



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

**DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE ED AZIENDALI
"M.FANNO"**

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA (TrEC)

PROVA FINALE

"METODI QUANTITATIVI PER LA MISURAZIONE DEL RISCHIO"

RELATORE:

CH.MO PROF. NUNZIO CAPPuccio

LAUREANDO: MARCO DE BORTOLI

MATRICOLA N. 1160811

ANNO ACCADEMICO 2019 – 2020

Numero di parole: 9767

INDICE

PRESENTAZIONE.....	4
--------------------	---

CAPITOLO 1

INTRODUZIONE AL RISCHIO NEI MERCATI FINANZIARI

1.1 Classificazione del rischio e concetti introduttivi.....	5
1.2 Rendimento degli asset e fatti stilizzati.....	7
1.3 Distribuzioni di perdita.....	10
1.4 Test di Jarque-Bera.....	11

CAPITOLO 2

MISURE DEL RISCHIO STOCASTICHE

2.1 Value at Risk.....	13
2.1.1 Simulazioni storiche.....	14
2.1.2 Metodo parametrico generico.....	15
2.1.3 Simulazioni Montecarlo.....	17
2.1.4 Criticità del VaR.....	18
2.2 Expected Shortfall.....	20
2.2.1 Approccio storico.....	21
2.2.2 Parametrizzazione.....	22

CAPITOLO 3

MODELLI ECONOMETRICI PER VOLATILITA' E VaR DINAMICO

3.1 Generalized autoregressive conditional eteroschedasticity.....	25
3.2 GARCH asimmetrico e impatto delle notizie.....	28

3.3 GARCH multivariato: Dynamic Conditional Correlation Model.....	30
--------------------------------------------------------------------	----

CAPITOLO 4

APPLICAZIONI COMPUTAZIONALI

4.1 Architettura dell'analisi.....	33
------------------------------------	----

4.2 Misure del rischio statiche per singoli titoli.....	34
---------------------------------------------------------	----

4.3 Volatilità dinamica univariata e VaR condizionale.....	36
------------------------------------------------------------	----

4.4 Volatilità dinamica multivariata e ottimizzazione di portafoglio.....	46
---------------------------------------------------------------------------	----

4.5 Misure di rischio statiche e dinamiche di portafoglio.....	49
----------------------------------------------------------------	----

CONCLUSIONI.....	54
-------------------------	-----------

BIBLIOGRAFIA.....	55
--------------------------	-----------

PRESENTAZIONE

Nel corso degli anni si è percepita una crescente necessità di operare scelte consapevoli in merito alla gestione del rischio in ogni organizzazione sociale e non per forza operante nei mercati finanziari, ove certamente l'insieme delle tecniche oggetto di questo lavoro riveste, come avremo modo di approfondire nel seguito, un ruolo centrale in virtù della natura delle attività svolte e delle crescenti imposizioni normative, volte a tutelare l'investitore ed in generale la solidità delle società coinvolte (banche ed assicurazioni su tutte). Il processo di risk management si compone di tre fasi:

- Misurazione del rischio
- Gestione del rischio
- Controllo delle performance

L'oggetto del presente elaborato è l'attività di risk measurement che può essere definita come *il complesso di tecniche statistiche, econometriche e probabilistiche atte a quantificare la rischiosità di un'attività intrapresa analizzandone l'esposizione a diversi fattori che possano, attraverso meccanismi aleatori, generare scenari negativi*. L'obiettivo risulta dunque quello di attribuire valori quantitativi e concreti al rischio, permettendo ai soggetti coinvolti nelle procedure decisionali di trarre opportune conclusioni e di gestire le potenziali avversità. Governare il rischio significa governare l'incertezza, notoriamente fattore estremamente negativo della gestione aziendale e degli strumenti finanziari.

Le metodologie presentate costituiscono il corpo fondamentale della letteratura in materia di finanza quantitativa e rappresentano un'opportunità di affacciarsi concretamente all'immenso e pervasivo mondo dell'analisi degli investimenti, con un approccio che integra modelli matematici e applicazioni empiriche a supporto di essi. L'ambito non è, tipicamente, affrontato negli studi triennali e richiede buone conoscenze analitiche, insieme ovviamente alla capacità di elaborare dati attraverso avanzate procedure computazionali ma risulta essere fondamentale per chiunque voglia approcciarsi alla moderna finanza; la decisione di sviluppare come prova finale di questo percorso di studi il tema descritto scaturisce, dunque, da un forte interesse personale e dalla sua utilità da un punto di vista metodologico ancor prima che concettuale, in un'ottica di prosecuzione degli studi e di professioni future.

INTRODUZIONE AL RISCHIO NEI MERCATI FINANZIARI

1.1 CLASSIFICAZIONE DEL RISCHIO E CONCETTI INTRODUTTIVI

In letteratura esistono diverse tipologie di rischio¹. Le principali, indicate anche dalle direttive del comitato di Basilea per la supervisione bancaria, sono:

- *Rischio di mercato*, talvolta definito come rischio sistematico o ineliminabile e si riferisce all'incertezza relativa al rendimento di un'attività finanziaria dovuta a condizioni generali del mercato come ad esempio l'andamento dei tassi di cambio, del prezzo dei beni e servizi, gli shock macroeconomici in senso lato
- *Rischio di credito*, inteso come potenziali conseguenze negative derivanti dal deterioramento di crediti e di posizioni attive detenute nei confronti di terzi
- *Rischio operativo*, rappresentato dalla probabilità di accusare delle perdite dovute al fallimento di processi interni all'organizzazione quali, ad esempio, scarsa accuratezza nella gestione delle risorse umane, poco accorta pianificazione strategica, problematiche di natura organizzativa ed eventi esterni avversi connessi all'amministrazione dell'azienda (si pensi, tra le altre cose, a contenziosi, danni di immagine e turbolenze negli approvvigionamenti)

E' inoltre degno di essere menzionato il *rischio di errore di specificazione* dei modelli analitici che, in diverse occasioni, ha generato calibrazioni distorte del rischio ed in generale delle condizioni del sistema economico, conducendo a decisioni sbagliate.

Le valutazioni delle agenzie di rating durante i mesi precedenti lo scoppio della crisi finanziaria ne sono un esempio lampante. Le stesse agenzie, infatti, stimarono erroneamente il rischio sistemico, in quel periodo imperante a causa della bolla in corso nel mercato immobiliare e attribuirono valutazioni eccessivamente positive a strumenti e intermediari finanziari che, in realtà, incorporavano un'elevatissima correlazione nelle probabilità di default. L'assegnazione di un rating poco rappresentativo della realtà conduce, naturalmente, ad una distorsione delle decisioni di investimento e ad una conseguente amplificazione della distanza tra valore fondamentale e quotazione dei titoli. E' opinione diffusa in letteratura, infatti, che le decisioni in materia di Leverage Targeting da parte delle grandi banche americane (ma non solo) siano una delle cause fondamentali delle sofferenze bancarie

¹ Riferite soprattutto alla gestione bancaria

registrate negli anni a venire, talvolta sfociate in veri e propri fallimenti. L'obiettivo di leva veniva rivisto costantemente a fronte del tanto incessante quanto falso aumento del valore delle attività finanziarie (CDOs prevalentemente) detenute dagli istituti di credito, producendo un'onda d'urto amplificatrice delle gravi conseguenze derivanti dallo scoppio della bolla attraverso un meccanismo denominato pro ciclicità del leverage (Adrian e Shin, 2009).

Insomma la scorretta progettazione dei modelli predittivi contribuisce ad alimentare le fonti di incertezza e di rischio presenti nei mercati finanziari, rendendo investitori, gestori di intermediari e policy maker miopi e portandoli ad operare delle scelte dannose, non soltanto per loro stessi ma, in casi estremi, per l'intero sistema. L'interesse a quantificare il rischio e a gestirlo nasce da soggetti molto diversi tra loro e coinvolge, a vario titolo, l'intera collettività, inserendosi in un quadro di progresso tecnico e scientifico.

E' importante sottolineare che un adeguato utilizzo delle tecniche descritte influenza prepotentemente la gestione di portafoglio e la gestione aziendale in senso lato (modificandone l'efficienza e i risultati attesi) e richiede un approccio multidisciplinare, che prenda in considerazione professionalità di varia natura all'interno delle organizzazioni. E' auspicabile che in ottica futura un sempre maggior numero di attori economici si avvalga delle tecniche quantitative di risk management (QRM), rendendosi conto che la loro potenza non rimane confinata alla finanza pura piuttosto che all'attività bancaria e assicurativa. Qualora ben strutturate, le analisi quantitative del rischio rappresentano una stella polare da seguire per gli addetti ai lavori, una fonte imprescindibile di orientamento, specialmente per chi (più di altri) è chiamato a navigare nel turbolento mare dell'incertezza.

Gli studi empirici mostrano in modo inequivocabile come la gestione del rischio abbia contribuito a contenere l'esposizione delle imprese e dei portafogli alle turbolenze presenti nei mercati e come la stessa abbia determinato un miglioramento considerevole delle performance. Risulta intuitivo pensare come un cash flow meno volatile unito alla possibilità di monitorare l'adeguatezza della consistenza patrimoniale in relazione ai rischi intrapresi sfoci in una drastica diminuzione del costo del capitale ed una conseguente maggiore propensione ad intraprendere investimenti. Le analisi statistico-econometriche mostrano che un portafoglio di società che si avvalgono di misure di risk management performa meglio rispetto a portafogli di grandi aziende che ne restano escluse, controllando ovviamente per le altre variabili (Allayannis e Weston, 2005).

All'interno di questo lavoro si tratterà il rischio presente nei mercati finanziari, facendo riferimento alla volatilità di portafoglio e avvalendosi di un approccio integrato tra concetti

puramente teorico-matematici e applicazioni empiriche. La trattazione sarà incentrata sul rischio globale dei titoli e dei portafogli, senza addentrarsi nello specifico sulla sensibilità delle performance rispetto ai singoli fattori di rischio.

1.2 RENDIMENTO DEGLI ASSET E FATTI STILIZZATI

Nonostante i prezzi delle attività finanziarie rivestano un ruolo di primaria importanza, i modelli di misurazione del rischio si focalizzano sulle dinamiche dei rendimenti poiché essi possiedono proprietà statistiche decisamente migliori (Christoffersen, 2012). In particolare, definiamo rendimento al tempo (t+1) la seguente relazione:

$$r_{t+1} = \frac{(P_{t+1} - P_t)}{P_t}$$

Dove P rappresenta il prezzo di un titolo quotato nei mercati finanziari in un determinato momento.

Consideriamo il logaritmo dei rendimenti, definito come

$$R_{t+1} = \ln(P_{t+1}) - \ln(P_t)$$

Per capire come modellare al meglio gli ingredienti di un'esaustiva analisi del rischio di portafoglio è estremamente utile conoscere a fondo i meccanismi e le dinamiche operanti frequentemente nei mercati finanziari.

Per familiarizzare con le regolarità empiriche che guidano in genere gli analisti nei processi di stima, prendiamo i dati giornalieri **dal 2 febbraio 2015 al 7 aprile 2020 del noto portafoglio S&P500** ed effettuiamo le opportune trasformazioni attraverso il software R al fine catturare alcune caratteristiche vevoli per la quasi totalità dei titoli e dei fondi quotati. In particolare, partendo dai rendimenti semplici si è operata una trasformazione in logaritmi.

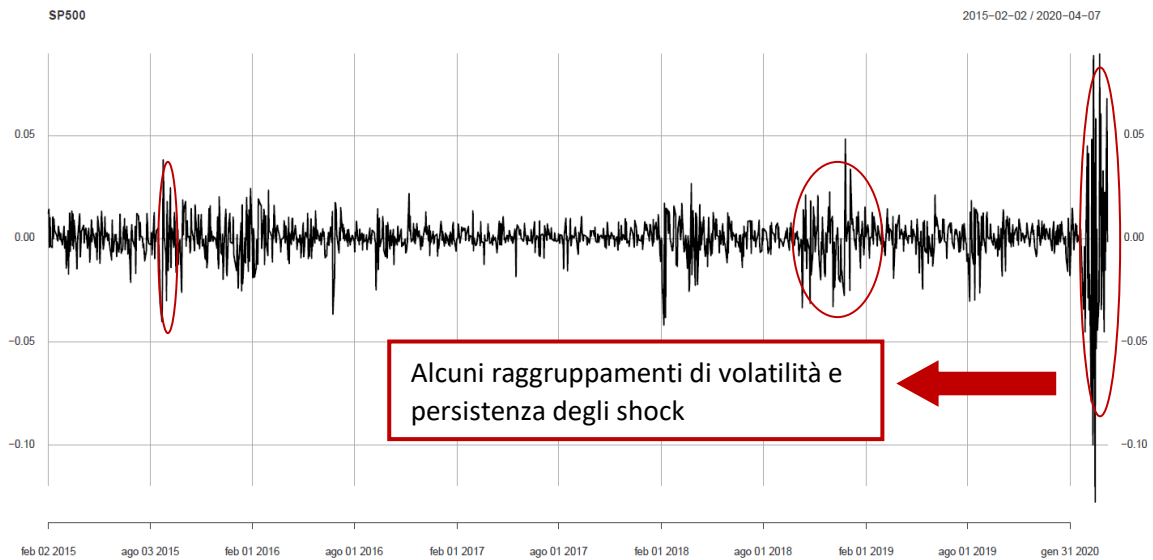


Figura 1.1: Serie storica rendimenti logaritmici S&P500

La varianza dei rendimenti è un primo semplice indicatore della rischiosità di un titolo ed è esprimibile, in questo caso, come quadrato dei rendimenti logaritmici giornalieri, in quanto è possibile supporre senza perdita di veridicità che la media degli stessi sia pari a zero. I dati ci dicono che la varianza mostra autocorrelazione seriale ed eteroschedasticità condizionale, responsabili della formazione di raggruppamenti di volatilità che evidenziano l'alternanza di periodi caratterizzati da forti oscillazioni e periodi relativamente stabili.

$$\text{Corr}(R^2_{t+1}; R^2_t) > 0$$

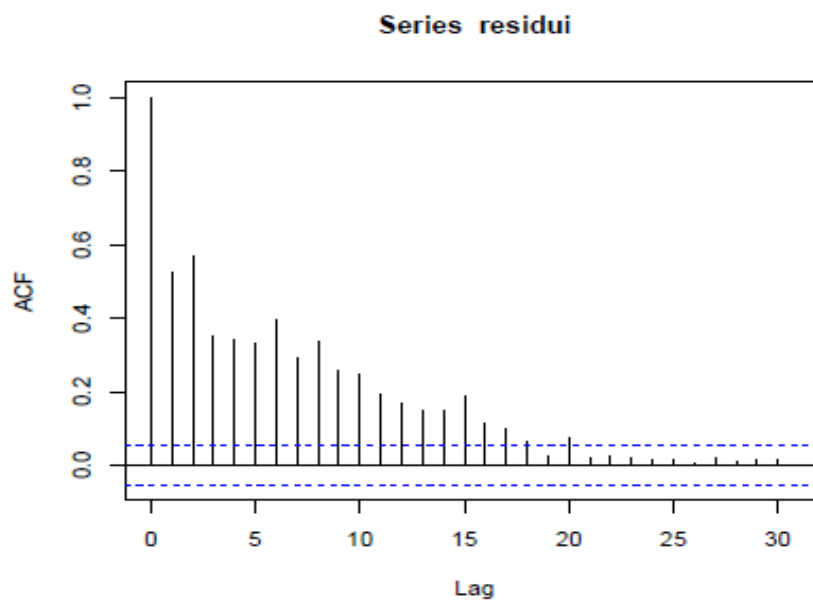


Figura 1.2: Correlogramma varianza S&P500

Particolarmente interessante ai fini della nostra analisi risulta essere la caratterizzazione della distribuzione dei rendimenti storici. In base allo stesso dataset relativo al portafoglio S&P500 possiamo affermare che i rendimenti espressi in logaritmi non seguano una distribuzione Normale e che dunque sarà cruciale l'utilizzo di tecniche adeguate atte ad investigare la funzione di distribuzione, necessaria per la specificazione dei modelli e per la formulazione di ipotesi legate al rischio e al rendimento. Sono infatti oggetto di questo elaborato le misure probabilistiche, più affidabili e moderne rispetto ad ogni altra forma di monitoraggio del rischio.

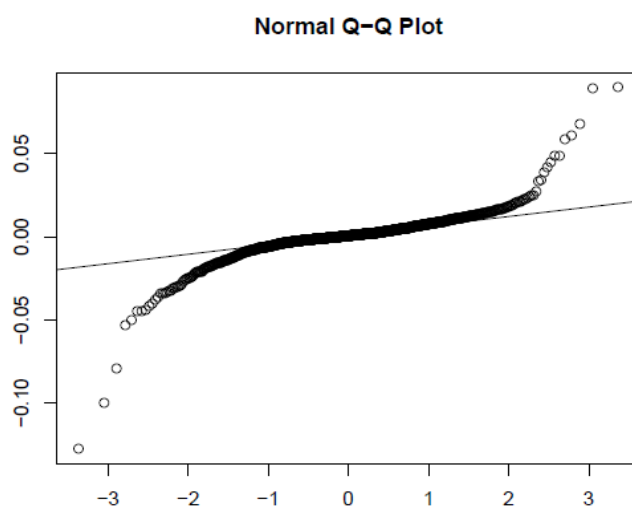


Figura 1.3: qqplot rendimenti logaritmici S&P500

Formalmente è possibile verificare l'ipotesi di normalità avvalendosi di opportuni test statistici. In questa sede faremo riferimento al test di Jarque-Bera.

Sulla base dei fatti stilizzati analizzati si rende necessario costruire modelli per determinare la volatilità del portafoglio in modo tale da catturare la suddetta dipendenza tra valori correnti e passati, tecniche di modellizzazione delle distribuzioni dei rendimenti per superare il concetto di normalità e metodologie di misurazione del rischio, sottoponendole ad appropriati test che ne assicurino la correttezza.

Definiamo invece il rendimento di portafoglio con il seguente rapporto:

$$r_{PF,t+1} = \frac{V_{PF,t+1} - V_{PF,t}}{V_{PF,t}} = \sum_{i=1}^n w_i r_{i,t+1} \quad \text{con} \quad V_{PF,t+1} = \sum_{i=1}^n w_i P_{i,t+1} \quad w_i \Rightarrow$$

peso dell'asset i – esimo all'interno del portafoglio

Che in notazione logaritmica risulta:

$$R_{PF,t+1} = \ln(V_{PF,t+1}) - \ln(V_{PF,t})$$

E' opportuno sottolineare come il passaggio dall'analisi di un singolo asset ad un portafoglio composto non sia immediata ma anzi, richiederà una puntuale trattazione dei metodi computazionali di ottimizzazione di portafoglio al fine di implementare delle asset allocation che risultino coerenti con ipotetici obiettivi dell'investitore (massimizzare un indice, minimizzare il rischio, ecc ecc). Per la risoluzione di questi problemi e per la determinazione della frontiera efficiente è opportuno operare una stima dinamica della volatilità di portafoglio (e dunque della distribuzione dei rendimenti), tenendo presente che tipicamente la correlazione tra i singoli asset varia nel tempo; per tale ragione si parlerà di matrice di correlazione.

1.3 DISTRIBUZIONI DI PERDITA

Prima di introdurre le metodologie di quantificazione del rischio è opportuno caratterizzare le distribuzioni di perdita visto che è possibile calcolare le misure stesse sia in termini di rendimenti (e quindi riferendosi a valori percentuali), sia analizzando le effettive perdite monetarie.

$$L_{[t,t+\Delta]} = -(V(t + \Delta) - V(t))$$

La formulazione presentata (McNeil, 2005) ci dice, per un dato orizzonte Δ , la perdita di portafoglio durante il periodo.

Il valore di un portafoglio è generalmente definito come una funzione del tempo e di un vettore Z rappresentativo dei fattori di rischio:

$$V_t = f(t, Z_t)$$

Z è noto al tempo t e permette di realizzare quelle che chiameremo simulazioni, ossia l'attribuzione di specifici valori ad ogni fattore di rischio al fine di generare il comportamento atteso di portafoglio (o nel caso di intermediari finanziari l'obiettivo è quello di investigare la solidità patrimoniale attesa simulando varie perdite) per ogni possibile scenario futuro. La conoscenza di Z prescinde molto spesso dall'analisi quantitativa. L'aleatorietà del valore del portafoglio deriva dall'introduzione di una variabile casuale definita come "cambiamento dei fattori di rischio":

$$(X_t) = Z_t - Z_{t-1}$$

In questo modo la nuova perdita viene definita come:

$$L_{t+1} = -(f(t+1, Z_t + X_{t+1}) - f(t, Z_t))$$

La distribuzione delle perdite è quindi determinata dalla distribuzione del cambiamento nei fattori di rischio, che ci spinge ad introdurre un'ulteriore notazione definita come operatore di perdita (funzione proprio di X).

$$l_{[t]}(x) = -(f(t+1, Z_t + x) - f(t, Z_t)) \quad x \in R^d$$

Dove d rappresenta la dimensione dello spazio vettoriale caratterizzato dai fattori di rischio.

In conclusione osserviamo la relazione:

$$L_{t+1} = l_{[t]}(X_{t+1})$$

Che ci dice come la perdita generata al tempo t+1 è nient'altro che la manifestazione delle conseguenze della variazione nei fattori di rischio rispetto al tempo t.

$$F_l(l) = P(L \leq l)$$

Avendo fissato alcuni concetti introduttivi è possibile addentrarsi nello studio delle misure di risk management.

1.4 TEST DI JARQUE-BERA

Fa parte della famiglia dei test di normalità che si basano sui momenti. L'utilizzo di asimmetria e curtosi campionarie permette di costruire la seguente statistica test:

$$JB = \frac{n}{6} \left(S^2 + \frac{1}{4} (K - 3)^2 \right)$$

Dove n rappresenta il numero di osservazioni e S (asimmetria) e K (curtosi) sono determinati attraverso le formule:

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{(\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$K = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{(\sigma^2)^2} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2\right)^2}$$

μ_3 e μ_4 sono il terzo e il quarto momento dei dati interni al campione.

$$\begin{cases} H_0: & \text{ipotesi congiunta di asimmetria ed eccesso di curtosi nulle} \\ H_1: & \text{le rilevazioni campionarie presentano asimmetria o eccesso di curtosi} \end{cases}$$

L'ipotesi nulla implica che la popolazione di dati si distribuisce secondo una Normale.

La statistica test *JB* si distribuisce asintoticamente come una chi-quadrato con due gradi di libertà e per affermare l'accettazione o il rifiuto dell'ipotesi nulla si utilizza il p-value prodotto dalla funzione "jarque.bera.test" contenuta nel pacchetto "normtest" di R.

Riprendendo i fatti stilizzati relativi all'S&P500 si ottiene il seguente risultato:

Jarque-Bera test		
data	SPrets	
X-squared=34562	df=2	p-value<2,2e ⁻¹⁶

Che conferma la distanza dalla distribuzione Normale già rilevata dal qqplot esposto in precedenza. Si tratta di una regolarità empirica all'interno dei mercati finanziari dovuta alla presenza di code grosse e asimmetria. L'imponente letteratura ha infatti più volte dimostrato che gli outlier sono ben più frequenti rispetto a quanto descritto dalla Normale (Mandelbrot, 1963) e che molto spesso i meccanismi di formazione delle aspettative e di reazione agli shock producono forme di asimmetria delle distribuzioni.

MISURE DEL RISCHIO STOCASTICHE

2.1 VALUE AT RISK

Il Var è probabilmente la più utilizzata misura di risk management ed è stata designata dalla direttiva “Basilea 2” quale criterio obbligatorio di valutazione delle esposizioni delle banche ai fattori di rischio di mercato. Ancor oggi è ampiamente utilizzata, sebbene integrata da metodologie più sofisticate che, come avremo modo di apprendere nel seguito, permettono di superare alcune criticità insite in questo tipo di misura.

Definizione: *Il Value at Risk può essere definito come la massima perdita che il portafoglio subirà in un dato orizzonte temporale con un determinato livello di confidenza. Formalmente:*

$$VaR_{\alpha} = \inf\{l \in \mathfrak{R}: P(L > l) \leq (1 - \alpha)\} = \inf\{l \in \mathfrak{R}: F_L(l) \geq \alpha\}$$

Si tratta più semplicemente di un quantile della distribuzione di perdita. Spetta all'analista la scelta del livello di confidenza $(1-\alpha)$, al crescere del quale aumenta il VaR.

Analogamente possiamo formalizzare il VaR considerando la distribuzione dei rendimenti (è il peggior rendimento ottenibile nell' $(1-\alpha)\%$ dei casi):

$$VaR_{\alpha} = \inf\{\bar{R} \in \mathfrak{R} | f(R \geq \bar{R}) \geq \alpha\}$$

O ancora, dato $F(\bar{R}) = f(R \leq \bar{R})$, è possibile ricavare:

$$VaR_{\alpha} = \inf\{\bar{R} \in \mathfrak{R} | [1 - F(\bar{R})] \geq \alpha\}$$

$$VaR_{\alpha} = F^{-1}(\alpha)$$

Dove F^{-1} è l'inversa di una generica funzione di ripartizione.

Esistono differenti approcci al calcolo del VaR:

- Simulazioni storiche
- Metodo parametrico generico
 1. Metodo parametrico con assunzione di normalità
 2. Metodo parametrico con t di Student
 3. Cornish-Fisher VaR
- Simulazioni Monte Carlo

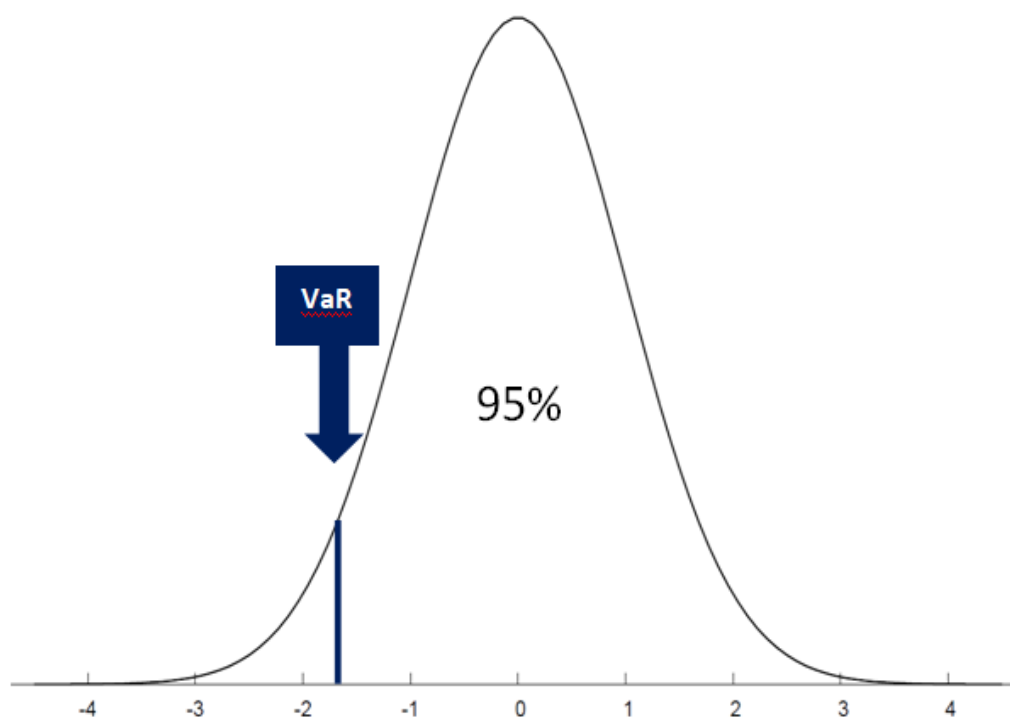


Figura 2.1: $VaR_{0,05}$ riferito ad una distribuzione Normale standardizzata dei rendimenti.

2.1.1 SIMULAZIONI STORICHE

Tale Approccio si basa sull'ipotesi che i rendimenti futuri seguano la stessa distribuzione della serie storica di m dati disponibili in un determinato momento e che i pesi di ogni titolo all'interno del portafoglio rimangano immutati nel tempo. Formalmente abbiamo:

$$VaR_{\alpha,t+1} = -Quantile(\{R_{PF,t+1-\tau}\}_{\tau=1}^m, \alpha)$$

Questo metodo ha il pregio di risultare estremamente semplice dato che non è necessaria alcuna parametrizzazione delle distribuzioni di probabilità dei rendimenti; è sufficiente collezionare la serie storica, scegliere orizzonte temporale e livello di confidenza.

Il metodo risulta poco aderente alla realtà in quanto non è credibile che tutti gli scenari futuri possibili siano opportunamente incorporati nelle frequenze passate. Inoltre la scelta relativa alla dimensione del campione di dati non fornisce alcuna garanzia sulla riuscita dell'analisi poiché si rischia di impostare una dimensione troppo elevata che dia un peso eccessivo alle osservazioni remote e un peso relativamente basso alle realizzazioni recenti che presumibilmente saranno più rilevanti per la distribuzione dei rendimenti futuri (Christoffersen, 2012). D'altro canto una serie storica troppo corta produce stime del VaR poco accurate.

SIMULAZIONI STORICHE PESATE

Pesiamo ogni realizzazione passata attraverso un parametro il cui valore decresce esponenzialmente allontanandosi dall'ultima osservazione, in modo da attribuire maggiore influenza ai dati più recenti.

$$\theta_\tau = \{\theta^{\tau-1}(1 - \theta)/(1 - \theta^m)\}_{\tau=1}^m$$

Si pone il problema relativo alla scelta del parametro che rischia di essere arbitrario e poco coerente. Inoltre nel metodo WHS permane la questione della scarsa capacità predittiva dei modelli che si avvalgono di soli dati storici.

$$VaR_{\alpha,t+1} = -Quantile\left(\{\theta_\tau R_{PF,t+1-\tau}\}_{\tau=1}^m, \alpha\right)$$

2.1.2 METODO PARAMETRICO GENERICO

Per calcolare il VaR avvalendosi di una parametrizzazione è necessario stimare i momenti della distribuzione attraverso i dati storici e quindi utilizzare le frequenze stimate per ottenere il value at risk (Follegot, 2019). Per implementare questo metodo è fondamentale che rendimenti osservati e futuri seguano esattamente la distribuzione ipotizzata. Tuttavia si tratta di un'assunzione molto restrittiva poiché è difficile credere che sia i rendimenti storici che quelli futuri siano distribuiti come una funzione stimata parametricamente; tale procedimento non permette di eseguire previsioni dinamiche visto che i parametri delle distribuzioni (in particolare la varianza) risultano costanti nel tempo. Nonostante ciò è possibile, in alcuni casi, che l'approccio parametrico fornisca un agile strumento capace di superare le problematiche tipiche del metodo storico, pertanto vale la pena analizzarlo.

➤ ASSUNZIONE DI NORMALITA'

Si assuma:

- Media: μ
- Varianza: σ^2
- Simmetria: $m^3 = 0$
- Curtosi: $m^4 = 0$

Si assume inoltre che i rendimenti si distribuiscano secondo una Normale del tipo $R \sim N(\mu; \sigma^2)$

Allora il calcolo parametrico del VaR seguirà la relazione:

$$VaR_\alpha = \mu + \sigma \varphi^{-1}(\alpha)$$

Dove φ^{-1} rappresenta l'inversa della distribuzione Normale dei rendimenti logaritmici.

➤ DISTRIBUZIONE LEPTOCURTICA: t DI STUDENT

Si assuma:

- Media: μ
- Varianza: σ^2
- Simmetria: $m^3 = 0$
- Curtosi: m^4 finita ma $\neq 0$

E si supponga di stimare i rendimenti nel modo seguente: $\frac{R-\mu}{\sigma}$, in modo tale che essi siano distribuiti secondo una t-Student con g gradi di libertà $R \sim t\left(\mu, \frac{g}{g-k}, g\right)$. Il VaR calcolato parametricamente risulta:

$$VaR_\alpha = \mu + \sigma t_g^{-1}(\alpha)$$

Dove t_g^{-1} è l'inversa della distribuzione t-student con g gradi di libertà e σ la deviazione standard. La t di Student ha il pregio di possedere code più grosse rispetto alla Normale, offrendo la possibilità di considerare adeguatamente perdite importanti.

➤ CORNISH-FISHER VAR

Si tratta di una metodologia che consente di utilizzare eccesso di curtosi e asimmetria delle frequenze osservate per ottenere una misura di rischio più accurata nel caso di rendimenti non distribuiti esattamente secondo una funzione prestabilita (t Student o Normale).

L'idea è di approssimare i percentili di una distribuzione probabilistica basandosi sui rispettivi valori cumulati osservati.

$$VaR_\alpha = -\sigma CF_\alpha^{-1}$$

Dove

$$CF_{\alpha}^{-1} = \varphi_{\alpha}^{-1} + \frac{\zeta_1}{6} [(\varphi_{\alpha}^{-1})^2 - 1] + \frac{\zeta_2}{24} [(\varphi_{\alpha}^{-1})^3 - 3\varphi_{\alpha}^{-1}] - \frac{\zeta_1^2}{36} [2(\varphi_{\alpha}^{-1})^3 - 5\varphi_{\alpha}^{-1}]$$

Con ζ_1 *asimmetria* e ζ_2 *eccesso di curtosi* dei rendimenti standardizzati (rispetto alla distribuzione Normale).

Ipotizzando di calcolare il VaR al 5% avendo osservato una distribuzione di valori cumulati tale per cui

$$\varphi_{0,05}^{-1} \approx -1,9$$

otteniamo

$$CF_{0,05}^{-1} \approx -1,9 + \frac{\zeta_1}{6} (2,61) + \frac{\zeta_2}{24} (-1,159) - \frac{\zeta_1^2}{36} (-4,218)$$

Che con ipotesi di asimmetria pari a -1 ed eccesso di curtosi pari a 4 diventa:

$$CF_{0,05}^{-1} \approx -2,411$$

$$VaR_{0,05} = -2,411\sigma$$

Tale value at risk risulta maggiore rispetto al corrispondente calcolato su una distribuzione dei rendimenti normale standardizzata:

$$VaR_{0,05} = -1,645\sigma_{PF}$$

e ci mostra come il risultato ricavato dallo studio sia sensibile all'ipotesi operata in merito alla distribuzione probabilistica, confermando pertanto l'utilità dell'estensione di Cornish-Fisher che consente di caratterizzare distribuzioni con una più coerente calibrazione.

2.1.3 SIMULAZIONI MONTE CARLO

Il metodo Montecarlo è una procedura computazionale che rientra nella scenario based theory e si basa sull'idea di utilizzare una serie di dati registrati per generare una sequenza di numeri casuali attraverso opportuni software. L'obiettivo è quello di simulare n scenari ipotetici, ad ognuno dei quali è associato un differente profitto o perdita.

In sostanza l'algoritmo Montecarlo trasforma dati storici in variabili casuali che a loro volta vengono impiegate per simulare vari scenari di mercato, applicati successivamente al portafoglio con lo scopo di calibrare la distribuzione dei rendimenti prevista. Sulla nuova distribuzione verrà poi calcolato il VaR.

Il metodo si compone delle seguenti fasi:

- Osservazione degli indicatori di mercato esplicativi dei fattori di rischio: prezzi, volatilità, tassi di cambio, indici di fiducia, e molti altri
- Generazione di possibili variazioni dei parametri di cui al punto precedente attraverso simulazioni
- Determinazione dei rendimenti e delle perdite di portafoglio a fronte dei suddetti cambiamenti nei fattori di rischio
- Reiterazione dei punti precedenti per un elevato numero di prove al fine di caratterizzare la distribuzione delle perdite di portafoglio con il più basso errore di stima possibile
- Calcolo del value at risk

Tale approccio presenta il vantaggio di non richiedere alcuna ipotesi a priori circa la distribuzione dei rendimenti o delle perdite e di garantire enorme flessibilità nel tenere in considerazione le specifiche del portafoglio. Permette inoltre, partendo da dati storici, di generare stime più precise rispetto ai metodi descritti precedentemente ed è utilizzabile con generalità, a prescindere dalla tipologia di titoli considerati. Tuttavia la sua enorme complessità e lo sforzo computazionale richiesto non permettono un'agevole applicazione e lo confinano a contesti limitati e di alto livello.

2.1.4 CRITICITA' DEL VAR

Per esprimere un giudizio finale sul VaR è necessario introdurre il concetto di misura di rischio coerente, formulato da Artzener (1999) in un famoso articolo.

Si consideri I come insieme di variabili casuali reali. Una misura di rischio ρ è definibile coerente se risulta:

- Monotona:

dati $X_1, X_2 \in I$, se $X_1 \leq X_2$ allora $\rho(X_1) \leq \rho(X_2) \quad \forall X \in R$

- Subadditiva

se $X_1, X_2, X_1 + X_2 \in I$ allora $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2) \quad \forall X \in R$

- Linearmente invariante

Siano $X \in I$ e $k \in R$ allora $\rho(X + k) = \rho(X) - k \quad \forall X \in R$

➤ Omogenea di primo grado

Siano $X \in I, \varepsilon > 0$ e $\varepsilon X \in I$ allora $\rho(\varepsilon X) = \varepsilon \rho(X)$, in base al teorema di Eulero

Il VaR, come descritto sopra, non rispetta il principio di sub additività, dal momento in cui non vi è alcuna garanzia che la somma dei VaR (calcolati sulla distribuzione delle perdite) di due distinti portafogli risulti maggiore del VaR relativo al portafoglio ottenuto come combinazione dei precedenti. Formalmente non è rispettata la seguente relazione:

$$\varphi_{\alpha}^{-1}(L_1 + L_2) \leq \varphi_{\alpha}^{-1}(L_1) + \varphi_{\alpha}^{-1}(L_2)$$

L'implicazione immediata di quanto detto risiede nell'impossibilità di cogliere i benefici della diversificazione, violando una delle prescrizioni fondamentali della teoria economica.

Inoltre tale fenomeno rende l'analisi della solidità degli intermediari finanziari distorta, dato che in assenza della sub additività non è possibile affermare con sicurezza che il rischio globale dell'istituto sia minore della sommatoria della rischiosità delle singole divisioni. Ovvero non è possibile affermare che il rispetto dei requisiti prudenziali da parte delle singole unità strategiche di un intermediario garantisca un'adeguata dotazione patrimoniale complessiva.

Un'altra problematica fondamentale del VaR è rappresentata dalla scarsa attenzione nei confronti del cosiddetto rischio di coda. Spesso accade che due portafogli presentino un VaR molto simile pur avendo distribuzioni di probabilità cumulate delle perdite superiori al VaR stesso, molto diverse. Quanto detto equivale ad affermare la possibilità di ottenere giudizi analoghi in merito alla rischiosità di portafogli che presentano distribuzioni dei valori di coda differenti.

Infine si ricordi come la statistica presentata dipenda molto dai parametri scelti. In particolare è necessario individuare orizzonte temporale e livello di confidenza adeguati e funzionali al fine ultimo della nostra analisi. Inoltre appare delicata la stima della volatilità del portafoglio, ingrediente imprescindibile del processo di risk measurement.

I prossimi argomenti si pongono proprio l'obiettivo di costruire dei modelli atti ad attenuare le complicazioni sopra descritte, in modo tale da condurre il lettore verso un corpo di strumenti analitici in grado di simulare semplici ma complete e realistiche analisi del rischio finanziario. Proseguiamo la trattazione occupandoci delle prime due patologie del VaR, identificando una misura alternativa che tenga in considerazione il rischio di coda e che risulti sub additiva.

2.2 EXPECTED SHORTFALL

Nei periodi caratterizzati da shock economici avversi è possibile registrare delle perdite molto consistenti in grado di porre il portafoglio o l'organizzazione oggetto dell'analisi sotto stress. Il VaR, come detto precedentemente, si focalizza solo sulla percentuale di perdite attese in futuro eccedenti un valore preciso (il VaR stesso), senza porre l'attenzione sulla loro magnitudo; in altre parole il value at risk risponde alla domanda: qual è il peggior risultato ottenibile nell' $(1-\alpha)\%$ dei casi? L'intento è di trovare una misura del rischio che mantenga la semplicità del VaR ma che contenga informazioni relative alla forma delle code della distribuzione.

Definizione: *l' expected shortfall (ES) o conditional value at risk (CVaR) può essere definito come il valore atteso delle perdite future condizionate al fatto di essere eccedenti il VaR.*

Formalmente:

$$ES_\alpha = \frac{E(L; L \geq q_\alpha(L))}{1 - \alpha} = E(L|L \geq VaR_\alpha)$$

$$ES_\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 q_u(F_L) du$$

Dove $q_u(F_L)$ rappresenta la funzione dei quantili della distribuzione di perdita (F_L).

$$ES_\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(L) du$$

Riferendoci alla distribuzione dei rendimenti risulta:

$$ES_\alpha = -E[R|R < -VaR_\alpha]$$

Ovvero il valore atteso del peggior $\alpha\%$ dei rendimenti (dei rendimenti inferiori al VaR_α).

Matematicamente si tratta di considerare una distribuzione di probabilità troncata inferiormente (come indicato nella figura sottostante) o superiormente e di determinare la speranza matematica dei valori selezionati:

$$E[X|X \leq \gamma] = \int_{-\infty}^{\gamma} xf(x|x < \gamma) dx$$

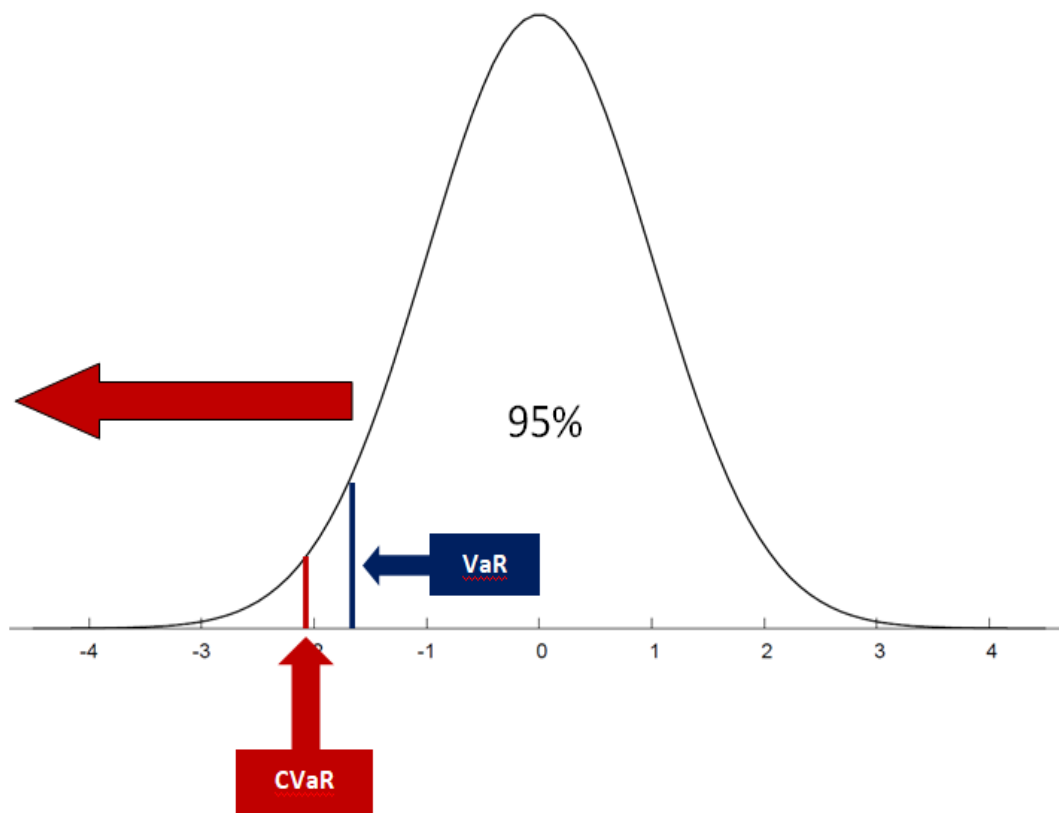


Figura 2.2: $CVaR_{0,05}$ riferito ad una distribuzione Normale standardizzata dei rendimenti logaritmici

Analogamente a quanto espresso in merito al VaR, anche l'ES può essere costruito attraverso differenti approcci:

2.2.1 APPROCCIO STORICO

Definita una serie storica di rendimenti al tempo t , l'ES è identificato dal valore atteso della distribuzione dei rendimenti passati condizionati al fatto di essere minori del VaR, calcolato sulla base di un dato livello di confidenza. Analiticamente:

$$ES_{\alpha,t} = \sum_{i=1}^n R_i f(R_i), \quad \text{con } R_i \leq VaR_{\alpha,t}$$

Tale approccio mantiene tutte le criticità già espresse nell'ambito del metodo storico per il calcolo del VaR.

2.2.2 PARAMETRIZZAZIONE

Occorre stimare i momenti della distribuzione dei rendimenti futuri partendo dalla serie storica disponibile al tempo t . Al fine di operare una corretta parametrizzazione è utile rivedere il Teorema di Bayes.

Teorema di Bayes: dati due eventi A, B si intende determinare la probabilità che si verifichi il primo condizionatamente al fatto che sia avvenuto il secondo:

$$f(A|B) = \frac{f(B|A)f(A)}{f(B)}$$

In modo equivalente ma più opportuno ai fini del nostro studio consideriamo una variabile casuale X ed un parametro reale γ e identifichiamo l'evento A con una realizzazione della variabile casuale stessa e l'evento B attraverso la relazione $X < \gamma$. Allora:

$$f(X|X < \gamma) = \frac{f(X < \gamma|X)f(X)}{f(X < \gamma)} = \frac{\phi(X)}{\Phi(\gamma)}$$

Dove $\phi(X) = f(X) \quad \forall X \leq \gamma$ e $\Phi(\gamma)$ è la funzione di probabilità cumulata.

A questo punto è possibile definire l'ES con distribuzione dei rendimenti parametrizzata: si consideri la generica distribuzione $R \sim D(\mu, \sigma^2)$, l'evento B definito come $R \leq VaR_\alpha$ e l'evento A quale realizzazione probabilistica di un qualsiasi valore del supporto (rendimenti), allora:

$$f(R|R \leq VaR_\alpha) = \frac{f(R \leq VaR_\alpha|R)f(R)}{f(R \leq VaR_\alpha)} = \frac{\phi(R)}{\Phi(VaR_\alpha)}$$

Siccome: $VaR_\alpha = \Phi_\alpha^{-1}$, abbiamo che $f(R|R \leq VaR_\alpha) = \frac{\phi(R)}{\alpha}$. Riprendendo la formula del CVaR si dimostra che:

$$ES_\alpha = E[R|R \leq VaR_\alpha] = \frac{\int_{-\infty}^{VaR_\alpha} R\phi(R)dR}{\Phi(VaR_\alpha)}$$

Da cui ricaviamo:

$$ES_{\alpha} = \frac{\int_{-\infty}^{VaR_{\alpha}} R\phi(R)dR}{\alpha}$$

Dove il VaR è calcolato sulla stessa distribuzione generica dei rendimenti supposta precedentemente.

➤ ES PARAMETRICO CON DISTRIBUZIONE NORMALE

Si supponga che i dati si distribuiscano secondo una Normale $\Rightarrow R \sim N(\mu, \sigma)$, allora:

$$ES_{\alpha} = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha}$$

Riprendendo la generica formulazione dell'ES:

$$\frac{\int_{-\infty}^{\alpha} R\phi(R)dR}{\alpha} = \frac{\phi(VaR_{\alpha})}{\alpha} = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha}$$

Dove ϕ rappresenta la densità della Normale standardizzata e Φ^{-1} la funzione dei quantili (riferita sempre alla Normale std).

➤ ES PARAMETRICO CON DISTRIBUZIONE T-STUDENT

Si supponga che i dati si distribuiscano secondo una t-Student con g gradi di libertà $\Rightarrow R \sim t(g)$, allora

$$ES_{\alpha} = \mu + \sigma \frac{\phi(t_g^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha} \left(\frac{g + (t_g^{-1}(\alpha))^2}{g - 1} \right)$$

Dove ϕ rappresenta la densità della distribuzione t-Student e t^{-1} l'inversa della stessa.

Tale formula verrà applicata direttamente, non essendoci una funzione prestabilita deputata al calcolo del CVaR t-Student all'interno del software, contrariamente a quanto avviene per il metodo storico, per quello parametrico gaussiano e con estensione di Cornish-Fisher.

I gradi di libertà della distribuzione t-Student che meglio interpola i dati (da applicare alla formula durante l'elaborazione) vengono ricavati come soluzione della seguente equazione, arrotondando il risultato all'intero più vicino:

$$k = \frac{6}{g - 4}$$

$$g = \frac{6 + 4k}{k}$$

Dove l'indice di curtosi (k) è calcolato direttamente dal software qualora gli si chieda di produrre le statistiche descrittive.

COMMENTI:

Il metodo parametrico risulta applicabile a qualsiasi distribuzione scelta, operando naturalmente le opportune calibrazioni, dal momento in cui i parametri delle singole distribuzioni differiscono. Si tenga presente che anche le simulazioni Montecarlo sono estendibili al CVaR.

La misura appena presentata risulta più conservativa rispetto al VaR, garantendo una gestione del rischio più prudente. Tale risultato non sorprende, visto che l'expected shortfall considera la media delle perdite attese eccedenti il VaR stesso, generando un valore certamente più grande che indurrà il soggetto decisionale a tutelarsi maggiormente, a parità di altre condizioni.

MODELLI ECONOMETRICI PER VOLATILITA' E VaR DINAMICO

Nei corsi introduttivi di finanza si considera la radice della varianza dei rendimenti storici come misura della dispersione dei dati attorno al valore atteso e dunque come indicatore della volatilità di un titolo quotato. Tuttavia tale valore risulta spesso inadeguato a causa della sua scarsa attitudine a investigare le proprietà fondamentali delle serie storiche, rendendo di fatto il risultato ottenuto distorto e totalmente inaffidabile. Inoltre i metodi di calcolo di VaR e CVaR analizzati nel capitolo precedente permettono di stimare la volatilità dei rendimenti secondo un approccio storico o parametrico statico, assumendola costante nel tempo. Per operare delle previsioni dinamiche in merito all'oscillazione dei rendimenti, che come detto rappresenta un ingrediente fondamentale dell'analisi del rischio, è necessario stimare modelli per serie storiche. In questo elaborato verrà considerata la famiglia di modelli econometrici con maggiore popolarità tra gli addetti ai lavori grazie alle ottime capacità predittive dimostrate negli anni.

3.1 GENERALIZED AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSKEDASTICITY MODEL (GARCH)

Proposto per la prima volta da Bollerslev (1986) dopo aver ripreso il processo ARCH che fruttò a Robert Engle il Premio Nobel per l'economia nel 2003, il modello GARCH possiede il grande pregio di superare l'ipotesi che la varianza sia costante, riconoscendo la differenza tra varianza condizionata e non condizionata. Nei modelli GARCH, infatti, soltanto quest'ultima risulta costante nel tempo mentre la prima varia esibendo eteroschedasticità condizionale ed evidenziando la natura auto regressiva del processo generatore dei dati.

Sia: $R_t = E(R_t|I_{t-1}) + \sigma_t z_t$, con $z_t|I_{t-1} \sim i.i.d.$ termine di innovazione e I_{t-1} set informativo disponibile; inoltre $\varepsilon_{t+1} = \sigma_{t+1} z_{t+1}$. Si osservi come volutamente non sia stata imposta una distribuzione Normale delle innovazioni condizionate, potendo applicare tecniche di parametrizzazione che considerino adeguatamente fattori ricorrenti quali asimmetria e leptocurtosi. Nel corso dell'elaborazione si prenderà in considerazione sia il GARCH con innovazioni normali, sia quello con innovazioni distribuite secondo una t-

Student. Per verificare quale risulta più aderente ai dati ci si avvarrà di uno strumento grafico (il qqplot) e del Pearson test per la bontà di adattamento della distribuzione.

La maggior parte delle evidenze empiriche suggerisce che i rendimenti non risultino significativamente autocorrelati e che tendano ad oscillare attorno allo zero (si veda Christoffersen, 2012 per un'ottima visione introduttiva dell'argomento). Tale osservazione ha un'importante implicazione: molti autori ritengono che non sia opportuno utilizzare modelli per serie storiche per prevedere il valore atteso dei rendimenti (Stock e Watson, 2016). Quanto detto è strettamente legato all'ipotesi di mercati efficienti: non è possibile prevedere variazioni dei prezzi azionari in quanto l'informazione disponibile è già stata incorporata dagli investitori all'interno del prezzo corrente. Generalmente si tende, quindi, ad assumere una media condizionale pari a zero, costante nel tempo.

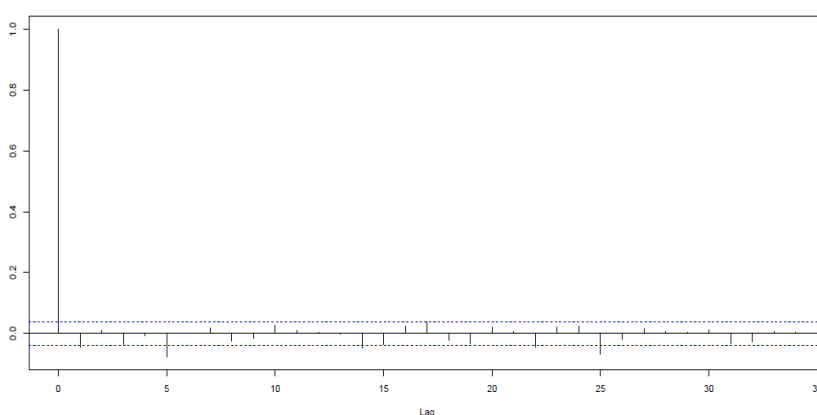


Figura 3.1: Correlogramma rendimenti S&P500

➤ COSTRUZIONE DEL GARCH

Sia $\varepsilon_{t+1} = \sigma_{t+1}z_{t+1}$, allora il processo GARCH è costruito nel modo seguente:

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t+1-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t+1-j}^2$$

la più semplice formulazione del modello GARCH per la varianza dinamica considera un solo ritardo di entrambe le variabili:

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha \varepsilon_t^2 + \beta \sigma_t^2$$

$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$ affinché la varianza risulti finita

Inoltre è necessario che i parametri associati al modello GARCH siano positivi per avere la certezza che la varianza risulti non negativa $\Rightarrow \alpha_i > 0 \forall i$ e $\beta_j > 0 \forall j$

Definiamo la varianza non condizionata (o media di lungo periodo) nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E[\sigma_{t+1}^2] = \omega + \alpha E[\varepsilon_t^2] + \beta E[\sigma_t^2] \\ \Rightarrow \sigma^2 &= \omega + \alpha\sigma^2 + \beta\sigma^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{\omega}{(1-\alpha-\beta)}\end{aligned}$$

Isolando ω : $\omega = \sigma^2(1 - \alpha - \beta)$ e sostituendolo nell'equazione della varianza dinamica di partenza si ottiene:

$$\sigma_{t+1}^2 = (1 - \alpha - \beta)\sigma^2 + \alpha\varepsilon_t^2 + \beta\sigma_t^2 = \sigma^2 + \alpha(\varepsilon_t^2 - \sigma^2) + \beta(\sigma_t^2 - \sigma^2)$$

I parametri sono stimati attraverso l'algoritmo di ottimizzazione della Massima Verosimiglianza.

Il modello GARCH dipende da due parametri, secondo la seguente formalizzazione: *GARCH* (ρ, q). Dove il primo indica i ritardi del termine di errore derivante dal processo di stima dei rendimenti ed il secondo i lags della variabile dipendente (varianza dinamica). Le evidenze empiriche mostrano ottime performance del GARCH(1,1).

La stima della varianza secondo un approccio dinamico permette di effettuare previsioni in merito ai rendimenti e alle perdite future avvalendosi di adeguate e sofisticate tecniche econometriche che catturino fenomeni tipicamente osservati quali, ad esempio, il volatility clustering (grandi oscillazioni tendono a generare forte volatilità nei periodi successivi; viceversa piccole variazioni tendono a produrre una volatilità contenuta). E' possibile calcolare le misure di rischio previste inserendo un processo di stima dei rendimenti (all'interno dei software) proveniente da un GARCH(ρ, q). In tale modo il VaR stimato non appare più come costante (graficamente una retta parallela all'asse delle ascisse) ma assume un andamento dinamico in funzione della volatilità prevista dal modello GARCH impiegato.

➤ PREVISIONE DEL VaR CONDIZIONATO

$$R_t = \mu + \sigma_t z_t$$

$$\sigma_t^2 \sim \text{GARCH}(p, q)$$

$$z_t \sim N(0,1) \text{ iid} \text{ o } z_t \sim t(g) \text{ iid}$$

$$\mu_t = E[R_t | I_{t-1}] \sim 0 \text{ costante}$$

Allora il value at risk condizionato ad 1 giorno è:

$$\widehat{VaR}_{\alpha,t} = -(\mu + \hat{\sigma}_t q_{\alpha,z}) = F_{t,R}^{-1}(\alpha)$$

con $\hat{\sigma}_t \Rightarrow$ *previsione GARCH(p, q)*

Dove $F_{t,R}^{-1}(\alpha)$ è la funzione di ripartizione condizionata dei rendimenti al tempo t e $q_{\alpha,z}$ rappresenta il quantile α della distribuzione dei rendimenti standardizzati previsti.

$\widehat{VaR}_{\alpha,t}$ varia nel tempo, dal momento in cui σ_t è dinamico.

I modelli GARCH sono impiegati per operare delle previsioni *out of sample*, ossia per determinare il VaR che ci si attende per gli h giorni successivi rispetto ad un istante fissato sulla base della volatilità stimata proprio dal modello GARCH, avvalendosi di T rilevazioni precedenti. A tal fine si utilizza il metodo *Rolling Forecast* (implementabile attraverso apposite funzioni presenti nei principali software).

La specificazione GARCH di base appena descritta è in grado di cogliere il fenomeno volatility clustering e la presenza di code grosse, a patto che si inserisca nel codice di R una distribuzione t-Student per il termine di innovazione. Tuttavia esiste una terza regolarità empirica, nota come effetto leverage (fenomeno descritto per la prima volta da F. Black nel 1976): la volatilità tende ad aumentare quando si registrano rendimenti (detti anche shocks) negativi (quando, dunque, il termine di errore nella stima dei rendimenti è minore di zero), mentre decresce in presenza di aumenti di valore dei titoli. Per tenere in considerazione tale comportamento dei mercati finanziari è necessario stimare una variante del modello proposto da Bollerslev ed inserire una distribuzione delle innovazioni asimmetrica. Tra i vari modelli asimmetrici proposti in letteratura si è deciso di presentare e l'exponential GARCH (EGARCH).

3.2 GARCH ASIMMETRICO E IMPATTO DELLE NOTIZIE

➤ EGARCH (Nelson, 1991)

In questo modello la varianza condizionata dipende sia dall'ampiezza che dal segno degli shocks dei periodi precedenti (Bella e Lasaponara, 2017).

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \delta_1 \left[\left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| - E \left(\left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| \right) \right] + \theta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

Una specificazione del modello con $\alpha_1 < 0$ cattura l'effetto leverage $\Rightarrow \text{corr}(\sigma_t, \varepsilon_{t-j}) < 0$. Gli shock negativi producono un aumento maggiore della volatilità rispetto a quelli positivi: la negatività del parametro assicura che una deviazione negativa di $(\varepsilon_{t-1}/\sigma_{t-1})$ dal valore atteso si riversi in un incremento della varianza condizionata.

L'EGARCH presenta un altro vantaggio molto importante: non è necessario imporre alcuna restrizione al processo di stima dei parametri visto che si lavora con il logaritmo di σ_t^2 . La varianza, infatti, assume valori positivi a prescindere dal segno dei parametri stimati (Hamilton, 1994).

➤ NEWS IMPACT CURVE (Engle e Ng, 1993)

Per valutare l'asimmetria di un modello GARCH si utilizza una funzione nota come *news impact curve* (NIC) che misura come le nuove informazioni vengano incorporate nella stima della volatilità, relazionando la deviazione standard condizionata al tempo t con il termine di errore al tempo $t-1$, mantenendo invariato il set informativo esistente. La curva, quindi, visualizza graficamente l'influenza degli shock sulla volatilità condizionata. Nel $GARCH(p, q)$ la NIC assume la forma di una parabola simmetrica attorno allo zero:

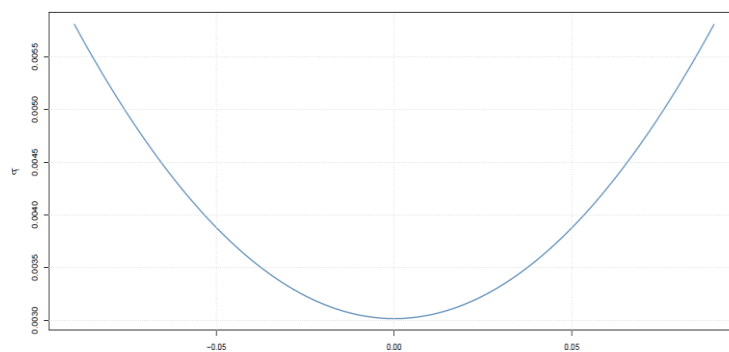


Figura 3.2: NIC del GARCH standard

Per le ragioni appena esposte però, tale equazione non sembra descrivere in modo adeguato la realtà visto che la volatilità condizionata σ_t reagisce spesso in maniera asimmetrica agli shock ε_{t-1} (si amplifica nel caso di shock negativi), come prescritto dall'effetto leverage. Nel modello EGARCH (e nelle altre varianti del GARCH) la curva risulta, invece, asimmetrica attorno allo zero, rendendo talvolta più affidabile il processo di stima.

Infine l'asimmetria della distribuzione dei rendimenti è investigabile graficamente confrontando i qqplot dei residui per ogni possibile specificazione delle innovazioni imposte all'interno del modello (normale, t-Student, Normale asimmetrica, t-Student asimmetrica) e verificando quale si adatta meglio ai dati.

E' opportuno sottolineare come la scelta dei vari input del modello non scaturisca da un'applicazione meccanica e universale dei concetti esposti in questo capitolo, bensì da valutazioni e contestualizzazioni che tengano in considerazione tutti gli aspetti critici potenzialmente riscontrabili durante il processo di stima della volatilità (leptocurtosi, asimmetria, effetto leverage, autocorrelazione della varianza, eteroschedasticità condizionale, significatività dei parametri, scelta dei ritardi e dell'eventuale modello per la stima della media dei rendimenti). Una corretta lettura degli output permette di effettuare dei confronti tra le varianti dei modelli e dunque stabilire quale sia il più adatto alla situazione.

3.3 GARCH MULTIVARIATO: DYNAMIC CONDITIONAL CORRELATION MODEL (DCC)

Il paragrafo in questione permette agli analisti di calcolare misure di rischio per diverse allocazioni di portafoglio, stimando e prevedendo la volatilità in funzione del fatto che la correlazione tra i singoli asset tenda a variare nel tempo. I modelli fin ora studiati ci permettono di svolgere un'analisi dinamica del rischio esaustiva ma limitatamente a singoli titoli quotati o, al più, a portafogli definiti in modo statico. Vediamo come superare questa criticità.

Si pone l'attenzione verso una domanda cruciale: qual è la migliore allocazione di portafoglio (considerando un dato criterio ottimizzante) sulla base della stima dinamica della volatilità dello stesso? Per rispondere riprendiamo il processo GARCH ma applicandolo questa volta alla volatilità di un portafoglio.

La varianza del portafoglio è rappresentata dall'equazione:

$$\sigma_{PF,t+1}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{i,t+1} w_{j,t+1} \sigma_{ij,t+1}$$

Che in termini matriciali (*per n asset*) diviene:

$$\sigma_{PF,t+1}^2 = w_t' \Sigma_{t+1} w_t$$

dove w rappresenta il vettore dei pesi di portafoglio che moltiplica il suo corrispondente trasposto e la matrice quadrata ($n \times n$) delle covarianze tra i rendimenti. Consideriamo per semplicità la trattazione di due titoli solamente.

$$\sigma_{PF,t+1}^2 = [w_{1t} \ w_{2t}] \begin{bmatrix} \sigma_{1t+1}^2 & \sigma_{12t+1} \\ \sigma_{21t+1} & \sigma_{2t+1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \end{bmatrix}$$

L'obiettivo è di stimare la matrice di covarianza, eseguendo però una scomposizione:

$$\sigma_{ij,t+1} = \sigma_{i,t+1} \sigma_{j,t+1} \rho_{ij,t+1}$$

Che ci informa del fatto che la covarianza stessa può essere scomposta in volatilità e correlazione. In notazione matriciale:

$$\Sigma_{t+1} = D_{t+1} Y_{t+1} D_{t+1} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,t+1} & 0 \\ 0 & \sigma_{2,t+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12,t+1} \\ \rho_{12,t+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,t+1} & 0 \\ 0 & \sigma_{2,t+1} \end{bmatrix}$$

Dove D rappresenta la matrice contenente la diagonale delle deviazioni standard condizionate e Y_{t+1} la matrice dei coefficienti di correlazione.

Assumiamo di aver già stimato le volatilità dei singoli titoli attraverso uno dei modelli visti nel paragrafo precedente (GARCH o variante asimmetrica) e occupiamoci di determinare l'ingrediente mancante: la correlazione tra i titoli. Per fare ciò ci avvaliamo dell'importante pubblicazione di Rober Engle del 1999 ("dynamic conditional correlation-a simple class of multivariate GARCH models" nel "Forthcoming journal of business and economic statistics").

Definiamo come covarianza media di lungo periodo (o covarianza non condizionale) dei rendimenti standardizzati la seguente relazione:

$$\overline{\rho_{ij}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T z_{1t} z_{2t}$$

Con $z_{i,t+1} = R_{i,t+1} / \sigma_{i,t+1}$. Il vantaggio di utilizzare i rendimenti standardizzati risiede nel fatto che essi presentano una deviazione standard pari ad uno, se si assume la distribuzione Normale o t-Student degli errori nel processo di stima dei rendimenti logaritmici. In questo modo si può dimostrare che stimare la covarianza condizionale dei rendimenti standardizzati equivale a stimare la correlazione condizionale dei rendimenti logaritmici (obiettivo finale del processo):

$$E_t(z_{i,t+1}z_{j,t+1}) = E_t\left(\left(\frac{R_{i,t+1}}{\sigma_{i,t+1}}\right)\left(\frac{R_{j,t+1}}{\sigma_{j,t+1}}\right)\right) = \frac{\sigma_{ij,t+1}}{\sigma_{i,t+1}\sigma_{j,t+1}} = \rho_{ij,t+1} \quad \forall i, j$$

Allora, seguendo il modello GARCH, la covarianza condizionale (dinamica) degli z risulta:

$$\begin{aligned} q_{ij,t+1} &= \bar{\rho}_{ij} + \alpha(\varepsilon_{i,t}\varepsilon_{j,t} - \bar{\rho}_{ij}) + \beta(q_{ij,t} - \bar{\rho}_{ij}) \\ &= (1 - \alpha - \beta)\bar{\rho}_{ij} + \alpha(\varepsilon_{i,t}\varepsilon_{j,t}) + \beta(q_{ij,t}) \end{aligned}$$

Che nel caso generalizzato (con numero di asset superiore a due), diventa:

$$Q_{t+1} = (1 - \sum_{m=1}^M \alpha_m - \sum_{n=1}^N \beta_n)\bar{Q} + \sum_{m=1}^M \alpha_m(\varepsilon_{t+1-m}\varepsilon'_{t+1-m}) + \sum_{n=1}^N \beta_n Q_{t+1-n}$$

Dove Q_{t+1} è la matrice delle covarianze dinamiche e \bar{Q} la matrice delle correlazioni non condizionate tra i rendimenti standardizzati. A questo punto ricaviamo, finalmente, i valori delle correlazioni dinamiche tra rendimenti logaritmici attraverso il seguente stimatore:

$$\rho_{ij,t+1} = \frac{q_{ij,t+1}}{\sqrt{q_{ii,t+1}q_{jj,t+1}}}$$

La stima di tali coefficienti completa la matrice di correlazione e, dunque, consente di costruire la matrice di varianze-covarianze dalla quale si genera poi la varianza del portafoglio (per ogni giorno di rilevazione).

Grazie al metodo descritto è possibile evidenziare il fatto che la covarianza non varia solo per effetto del mutamento delle singole volatilità ma esiste una componente dinamica nelle correlazioni tra i rendimenti dei titoli che rende imprecisi molti dei modelli usati frequentemente per stimare la varianza di portafoglio.

APPLICAZIONI COMPUTAZIONALI

Il presente capitolo si pone l'obiettivo di applicare gli argomenti esposti nella trattazione teorica avvalendosi del **software R**, scelto per l'elevata potenza computazionale e per il numero di funzionalità che offrono la possibilità di svolgere analisi complete. E' stato necessario uno studio approfondito dei codici di programmazione e degli algoritmi, impiegati con coerenza in base ai capitoli teorici.

4.1 ARCHITETTURA DELL'ANALISI

Sono state utilizzate le serie storiche di dati giornalieri (dal 04-01-2016 al 01-01-2020) provenienti dal sito YahooFinance e appartenenti ai seguenti fondi di investimento (valori in dollari USA):

Global equity:

- 1) VANGUARD global equity fund
- 2) COLUMBIA select global equity fund

Strategie alternative:

- 3) MFS global alternative strategy fund

Portafogli obbligazionari:

- 4) iShare 0-5 years high yield corporate bond ETF
- 5) VANGUARD total International bond index fund

Emerging market equity:

- 6) WASATCH Frontier emerging small countries fund
- 7) VANGUARD FTSE emerging market index fund ETF share

Fondi settoriali:

- 8) Icon industrial fund CLASS A
- 9) USAA science & technology fund

Si tratta di enormi fondi diversificati in grado di rappresentare adeguatamente (sebbene in modo approssimato) il rischio di mercato e di consentire la costruzione di portafogli che attingano da un ampio spettro di titoli quotati con caratteristiche eterogenee.

Si noti come questa scelta permetta di svolgere previsioni e stime in modo sufficientemente accurato, grazie alla notevole dimensione del campione di dati (1008 rilevazioni). I modelli presentati infatti richiedono importanti serie storiche affinché si possa ritenere attendibile lo studio.

E' stata operata una trasformazione dei prezzi in modo tale da ottenere i rendimenti logaritmici giornalieri, attraverso la funzione "periodReturn".

I codici non sono stati inseriti all'interno dell'elaborato per vincoli di redazione e per ragioni di natura estetica. L'autore è disponibile a fornirli su richiesta.

4.2 MISURE DEL RISCHIO STATICHE PER SINGOLI TITOLI

Calcolo di VaR ed ES storici e parametrici per ogni fondo quotato attraverso il package "quantmod" (quantitative method for finance) di R.

Per ottenere i gradi di libertà della distribuzione t-Student che meglio interpola i dati è necessario conoscere l'indice di curtosi, ottenibile attraverso la funzione "kurtosis" offerta dal package "moments".

VaR	1	2	3	4	5	6	7	8	9
HIS	-0,014	-0,0137	-0,0039	-0,0045	-0,0026	-0,0109	-0,0187	-0,0172	-0,0203
GAUSS	-0,0138	-0,0148	-0,0037	-0,0043	-0,0029	-0,0105	-0,0177	-0,0162	-0,0235
MOD	-0,0153	-0,0139	-0,0041	-0,004	-0,0028	-0,0111	-0,0187	-0,0168	-0,0096
T	-0,0179	-0,0182	-0,0045	-0,0052	-0,0036	-0,0129	-0,0217	-0,0199	-0,0288



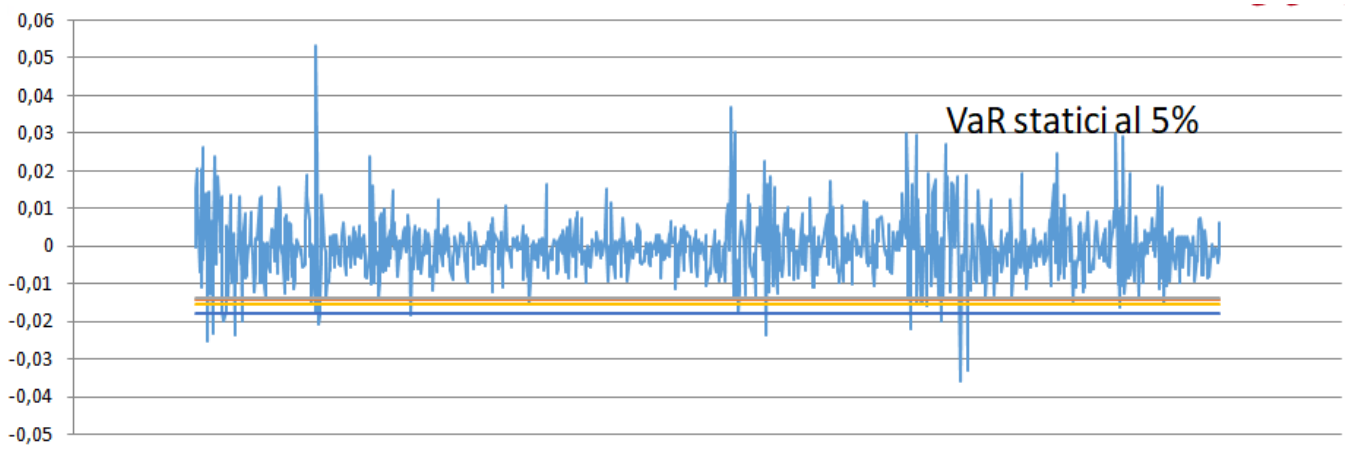


Figura 4.1: Rappresentazione dei 4 tipi di VaR statici per il Vanguard Global Equity Fund

ES	1	2	3	4	5	6	7	8	9
HIS	-0,0225	-0,0228	-0,0059	-0,0063	-0,0043	-0,0159	-0,0263	-0,0251	-0,0362
GAUSS	-0,0173	-0,0186	-0,0047	-0,0054	-0,0037	-0,0132	-0,0222	-0,0204	-0,0295
MOD	-0,0428	-0,0269	-0,0079	-0,0058	-0,0036	-0,0178	-0,0281	-0,0269	-0,0096
T	-0,0278	-0,0272	-0,0068	-0,0076	-0,0053	-0,0188	-0,032	-0,0297	-0,0416

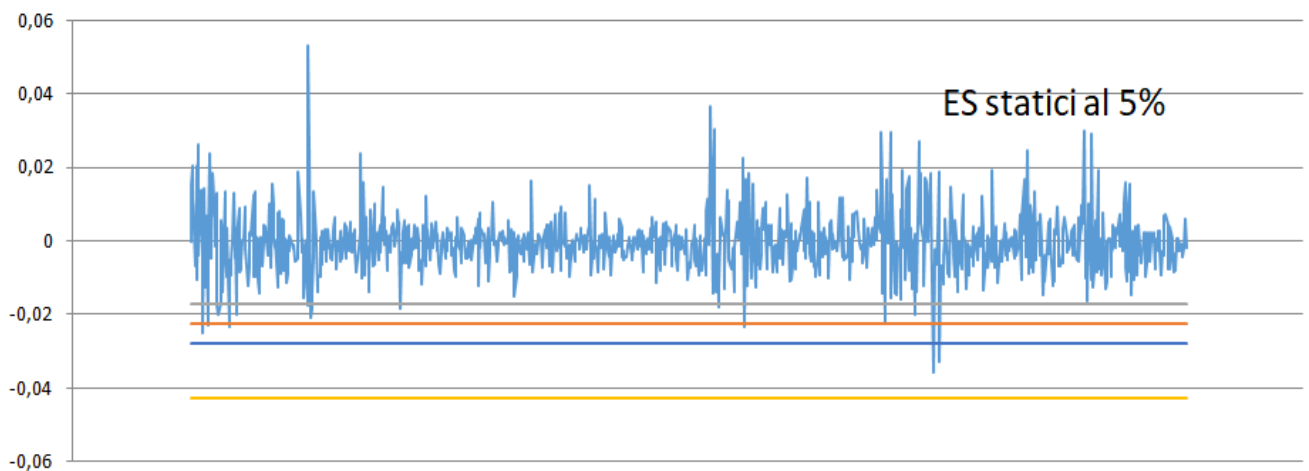


Figura 4.2: Rappresentazione dei 4 tipi di ES statici per il Vanguard Global Equity Fund

4.3 VOLATILITA' DINAMICA UNIVARIATA E VaR CONDIZIONALE

Si tratta di applicare i modelli GARCH visti nel terzo capitolo al fine di stimare la distribuzione condizionale dei rendimenti logaritmici giornalieri e su di essa calcolare il value at risk. A causa dei vincoli di redazione sarà esposto nel dettaglio il procedimento completo per il solo fondo di investimento “Vanguard Global Equity Fund”, indicato con la sigla “rets1” all’interno dello script. L’analisi è stata condotta su tutti i fondi oggetto dell’elaborato ed i risultati verranno sinteticamente riportati nel presente paragrafo.

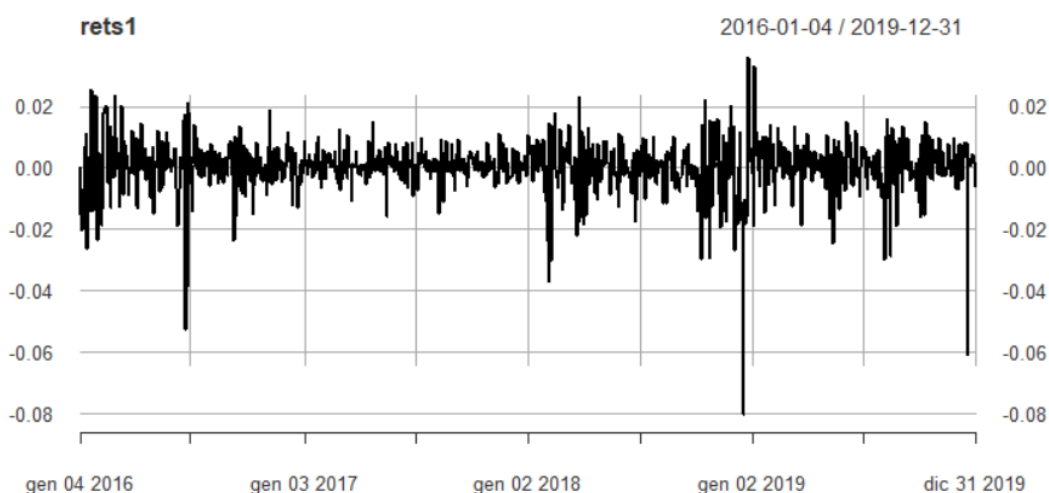


Figura 4.3: Serie storica dei rendimenti Vanguard Global Equity Fund

Dalla serie storica dei rendimenti giornalieri logaritmici è possibile notare subito la presenza di volatility clustering: tendenzialmente si alternano periodi caratterizzati da grande volatilità e periodi relativamente stabili. Il qqplot inoltre ci dice che i dati non si distribuiscono normalmente, proprio come ci si aspettava:

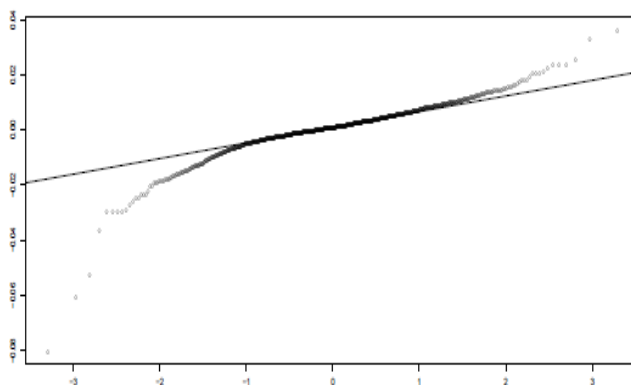


Figura 4.4: qqplot rendimenti Vanguard Global Equity Fund

Il test di Jarque-Bera conferma tale osservazione:

Jarque-Bera test	
Data	rets1 (Vanguard Global Equity fund)
p-value	$< 2,2e^{-16}$

Il sospetto è che la volatilità non sia costante e che ci sia un comportamento persistente, inteso come attitudine della stessa ad essere influenzata da una certa quantità di valori passati. Si parla dunque di effetti ARCH e di eteroschedasticità condizionale dei residui. Verifichiamo quanto detto valutando la significatività dei parametri dei modelli GARCH. Il package utilizzato si chiama “rugarch”, univariate garch.

GARCH model	Standard GARCH(1,1)	
Distribution	Normale simmetrica	
Parametri	Valori	p-Value
Omega	0,000004	0,22579
Alpha1	0,013929	0,0000
Beta1	0,013967	0,0000
Information Criteria		
Akaike	-6,9395	
Bayes	-6,9249	

I parametri GARCH associati ai ritardi della varianza e del termine d’errore sono significativi oltre ogni ragionevole dubbio, convincendoci della necessità di stimare modelli autoregressivi a eteroschedasticità condizionale. Tuttavia tale modello presenta delle criticità legate alla scelta della distribuzione degli errori, come testimoniato dal qqplot, dalla distribuzione empirica fittata e dal Pearson goodness of fit test (viene rifiutata l’ipotesi nulla di normalità):

Weighted ARCH LM test (H0: NO ARCH effects)		
	valori	p-Value
Lag 3	0,1319	0,7164
Lag 5	0,7326	0,8135
Adjusted Pearson goodness of fit test (H0: Correct distribution)		
Group	valori	p-Value
20	77,82	$4,409e^{-9}$

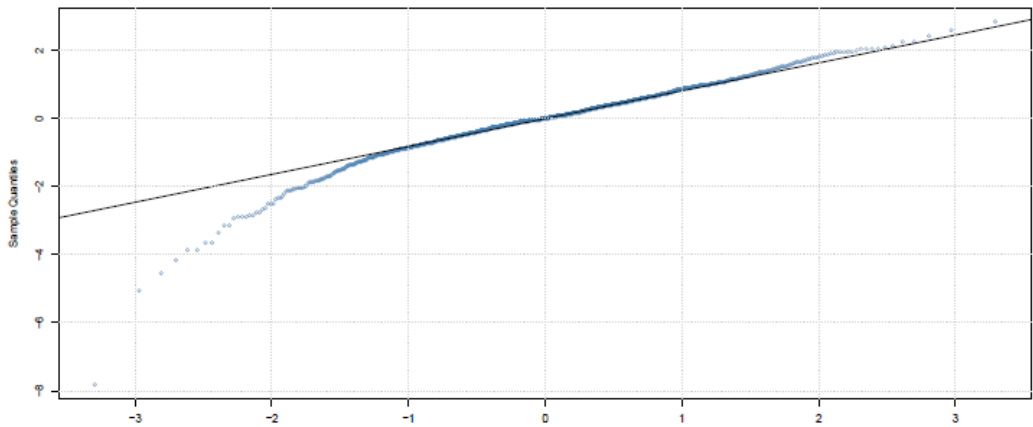


Figura 4.5: qqplot Normale dei residui standardizzati (modello GARCH)

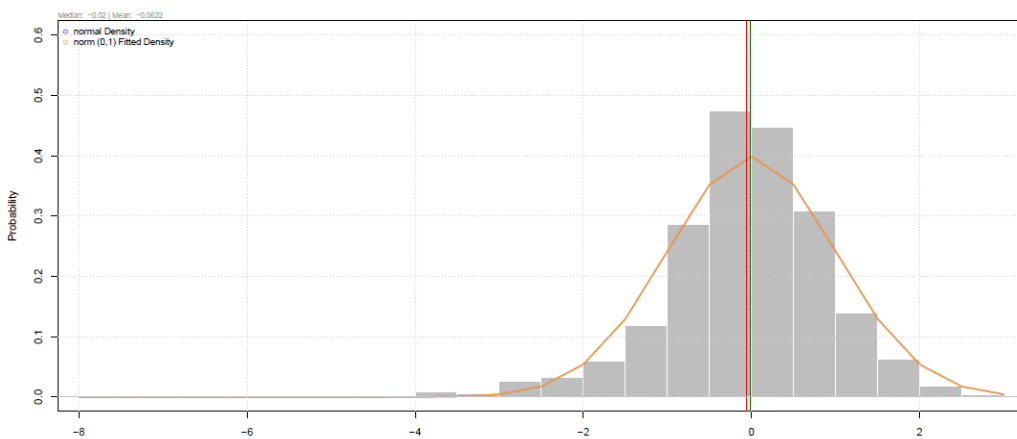


Figura 4.6: densità Normale stimata per i residui standardizzati (modello GARCH)

Il numero di ritardi scelto (uno per tutte le variabili) sembra descrivere bene i dati, rimuovendo i problemi di autocorrelazione dei residui standardizzati: i p-value del weighted Ljung-Box test conducono all'accettazione dell'ipotesi nulla di assenza di autocorrelazione e il correlogramma dei residui standardizzati rafforza tale convinzione:

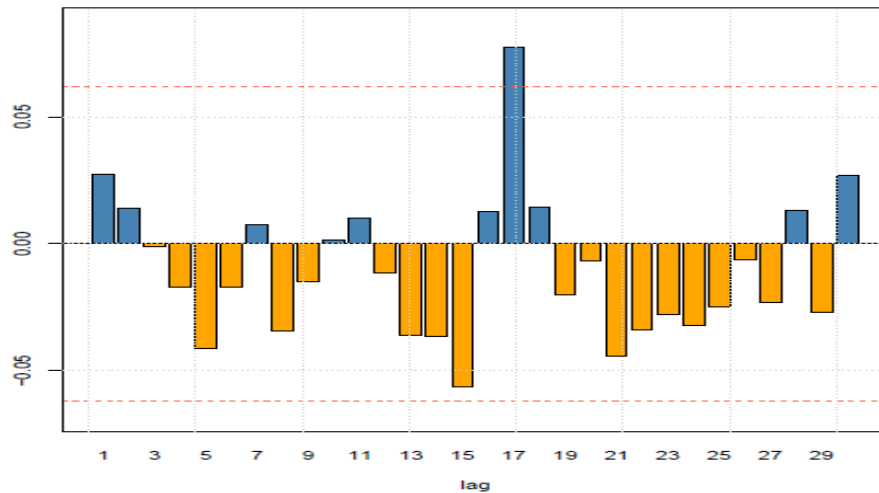


Figura 4.7: Funzione di autocorrelazione dei residui standardizzati (modello GARCH)

La distanza dalla distribuzione Normale ipotizzata può derivare da asimmetria, leptocurtosi o da una loro combinazione. Il modo migliore per superare tale errore di specificazione è considerare varianti asimmetriche del GARCH e imporre una distribuzione delle innovazioni t-Student.

GARCH	Standard GARCH(1,1)	
Distribution	t-Student simmetrica	
Parametri	Valori	p-Value
Omega	0,000003	0,0609812
Alpha1	0,037198	0,000002
Beta1	0,786529	0,0000
Shape	4,5393	0,0000

Information Criteria		
Akaike	-7,0768	
Bayes	-7,0572	
Pearson Goodness of fit test		
Group	Valori	p-Value
20	42,55	$1,494e^{-3}$

Il Pearson Goodness of fit test migliora in modo considerevole e i criteri per la verifica di bontà di adattamento del modello diminuiscono, rendendo questa seconda specificazione migliore rispetto alla precedente.

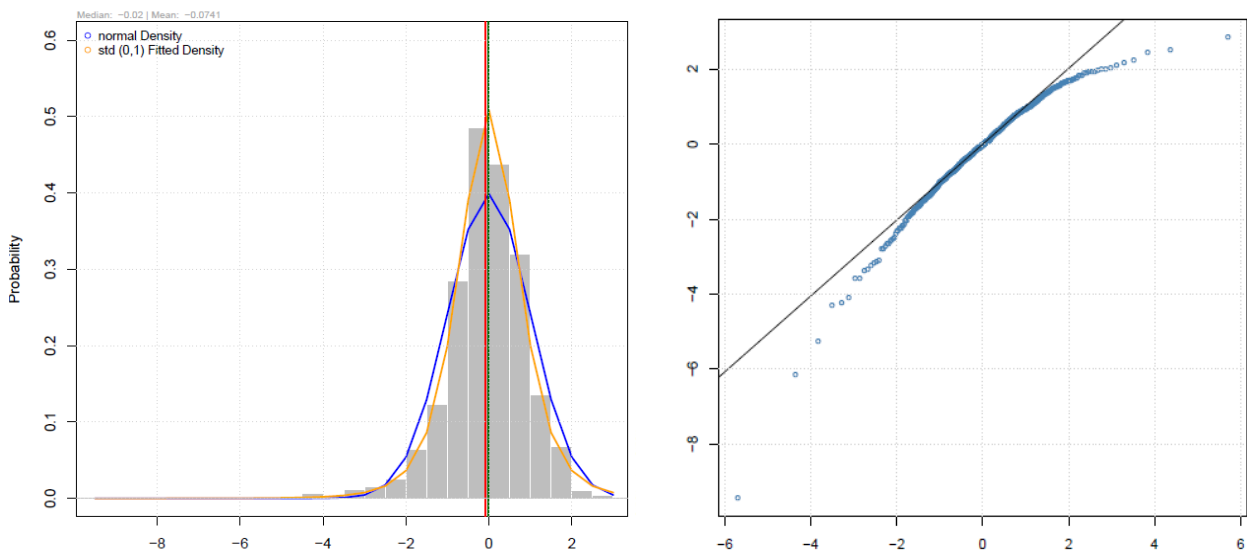


Figure 4.8 e 4.9: Densità t-Student (sinistra) e qqplot t-Student (destra) dei residui standardizzati (modello GARCH)

L'analisi grafica conferma l'importanza di implementare distribuzioni con code più spesse rispetto alla Normale (la densità empirica dei residui standardizzati descrive in maniera più attendibile i dati rispetto alla Normale, impiegata nel precedente modello). Tuttavia la t-Student simmetrica non può essere ritenuta una scelta definitiva: il qqplot evidenzia ancora una sostanziale divergenza tra quantili teorici della t-Student e quantili rilevati empiricamente.

Si ipotizza che ciò possa dipendere dall'asimmetria della distribuzione dei rendimenti, come esposto nella trattazione teorica. Si procede stimando una variante asimmetrica del modello GARCH.

GARCH Model	EGARCH(1,1)	
Distribution	t-Student asimmetrica	
Parametri	Valori	p-Value
Omega	-0,49355	0,000003
Alpha1	-0,14197	0,00075
Beta1	0,94882	0,00000
Gamma1	0,16008	0,334244
Skew	0,81296	0,0000
shape	4,94225	0,0000
Information Criteria		
Akaike	-7,1154	
Bayas	-7,0715	
Pearson Goodness of fit test		
Group	Valori	p-Value
20	37,56	0,132468

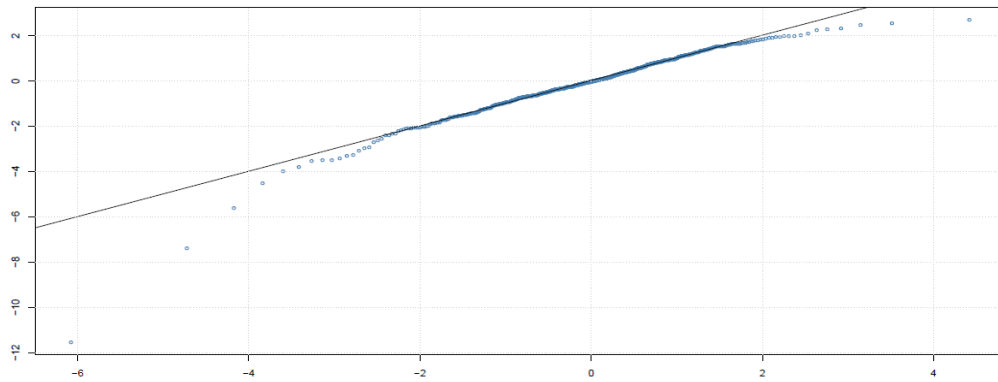


Figura 4.10: qqplot t-Student asimmetrica dei residui standardizzati (modello EGARCH)

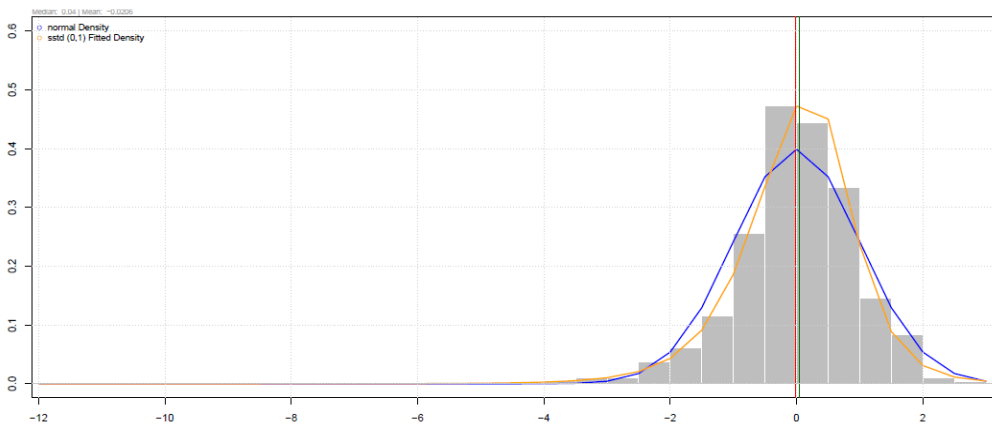


Figura 4.11: Densità stimata t-Student asimmetrica per i residui standardizzati (modello EGARCH)

Il modello EGARCH(1,1) con distribuzione “sstd” (skewed standard t distribution) sembra essere il migliore, come testimoniano sia l’analisi grafica dei residui standardizzati (in particolare il qqplot evidenzia un’ottima aderenza ai dati), sia l’output del software dal quale spiccano i valori degli information criteria (inferiori rispetto a quelli rilevati nelle precedenti specificazioni) e il p-value estremamente elevato del Pearson test per la corretta distribuzione. Riassumendo, nell’analisi della volatilità riferita al fondo di investimento in questione si riscontrano le caratteristiche seguenti (riportate assieme agli strumenti impiegati per risolvere le criticità):

- Autocorrelazione della varianza e clustering effect \Rightarrow modello GARCH(1,1)
- Probabilità non trascurabile di rilevare rendimenti estremi \Rightarrow distribuzione leptocurtica (std)
- Reazione asimmetrica agli shock \Rightarrow modello EGARCH(1,1)
- Presenza di asimmetria nella distribuzione dei rendimenti \Rightarrow utilizzo di una t-Student asimmetrica (sstd) per il termine di errore

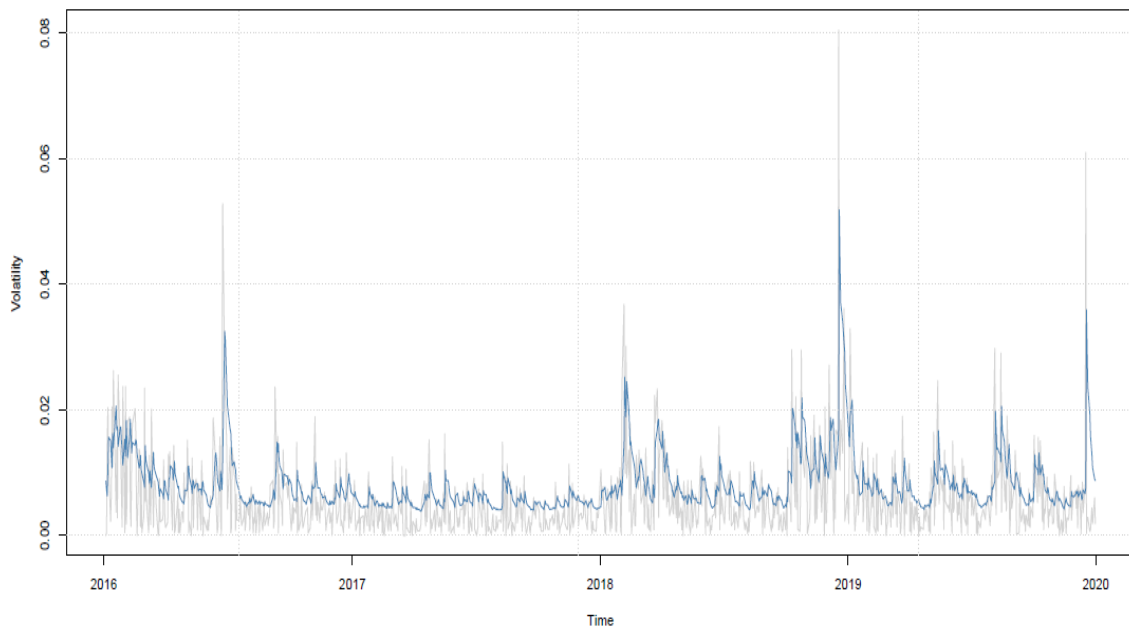


Figura 4.12: Modulo dei rendimenti in grigio e stima della volatilità condizionale in blu, proveniente dall'EGARCH(1,1) con distribuzione sstd

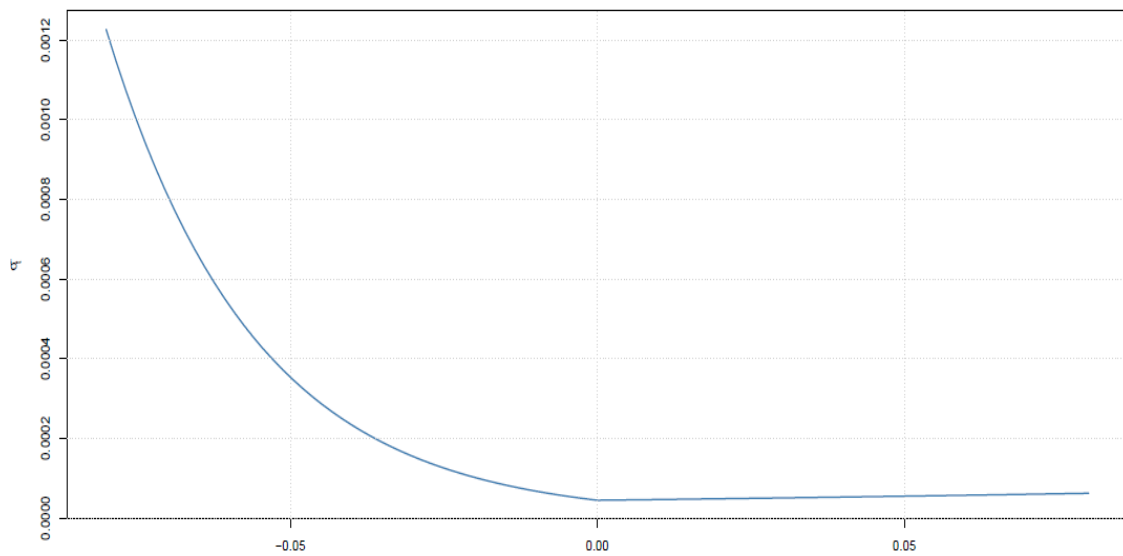


Figura 4.13: News Impact Curve modello EGARCH

FORECAST

E' possibile eseguire delle previsioni out of sample attraverso la funzione rolling forecast al fine di generare le previsioni della varianza e dei rendimenti. Avvalendosi di tale elaborazione è possibile inoltre chiedere al software di stimare il value at risk per un certo numero di giorni, evidenziando la serie storica che metta in relazione la previsione del quantile oggetto di studio con le realizzazioni effettive dei rendimenti.

E' stato chiesto ad R di eliminare dal campione le 500 rilevazioni più recenti e di utilizzare le rimanenti per stimare proprio il $VaR_{0,05}$ riferito agli stessi 500 giorni di trading più recenti.

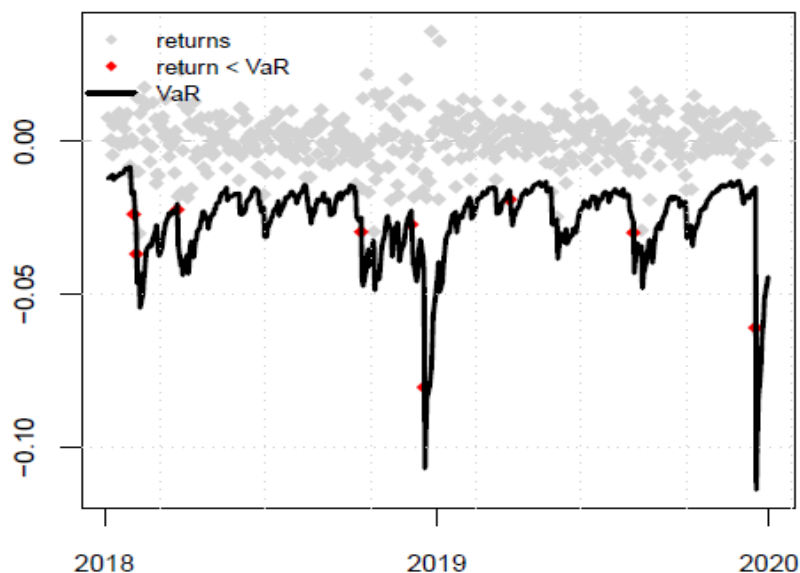


Figura 4.14: Stima del $VaR_{0,05}$ dinamico e confronto con i rendimenti realizzati

La procedura è stata ripetuta anche per il $VaR_{0,01}$. A questo punto è interessante capire l'attendibilità delle previsioni dinamiche del VaR servendosi di due famosi test che il software produce se si inserisce l'apposito comando. Viene generato il backtest report:

```

VaR Backtest Report
=====
Model:                               eGARCH-sstd
Backtest Length:                      500
Data:

=====
alpha:                                 5%
Expected Exceed:                       25
Actual VaR Exceed:                     27
Actual %:                               5.4%
VaR0,05

Unconditional Coverage (Kupiec)
Null-Hypothesis:                       Correct Exceedances
LR.uc Statistic:                       0.164
LR.uc Critical:                        3.841
LR.uc p-value:                         0.685
Reject Null:                            NO

Conditional Coverage (Christoffersen)
Null-Hypothesis:                       Correct Exceedances and
                                         Independence of Failures
LR.cc Statistic:                       0.366
LR.cc Critical:                        5.991
LR.cc p-value:                         0.833
Reject Null:                            NO

```

```

VaR Backtest Report
=====
Model:                               eGARCH-sstd
Backtest Length:                      500
Data:

=====

alpha:                                1%
Expected Exceed:                      5
Actual VaR Exceed:                   9
Actual %:                              1.8%

Unconditional Coverage (Kupiec)
Null-Hypothesis:                      Correct Exceedances
LR.uc Statistic:                      2.613
LR.uc Critical:                       3.841
LR.uc p-value:                        0.106
Reject Null:                          NO

Conditional Coverage (Christoffersen)
Null-Hypothesis:                      Correct Exceedances and
                                         Independence of Failures
LR.cc Statistic:                      4.739
LR.cc Critical:                       5.991
LR.cc p-value:                        0.094
Reject Null:                          NO

```

$VaR_{0,01}$

Il backtesting conferma l'ottima capacità predittiva del modello di stima per la volatilità implementato nella procedura di misurazione dinamica del rischio. Le ipotesi nulle di Kupiec e Christoffersen (in entrambe compare la correttezza del numero di violazioni del VaR) non vengono rifiutate ad un livello di confidenza del 95%, sia per quanto concerne il value at risk al 95% sia per quello al 99%.

Le regolarità empiriche protagoniste dei mercati finanziari, trattate ampiamente nei precedenti capitoli unite alle performance notevoli dei metodi dinamici di misurazione del rischio appena visti, ci portano a ritenere fondamentale l'impiego di modelli econometrici per serie storiche nel processo di analisi del rischio e ci convincono dunque che le misure statiche (con assunzione di distribuzione dei rendimenti costante, stimata parametricamente) risultano poco attendibili.

I fondi di investimento considerati in questa sede presentano caratteristiche molto simili e richiedono di considerare adeguatamente volatility clustering, code spesse e asimmetria degli shock, pertanto è possibile assumere il modello EGARCH con distribuzione t-Student asimmetrica come il più adatto a descrivere tutti i titoli. Questa considerazione è necessaria per proseguire la trattazione con l'aggregazione degli asset e la creazione di portafogli, dal momento in cui il programma richiede di indicare un modello unico per la stima della volatilità univariata da applicare ai 9 titoli.

4.4 VOLATILITA' DINAMICA MULTIVARIATA E OTTIMIZZAZIONE DI PORTAFOGLIO

Siamo interessati a stimare la correlazione dinamica tra i 9 titoli considerati al fine di generare delle allocazioni di portafoglio ottimali e basate su corrette previsioni in merito alla distribuzione condizionale dei rendimenti logaritmici. Per concretizzare questo proposito si installa all'interno del software il pacchetto "rmgarch" (multivariate garch).

Si riportano gli steps per l'implementazione del dynamic conditional correlation model, partendo da una stima delle singole volatilità del tipo EGARCH(1,1) viste le considerazioni esposte nel precedente paragrafo.

DCC GARCH Fit	
Distribution	Multivariate t-Student
Model	DCC(1,1)
No. Parameters	93
No. Observation	1008
No. Of Asset	9

Ipotizziamo una distribuzione dei rendimenti t-Student multivariata (la stima è stata effettuata anche con una distribuzione Normale multivariata ma il modello prodotto performa peggio).

Le statistiche di bontà del modello assumono i seguenti valori:

Information Criteria	
Akaike	-75,901
Bayes	-75,446

Si procede generando un forecast per i 255 giorni di trading futuri. Si tratta di un passaggio fondamentale per poter successivamente operare l'ottimizzazione di portafoglio.

Come nel caso univariato, è anche qui possibile utilizzare la funzione “rolling forecast” escludendo un certo numero di osservazioni (nel caso in questione si tratta delle 500 più recenti) per operare una stima delle stesse, da confrontare eventualmente con i valori registrati al fine di verificare l’aderenza ai dati del modello impiegato.

DCC GARCH Roll	
Distribution	Multivariate t-Student
Simulation Horizon	500
No. Assets	9

Si sposta l’interesse verso la costruzione di portafogli ottimali, generando una stima della frontiera efficiente basata sulle previsioni operate con riferimento ai rendimenti attesi e alle matrici di varianza e covarianza attraverso l’implementazione del DCC. Il pacchetto utilizzato si chiama “parma”, Portfolio Allocation and Risk Management Applications.

Si tratta di un problema di ottimizzazione in cui l’obiettivo è minimizzare il rischio, dati alcuni vincoli:

- Ogni titolo non può avere un peso inferiore a 0,02
- Ogni titolo non può avere un peso superiore a 0,4
- Deve verificarsi il pieno investimento
- L’ottimizzazione è basata sulla mean-variance analysis (EV)⇒gli investitori osservano congiuntamente rischio e rendimento, come prescritto dalla moderna teoria di portafoglio di Markowitz e ricercano la composizione dei titoli che minimizza la volatilità per un dato livello di rendimento atteso.

Il software genera i pesi ottimali di ogni titolo all’interno del portafoglio (ottimale dinamico 1), dati criterio ottimizzante (obiettivo dell’investitore di minimizzare il rischio), vincoli e previsioni della media e della volatilità condizionali attraverso i modelli econometrici trattati in precedenza.

Si generano i comandi per la specificazione della frontiera efficiente, richiedendo che essa venga visualizzato il portafoglio ottimale (se la procedura è stata eseguita correttamente deve posizionarsi proprio sulla frontiera):

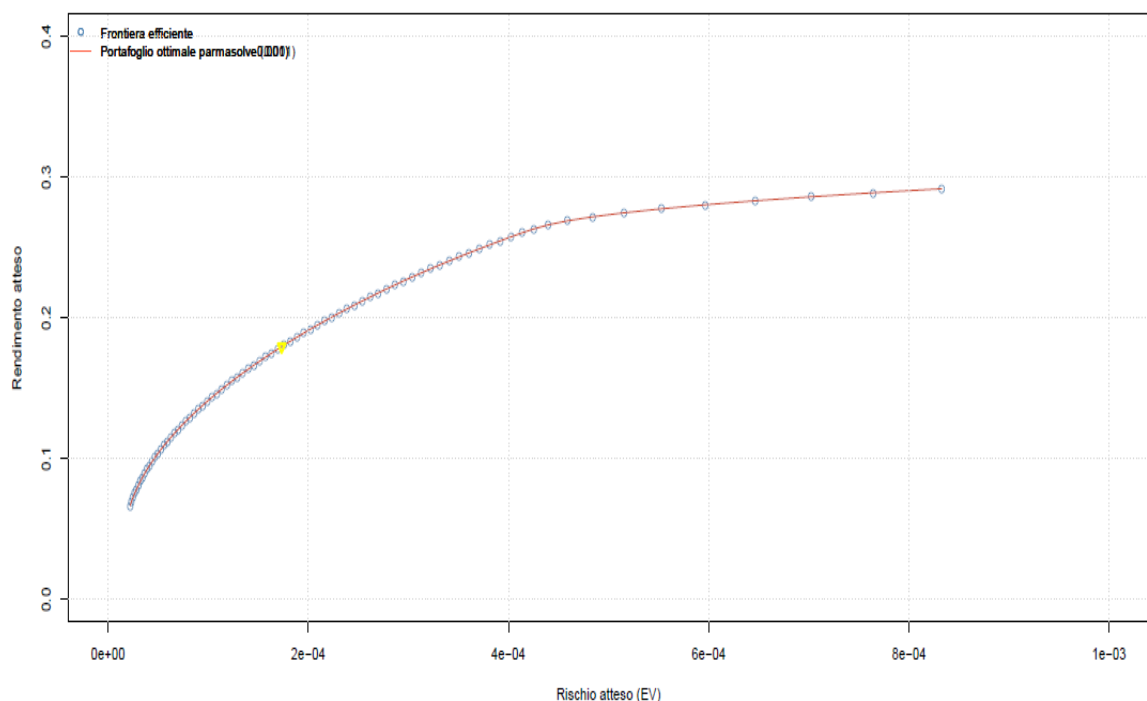


Figura 4.15: Frontiera efficiente per l'ottimale dinamico 1. Il punto giallo indica il portafoglio ottimale.

Si ripete la procedura cambiando l'obiettivo degli investitori: l'interesse diventa quello di massimizzare il rendimento, rispettando gli stessi vincoli imposti nella precedente ottimizzazione (ottimale dinamico 2).

FONDO	EQUIPONDERATO	Ottimale dinamico 1	Ottimale dinamico 2
1	0,1111111111	0,17418033	0,17112143
2	0,1111111111	0,29537965	0,29713344
3	0,1111111111	0,02	0,02
4	0,1111111111	0,02	0,04584512
5	0,1111111111	0,37250178	0,33782822
6	0,1111111111	0,02	0,02536333
7	0,1111111111	0,02	0,02
8	0,1111111111	0,02	0,02
9	0,1111111111	0,05793824	0,06270846

Il numero associato ad ogni singolo fondo è basato sull'elenco esposto nel paragrafo 4.1. La tabella riportata evidenzia il peso di ogni fondo all'interno dei tre portafogli considerati (l'equiponderato e i due costruiti attraverso la procedura di ottimizzazione).

E' possibile anche inserire all'interno dello script il VaR ed il CVaR come misure di rischio durante il processo di ottimizzazione di portafoglio. Per vincoli di redazione e per la complessità aggiuntiva che tali scelte avrebbero comportato si è deciso di impiegare la volatilità (approccio media-varianza) secondo una stima dinamica.

Le analisi condotte si basano sull'assunzione che la composizione di portafoglio rimanga immutata nei periodi successivi.

4.5 MISURE DI RISCHIO STATICHE E DINAMICHE DI PORTAFOGLIO

Si procede costruendo tre nuove variabili (una per ciascun portafoglio) che contengano ogni titolo ponderato in base ai pesi determinati con l'ottimizzazione di portafoglio.

Si supponga che determinati investitori (o istituzioni finanziarie) detengano i suddetti fondi e che essi siano interessati ad investigarne la rischiosità attraverso la stima del VaR secondo un approccio dinamico, effettuando previsioni. A tal proposito sono state eseguite varie stime GARCH (come nel caso dei singoli fondi) e si è visto che l'EGARCH(1,1) con distribuzione t-Student asimmetrica garantisce le migliori performance predittive. Di seguito si riportano i grafici di volatilità e $VaR_{0,05}$ dinamico e le tabelle contenenti le misure di rischio statiche, in modo tale da avere indicatori numerici della rischiosità dei portafogli. Dopo aver determinato i pesi ottimali e aver costruito il vettore contenente la serie storica del valore del portafoglio (i pesi si considerano costanti nei periodi successivi) l'analisi diviene nuovamente univariata.

PORTAFOGLIO EQUIPONDERATO:

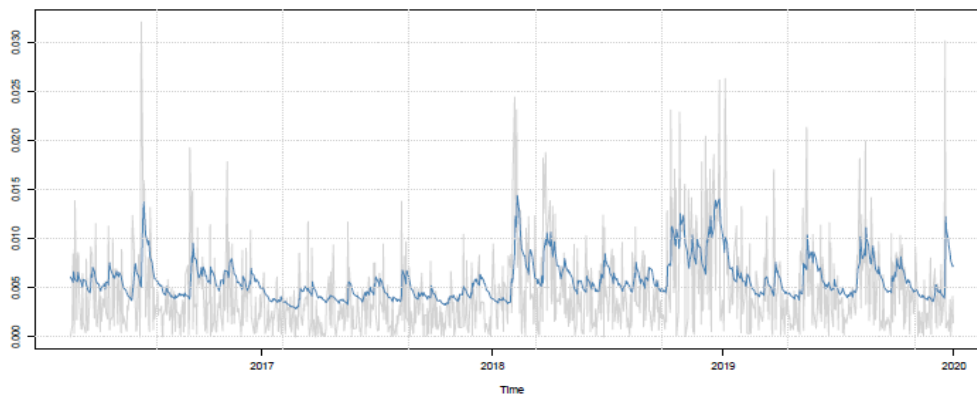


Figura 4.16: Stima della volatilità condizionale (in blu) e modulo dei rendimenti realizzati (in grigio)

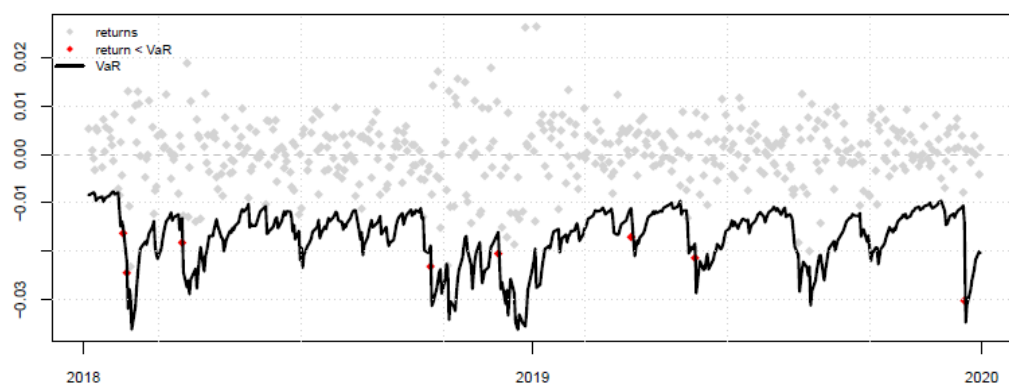


Figura 4.17: Stima del $VaR_{0,05}$ dinamico e confronto con i rendimenti realizzati

$VaR_{0,05}$	Equiponderato
Historical	-0.01063939
Gaussian	-0.009243247
t-Student	-0.01138078
Cornish-Fisher	-0.00984817

$ES_{0,05}$	Equiponderato
Historical	-0.01546969
Gaussian	-0.01164482
t-Student	-0.08464286
Cornish-Fisher	-0.0169624

PORTAFOGLIO OTTIMALE DINAMICO 1:

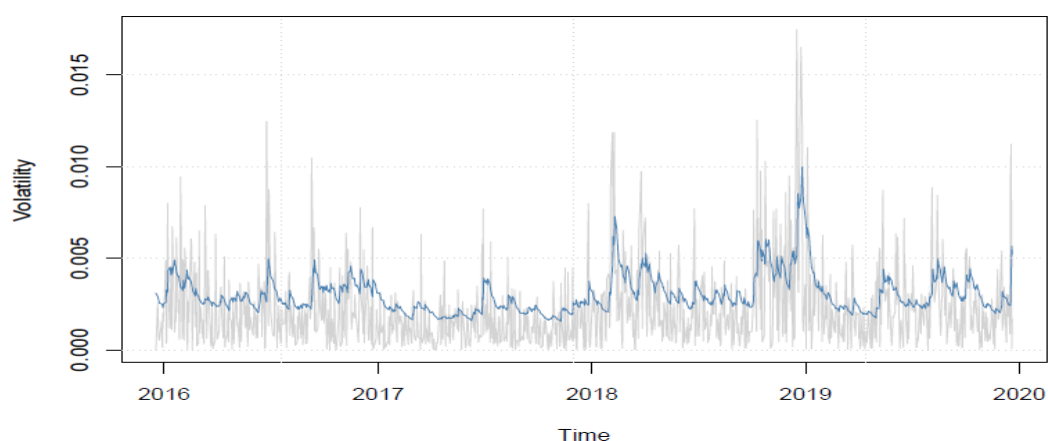


Figura 4.18: Stima della volatilità condizionale (in blu) e modulo dei rendimenti realizzati (in grigio)

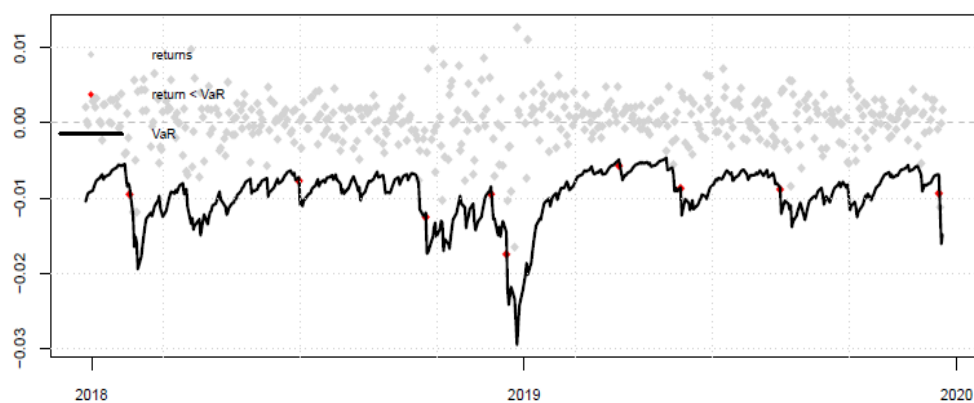


Figura 4.19: Stima del $VaR_{0,05}$ dinamico e confronto con i rendimenti realizzati

$VaR_{0,05}$	Ottimale dinamico 1
Historical	-0.008715358
Gaussian	-0.008087837
t-Student	-0.009964999
Cornish-Fisher	-0.008715358

$ES_{0,05}$	Ottimale dinamico 1
Historical	-0.0134593
Gaussian	-0.01020165
t-Student	-0.07455288
Cornish-Fisher	-0.0197156

PORTAFOGLIO OTTIMALE DINAMICO 2:

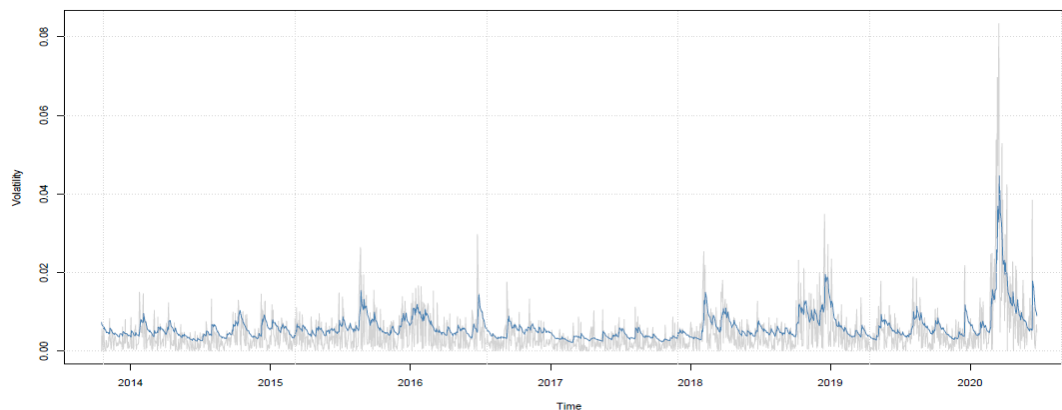


Figura 4.20: Stima della volatilità condizionale (in blu) e modulo dei rendimenti realizzati (in grigio)

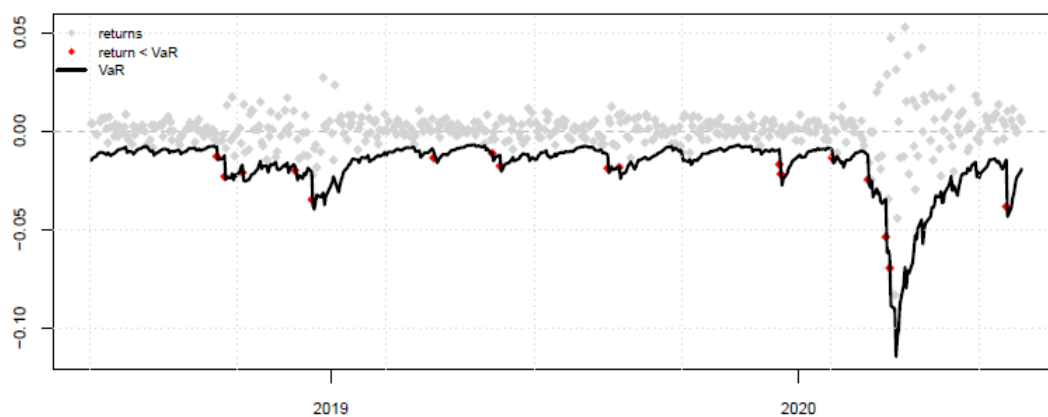


Figura 4.21: Stima del $VaR_{0,05}$ dinamico e confronto con i rendimenti realizzati

$VaR_{0,05}$	Ottimale dinamico 2
Historical	-0.008947103
Gaussian	-0.008258529
t-Student	-0.009371297
Cornish-Fisher	-0.008908993

$ES_{0,05}$	Ottimale dinamico 2
Historical	-0.01374986
Gaussian	-0.01041564
t-Student	-0.05652116
Cornish-Fisher	-0.01993588

Da questa analisi emerge che il portafoglio caratterizzato dalla minore rischiosità, intesa come peggior rendimento realizzabile nel 95% dei casi (value at risk) e valore atteso dei rendimenti inferiori al VaR (expected shortfall), risulta essere l'ottimale dinamico 1. Naturalmente questa affermazione non permette di trarre conclusioni in merito alla selezione di portafoglio dal momento in cui si tratta di uno studio parziale (legato solo al rischio). Tuttavia le procedure implementate e i modelli stimati rappresentano un importante punto di partenza e seguono una struttura logica realmente applicabile, che fornisce informazioni a investitori e intermediari finanziari in merito alle perdite attese e alla volatilità cui sono soggetti i titoli posseduti. Il backtest report conduce all'accettazione dell'ipotesi nulla sia di Kupiec sia di Christoffersen (come nel caso del singolo fondo) per un intervallo di confidenza del 95% e conferma la bontà delle previsioni del VaR dinamico.

Tutti i grafici esposti (sia nei capitoli teorici, sia all'interno dell'analisi empirica) sono frutto di elaborazioni personali.

CONCLUSIONE

L'elaborato, suddiviso in capitoli teorici e applicazioni empiriche dei modelli presentati, è stato strutturato in modo tale da seguire un filo logico uniforme e completo. Dopo una breve introduzione al concetto di rischio moderno e dopo aver identificato le grandezze (variabili) oggetto di studio sono state trattate puntualmente le principali regolarità empiriche universalmente accettate all'interno della letteratura e della prassi applicativa. L'identificazione di problematiche e proprietà statistiche particolari delle grandezze trattate permette a risk managers e studiosi di compiere analisi il più possibile realistiche e aderenti al comportamento effettivo dei mercati finanziari. Sono state successivamente presentate le due principali misure stocastiche del rischio di portafoglio, identificando le differenti metodologie di calcolo implementabili. Dalla loro applicazione è possibile estrapolare importanti informazioni in merito alle perdite attese e dunque comprendere come tutelarsi attraverso strumenti finanziari o capitali da accantonare sottoforma di riserve (assumendo, ad esempio, la prospettiva degli intermediari finanziari). L'analisi del rischio ha altresì una notevole importanza per scopi di policy e di regolazione dei mercati poiché contribuisce a ridurre l'incertezza e garantisce una gestione più trasparente dei capitali (aspetto particolarmente delicato quando sono coinvolti risparmio delle famiglie e solidità degli istituti di credito).

Il terzo capitolo rappresenta l'anello di congiunzione tra la necessità di produrre un indicatore della rischiosità degli investimenti e l'esigenza di tenere in considerazione alcune complessità di natura statistica ed economica: la specificazione di modelli econometrici per serie storiche migliora il processo di stima introducendo la componente dinamica. I risultati delle procedure di backtesting (non trattate formalmente nei capitoli teorici a causa dei vincoli di redazione ma comunque molto informative grazie alla struttura dell'output prodotto da R) hanno generato risultati particolarmente confortanti, evidenziando una buona precisione dei modelli di stima. La parte finale dell'elaborato si è concentrata sulla simulazione di tre portafogli composti da nove fondi di investimento quotati in dollari al fine di applicare la misurazione del rischio (che rappresenta parte del processo di analisi delle performance). La costruzione degli stessi è fondata su previsioni della volatilità provenienti da un modello GARCH multivariato.

L'autore ritiene importante sottolineare che molti argomenti connessi non sono stati trattati e che l'aspetto fondamentale dell'elaborato in questione è rappresentato dall'acquisizione di un metodo completo e costituito da passaggi concatenati da una struttura logica coerente al fine di affrontare problemi legati alla finanza quantitativa (attraverso l'utilizzo di procedure computazionali impegnative ma essenziali).

BIBLIOGRAFIA

Adrian, T., Song Shin, H., (2009). Liquidity and Leverage. *Federal Reserve Bank of New York, Staff Reports no. 328*

Allayannis, G., Weston, J., (2005). Earnings volatility, cash flow volatility, and firm value. *Working paper University of Virginia and Rice University*

ANON., (2019). Modelli GARCH univariati e multivariati, implementazione in R [online]. Disponibile su <<https://www.dedaloinvest.com/education/didattica-investimenti/garch>>

Artzener, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D., (1999). Coherent measures of risk. *Journal of Mathematical finance*, 9(3), pp. 203-228

Bella, G., Lasaponara, F., (2017). Strumenti quantitativi e loro implementazione software per l'analisi di portafogli finanziari, con approfondimenti sui modelli GARCH avanzati. Tesi di laurea in Ingegneria Matematica, Politecnico di Torino

Black, F., Scholes, M., (1973). *The Journal of Political Economy*. vol. 81, no. 3, pp. 637-654

Bollerslev, T., (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327

Cappuccio, N., (2019). Volatility models lecture. Advanced econometrics [online]. Disponibile su: <https://elearning.unipd.it/economia/course/view.php?id=1442>

Christie, A., (1982). The stochastic behavior of common stock variances: Value, leverage and interest rate effects. *Journal of Financial Economics*, vol. 10, pp. 407-432

Christoffersen, P., (2012). Elements of financial risk management. seconda edizione. Oxford: Elsevier

Engle, R., (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of Econometric Society*, vol. 50, no. 4

Engle, R., Ng, V.K., (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility. *The journal of Finance*, vol. 48, no. 5

Engle, R., (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 20, no. 3, pp. 339-350

Follegot, N., (2019). Studio e applicazione del CVaR per la valutazione del rischio. Tesi di laurea in Economia, Università degli studi di Padova

Gavrilov, I., Pusev, R., (2015). Test for Normality. CRAN-R project[online]. Disponibile su: <https://cran.r-project.org/web/packages/normtest/normtest.pdf>

Ghalanos, A., (2020). Introduction to the rugarch package. CRAN-R project[online]. Disponibile su: <https://cran.r-project.org/web/packages/rugarch/rugarch.pdf>

Ghalanos, A., (2019). Multivariate GARCH models. CRAN-R project[online]. Disponibile su: <https://cran.r-project.org/web/packages/rmgarch/rmgarch.pdf>

Ghalanos, A., (2016). Portfolio Allocation and Risk Management Applications. CRAN-R project[online]. Disponibile su: <https://cran.r-project.org/web/packages/parma/parma.pdf>

Guidolin, M., (2013). Univariate Volatility Models: ARCH and GARCH Lecture[online]. Disponibile su: didattica.unibocconi.it

Hamilton, J., (1994). Time series analysis. Princeton: Princeton University Press

Jarque, C., Bera, A., (1987). A test for Normality of Observation and Regression Residuals. *International Statistical Review*, vol. 55, no. 2, pp. 163-172

Kirchgassner, G., Wolters, J., (2007). Introduction to modern time series analysis. Springer

Mandelbrot, B., (1963). The Variation of Certain Speculative Prices. *The Journal of Business*. vol. 36, no. 4, pp. 394-419

Markowitz, E., (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), pp. 77-91

McNeil, A., Frey, R., Embrechts, P., (2005). Quantitative Risk Management. Princeton: Princeton University Press

Nelson, D., (1991). Conditional Heteroskedasticity in asset Returns: a new approach. *Econometrica*, vol. 59, pp. 347-70

Parigi B., (2019). Liquidity and financial contagion lecture [online]. Money and banking. Disponibile su: <https://elearning.unipd.it/economia/mod/folder/view.php?id=37439>

Ryan, J., Ulrich, J., Thielen, W., Teetor, P., Bronder, S., (2020). Quantitative Financial Modelling Framework. CRAN-R project[online]. Disponibile su: <https://cran.r-project.org/web/packages/quantmod/quantmod.pdf>

Stock, J., Watson, M., (2016). Introduzione all'econometria. Quarta edizione. Pearson.