DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Università degli Studi di Padova – Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Relazione per la prova finale Analisi delle perturbazioni orbitali su orbita marziana

Tutor universitario:

Prof. Giacomo Colombatti

Laureando: *Palomba Stefano*

Padova, 10/09/2024

INTRODUZIONE E OBIETTIVI DEL LAVORO

Si vogliono analizzare preliminarmente i fattori perturbativi secolari e di lunga durata per orbite marziane , mettendone in risalto gli aspetti qualitativi ,con un particolare focus per i contributi dovuti alla presenza di Fobos , Deimos e del Sole.

Dalle variabili di Delaunay, si passa nelle coordinate orbitali dove si riduce la complessità del problema mediando l'hamiltoniana rispetto l'anomalia media per rimuovere i fattori perturbativi di breve periodo.

Le equazioni della dinamica, ricavate dal potenziale mediato, approssimano l'andamento secolare e nel lungo periodo delle variabili stesse; la bontà di tale approssimazione tanto risulta maggiore tanto i parametri perturbativi sono piccoli.

IL MODELLO E LE EQUAZIONI

Per costruire il modello, si considerano i contributi di J_2, J_3 e J_4, e dei terzi corpi Fobos, Deimos e del Sole; si considera un sistema di riferimento inerziale a Marte, assumendo noti i parametri delle orbite dei terzi corpi (f,ω,Ω,I,a,e), inoltre si suppone che l'orbita sia ellittica.

Start with Delaunay Elements:

α_1	$\sqrt{\mu a}$
α_2	$\sqrt{\mu a(1-e^2)}$
α_3	$\sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos I$
β_1	M
β_2	ω
β_3	Ω

$$\mathbf{z} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$H = -\frac{\mu^2}{2\alpha_1^2} - U^{(1)}$$

$$\dot{\mathbf{z}} = J\nabla_{\mathbf{z}} H$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1^2}{\mu} \\ \sqrt{1-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}} \\ \cos^{-1}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$P \triangleq \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2\alpha_1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2\sqrt{\alpha_1^2-\alpha_2^2}} & -\frac{\alpha_2}{\alpha_1\sqrt{\alpha_1^2-\alpha_2^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_3}{\alpha_2\sqrt{\alpha_2^2-\alpha_3^2}} & -\frac{1}{\sqrt{\alpha_2^2-\alpha_3^2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Define New State and Hamiltonian: $\mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} a \\ e \\ I \\ M \\ \omega \\ \Omega \end{bmatrix} \implies K = -\frac{\mu}{2a} - U^{(1)}(\mathbf{z}(\mathbf{y}))$

$$\boxed{\dot{\mathbf{y}} = PJP^T\nabla_{\mathbf{y}} K}$$

f : anomalia vera
M : anomalia media
e : eccentricità
a : semiasse maggiore
ω : argomento di pericentro
Ω : longitudine del nodo ascendente
I : inclinazione

EQUAZIONI PLANETARIE DI LAGRANGE

$$
\begin{aligned}
\dot{a} &= 2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{\partial U^{(1)}}{\partial M} \\
\dot{e} &= \frac{1}{e\sqrt{a\mu}}\left(\left(1-e^2\right)\frac{\partial U^{(1)}}{\partial M} - \sqrt{1-e^2}\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \omega}\right) \\
\dot{I} &= \frac{\cos\left(I\right)\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \omega} - \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \Omega}}{\sqrt{a\mu\left(1-e^2\right)}\sin\left(I\right)} \\
\dot{M} &= \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} - 2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{\partial U^{(1)}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{e\sqrt{a\mu}}\frac{\partial U^{(1)}}{\partial e} \\
\dot{\omega} &= \frac{1}{\sqrt{a\mu}}\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{\partial U^{(1)}}{\partial e} - \frac{\cot(I)}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial U^{(1)}}{\partial I}\right) \\
\dot{\Omega} &= \frac{1}{\sqrt{a\mu\left(1-e^2\right)}\sin\left(I\right)}\frac{\partial U^{(1)}}{\partial I}
\end{aligned}
$$

EQUAZIONI PLANETARIE DI LAGRANGE

$$U^{(1)} = U_{J_2} + U_{J_3} + U_{J_4} + U_{\text{Fobos}} + U_{\text{Deimos}} + U_{\text{Sun}}$$

$$U_{J_2} = -\frac{\mu_m J_2 r_m^2}{2a^3}\frac{(1+e\cos f)^3}{(1-e^2)^3}\left(3\sin^2(I)\left(\frac{1}{2}-\frac{cos(2f+2\omega)}{2}\right)-1\right).$$

$$U_{J_3} = -\frac{\mu_m J_3 r_m^3}{2a^4}\frac{(1+e\cos f)^4}{(1-e^2)^4}\left(\frac{5}{4}\sin^3(I)(3\sin(f+\omega)-\sin(3f+3\omega))-3\sin(I)\sin(f+\omega)\right)$$

$$U_{J_4} = -\frac{\mu_m J_4 r_m^4}{8a^5}\frac{(1+e\cos f)^5}{(1-e^2)^5}\left(\frac{35}{8}\sin^4(I)(3-4\cos(2f+2\omega)+\cos(4f+4\omega))-\frac{30\sin^2(I)}{2}(1-\cos(2f+2\omega))+3\right)$$

$$U_{\text{Deimos}} = \frac{\mu_{\text{Deimos}}}{\sqrt{r_{\text{Deimos}}^2 + r^2 - 2r\cdot r_{\text{Deimos}}\cos(\phi_{\text{Deimos}})}} - \frac{\mu_{\text{Deimos}}\, r.\hat{r}_{\text{Deimos}}}{r_{\text{Deimos}}^2}$$

$$U_{\text{Fobos}} = \frac{\mu_{\text{Fobos}}}{\sqrt{r_{\text{Fobos}}^2 + r^2 - 2r\cdot r_{\text{Fobos}}\cos(\phi_{\text{Fobos}})}} - \frac{\mu_{\text{Fobos}}\, r.\hat{r}_{\text{Fobos}}}{r_{\text{Fobos}}^2}$$

$$U_{\text{Sun}} = \frac{\mu_{\text{Sun}}}{\sqrt{r_{\text{Sun}}^2 + r^2 - 2r\cdot r_{\text{Sun}}\cos(\phi_{\text{Sun}})}} - \frac{\mu_{\text{Sun}}\, r.\hat{r}_{\text{Sun}}}{r_{\text{Sun}}^2}$$

$$U_{\text{Fobos}} = \begin{cases} \frac{\mu_F}{r_F} \sum_{n\geq 2}^{\infty} \left(\frac{a(1-e^2)}{r_F(1+e\cos(f))} \right)^n P_n\left[\cos(\phi_F)\right] & \text{se } r_a < r_f \\ \frac{\mu_F(1+e\cos(f))}{a(1-e^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_F(1+e\cos(f))}{a(1-e^2)} \right)^n P_n\left[\cos(\phi_F)\right] - \frac{\mu_F a(1-e^2)\cos(\phi_F)}{r_F^2(1+e\cos(f))} & \text{se } r_p > r_f \end{cases}$$

nelle coordinate di Hill, , il coseno dell'angolo tra i raggi vettori dei corpi può essere scritto come :

$$\cos(\phi) = A\cos(f+\omega) + B\sin(f+\omega)$$

$$A = \cos(\Delta\Omega)\cos(u_{corpo}) + \cos(i_{corpo})\sin(u_{corpo})\sin(\Delta\Omega)$$

$$B = \cos(I)\left[-\sin(\Delta\Omega)\cos(u_{corpo}) + \cos(i_{corpo})\sin(u_{corpo})\cos(\Delta\Omega)\right] + \sin(I)\sin(i_{corpo})\sin(u_{corpo})$$

Approssimando il potenziale alla seconda armonica ($r_a < r_f$), si ha :

$$U_{F2} = \frac{1}{2}\frac{a^2}{(r_F)^3}\frac{(1-e^2)^2}{(1+e\cos f)^2}\left[3A^2\left(\frac{1}{2}+\cos(2f+2\omega)\right) + 3B^2\left(\frac{1}{2}-\cos(2f+2\omega)\right) + 6AB\cos(f+\omega)\sin(f+\omega) - 1\right]$$

EQUAZIONI DELLA DINAMICA MEDIATE

Le espressioni dei potenziali , mediati nell'anomalia media, diventano :

$$\langle U_2 \rangle = \frac{-\mu_m J_2 r_m^2}{2a^3\sqrt{(1-e^2)^3}}\left(\frac{3}{2}\sin^2(I)-1\right)$$

$$\langle U_3 \rangle = \frac{-\mu_m J_3 r_m^3 e\sin(\omega)\sin(I)}{2a^4\sqrt{(1-e^2)^5}}\left(\frac{5}{4}\sin^2(I)-1\right)$$

$$\langle U_4 \rangle = -\frac{\mu}{a}J_4\left(\frac{r_m}{a}\right)^4(1-e^2)^{-\frac{7}{2}}\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\left(\frac{3}{8}-\frac{15}{8}\sin^2 I+\frac{105}{64}\sin^4 I\right)$$
$$-\frac{3}{4}\frac{\mu}{a}J_4\left(\frac{r_m}{a}\right)^4(1-e^2)^{-\frac{7}{2}}e^2\left(\frac{15}{8}\sin^2 I-\frac{35}{16}\sin^4 I\right)\cos 2\omega$$

$$\langle U_{F2} \rangle = \frac{3}{4}\frac{\mu_F a^2}{{r_F}^3}[A_F^2+B_F^2+e^2(A_F^2(4\cos^2\omega-\sin^2\omega)+B_F^2(4\sin^2\omega-cos^2\omega+10A_FB_F\cos 2\omega))-(\frac{2}{3}+e^2)]$$

$$\langle U_{D2} \rangle = \frac{3}{4}\frac{\mu_D a^2}{{r_D}^3}[A_D^2+B_D^2+e^2(A_D^2(4\cos^2\omega-\sin^2\omega)+B_D^2(4\sin^2\omega-cos^2\omega+10A_DB_D\cos 2\omega))-(\frac{2}{3}+e^2)]$$

$$\langle U_S \rangle = \frac{3}{4}\frac{\mu_S a^2}{{r_S}^3}[A_S^2+B_S^2+e^2(A_S^2(4\cos^2\omega-\sin^2\omega)+B_S^2(4\sin^2\omega-cos^2\omega+10A_SB_S\cos 2\omega))-(\frac{2}{3}+e^2)]$$

EQUAZIONI DELLA DINAMICA MEDIATE

$$\dot{a} = 0$$

$$\dot{e} = -\frac{1}{e\sqrt{a\mu}}\sqrt{1-e^2}\,\frac{\partial\langle U^{(1)}\rangle}{\partial\omega}$$

$$\dot{I} = \frac{\cos(I)\frac{\partial\langle U^{(1)}\rangle}{\partial\omega} - \frac{\partial\langle U^{(1)}\rangle}{\partial\Omega}}{\sqrt{a\mu(1-e^2)}\sin(I)}$$

$$\dot{M} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} - 2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{\partial\langle U^{(1)}\rangle}{\partial a} - \frac{1-e^2}{e\sqrt{a\mu}}\frac{\partial\langle U^{(1)}\rangle}{\partial e}$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{\sqrt{a\mu}}\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{\partial\langle U^{(1)}\rangle}{\partial e} - \frac{\cot(I)}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial\langle U^{(1)}\rangle}{\partial I}\right)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{a\mu(1-e^2)}\sin(I)}\frac{\partial\langle U^{(1)}\rangle}{\partial I}$$

FROZEN ORBITS

Poichè J_2 risulta essere solamente due ordini di grandezza maggiore rispetto J_3 e J_4, ci si aspetta che i potenziali associati a questi ultimi due abbiano un effetto marcato sull' evoluzione temporale delle variabili

nella situazione preliminare in cui si vogliono mantenere costanti le variabili dell''orbita 'e' ed 'ω', si considerano principalmente gli effetti di J_2 e J_3 :

$$\frac{de}{dt} = \frac{3}{2}\frac{J_3 r_{eq}^3}{p^3}(1-e^2)n\sin i\cos\omega\left(\frac{5}{4}\sin^2 i - 1\right) = 0$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{2}\frac{J_2 r_{eq}^2}{p^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right) - \frac{3}{2}\frac{J_3 r_{eq}^3 \sin\omega}{p^3 e\sin i}n\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{5}{4}\sin^2 i - 1\right)\sin^2 i\\ &+e^2\left(1-\frac{35}{4}\sin^2 i\cos^2 i\right)\end{aligned}\right\} = 0$$

$$a_1e^3 + a_2e^2 + a_3e + a_4 = 0$$

$$a_1 = -\frac{3}{4}n\left(\frac{r_{eq}}{a}\right)^2 J_2\sin i\left(1-5\cos^2 i\right)$$

$$a_2 = \frac{3}{2}n\left(\frac{r_{eq}}{a}\right)^3 J_3\left(1-\frac{35}{4}\sin^2 i\cos^2 i\right)$$

$$a_3 = -a_1$$

$$a_4 = \frac{3}{2}n\left(\frac{r_{eq}}{a}\right)^3 J_3\sin^2 i\left(\frac{5}{4}\sin^2 i - 1\right)$$

senza considerare J_4, ci si aspetta di dover fornire un opportuno Δv per il mantenimento dell'orbita

EFFETTI DI TERZO CORPO

- In orbite basse, gli effetti possono essere trascurati poichè gli effetti di J_2,J_3,J_4, sono molto più forti; in orbite con un semiasse maggiore elevato, gli effetti dei terzi corpi iniziano a diventare marcati mentre gli effetti delle armoniche terrestre si attenuano.

- aumento della presenza di orbite risonanti, instabili a lungo termine : ogni termine del polinomio di Legendre contiene informazioni sull' inclinazione e sulle frequenze di risonanza.

$$\dot{e} = -\frac{15}{2}\frac{K}{n}e\left(1-e^2\right)^{1/2}\left[AB\cos 2\omega - \frac{1}{2}\left(A^2-B^2\right)\sin 2\omega\right] \qquad K = \frac{\mu_F}{r_F^3} \qquad n = \sqrt{\frac{\mu_m}{a^3}}$$

$$\dot{r}_p = \frac{15}{2}\frac{K}{n}ae(1-e^2)^{1/2}\left[AB\cos 2\omega - \frac{1}{2}\left(A^2-B^2\right)\sin 2\omega\right] \qquad C = \frac{\partial\langle U_{2F}\rangle}{\partial I}$$

$$\dot{\Omega} = \frac{3KC}{4n(1-e^2)^{1/2}\sin i}\left[5Ae^2\sin 2\omega + B\left(2+3e^2-5e^2\cos 2\omega\right)\right]$$

$$\dot{I} = \frac{3KC}{4n(1-e^2)^{1/2}}\left[A\left(2+3e^2+5e^2\cos 2\omega\right)+5Be^2\sin 2\omega\right]$$

EFFETTI DI TERZO CORPO

$$
\begin{aligned}
\dot{e} = &-\frac{15}{4}\frac{K}{n}e\left(1-e^2\right)^{1/2}\times \\
&\left[\sin^4(\frac{1}{2}I)\left(\cos^4(\frac{1}{2}i_F)\sin 2\,(\Delta\Omega-u_F-\omega)+\sin^4(\frac{1}{2}i_F)\sin 2(\Delta\Omega+u_F-\omega)+\frac{1}{2}\sin^2(i_F)\sin 2(\Delta\Omega-\omega)\right)-\right. \\
&-\cos^4(\frac{1}{2}I)\left(\cos^4(\frac{1}{2}i_F)\sin 2\,(\Delta\Omega-u_F+\omega)+\sin^4(\frac{1}{2}i_F)\sin 2\,(\Delta\Omega+u_F+\omega)+\frac{1}{2}\sin^2(i_F)\sin 2(\Delta\Omega+\omega)\right) \\
&+\cos^2(\frac{1}{2}I)\sin I\sin(i_F)(\cos(i_F)\sin(\Delta\Omega+2\omega)+\cos^2(i_F)\sin(2u_F-\Delta\Omega-2\omega)+\sin^2(\frac{1}{2}i_F) \\
&\times\sin(\Delta\Omega+2u_F+2\omega))+\sin^2(\frac{1}{2}I)\sin I\sin(i_F) \\
&\times(cos(i_F)\sin(\Delta\Omega-2\omega)+\cos^2(i_F)\sin(2u_F-\Delta\Omega+2\omega)+\sin^2(\frac{1}{2}i_F)\sin(\Delta\Omega+2u_F-2\omega)) \\
&-\frac{3}{8}\sin^2(I)\sin^2(i_F)(\sin 2(\omega+u_F)+\sin 2(\omega-u_F)) \\
&\left.-\frac{1}{2}\sin^2(I)(1-\frac{3}{2}\sin^2(i_F))\sin 2\omega\right]
\end{aligned}
$$

considerando $r_a < r_{corpo}$, il secondo termine del polinomio di Legendre contiene 15 possibili casi in cui si possa verificare una risonanza, per cui , considerando la presenza del Sole, di Fobos e Deimos , vi sono 43 possibili risonanze , che si manifestano con delle particolari inclinazioni, in linea teorica.

$$
\begin{aligned}
\Delta\dot{\Omega}\pm\dot{u}_F\pm\dot{\omega}&=0 \\
2\dot{u}_F\pm\Delta\dot{\Omega}\pm 2\dot{\omega}&=0 \\
\Delta\dot{\Omega}\pm\dot{\omega}&=0 \\
\Delta\dot{\Omega}\pm 2\dot{\omega}&=0 \\
\dot{\omega}\pm\dot{u}_F&=0 \\
\dot{\omega}&=0
\end{aligned}
$$

(condizioni di risonanza date da Fobos)

Conclusioni e osservazioni finali

- Le oscillazioni nel breve periodo delle variabili (dipendenza da f), rimosse dal problema ,per quanto minime, incidono su gli effetti secolari e di lungo termine , per cui queste variabili a media nulla possono indurre effetti secolari e a lungo termine ; infatti le equazioni della dinamica presentano termini del tipo :
$$\frac{cos^h(I)}{a^m\sqrt{1-e^2}^n}$$

- Mediando l'hamiltoniana rispetto l' anomalia media, considerando solamente J2 e assumendo che le variabili siano indipendenti dall'anomalia vera ,si ricavano le stesse variazioni secolari di M, Ω e ω ricavate da Brouwer (1959), troncate al primo ordine, con il metodo di Lie .

- Analogamente , considerando solamente le perturbazioni di terzo corpo, si giunge alle stesse equazioni della dinamica ricavate da G. E. Cook (1962), ove si è giunti integrando nel periodo le equazioni planetarie di Lagrange

CONCLUSIONI E OSSERVAZIONI FINALI

termini secolari secondo Brouwer :

$$\dot{g} = 3 n_0 \gamma^2 \Delta\dot{g}, \quad \Delta\dot{g} = J_2 q + \frac{1}{8}\gamma^2 \left(J_2^2 q_{g2} - 5 J_4 q_{g3}\right) \qquad q = 5\theta^2 - 1, \qquad \gamma = -1/2\,(R/p)$$

$$\dot{h} = 3 n_0 \gamma^2 \Delta\dot{h}, \quad \Delta\dot{h} = \theta\left[J_2 q_{h1} + \frac{1}{8}\gamma^2 \left(J_2^2 q_{h2} - 5 J_4 q_{h3}\right)\right] \qquad q_{h1} = -2, \qquad p = a_0 \eta^2 .$$

$$\dot{l} = n_0 \left(1 + 3\gamma^2 \Delta\dot{l}\right) \quad \dot{l} = \eta\left[J_2 q_{l1} + \frac{1}{8}\gamma^2 \left(J_2^2 q_{l2} - 5 J_4 q_{l3}\right)\right] \qquad q_{l1} = 3\theta^2 - 1$$

equazione planetarie di Lagrange considerando solamente $\langle U_{J2} \rangle$:

$$\dot{a} = 0$$

$$\dot{e} = 0$$

$$\dot{I} = 0$$

$$\dot{M} = \sqrt{\frac{\mu_m}{a^3}} + \frac{3}{4}\frac{J_2\sqrt{\mu_m}{r_m}^2}{a^{3.5}\sqrt{(1-e^2)^3}}(3\cos^2(I) - 1)$$

$$\dot{\omega} = -\frac{3}{2}\frac{J_2\sqrt{\mu_m}{r_m}^2}{a^{3.5}(1-e^2)^2}(\frac{5}{2}\sin^2(I) - 2)$$

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2}\frac{J_2\sqrt{\mu_m}{r_m}^2}{a^{3.5}(1-e^2)^2}\cos(I)$$

...ammettendo delle piccole oscillazioni delle variabili rispetto f si ha :

$$H(q; f) = H(\tilde{q}; f) + \nabla H(\tilde{q}; f) \cdot (\underline{q} - \underline{\tilde{q}})$$

$$q = (a, e, I, M, \Omega, \omega) \qquad \tilde{q} = (\tilde{a}, \tilde{e}, \tilde{I}, \tilde{M}, \tilde{\Omega}, \tilde{\omega})$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Lagrange’s Planetary Equations, Dmitry Savransky ,Cornell University MAE 6720/ASTRO 6579, Spring 2022.

[2] Note on Cid's radial intermediary and the method of averaging, Deprit Andre, Ferrer Sebastian, September 1987.

[3] The Geophysical Journal of the ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY Luni-Solar Perturbations of the Orbit of an Earth Satellite, G. E. Cook,

April 1962.

[4] Modification of Brouwer’s solutions for artificial satellites to include small eccentricities and inclinations ,

Paul B. Davenport, January 1965.

[5] Orbital Mechanics with Numerit, ‘’Frozen orbit design’’,

Eagle, C. David, 21 November 2011