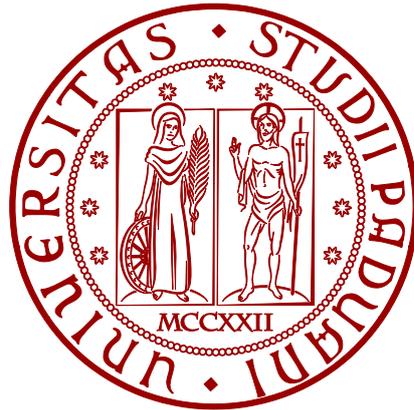


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

—
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

—
TESI DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA
DELL'INFORMAZIONE



STUDIO IN MATLAB/SIMULINK DI UN SISTEMA DI CONTROLLO PER SOSPENSIONI ATTIVE

RELATORE: Prof. Alessandro Beghi

LAUREANDA: Elena Bergamo

Data di laurea: 26 settembre 2013

Anno accademico 2012/2013

Abstract

L'obiettivo di questo elaborato è quello di presentare un'analisi completa sul funzionamento del sistema di sospensione di un autobus. L'analisi verrà condotta attraverso lo studio di un modello semplificato *quarter-car* e, tramite l'ausilio del software Matlab™, verranno valutate le prestazioni del sistema in seguito all'applicazione di diversi disturbi che rappresenteranno il suolo stradale irregolare. Si progetteranno vari controllori usando metodi di controllo differenti: lo studio della risposta in frequenza con Bode e Nyquist, del luogo delle radici e la progettazione di un controllore di tipo PID. Si concluderà lo studio con la simulazione del sistema attraverso Simulink.

Ringrazio il mio relatore, gli amici per avere creduto in me e i dott. Carlo Menegazzo e Luca Ranela per la positività e la presenza costante.

Indice

Introduzione.....	9
CAPITOLO 1- MODELLIZZAZIONE.....	11
1.1 Modello matematico.....	11
1.2 Equazioni del moto e funzioni di trasferimento	12
1.3 Risposta in catena aperta e stabilità	14
CAPITOLO 2- ANALISI CON BODE E NYQUIST	19
2.1 Risposta in frequenza e sua rappresentazione grafica	19
2.2 Analisi e progettazione del controllore con Bode.....	20
2.2.1 Analisi in catena aperta di G_1 con Bode	20
2.2.2 Progetto del controllore $C_1(s)$	23
2.2.3 Progetto del controllore $C_2(s)$	24
2.3 Analisi con il diagramma di Nyquist	32
CAPITOLO 3- ANALISI CON IL LUOGO DELLE RADICI	37
3.1 Metodo del luogo delle radici	37
3.2 Progettazione del controllore	38
3.3 Filtro elimina-banda	40
3.4 Risposta al gradino in catena chiusa	42
CAPITOLO 4- PID.....	45
4.1 Controllore PID.....	45
4.2 Progettazione	46
CAPITOLO 5- ANALISI CON SIMULINK	49
5.1 Schema a blocchi e risposta in catena aperta.....	49
5.2 Simulazione con controllore ad hoc.....	50
CAPITOLO 6- CONCLUSIONI	53
Bibliografia	57

Introduzione

Gli autoveicoli sono dotati di un sistema di *sospensioni* che, oltre a sorreggere lo chassis del veicolo, deve isolarlo dalle irregolarità del terreno per migliorare il comfort di marcia.

Le sospensioni tendono a limitare le accelerazioni verticali della massa sospesa quando il veicolo transita su una sede stradale che presenta delle irregolarità.

Sospensioni troppo “morbide” migliorano il comfort in quanto si deformano molto rapidamente assorbendo (e quindi compensando) le asperità e le brusche variazioni di quota della sede stradale, ma rischiano di ridurre la tenuta di strada a causa delle ampie oscillazioni verticali del veicolo e delle conseguenti ampie fluttuazioni della forza di contatto tra pneumatico e strada.

Viceversa una taratura troppo rigida garantisce migliore aderenza ma provoca un aumento delle sollecitazioni verticali sulla cassa del veicolo (basso comfort di marcia).

Si vorrebbe simultaneamente che le sospensioni fossero “morbide” verso le asperità del terreno, e “rigide” nei confronti di forze esterne e/o inerziali. Appare chiaro come siano due specifiche contrastanti. Una sintesi efficace si traduce pertanto nell'identificazione di un buon compromesso tra le due specifiche.

Le sospensioni attive, che meglio adempiono a questo compito, sono costituite da un sistema molla-smorzatore e da un attuatore in grado di generare una forza interna $u(t)$ variabile nel tempo tra la cassa del veicolo e la ruota. Tale sistema consente, attraverso una opportuna “modulazione” di tale forza, di stabilizzare il movimento e ottenere buone prestazioni. Il problema di come “calibrare” tale forza sulla base delle misure disponibili è un tipico problema di controllo che, per le sue peculiarità che si indagheranno nel seguito, si presta alla applicazione delle tecniche di analisi e sintesi per sistemi lineari tempo-invarianti.

L'obiettivo di questo elaborato è quello di presentare un'analisi completa sul funzionamento del sistema di sospensione di un autobus. L'analisi verrà condotta attraverso lo studio di un modello semplificato *quarter-car* e, tramite l'ausilio del software Matlab™, verranno valutate le prestazioni del sistema in seguito all'applicazione di diversi disturbi, che rappresenteranno il suolo stradale irregolare.

CAPITOLO 1- MODELLIZZAZIONE

1.1 Modello matematico

Il modello *quarter-car* descrive la dinamica verticale di un quarto dell'intero veicolo, concentrando l'analisi su una singola ruota e sul relativo sistema di sospensioni. Il veicolo è in sostanza diviso in quattro sezioni che vengono modellate separatamente trascurando le mutue interazioni. Così facendo è possibile studiare esclusivamente movimenti traslatori verticali.

Una modellizzazione abbastanza semplice ma che rispecchia con buona approssimazione il comportamento unidimensionale della sospensione di una delle quattro ruote dell'autobus è il sistema massa-molla-smorzatore.

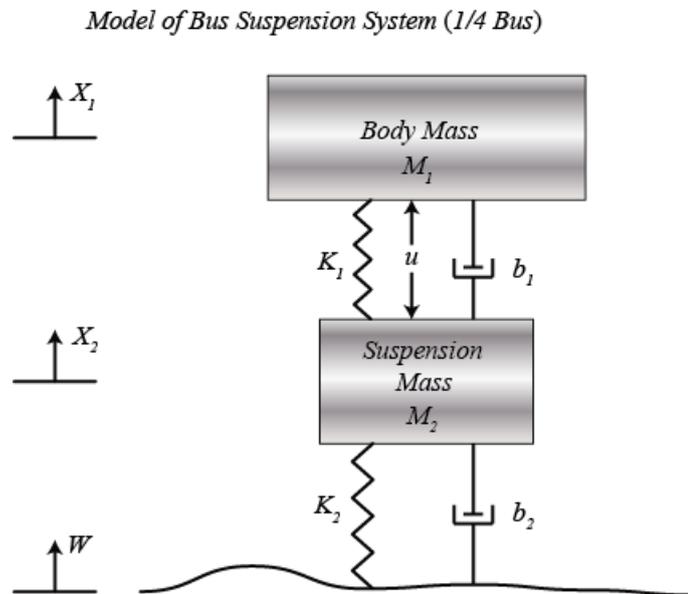


Figura 1.1: Modello di una delle quattro sospensioni

Le grandezze fisiche coinvolte, a cui si assegnano valori empirici e fedeli alla realtà, sono:

m_1 massa di un quarto dell'autobus [2500 kg]

m_2 massa della sospensione [320 kg]

k_1 costante elastica della sospensione [80000 N/m]

k_2 costante elastica della ruota e del pneumatico [500000 N/m]

v_1 costante di smorzamento della sospensione [350 Ns/m]

v_2 costante di smorzamento della ruota e del pneumatico [15020 Ns/m]

mentre le variabili considerate sono:

- x_1 posizione dell'autobus rispetto al centro
- x_2 posizione della sospensione rispetto al centro
- ω irregolarità del terreno rispetto al piano
- u forza di controllo che si andrà a progettare

Un buon sistema di sospensioni di un autobus deve assicurare una buona tenuta di strada e addolcire il passaggio del mezzo su un terreno irregolare: quando esso transita sopra una cunetta o un buco, la sospensione deve essere in grado di allungarsi o contrarsi per far sì che i fenomeni oscillatori vengano dissipati velocemente e non siano percepiti dai passeggeri.

Lo scopo di questo studio è quello di progettare dei controllori che assicurino la riduzione in ampiezza e durata delle oscillazioni. Facendo riferimento al modello matematico descritto prima risulta necessario apportare delle ulteriori semplificazioni che non compromettono in ogni caso la fedeltà dei risultati ottenuti. Tali approssimazioni, infatti, mantengono il sistema sufficientemente accurato e adatto al nostro studio.

Saranno formulate le seguenti ipotesi semplificative:

- la deformazione del pneumatico $x_2 - \omega$ è considerata trascurabile.
- a causa della difficoltosa misurabilità della distanza $x_1 - \omega$ l'uscita del sistema sarà la distanza $x_1 - x_2$.

Per simulare l'uscita dell'autobus da una buca, considereremo l'irregolarità del terreno $\omega(t)$ come un segnale a gradino: questo rappresenta l'ingresso del sistema massa-molla-smorzatore.

Le specifiche del problema che rappresentano la situazione ideale che si vuole ottenere impongono una *sovraelongazione* massima del 5% e un *tempo di assestamento* di al massimo 5 secondi poiché si vorrà che l'uscita inseguia quanto più fedelmente possibile l'ingresso, se non per tutta la durata dell'osservazione, quantomeno a regime.

1.2 Equazioni del moto e funzioni di trasferimento

Dalla legge di Newton applicata al modello mostrato in Figura 1.1 si può ottenere il sistema di equazioni differenziali che regola la dinamica del sistema:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -v_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1(x_1 - x_2) + u \\ m_2 \ddot{x}_2 = v_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2) + v_2(\dot{\omega}_1 - \dot{x}_2) + k_2(\omega - x_2) - u \\ y = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Dove $v_i(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ rappresenta la forza esercitata dallo smorzatore, proporzionale alla differenza di velocità della massa dell'autobus e della sospensione e $k_i(x_1 - x_2)$ rappresenta la forza esercitata dalla molla, proporzionale alla distanza delle due masse. Imponendo nulle le condizioni iniziali, il sistema rappresenta la situazione in cui la ruota è appena fuoriuscita da una buca nel terreno.

Dal sistema di equazioni differenziali si possono ricavare, prendendone le trasformate di Laplace, due funzioni di trasferimento: una relativa all'ingresso $u(t)$, forza di controllo, ed una relativa all'ingresso $\omega(t)$, livello del manto stradale. Le due funzioni di trasferimento, indicate con $G_1(s)$ e $G_2(s)$ si ricavano come segue:

$$\begin{aligned}(m_1 s^2 + v_1 s + k_1)X_1(s) - (v_1 s + k_1)X_2(s) &= U(s) \\ -(v_1 s + k_1)X_1(s) + (m_2 s^2 + (v_1 + v_2)s + (k_1 + k_2))X_2(s) &= \\ &= (v_2 s + k_2)W(s) - U(s)\end{aligned}$$

e, proseguendo sotto forma di matrici, si può scrivere il sistema come:

$$A \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = B$$

$$A = \begin{bmatrix} m_1 s^2 + v_1 s + k_1 & -(v_1 s + k_1) \\ -(v_1 s + k_1) & m_2 s^2 + (v_1 + v_2)s + (k_1 + k_2) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} U(s) \\ (v_2 s + k_2)W(s) - U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & v_2 s + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ W(s) \end{bmatrix}$$

Moltiplicando da entrambe le parti per l'inversa della matrice A , A^{-1} , otteniamo l'espressione esplicita del vettore $[X_1(s) \quad X_2(s)]^T$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} &= \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} m_2 s^2 + (v_1 + v_2)s + (k_1 + k_2) & v_1 s + k_1 \\ v_1 s + k_1 & m_1 s^2 + v_1 s + k_1 \end{bmatrix} B = \\ &= \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} m_2 s^2 + v_2 s + k_2 & v_1 v_2 s^2 + (v_1 k_2 + v_2 k_1)s + k_1 k_2 \\ -m_1 s^2 & m_1 v_2 s^3 + (m_1 k_2 + v_1 v_2)s^2 + (v_1 k_2 + v_2 k_1)s + k_1 k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ W(s) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Si possono quindi ricavare le due funzioni di trasferimento richieste $G_1(s)$ e $G_2(s)$, ponendo identicamente nulle in maniera alterna le trasformate dei segnali d'ingresso:

(1.2)

$$G_1(s) = \frac{X_1(s) - X_2(s)}{U(s)} = \frac{(m_1 + m_2)s^2 + v_2 s + k_2}{\det A}$$

(1.3)

$$G_2(s) = \frac{X_1(s) - X_2(s)}{W(s)} = \frac{-m_1 v_2 s^3 - m_1 k_2 s^3}{\det A}$$

Dove si ricava grazie a semplici calcoli

$$\det A = m_1 m_2 s^4 + (m_1(v_1 + v_2) + (m_2 v_1))s^3 + \\ + ((m_1(k_1 + k_2) + (m_2 k_1) + (v_2 v_1))s^2 + ((v_1 k_2) + (v_2 k_1))s + k_2 k_1$$

1.3 Risposta in catena aperta e stabilità

Per un primo approccio al problema è utile studiare il sistema in catena aperta, cioè studiare la sua risposta ad un data forza d'ingresso $U(s)$ senza l'applicazione di nessun controllo in retroazione.

Questo tipo di analisi deve però prima essere preceduta dallo studio della *stabilità* del sistema fisico poiché se questa non fosse verificata non avrebbe senso calcolare le risposte ai vari ingressi.

Fortunatamente un sistema fisico come quello in esame è sempre stabile, come è facile verificare grazie alla funzione $\text{roots}(\det A)$ del software *Matlab™* che calcola le radici del polinomio $\det A$, ottenendo:

$$\begin{aligned} p_1 &= -23.9758 + i35.1869 & p_2 &= -23.9758 - i35.1869 \\ p_3 &= -0.1098 + i5.2504 & p_4 &= -0.1098 - i5.2504 \end{aligned}$$

Si nota che sono tutte radici a parte reale negativa; il polinomio $\det(A)$ è quindi di Hurwitz e ciò assicura che entrambe le funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_2(s)$ siano stabili e che il sistema sia BIBO-STABILE.

Tale risultato è di enorme importanza in quanto fa riferimento alla capacità del sistema di riportarsi spontaneamente in una condizione di equilibrio quando se ne discosta temporaneamente e risulta essere condizione necessaria e sufficiente a garantire che il sistema risponda ad un ingresso limitato con un'uscita forzata limitata.

Ci si può ora occupare dello studio della risposta in catena aperta per il quale si applicano agli ingressi $u(t)$ e $\omega(t)$ un gradino rispettivamente di ampiezza 100N e 0.1N.

Di seguito si riporta il codice *Matlab™* con il quale è possibile ottenere i grafici che mostrano tali risposte; nella prima parte si inizializzano le grandezze fisiche del sistema, segue la costruzione delle funzioni di trasferimento e la stampa delle risposte al gradino.

Codice 1.1 Risposta in catena aperta

```
m1 = 2500;  
m2 = 320;  
k1 = 80000;  
k2 = 500000;  
v1 = 350;  
v2 = 15020;
```

```

s = tf('s');
G1 =
((m1+m2)*s^2+v2*s+k2)/((m1*s^2+v1*s+k1)*(m2*s^2+(v1+v2)*s+(k1+k2))-
(v1*s+k1)*(v1*s+k1));
G2 = (-m1*v2*s^3-
m1*k2*s^2)/((m1*s^2+v1*s+k1)*(m2*s^2+(v1+v2)*s+(k1+k2))-
(v1*s+k1)*(v1*s+k1));

[Y1 T1]=step(100*G1,50); %risposta di G1 ad un gradino di ampiezza 100
[Y2 T2]=step(0.1*G2,50); %risposta di G2 ad un gradino di ampiezza 0.1

figure(1)
plot(T1,Y1)
title('Risposta al gradino di ampiezza 100')
xlabel('t [sec]')
ylabel('ampiezza [m]')
axis([0 50 0 0.0025])

figure(2)
plot(T2,Y2)
title('Risposta al gradino di ampiezza 0.1')
xlabel('t [sec]')
ylabel('ampiezza [m]')
axis([0 50 -0.1 0.1])

```

Il codice riportato permette di visualizzare le seguenti figure

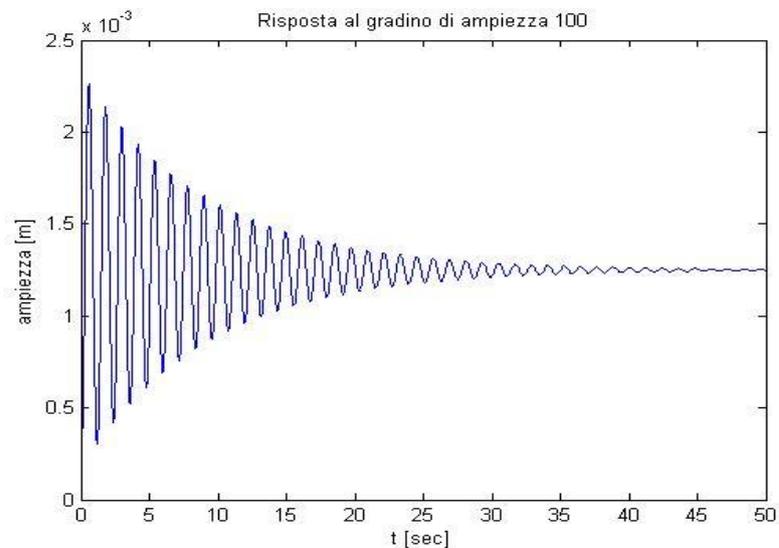


Figura 1.2

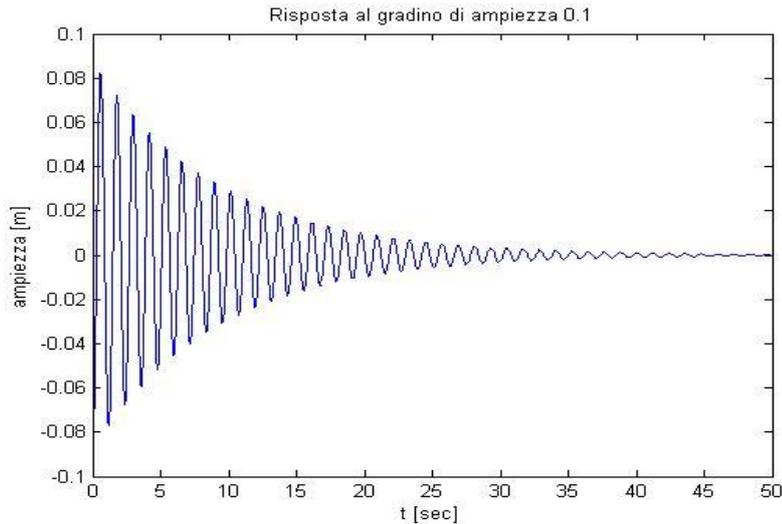


Figura 1.3

La Figura 1.2 rappresenta la risposta di $G_1(s)$ quando $u(t) = 100\delta_{-1}(t)$ e da essa si può osservare che il sistema raggiunge il *valore a regime* $100 \cdot G_1(0) = \frac{100 \cdot k_2}{k_1 k_2} = \frac{100}{k_1} = 1.25 \cdot 10^{-3}m$ con moto oscillatorio smorzato (dovuto alla coppia di poli complessi coniugati di G_1) dopo un tempo molto lungo, il cosiddetto *tempo d'assestamento* infatti è superiore a 50s, valore che si intende ridurre con l'utilizzo di un controllore.

Allo stesso modo la Figura 1.3 rappresenta la risposta di $G_2(s)$ quando $\omega(t) = 0.1\delta_{-1}(t)$ ovvero rappresenta il comportamento del sistema quando l'autobus passa su una cunetta di 10cm. Si nota subito che anche in questo caso il *tempo d'assestamento* è superiore a 50s mentre la *sovraelongazione* massima è pari a 0.08m ed è seguita da una contrazione di 0.077m; ciò porta ad un'oscillazione massima percepita di ben $0.157m \cong 16cm$ nel primo secondo di transitorio!

Come è evidente quindi il sistema che lavora senza retroazione non soddisfa nessuna delle specifiche e ha prestazioni molto deludenti. Per risolvere questi problemi è necessario introdurre un controllore in feedback e portare il nostro sistema da catena aperta a catena chiusa, come mostrato nel seguente schema a blocchi.

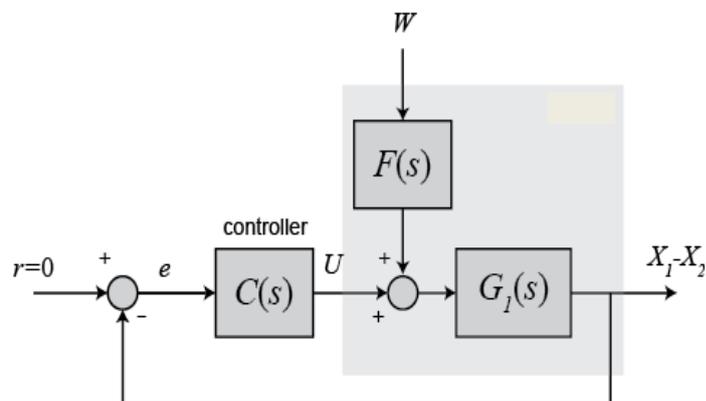


Figura 1.4

Lo schema in Figura 1.4 mostra il sistema in cui si mette in evidenza la funzione di trasferimento dell'intero impianto che si dimostra essere $G_1(s)$ sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti per sistemi lineari e imponendo nullo il segnale $\omega(t)$ per cui $X_1(s) - X_2(s) = U(s)G(s)$ dove $G(s) = G_1(s)$ per quanto visto da (1.2).

Imponendo invece nullo il segnale $u(t)$, sarà allo stesso modo necessario che si abbia $X_1(s) - X_2(s) = W(s)F(s)G_1(s)$ dove per (1.3), $F(s)G_1(s) = G_2(s)$.

La funzione di trasferimento $F(s)$ risulterà quindi:

$$F(s) = \frac{G_2(s)}{G_1(s)} = \frac{\frac{\text{numeratore } G_2}{\text{denominatore } G_2}}{\frac{\text{numeratore } G_1}{\text{denominatore } G_1}} = \frac{\text{numeratore } G_2}{\text{numeratore } G_1} = \frac{-m_1 v_2 s^3 - m_1 k_2 s^2}{(m_1 + m_2)s^2 + v_2 s^2 + k_2}$$

ricordando che $\text{denominatore}(G_1) = \text{denominatore}(G_2) = \det A$.

Per proseguire l'analisi definiamo in *Matlab*[™] la funzione $F(s)$ con il codice che segue

Codice 1.2

```
num1=[(m1+m2) v2 k2];
den1=[(m1*m2) (m1*(v1+v2))+(m2*v1) (m1*(k1+k2))+(m2*k1)+(v1*v2)
(v1*k2)+(v2*k1) k1*k2];

num2=[-(m1*v2) -(m1*k2) 0 0];
den2=[(m1*m2) (m1*(v1+v2))+(m2*v1) (m1*(k1+k2))+(m2*k1)+(v1*v2)
(v1*k2)+(v2*k1) k1*k2];

numf=num2;
denf=num1;
F=tf(numf,denf);
```

Lo studio proseguirà nei prossimi capitoli con la progettazione di diversi tipi di controllori per il sistema di Figura 1.4.

CAPITOLO 2- ANALISI CON BODE E NYQUIST

2.1 Risposta in frequenza e sua rappresentazione grafica

In questo capitolo ci si occupa della progettazione del controllore tramite studio della risposta in frequenza del sistema e grazie alla sua rappresentazione coi diagrammi di Bode e Nyquist. Si danno prima dell'analisi alcune nozioni sull'argomento.

Si definisce risposta in frequenza la funzione complessa della variabile reale ω , $G(j\omega)$ $\omega > 0$ che corrisponde alla funzione di trasferimento $G(s)$ per $s=j\omega$.

Tale funzione è rappresentabile in vari modi, i più famosi dei quali sono i diagrammi cartesiani di Bode e quello polare di Nyquist.

I *diagrammi di Bode* sono una coppia di diagrammi cartesiani della risposta in frequenza, in cui le scale degli assi dell'ascissa e dell'ordinata sono scelte secondo un opportuno criterio che facilita il tracciamento dei diagrammi.

Sia nel diagramma del modulo che nel diagramma della fase l'asse delle ascisse (ossia l'asse delle pulsazioni) è in scala logaritmica dove la distanza tra due pulsazioni aventi rapporto dieci prende il nome di decade .

Nel diagramma del modulo si rappresenta sull'asse delle ordinate il modulo in decibel, ossia il logaritmo in base 10 del modulo, moltiplicato per il fattore 20:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(|G(j\omega)|)$$

I valori del modulo in decibel vengono poi rappresentati su una scala lineare pertanto il diagramma del modulo viene tracciato su una carta semilogaritmica.

Nel diagramma della fase si rappresenta sull'asse delle ordinate la fase della risposta in frequenza in gradi, su scala lineare e quindi risulta anch'esso un grafico semilogaritmico.

$$\angle G(j\omega) = \arctan \frac{\text{Im}(G(j\omega))}{\text{Re}(G(j\omega))}$$

Il *diagramma di Nyquist* è un'altra possibile raffigurazione bidimensionale che traccia sul piano complesso la risposta in frequenza, vista come una curva parametrica in funzione della variazione della pulsazione: necessariamente dovrà essere indicato il verso di percorrenza.

2.2 Analisi e progettazione del controllore con Bode

Progettare un controllore con l'osservazione dei diagrammi di Bode consiste nel tracciare i diagrammi della risposta in frequenza in catena aperta e valutare quali modifiche apportare alla frequenza di attraversamento ω_A e alla fase raggiunta a questa particolare frequenza. In particolare si definisce *frequenza di attraversamento* la frequenza per la quale la funzione modulo passa per 0 dB e *margin di fase* la distanza angolare dall'angolo piatto $m_\varphi = \pi + \arg G(j\omega_A)$.

Nel dominio della frequenza, possiamo considerare la *convoluzione* di due sistemi come il prodotto delle loro risposte in frequenza; pertanto studiare il comportamento in catena aperta di una struttura composta da un controllore e un sistema ingresso/uscita di funzioni di trasferimento $C(s)$ e $G(s)$ è analogo allo studio di un sistema equivalente di funzione di trasferimento $\widetilde{G}(s) = C(s)G(s)$. Le specifiche di progetto riguarderanno quindi la struttura complessiva. Considerando quindi un sistema retroazionato con funzione di trasferimento in catena aperta $\widetilde{G}(s)$ è facilmente dimostrabile che esso è equivalente ad un sistema *non* retroazionato con funzione di trasferimento $W(s)$ data da:

$$W(s) = \frac{\widetilde{G}(s)}{1 + \widetilde{G}(s)}$$

Di seguito si passa all'analisi di G_1 in catena aperta, primo passo necessario per la progettazione di un controllore che ne migliori le prestazioni.

2.2.1 Analisi in catena aperta di G_1 con Bode

Grazie al software *Matlab*[™] per prima cosa si visualizzano i diagrammi di Bode del modulo e della fase della funzione G_1 , ottenuti grazie al seguente codice :

Codice 2.1 Tracciamento diagrammi di Bode di G_1

```
bodeasin(numeratore_G1, detA, 0.1, 1000, 'mod')
bodeasin(numeratore_G1, detA, 0.1, 1000, 'arg')
```

Si ottengono i due diagrammi in figura 2.1 che mostrano sia il grafico reale (blu) che quello asintotico (verde) della risposta in frequenza $G_1(j\omega)$.

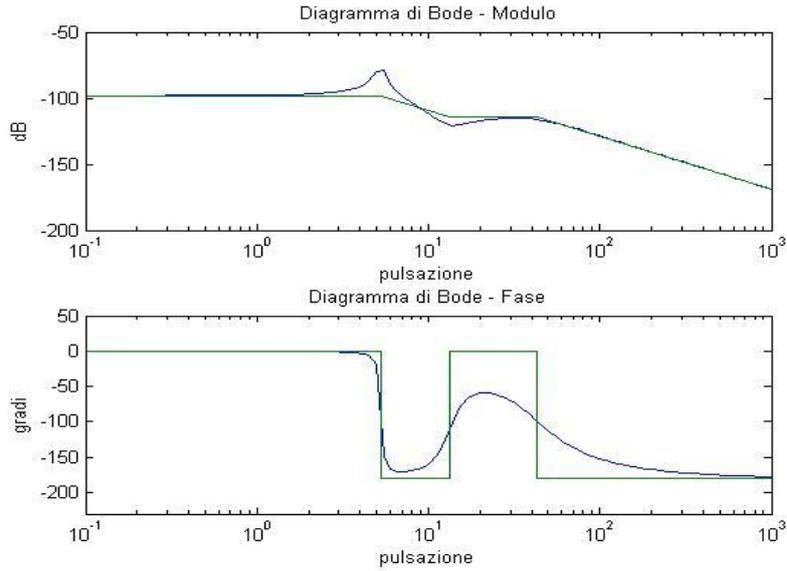


Figura 2.1 Diagrammi di Bode di G_1 .

Si vede che G_1 in catena aperta non ha frequenza di attraversamento poiché il suo diagramma del modulo sta sempre sotto i -75dB e di conseguenza non ha senso parlare di margine di fase. Un ingrandimento del picco del grafico è mostrato in Figura 2.2 .

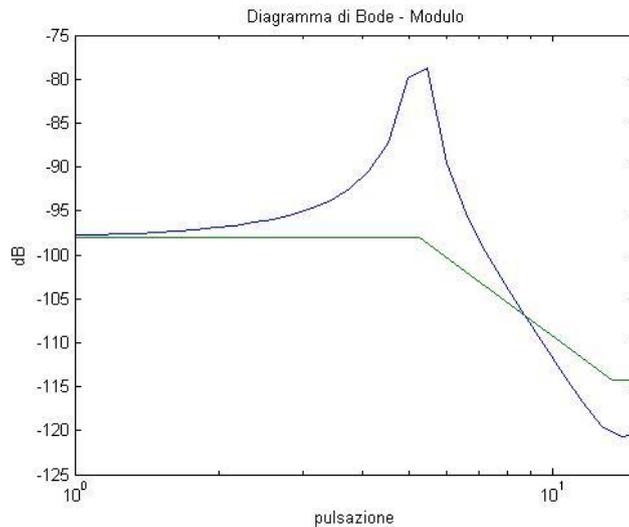


Figura 2.2 Ingrandimento del diagramma del modulo di G_1 .

Si passa ora alla progettazione del controllore che dovrà intervenire su G_1 per migliorare errore a regime, tempo d'assestamento e sovraelongazione. Per semplicità si considera il controllore di funzione di trasferimento $C(s)$ come il prodotto di due componenti: $C(s) = C_1(s) \cdot C_2(s)$.

Il progetto del controllore ha come scopi principali :

- Garantire la stabilità di $\overline{G}(s)$, dove $\overline{G}(s) = C_1(s) \cdot G_1(s)$
- Ottenere buone prestazioni a regime
- Ottenere buone prestazioni in transitorio

Le funzioni $C_1(s)$ e $C_2(s)$ adempiono separatamente ad ottenere tali fini. In particolare:

- $C_1(s)$ è del tipo $\frac{K_B(C_1)}{s^{k-h}}$ dove $K_B(C_1)$ è il guadagno di Bode del solo controllore C_1 e permette di agire sull'errore a regime mentre il denominatore s^{k-h} indica quanti integratori andranno utilizzati e serve a definire il *tipo* k che la funzione deve avere (dove h = numero degli integratori già presenti in G_1). Questo è un parametro molto importante: in un sistema retroazionato il numero di integratori complessivo definisce il numero di segnali ai quali il sistema reagisce con errore di regime permanente nullo.
- $C_2(s)$ è una funzione di trasferimento stabile che introduce zeri e poli a parte reale negativa al fine di ottenere la frequenza di attraversamento e il margine di fase desiderati.

Si sintetizza in Tabella 2.1 il comportamento della risposta di una generica $W(s)$ a regime in funzione dei segnali canonici e se ne evidenzia il *tipo*.

Tabella 2.1

	TIPO 0 $W(0) \neq 1$	TIPO 1 $W(0) = 1$ $W^{[1]}(0) \neq 0$	TIPO 2 $W(0) = 1$ $W^{[1]}(0) = 0$ $W^{[2]}(0) \neq 0$... $W(0) = 1$ $W^{[1]}(0) = 0$ $W^{[2]}(0) = 0$ $W^{[3]}(0) \neq 0$
$e_r(\delta_{-1}(t))$	finito $\neq 0$	0	0	0
$e_r(\delta_{-2}(t))$	∞	finito $\neq 0$	0	0
$e_r(\delta_{-3}(t))$	∞	∞	finito $\neq 0$	0
...	∞	∞	∞	finito $\neq 0$

In tabella sono indicati i valori dell'errore a regime e_r per i vari segnali canonici posti in ingresso, valori che dipendono da $W(0)$ e dalle sue derivate $W^{[i]}(0)$.

2.2.2 Progetto del controllore $C_1(s)$

La funzione di trasferimento $G_1(s)$, non presentando alcun polo nell'origine, è di tipo 0. Assumendo che si voglia un errore a regime dell'1% al gradino unitario, la funzione di trasferimento complessiva $\widetilde{G}(s) = C(s)G(s)$ dovrà essere di tipo 0: da qui si osserva subito che non è necessario aggiungere alcun integratore nella porzione di controllore $C_1(s)$, cioè si porrà $k - h = 0$.

Per quanto riguarda l'errore a regime, dalla Tabella 2.1 si sa che è finito $\neq 0$ e si può dimostrare che in un sistema retroazionato di tipo 0, questi non è altro che:

$$e_r(\text{gradino}) = 1 - W(0) = \frac{1}{1 - \widetilde{G}(0)} = 0.01$$

dove la $W(s)$ è data nel paragrafo 2.2. Ricavando dalla (1.2) il *guadagno di Bode* della $G_1(s)$ e imponendo che la componente $C_2(s)$ abbia guadagno unitario si può facilmente ricavare il guadagno di Bode della componente $C_1(s)$:

$$0.01(1 + C_1(0)G_1(0)) = 1$$

$$C_1(0) = \frac{1 - 0.01}{0.01G_1(0)} \approx \frac{100}{G_1(0)} = \frac{100}{1.25 \cdot 10^{-5}} = 8 \cdot 10^6$$

Il controllore $C_1(s)$ è quindi definito in tutte le sue parti e si ha:

$$C_1(s) = 8 \cdot 10^6$$

Ora sostituendo nel Codice 2.1 $G_1(s)$ con $\widetilde{G}(s)$ si ottengono i diagrammi di Bode di Figura 2.4.

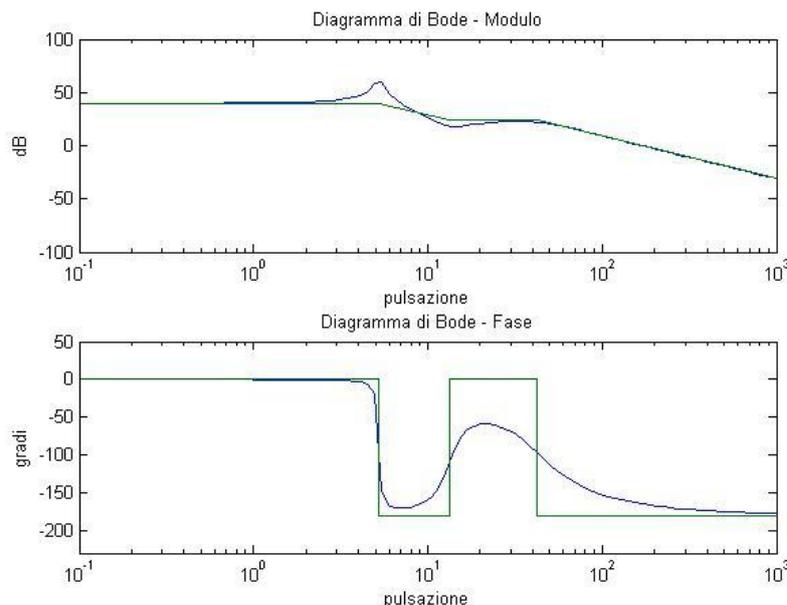


Figura 2.4 Diagrammi di Bode di $\widetilde{G}(s)$.

2.2.3 Progetto del controllore $C_2(s)$

Di solito progettare $C_2(s)$ sulla base dell'osservazione dei diagrammi di Bode consiste nell'averne come specifiche di progetto i parametri frequenza d'attraversamento e margine di fase. In questo caso invece i vincoli imposti sono sulla sovraelongazione e sul tempo di assestamento ma in realtà esiste una relazione abbastanza stretta tra i vincoli richiesti: è possibile dimostrare che in un sistema retroazionato il prodotto tra il *tempo di salita* e la *banda passante* del sistema è costante e circa pari a 2, cioè:

$$B_p t_r \approx 2$$

Dove B_p è la *banda passante a 3dB* e t_r è il tempo di salita che definisce la velocità della risposta. Si cerca di ottenere un valore di t_r il più basso possibile poiché questo sta a significare che il sistema è pronto e reagisce con poco ritardo all'applicazione di un ingresso.

Un valore desiderabile per il tempo di salita potrebbe essere per esempio $t_r = 300ms$ che porta ad ottenere una banda passante

$$B_p \approx \frac{2}{0.30} = 6.667 \text{ rad/s}$$

Ricordando che la banda di un sistema retroazionato coincide con la frequenza di attraversamento si ottiene il primo vincolo:

$$\omega_A = 6.667 \text{ rad/s}$$

Per il secondo vincolo è sufficiente utilizzare la relazione tra margine di fase e sovraelongazione S che dalle specifiche è $S=5\%$ ottenendo:

$$m_\varphi = 1 - 0.8 \cdot S = 1 - 0.8 \cdot 0.05 = 0.96 \text{ rad} = 55^\circ$$

Ora che i parametri di progetto sono definiti occorre analizzare i diagrammi di Bode di $\overline{G(s)}$ per sapere quali modifiche apportare con il controllore.

Per ottenere la frequenza di attraversamento desiderata si osserva il diagramma di Bode del modulo. Tale frequenza è evidenziata in Figura 2.5 dove si riporta un dettaglio del diagramma del modulo di Figura 2.4 per capire di quanto sarà necessario alzare o abbassare il grafico per ottenere $\omega_A = 6.667 \text{ rad/s}$.

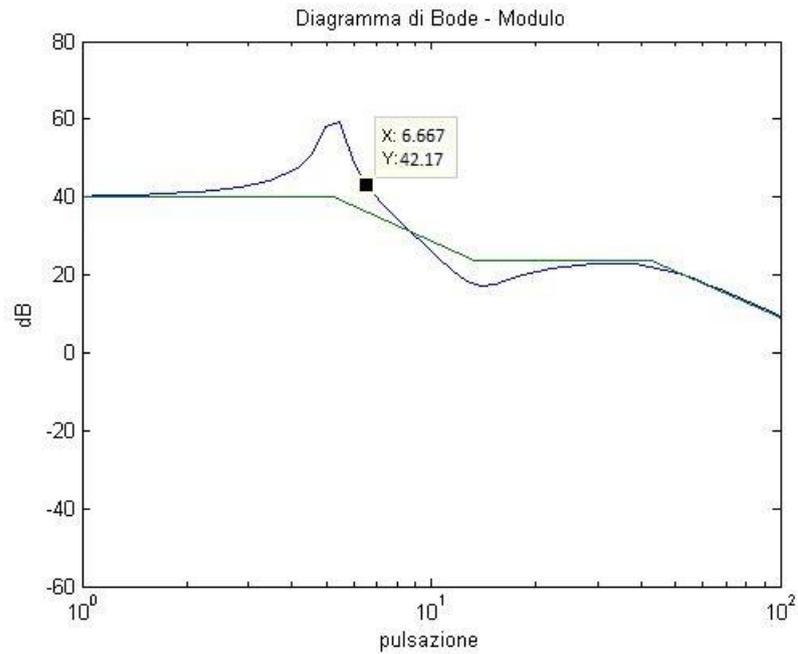


Figura 2.5 Dettaglio del modulo di $\widehat{G}(s)$.

In corrispondenza di $\omega = 6.667 \text{ rad/s}$ la funzione modulo non passa per 0dB bensì ha ordinata $Y = 42.17 \text{ dB} \approx 128.23$. La prima cosa che si vorrà ottenere con il controllore $C_2(s)$ sarà quindi:

- abbassare il modulo di 42.17dB in corrispondenza di $\omega = 6.667 \text{ rad/s} = \omega_{A_desiderata}$

Per il margine di fase desiderato si osserva invece il diagramma di Bode della fase di cui si riporta un dettaglio in Figura 2.6.

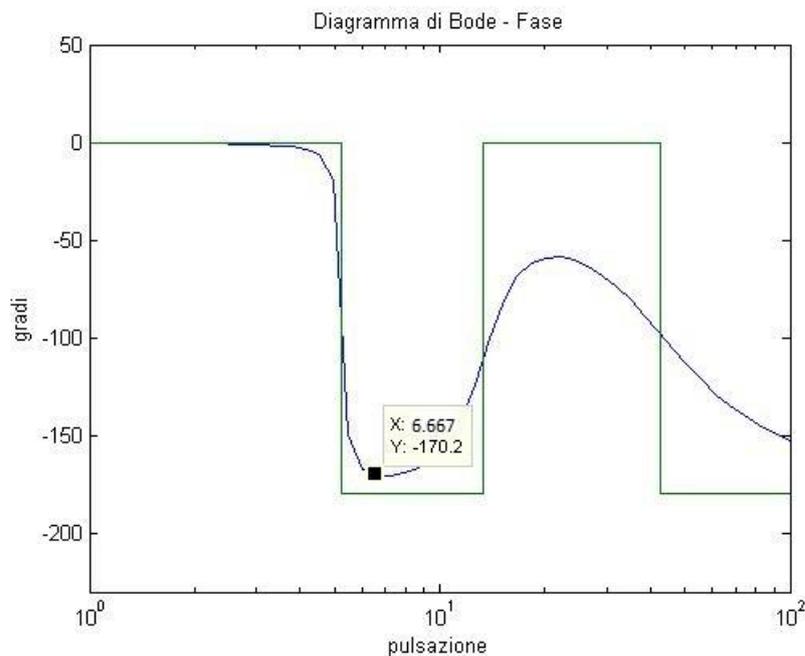


Figura 2.6 Dettaglio del diagramma della fase di $\widehat{G}(s)$.

Per $\omega = 6.667 \text{ rad/s}$ si osserva un $m_\varphi \approx 10^\circ$ visto che in quel punto l'ordinata vale $Y = -170.2^\circ$. Per ottenere un margine di fase di 55° sarà dunque necessario che il controllore sia progettato in modo da

- alzare la fase di $\approx 45^\circ$ in corrispondenza di $\omega = 6.667 \text{ rad/s}$

Questo tipo di correzioni sono compatibili con una semplice rete anticipatrice con lo zero centrato alla frequenza di attraversamento ω_A . La suddetta rete, infatti, essendo costituita da una coppia zero/polo posizionata con questa sequenza, fa sì che la fase si alzi di al massimo 90° .

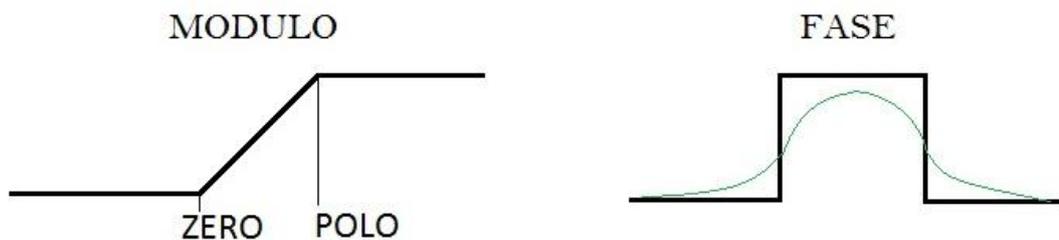


Figura 2.7 Schematico di una rete anticipatrice.

Poiché il diagramma reale delle fasi di una rete costituita da solo uno zero parte circa una decade prima dello zero stesso, e termina una decade dopo, vien da sé che la fase è aumentata di 45° alla frequenza dello zero cioè in corrispondenza di $\omega_{A, desiderata}$.

Per quanto riguarda il modulo, lo zero posizionato alla frequenza di attraversamento non lo modifica, se non dopo che è già stato attraversato il guadagno unitario.

Per ottenere che sia soddisfatto il primo vincolo quindi sarà necessario disporre un altro tipo di rete, cioè una rete attenuatrice o ritardatrice che avrà la funzione di abbassare il modulo dei circa 42dB richiesti. Tale rete è costituita da un polo e uno zero in sequenza.



Figura 2.8 Schematico di una rete ritardatrice.

La rete può essere posizionata in qualsiasi punto, purché prima della frequenza di attraversamento ω_A , ma risulta maggiormente conveniente posizionarla almeno due decadi prima della rete anticipatrice, così da non perturbarne la fase.

E' inoltre evidente che per abbassare di 42.17dB il modulo occorre posizionare polo e zero ad una distanza di poco maggiore di due decadi. Infine, per rendere il controllore stabile, si posizionerà il polo della rete anticipatrice in alta frequenza sempre per non alterare la fase attorno ad ω_A .

L'utilizzo combinato di queste due tipi di reti costituisce la cosiddetta *rete a sella*, data dal prodotto delle funzioni che realizzano tali reti, cioè

$$C_{sella} = C_{ant} \cdot C_{att}$$

in cui la rete attenuatrice precede quella anticipatrice.

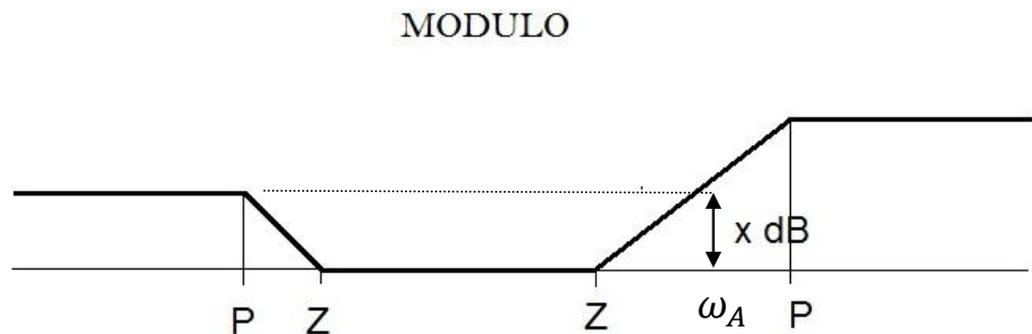


Figura 2.9 Schematico di una rete a sella.

In Figura 2.9 è presentata una generica rete a sella in cui si mostra come trarre beneficio sulla fase in ω_A e quindi sul margine di fase grazie al fatto che prima della frequenza di attraversamento vengono posti ben due zeri mentre il polo della rete anticipatrice è posto dopo in modo da non influire sulla fase.

In questo esempio è mostrato anche come una tale rete possa essere progettata in modo che in ω_A non si abbia nessun guadagno netto, scende e risale infatti, degli stessi xdB. Si tratta quindi di un tipo di controllo che si presta ottimamente al soddisfare le specifiche sui margini di fase.

In questo studio però un vincolo di progetto richiede anche la modifica del modulo quindi non si sfrutta la proprietà appena evidenziata e si pone $z_{ant} \equiv \omega_A$. Con le considerazioni fatte in precedenza sul posizionamento delle varie coppie zero/polo si può ora ipotizzare un primo esempio di controllore.

La rete anticipatrice avrà lo zero in ω_A e un polo in alta frequenza, per esempio in 10^4 .

La rete attenuatrice invece deve abbassare il modulo di $42\text{dB} = 10^{2.108}$ e poiché la semiretta ha pendenza $-20\text{dB}/\text{dec}$ sarà necessario che polo e zero distino tra loro 2.108 decadi.

Potendo posizionarla a piacimento si pongono il polo in 10^{-6} e lo zero in $10^{-3.892}$.

Il controllore di tipologia di rete a sella avrà dunque equazione:

$$C_2(s) = C_{ant} \cdot C_{att} = \frac{1 + \frac{s}{6.667}}{1 + \frac{s}{10^4}} \cdot \frac{1 + 10^{3.892}s}{1 + 10^6s}$$

Si ottiene quindi il controllore completo progettato con l'analisi di Bode:

$$C(s) = C_1(s) \cdot C_2(s) = 8 \cdot 10^6 \cdot \frac{1 + \frac{s}{6.667}}{1 + \frac{s}{10^4}} \cdot \frac{1 + 10^{3.892}s}{1 + 10^6s}$$

Con l'utilizzo di *Matlab™* e scrivendo il codice seguente si visualizzano i diagrammi di Bode del controllore a sella.

Codice 2.2

```
%controllore con rete a sella=rete anticipatrice+attenuatrice
C1 = 8*10^6
numCant = [6.667^-1 1]
denCant = [10^-4 1]
numCatt = [10^3.892 1]
denCatt = [10^6 1]
Cant = tf(numCant , denCant); % rete anticipatrice
Catt = tf(numCatt , denCatt); % rete attenuatrice

%Diagramma di Bode della rete a sella
numCsella = conv(numCant,numCatt);
denCsella = conv(denCant,denCatt);
bodeasin(numCsella, denCsella, 10^-6,10^4,'mod')
bodeasin(numCsella, denCsella, 10^-6,10^4,'arg')
controllore_sella = tf(C1*numCsella,denCsella);
```

Si ottengono i diagrammi di Bode del controllore $C(s)$ mostrati di seguito in Figura 2.10.

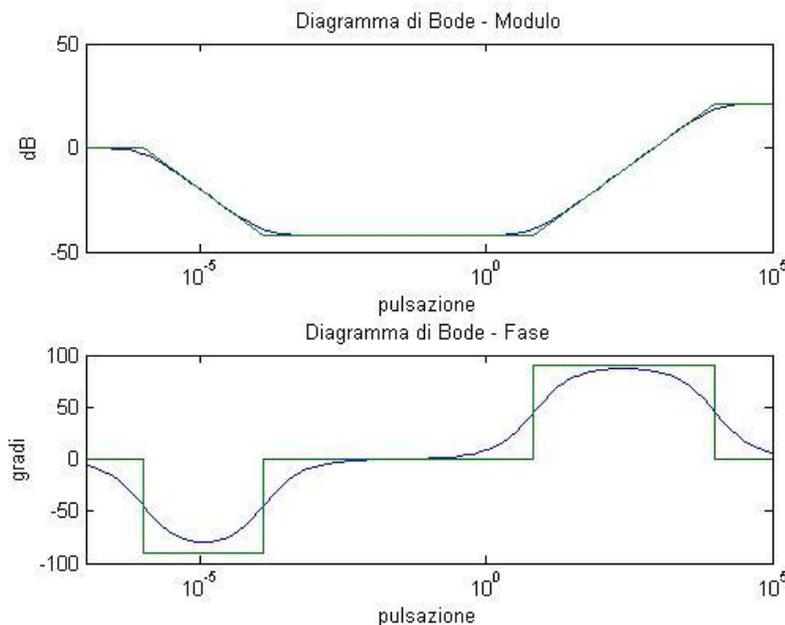


Figura 2.10 Diagrammi di Bode del controllore a sella.

Come si nota dal grafico del modulo, il ragionamento che ha portato a scegliere lo zero della rete anticipatrice in modo da abbassare il modulo di 42.17dB in realtà è giusto per il grafico asintotico ma non per quello reale. Il grafico reale infatti si abbassa di soli 39.14dB mentre per quanto riguarda la fase, facendo lo stesso

ragionamento, si nota che essa si alza di un po' meno di 45°. Tenendo conto di questo gap di 3.03dB si può riprogettare il controllore in modo da alzare il modulo non di 42.17dB bensì di 45.20dB=10^{2.26}. Ragionando come sopra quindi si avrà:

$$C'(s) = C_1(s) \cdot C'_2(s) = 8 \cdot 10^6 \cdot \frac{1 + \frac{s}{6.667}}{1 + \frac{s}{10^4}} \cdot \frac{1 + 10^{3.74}s}{1 + 10^6s}$$

Con $C'_2(s) = \frac{1+10^{3.74}s}{1+10^6s}$ dove si è posto lo zero in 10^{-3.74} perché polo e zero devono distare ora tra loro 2.26 decadi.

Codice 2.3

```
%secondo controllore a sella
C1 = 8*10^6
numCant = [6.667^-1 1]
denCant = [10^-4 1]
numCatt2 = [10^3.74 1]
denCatt2 = [10^6 1]
Cant = tf(numCant , denCant); % rete anticipatrice
Catt = tf(numCatt2 , denCatt2); % rete attenuatrice

numCsella2 = conv(numCant,numCatt2);
denCsella2 = conv(denCant,denCatt2);
controllore_sella2 = tf(C1*numCsella2,denCsella2);

%Diagramma di Bode del sistema retroazionato
numTOT = conv(C1*numCsella2,numeratore_G1);% numeratore di C(S)G1(S)
denTOT = conv(denCsella2,denA); % denominatore di C(S)G1(S)
bodeasin(numTOT, denTOT, 10^-1,10^4, 'mod')
bodeasin(numTOT, denTOT, 10^-1,10^4, 'arg')

%Risposta all'ingresso w
fdt_catena_chiusa = F*feedback(G1,controllore_sella2);
tempo = 0:0.01:7;
step(0.1*fdt_catena_chiusa,tempo)
```

In Figura 2.11 invece è mostrato il risultato ottenuto sulla risposta in frequenza del sistema con l'applicazione di tale controllore nella funzione $\widehat{G}(s) = C'(s)G_1(s)$.

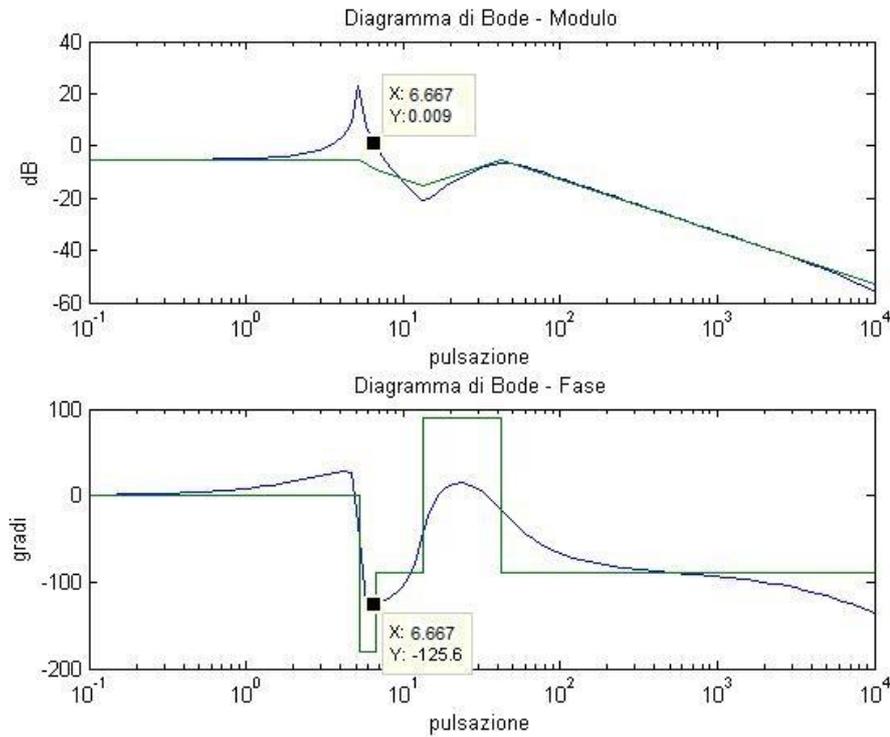


Figura 2.11 Diagrammi di Bode di $\overline{G}(s)$ in catena chiusa.

Risulta evidente che il compensatore costruito non soddisfa il requisito sulla sovralongazione e si nota come il margine di fase non sia esattamente di 55° , ma leggermente inferiore. Se si visualizza inoltre la risposta all'ingresso $\omega(t) = 0.1\delta_{-1}(t)$ in catena chiusa si vede che il tempo di assestamento è al limite del vincolo imposto, come mostrato nella seguente figura.

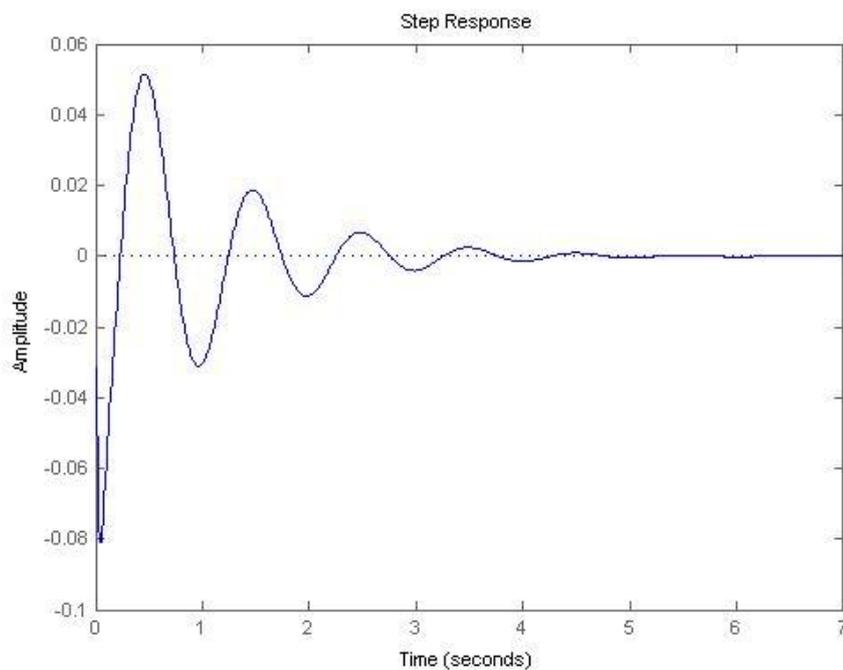


Figura 2.12 Risposta all'ingresso $\omega(t) = 0.1\delta_{-1}(t)$ in catena chiusa.

Si vuole quindi migliorare il controllore in modo da soddisfare meglio i vincoli imposti e in modo da avere un più sicuro margine d'errore sul tempo d'assestamento poiché quando si considera un modello matematico va tenuto conto che sono state applicate ipotesi semplificative e non sempre si hanno risultati che soddisfano queste idealità.

Per giungere ad un controllore maggiormente funzionale, si ridimensionano i parametri di progetto. E' probabile che le ipotesi che hanno condotto ai vincoli sul margine di fase e sulla frequenza di attraversamento fossero troppo ottimistiche perciò si suppone di abbassare il tempo di salita, per rendere più pronto il sistema: si considera $t_r = 0.2 s$.

Questo impone un aumento della banda passante e quindi della frequenza di attraversamento ottenendo $\omega'_A = 10 rad/s$. Ricavata questa frequenza è necessario ora riprogettare tutto il controllore, sia nella componente anticipatrice che ritardatrice.

Il margine di fase iniziale infatti è leggermente superiore ai 20° , perciò lo zero inizialmente posizionato alla frequenza di attraversamento porterà il margine di fase a più dei 55° richiesti. Inoltre viene modificata anche la costruzione della rete attenuatrice, in quanto per la frequenza è richiesto un abbassamento del modulo minore dei $42.17dB$ necessari precedentemente. Come si vede in Figura 2.13 infatti il modulo per la nuova frequenza di attraversamento vale $26.25dB$.

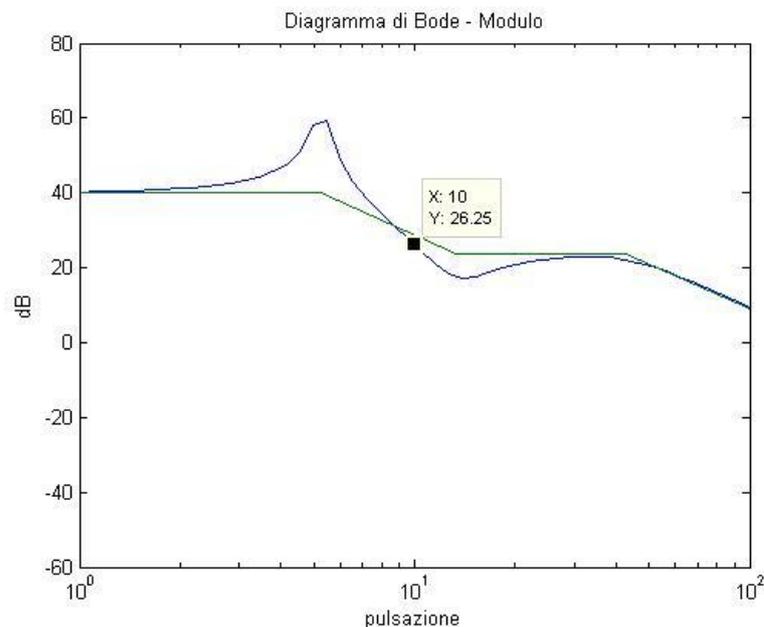


Figura 2.13 Dettaglio del modulo nella nuova ω_A .

Si dovrà far in modo di abbassare il modulo di $26.25dB = 10^{\frac{26.25}{20}} \approx 10^{1.31}$. Ragionando come in precedenza si ottiene il seguente controllore:

$$C''(s) = C_1(s) \cdot C''_2(s) = 8 \cdot 10^6 \cdot \frac{1 + \frac{s}{10}}{1 + \frac{s}{10^4}} \cdot \frac{1 + 10^{4.69}s}{1 + 10^6s}$$

Nella prossima figura si vede come la situazione migliori nettamente e si ottenga una buona sovraelongazione e un tempo di assestamento addirittura minore di 3s.

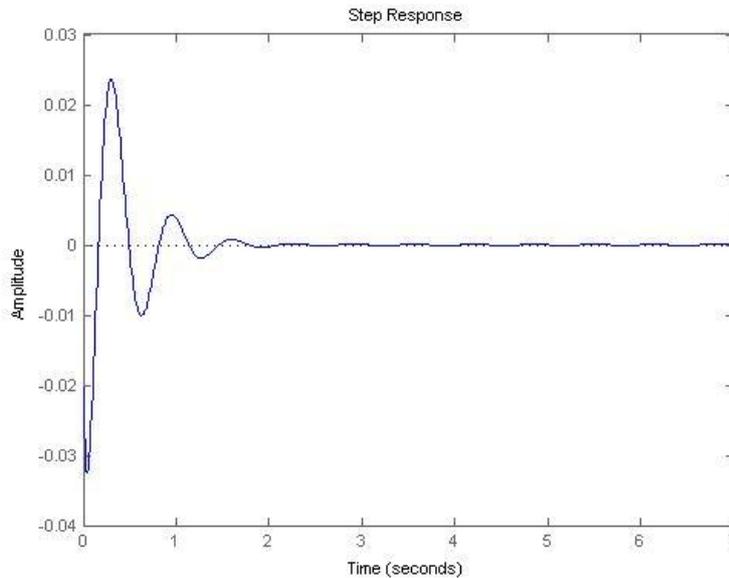


Figura 2.14 Risposta all'ingresso $\omega(t) = 0.1\delta_{-1}(t)$ in catena chiusa con il controllore definitivo.

2.3 Analisi con il diagramma di Nyquist

Il diagramma di Nyquist è un diagramma polare che rappresenta una curva nel piano complesso parametrizzata in ω ed è direttamente ricavabile dai diagrammi di Bode.

Risulta utile soprattutto perché permette di studiare la stabilità di un sistema reattivo con la sola conoscenza della funzione di trasferimento del sistema. L'analisi di stabilità attraverso il diagramma di Nyquist si basa sull'omonimo criterio:

Teorema (Criterio di Nyquist). *Data una funzione razionale propria $G(s) \in R(s)$, si supponga che sia noto il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in R$ e che tale diagramma soddisfi la seguente condizione:*

- $1 + G(s)$ non abbia né zeri né poli sull'asse immaginario

Allora si può contare il numero di giri che il grafico fa intorno al punto $-1+j0$ al variare di ω .

In particolare si ha

$$N_G = n_{G+} - n_{W+}$$

Dove N_G è il numero di giri che compie $G(j\omega)$, n_{G+} e n_{W+} sono rispettivamente il numero di poli di $G(s)$ e $W(s)$ a parte reale positiva.

Poiché $W(s)$ è BIBO-STABILE solo se $n_{W+} = 0$ allora una condizione necessaria e sufficiente di stabilità per il sistema retroazionato è che si abbia $N_G = n_{G+}$.

Tale teorema verrà usato per analizzare la stabilità del sistema in catena aperta e in catena chiusa con il controllore progettato nel precedente paragrafo.

Tramite *Matlab™*, con il semplice comando *nyquist(fdt)* si può visualizzare il diagramma di Nyquist della funzione *fdt* passata come argomento. Per esempio, il diagramma di Nyquist della $G_1(s)$ è il seguente.

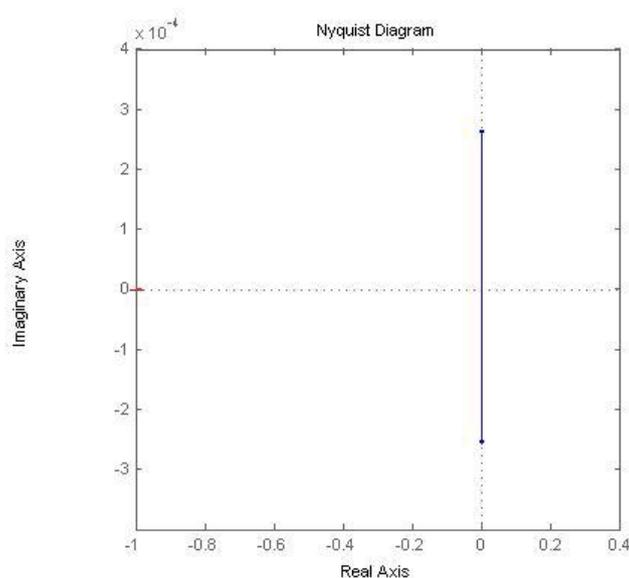


Figura 2.3.1 Diagramma di Nyquist di $G_1(s)$.

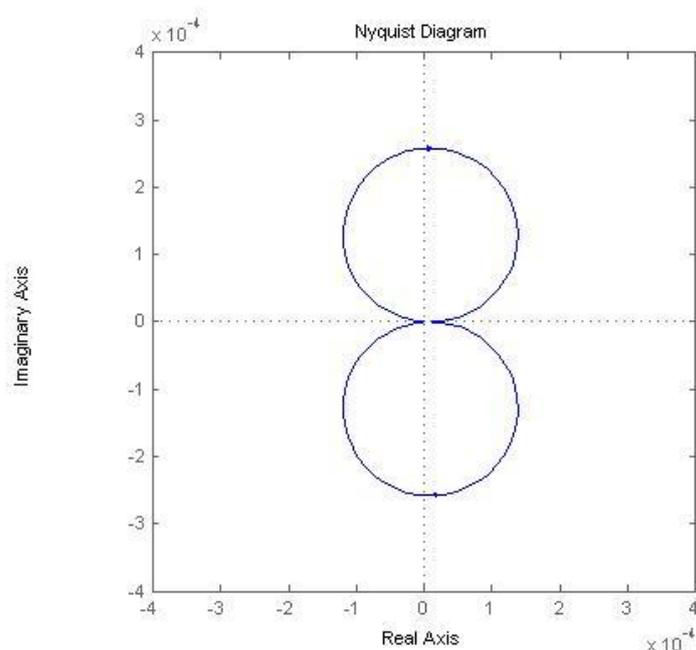


Figura 2.3.2 Dettaglio del diagramma di Nyquist di $G_1(s)$.

Si è già parlato del fatto che il denominatore della funzione $G_1(s)$ è di Hurwitz e che ha quattro radici a parte reale negativa perciò $n_{G+} = 0$; inoltre osservando il diagramma di Nyquist si vede subito come esso non faccia giri attorno a $-1+j0$

portando quindi alla conclusione che il sistema formato semplicemente da G_1 è BIBO-STABILE.

Allo stesso modo si può ora visualizzare il diagramma di Nyquist del sistema retroazionato con il controllore $C''(s)$ per verificarne la bibo-stabilità .

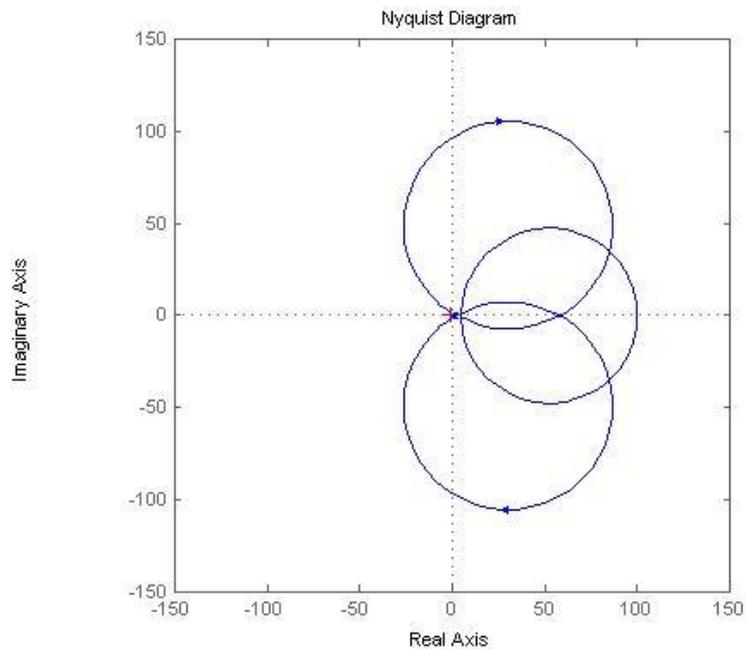


Figura 2.3.3 Diagramma di Nyquist di $G_1(s) \cdot C''(s)$.

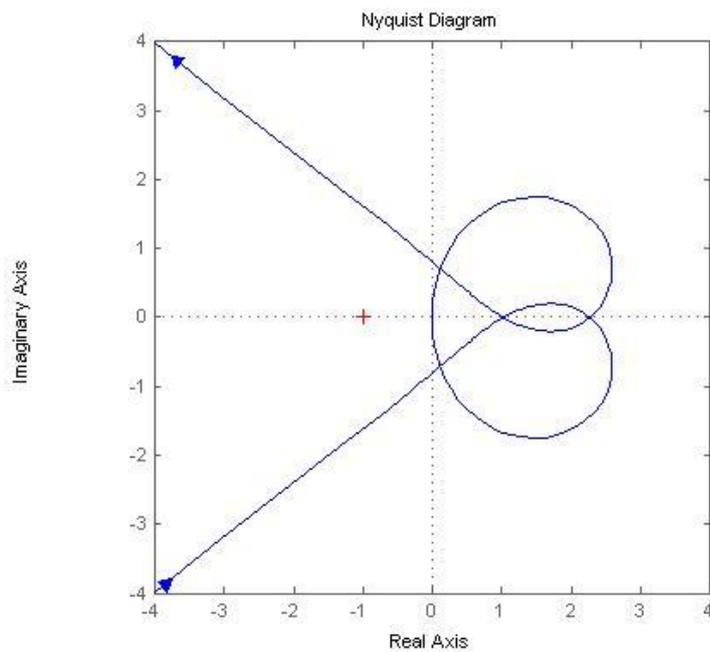


Figure 2.3.4 Dettaglio.

Si vede dalle figure precedenti come il grafico di Nyquist non faccia giri attorno a $-1+j0$ e quindi $N = n_{G+} = 0$ e di conseguenza $n_{W+} = 0$ e il sistema è bipo-stabile. Il diagramma di Nyquist può dare però altre informazioni, per esempio tracciando la circonferenza di centro l'origine e raggio unitario possiamo individuare tutte le frequenze per le quali il valore del modulo della funzione vale zero, cioè individuare le frequenze di attraversamento che corrispondono ai punti di intersezione tra circonferenza e grafico di Nyquist poiché $1=0\text{dB}$. In Figura 2.3.5 è evidenziato uno di questi punti di intersezione, che corrisponde proprio alla frequenza di attraversamento $\omega_A = 10 \text{ rad/s}$ scelta per lo studio di Bode.

Grazie ai valori ricavati per la X e la Y in tale punto dalla Figura 2.3.5 si può calcolare il margine di fase in tale punto come:

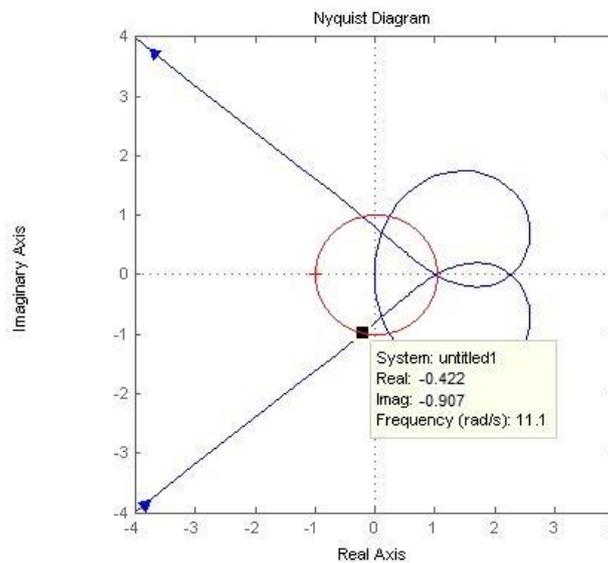


Figura 2.3.5

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{-0.907}{-0.422} \right) \approx \tan^{-1}(2.15) = 65^\circ$$

Risulta $\phi > 55^\circ$, quindi la richiesta sul margine di fase è rispettata ottimamente. C'è però una questione da verificare, relativa al picco di risonanza. Infatti è necessario che la funzione passi abbastanza lontano da $-1+j0$ poiché se questo non accadesse si avrebbe che per un certo ω_0 per il quale $G(j\omega_0) = -1 + \varepsilon \Rightarrow W(j\omega_0) = \frac{-1+\varepsilon}{1-1+\varepsilon} = 1 - \frac{1}{\varepsilon}$ e per valori di ε molto piccoli ($\varepsilon \rightarrow 0$) la funzione $W(j\omega_0)$ assumerebbe valori molto alti cioè presenterebbe un picco di risonanza troppo elevato che porterebbe a risposte al gradino oscillatorie con alti tempi d'assestamento.

Fortunatamente i 65° ottenuti portano ad un picco di risonanza ma sufficientemente piccolo e in linea con le specifiche.

Di solito per non avere problemi si tende comunque a cercare di ottenere un margine di fase di almeno 90° per eliminare i picchi di risonanza ma nello studio di questo problema non è richiesto.

CAPITOLO 3- ANALISI CON IL LUOGO DELLE RADICI

3.1 Metodo del luogo delle radici

Un altro metodo per studiare sistemi retroazionati è quello del luogo delle radici ed è anche l'ultimo che si utilizza in questo studio per l'analisi della stabilità del sistema e per la sintesi e progettazione di un controllore.

Si tratta di un metodo un po' meno ricco di Bode e Nyquist ma ha anch'esso i suoi vantaggi. Si prende in esame una funzione

$$G(s) = k \frac{p(s)}{q(s)}$$

i cui i polinomi $p(s)$ e $q(s)$ siano coprimi del tipo:

- $p(s) = b_m \prod_{i=1}^m (s - z_i)$
 - $q(s) = a_n \prod_{i=1}^n (s - p_i)$
- Con z_i e p_i rispettivamente zeri e poli in catena aperta.

Preso tale $G(s)$ la funzione $W(s)$ su cui si condurrà lo studio sarà del tipo

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{k \cdot p(s)}{q(s) + k \cdot p(s)}$$

Dove $k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$, cioè si considera la presenza di un semplice controllore costante $C(s)=k$.

Il metodo del luogo delle radici consiste nello studio degli zeri del denominatore di $W(s)$ al variare di k , denominatore che da ora in poi verrà chiamato $d(s)$. Si definisce luogo completo l'insieme

$$\mathcal{L}(p(s), q(s)) = \{s \in \mathbb{C} \mid d(s) = 0, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

che si può dividere in due parti, il luogo positivo e il luogo negativo che godono della simmetria coniugata:

$$\mathcal{L}^+(p(s), q(s)) = \{s \in \mathbb{C} \mid d(s) = 0, k > 0\}$$

$$\mathcal{L}^-(p(s), q(s)) = \{s \in \mathbb{C} \mid d(s) = 0, k < 0\}$$

L'obiettivo dell'analisi sarà quello di graficare le radici di $d(s)$ nel piano complesso al variare di k . Il vantaggio dell'utilizzo del luogo delle radici è il fatto che, avendo la sola conoscenza della funzione di trasferimento in catena aperta $G(s)$, è possibile studiare la stabilità BIBO, picchi di risonanza e banda passante del

sistema in catena chiusa quando viene considerato un compensatore costante $C(s)$ come sopra definito. Sarà comunque possibile progettare il compensatore $C(s)$ per ottenere le specifiche desiderate introducendo zeri e poli e valutando come varia il luogo delle radici.

3.2 Progettazione del controllore

Nel capitolo 1 sono state calcolate le radici del denominatore di $G_1(s)$ che risultano essere coppie di poli complessi coniugati: $p_1 = -23.9758 + j35.1869$, $p_2 = -23.9758 - j35.1869$, $p_3 = -0.1098 + j5.2504$ e $p_4 = -0.1098 - j5.2504$. Si è già discusso della *hurwitzianità* del polinomio a denominatore ma il fatto che le radici fossero complesse era intuibile sia dalle oscillazioni della risposta al gradino, sia dal fatto che il diagramma di Bode del modulo reale della $G(s)$ presentasse dei picchi di risonanza. Prima di procedere con l'analisi del luogo vera e propria, è necessario introdurre due concetti che saranno utilizzati durante la trattazione: la *pulsazione naturale* e lo *smorzamento*. Dato un polinomio denominatore di secondo grado con radici complesse coniugate del tipo:

$$(s - p_i) \cdot (s - \bar{p}_i) = s^2 - (p_i + \bar{p}_i)s + p_i\bar{p}_i = s^2 - 2\text{Re}(p_i)s + |p_i|^2$$

Si definisce smorzamento della coppia di poli il coefficiente $\varepsilon_i \triangleq \frac{-\text{Re}(p_i)}{|p_i|} = \sin \theta$ e pulsazione naturale il coefficiente $\omega_{ni} \triangleq |p_i|$, definiti tali parametri si può scrivere

$$(s - p_i) \cdot (s - \bar{p}_i) = s^2 - 2\varepsilon_i\omega_{ni}s + \omega_{ni}^2 = \omega_{ni}^2 \left[1 + 2\varepsilon_i \frac{s}{\omega_{ni}} + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2} \right]$$

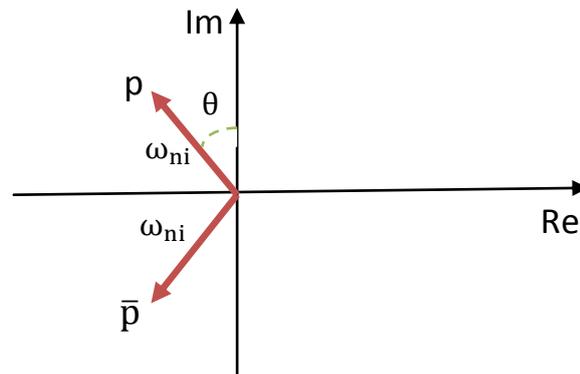


Figura 3.1 Interpretazione grafica di ω_{ni} e ε_i .

Va precisato che $\omega_{ni} > 0$ e $-1 < \varepsilon_i < 1$ e in particolare $\varepsilon_i > 0$ se i poli sono stabili e $\varepsilon_i = 0$ se i poli sono puramente immaginari. Esistono due relazioni tra i parametri dati come specifiche del progetto, e i due appena introdotti:

$$S = e^{-\frac{\varepsilon \cdot \pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}} \qquad t_s = \frac{3}{\varepsilon \cdot \omega_n}$$

Dopo queste precisazioni si può, grazie a *Matlab*TM, visualizzare il luogo delle radici di $G_1(s)$ scrivendo il seguente codice.

Codice 3.1 Costruzione del luogo delle radici di G_1 .

```
rlocus(G1)
z=-log(0.05)/sqrt(pi^2+(log(0.05)^2))
sgrid(z,0)
```

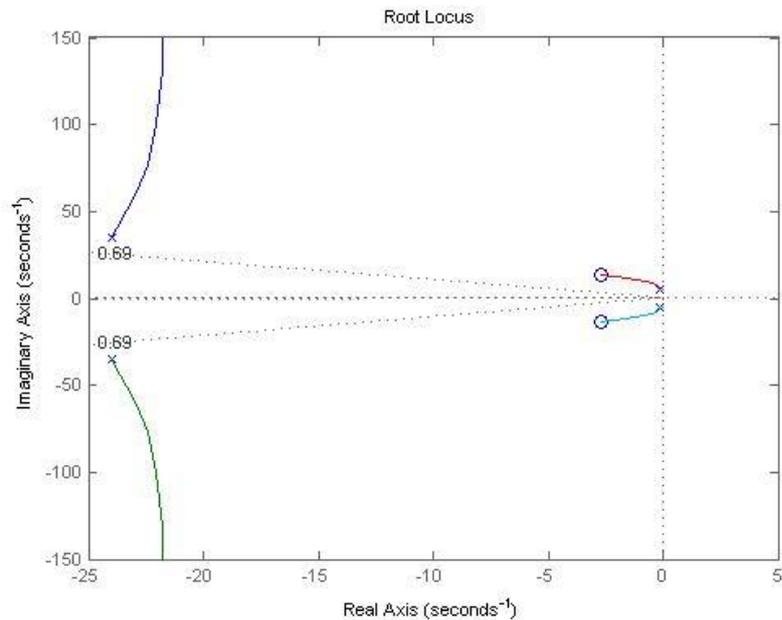


Figure 3.2 Luogo delle radici di G_1 .

In Figura 3.2 è mostrato il luogo di G_1 dove grazie al comando *sgrid* sono state tratteggiate le semirette passanti per l'origine del piano che dividono lo spazio complesso in tre regioni e racchiudono quello in cui l'uscita può raggiungere una sovralongazione minore del 5%, cioè tale da soddisfare le specifiche.

Nessun valore di k riesce però a ottenere le prestazioni desiderate: un solo compensatore proporzionale non basta, è necessaria la progettazione di un controllore più complesso.

Si nota che i poli p_3 e p_4 sono molto vicini all'asse immaginario per valori piccoli di k è ciò può minare la stabilità del sistema; bisogna quindi cercare di inserire un controllore dotato di zeri vicini a p_3 e p_4 , affinché si verifichi una *quasi cancellazione zero-polo*. Poiché inoltre si vuole inserire i due poli in alta frequenza, sia per rendere stabile il controllore, sia per rendere il sistema complessivamente più rapido è evidente che ciò che si necessita inserire è un cosiddetto *filtro elimina-banda*.

3.3 Filtro elimina-banda

Costruiamo un compensatore in cui gli zeri servono alla quasi cancellazione zero-polo descritta in precedenza e i poli per migliorare la velocità della risposta. Si ottiene un compensatore di funzione :

$$C(s) = \frac{(s - 3 - i3.5)(s - 3 + i3.5)}{(s + 30)(s + 60)} = \frac{s^2 - 6s + 21.25}{s^2 + 90s + 1800}$$

Ponendo tale controllore in retroazione, si può studiare il luogo delle radici di $\widetilde{G}(s) = G_1(s)C(s)$ e visualizzarlo con il Codice 3.2 ottenendo la Figura 3.3. di cui si riporta anche un ingrandimento in Figura 3.4.

Codice 3.2 Calcolo del luogo delle radici di $\widetilde{G}(s)$.

```
z1=3+3.5i;  
z2=3-3.5i;  
p1=30;  
p2=60;  
num_controllore = conv([1 z1],[1 z2]); %costruzione polinomio n(s)  
den_controllore = conv([1 p1],[1 p2]); %costruzione polinomio d(s)  
controllore = tf(num_controllore,den_controllore);  
rlocus(controllore*G1)  
z=-log(0.05)/sqrt(pi^2+(log(0.05)^2))  
sgrid(z,0)  
[k,poles]=rlocfind(controllore*G1)
```

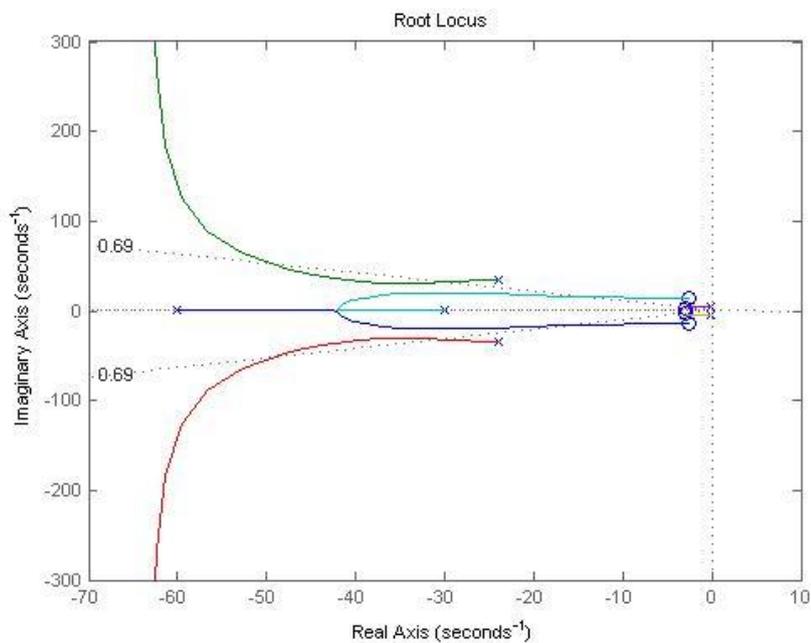


Figura 3.3 Luogo delle radici di $\widetilde{G}(s)$.

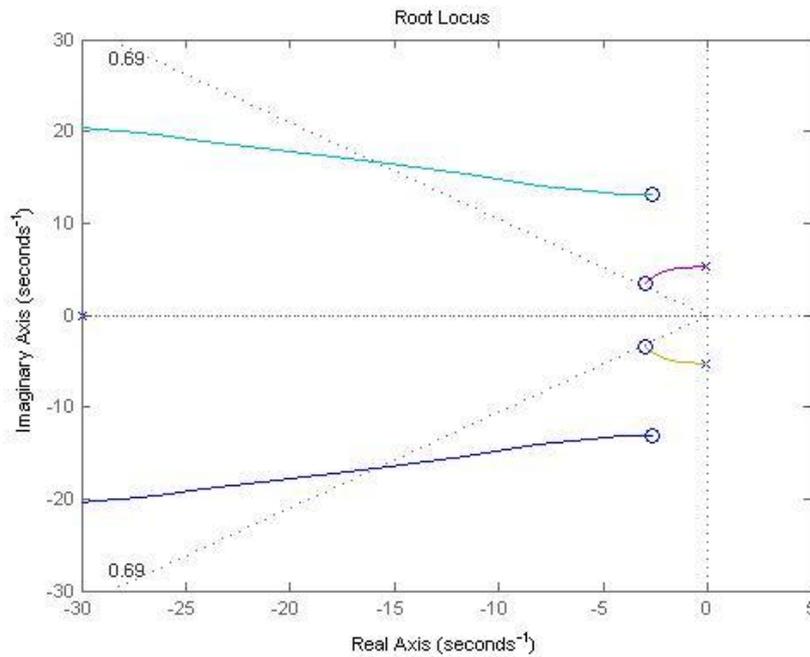


Figura 3.4 dettaglio del luogo delle radici di $\widetilde{G}(s)$.

Dalle figure precedenti si vede che esiste un range di valori di k dove i rami individuati stanno nella regione delimitata dalle semirette tratteggiate. Generalmente per ottenere una piccola sovraelongazione e una veloce risposta si cerca un valore di k che garantisca che i poli della $\widetilde{G}(s)$ siano quanto più vicini possibile all'asse reale, per avere una minima sovraelongazione, e il più distante possibile alla sinistra dell'asse immaginario, in modo da garantire dei tempi di salita e di assestamento molto bassi. Infatti, tanto più i poli dominanti sono posti in alta frequenza, tanto più rapido è il modo esponenziale corrispondente ad arrivare a zero.

In questo preciso caso però si vuole anche che gli zeri aggiunti dal compensatore provochino una quasi cancellazione zero/polo con i poli della $G_1(s)$ al limite della stabilità. Sarà quindi fondamentale che la scelta del guadagno k corrisponda ad un punto del luogo delle radici vicino agli zeri introdotti.

Per scegliere il guadagno migliore, si può usare l'istruzione di *Matlab*TM presente nel codice 3.2 `[k,poles]=rlocfind(controllore*G1)` che permette di selezionare un punto del luogo delle radici, e ne restituisce i corrispettivi valori dei poli e il guadagno k . Selezionando un punto il più possibile sugli zeri del compensatore, risulta ad esempio nella command window:

Select a point in the graphics window

```
selected_point =
-2.8555 + 3.6335i
```

```

k =
1.0030e+08
poles =
1.0e+02 *
-0.6321 + 5.9650i
-0.6321 - 5.9650i
-0.0296 + 0.1306i
-0.0296 - 0.1306i
-0.0292 + 0.0368i
-0.0292 - 0.0368i

```

Si ottiene quindi un possibile valore di k e vengono stampati anche i valori dei sei poli (quattro di $G(s)$ e due del controllore). Si utilizzerà tale guadagno $k \approx 1 \cdot 10^8$ all'interno del compensatore e si analizzeranno i risultati.

3.4 Risposta al gradino in catena chiusa

Riscrivendo il controllore precedentemente progettato e migliorato con la adeguata scelta del guadagno si avrà:

$$C(s) = k \frac{s^2 - 6s + 21.25}{s^2 + 90s + 1800} = 1 \cdot 10^8 \frac{s^2 - 6s + 21.25}{s^2 + 90s + 1800}$$

Tale controllore applicato alla $G_1(s)$ dovrebbe soddisfare le specifiche del sistema, con *Matlab™* si verifica la bontà del compensatore visualizzando la risposta di $\widetilde{G}(s) = G_1(s)C(s)$ all'ingresso $\omega(t) = 0.1\delta_{-1}(t)$.

Codice 4.3: Risposta al gradino di $\widetilde{G}(s)$.

```

k = 1.0030e+08;
fdt_catena_chiusa = F*feedback(G1,k*controllore);
tempo = 0:0.01:5;
step(0.1*fdt_catena_chiusa,tempo)

```

In Figura 3.5 si vede come entrambi i parametri di progetto siano buoni, il tempo d'assestamento è di circa 2s, la sovralongazione è minore del 5% e il sistema ha oscillazioni limitate. Anche con questo metodo dunque si è raggiunto un risultato soddisfacente. Va però precisato che qualora si dovesse scegliere solo uno dei metodi finora presentati per studiare simili problemi, sarebbe preferibile non usare quello del luogo delle radici poiché richiede una perfetta conoscenza del numeratore e del denominatore della funzione di trasferimento ma questi sono dati da ipotesi semplificative e sono molto sensibili alle variazioni parametriche.

Una piccola variazione può portare a sbagliare tutto lo studio, bisogna quindi usare questo metodo con un certo spirito critico.

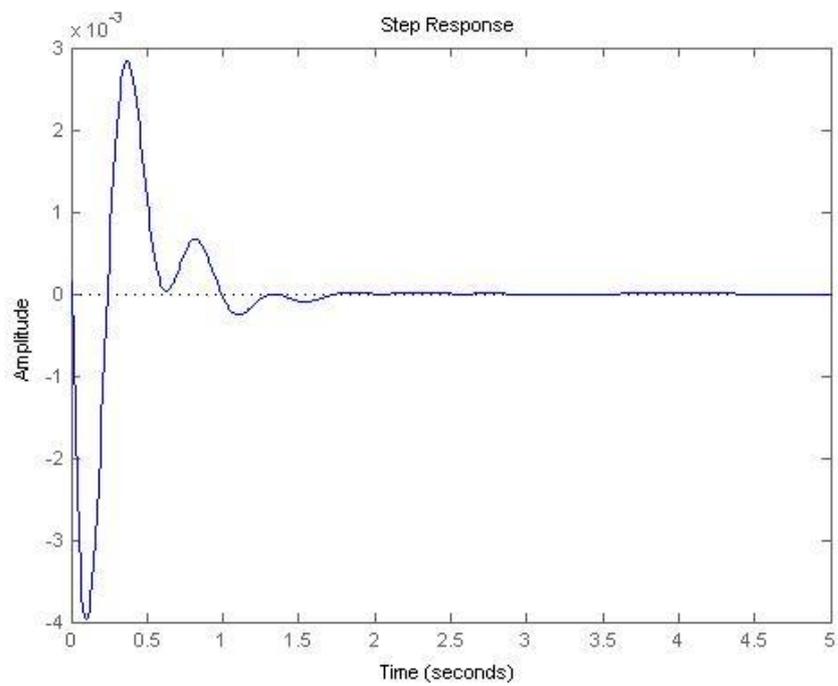


Figura 3.5 Risposta di $\widehat{G}(s)$ all'ingresso $\omega(t) = 0.1\delta_{-1}(t)$.

CAPITOLO 4- PID

4.1 Controllore PID

In questo capitolo viene progettato un tipo di controllore adatto a risolvere le specifiche del problema in termini di tempo d'assestamento, sovraelongazione e di errore a regime. Il controllore utilizzato è di tipo *PID* (proporzionale-integratore-derivatore) ovvero costruito così:

$$C(s) = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_d s^2 + K_i}{s}$$

Dove:

- K_p è il coefficiente di proporzionalità al segnale d'errore
- K_i è il coefficiente di proporzionalità all'integrale dell'errore
- K_d è il coefficiente di proporzionalità alla derivata dell'errore

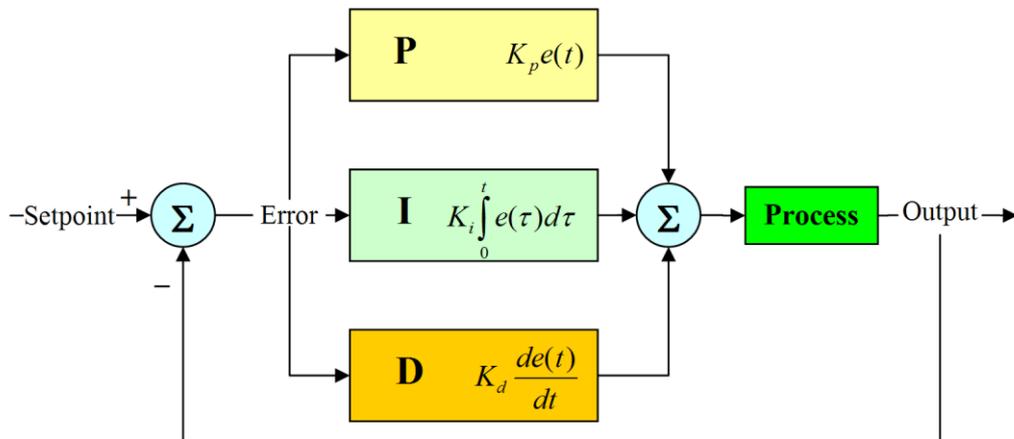


Figura 4.1

Un controllore così pensato costituisce una funzione impropria e porlo così com'è in retroazione a $G_1(s)$ renderebbe il sistema instabile ma è sufficiente mettere un polo in alta frequenza per compensare l'effetto del derivatore; tale modifica non influisce sul comportamento del sistema alle frequenze d'interesse ma semplicemente lo rende stabile.

Per progettare adeguatamente un controllore di tipo *PID* è necessario conoscere come i coefficienti sopra citati influiscono sul sistema in termini di tempo di salita della risposta, sovraelongazione, tempo d'assestamento ed errore a regime.

I vari contributi sono riassunti nella seguente tabella.

Tabella 4.1

Coefficiente	Tempo di salita	Sovraelongazione	Tempo di assestamento	Errore a regime
K_p	cala	aumenta	cambia poco	cala
K_i	cala	aumenta	aumenta	eliminato
K_d	cambia poco	cala	cala	non varia

4.2 Progettazione

In questo paragrafo ci si occupa della scelta dei valori migliori da dare a ciascun coefficiente del *PID* per ottenere il comportamento desiderato del sistema.

Si ricorda che si vuole ottenere queste specifiche di progetto: la *sovraelongazione* del segnale d'uscita pari al massimo al 5% e il *tempo di assestamento* di 5 s. La costruzione del controllore è fatta in maniera euristica, determinando i coefficienti in base alle circostanze ottenute da tentativi precedenti. Dalla tabella 4.1 si evince che l'introduzione di un coefficiente proporzionale servirà sostanzialmente per ridurre il *tempo di salita* del sistema, andando però ad incrementare la sovra elongazione. Per ridurla sarà quindi necessario introdurre una componente derivativa, che porterà anche il beneficio di abbassare il tempo di assestamento. L'introduzione di una componente integrativa, per sistemi in catena chiusa, comporta un incremento del *tipo* del sistema e quindi sarà necessaria per eliminare l'errore a regime permanente.

Si utilizzeranno quindi tutti e tre i coefficienti non nulli. Un primo approccio potrebbe essere quello di dare ad essi lo stesso valore, non si tratta di una scelta molto intelligente ma può essere un punto di partenza per la futura analisi.

Per capire che valore iniziale assegnare ai coefficienti si può stampare la risposta del sistema a diversi valori di $K_i = K_p = K_d$ ottenendo le seguente figura.

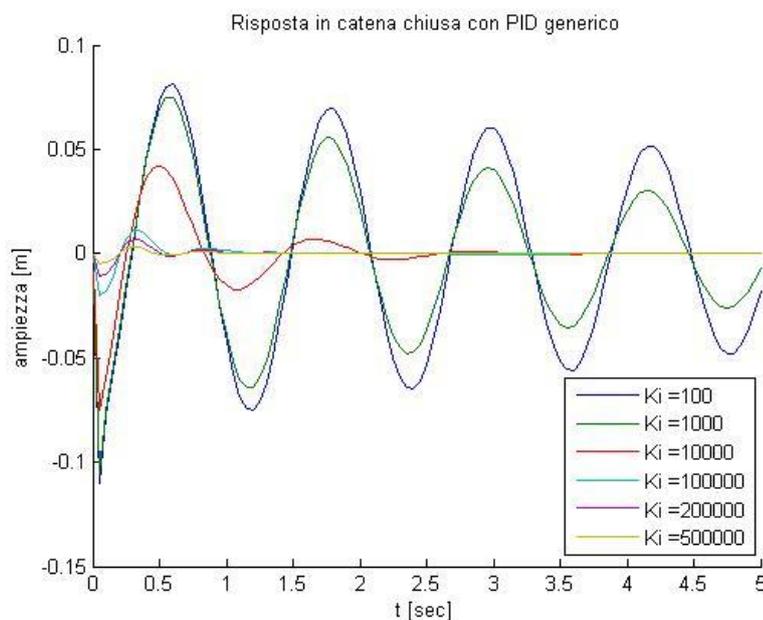


Figura 4.2

Si sceglie per esempio che $K_p = K_i = K_d = 200000$ in quanto si vede che per valori troppo bassi si avrebbero troppe oscillazioni mentre il valore 200000 costituisce un buon compromesso. Si simula la risposta in *Matlab™* scrivendo il codice seguente.

Codice 4.1 PID con tutti i coefficienti uguali

```
Kp= 200000;
Ki= 200000;
Kd= 200000;

control = tf([Kd Kp Ki],[1 0]);
fdt_catena_chiusa = F*feedback(G1,control);%controllore in retroazione
tempo = 0:0.05:5;
[Y_cc1 T_cc1]=step(0.1*fdt_catena_chiusa,tempo);
plot(T_cc1,Y_cc1)
```

Si ottiene in questo modo la risposta di Figura 4.3

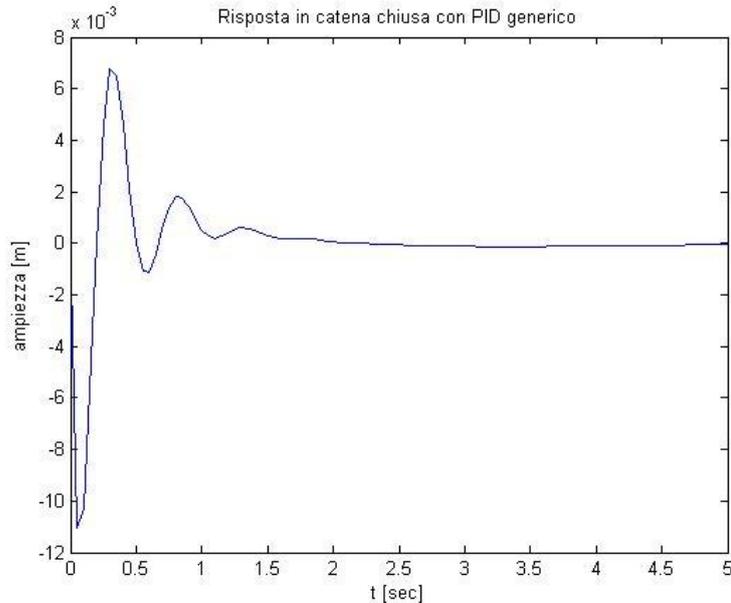


Figura 4.3 Risposta in catena chiusa con $\omega(t) = 0.1\delta_{-1}(t)$

Si nota subito un netto miglioramento delle prestazioni del sistema: la durata delle oscillazioni, infatti, è drasticamente diminuita a circa 2 s, ma purtroppo la sovraelongazione non è ancora prossima al valore richiesto (5mm per un ingresso $\omega(t) = 0.1\delta_{-1}(t)$).

Per abbassare questo parametro e ridurre ancora più marcatamente il tempo di assestamento, si può agire sul coefficiente derivativo aumentandolo come suggerisce la Tabella 4.1.

Considerando quindi un PID di parametri $K_p = K_i = 200000$ $K_d = 500000$ e con il seguente codice *Matlab*[™] otteniamo la risposta del sistema in Figura 4.4 mentre in Figura 4.5 sono poste a confronto le risposte ottenute con il vecchio (in blu) e il nuovo (in viola) PID.

Codice 4.2 PID migliorato

```
Kd1=500000;
Ki1=Ki;
Kp1=Ki1;
control = tf([Kd1 Kp1 Ki1],[1 0]);
fdt_catena_chiusa = F*feedback(G1,control);
tempo = 0:0.05:5;
[Y_cc2 T_cc2]=step(0.1*fdt_catena_chiusa,tempo);
plot(T_cc2,Y_cc2,'m')
```

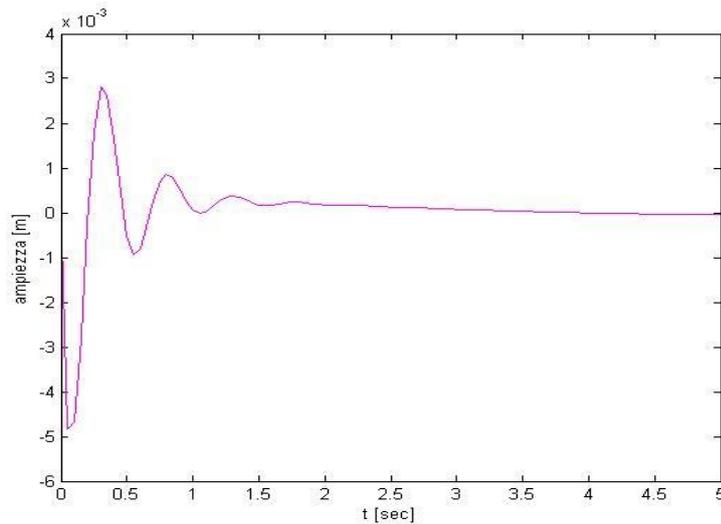


Figura 4.4 Risposta al controllore migliorato.

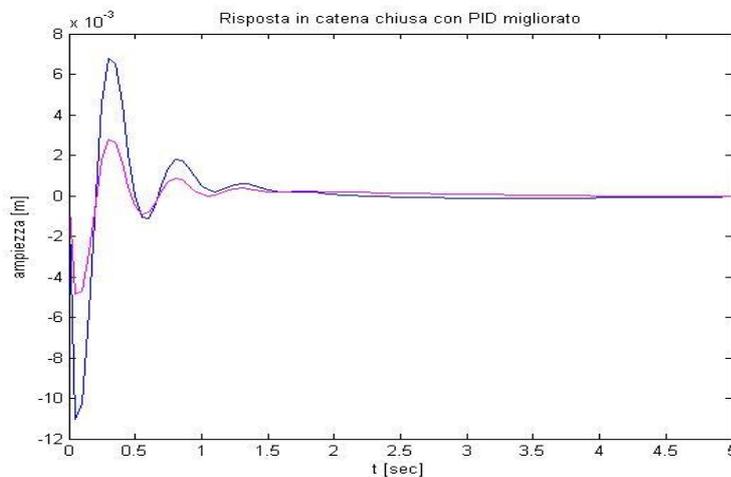


Figura 4.5 Confronto tra le risposte ai due controllori.

Si vede che la massima oscillazione iniziale non supera i -5mm ed è quindi nei limiti richiesti, il tempo d'assetamento è ancora minore di 5s e quindi tale controllore soddisfa le specifiche del problema. Si può quindi scrivere :

$$C(s) = 200000 + 500000s + \frac{200000}{s} = \frac{2 \cdot 10^5 s + 5 \cdot 10^5 s^2 + 2 \cdot 10^5}{s}$$

Come già detto in precedenza un controllore di questo tipo è improprio, il che si risolve ponendo un polo a parte reale negativa in alta frequenza, per esempio in $\omega = 10^6$ ottenendo così un controllore PID effettivo di equazione:

$$C(s) = \frac{5 \cdot 10^5 s^2 + 2 \cdot 10^5 s + 2 \cdot 10^5}{s \left(1 + \frac{s}{10^6}\right)}$$

CAPITOLO 5- ANALISI CON SIMULINK

5.1 Schema a blocchi e risposta in catena aperta

Simulink è un programma per la modellazione, la simulazione e l'analisi di sistemi dinamici descritti da equazioni differenziali, mediante funzioni di trasferimento ecc. e permette la simulazione di sistemi complessi. Mette a disposizione una vasta libreria di blocchi che descrivono elementi algebrici e dinamici elementari grazie ai quali l'utente compone lo schema a blocchi del sistema da simulare.

Il sistema in esame in questo elaborato è abbastanza complesso e lo schema a blocchi che lo rappresenta deve sottostare alle equazioni viste nel paragrafo 1.2, sarà uno schema comprendente vari tipi di blocchi: sommatori, derivatori, integratori, buffer e blocchi che rappresentano segnali a gradino utilizzati come input (vedi W e U).

Grazie allo studio del modello condotto nel capitolo 1 è possibile rappresentare il sistema di una sospensione con lo schema a blocchi in Figura 5.1 dove inizialmente si pone nullo il segnale che rappresenta l'ingresso W, si assume cioè una superficie stradale piana.

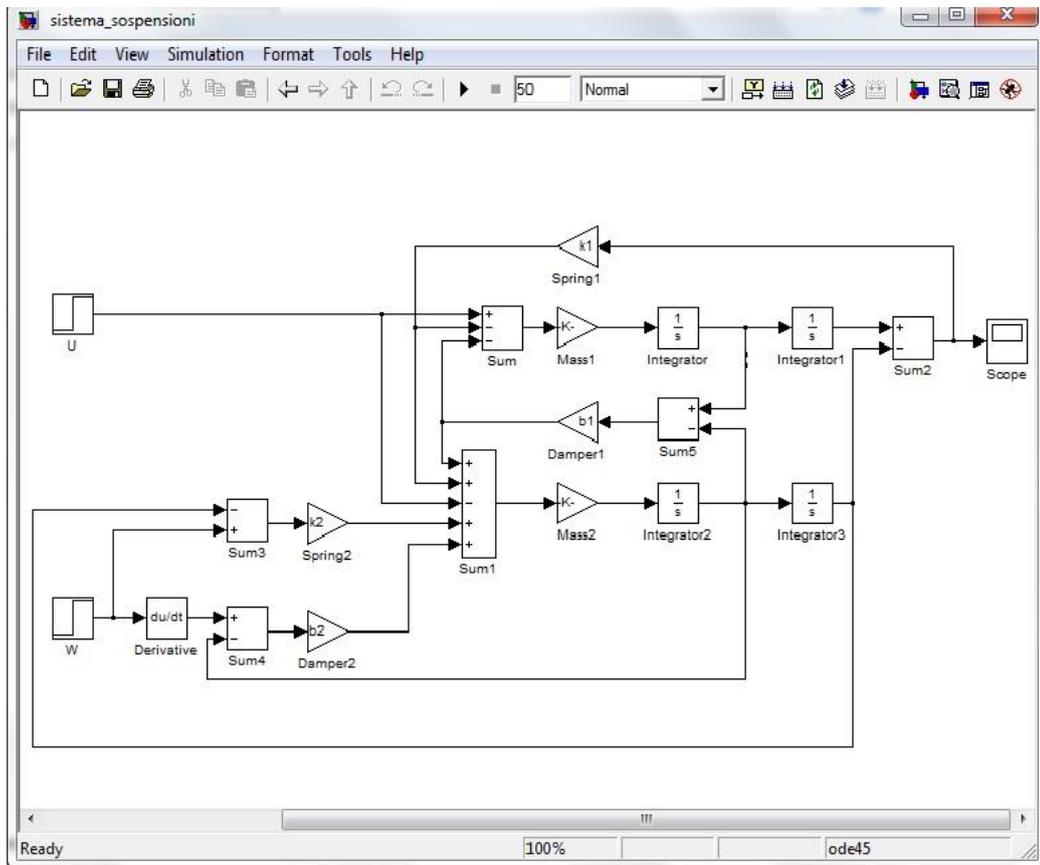


Figura 5.1 Schema a blocchi del sistema di una sospensione.

Facendo doppio click sul blocco *Scope* si simula l'uscita del sistema e si ottiene la seguente risposta:

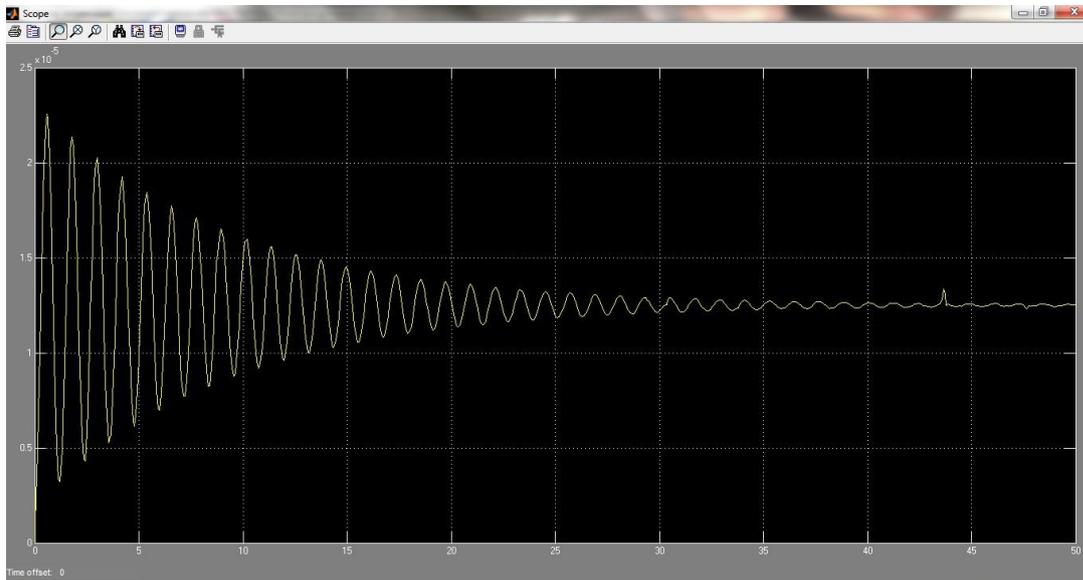


Figura 5.2 Risposta in catena aperta.

E' evidente come tale risposta sia simile a quella di Figura 1.2 e rappresenti un comportamento totalmente insoddisfacente del sistema.

Sarà necessario, come già discusso in tutti i precedenti capitoli, disporre di un controllore adatto per migliorare tale risposta. In questo specifico caso però si studierà il problema dal punto di vista della forza di controllo della sospensione $u(t)$.

5.2 Simulazione con controllore ad hoc

Un controllore ad hoc può essere progettato con il metodo dello spazio di stato, tale metodo esula dalle competenze di questo elaborato perciò se ne sfrutterà solo il risultato.

Il controllore rappresentato dalla matrice di guadagno $K = [0 \ 2.3E6 \ 5E8 \ 0 \ 8E6]$ ottenuta con il metodo sopra citato può essere implementato in simulink per verificare quali cambiamenti apporta nel sistema.

Si crea per prima cosa una nuova finestra e si utilizza il blocco *sub system* per creare il sotto-sistema che rappresenterà il nostro modello di sospensione in Figura 5.1, esso serve a racchiudere in un solo blocco tutto il modello precedentemente creato in modo da poterlo poi studiare con il cosiddetto "metodo a scatola chiusa".

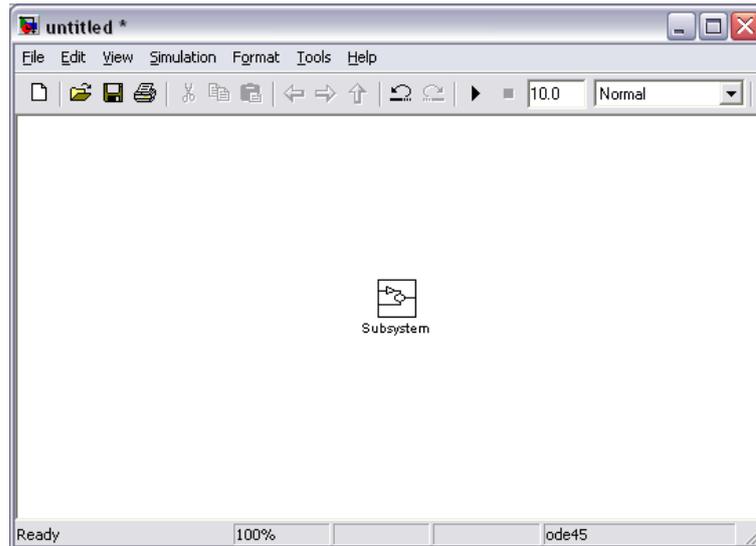


Figura 5.3 Blocco di sotto-sistema.

Si inserisce ora lo schema a blocchi di Figura 5.1 all'interno del sotto-sistema e gli si apportano le dovute modifiche, il modello studiato con lo spazio di stato avrà infatti cinque uscite:

- X_1
- $(dX_1)/dt$
- Y_1
- $(dY_1)/dt$
- $\int Y_1 dt$

che vanno inserite nello schema a blocchi come mostrato nella prossima figura.

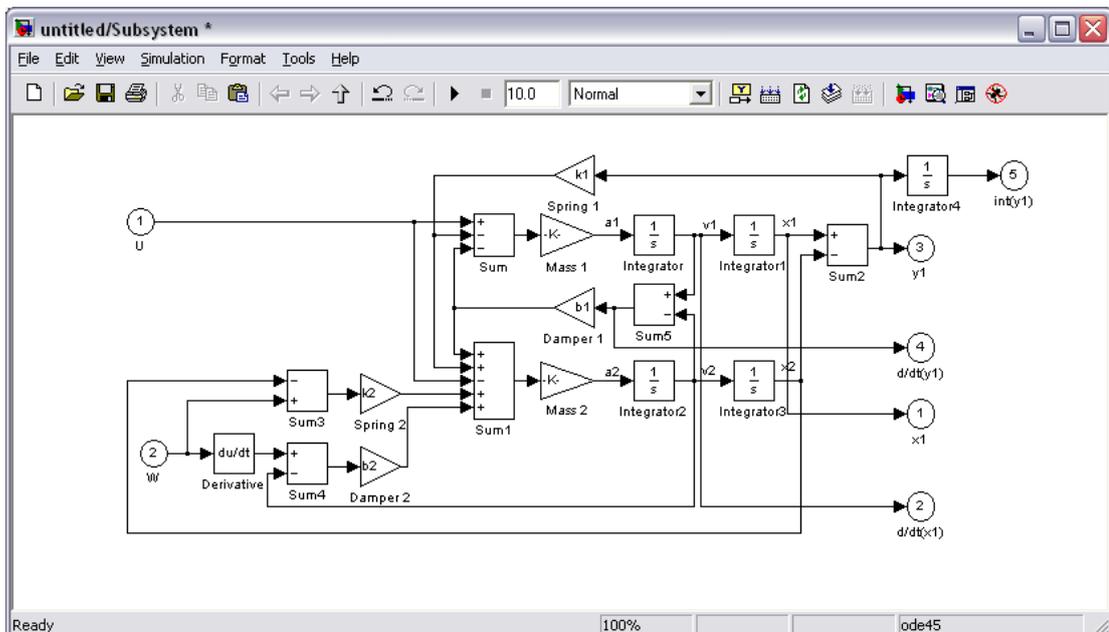


Figura 5.4

Otteniamo così il blocco *sub system* che rappresenta la sospensione con due ingressi e cinque uscite, utilizzando le uscite come ingresso di un multiplexer. Va poi inserito un blocco Matrice Guadagno impostandone il valore a K; si collega

l'uscita del multiplexer con l'ingresso di tale blocco e l'uscita di questo con l'ingresso negativo di un nuovo blocco sommatore la cui uscita viene collegata con l'ingresso denominato U del blocco Modello Sospensione.

Si aggiunge poi un blocco *step* r posto a zero e si assegnano gli ingressi U e W ottenendo il diagramma a blocchi della seguente figura e si assegnano i valori della matrice K nel prompt di *Matlab*TM.

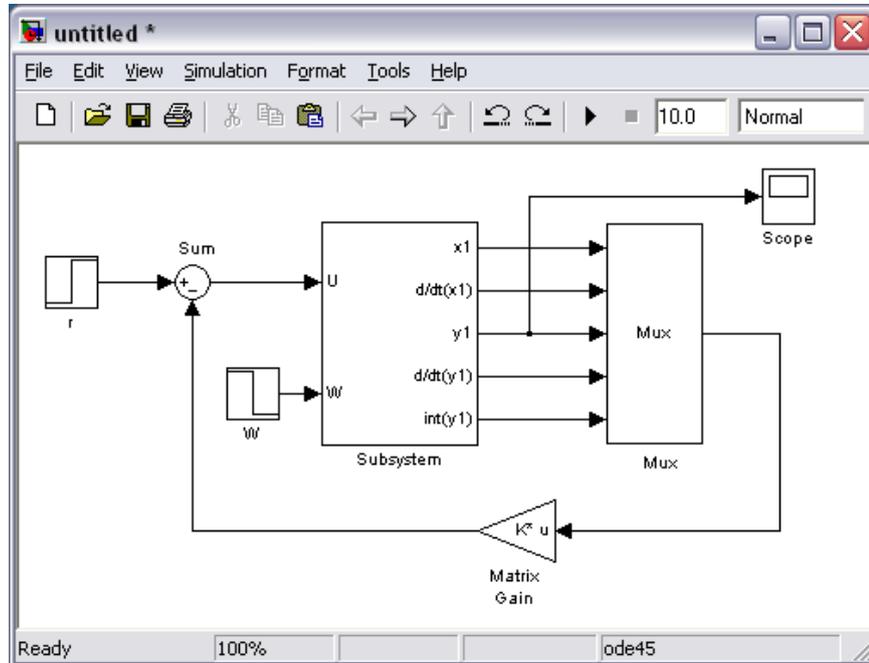


Figura 5.5

Di nuovo facendo doppio click sul blocco *scope* si può visualizzare la risposta del sistema controllato. Si può facilmente osservare dalla Figura 5.6 che sono rispettati sia il requisito del tempo d'assestamento inferiore ai 5 secondi, sia della sovraelongazione inferiore al 5% rispetto alla grandezza del disturbo stradale; quindi il sistema rispetta le specifiche di progettazione.

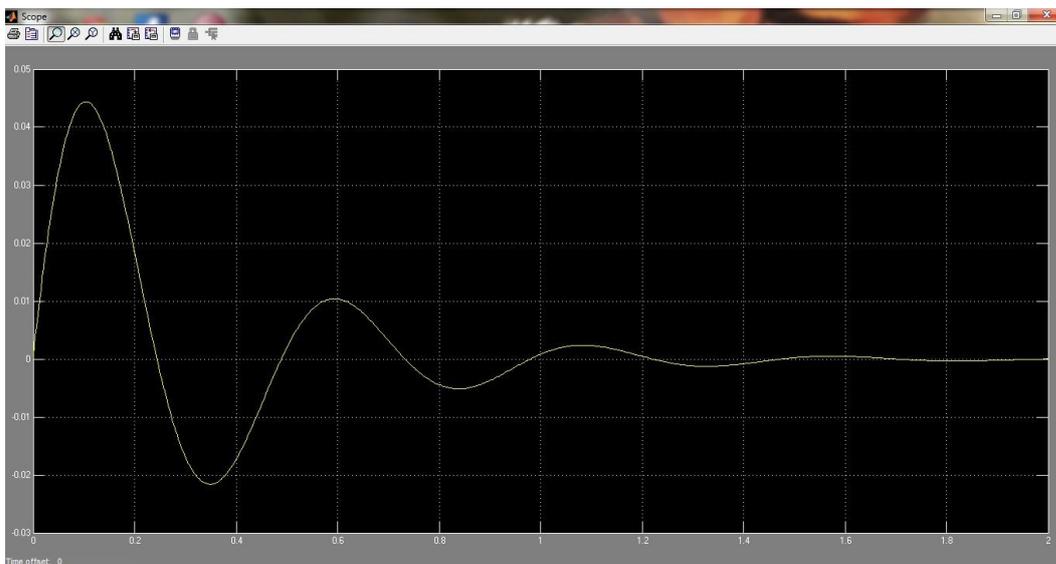


Figura 5.6 Risposta del sistema retro azionato.

CAPITOLO 6- CONCLUSIONI

In questo capitolo ci si prefissa l'obiettivo di comparare i vari controllori progettati nel corso dell'analisi del sistema per capire quale sia il migliore in termini di prestazioni raggiunte, forza applicata e consumo di potenza ed energia.

Nei precedenti capitoli sono stati sviluppati i seguenti controllori:

RISPOSTA IN FREQUENZA
$$C_{FREQ}(s) = 8 \cdot 10^6 \cdot \frac{1 + \frac{s}{10}}{1 + \frac{s}{10^4}} \cdot \frac{1 + 10^{4.69}s}{1 + 10^6 s}$$

LUOGO DELLE RADICI
$$C_{ROOTS}(s) = 1 \cdot 10^8 \frac{s^2 - 6s + 21.25}{s^2 + 90s + 1800}$$

PID
$$C_{PID}(s) = \frac{5 \cdot 10^5 s^2 + 2 \cdot 10^5 s + 2 \cdot 10^5}{s(1 + \frac{s}{10^6})}$$

Si possono confrontare le prestazioni del sistema controllato con ciascuno dei precedenti controllori e plottare le risposte nello stesso grafico utilizzando *Matlab*TM.

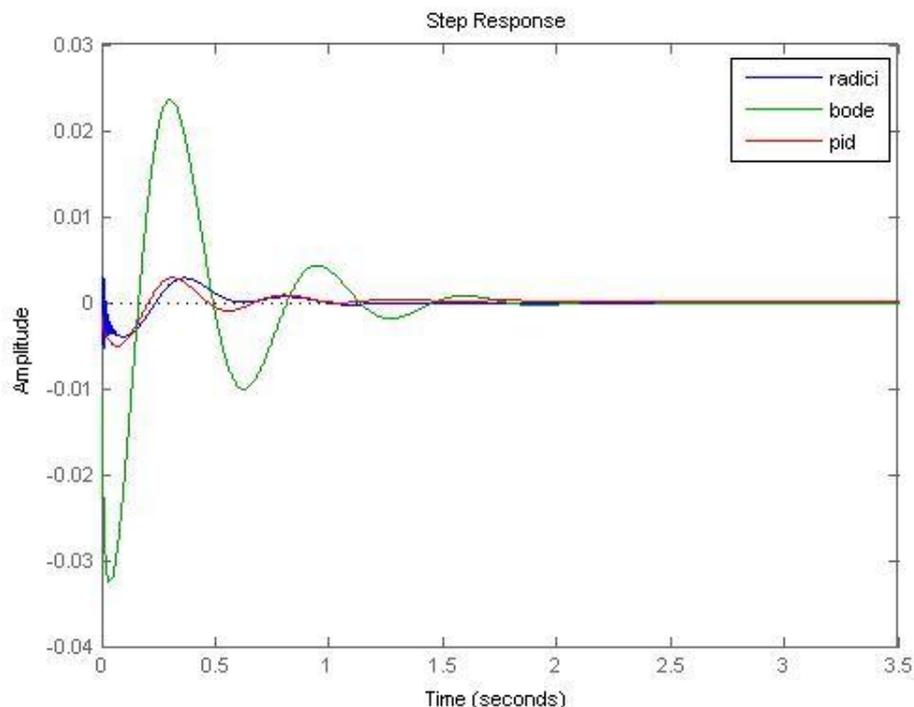


Figura 6.1 Risposte dei vari controllori a $\omega(t) = 0.1\delta_{-1}(t)$.

Il fatto che tutti i controllori progettati soddisfino le specifiche del problema era già stato appurato; se bisogna comparare le risposte però si vede che i controllori progettati con il luogo delle radici e con il PID hanno una sovraelongazione molto più bassa e tempi di assestamento leggermente minori. E' preferibile però il controllore progettato con il PID poiché quello ottenuto con il luogo delle radici presenta una risposta che oscilla nei primi istanti, queste oscillazioni prima non si

erano notate poiché si era scansionato il segnale con $t=0.1s$ e dall'interpolazione di questi dati le oscillazioni sparivano. Si tratta comunque di oscillazioni molto piccole e quasi impercettibili ma potendo scegliere si preferisce la risposta ottenuta con il PID.

Di solito però ciò che discrimina un buon compensatore da uno insoddisfacente sono le prestazioni in termini di forza applicata: i controllori infatti sono stati appositamente creati per rispondere alle oscillazioni con la forza $u(t)$ di contrasto. Per valutare l'andamento della forza di controllo nel tempo, l'analisi viene fatta con Simulink, dato il sistema mostrato in Figura 5.1 vengono applicati i controllori costruiti con le varie sintesi.

Con il seguente schema a blocchi grazie al blocco *Scope1* si possono visualizzare gli andamenti della forza di controllo $u(t)$ per i vari controllori.

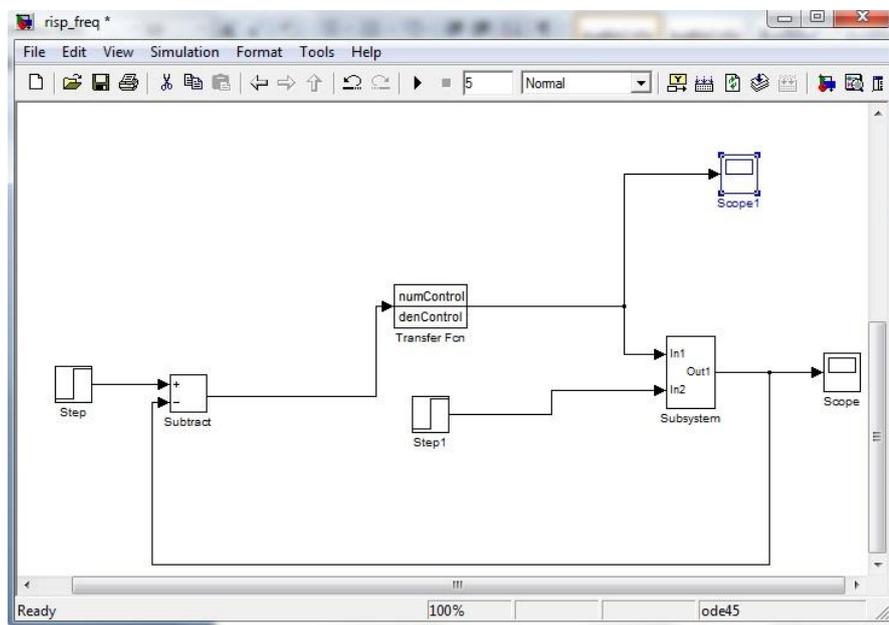


Figura 6.2

Si ottiene il seguente andamento con l'utilizzo di $C_{FREQ}(s)$.

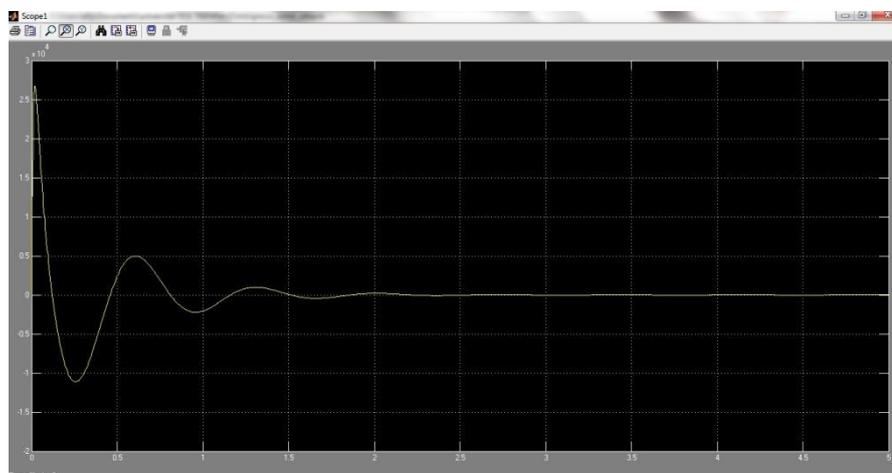


Figura 6.3

Dalla figura si osserva un picco massimo di circa $2.29 \cdot 10^4 N$ ed una durata leggermente superiore ai 2s.

Con $C_{ROOTS}(s)$ si ottiene invece il seguente andamento:

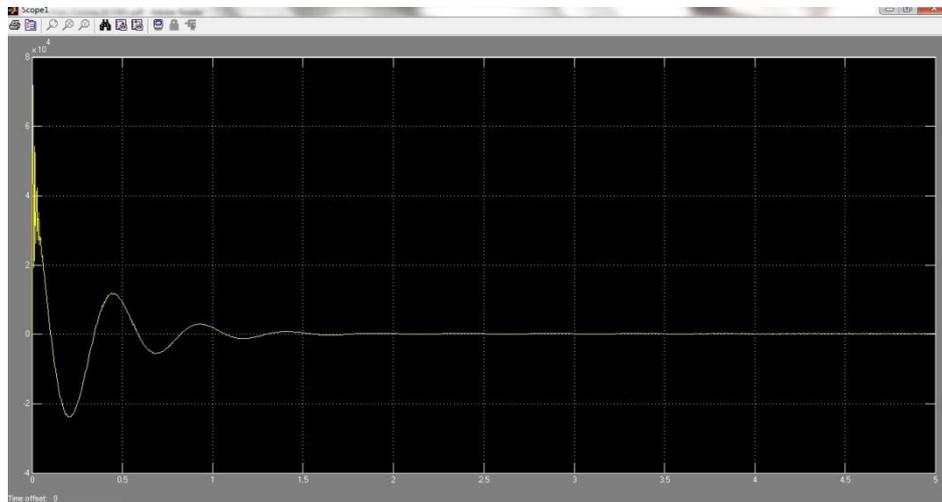


Figura 6.4

La Figura 6.4 mostra un picco massimo di forza superiore alla precedente e circa pari a $7.5 \cdot 10^4 N$. La durata è in linea con il precedente compensatore.

Con $C_{PID}(s)$ si ottiene l'andamento di Figura 6.5 che evidenzia un picco iniziale superiore ai $4 \cdot 10^4 N$ e una durata di circa 2s.

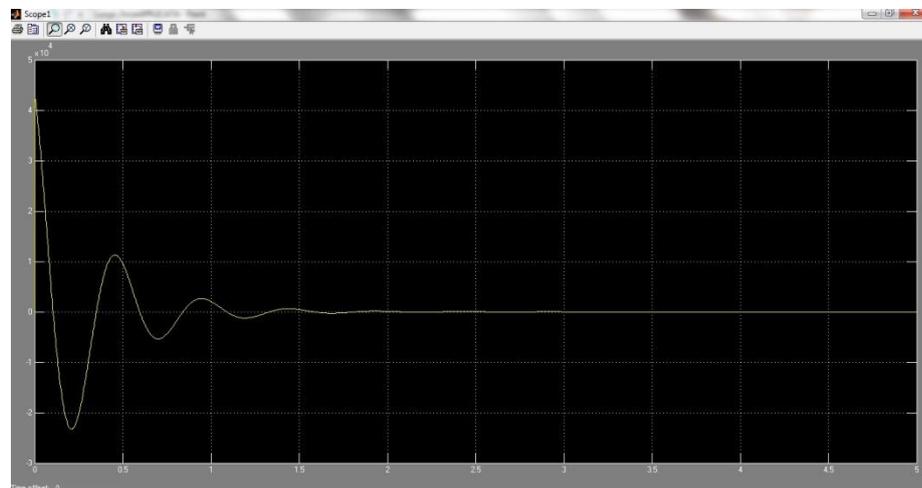


Figura 6.5

Dalle figure precedenti si possono stimare le energie spese dalla forza di controllo e quindi avere un'idea generale dei consumi prodotti dai diversi compensatori. Poiché la durata dell'applicazione delle forze di controllo è pressoché la stessa per i tre compensatori, si può affermare che il controllore che richiede una minor potenza, quindi un minor consumo di energia, è quello realizzato tramite la sintesi che presenta un picco più basso. Questo è evidentemente quello progettato tramite la risposta in frequenza. A seguire si avrà il PID e, per ultimo, il controllore costruito con lo studio del luogo delle radici.

Bibliografia

- [1] Mauro Bisiacco, Maria Elena Valcher, *Controlli Automatici*, Libreria Progetto, Padova, 2008
- [2] Sito dell'università del Michigan: Michigan Engineering, (<http://www.engin.umich.edu>)
- [3] Alessandro Pisano, *Modellistica, analisi e controllo di sospensioni attive per autoveicoli, Appunti di controlli automatici Versione 1.0*