondaggio ai 33 studiosi partecipanti scoprendo che il 42% dei presenti supportava l’interpretazione di Copenhagen della Meccanica Quantistica, che quindi resta ancora la preferita. Tale interpretazione, formulata e sostenuta principalmente da Heisenberg e Bohr, regge su tre cardini:

- la funzione d’onda rappresenta la descrizione più completa dello stato di un sistema fisico; ciò vuol dire che un’informazione non contenuta in essa semplicemente non esiste, non è definita, è priva di significato;
- il processo di misura di un’osservabile è spiegato dal collasso della funzione d’onda: se il sistema si trova nello stato  $\psi$ , che in generale è una sovrapposizione di auto-stati dell’osservabile considerata, e si ottiene il risultato  $a$ , la funzione d’onda viene proiettata nell’autospazio relativo ad  $a$ ; il modo in cui avviene il trasferimento di informazione dal sistema osservato all’apparato di misura è indeterministico;
- il principio di indeterminazione di Heisenberg.

L’interpretazione di Copenhagen “ortodossa”, quindi, vieta di porsi alcune domande sui sistemi quantistici, tacciandole di essere prive di significato, senza però fornire una dimostrazione adeguata che una tale rinuncia sia necessaria. Inoltre è basata su un’assunzione, quella della completezza dell’informazione contenuta nella funzione d’onda, che non può essere verificata sperimentalmente.

Einstein, in [5], dà una sua interpretazione di cosa voglia dire “completo”: se una teoria è completa, allora ogni elemento della realtà fisica deve essere descritto da un elemento della teoria. A ben vedere, però, occorre integrare la nozione di teoria completa con quella di realtà fisica. Gli elementi della realtà fisica vengono rintracciati tramite esperimento, e, secondo Einstein, quando si riesce a predire con certezza, senza disturbare il sistema, il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento di realtà corrispondente a tale quantità (principio di realtà).

Il paradosso EPR, mettendo in luce come, volendo preservare i principi di realtà e località, la funzione d’onda non possa fornire una descrizione completa della realtà fisica, apre la strada alla formulazione di altre teorie che siano, invece, complete. Queste ultime prendono il nome di teorie a variabili nascoste, perché, aggiungendo alla descrizione matematica data dalla funzione d’onda altre variabili, vogliono recuperare una descrizione completa e realistica della natura. Le disuguaglianze di Bell e la verifica sperimentale

della loro violazione mostrano, però, che anche una tale teoria non può essere realistica e locale. Se si potesse preparare un sistema fisico in uno stato, specificandone anche le variabili nascoste, allora la Meccanica Quantistica si rivelerebbe inadeguata. Per questo vengono chiamate “nascoste”. In quest’ottica, le probabilità che si incontrano in Meccanica Quantistica scaturiscono dall’ignoranza di queste variabili e non da una intrinseca indeterminatezza della natura. Ad onor del vero, Einstein riteneva che, per rendere completa la teoria, non fosse sufficiente aggiungere al vecchio formalismo nuove variabili, ma bisognasse “cambiare i concetti fondamentali dell’intera struttura”.

L’interpretazione usuale resta, ovviamente, perfettamente consistente, ma la sola consistenza non esclude la possibilità che possano esistere altre interpretazioni anch’esse consistenti, che, tramite nuove variabili, possano descrivere in maniera causale e continua tutti i processi. Infatti, come nota Bohm in [2], le assunzioni sopra elencate non fissano in maniera univoca la formulazione matematica della teoria, ma la limitano soltanto. Quindi l’accordo con i dati sperimentali non è un test adeguato dell’efficacia della combinazione tra descrizione matematica e interpretazione fisica, perché, a fronte di una inadeguatezza della teoria, è sempre possibile recuperare la consistenza con l’esperimento apportando modifiche alla sola formulazione matematica, senza intaccare l’interpretazione fisica. Per evitare di ricadere nell’uso di un circolo di ipotesi la cui correttezza è inverificabile, risulta importante cercare teorie alternative e saggiarne l’efficacia.

Nel corso degli anni si sono succedute da una parte prove dell’inesistenza delle variabili nascoste, dall’altro tentativi di introdurre tali teorie. Questa tesi, nel Capitolo 1, presenta e dimostra il teorema di Kochen-Specker, uno dei risultati ottenuti nel tentativo di negare l’esistenza di variabili nascoste, riuscendo però solo a ridurre una tale prospettiva, senza eliminarla del tutto. In sintesi, il teorema afferma che ogni teoria che abbia come obiettivo l’attribuzione di un valore preciso ad ogni osservabile quantistica (in uno spazio di Hilbert di dimensione superiore a 2), continuando a riprodurre sia le proprietà statistiche della Meccanica Quantistica, sia quelle algebriche, deve essere contestuale. Ovvero, date tre osservabili  $A$ ,  $B$  e  $C$ , che soddisfano  $[A, B] = [A, C] = 0$  e  $[B, C] \neq 0$ , il risultato di una misura di  $A$  cambia se è misurata da sola, o insieme a  $B$ , oppure insieme a  $C$  (vedere [12]). La dimostrazione qui descritta segue la logica dell’argomento iniziale di Kochen e Specker in [9], ma è aggiornata dal più recente lavoro di Peres [11]. Nel Capitolo 2 è dapprima presentato un modello funzionante (nel senso del teorema) di teoria a variabili nascoste in uno spazio bidimensionale, per poterlo poi confrontare con degli esempi in cui si verifica la contraddizione del teorema. Gli esempi discussi permettono, inoltre, di paragonare il teorema di Kochen-Specker ad analoghi risultati in materia, in particolare il teorema di von Neumann ([15]), mostrandone l’inefficacia, e il teorema di Bell ([1]). Il Capitolo 3 inizia descrivendo l’esempio più importante di teoria a variabili nascoste funzionante, quella di Bohm ([2, 3]), cercando di capire come riesca ad eludere la tesi del teorema. Questo permette di concludere con un’analisi del problema della contestualità, limite del teorema di cui inizialmente Kochen e Specker non erano consci.

## Notazione

Nel presente lavoro vengono usate le seguenti convenzioni:

- per brevità, si useranno le sigle “MQ” e “KS” in luogo di “Meccanica Quantistica” e “Kochen-Specker” rispettivamente;
- uno spazio di Hilbert viene indicato con  $\mathcal{H}$ , laddove è utile specificarne la dimensione si utilizza il pedice ( $\mathcal{H}_n$  è uno spazio di Hilbert n-dimensionale);
- il prodotto scalare su  $\mathcal{H}$  viene indicato con  $(\cdot, \cdot)$ ;
- la lettera  $\mathcal{O}$  indica l’insieme delle osservabili quantistiche oppure, con una piccola inesattezza, l’insieme degli operatori autoaggiunti su  $\mathcal{H}$  (con  $\mathcal{O}_n$  si indica l’insieme degli operatori autoaggiunti agenti su  $\mathcal{H}_n$ );
- qualora fosse necessario distinguere tra osservabili ed operatori autoaggiunti ad esse associati, si utilizza per questi ultimi la stessa lettera dell’osservabile, sormontata dal simbolo “ $\hat{\phantom{O}}$ ”.





# Capitolo 1

## Teorema di Kochen-Specker

In questo capitolo è presentato il teorema di Kochen-Specker. Per prima cosa, viene mostrata l'insufficienza della sola richiesta che una teoria a variabili nascoste riproduca la struttura probabilistica della Meccanica Quantistica. Ovvero, si introduce uno spazio delle fasi  $\Omega$  di stati nascosti e una misura di probabilità su di esso, richiedendo che essa generi le probabilità caratteristiche della MQ. Si dimostra, però, che, imponendo solo questa condizione, è sempre possibile costruire una teoria a variabili nascoste che la soddisfi.

Si passa, quindi, alla costruzione di una seconda ipotesi, che tenga conto della struttura algebrica delle osservabili quantistiche. Se, infatti, vi è una relazione funzionale  $f(A, B, \dots) = 0$  tra le osservabili compatibili  $A, B, \dots$ , allora una tale identità deve essere soddisfatta anche dai risultati  $a, b, \dots$  di loro misure simultanee, in quanto essi sono degli autovalori. Ma, visto che la teoria a variabili nascoste deve predire i risultati di una misura, si richiede che i valori  $v(A), v(B), \dots$  associati alle osservabili e determinati dalle variabili nascoste siano proprio degli autovalori, e quindi deve valere anche per loro la  $f(v(A), v(B), \dots) = 0$ .

In seguito viene introdotto il formalismo delle algebre parziali per enunciare il teorema e dimostrarlo con un argomento di Peres, più semplice di quello usato originariamente da Kochen e Specker.

### 1.1 Giustificazione ipotesi

Sia  $\mathcal{O}$  l'insieme delle osservabili, rappresentate in Meccanica Quantistica da operatori autoaggiunti su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , e  $\mathcal{S}$  l'insieme degli stati puri, ovvero l'insieme dei raggi vettori di  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{S} \simeq (\mathcal{H} \setminus \{0\}) / (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ .

Si denota con  $P_\psi^A : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ , dove  $\mathcal{B}$  indica l'insieme dei boreliani di  $\mathbb{R}$ , la misura di probabilità associata ad ogni stato  $\psi \in \mathcal{S}$  e ad ogni osservabile  $A \in \mathcal{O}$ , ovvero  $P_\psi^A(U \subset \mathbb{R})$  rappresenta la probabilità che il risultato di una misura di  $A$  nello stato  $\psi$  cada in  $U$ . Allora il valor medio di  $A$  nello stato  $\psi$  è

$$\langle A \rangle_\psi = \int_{\sigma(A)} \lambda dP_\psi^A(\lambda)$$

dove  $\sigma(A)$  è lo spettro di  $A$ , ovvero l'insieme dei valori che si possono ottenere misurando  $A$ , e  $P_\psi^A(\lambda)$  è la probabilità che una misura di  $A$  in  $\psi$  dia un risultato in  $] - \infty, \lambda]$ . Sia, inoltre,  $P^A(\lambda)$  famiglia spettrale di  $A$ , allora  $P_\psi^A = (\psi, P^A(\lambda)\psi)$ . Il teorema spettrale afferma che

$$\langle A \rangle_\psi = (\psi, A\psi) = \int_{\sigma(A)} \lambda d(\psi, P^A(\lambda)\psi),$$

oppure, più in generale,

$$\langle f(A) \rangle_\psi = (\psi, f(A)\psi) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) d(\psi, P^A(\lambda)\psi)$$

con  $f$  funzione misurabile e  $\psi$  in un opportuno dominio di  $f(A)$   $\psi \in D(f(A))$ . Astraendo dallo stato, si ottiene la decomposizione spettrale di  $A$  a livello operatoriale

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda dP^A(\lambda).$$

Una misura  $\mu$  su uno spazio di misura  $\Omega$  si dice atomica su un valore  $x \in \Omega$  se, per ogni  $U \subset \Omega$ ,  $\mu(U) = 1$  se  $x \in U$  e  $\mu(U) = 0$  altrimenti. In MQ, a differenza della meccanica classica, non esistono stati  $\psi$  per cui  $P_\psi^A$  sia atomica su un unico valore reale  $a$  per tutte le osservabili  $A \in \mathcal{O}$ .

Una teoria a variabili nascoste ha come obiettivo l'introduzione di:

- uno spazio delle fasi  $\Omega$  di stati puri “nascosti”  $q$ ;
- una misura di probabilità  $\mu_\psi$  su  $\Omega$ ;
- una funzione  $f_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile, per ogni osservabile  $A$ .

Ogni stato puro “originale”  $\psi$  è interpretato come uno stato misto della nuova teoria a variabili nascoste, ovvero come la misura di probabilità  $\mu_\psi$  su  $\Omega$  dove, per ogni  $\Gamma \subset \Omega$  misurabile,  $\mu_\psi(\Gamma)$  rappresenta la probabilità che il sistema sia in uno stato puro nascosto in  $\Gamma$ . In altre parole, lo spazio degli stati diventa  $\mathcal{H} \times \Omega$  e lo stato del sistema  $(\psi, q)$ . Inoltre, ad ogni osservabile  $A \in \mathcal{O}$  è associata la funzione  $f_A$  che assegna ad ogni stato puro nascosto  $q$  il valore che assume  $A$  in tale stato. In questo modo la misura di probabilità  $P_\psi^A$  diventa

$$P_\psi^A(U) = \mu_\psi(f_A^{-1}(U)), \tag{1.1}$$

cosicché

$$\langle A \rangle_\psi = \int_{\Omega} f_A(\omega) d\mu_\psi(\omega). \tag{1.2}$$

Come mostrano S. Kochen e E. P. Specker (KS) in [9] e N. Straumann in [14], è sempre possibile, almeno matematicamente, definire uno spazio delle fasi  $\Omega$  e una teoria

che soddisfino (1.1). Infatti, si consideri lo spazio  $\Omega = \mathbb{R}^\mathcal{O} = \{\omega \mid \omega : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}\}$  e, per ogni  $A \in \mathcal{O}$ , la funzione  $f_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f_A(\omega) := \omega(A)$ . Per ogni stato  $\psi \in \mathcal{S}$ , la probabilità su  $\Omega$  sia

$$\mu_\psi := \prod_{A \in \mathcal{O}} P_\psi^A, \quad (1.3)$$

allora (1.1) è soddisfatta, infatti per ogni aperto  $U \subset \mathbb{R}$

$$\mu_\psi(f_A^{-1}(U)) = \mu_\psi(\{\omega \in \Omega \mid \omega(A) \in U\}) \stackrel{(1.3)}{=} P_\psi^A(U).$$

Quindi la (1.1) è una verifica troppo debole dell'efficacia di una teoria a variabili nascoste. Per questo KS nel loro articolo trovano un'altra condizione necessaria, che deve essere soddisfatta da una tale teoria in modo che sia valida.

Nella costruzione precedente sullo spazio  $\Omega = \mathbb{R}^\mathcal{O}$ , le  $f_A$  rappresentano le osservabili nascoste della teoria e, dovendo essere funzioni misurabili, esse sono variabili aleatorie. Siano allora  $A, B \in \mathcal{O}$ , cui corrispondono  $f_A$  e  $f_B$  nella nuova teoria. La probabilità dell'evento composto  $f_A \in U$  e  $f_B \in V$ , per ogni  $U, V \subset \mathbb{R}$  aperti, è

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(f_A \in U, f_B \in V) &= \mu_\psi(\{\omega \in \Omega \mid \omega(A) \in U \wedge \omega(B) \in V\}) \stackrel{(1.3)}{=} P_\psi^A(U)P_\psi^B(V) = \\ &= \mu_\psi(\{\omega \in \Omega \mid \omega(A) \in U\}) \mu_\psi(\{\omega \in \Omega \mid \omega(B) \in V\}) = \\ &= \mu_\psi(f_A^{-1}(U)) \mu_\psi(f_B^{-1}(V)) = \mathbb{P}(f_A \in U)\mathbb{P}(f_B \in V), \end{aligned}$$

cioè le due osservabili  $f_A$  e  $f_B$  sono variabili aleatorie indipendenti. Ma ciò, in generale, non è vero, perché esistono osservabili funzione di altre.

Bisogna, quindi, considerare anche la struttura algebrica delle osservabili quantistiche. Data un'osservabile  $A \in \mathcal{O}$  e una funzione misurabile  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , è possibile definire l'osservabile  $g(A)$  tramite

$$\langle g(A) \rangle_\psi = \int g(\lambda) dP_\psi^A(\lambda), \quad (1.4)$$

o, equivalentemente, da

$$P_\psi^{g(A)}(U) = P_\psi^A(g^{-1}(U)), \quad (1.5)$$

dove  $g(A)$  ha dominio  $\{\phi \in \mathcal{H} : \int_{\sigma(A)} |g(\lambda)|^2 dP_\phi^A(\lambda) < +\infty\}$ . Ovvero, da un punto di vista fisico, misurare  $g(A)$  vuol dire misurare  $A$  e applicare  $g$  al risultato della misura. Questa struttura algebrica deve essere conservata da una teoria a variabili nascoste. Una possibile formulazione matematica è

$$f_{g(A)} = g(f_A) \quad (1.6)$$

per ogni  $g$  misurabile ed ogni  $A \in \mathcal{O}$ . Una formulazione migliore dell'ipotesi (1.6) è data tramite le algebre parziali.

## 1.2 Algebre parziali

In MQ, osservabili  $A_i \in \mathcal{O}$ , con  $i \in I$  insieme di indici, si dicono *compatibili*, se sono simultaneamente misurabili. Una condizione necessaria e sufficiente per la compatibilità è che i corrispettivi operatori commutino a coppie, ovvero  $[A_i, A_j] = 0, \forall i, j \in I$ . Osservabili  $A_i$  (con  $i \in I$ ) si dicono *commisurabili* se esiste un'osservabile  $B$  e delle funzioni misurabili  $g_i$ , tali che  $A_i = g_i(B)$ , per ogni  $i \in I$ . Si dimostra (vedere [15]) che le due condizioni coincidono.

**Definizione 1.** *Un insieme  $X$  forma un'algebra parziale su un campo  $K$  se ci sono una relazione binaria  $\wp$ , chiamata **commisurabilità**, su  $X$  (cioè  $\wp \subseteq X \times X$ ), operazioni di addizione e moltiplicazione da  $\wp$  ad  $X$ , la moltiplicazione per uno scalare da  $K \times X$  ad  $X$ , e l'elemento  $1 \in X$ , tali che:*

1. *la relazione  $\wp$  è riflessiva e simmetrica, cioè  $\forall a, b \in X$  vale*

$$\begin{aligned} & a \wp a \\ & a \wp b \implies b \wp a; \end{aligned}$$

2.  *$a \wp 1, \forall a \in X$ ;*

3.  *$\wp$  è chiusa rispetto alle operazioni, cioè se  $a_i \wp a_j$  per ogni  $1 \leq i, j \leq 3$ , allora*

$$(a_1 + a_2) \wp a_3, \quad a_1 a_2 \wp a_3 \quad e \quad \lambda a_1 \wp a_3, \quad \forall \lambda \in K;$$

4. *se  $a_i \wp a_j$  per ogni  $1 \leq i, j \leq 3$ , allora i polinomi in  $a_1, a_2, a_3$  formano un'algebra commutativa sul campo  $K$ .*

Si nota che, date due osservabili  $A_1, A_2 \in \mathcal{O}$  commisurabili, per definizione esistono due funzioni misurabili  $f_1$  e  $f_2$  e un'osservabile  $B \in \mathcal{O}$ , tali che  $A_1 = f_1(B)$  e  $A_2 = f_2(B)$ . È allora possibile definire, tramite la (1.4), le seguenti operazioni:

$$\alpha A_1 + \beta A_2 := (\alpha f_1 + \beta f_2)(B), \quad A_1 A_2 := (f_1 f_2)(B), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

L'insieme delle osservabili commisurabili, munito di queste operazioni, ha la struttura di algebra parziale.

In particolare, si considerino i proiettori su uno spazio di Hilbert complesso e separabile, ovvero quegli operatori autoaggiunti  $P$  idempotenti, cioè tali che  $P^2 = P$ . Essi formano un'algebra parziale booleana  $\mathcal{B}$ , ovvero un'algebra parziale su  $K = \mathbb{Z}_2$  (campo di due elementi), con le operazioni booleane definite da

$$\begin{aligned} a \wedge b &= ab && (and) \\ a \vee b &= a + b - ab && (or) \\ a' &= 1 - a && (not) \end{aligned} \tag{1.7}$$

per ogni  $a, b \in \mathcal{B}$ .<sup>1</sup>

**Definizione 2.** Siano  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  due algebre parziali su un campo  $K$ , una mappa  $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  è detto **omomorfismo** se, per ogni  $a, b \in \mathcal{U}$  tali che  $a \varphi b$  e per ogni  $\alpha, \beta \in K$ ,

$$\begin{aligned} h(a) \varphi h(b), \\ h(\alpha a + \beta b) &= \alpha h(a) + \beta h(b), \\ h(ab) &= h(a)h(b), \\ h(1) &= 1. \end{aligned}$$

Un omomorfismo iniettivo è detto **embedding** (o **monomorfismo**).

Grazie a questa definizione l'ipotesi (1.6) può acquisire la seguente formulazione: (1.6) implica l'esistenza di un embedding dell'algebra parziale  $\mathcal{Q}$  delle osservabili quantistiche nell'algebra  $\mathbb{R}^\Omega$ , ovvero l'algebra delle funzioni  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\Omega$  spazio degli stati nascosti. Più in generale: una condizione necessaria per l'esistenza di variabili nascoste per la MQ è l'esistenza di un embedding dell'algebra parziale  $\mathcal{Q}$  in un'algebra commutativa.

### 1.3 Teorema di Kochen-Specker

Sia  $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}$  un embedding di un'algebra parziale  $\mathcal{P}$  in un'algebra commutativa  $\mathcal{C}$ , dalla Definizione 2 di omomorfismo segue subito che  $\varphi$ , ristretta alla sottoalgebra parziale booleana degli idempotenti di  $\mathcal{P}$ , è un embedding nella sottoalgebra booleana degli idempotenti di  $\mathcal{C}$ . Quindi l'esistenza delle variabili nascoste implica l'esistenza di un embedding della sottoalgebra parziale booleana  $\mathcal{B} \subset \mathcal{Q}$  in una sottoalgebra booleana di  $\mathbb{R}^\Omega$ .

Il teorema di KS può allora essere enunciato nel seguente modo:

**Teorema KS.** Se  $\dim \mathcal{H} \geq 3$ , allora non esiste alcun embedding dell'algebra parziale booleana  $\mathcal{B}$  in un'algebra booleana.

Si assuma che  $f$  sia un embedding di  $\mathcal{Q}$  in  $\mathbb{R}^\Omega$ , allora ogni stato nascosto  $\omega \in \Omega$  definisce l'omomorfismo  $h : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(A) := f_A(\omega)$ , chiamato *funzione di predizione*, perché assegna simultaneamente ad ogni osservabile il risultato della misura predetto. Si nota che  $h|_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z}_2$  è un omomorfismo, infatti i possibili risultati di una misura di un proiettore  $P \in \mathcal{B}$  sono 0 e 1.

**Lemma 1.** (Semi-simplicity) Per ogni elemento  $x \neq 0$  di ogni algebra booleana  $\mathcal{B}$  esiste un omomorfismo  $k : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z}_2$  tale che  $k(x) = 1$ .

---

<sup>1</sup>Soddisfano la definizione di algebra booleana,  $\forall a, b, c \in \mathcal{B}$ :  $a \wedge a = a = a \vee a$  (*idempotenza*);  $a \wedge b = b \wedge a$  e  $a \vee b = b \vee a$  (*commutatività*);  $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$  e  $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$  (*associatività*);  $a \wedge (a \vee b) = a \vee (a \wedge b) = a$  (*assorbimento*);  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$  e  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$  (*distributività*);  $0, 1 \in \mathcal{B}$  tali che  $0 \wedge a = 0$ ,  $0 \vee a = a$ ,  $1 \wedge a = a$  e  $1 \vee a = 1$ ;  $a \wedge a' = 0$  e  $a \vee a' = 1$ .

**Teorema 1.** *Sia  $\mathcal{P}$  un'algebra parziale booleana.  $\mathcal{P}$  ammette un embedding in un'algebra booleana  $\mathcal{A}$  se e solo se per ogni coppia di elementi distinti  $a, b \in \mathcal{P}$  esiste un omomorfismo  $h : \mathcal{P} \rightarrow Z_2$  tale che  $h(a) \neq h(b)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{A}$  un embedding, bisogna mostrare che esiste un omomorfismo  $h$  come da tesi. Per definizione di embedding,  $a \neq b \implies \varphi(a) \neq \varphi(b)$ . Nell'Halmos [7] è dimostrato che per le algebre booleane vale la proprietà di semi-simplicity su esposta. Grazie ad essa, si può dire che, dati  $x, y \in \mathcal{A}$  tali che  $x \neq y$ , esiste un omomorfismo  $k : \mathcal{A} \rightarrow Z_2$  tale che  $k(x - y) = 1$ , allora

$$k(x) - k(y) = 1 \implies k(x) \neq k(y),$$

quindi  $k(\varphi(a)) \neq k(\varphi(b))$ . Perciò basta prendere  $h = k \circ \varphi$  per avere la tesi.

Viceversa, sia  $S$  l'insieme degli omomorfismi (non banali) di  $\mathcal{P}$  in  $Z_2$ . Si definisce la funzione  $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow (Z_2)^S$  ponendo  $\varphi(a) : h \mapsto \varphi(a)(h) := h(a)$ , per ogni  $h \in S$ . Si nota che  $\varphi$ , vista come funzione di  $a \in \mathcal{P}$ , è un embedding di  $\mathcal{P}$  nell'algebra booleana  $(Z_2)^S$ .  $\square$

Si hanno ora tutti gli elementi per procedere alla dimostrazione.

## 1.4 Dimostrazione del Teorema KS

Grazie al Teorema 1, per dimostrare il Teorema KS basta mostrare che non esiste alcun omomorfismo tra  $\mathcal{B}$  e  $Z_2$ .

Per far questo, si considera  $B(\mathbb{E}^3)$  l'algebra parziale booleana<sup>2</sup> dei sottospazi lineari di uno spazio euclideo 3-dimensionale  $\mathbb{E}^3$ . Si può costruire un embedding  $\phi$  tra  $B(\mathbb{E}^3)$  e l'insieme dei proiettori  $\mathcal{B}$  agenti su  $\mathcal{H}_3$  nel seguente modo:

- $\phi(\mathbb{E}^3) = P$ ;
- $\phi(0) = 0$ ;
- ad ogni spazio lineare unidimensionale  $\alpha$  di  $\mathbb{E}^3$ ,  $\phi$  associa il relativo proiettore  $P_\alpha \in \mathcal{B}$ ;
- per ogni spazio lineare bidimensionale  $\beta$  di  $\mathbb{E}^3$ , sia  $\alpha$  il suo complemento ortogonale, si pone  $\phi(\beta) = P - P_\alpha$ .

La  $\phi$  definita in questo modo è un omomorfismo. Infatti, per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{E}^3$  sottospazi lineari unidimensionali, si ha che se  $\alpha \not\perp \beta$  (dove in  $B(\mathbb{E}^3)$  è definito  $\alpha \not\perp \beta := \alpha \perp \beta$ ), allora  $P_\alpha \not\perp P_\beta$ , ovvero  $[P_\alpha, P_\beta] \neq 0$ . È facile vedere che è anche iniettiva, infatti

$$\alpha \neq \beta \implies P_\alpha \neq P_\beta,$$

---

<sup>2</sup>Le operazioni booleane su  $B(\mathbb{E}^3)$  vanno pensate in analogia alle (1.7) su  $\mathcal{B}$ : siano  $a$  e  $b$  sottospazi di  $\mathbb{E}^3$ , allora  $a \vee b := a + b \setminus a \cap b$ ,  $a \wedge b := a \cap b$  e  $a' := a^\perp$ .

cioè, per ogni  $v \in \mathbb{E}^3$ ,  $P_\alpha v \neq P_\beta v$ . Il fatto che si consideri uno spazio euclideo, quindi reale, non è un limite, serve solo per raffigurare la situazione. Infatti, tutto il ragionamento è valido anche nel caso di spazio di Hilbert complesso.

Come mostrano sia KS in [9] e A. Peres in [11], è possibile assegnare un significato fisico ben preciso a tali proiettori in  $\mathcal{B}$ . Si consideri un sistema con momento angolare totale  $J$  costante del moto (ovvero, se  $H \in \mathcal{Q}$  è l'hamiltoniana del sistema,  $[H, J] = 0$ ) in uno stato con numero quantico principale  $n = 2$  e numero quantico associato a  $J$  pari a  $j = 1$ . In questo modo l'autovalore di  $J^2$  è  $2\hbar^2$  e il corrispondente autospazio,  $N$ , è 3-dimensionale. Sia  $m \in \mathbb{E}^3$  versore (cioè vettore di norma unitaria), l'operatore associato all'osservabile  $(m \cdot J)^2$  è un proiettore sul sottospazio di  $\mathbb{E}^3$  ortogonale al sottospazio generato da  $m$ ,  $\langle m \rangle$ . Infatti, sia senza perdita di generalità  $m = (0, 0, 1) = \hat{z}$ , allora

$$m \cdot J = J_z = 0 |0\rangle \langle 0| + 1 |1\rangle \langle 1| + (-1) |-1\rangle \langle -1|,$$

dove si è usata la decomposizione spettrale nel caso di spettro discreto ( $\sigma(J_z) = \{0, \pm 1\}$ ) e la notazione di Dirac per gli autostati  $|i\rangle$  di  $J_z$  relativi all'autovalore  $i$ ; quindi, per definizione di funzione di un'osservabile,

$$\begin{aligned} (m \cdot J)^2 &= J_z^2 = |1\rangle \langle 1| + |-1\rangle \langle -1| \\ (m \cdot J)^4 &= J_z^4 = |1\rangle \langle 1| + |-1\rangle \langle -1| = (m \cdot J)^2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

cioè  $(m \cdot J)^2$  è un proiettore.<sup>3</sup> Da ciò si nota che

$$(\mathbb{1} - (m \cdot J)^2)^2 = \mathbb{1} - 2(m \cdot J)^2 + (m \cdot J)^4 \stackrel{(1.8)}{=} \mathbb{1} - (m \cdot J)^2,$$

ovvero anche  $(\mathbb{1} - (m \cdot J)^2)$  è proiettore. Sia ora  $v \in \mathbb{E}^3$ , quindi in generale  $v = \alpha m + \beta n$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $m \perp n$ , allora

$$(m \cdot J)^2 (\mathbb{1} - (m \cdot J)^2) v = ((m \cdot J)^2 - (m \cdot J)^4) v \stackrel{(1.8)}{=} ((m \cdot J)^2 - (m \cdot J)^2) v = 0.$$

Perciò  $(\mathbb{1} - (m \cdot J)^2)$  è il proiettore sul sottospazio  $\langle m \rangle$  e  $(m \cdot J)^2$  è il proiettore sul sottospazio  $\langle m \rangle^\perp$ .

Avendo mostrato che gli elementi di  $B(\mathbb{E}^3)$  corrispondono a osservabili quantistiche, non resta che dimostrare che non esiste alcun omomorfismo tra una sottoalgebra parziale booleana  $D \subset B(\mathbb{E}^3)$  e  $Z_2$ .

Sia per assurdo  $h : D \rightarrow Z_2$  un tale omomorfismo e siano  $a_i \in D$  con  $1 \leq i \leq 3$  mutuamente ortogonali, ovvero  $a_i \wp a_j$ . Allora, con le operazioni booleane definite nel solito modo, per definizione di omomorfismo<sup>4</sup>

$$h(a_1) \vee h(a_2) \vee h(a_3) = h(a_1 \vee a_2 \vee a_3) = h(\mathbb{E}^3) = 1 \quad (1.9a)$$

<sup>3</sup>Nei passaggi precedenti, in realtà, si è posto  $\hbar = 1$ . Questo non disturba la trattazione, perché, volendo dare un concreto significato fisico ai proiettori in gioco, misurare il proiettore  $J_z^2/\hbar^2$  equivale a misurare  $J_z^2$  e dividere il risultato per  $\hbar^2$ .

<sup>4</sup>Ad essere precisi, nelle seguenti espressioni si sono usati gli stessi simboli  $\wedge$  e  $\vee$  per indicare operazioni booleane su algebre diverse.

$$h(a_i) \wedge h(a_j) = h(a_i \wedge a_j) = h(0) = 0 \quad \forall i \neq j. \quad (1.9b)$$

La (1.9b) implica che o tutte e tre i sottospazi vettoriali  $a_i$  sono mappati da  $h$  in 0, ma questo contraddirebbe la (1.9a), oppure due sottospazi sono mappati in 0 e uno, e uno solo, in 1.

Peres, in [11], ha semplificato la dimostrazione del teorema, proponendo un insieme  $D$  di 33 sottospazi vettoriali di  $\mathbb{E}^3$  al posto dei 117 proposti da KS in [9]. I 33 raggi vettori (il loro modulo non è infatti importante per l'argomento) che generano i sottospazi sono quelli per cui i quadrati dei coseni degli angoli che essi formano con gli assi  $x$ ,  $y$  e  $z$  sono in una delle combinazioni “0, 0, 1”, “0, 1/2, 1/2”, “0, 1/3, 2/3”, “1/4, 1/4, 1/2” oppure permutazioni di queste. Usando per brevità la notazione di Peres, con la quale  $\sqrt{2}$  diventa semplicemente 2 e  $-\sqrt{2}$  diventa  $\bar{1}$  ( $\bar{2}$ ), tali raggi vengono etichettati indicando un punto da cui passano. Per esempio, il raggio che, partendo dall'origine, passa per il punto  $(0, 1, -\sqrt{2})$  viene indicato con  $01\bar{2}$ .

Tabella 1.1. Terne di raggi vettori ortogonali.

<b>001</b>	100	010	<b>001</b>	110	$\bar{1}\bar{0}$	<b>001</b>	$\bar{1}20$	210	<b>001</b>	120	$\bar{2}10$
<b>011</b>	$0\bar{1}1$	100	<b>101</b>	$\bar{1}01$	010	<b>101</b>	$\bar{1}21$	$12\bar{1}$	<b>112</b>	$\bar{1}12$	110
<b>102</b>	$\bar{2}01$	010	<b>102</b>	$2\bar{1}1$	$21\bar{1}$	<b>211</b>	$0\bar{1}1$	$\bar{2}11$	<b>100</b>	021	$0\bar{1}2$
<b>201</b>	010	$\bar{1}02$	<b>012</b>	100	$0\bar{2}1$	<b>112</b>	$1\bar{1}0$	$\bar{1}\bar{1}2$	<b>121</b>	$\bar{1}01$	$1\bar{2}1$

La Tabella 1.1 elenca degli esempi di terne di raggi ortogonali costruite come descritto sopra. Non sono, ovviamente, tutte le possibile terne che si possono creare con i 33 raggi, ma mostra che ogni raggio appartiene a una terna, così da poter applicare il ragionamento delle (1.9). Per procedere nella dimostrazione, si supponga che al primo raggio di ogni terna (nella tabella evidenziato in grassetto) sia associato da  $h$  il valore 1 e, quindi, alle restanti due lo 0. Si nota allora che la terna  $100, 021, 0\bar{1}2$  è una terna di raggi ortogonali, ma ogni suo elemento è mandato da  $h$  in 0, contraddicendo l'ipotesi che  $h$  fosse un omomorfismo e dimostrando, quindi, il teorema.

Una possibile obiezione a quanto fatto finora può essere la seguente: perché restringersi ad associare a ogni osservabile  $A \in \mathcal{O}$  una sola osservabile nascosta  $f_A$ ? Si potrebbe, infatti, pensare che ogni osservabile quantistica sia riprodotta nella nuova teoria da più funzioni  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Utilizzando il formalismo delle algebre parziali, questa obiezione si traduce nel cercare un omomorfismo  $\psi$  tra l'algebra commutativa  $\mathbb{R}^\Omega$  e l'algebra parziale  $\mathcal{Q}$ , invece di un embedding  $\varphi : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}^\Omega$ . Le seguenti nozioni aiutano a mostrare come l'inesistenza di un tale embedding  $\varphi$  implichi anche l'inesistenza di  $\psi$ .

**Definizione 3.** Siano  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  due algebre parziali su un campo  $K$ . La relazione binaria  $R \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{V}$  è detta **relazione omomorfica** tra  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  se, per ogni  $x, y \in \mathcal{U}$  tali che  $x \wp y$  e per ogni  $\alpha, \beta \in \mathcal{V}$  tali che  $\alpha \wp \beta$ ,  $R(x, \alpha)$  e  $R(y, \beta)$  implicano

$$R(\lambda x + \mu y, \lambda \alpha + \mu \beta), \quad R(xy, \alpha \beta) \quad \forall \lambda, \mu \in K \quad e \\ R(1, 1).$$



Una relazione omomorfica si dice **non banale** se non vale  $R(1,0)$ .

**Teorema 2.** Sia  $\mathcal{U}$  un'algebra parziale e  $C$  un'algebra commutativa. Sia inoltre  $R$  una relazione omomorfica non banale tra  $\mathcal{U}$  e  $C$ . Allora esiste un'algebra commutativa  $C'$  e un omomorfismo  $h : \mathcal{U} \rightarrow C'$ .

*Dimostrazione.* Sia  $S$  l'insieme degli elementi  $\alpha \in C$  tali che  $R(x, \alpha)$  per un qualche  $x \in \mathcal{U}$  e sia  $\bar{S}$  la sottoalgebra generata da  $S$  in  $C$ , ovvero un generico  $\beta \in \bar{S}$  può essere scritto come

$$\beta = \sum_i \lambda_i \beta_{i1} \beta_{i2} \cdots \beta_{in_i} \quad (1.10)$$

con  $\lambda_i \in K$  e  $\beta_{ij} \in S$ . Definendo  $I$  come l'insieme delle  $\alpha \in C$  tali che  $R(0, \alpha)$ , si nota che esso è un ideale proprio di  $\bar{S}$ :

- per la definizione di relazione omomorfica  $I$  è chiuso per combinazioni lineari;
- se  $\alpha \in I$ , allora  $\alpha \beta_{ij} \in I$ ; più in generale, usando la (1.10),  $\alpha \beta \in I, \forall \beta \in I$ ;
- essendo  $R$  non banale,  $1 \notin I$ .

Sia ora  $C' := \bar{S}/I$  e  $\varphi : \bar{S} \rightarrow C'$  l'omomorfismo canonico che manda  $\beta$  nella sua classe di equivalenza, si può definire l'omomorfismo della tesi  $h : \mathcal{U} \rightarrow C'$  come  $h(x) = \varphi(\alpha)$ , dove  $\alpha \in S$  è tale che  $R(x, \alpha)$ .  $\square$

Infine, per raggiungere lo scopo, sarà utile anche il seguente risultato, costruito sulla falsa riga del Teorema 1.

**Teorema 3.** Sia  $\mathcal{U}$  algebra parziale booleana e  $\mathcal{A}$  algebra booleana. Se esiste un omomorfismo  $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{A}$ , allora  $\forall x \in \mathcal{U}$  esiste un omomorfismo  $h : \mathcal{U} \rightarrow Z_2$ .

*Dimostrazione.* Basta seguire la dimostrazione del Teorema 1. Sia  $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{A}$  omomorfismo. Per il Lemma 1, esiste  $\forall a \in \mathcal{A}$  diversa da 0 un omomorfismo  $k : \mathcal{A} \rightarrow Z_2$  (tale che  $k(a) = 1$ , ma non serve ai fini del risultato). Allora  $h = k \circ \varphi$  è un omomorfismo: dati  $x, y \in \mathcal{U}$  tali che  $x \wp y$  e  $\lambda, \mu \in Z_2$  ( $Z_2$  è il campo comune su cui sono costruite le algebre in gioco), si ha

- $k(\varphi(x)) \wp k(\varphi(y))$ , perché  $k$  e  $\varphi$  sono omomorfismi;
- $k(\varphi(\lambda x + \mu y)) = k(\lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y)) = k(\varphi(x)) + k(\varphi(y))$  perché tutte le algebre hanno lo stesso campo  $Z_2$ ;
- $k(\varphi(xy)) = k(\varphi(x))k(\varphi(y))$ ;
- $h(1) = k(\varphi(1)) = k(1) = 1$ .

$\square$

Per concludere, ora, basta legare i vari pezzi. Si è mostrato, all'inizio del Paragrafo, che non esiste alcun omomorfismo tra  $\mathcal{B}$  e  $Z_2$ . Il Teorema 3 allora implica che non esiste nessun omomorfismo tra  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ , l'algebra booleana degli idempotenti di  $C$ . Da ciò segue che non esiste un omomorfismo  $\varphi : \mathcal{Q} \rightarrow C$ , dove, si ricorda,  $\mathcal{B}$  è la sottoalgebra parziale booleana degli idempotenti di  $\mathcal{Q}$  (notare che all'inizio del paragrafo si era mostrata solo l'inesistenza di un *embedding* tra i due). Si può quindi usare il Teorema 2, per cui non esiste una relazione omomorfica non banale tra  $\mathcal{Q}$  e  $C$ . Ma allora non può nemmeno esistere l'omomorfismo  $\psi : C \rightarrow \mathcal{Q}$ , perché se esistesse, esisterebbe anche la relazione omomorfica non banale  $R$ , definita come il grafico di  $\psi$ :  $R(x, \alpha)$  se  $\psi(x) = \alpha$ .

## Capitolo 2

# Confronti e applicazioni

Per comprendere appieno quale sia l'obiettivo di una teoria a variabili nascoste e quando, secondo KS, si può dire che tale teoria abbia avuto successo, nel Paragrafo 2.1 è descritto un modello classico in due dimensioni funzionante (nel senso di KS) dello spin di un elettrone che, in realtà, vale per tutte le osservabili.

Il Paragrafo 2.2, invece, enuncia il primo teorema in materia di teorie a variabili nascoste, quello di von Neumann. Per molti anni si ritenne che questo risultato avesse definitivamente eliminato la possibilità di recuperare una descrizione realistica e deterministica della natura anche a livello quantistico. Solo più tardi si comprese che non era così: come dimostra lo stesso Paragrafo 2.1, le ipotesi di von Neumann sono troppo strette.

Un esempio di applicazione del Teorema KS è discusso nel Paragrafo 2.3. Descrivendo un sistema di due particelle con spin  $1/2$  in uno spazio di Hilbert a quattro dimensioni, questo esempio ha il pregio di fornire un argomento più diretto e semplice dei ragionamenti fatti da KS. Inoltre, sarà utile nella discussione del Paragrafo 3.4.

L'ultimo paragrafo, infine, sfrutta un esempio in otto dimensioni per rapportare il Teorema KS con l'importante risultato ottenuto da Bell, che impone di abbandonare la località.

### 2.1 Modello classico di spin $1/2$

Per costruire una teoria a variabili nascoste che non contraddica il teorema, KS in [9] si sono ristretti ad uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_2$  di dimensione 2, caso escluso dalle ipotesi del teorema. Il problema, come descritto nel Paragrafo 1.1 a pag. 1, è di trovare uno spazio delle fasi  $\Omega$  di stati nascosti, una funzione  $f_A$  per ogni osservabile  $A \in \mathcal{O}_2$  e una misura di probabilità  $\mu_\psi$  per ogni  $\psi \in \mathcal{H}_2$ , tali che valgano (1.2) e (1.6). Si vedrà che è sufficiente restringersi a considerare, tra tutti gli operatori di  $\mathcal{O}_2$ , solo quelli di spin.

Infatti, la relazione (1.6), ovvero  $f_{g(A)} = g(f_A)$ , deve essere verificata per ogni  $A$  e  $g$  funzione di Borel. Ma, in due dimensioni, è sufficiente restringersi a funzioni lineari  $g(A) = \alpha A + \beta \mathbb{1}$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ : sia  $v \in \mathcal{H}_2$  generico vettore, non autovettore di  $A$ , allora l'immagine di  $v$  tramite  $g(A)$  può essere espressa nella base  $\{v, Av\}$  (infatti i sottospazi

da essi generati  $\langle v \rangle \neq \langle Av \rangle$ , perché  $v$  non è autovettore di  $A$ ), cioè  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tali che

$$g(A)v = \alpha Av + \beta v = (\alpha A + \beta \mathbb{1})v;$$

sia, invece,  $v$  autovettore di  $A$ , allora è anche autovettore di  $g(A)$ , quindi

$$g(A)v = \alpha Av,$$

l'azione di  $g(A)$  è comunque lineare in  $A$ .

Inoltre, data  $A \in \mathcal{O}_2$  matrice hermitiana con autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , la matrice

$$\sigma(A) := \left( \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) A - \left( \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \mathbb{1} \quad (2.1)$$

è una matrice di spin con autovettori relativi a  $+1$  e  $-1$  uguali ai corrispondenti autovettori di  $A$  rispetto a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Quindi  $A$  è funzione lineare della matrice di spin  $\sigma(A)$ .

Nel costruire questo modello classico di spin si è quindi in realtà costruito un modello valido per qualsiasi osservabile di  $\mathcal{O}_2$ .

L'insieme  $V \subset \mathcal{O}_2$  degli operatori di traccia nulla forma uno spazio vettoriale 3-dimensionale su  $\mathbb{R}$ . Una base ortonormale di  $V$  è data dalle matrici di spin di Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

come si può notare utilizzando il prodotto scalare definito da

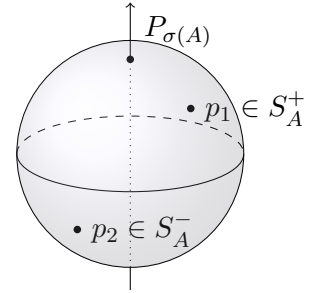
$$A \cdot B := \frac{1}{2} \text{Tr}(AB), \quad \forall A, B \in V.$$

Scelta una base ortonormale  $\{i, j, k\}$  per lo spazio euclideo  $\mathbb{E}^3$ , è possibile definire un isomorfismo  $P : V \rightarrow \mathbb{E}^3$  che ad ogni matrice di spin  $\sigma$  (ovvero con autovalori  $\pm 1$ ) di  $V$  associa un punto  $P_\sigma$  sulla sfera di raggio unitario  $S^2$ . Comunemente  $\sigma$  viene chiamata “momento di spin nella direzione  $OP_\sigma$ ”, con  $O$  origine di  $\mathbb{E}^3$ . Ad ogni vettore  $\psi \in \mathcal{H}_2$  si può associare la matrice di spin  $\sigma_\psi$  che ha  $\psi$  come autovettore relativo a  $+1$ . Per transitività ad ogni  $\psi$  è associato un punto  $P_\psi = P_{\sigma_\psi}$  di  $S^2$ .

Lo spazio delle fasi proposto da KS è quindi  $\Omega = S^2$  e l'osservabile nascosta  $f_A$ , per ogni  $A \in \mathcal{O}_2$  di autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , è definita da

$$f_A(p) = \begin{cases} \lambda_1 & \text{per } p \in S_A^+ \\ \lambda_2 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad (2.2)$$

dove  $S_A^+$  è la semisfera superiore di  $S^2$  con polo in  $P_{\sigma(A)}$ . Considerando funzioni  $g(A) = \alpha A + \beta \mathbb{1}$ , come detto prima, e osservando



che

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha A + \beta \mathbb{1}) &= \left( \frac{2}{\alpha\lambda_1 - \alpha\lambda_2} \right) (\alpha A + \beta \mathbb{1}) - \left( \frac{\alpha\lambda_1 + \alpha\lambda_2 + 2\beta}{\alpha\lambda_1 - \alpha\lambda_2} \right) \mathbb{1} = \\ &= \left( \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) A - \left( \frac{\alpha\lambda_1 + \alpha\lambda_2 + 2\beta}{\alpha\lambda_1 - \alpha\lambda_2} - \frac{2\beta}{\alpha\lambda_1 - \alpha\lambda_2} \right) \mathbb{1} = \\ &= \left( \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) A - \left( \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \mathbb{1} = \sigma(A),\end{aligned}$$

si osserva che la condizione (1.6) è soddisfatta

$$f_{\alpha A + \beta \mathbb{1}}(p) = \begin{cases} \alpha\lambda_1 + \beta & \text{per } p \in S_A^+ \\ \alpha\lambda_2 + \beta & \text{altrimenti} \end{cases} \implies f_{\alpha A + \beta \mathbb{1}}(p) = \alpha f_A(p) + \beta.$$

Per trovare una misura di probabilità  $\mu_\psi$  che soddisfi la (1.2), KS procedono come descritto in Appendice A, cercando una densità di probabilità continua  $u_\psi(p)$  su  $S^2$  con alcune semplici proprietà di invarianza rotazionale che, per ogni  $E \subset S^2$  misurabile, definisce

$$\mu_\psi(E) = \int_E u_\psi(p) dp.$$

Il risultato ottenuto è

$$u_\psi(\vartheta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cos \vartheta & \text{se } 0 \leq \vartheta \leq \pi/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad (2.3)$$

dove  $\vartheta$  è l'angolo tra  $P_\psi$ , che è stato possibile sceglierlo pari a  $(0, 0, 1)$ , e  $P_{\sigma(A)}$ .

Il modello classico da un punto di vista figurativo è il seguente. Si costruisce una sfera unitaria centrata nell'origine. Un punto  $P$  su di essa rappresenta lo spin nella direzione  $OP$ . Se l'elettrone è nell'autostato  $+\hbar/2$  di tale spin, allora esiste un punto  $T \in S_P^+$ , lo stato nascosto del sistema, determinato dalla seguente costruzione. Si pensi di appoggiare un disco  $D$  di raggio unitario sulla sfera, nel punto  $P$ , e di posizionarvi sopra una particella. Il disco viene poi fatto vibrare in maniera casuale di modo che la probabilità relativa alla posizione della particella sia uniformemente distribuita sul disco.  $T$  è la proiezione ortogonale della particella sulla sfera. Si dimostra che la densità di probabilità della proiezione è proprio (2.3).

Si supponga ora che si voglia misurare lo spin in un'altra direzione  $OQ$ : se  $T \in S_Q^+$  allora lo spin è  $+\hbar/2$ , altrimenti è  $-\hbar/2$ . Dopo la misura lo stato quantico del sistema è cambiato, allora anche lo stato nascosto sarà diverso e lo si potrà determinare esattamente come prima.

Le predizioni che fa questo modello sono, ovviamente, le stesse della MQ. Ci si può chiedere allora da dove nascono, nel modello, le probabilità che si incontrano nella teoria quantistica. Esse nascono dal fatto che l'osservatore non conosce il sistema nascosto formato da disco, particella e proiezione se non tramite la densità di probabilità  $u_\psi$ . Se gli fosse concesso di osservare la particella sul disco, egli avrebbe a disposizione una teoria perfettamente deterministica, ma questo contraddirebbe la MQ.

Questo modello permette di osservare come, nonostante le due ipotesi del teorema (1.2) e (1.6) siano sufficienti per giustificare le probabilità che si osservano sperimentalmente, esse non fanno alcun riferimento all'evoluzione temporale del sistema.

## 2.2 Confronto col teorema di von Neumann

J. von Neumann in [15], Capitolo IV, dimostra un suo teorema che avrebbe dovuto vietare le teorie a variabili nascoste. La condizione formulata da von Neumann per l'esistenza di variabili nascoste è più rigida di quella di KS: deve esistere una funzione  $\mathcal{E} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

- (a)  $\mathcal{E}(\mathbb{1}) = 1$ ,
- (b)  $\mathcal{E}(aA) = a\mathcal{E}(A) \quad \forall a \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{O}$ ,
- (c)  $\mathcal{E}(A^2) = \mathcal{E}(A)^2 \quad \forall A \in \mathcal{O}$ ,
- (d)  $\mathcal{E}(A + B) = \mathcal{E}(A) + \mathcal{E}(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{O}$ ,
- (e) se  $A$  è non negativa, per esempio è il quadrato di un'altra  $B \in \mathcal{O}$ , allora  $\mathcal{E}(A) \geq 0$ .

Seguendo la dimostrazione di KS in [9], si nota che per una funzione  $\mathcal{E}$  soddisfacente le ipotesi (a), (b) e (c), e tale che

$$\mathcal{E}(A + B) = \mathcal{E}(A) + \mathcal{E}(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{O} \text{ tale che } [A, B] = 0, \quad (2.4)$$

si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(A)^2 + 2\mathcal{E}(A)\mathcal{E}(B) + \mathcal{E}(B)^2 &= (\mathcal{E}(A) + \mathcal{E}(B))^2 = \mathcal{E}(A + B)^2 = \\ &= \mathcal{E}((A + B)^2) = \mathcal{E}(A^2 + 2AB + B^2) = \\ &= \mathcal{E}(A)^2 + 2\mathcal{E}(AB) + \mathcal{E}(B)^2, \end{aligned}$$

ovvero  $\mathcal{E}(A)\mathcal{E}(B) = \mathcal{E}(AB)$ . Da ciò segue che una tale funzione assume valori nello spettro di  $A$ , ovvero  $\mathcal{E}(A) \in \sigma(A)$ , infatti, supponendo per assurdo che  $A - \mathcal{E}(A)\mathbb{1}$  abbia un inverso  $B$ ,

$$\begin{aligned} 1 &= \mathcal{E}(\mathbb{1}) = \mathcal{E}((A - \mathcal{E}(A)\mathbb{1})B) = \mathcal{E}(A - \mathcal{E}(A)\mathbb{1})\mathcal{E}(B) = \\ &= (\mathcal{E}(A) - \mathcal{E}(A)\mathcal{E}(\mathbb{1}))\mathcal{E}(B) = 0. \end{aligned}$$

**Teorema di von Neumann.** *Non esiste alcuna funzione  $\mathcal{E} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfi le condizioni (a)-(d) (la condizione (e) non viene usata nella dimostrazione).*

*Dimostrazione.* La tesi è verificata già restringendo il dominio di  $\mathcal{E}$  a  $O_2$ . Infatti, si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A$  e  $B$  non commutano e sono matrici di proiezione, quindi hanno autovalori 0 e 1. Perciò, per quanto visto, ci si aspetta che  $\mathcal{E}(A + B)$  assuma i valori 0, 1 o 2. Invece la matrice  $A + B$  ha autovalori  $1 \pm \sqrt{2}/2$ . L'ipotesi (d) non è soddisfatta.  $\square$

La differenza principale tra il teorema di KS e quello di von Neumann è che quest'ultimo ha richiesto la (d) al posto della (2.4), come invece hanno fatto KS. Si nota immediatamente come il risultato di von Neumann sia in contrasto con quanto descritto nel Paragrafo 2.1, dove è appunto costruito un modello classico che riproduce le osservabili quantistiche di  $\mathcal{O}_2$ .

## 2.3 Esempio in quattro dimensioni

N. D. Mermin, nell'articolo [10], per mostrare un esempio esplicito in cui è verificata la tesi di KS, considera uno spazio di quattro dimensioni  $\mathcal{H}_4 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  per descrivere un sistema di due particelle di spin 1/2 e le seguenti osservabili di  $\mathcal{O}_4$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} \otimes \sigma_x & \sigma_x \otimes \mathbb{1} & \sigma_x \otimes \sigma_x \\ \mathbb{1} \otimes \sigma_y & \sigma_y \otimes \mathbb{1} & \sigma_y \otimes \sigma_y \\ \sigma_x \otimes \sigma_y & \sigma_y \otimes \sigma_x & \sigma_z \otimes \sigma_z \end{array} .$$

Si possono verificare direttamente le seguenti sei identità tra operatori commutanti dei nove scelti

$$\begin{aligned} (\sigma_x \otimes \sigma_x)(\sigma_x \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes \sigma_x) &= \mathbb{1} \\ (\sigma_y \otimes \sigma_y)(\sigma_y \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes \sigma_y) &= \mathbb{1} \\ (\sigma_x \otimes \sigma_y)(\sigma_x \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes \sigma_y) &= \mathbb{1} \\ (\sigma_y \otimes \sigma_x)(\sigma_y \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes \sigma_x) &= \mathbb{1} \\ (\sigma_x \otimes \sigma_y)(\sigma_y \otimes \sigma_x)(\sigma_z \otimes \sigma_z) &= \mathbb{1} \\ (\sigma_x \otimes \sigma_x)(\sigma_y \otimes \sigma_y)(\sigma_z \otimes \sigma_z) &= -\mathbb{1}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

per esempio

$$(\sigma_x \otimes \sigma_y)(\sigma_y \otimes \sigma_x) = \sigma_x \sigma_y \otimes \sigma_y \sigma_x = i\sigma_z \otimes (-i)\sigma_z = \sigma_z \otimes \sigma_z,$$

da cui si ottiene  $[\sigma_x \otimes \sigma_y, \sigma_y \otimes \sigma_x] = 0$ .

L'ipotesi (1.6) del teorema richiede che se vi è una relazione funzionale  $u(A, B, C, \dots)$  tra degli operatori  $A, B, C, \dots$  commutanti a coppie, allora, detti  $v(A), v(B), v(C), \dots$  i valori assegnati dalla funzione di predizione  $v$ , tale relazione deve valere anche per essi. Le (2.5) allora implicano

$$\begin{aligned} v(\sigma_x \otimes \sigma_x) v(\sigma_x \otimes \mathbb{1}) v(\mathbb{1} \otimes \sigma_x) &= 1 \\ v(\sigma_y \otimes \sigma_y) v(\sigma_y \otimes \mathbb{1}) v(\mathbb{1} \otimes \sigma_y) &= 1 \\ v(\sigma_x \otimes \sigma_y) v(\sigma_x \otimes \mathbb{1}) v(\mathbb{1} \otimes \sigma_y) &= 1 \\ v(\sigma_y \otimes \sigma_x) v(\sigma_y \otimes \mathbb{1}) v(\mathbb{1} \otimes \sigma_x) &= 1 \\ v(\sigma_x \otimes \sigma_y) v(\sigma_y \otimes \sigma_x) v(\sigma_z \otimes \sigma_z) &= 1 \\ v(\sigma_x \otimes \sigma_x) v(\sigma_y \otimes \sigma_y) v(\sigma_z \otimes \sigma_z) &= -1. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Gli autovalori di tali operatori sono  $\pm 1$  (in unità di  $\hbar/2$ ), quindi i valori predetti  $v(\cdot)$  dalla funzione di predizione devono essere  $\pm 1$ . Si nota però che, moltiplicando tutti i primi

membri di (2.6) tra di loro, si ottiene +1 perché tutti gli operatori sono presenti due volte; invece moltiplicando tutti i secondi membri si ottiene  $-1$ . La relazione algebrica tra gli operatori non è rispettata da alcuna teoria a variabili nascoste che soddisfi (1.6), come asserito dal teorema.

## 2.4 Confronto col teorema di Bell

In maniera del tutto analoga a quanto fatto nel precedente paragrafo, Mermin in [10] costruisce un esempio che pone a confronto il teorema di KS e quello di Bell. Quest'ultimo afferma che non esiste nessuna teoria a variabili nascoste che sia realistica e locale, riproducendo contemporaneamente tutte le predizioni della MQ. Più precisamente, l'enunciato originale di Bell in [1] è il seguente.

**Teorema di Bell.** *Si considerino due particelle di spin  $1/2$  nello stato quantistico di singoletto (come nel paradosso EPR). Siano  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}'$  due versori di  $\mathbb{R}^3$ , e si indichi con  $\mathbf{s}$  lo spin. Le variabili nascoste, che forniscono una descrizione completa dello stato, sono connotate con  $\lambda$ , e ad esse è associata una distribuzione di probabilità  $\rho(\lambda)$ . Allora il valore di aspettazione dell'osservabile  $(\mathbf{s} \cdot \mathbf{u})_1 \otimes (\mathbf{s} \cdot \mathbf{u}')_2$  nella teoria a variabili nascoste è*

$$\int \rho(\lambda)(\mathbf{s} \cdot \mathbf{u})_1(\lambda)(\mathbf{s} \cdot \mathbf{u}')_2(\lambda) d\lambda,$$

e il valore di aspettazione quantistico è dato da

$$\langle (\mathbf{s} \cdot \mathbf{u})_1 \otimes (\mathbf{s} \cdot \mathbf{u}')_2 \rangle = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'.$$

Se si assume il principio di località, ovvero che le misure effettuate sulla particella 1 non siano probabilisticamente correlate a quelle effettuate sulla 2 perché separate da una distanza di tipo spazio, allora non esiste alcuna  $\rho(\lambda)$  tale che i due valori d'aspettazione siano uguali.

In uno spazio di otto dimensioni  $\mathcal{H}_8 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  che descrive un sistema di tre particelle di spin  $1/2$ , si considerano le seguenti dieci osservabili

$$\begin{array}{cccccc} \sigma_x \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} & \mathbb{1} \otimes \sigma_x \otimes \mathbb{1} & \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \sigma_x & \sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y & \sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y & \\ \sigma_y \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} & \mathbb{1} \otimes \sigma_y \otimes \mathbb{1} & \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \sigma_y & \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x & \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x & \end{array}.$$

Anche in questo caso si costruiscono cinque identità tra operatori commutanti dei dieci scelti che portano a

$$\begin{aligned} v(\sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y) v(\sigma_x \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) v(\mathbb{1} \otimes \sigma_y \otimes \mathbb{1}) v(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \sigma_y) &= 1 \\ v(\sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y) v(\sigma_y \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) v(\mathbb{1} \otimes \sigma_x \otimes \mathbb{1}) v(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \sigma_y) &= 1 \\ v(\sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x) v(\sigma_y \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) v(\mathbb{1} \otimes \sigma_y \otimes \mathbb{1}) v(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \sigma_x) &= 1 \\ v(\sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x) v(\sigma_x \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) v(\mathbb{1} \otimes \sigma_x \otimes \mathbb{1}) v(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \sigma_x) &= 1 \\ v(\sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x) v(\sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y) v(\sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y) v(\sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x) &= -1, \end{aligned}$$



da cui si ottiene la stessa incongruenza: il prodotto dei membri di sinistra dà 1 perché ogni operatore compare due volte, il prodotto dei membri di destra dà  $-1$ .

Volendo ora applicare il teorema di Bell, si supponga che le tre particelle siano prodotte in uno stato particolare  $\Phi$ , che sia autostato comune di  $\sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y$ ,  $\sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y$  e  $\sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x$  (infatti questi operatori commutano) relativo all'autovalore 1. Allora  $\Phi$  è anche autostato di

$$\sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x = -(\sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y)(\sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y)(\sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x)$$

con autovalore  $-1$ . Per conoscere la componente  $x$  dello spin di ogni particella, si può misurare la componente  $y$  delle altre due, distanti dalla prima per una distanza di tipo spazio, perché nello stato  $\Phi$  il prodotto delle misure deve dare 1; oppure, per conoscere la componente  $y$ , si misura la componente  $x$  di una e la  $y$  dell'altra. Assumendo, come fa Bell in [1], che la teoria a variabili nascoste soddisfi il principio di località (einsteiniano), segue che il risultato delle misure di ogni componente è specificato prima di qualsiasi misura, fino a che le regioni delle misure sono a distanza di tipo spazio. Siano  $m_x^i$  e  $m_y^i$  i valori nascosti dell' $i$ -esima particella ( $i = 1,2,3$ ), allora, visto che  $\Phi$  è autostato delle osservabili riportate sopra, devono valere le seguenti

$$\begin{cases} m_x^1 m_y^2 m_y^3 = 1 \\ m_y^1 m_x^2 m_y^3 = 1 \\ m_y^1 m_y^2 m_x^3 = 1 \\ m_x^1 m_x^2 m_x^3 = -1. \end{cases}$$

Ma, anche in questo caso come nei precedenti, il sistema non ha soluzione, perché il prodotto dei membri di sinistra dà 1, mentre a destra si ha  $-1$ .

Si osservano le seguenti differenze tra i due teoremi citati:

- il teorema di Bell, a differenza di quello di KS, pone il sistema in uno stato particolare, dettaglio però poco importante;
- il teorema KS arriva a contraddizione tentando di assegnare valori a un insieme arbitrario di osservabili, Bell assegna dei valori solo alle grandezze che li richiedono per il principio di località (combinato col principio di realtà);
- il teorema di Bell nella sua forma originale [1] (non come lo si è utilizzato sopra) trova l'inconsistenza nella distribuzione statistica dei risultati di misura.



## Capitolo 3

# Meccanica bohmiiana e contestualità

Quanto visto nei capitoli precedenti sotto quali ipotesi vale? È ben noto, infatti, come Bohm abbia formulato una teoria a variabili nascoste consistente con la MQ. In questo capitolo, è dapprima ricavata l'equazione di Hamilton-Jacobi, che verrà poi generalizzata a livello quantistico da Bohm, per mezzo del formalismo hamiltoniano. Quindi viene prima descritta la teoria di Bohm, per poi confrontarla con il Teorema KS, in modo da trovarne i limiti e sondarne l'efficacia. Nel Paragrafo 3.4, infatti, viene ripercorso l'esempio di Mermin del precedente capitolo, rianalizzandolo tramite la meccanica bohmiiana. Questo permette di capire gli elementi che consentono alla teoria di Bohm di eludere il Teorema KS, ovvero il fatto che le variabili nascoste (le posizioni) non sono vincolate ad assegnare alle osservabili di Bohm gli autovalori delle osservabili quantistiche, e la contestualità. Nel Paragrafo 3.5 sono analizzate nel dettaglio le ipotesi su cui poggia l'argomento di KS, e sono quindi elencate le possibili vie d'uscita dalla tesi del teorema.

### 3.1 Premessa

Hamilton, nel tentativo di riscrivere la meccanica in analogia con l'ottica, ha tradotto il principio di Huygens sui raggi di luce nel principio di minima azione per le traiettorie delle particelle. Se  $L(q, \dot{q}, t)$  è la lagrangiana del sistema, ovvero una funzione  $L : U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dove  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto, e  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow U$  è una curva, si definisce il funzionale *azione* come

$$S[\gamma] := \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt, \quad (3.1)$$

dove la curva  $\gamma$  appartiene ad un opportuno spazio di curve. È possibile introdurre una nozione di derivabilità per i funzionali e, quindi, definire la stazionarietà. Il principio di minima azione afferma (sotto alcune ipotesi, in particolare  $L$  deve essere differenziabile) che una curva  $\gamma$  rende stazionario  $S$ , e si scrive

$$\delta S[\gamma] = 0,$$

se, e solo se, è soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange. Il legame tra la lagrangiana e l'hamiltoniana è dato dalla trasformata di Legendre, e si dimostra che vale la

$$L(q, \dot{q}) = p \cdot \dot{q} - H(q, p). \quad (3.2)$$

A partire da (3.1), fissando un punto  $(q_0, t_0) \in U \times \mathbb{R}$ , si può definire la funzione di Hamilton-Jacobi

$$S_{(q_0, t_0)}(q, t) = \int_{t_0}^t L(\gamma(t'), \dot{\gamma}(t'), t') dt', \quad (3.3)$$

dove  $\gamma$  è l'unica curva tra  $(q_0, t_0)$  e  $(q, t)$  che stazionarizza il funzionale  $S$ . Questa funzione è ben definita in un intorno sufficientemente piccolo di  $(q_0, t_0)$ . Differenziandola si ottiene

$$dS(q, t) = \frac{\partial S}{\partial q} dq + \frac{\partial S}{\partial t} dt,$$

ma, usando la (3.3) e poi la (3.2),

$$dS(q, t) = L(q(t), \dot{q}(t), t) dt = p(t) dq - H(q(t), p(t)) dt.$$

Quindi, confrontando quanto trovato, si ha

$$p(q, t) = \frac{\partial S}{\partial q}(q, t)$$

e l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q, t) + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0. \quad (3.4)$$

Questa equazione viene generalizzata al caso quantistico nella teoria di Bohm.

## 3.2 Teoria di Bohm

La novità della teoria di Bohm rispetto all'interpretazione classica della MQ è costituita dal considerare la posizione delle particelle come variabile nascosta, e la funzione d'onda come istituente un campo vettoriale che agisce sulle particelle stesse.

Seguendo la linea tracciata da Bohm in [2, 3], si riesce a dare una nuova interpretazione fisica all'equazione di Schrödinger per una particella (facilmente estendibile al caso di più particelle) sottoposta al potenziale classico  $V$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\mathbf{q})\psi, \quad (3.5)$$

dove  $\psi(\mathbf{q}, t)$  è in generale una funzione complessa del tempo definita sullo spazio delle configurazioni

$$\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},$$

e può quindi essere scritta nella forma

$$\psi(\mathbf{q}, t) = R(\mathbf{q}, t) e^{iS(\mathbf{q}, t)/\hbar}, \quad (3.6)$$

dove  $R$  ed  $S$  sono funzioni reali e si può fare in modo che  $R$  sia positiva. Sostituendo la (3.6) in (3.5) si ottiene dalla parte reale

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(\mathbf{q}) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \quad (3.7)$$

e dalla parte immaginaria

$$-\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{1}{2m} (R\nabla^2 S + 2\nabla R \cdot \nabla S). \quad (3.8)$$

Scrivendo  $\rho(\mathbf{q}) = |\psi(\mathbf{q})|^2 = R^2(\mathbf{q})$ , la (3.7) dà

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(\mathbf{q}) - \frac{\hbar^2}{4m} \left( \frac{\nabla^2 \rho}{\rho} - \frac{(\nabla \rho)^2}{2\rho^2} \right) = 0, \quad (3.9)$$

invece la (3.8)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \rho \frac{\nabla S}{m} \right) = 0. \quad (3.10)$$

Analizzando la (3.10), si nota come, definendo il campo vettoriale

$$\mathbf{v}^\psi(\mathbf{q}, t) := \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left( \frac{\nabla \psi}{\psi} \right) = \frac{\nabla S}{m}, \quad (3.11)$$

essa diventi un'equazione di continuità con  $\rho$  densità di probabilità e  $\mathbf{v}^\psi \rho$  densità di corrente di probabilità. Quindi (3.10) esprime la conservazione della probabilità. Il campo  $\mathbf{v}^\psi$ , definito tramite la funzione d'onda  $\psi$  (in seguito potrà essere omissa l'apice  $\psi$ ), assume il ruolo dell'osservabile velocità nella teoria di Bohm, e le sue curve integrali  $\mathbf{q}(t)$ , tali che

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{v}^\psi(\mathbf{q}(t), t), \quad (3.12)$$

sono le possibili traiettorie della particella. Si nota come, in questo modo, è possibile introdurre uno spazio delle fasi, ma, a differenza del caso classico, posizione e momento non sono indipendenti in quanto quest'ultimo è funzione della posizione. Ciò è possibile perché le osservabili bohmiane sono essenzialmente diverse da quelle quantistiche.

Guardando invece la (3.9), si può osservare una forte analogia con l'equazione di Hamilton-Jacobi (3.4): ponendo  $\hbar = 0$  si ottiene l'equazione classica con hamiltoniana  $H = (\nabla S)^2/2m + V$ , con  $\nabla S$  corrispondente all'impulso. Bohm, quindi, interpreta il termine aggiuntivo come un *potenziale quantistico*

$$U(\mathbf{q}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = -\frac{\hbar^2}{4m} \left( \frac{\nabla^2 \rho}{\rho} - \frac{(\nabla \rho)^2}{2\rho^2} \right)$$

che agisce sulla particella insieme al potenziale classico  $V$  e che dipende dalla funzione d'onda  $\psi$  valutata nel punto in cui si trova la particella. In questo modo la funzione d'onda viene effettivamente interpretata come un campo che agisce sulla particella tramite una forza. Se il potenziale quantistico è nullo, allora le traiettorie bohiane coincidono con quelle classiche. Per esempio, nel caso limite in cui  $\psi$  è un'onda piana  $\psi = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})$  (però non appartiene ad  $\mathcal{H}$ ), allora  $S = \hbar\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}$ , da cui  $\mathbf{v}^\psi = \hbar\mathbf{k}/m$ , che coincide con l'ipotesi di de Broglie  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ .

Le equazioni (3.9) e (3.10), unite alle condizioni iniziali  $S(\mathbf{q},0) = S_0(\mathbf{q})$  e  $\rho(\mathbf{q},0) = \rho_0(\mathbf{q})$ , descrivono un insieme di particelle preparate allo stesso modo (appunto, stessa  $S_0(\mathbf{q})$  e  $\rho_0(\mathbf{q})$ ). Le traiettorie delle particelle vengono ricavate integrando la (3.11), ma per far questo non è sufficiente la conoscenza di  $S_0(\mathbf{q})$  e  $\rho_0(\mathbf{q})$  (ovvero la conoscenza della funzione d'onda), serve anche la posizione iniziale. Quindi un sistema non è completamente descritto dalla funzione d'onda, è necessaria una posizione iniziale e un'equazione, la (3.12), che descrive l'evoluzione temporale della posizione. Si nota come, nella teoria di Bohm, è la posizione ad assumere il ruolo di variabile nascosta.

Il motivo per cui in questa teoria rientra la densità  $\rho$  è che si considerano *ensemble statistici* di particelle cui è associata una densità uguale a quella ottenuta nell'usuale interpretazione. La differenza sta nel fatto che, nell'interpretazione usuale, la struttura stessa della materia è descritta da una probabilità intrinseca alla natura, invece nella teoria di Bohm è necessaria la probabilità perché non si riesce a conoscere le condizioni iniziali della particella, neppure in linea di principio. Si assume, infatti, che l'apparato di misura introduca dei disturbi imprevedibili ed incontrollabili sul sistema. La cosa curiosa è che il moto del singolo sistema, ovvero della singola particella nell'ensemble statistico, dipende dall'ensemble stesso di cui fa parte. Infatti il potenziale  $U$  dipende dalla densità  $\rho$ . Questo però non deve stupire, perché la funzione d'onda viene interpretata sia come campo di forze che come densità di probabilità.

La teoria della misura di un'osservabile, nell'ottica di Bohm, regge sull'ipotesi dell'equilibrio quantistico: si assume che la distribuzione delle posizioni iniziali  $P[\mathbf{q}_0]$  di un insieme di particelle, preparate all'istante iniziale in uno stesso stato  $\psi_0$ , sia

$$P[\mathbf{q}_0] = |\psi_0(\mathbf{q})|^2 = \rho_0(\mathbf{q}).$$

Quindi, la distribuzione  $P[\mathbf{q}(t)]$  di un insieme di particelle che seguono il campo  $\mathbf{v}^\psi$  soddisfa la proprietà

$$P[\mathbf{q}(t)] = |\psi(\mathbf{q}, t)|^2 = \rho(\mathbf{q}, t),$$

che non è altro che la regola di Born.

Volendo ora descrivere, tramite questa teoria, la dinamica di una particella con spin (per fissare le idee, un elettrone di spin 1/2), la descrizione dello stato del sistema è affidata ad una funzione d'onda con due gradi di libertà (complessi) chiamata *spinore*

$$\psi(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{q}) \\ \psi_2(\mathbf{q}) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2,$$

che nella teoria di Pauli può essere scritto nella forma

$$\psi = R \left[ \cos(\vartheta/2) e^{i(\varphi+\chi)/2} u_+ + i \sin(\vartheta/2) e^{-i(\varphi-\chi)/2} u_- \right] = \quad (3.13)$$

$$= R \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) e^{i(\varphi+\chi)/2} \\ i \sin(\vartheta/2) e^{-i(\varphi-\chi)/2} \end{pmatrix} = R e^{iS/\hbar} \phi, \quad (3.14)$$

con

$$\phi = e^{-i\pi/4} \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) e^{i\varphi/2} \\ i \sin(\vartheta/2) e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix},$$

dove gli angoli  $\vartheta$ ,  $\varphi$  e  $\chi$  sono i tre angoli di Eulero e  $\sigma_z u_{\pm} = \pm u_{\pm}$ . La teoria ne viene quindi modificata: il nuovo elemento della descrizione, lo spinore, descrive un nuovo campo di assi  $\mathbf{e}'_i(\mathbf{q}, t)$ , il cui orientamento rispetto al riferimento fisso di assi cartesiani  $\mathbf{e}_i$ , al variare di  $\mathbf{q}$  e  $t$ , è descritto dagli angoli di Eulero  $\vartheta(\mathbf{q}, t)$ ,  $\varphi(\mathbf{q}, t)$  e  $\chi(\mathbf{q}, t)$ . Si può, quindi, pensare di associare alla particella un sistema di assi,  $\mathbf{e}'_i(\mathbf{q}, t)$ , con un'orientazione rispetto al sistema fisso che evolve dinamicamente. L'insieme di particella e assi  $\mathbf{e}'_i$  viene chiamato “corpo” nella letteratura che adotta l'interpretazione bohmliana.

L'equazione di Schrödinger viene riscritta nell'equazione di Pauli non-relativistica, che in presenza di un campo magnetico  $\mathbf{B}(\mathbf{q})$  è (in assenza di potenziali esterni e campi elettrici),

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{(-i\hbar \nabla - e\mathbf{A}/c)^2}{2m} \psi + \mu \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \psi, \quad (3.15)$$

dove è presente il potenziale di Stern-Gerlach con  $\mu = e\hbar/2mc$  e  $\mathbf{A}$  il potenziale vettore. L'obiettivo è ottenere da essa il comportamento dell'orientazione del corpo e la sua dinamica traslazionale, ovvero quattro equazioni, una per ogni variabile. Con il solito procedimento, si può ricavare l'equazione di Hamilton-Jacobi e la conservazione di  $\rho$ : si contrae la (3.15) per  $\psi^\dagger$  e si separa la parte reale da quella immaginaria, ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} - i\hbar \phi^\dagger \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + U + Q_s + \frac{2\mu}{\hbar} \mathbf{B} \cdot \mathbf{s} &= 0 \\ \partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

dove si riconoscono

$$\begin{aligned} \rho &= \psi \psi^\dagger = |\psi|^2 \\ \mathbf{j} &= \rho \mathbf{v} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^\dagger \nabla \psi - \psi \nabla \psi^\dagger) - \frac{e\rho}{mc} \mathbf{A} \\ \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{j}}{\rho} = \frac{\hbar}{2mi} \frac{\psi^\dagger \nabla \psi - \psi \nabla \psi^\dagger}{\rho} - \frac{e}{mc} \mathbf{A} = \frac{\hbar}{2m} (\nabla \chi + \nabla \varphi \cos \vartheta) - \frac{e}{mc} \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

e sono stati definiti il campo vettoriale di spin

$$\mathbf{s}(\mathbf{q}, t) = \frac{\hbar}{2} (\phi, \boldsymbol{\sigma} \phi) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

e il contributo al potenziale quantistico dipendente dallo spin

$$Q_s = \frac{\hbar^2}{8m} ((\nabla\vartheta)^2 + (\nabla\varphi)^2 \sin^2\vartheta).$$

Servono ancora due equazioni del moto, oltre alle (3.16), che tengano conto degli altri due gradi di libertà. Contraendo la (3.15) con  $\psi^\dagger\boldsymbol{\sigma}$  e poi sottraendola con la sua trasposta coniugata, si ottiene l'equazione vettoriale per  $\mathbf{s}$

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt}(\mathbf{q}(t), t) = \left( \mathbf{T} + \frac{2\mu}{\hbar} \mathbf{B} \times \mathbf{s} \right)_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)}, \quad (3.19)$$

dove

$$\mathbf{T} = \frac{1}{m\rho} \mathbf{s} \times \left( \sum_{i=1}^3 \partial_i(\rho\partial_i\mathbf{s}) \right)$$

è il momento torcente quantistico. Lo spin, quindi, precede attorno al campo magnetico esterno e intorno a  $\mathbf{T}$ . Se si vogliono, invece, le equazioni esplicite per  $\vartheta$  e  $\varphi$ , basta sostituire la (3.18) nella (3.19).

Riassumendo, si è riscritta l'equazione di Pauli (3.15) in quattro equazioni: le due (3.16), e la (3.19) (che è vettoriale). Esse descrivono in maniera deterministica sia la traiettoria del corpo, che il suo spin, imponendo lo spinore e la posizione iniziali.

### 3.3 Misura di spin

In MQ, la misura di una componente di spin è spiegata tramite il postulato di von Neumann del collasso della funzione d'onda: essa viene proiettata nell'autospazio dell'operatore relativo al risultato della misura (che sarà un autovalore). In questo modo si è preparato lo stato, ovvero da quel momento lo spin in quella direzione avrà un ben preciso valore,  $\pm\hbar/2$ . Risultano, però, non definite le componenti di spin nelle due direzioni ortogonali. L'unica cosa che si può dire sul risultato di una misura di spin, conoscendo lo stato iniziale, è la probabilità di trovare lo spin "su" ( $+\hbar/2$ ) o "giù" ( $-\hbar/2$ ).

Nella teoria di Bohm, invece, l'evoluzione del vettore di spin è determinata dalla (3.19). Lo spin è, quindi, sempre ben definito e varia in maniera continua, mentre il momento torcente quantistico  $\mathbf{T}$  lo "ruota" in modo che durante una misura si possano ottenere solo i valori discreti corrispondenti agli autovalori dell'operatore. Questa descrizione è possibile solo perché l'osservabile di spin  $\mathbf{s}$  definita in (3.18) non coincide con l'osservabile quantistica, ma ne è il valore di aspettazione locale.

Considerando un fascio di atomi neutri con spin 1/2 che si muove lungo l'asse  $y$ , si può misurare lo spin nella direzione  $z$  delle singole particelle utilizzando l'apparato di Stern-Gerlach: il fascio passa prima attraverso una fenditura, che crea un pacchetto d'onda gaussiano nella direzione  $z$ , poi attraverso un campo magnetico del tipo



$B_x = B_y = 0$ ,  $B_z = B_0 + zB'_0$ ,<sup>1</sup> schematizzato come impulsivo. Considerando lo stato iniziale  $\psi_0(z) = f(z)(c_+u_+ + c_-u_-)$ , dove  $f(z)$  rappresenta la distribuzione spaziale iniziale (normalizzata), e le costanti complesse  $c_{\pm}$  individuano la polarizzazione iniziale dello spin bohmiano (indipendente da  $z$ ), si risolve l'equazione di Pauli (3.15) trascurando i termini cinetici perché  $\mathbf{B}$  è impulsivo. La soluzione al tempo  $T$ , ovvero all'uscita dal campo magnetico, è

$$\psi(z, T) = f(z) \left( c_+ e^{-i(\Delta+z\Delta')T/\hbar} u_+ + c_- e^{i(\Delta+z\Delta')T/\hbar} u_- \right), \quad (3.20)$$

dove  $\Delta = \mu B_0 T/\hbar$  e  $\Delta' = \mu B'_0 T/\hbar$ . È da notare come, trascurando i termini cinetici, si siano di fatto trascurati il potenziale e il momento torcente quantistici.

Nell'evoluzione successiva, con stato iniziale (3.20), i termini prima trascurati diventano importanti, e l'equazione di Pauli diventa

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

Per trovare la soluzione è sufficiente considerare la trasformata di Fourier della  $f(z)$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikz} dk,$$

dove  $g(k)$  è un pacchetto normalizzato centrato nello spazio dei momenti in  $k = 0$ , e sostituirla nell'equazione di Pauli. Citando solo i risultati (i conti espliciti sono in [8]) si ha

$$\psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) \left( c_+ e^{i(-\Delta+(k-\Delta')z - E_k^+ t/\hbar)} u_+ + c_- e^{i(\Delta+(k+\Delta')z - E_k^- t/\hbar)} u_- \right) dk,$$

dove  $E_k^{\pm} = \hbar^2(k \mp \Delta')^2/2m$  e il tempo iniziale  $t = 0$  è ora riferito all'istante in cui la particella esce dal magnete. Si nota come la funzione d'onda si è divisa in due pacchetti, uno associato a  $u_+$  e l'altro a  $u_-$ . Trovando l'estremante della fase di ogni pacchetto

$$\frac{\partial}{\partial k} \left( \mp \Delta + (k \mp \Delta')z - \frac{\hbar}{2m} (k \mp \Delta')^2 t \right)_{k=0} = 0,$$

si ricava il moto del centro dello stesso

$$z^{\pm} = \mp \frac{\hbar \Delta'}{m} t.$$

I centri dei pacchetti relativi ai due autostati  $u_{\pm}$  si muovono con velocità opposte lungo l'asse  $z$ .

---

<sup>1</sup>Un campo magnetico così definito non soddisfa l'equazione di Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , quindi in realtà almeno una delle componenti  $B_x$  e  $B_y$  sarà diversa da zero, però per la descrizione del problema la si può trascurare.

Dopo un tempo sufficiente dall'uscita della particella dal campo magnetico, lo stato finale si presenta come due pacchetti ben separati. Fissata la funzione d'onda di spin iniziale (ovvero i coefficienti  $c_{\pm}$ ), è la sola posizione iniziale a determinare in quale dei due pacchetti la particella entrerà. Notare come in questa descrizione non è stato necessario utilizzare il postulato del collasso della funzione d'onda, ma si sono ottenuti gli stessi risultati.

### 3.4 Argomento di Mermin

La teoria delineata nei precedenti paragrafi consente a Christopher Dewdney in [4] di discutere l'esempio descritto nel Paragrafo 2.3 a pag. 15 su due particelle di spin 1/2. Dewdney riassume l'argomento di Mermin con la seguente tabella,

$$\begin{array}{ccc|c}
 \sigma_x \otimes \mathbb{1} & \mathbb{1} \otimes \sigma_x & \sigma_x \otimes \sigma_x & \mathbb{1} \\
 \mathbb{1} \otimes \sigma_y & \sigma_y \otimes \mathbb{1} & \sigma_y \otimes \sigma_y & \mathbb{1} \\
 \sigma_x \otimes \sigma_y & \sigma_y \otimes \sigma_x & \sigma_z \otimes \sigma_z & \mathbb{1} \\
 \hline
 \mathbb{1} & \mathbb{1} & -\mathbb{1} & |
 \end{array}$$

dove operatori sulla stessa riga (colonna) commutano, e il loro prodotto dà l'operatore nell'ultima colonna (riga). È evidente che non si può associare un valore (+1 o -1) ad ogni osservabile in modo da soddisfare le relazioni algebriche.

Dell'argomento di Mermin si possono dare due interpretazioni, entrambe non si applicano alla teoria di Bohm. L'interpretazione più forte prevede che la teoria a variabili nascoste assegni simultaneamente a ciascuna delle nove osservabili un valore. Quella più debole, invece, vuole che i valori assegnati siano quelli che verrebbero raccolti qualora si facesse una misura.

Le ipotesi che permettono al teorema di KS di arrivare a contraddizione sono le seguenti:

- (a) i valori assegnati dalla teoria devono essere autovalori delle osservabili quantistiche;
- (b) relazioni funzionali tra operatori che commutano devono essere rispettate anche dai valori, è l'ipotesi (1.6);
- (c) il valore assegnato a un'osservabile relativa a una particella non dipende da un'eventuale misura eseguita sulla seconda;
- (d) il valore assegnato a osservabili relative ad entrambe le particelle non dipende da quale altra osservabile viene misurata simultaneamente sul sistema.

Nell'interpretazione forte la teoria di Bohm elude il teorema KS in quanto viene meno il punto (a). Infatti, in meccanica bohiana, solo le osservabili per cui lo stato del sistema è autostato posseggono un valore che è un autovalore. In generale, ogni osservabile possiede uno spettro continuo di valori nascosti ed è solo la misura a trasformare tale valore in un autovalore delle osservabili quantistiche.

Si supponga di costruire il sistema in uno stato quantistico particolare, formato da una parte spaziale con coordinate  $x_i, y_i, z_i$  e una di spin,

$$\psi = f_1(x_1, y_1, z_1)u_+ \otimes f_2(x_2, y_2, z_2)u_-, \quad (3.21)$$

dove, come al solito,  $u_{\pm}$  sono gli autostati di  $\sigma_z$ . Essendo uno stato prodotto, non c'è correlazione tra i risultati di misure fatte sulla prima particella e quelle sulla seconda. Vale, cioè, il punto (c). Inoltre, l'equazione di Pauli si scinde in due equazioni indipendenti di particella singola e, utilizzando la (3.18), è facile ricavare i valori assegnati dalla teoria. Sia, infatti, lo stato di spin per una particella  $\phi = c_+u_+ + c_-u_-$ , si ottiene

$$\begin{aligned} s_x &= \bar{c}_+c_- + \bar{c}_-c_+ \\ s_y &= i(\bar{c}_-c_+ - \bar{c}_+c_-) \\ s_z &= c_+^2 - c_-^2. \end{aligned}$$

Nel caso in esame i coefficienti sono  $c_+ = 1, c_- = 0$  per la prima particella e viceversa per la seconda, quindi la teoria assegna alle osservabili i valori della tabella a lato (destra). Le relazioni algebriche non sono rispettate dai valori, ma infatti essi non sono autovalori.

0	0	0	1
0	0	0	1
0	0	-1	1
1	1	-1	

Nella forma debole, invece, (a) e (b) sono sicuramente soddisfatti anche nella teoria di Bohm, ma i punti (c) e (d) no. Ciò è dovuto ad un'altra caratteristica della teoria che Bohm chiamava *olismo*. Il potenziale quantistico che agisce sulla particella e ne determina il moto è definito dalla funzione d'onda, ma essa è fortemente dipendente dal contesto sperimentale: la presenza di uno strumento di misura, o di una fessura, o di qualsiasi altro apparato, modifica istantaneamente e in tutto lo spazio delle configurazioni la funzione d'onda. La modifica introdotta nel sistema dall'apparato di misura di un'osservabile sarà diversa da quella apportata da una strumentazione relativa ad un'altra osservabile, incompatibile con la prima. Questo fa sì che, nell'esempio di Mermin, assegnato uno stato iniziale, dati i valori delle variabili nascoste iniziali e dato l'apparato di misura (ovvero l'hamiltoniana che descrive l'interazione), all'operatore  $\sigma_x \otimes \sigma_y$  viene assegnato un valore diverso se misurato insieme a  $\sigma_x \otimes \mathbb{1}$  e  $\mathbb{1} \otimes \sigma_y$ , oppure insieme a  $\sigma_y \otimes \sigma_x$  e  $\sigma_z \otimes \sigma_z$ .

### 3.5 Limiti del teorema e contestualità

M. Redhead, in [12], mostra le assunzioni che giustificano l'ipotesi (b) del precedente paragrafo, ovvero: se  $A, B \in \mathcal{O}$  sono due osservabili ed esiste una funzione  $f$  tale che  $B = f(A)$ , allora  $v(B) = f(v(A))$ . Tali assunzioni sono:

- (a) punto di vista realista: non esiste nulla di indeterminato e gli elementi di realtà hanno proprietà ben definite scoperte per mezzo di misure (principio di *faithful measurement*); questo determinismo sarebbe permesso definendo delle variabili nascoste che specificano i valori di tutte le osservabili (notare come questa nozione di realismo sia più forte di quella einsteiniana);

- (b) c'è corrispondenza 1 : 1 tra l'insieme degli operatori autoaggiunti  $\hat{\mathcal{O}}$  e quello delle osservabili quantistiche  $\mathcal{O}$ ;
- (c) se è possibile assegnare ad un operatore autoaggiunto  $\hat{Q}$  dei valori  $q_i$  definiti operativamente (spettro di  $\hat{Q}$ ), con probabilità associate, dato uno stato  $\psi$ , in accordo con la MQ

$$(\psi, P_{q_i} \psi),$$

dove  $P_{q_i}$  è il proiettore nell'autospazio di  $\hat{Q}$  corrispondente a  $q_i$ , allora esiste un elemento di realtà, che chiameremo osservabile  $Q$ , associato a tali valori.

Il punto (a) è l'assunto base dell'interpretazione realista della MQ che giustifica la ricerca di teorie a variabili nascoste.

Come detto prima, dalle ipotesi (a)-(c) segue la (1.6). Infatti, si consideri un sistema nello stato  $\psi$  e l'osservabile  $Q \in \mathcal{O}$ . Grazie ad (a), una misura di  $Q$  rivela il valore  $v_\psi(Q)$  posseduto dalla osservabile stessa per il sistema osservato. Data una funzione misurabile  $f$ , si nota che, per definizione di  $f(Q)$ , il valore  $f(v_\psi(Q))$  è distribuito probabilisticamente in accordo alla MQ per  $f(\hat{Q})$ , infatti

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(f(v_\psi(Q)) \in \Delta) &= \mathbb{P}(v_\psi(Q) \in f^{-1}(\Delta)) = P_\psi^Q(f^{-1}(\Delta)) \stackrel{(1.5)}{=} P_\psi^{f(Q)}(\Delta) = \\ &= \mathbb{P}(v_\psi(f(Q)) \in \Delta), \end{aligned}$$

quindi, per la (c), esiste un'osservabile associata all'operatore  $f(\hat{Q})$ , con valore  $f(v_\psi(Q))$ . Ma, per (b), esiste una sola osservabile associata a quell'operatore, quindi  $v_\psi(f(Q)) = f(v_\psi(Q))$ , che coincide con la (1.6).

Tutto questo permette di capire come la tesi del teorema KS possa essere elusa: è sufficiente che venga negata una delle tre ipotesi sopra esposte.

Se viene rifiutata la (a), nonostante si fissino le variabili nascoste, l'osservabile non possiede più un unico valore, ma dipende dal contesto di misura. Infatti, date  $A, B, C \in \mathcal{O}$ , con  $[B, C] \neq 0$ , e due funzioni  $f$  e  $g$ , tali che  $A = f(B)$  e  $A = g(C)$ ,  $A$  può essere misurata applicando  $f$  al risultato di una misura di  $B$ , oppure applicando  $g$  al risultato della misura di  $C$ ; non c'è motivo di credere che questi due valori associati ad  $A$  siano uguali. Un operatore è detto massimale se i suoi autovalori sono tutti non degeneri. La contraddizione nella dimostrazione del teorema KS si basa su questo: il valore assegnato ad un proiettore unidimensionale (operatore non massimale, perché l'autovalore 0 ha degenerazione se  $\dim \mathcal{H} > 2$ ) non dipende dalla scelta degli altri proiettori compatibili, o, equivalentemente, di quale operatore massimale esso è funzione. Infatti, se si usassero solo operatori massimali, la contraddizione non si avrebbe. In questo caso si parla di *contestualità causale*.

Alternativamente, si può negare la (b). In questo caso, ogni osservabile, fissate le variabili nascoste, possiede un valore, però non c'è più la corrispondenza biunivoca tra operatore ed osservabile: ad ogni operatore  $\hat{A} \in \hat{\mathcal{O}}$  possono essere associate più osservabili di  $\mathcal{O}$ . Per risolvere la contraddizione di KS, è sufficiente chiedere questa divisione delle osservabili solo per gli operatori non massimali (perché per essi vale la contraddizione). Utilizzando la situazione precedente, si considerano  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  operatori massimali non commutanti, e  $\hat{A}$  non

massimale, tali che  $\hat{A} = f(\hat{B}) = g(\hat{C})$ . Essendo massimali, a  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  si possono associare senza ambiguità le osservabili  $B$  e  $C$ . Ad  $\hat{A}$ , invece, si assoceranno due osservabili (in questo caso, in generale possono essere di più),  $A_B$  e  $A_C$ , tali che

$$v_\phi(A_B) = f(v_\phi(B)) \quad \text{e} \quad v_\phi(A_C) = g(v_\phi(C)).$$

Per conoscere, quindi, il valore di un'osservabile non massimale, non è sufficiente conoscere l'operatore associato, ma bisogna sapere anche a quale osservabile massimale essa è collegata. Questo tipo di contestualità è chiamata *ontologica*.

Infine, si può rifiutare la (c). In questo caso ad ogni operatore corrisponde una sola osservabile, ma, usando le stesse notazioni di prima  $\hat{A} = f(\hat{B}) = g(\hat{C})$ , non è detto che misurando  $\hat{B}$  e poi applicando  $f$  si caratterizzi un qualche elemento di realtà, ovvero l'osservabile  $A$ . Infatti, il valore ottenuto in questo modo, pur essendo distribuito in accordo con la MQ per l'operatore  $\hat{A}$ , potrebbe non essere associato all'osservabile  $A$ . La procedura corretta per ottenere il valore di  $A$  potrebbe essere allora quella di misurare prima  $C$ , e poi applicare  $g$  al risultato della misura. Anche questa procedura per risolvere il paradosso di KS risulta, però, scomoda, perché non è chiaro come distinguere la procedura corretta, cioè che porta al valore "reale", di misura di  $A$ , da quella sbagliata.

Un problema che non viene toccato da queste argomentazioni è cosa succeda se si misura direttamente l'osservabile non massimale. Questo, però, è compito della teoria a variabili nascoste stabilirlo, esula dall'intento di capire i limiti del teorema di KS. Nel caso della meccanica bohmiiana, ad esempio, è la posizione, cioè la variabile nascosta, a determinare il risultato della misura.

È interessante notare come, nell'interpretazione forte del teorema KS (spiegata nel precedente paragrafo), la meccanica bohmiiana eluda la tesi del teorema perché non soddisfa una delle ipotesi chiave che portano al paradosso: i valori assegnati dalla teoria non sono, in generale, autovalori delle osservabili. Perciò, la (1.6) è soddisfatta da Bohm solo quando lo stato del sistema è un autostato delle osservabili, ovvero è soddisfatta solo per gli autovalori, negli altri casi no. Invece, nell'interpretazione debole non è soddisfatto il punto (a) proprio a causa dell'olismo discusso nel precedente paragrafo, che, oltre a comportare la violazione della località, implica anche la contestualità così come la si è definita sopra.

Un'altra osservazione a proposito della contestualità va fatta nei riguardi di quanto mostrato a pagg. 8 e 9. A prima vista, infatti, potrebbe sembrare che KS, con quegli argomenti, avessero tenuto in conto la possibilità di avere più osservabili nascoste per ogni osservabile quantistica, riuscendo a dimostrare che neanche in quel caso è possibile eludere la tesi del teorema. Facendo attenzione, però, si nota che quell'argomento mostra solo che la contestualità entra in contraddizione con l'ipotesi (1.6), invece in questo paragrafo si è introdotta la contestualità proprio per aggirare tale ipotesi.



## Appendice A

# Misura di probabilità del modello classico di spin 1/2

Sono qui descritti i ragionamenti che hanno portato KS (in [9]) al risultato (2.3) a pag. 13. Per trovare una misura di probabilità  $\mu_\psi$  che soddisfi la (1.2) come descritto al Paragrafo 2.1, KS fanno le seguenti ipotesi:

- (a) si considera una densità di probabilità continua  $u_\psi(p)$  su  $S^2$  che, per ogni  $E \subset S^2$  misurabile, definisce

$$\mu_\psi(E) = \int_E u_\psi(p) dp;$$

- (b) si suppone che  $u_\psi$  sia funzione del solo angolo di colatitudine  $\vartheta$ , ovvero l'angolo sotteso a  $O$  dal punto  $P_\psi$  al punto  $p$ ;
- (c) la probabilità  $u$  assume la stessa forma per tutte le  $\psi$ ; ovvero se  $\psi_0 = (1, 0)$ , da cui  $P_{\psi_0} = (0, 0, 1)$ , e  $\psi \in \mathcal{H}_2$  generico tale per cui il punto  $P_\psi$  è individuato dall'angolo  $\alpha$  rispetto a  $P_{\psi_0}$ , allora

$$u_\psi(\vartheta) = u_{\psi_0}(\vartheta + \alpha)$$

(d'ora innanzi  $u_{\psi_0}(\vartheta) = u(\vartheta)$ );

- (d) si assume che  $u(\vartheta) = 0$  per  $\vartheta > \pi/2$ .

Grazie a queste assunzioni la ricerca di  $\mu_\psi$  è notevolmente semplificata. La condizione (1.2) che va soddisfatta è la seguente

$$(\psi, A\psi) = \int_\Omega f_A(\omega) d\mu_\psi(\omega).$$

Visto che  $f_A$ , definita in (2.2), è lineare in  $A$ , allora l'integrale in (1.2) è lineare in  $A$ . Ma anche l'operatore  $(\psi, A\psi)$  è lineare in  $A$ . Perciò, dato che una generica  $A \in \mathcal{O}_2$  è funzione

lineare di una matrice di proiezione, è sufficiente verificare la (1.2) per tali matrici. Inoltre, grazie a (c), è possibile scegliere  $\psi = (1, 0)$ , così da avere  $P_\psi = (0, 0, 1)$ ; (b) invece permette di fissare l'angolo azimutale  $\varphi$  di  $P_{\sigma(A)}$  a zero. Sia  $\rho$  l'angolo tra  $P_\psi$  e  $P_{\sigma(A)}$ , allora

$$P_{\sigma(A)} = (\sin \rho, 0, \cos \rho),$$

da cui, utilizzando l'isomorfismo  $P : V \longrightarrow \mathbb{E}^3$ ,

$$\sigma(A) = \sigma_x \sin \rho + \sigma_z \cos \rho = \begin{pmatrix} \cos \rho & \sin \rho \\ \sin \rho & -\cos \rho \end{pmatrix}.$$

L'autovettore di  $\sigma(A)$  relativo a  $+1$ , ovvero il vettore  $\eta$  tale che  $P_\eta = P_{\sigma(A)}$ , è

$$\eta = \begin{pmatrix} \cos(\rho/2) \\ \sin(\rho/2) \end{pmatrix}.$$

La (2.1) implica che  $\eta$  è anche autovettore di  $A$ ; inoltre, visto che  $A$  è una matrice di proiezione, l'autovalore relativo a  $\eta$  è  $+1$ , quindi

$$(\psi, A\psi) = (\psi, (\psi, \eta)\eta) = |(\psi, \eta)|^2 = \cos^2(\rho/2)$$

e la (2.2) diventa

$$f_A(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in S_A^+ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Si tratta allora di risolvere l'equazione integrale (1.2), che, per quanto detto prima e per il punto (d), diventa

$$\begin{aligned} \cos^2(\rho/2) &= \int_{S^2} f_A(p)u(p) dp = \int_{S_A^+ \cap S_{P_\psi}^+} u(p) dp = \\ &= \int_{\rho-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\varphi_\vartheta}^{+\varphi_\vartheta} u(\vartheta) \sin \vartheta d\varphi d\vartheta, \end{aligned} \tag{A.1}$$

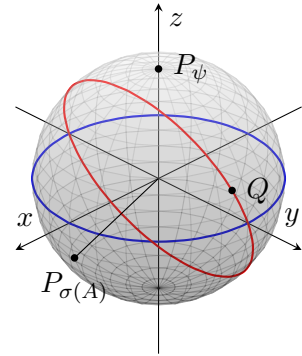
dove  $\varphi_\vartheta$  è l'estremo del dominio di integrazione di  $\varphi$  a  $\vartheta$  fissato. Nella figura a lato è rappresentato il dominio su cui integrare: la superficie sferica compresa tra la circonferenza blu (che è il bordo di  $S_{P_\psi}^+$ ) e quella rossa (bordo di  $S_A^+$ ).

Per ogni  $\varphi_\vartheta$ , il punto  $Q = (\sin \vartheta \cos \varphi_\vartheta, \sin \vartheta \sin \varphi_\vartheta, \cos \vartheta)$  è ortogonale a  $P_{\sigma(A)}$

$$Q \cdot P_{\sigma(A)} = \sin \rho \sin \vartheta \cos \varphi_\vartheta + \cos \rho \cos \vartheta = 0,$$

da cui

$$\varphi_\vartheta = \arccos(-\cot \rho \cot \vartheta).$$





---

Sostituendo l'espressione di  $\varphi_\vartheta$ , definendo  $x = \rho - \pi/2$  e differenziando ambo i membri in (A.1), si ottiene

$$\cos^3 x = -4 \int_{\pi/2}^x \frac{u(\vartheta) \cos \vartheta}{(1 - \cot^2 \vartheta \tan^2 x)^{1/2}} d\vartheta.$$

Facendo i cambi di variabile  $z = \cos^2 x$ ,  $s = \cos^2 \vartheta$  e  $w(s) = u(\vartheta)$ , l'equazione integrale diventa

$$z = \int_0^z \frac{2w(s)}{(z-s)^{1/2}} ds,$$

che può essere risolta utilizzando la trasformata di Laplace e le sue proprietà rispetto alla convoluzione. Infatti si può scrivere

$$z = w * 2x^{-1/2},$$

da cui

$$\mathcal{L}[z](t) = \mathcal{L}[w](t)\mathcal{L}[2z^{-1/2}](t) \implies \mathcal{L}[w](t) = \frac{\mathcal{L}[z](t)}{\mathcal{L}[2z^{-1/2}](t)},$$

si usa ora la proprietà  $\mathcal{L}[z^n](t) = \Gamma(n+1)/t^{n+1}$ , con  $\Gamma$  funzione di Eulero,

$$\mathcal{L}[w](t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-3/2} = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\pi} s^{1/2}\right](t),$$

quindi la soluzione è  $w(s) = \frac{1}{\pi} s^{1/2}$  che, riportata nelle vecchie variabili, dà proprio la (2.3).



# Bibliografia

- [1] J. S. Bell, «On the Einstein Podolsky Rosen paradox», *Physics* 1.3 (1964).
- [2] D. Bohm, «A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of “Hidden” Variables. I», *Phys. Rev.* 85 (1952), pp. 166-179.
- [3] D. Bohm, «A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of “Hidden” Variables. II», *Phys. Rev.* 85 (1952), pp. 180-193.
- [4] C. Dewdney, «Constraints on quantum hidden-variables and the Bohm theory», *Journal of Physics A: Mathematical and General* 25.21 (1992).
- [5] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, «Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?», *Phys. Rev.* 47 (1935), pp. 777-780.
- [6] M. Gondran e A. Gondran, «Measurement in the de Broglie-Bohm interpretation: Double-slit, Stern-Gerlach and EPR-B», *Phys. Res. Int.* (2014).
- [7] P. R. Halmos, «Lectures on Boolean Algebras», Van Nostrand Mathematical Studies, 1963.
- [8] P. R. Holland, «The Quantum Theory of Motion: An Account of the de Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics», Cambridge University Press, 1993.
- [9] S. Kochen e E. P. Specker, «The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics», *Journal of Mathematics and Mechanics* 17.1 (1967), pp. 59-87.
- [10] N. D. Mermin, «Simple unified form for the major no-hidden-variables theorems», *Physical Review Letters* 65.27 (1990).
- [11] A. Peres, «Two simple proof of the Kochen-Specker theorem», *Journal of Physics A: Mathematical and General* 24.4 (1991).
- [12] M. Redhead, «Incompleteness, Nonlocality and Realism: a prolegomenon to the philosophy of Quantum Mechanics», Oxford Clarendon Press, 1987.
- [13] M. Schlosshauer, J. Kofler e A. Zeilinger, «A snapshot of foundational attitudes toward quantum mechanics», *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 44.3 (2013), pp. 222-230.
- [14] N. Straumann, «A Simple Proof of the Kochen-Specker Theorem on the Problem of Hidden Variables», *Annalen der Physik* 19.1-2 (2010).
- [15] J. von Neumann, «I fondamenti matematici della meccanica quantistica», il Poligrafo, 1998, trad. da G. Boniolo.