

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

## Ricostruzione dei dati iniziali in Cosmologia e flussi omnipotenziali

Relatore

**Prof. Sabino Matarrese**

Laureando

**Davide Zanchetta**

Anno Accademico 2017/2018



## Sommario

Il problema della ricostruzione consiste nel determinare la distribuzione di massa dell'universo all'epoca del decoupling barioni-fotoni a partire dalle strutture cosmiche osservate nell'epoca corrente. A tal fine si possono applicare una varietà di tecniche, da principi variazionali a metodi puramente stocastici; questa tesi segue il metodo MAK e la teoria sottostante delle mappe che ammettono potenziale convesso.

Il primo capitolo dell'elaborato introduce il problema della ricostruzione, illustrando il metodo variazionale così come visto in [1] e [2], e [3].

Il secondo capitolo descrive dal punto di vista teorico il metodo MAK e ne espone qualitativamente i risultati, seguendo [4], [5] e [6].

Il terzo capitolo, basato su [8] definisce il flusso omnipotenziale e lo caratterizza con proprietà della matrice hessiana del suo potenziale, trovandone poi qualche esempio in due dimensioni e discutendone la generalizzazione ad un numero di dimensioni maggiore.

# Indice

<b>1</b>	<b>Ricostruzione col metodo di Peebles</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Metodo MAK</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Flussi omipotenziati</b>	<b>12</b>
3.1	Due condizioni su $\mathcal{H}(\Phi)$ . . . . .	12
3.1.1	Flussi "alla Zel'dovich" . . . . .	15
3.2	Flussi omipotenziati in due dimensioni . . . . .	15
3.2.1	Una PDE per flussi omipotenziati . . . . .	15
3.3	Esempi di flussi omipotenziati . . . . .	16
3.4	Metodo WKB per flussi omipotenziati . . . . .	18
3.5	Flussi omipotenziati in dimensioni superiori a 2 . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Discussione dei risultati</b>	<b>21</b>

# Ricostruzione col metodo di Peebles

È noto che, nell'epoca corrente, la materia è distribuita nell'universo in maniera fortemente non omogenea anche su scale molto più grandi di quelle dei corpi celesti: si osservano vuoti relativi contrapposti a strutture cosmiche, raggruppamenti di galassie la cui esistenza è spiegata dall'interazione gravitazionale. D'altra parte l'analisi della radiazione cosmica di fondo, risalente all'epoca di decoupling radiazione-materia, indica che l'universo era in tale epoca molto più omogeneo.

Supponendo di conoscere la configurazione cinematica attuale di un certo numero di galassie, tramite integrazione delle equazioni del moto<sup>1</sup> si dovrebbe poter ricostruire la traiettoria delle stesse nel passato; tale supposizione si scontra con la realtà in quanto noi non conosciamo attualmente le velocità peculiari di molte galassie. Per ovviare a tale problema si può pensare a delle condizioni miste date da distribuzioni di massa al tempo corrente e velocità nulle all'epoca di decoupling. Una volta trovata una distribuzione di massa al disaccoppiamento, si esegue una simulazione a molti corpi e si controlla se l'evoluzione riproduce le strutture cosmiche da noi osservate.

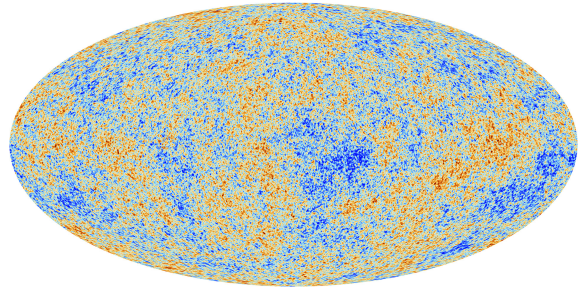


Figura 1.1: Radiazione cosmica di fondo secondo i dati raccolti dalla sonda Planck.

In [1] Peebles approccia la ricostruzione minimizzando l'azione di un sistema di corpi puntiformi in interazione gravitazionale; tali masse corrispondono ai centri di massa di galassie.

La lagrangiana di una particella di massa  $m$  è

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - m\Phi(\mathbf{r}, t) \quad (1.1)$$

ove  $\Phi$  è il potenziale gravitazionale  $\mathbf{r}$  è la posizione propria. In termini di coordinate comoventi  $\mathbf{x}$ , definite da  $\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x}$  (con  $a(t)$  fattore di scala,  $a(0) = 1$ ), la lagrangiana è

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{a}\mathbf{x} + a\dot{\mathbf{x}})^2 - m\Phi(\mathbf{x}, t) \quad (1.2)$$

---

<sup>1</sup>È inteso che bisogna utilizzare un modello computazionalmente trattabile, ad esempio una teoria newtoniana in cui le galassie sono corpi puntiformi.

che a sua volta viene mandata dalla trasformazione di gauge  $L \mapsto L - \partial_t \psi$  con  $\psi = \frac{1}{2} m a \dot{\mathbf{x}}^2$  nella lagrangiana equivalente<sup>2</sup>

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\mathbf{x}}^2 - \frac{1}{2} m a \ddot{\mathbf{x}}^2 - m \Phi(\mathbf{x}, t). \quad (1.3)$$

Usando l'equazione di Friedmann a pressione nulla,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3} \pi G \rho + \frac{\Lambda c^3}{3}, \quad (1.4)$$

la Lagrangiana diventa

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{2}{3} \pi m G \rho a^2 \mathbf{x}^2 - \frac{1}{6} \Lambda c^3 m a^2 \mathbf{x}^2 - m \Phi(\mathbf{x}, t) \quad (1.5)$$

e considerato il termine potenziale dato dalla mutua interazione tra particelle si scrive infine la Lagrangiana a molti corpi:

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \sum_i \left( \frac{1}{2} m_i a^2 \dot{\mathbf{x}}_i^2 + \frac{2}{3} \pi G \rho a^2 m_i \mathbf{x}_i^2 + \sum_{j(\neq i)} \frac{G}{a} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \right). \quad (1.6)$$

Resta così definita per questo sistema l'azione

$$S[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}] = \int_0^{t_0} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt \quad (1.7)$$

di cui si calcola la variazione con relative condizioni al contorno

$$\delta \mathbf{x}_i(t_0) = 0, \quad (1.8)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} a^2 \dot{\mathbf{x}}_i = 0, \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \delta S[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}] &= \frac{\delta S[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}]}{\delta \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\delta S[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}]}{\delta \dot{\mathbf{x}}} \delta \dot{\mathbf{x}} = \int_0^{t_0} \left[ \frac{\partial L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \delta \dot{\mathbf{x}} \right] = \\ &= \sum_i \int_0^{t_0} \left[ m_i a^2 \dot{\mathbf{x}}_i \delta \dot{\mathbf{x}}_i + \left( \frac{4}{3} \pi G \rho a^2 m_i \mathbf{x}_i - \sum_{j(\neq i)} \frac{G}{a} \frac{m_i m_j |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} \right) \delta \mathbf{x}_i \right] dt = \\ &= \sum_i \int_0^{t_0} \left[ -\frac{\partial}{\partial t} (m_i a^2 \dot{\mathbf{x}}_i) + \frac{4}{3} \pi G \rho a^2 m_i \mathbf{x}_i - \sum_{j(\neq i)} \frac{G}{a} \frac{m_i m_j |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} \right] \delta \mathbf{x}_i dt \quad (1.10) \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dall'integrazione per parti del termine in  $\dot{\mathbf{x}}$ : da tale integrazione risulta un termine di bordo identicamente nullo per via delle condizioni al

<sup>2</sup>Un tale termine aggiuntivo modifica l'azione  $S$  con una costante additiva che non incide sulla variazione  $\delta S$ , che è quella che determina le equazioni del moto.

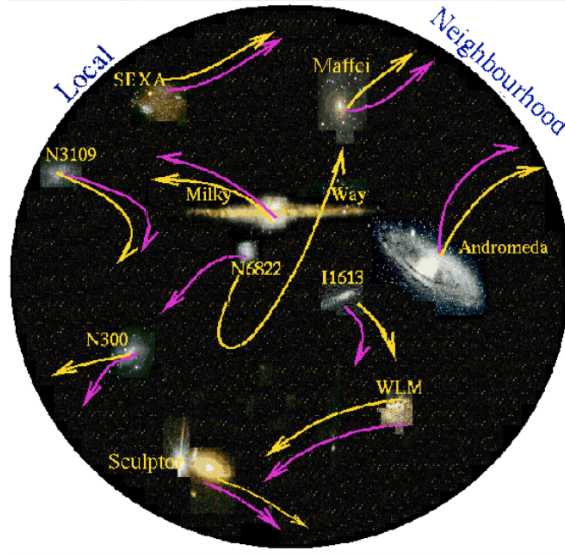


Figura 1.2: Confronto tra punti di minimo (in rosa) e punti di sella (in giallo) per l'azione di Peebles; immagine tratta da [5].

contorno sudette.

Le equazioni del moto sono date da  $\delta S[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}] = 0$ , ovvero in generale dai punti *stazionari* per l'azione. Peebles pone un ulteriore vincolo al problema, prescrivendo che le soluzioni abbiano la forma<sup>3</sup>, per ciascuna componente ( $\alpha = 1, 2, 3$ ),

$$\mathbf{x}_i^\alpha(a) = \mathbf{x}_i^\alpha(a_0) + \sum_n C_i^{n,\alpha} f_n(a) \quad (1.11)$$

con le funzioni scalari  $f_n(a)$  regolari e compatibili con le condizioni al contorno, per le quali Peebles propone

$$f_n(a) = a^n(a-1), \quad (1.12)$$

$$f_n(a) = \left(1 - \frac{a}{a_0}\right)^{N-n} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{N-n} \frac{N!}{n!(N-n)!}. \quad (1.13)$$

Inserendo tali  $\mathbf{x}_i(a)$  in  $S[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}]$  il problema si riduce alla determinazione dei coefficienti  $C_i^n$  tramite

$$\frac{\partial S[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}]}{\partial C_i^{n,\alpha}} = 0. \quad (1.14)$$

Il confronto tra le velocità peculiari note e quelle predette dal metodo mostra che i punti di minimo per l'azione danno un accordo buono per alcune galassie ma scarso per altre; la situazione migliora sensibilmente considerando i punti di sella, come indicato in [2]. Avendo diverse possibili traiettorie per le galassie, da selezionare col suddetto confronto, segue che questo metodo non dà soluzioni uniche laddove non si conosca la velocità peculiare attuale.

<sup>3</sup>Usare il fattore di scala in luogo del tempo significa applicare il cambio di parametro  $t \mapsto t(a)$ , cosa ragionevole visto il significato fisico di  $a$ .

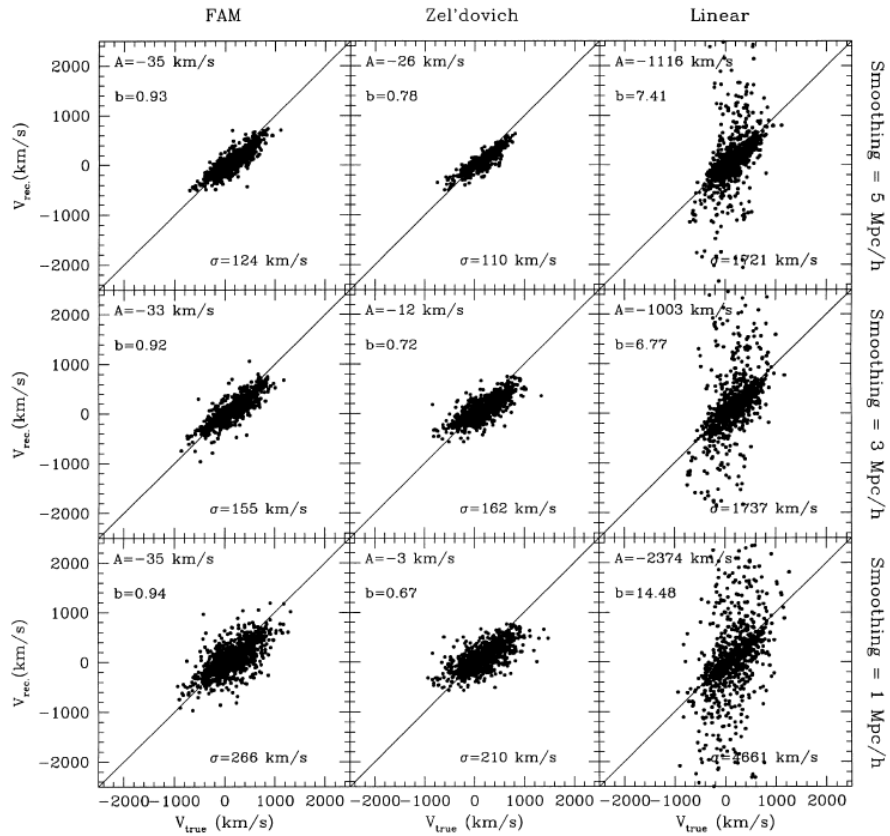


Figura 1.3: Rappresentazione delle velocità ricostruite tramite FAM, una implementazione del metodo variazionale presentata in [3], tramite l'approssimazione alla Zel'dovich e con un metodo lineare rispetto alle velocità reali. I punti vicino alla diagonale rappresentano velocità ricostruite in accordo con le velocità reali. Il metodo FAM offre tempi di calcolo ridotti, e ricostruisce i flussi fino a scale in cui le soluzioni trovate nell'approssimazione alla Zel'dovich non sono più valide. Immagine tratta da [3].



# Metodo MAK

La costruzione del metodo MAK (Monge-Ampère-Kantarovich), proposto in [4], parte dalla scrittura delle equazioni del moto, cioè del sistema di Euler-Poisson, in forma appropriata:

$$\partial_\tau \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{v} = -\frac{3}{2\tau} (\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_g) \quad (2.1)$$

$$\partial_\tau \rho + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \varphi_g = \frac{\rho - 1}{\tau} \quad (2.3)$$

dove  $v$  è la velocità,  $\rho$  la densità normalizzata rispetto alla densità media e  $\varphi_g$  una versione riscalata del potenziale gravitazionale;  $x$  indica le coordinate comoventi e  $\tau$  il fattore di crescita lineare che funge da variabile temporale. (2.1) e (2.3) accoppiano rispettivamente velocità con potenziale e potenziale con densità, mentre (2.2) è l'equazione di continuità per il flusso di materia.

Per evitare la divergenza delle equazioni per  $\tau \rightarrow 0$  dovuta ai fattori  $\frac{1}{\tau}$  bisogna imporre per velocità, potenziale gravitazionale e densità iniziali

$$\mathbf{v}^{in} = -\nabla_{\mathbf{x}} \varphi_g^{in} \quad \rho^{in} = 1. \quad (2.4)$$

Questo vincolo viene chiamato *slaving* e si può mostrare che grazie ad esso il sistema ammette una soluzione  $\tau$ -analitica ed irrotazionale per ogni  $\tau$  e non si presentano fenomeni di multistreaming fino alla formazione di caustiche.

Il problema di ricostruzione completa consiste nel trovare la mappa lagrangiana  $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{q})$  (dove  $\mathbf{q}$  è la posizione lagrangiana,  $\mathbf{x}$  la posizione euleriana) e la sua inversa  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{q}(\mathbf{x})^1$ , e i campi di velocità peculiari iniziali e finali  $\mathbf{v}^{in}(\mathbf{q})$  e  $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ : questo problema ha soluzione unica eccetto che per le concentrazioni di massa, le quali evolvono all'indietro nel tempo in una regione di spazio ben precisa ma con perdita di informazioni su velocità e struttura interna.

Le equazioni per la mappa lagrangiana  $\mathbf{x}(\mathbf{q}, \tau)$  in termini delle coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}$  sono

$$D_\tau^2 \mathbf{x} = -\frac{3}{2\tau} (D_\tau \mathbf{x} + \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_g) \quad (2.5)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \varphi_g = \frac{1}{\tau} [\det(\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{x})^{-1} - 1] \quad (2.6)$$

dove  $D_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau} + v \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$  e  $\nabla_{x_i} = \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \nabla_{q_j}$ .

---

<sup>1</sup>In generale questa inversa non è una mappa, cioè l'antimmagine di uno stato finale del sistema è data da più stati iniziali.

Come discusso in [5] lo slaving implica che per piccoli  $\tau$  il membro di destra di (2.5) sia nullo: l'**approssimazione di Zel'dovich** consiste nel considerare ciò vero per qualsiasi  $\tau$ , e quindi le equazioni per la mappa lagrangiana diventano

$$D_\tau^2 \mathbf{x} = 0 \quad (2.7)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \varphi_g = \frac{1}{\tau} [\det(\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{x})^{-1} - 1] \quad (2.8)$$

da cui segue che

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{q} + \tau(D_\tau \mathbf{x})_{in} = \mathbf{q} - \tau(\nabla_{\mathbf{q}} \varphi_{g,in}(\mathbf{q})) = \nabla_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q}, \tau), \quad (2.9)$$

con

$$\Phi(\mathbf{q}) := \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} - \tau \varphi_g^{in}(\mathbf{q}). \quad (2.10)$$

Quindi la mappa lagrangiana, nell'approssimazione di Zel'dovich, è potenziale: ne segue che le particelle si muovono in linea retta. Uno dei problemi della mappa lagrangiana così trovata è che le caustiche, che nascono come oggetti di dimensioni limitate, crescono enormemente nel tempo e danno regioni di multistreaming irragionevolmente grandi.

Un modo per risolvere questo problema, e che in realtà elimina completamente fenomeni di multistreaming, è il cosiddetto **adhesion model**, che consiste nel prendere come potenziale in luogo di  $\Phi(\mathbf{q})$  il suo convessificato  $\Phi_c(\mathbf{q})$  (ovvero,  $\Phi_c(\mathbf{q})$  è la più grande funzione convessa il cui grafico sia sottostante al grafico di  $\Phi(\mathbf{q})$ ).

È chiaro che, per piccoli valori di  $\tau$ ,  $\Phi(\mathbf{q}, \tau)$  è già convesso, essendo prossimo alla parabola; in ogni caso, dopo aver applicato l'adhesion model si mostra che le  $\mathbf{q}$ -regioni su cui  $\Phi(\mathbf{q}, \tau)$  non coincide con  $\Phi_c(\mathbf{q}, \tau)$  vengono mappate nell' $\mathbf{x}$ -spazio in luoghi che non hanno antecedente lagrangiano unico (e quindi si verifica multistreaming) ma hanno misura nulla, mentre altrove l'antecedente lagrangiano è unico (e non si verifica multistreaming).

Tornando al sistema di Euler-Poisson, poiché abbiamo assunto che la distribuzione di massa iniziale è uniforme per la conservazione della massa vale

$$d^3 \mathbf{q} = \rho_0 d^3 \mathbf{x} \quad (2.11)$$

che tramite la mappa lagrangiana si riscrive

$$\det(\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{x}) = \left[ \rho_0(\mathbf{x}(\mathbf{q})) \right]^{-1} \quad (2.12)$$

e riscritto in termini del potenziale diventa

$$\det \left[ \nabla_{q_i} \nabla_{q_j} \Phi(\mathbf{q}) \right] = \left[ \rho_0(\nabla_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q})) \right]^{-1}. \quad (2.13)$$

Per arrivare ad una equazione che separi densità e mappa lagrangiana, osserviamo che l'inversa  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  di una mappa  $\mathbf{x}(\mathbf{q})$  con potenziale convesso ha a sua volta potenziale convesso, e i due potenziali si ottengono l'uno dall'altro tramite la trasformata di Legendre.

Localmente questo fatto è chiaro: dire che  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  ammette potenziale è equivalente a dire che è simmetrica la matrice jacobiana  $\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{x}$ , il che è vero poiché essa è l'inversa della matrice jacobiana  $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{q}$ ; similmente la convessità del potenziale di  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  è equivalente alla positiva definitezza di  $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{q}$ , che segue dalle positiva definitezza di  $\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{x}$ .

Infine il potenziale per  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  è dato chiaramente da

$$\Theta(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{q}(\mathbf{x})) \quad (2.14)$$

che è appunto la trasformata di Legendre di  $\Phi(\mathbf{q})$ .

Una estensione della trasformata di Legendre che si presti a trattare distribuzioni di massa non regolari è

$$\Theta(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{q}} [\mathbf{x} \cdot \mathbf{q} - \Phi(\mathbf{q})] \quad (2.15)$$

$$\Phi(\mathbf{q}) = \max_{\mathbf{x}} [\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} - \Theta(\mathbf{x})]. \quad (2.16)$$

Sostituendo (2.15) in (2.16) arriviamo immediatamente all'equazione cercata, nota come **equazione di Monge-Ampère**:

$$\det [\nabla_{x_i} \nabla_{x_j} \Theta(\mathbf{x})] = \rho_0(\mathbf{x}). \quad (2.17)$$

Se  $\Theta$  è un potenziale non regolare in  $\mathbf{x}_0$ , si può attribuire (in modo preciso) a  $\nabla_{\mathbf{x}}\Theta$  il significato di collezione dei possibili spazi tangenti al grafico di  $\Theta$  in  $(\mathbf{x}_0, \Theta(\mathbf{x}_0))$ ; inoltre l'espressione (2.11) viene sostituita da

$$\int_{\mathcal{D}_E} \rho_0(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \int_{\nabla_{\mathbf{x}}\Theta(\mathcal{D}_E)} d^3\mathbf{q}, \quad \forall \mathcal{D}_E \quad (2.18)$$

che funziona con distribuzioni di massa singolari e costituisce l'**equazione di Monge-Ampère in forma debole**.

Si dimostra che se i domini occupati dalle masse negli spazi euleriano e lagrangiano sono limitati e convessi, si ha esistenza ed unicità della soluzione dell'equazione di Monge-Ampère in forma debole, e che questa soluzione è regolare se le distribuzioni di massa negli spazi lagrangiano ed euleriano sono entrambe regolari.

Supponiamo allora di conoscere le distribuzioni di massa  $\rho_{in}(\mathbf{q})$  e  $\rho_0(\mathbf{x})$  i cui supporti sono i domini limitati e convessi  $\mathcal{D}_{in}$  e  $\mathcal{D}_0$ : la ricerca della suddetta soluzione si può vedere come un problema di **trasporto ottimo**, ovvero come ricerca di punto stazionario di un funzionale di costo  $I$ . In [7] si mostra che per il funzionale di costo

$$I := \int_{\mathcal{D}_{in}} \frac{|\mathbf{x}(\mathbf{q}) - \mathbf{q}|^2}{2} \rho_{in}(\mathbf{q}) d^3\mathbf{q} = \int_{\mathcal{D}_0} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{q}(\mathbf{x})|^2}{2} \rho_0(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \quad (2.19)$$

la soluzione  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  è il gradiente di un potenziale convesso, che con la conservazione della massa soddisfa l'equazione di Monge-Ampère.

Dimostriamo che  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  è gradiente di un potenziale convesso nel caso regolare. La variazione del funzionale di costo porge

$$\delta I = \int_{\mathcal{D}_0} [\mathbf{x} - \mathbf{q}(\mathbf{x})] \cdot [\rho_0(\mathbf{x}) \delta \mathbf{x}] d^3\mathbf{x} = 0 \quad (2.20)$$

il che significa, in congiunzione a  $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\rho_0(\mathbf{x})\delta\mathbf{x}] = 0$ , che  $[\mathbf{x} - \mathbf{q}(\mathbf{x})]$  è  $L_2$ -ortogonale a qualsiasi (per arbitrarietà di  $\delta\mathbf{x}$ ) campo vettoriale a divergenza nulla, ossia che  $[\mathbf{x} - \mathbf{q}(\mathbf{x})]$  è un gradiente; e poiché  $\mathbf{x} = \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{2}\mathbf{x}$  deve valere  $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}}\Theta(\mathbf{x})$  per una opportuna  $\Theta(\mathbf{x})$ . Per la convessità, notiamo che vale  $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$

$$(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot [\mathbf{q}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{q}(\mathbf{x}_1)] \geq 0; \quad (2.21)$$

infatti se ciò non fosse vero per qualche  $\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2$  vicino a tali punti per continuità di  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  varrebbe

$$|\mathbf{q}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_1|^2 + |\mathbf{q}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{x}_2|^2 > |\mathbf{q}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_2|^2 + |\mathbf{q}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{x}_1|^2 \quad (2.22)$$

in contraddizione col fatto che  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  minimizza  $I$ . Infine inserendo  $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \nabla_x\Theta(\mathbf{x})$  in (2.21) ed espandendo per piccoli  $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$  troviamo

$$(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot [\mathcal{H}_\Theta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] \geq 0 \quad (2.23)$$

cioè  $\mathcal{H}_\Theta$  (matrice hessiana di  $\Theta$ ) è definita positiva, da cui segue che  $\Theta(\mathbf{x})$  è convessa.

Discretizzando (2.19) otteniamo

$$I = \min_{j(\cdot)} \left[ \sum_{i=1}^N (\mathbf{q}_{j(i)} - \mathbf{x}_i)^2 \right] \quad (2.24)$$

a cui è associato il *problema di assegnazione*: dati  $N$  punti iniziali  $\mathbf{q}$  ed  $N$  punti finali  $\mathbf{x}$ , bisogna trovare la permutazione  $j(\cdot)$  che minimizza (2.24).

Non ripetiamo i dettagli, peraltro interessanti, dell'implementazione di un metodo numerico per risolvere il problema. Ci limitiamo ad osservare che in linea di principio le permutazioni da confrontare sono  $N!$ , ed è quindi necessario adottare un algoritmo di complessità polinomiale in  $N$ , di cui si trovano diversi esempi in letteratura<sup>2</sup>.

Al netto di incertezze nella ricostruzione (dovuto alla inevitabile finitezza dei cataloghi, tra le altre cose) questo metodo dà buoni risultati: il confronto tra una simulazione a  $128^3$  corpi in uno spazio cubico (discretizzato<sup>3</sup> con passo  $\Delta x = 6.25h^{-1}Mpc$ ) di dimensione  $200h^{-1}Mpc$  con un modello  $\Lambda CDM$  ( $\Omega_m = 0.3$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.7$ ,  $h = 0.65$ ,  $\sigma_8 = 0.9$ ) e il metodo MAK mostra che i punti lagrangiani sono ricostruiti perfettamente per il 60% dei punti e differiscono per meno di  $\Delta x$  nel 75% dei casi su un campione di 17178 punti.

<sup>2</sup>Burkard e Derigs 1980; Bertsekas 1998.

<sup>3</sup> $h$  è il parametro di Hubble in unità di  $100kms^{-1}Mpc^{-1}$ .

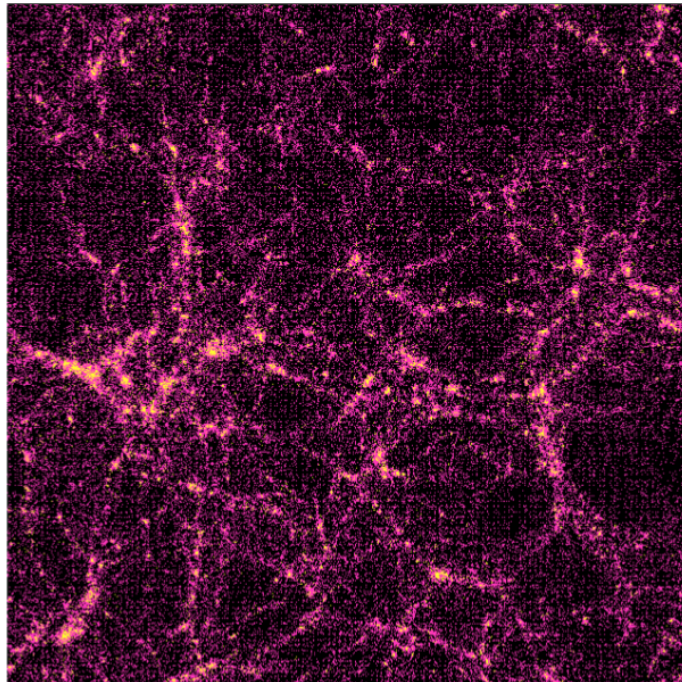


Figura 2.1: Sezione bidimensionale di lato  $\approx 26Mpc/h$  del dominio cubico di dimensione  $200Mpc/h$  di un algoritmo discreto usato per per il test del metodo KAM rispetto ad una simulazione ad N corpi. I punti più chiari sono quelli per i quali la ricostruzione non è esatta, e come atteso si trovano in regioni ad alta densità. Immagine tratta da [6].

# Flussi onnipotenziali

Visto il successo del metodo MAK, basato sull'uso di mappe lagrangiane che ammettono potenziale convesso, è lecito chiedersi se esistano mappe "non alla Zel'dovich" che godono della stessa proprietà. Seguendo [8], caratterizziamo queste mappe tramite la loro matrice hessiana, in modo da orientarne la ricerca formulando opportuni strumenti.

Consideriamo la mappa lagrangiana  $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q}, t)$  che associa ad ogni punto  $q$  dello spazio lagrangiano (cioè, ad ogni dato iniziale) un punto  $x$  dello spazio euleriano tempo  $t$ . È chiaro il significato del campo di velocità euleriane, detto **flusso**,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{x}}$ ; considerando tale  $\mathbf{v}$  definito su tutto  $\mathbb{R}^d$  e per  $t \in [0, T]$  resta poi definita una famiglia a due parametri di  $(t, \tau)$ -mappe (con  $0 \leq t < \tau < T$ ) che portano una particella dalla posizione  $\mathbf{x}(\mathbf{q}, t)$  a  $\mathbf{x}(\mathbf{q}, \tau)$  (e la  $(0, t)$ -mappa è semplicemente la mappa lagrangiana  $\mathbf{x}(\mathbf{q}, t)$ ).

Il flusso  $\mathbf{v}$  si dice **omnipotenziale** se tali  $(t, \tau)$ -mappe indotte da  $\mathbf{v}$  sono gradienti di un potenziale  $\mathbf{q}$ -convesso, ossia

$$\mathbf{q} \mapsto \mathbf{x} = \nabla_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q}; t, \tau) \quad (3.1)$$

con  $\Phi$  convessa in  $\mathbf{q}$ . Denotiamo con  $\mathcal{H}(\Phi)$  la matrice hessiana di  $\Phi$ , ossia

$$\mathcal{H}_{ij}(\Phi) = \partial_{q_i q_j}^2 \Phi; \quad (3.2)$$

assumiamo poi che  $\Phi$  sia di classe  $\mathcal{C}^2$  e che  $\mathcal{H}(\Phi)$  sia continua in  $t$  e  $\tau$ . È chiaro che la  $(t, t)$ -mappa è la funzione identica, di potenziale  $\Phi(\mathbf{q}; t, \tau) = \frac{\mathbf{q}^2}{2}$  convesso e  $\mathcal{H}(\Phi) = \mathbb{1}_d$ : al separarsi dei due parametri temporali, la perdita di convessità implica che uno o più autovalori di  $\mathcal{H}(\Phi)$  si annullano, ed essendo la matrice hessiana di  $\Phi$  semplicemente la matrice jacobiana della  $(t, \tau)$ -mappa questo coincide con la perdita di invertibilità di tale mappa. Queste osservazioni elucidano l'emergenza matematica del *multistreming* e suggeriscono le condizioni da imporre su  $\mathcal{H}(\Phi)$  per preservare l'omnipotenzialità per tutte le coppie  $(t, \tau)$ .

## Due condizioni su $\mathcal{H}(\Phi)$

Considerata la figura 3.1, è chiaro che la  $(t, \tau)$ -mappa  $\xi(\mathbf{x})$  è la composizione dell'inversa della  $(t_0, t)$ -mappa  $\mathbf{x}(\mathbf{q})$  e della  $(t_0, \tau)$ -mappa  $\xi(\mathbf{q})$ : mostriamo che la  $(t, \tau)$ -mappa è onnipotenziale se e solo se commutano le matrici Hessiane delle due sottomappe.

Assumiamo che la  $(t, \tau)$ -mappa  $\xi(\mathbf{x})$  sia una diffeomorfismo (di regolarità sufficiente) di  $\mathbb{R}^d$  in se stesso per ogni  $t$  e  $\tau$  tali che  $0 \leq t \leq \tau \leq T$  e scriviamo i potenziali delle

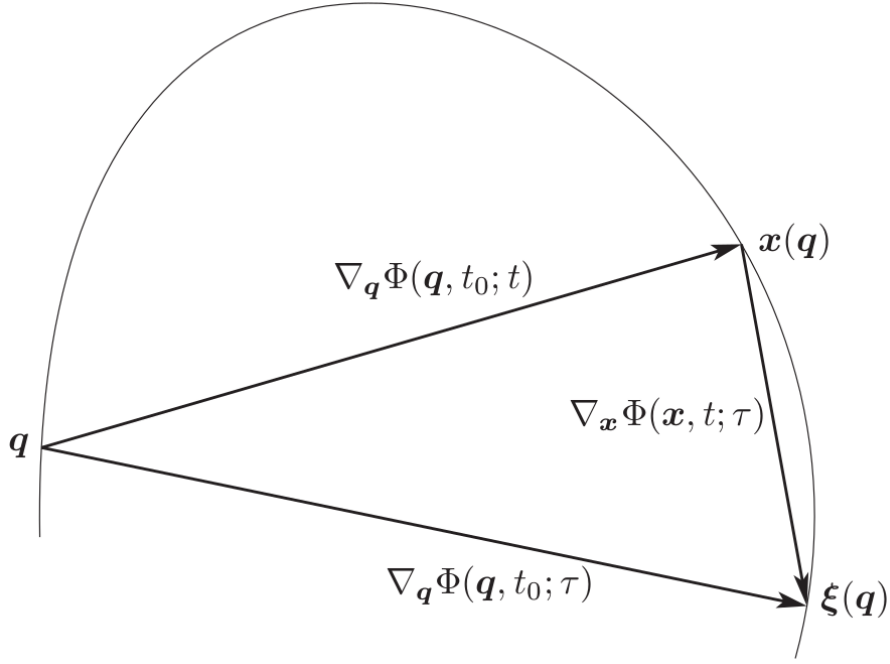


Figura 3.1: Composizione di mappe potenziali; figura tratta da [8].

due sottomappe come  $\Phi_1(\mathbf{q}) := \Phi(\mathbf{q}; t_0, t)$  e  $\Phi_2(\mathbf{q}) := \Phi(\mathbf{q}; t_0, \tau)$ . Se la  $(t, \tau)$ -mappa è potenziale, deve essere simmetrica la sua matrice jacobiana  $\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}$  (localmente tale condizione è anche sufficiente). Per la regola della catena, e per quanto osservato sulla composizione delle sottomappe, vale

$$\mathcal{H}(\Phi_2) = \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{H}(\Phi_1), \quad (3.3)$$

ovvero

$$\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}} = \mathcal{H}(\Phi_2) \mathcal{H}^{-1}(\Phi_1). \quad (3.4)$$

Essendo il membro di sinistra di (3.4) una matrice simmetrica, tale deve essere anche il membro di destra; valendo poi che il prodotto di due matrici simmetriche è una matrice simmetrica se le due matrici commutano, devono commutare  $\mathcal{H}(\Phi_2)$  e  $\mathcal{H}^{-1}(\Phi_1)$  che è equivalente al fatto che commutano  $\mathcal{H}(\Phi_1)$  e  $\mathcal{H}(\Phi_2)$ .

Percorrendo lo stesso ragionamento al contrario si mostra che che la commutatività di  $\mathcal{H}(\Phi_1)$  e  $\mathcal{H}(\Phi_2)$  è condizione sufficiente perché  $\xi(\mathbf{x})$  sia potenziale; commutatività delle matrici hessiane e potenzialità della  $(t, \tau)$ -mappa sono quindi equivalenti.

In modo del tutto simile si dimostra che commutano le matrici hessiane dei potenziali di mappe tali che il tempo finale di una coincide col tempo iniziale dell'altra, e infine combinando questi due fatti ed usando il teorema di codiagonalizzabilità di matrici simmetriche che commutano tra loro si mostra che lungo qualsiasi traiettoria le matrici hessiane di una  $(t_1, \tau_1)$ -mappa e di una  $(t_2, \tau_2)$ -mappa commutano per qualsiasi scelta di tali coppie di tempi.

Una condizione equivalente sulla matrice hessiana si trova nel modo seguente. Consideriamo una matrice simmetrica  $H(t)$  che dipenda in maniera regolare (cioè di classe  $\mathcal{C}^k$ , per un  $k$  adeguato) dal tempo e tale che per qualsiasi scelta di  $t$  e  $t'$  valga

$$H(t)H(t') = H(t')H(t). \quad (3.5)$$

Derivando tale equazione in  $t'$  e ponendo  $t' = t$  troviamo che vale

$$H(t)\dot{H}(t) = \dot{H}(t)H(t). \quad (3.6)$$

Mostriamo anche che la seconda equazione implica la prima. Omettiamo la dipendenza temporale: essendo  $H$  simmetrica, si può scrivere

$$H = U^t \Lambda U \quad (3.7)$$

dove  $U$  è una matrice ortogonale e  $\Lambda$  è una matrice diagonale. Derivando  $U^t U = 1$  rispetto a  $t$  si trova

$$U\dot{U}^t = -(U\dot{U}^t)^t \quad (3.8)$$

ovvero la matrice  $X := U\dot{U}^t$  è antisimmetrica. Sostituendo (3.7) in (3.6) troviamo

$$\Lambda X \Lambda - \Lambda^2 X = X \Lambda^2 - \Lambda X \Lambda, \quad (3.9)$$

ovvero  $X \Lambda - \Lambda X$  (che è simmetrica) commuta con  $\Lambda$ . Per il teorema di codiagonalizzabilità di matrici simmetriche che commutano,  $X \Lambda - \Lambda X$  e  $\Lambda$  sono contemporaneamente diagonalizzabili, ed essendo  $\Lambda$  diagonale per definizione anche  $X \Lambda - \Lambda X$  è diagonale. Essendo poi le entrate di questa matrice  $(\lambda_j - \lambda_i)X_{ij}$ , supponendo che  $\lambda_j \neq \lambda_i, \forall i, j^1$  deve valere  $X_{ij} = 0, \forall i \neq j$  ed essendo anche le entrate sulla diagonale di  $X$  nulle (per antisimmetria di  $X$ ) segue che  $X$  è la matrice nulla, e quindi

$$\dot{U} = -XU = 0, \quad (3.10)$$

Ciò equivale a dire che variazioni nel tempo cambiano solo gli autovalori di  $H$  senza modificarne gli autospazi: da questo segue infine che  $H(t)H(t') = H(t')H(t)$ . Ponendo

$$H(t) = \mathcal{H}(\Phi(\mathbf{q}; 0, t)), \quad (3.11)$$

$H(t)$  è ora la matrice jacobiana della mappa  $\nabla\Phi(\mathbf{q}; 0, t)$ , quindi in particolare è una matrice simmetrica: per il ragionamento appena fatto, la onnipotenzialità di tale mappa è equivalente al fatto che  $\mathcal{H}(\Phi(\mathbf{q}; 0, t))$  e  $\dot{\mathcal{H}}(\Phi(\mathbf{q}; 0, t))$  commutino ad ogni tempo  $t$ .

---

<sup>1</sup>Se questa condizione dovesse non essere valida per tempi isolati, l'affermazione seguente resterebbe valida per continuità.



### Flussi "alla Zel'dovich"

Nell'approssimazione di Zel'dovich, tutte le particelle si muovono di moto rettilineo uniforme prima della formazione di caustiche. La mappa lagrangiana è quindi

$$\mathbf{q} \mapsto \mathbf{x} = \nabla_{\mathbf{q}} \left( \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} + t\varphi_0(\mathbf{q}) \right) \quad (3.12)$$

dove  $\varphi_0(\mathbf{q})$  è il potenziale di velocità a  $t = 0$ . La matrice hessiana di questa mappa è  $\mathbb{1} + t\mathcal{H}(\varphi_0(\mathbf{q}))$ , i cui autospazi sono quelli di  $\mathcal{H}(\varphi_0(\mathbf{q}))$ : chiaramente tali matrici hessiane, calcolate a tempi diversi, commutano tra loro, e per quanto dimostrato sopra il flusso ad esse associate è omipoteniale.

Una ovvia generalizzazione di tali flussi è data dalla famiglia di flussi *alla Zel'dovich*<sup>2</sup>, associati ai potenziali

$$\Phi(\mathbf{q}; 0, t) = \mu(t) \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} + \eta(t)\varphi_0(\mathbf{q}) \quad (3.13)$$

dove  $\mu(t)$  e  $\eta(t)$  sono funzioni arbitrarie. A ben vedere, però, la generalizzazione è minima, in quanto riscaldando il potenziale di un fattore  $\frac{1}{\mu(t)}$  e usando come variabile temporale  $t' = \frac{\eta(t)}{\mu(t)}$  ci si riconduce al caso base.

### Flussi omipotenziali in due dimensioni

In questa sezione cerchiamo dei flussi omipotenziali che non siano alla Zel'dovich. Escludiamo anche il caso dei potenziali a simmetria sferica  $\Phi(|\mathbf{q}|, t)$ : si calcola facilmente che

$$\left[ \mathcal{H}(\Phi(|\mathbf{q}|, t)), \mathcal{H}(\Phi(|\mathbf{q}|, t')) \right] = 0, \quad \forall t, t' \quad (3.14)$$

quindi le mappe associate a tali flussi sono equipotenziali.

### Una PDE per flussi omipotenziali

Consideriamo un matrice simmetrica  $2 \times 2$   $H$ , e supponiamo che l'autovettore associato all'autovalore  $\lambda$  formi un angolo  $\theta$  con l'asse cartesiano  $q_1$ . Vale

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

che con semplici manipolazioni algebriche porge

$$\frac{H_{11} - H_{22}}{H_{12}} = \cot 2\theta : \quad (3.15)$$

assegnare un valore a  $\cot 2\theta$  definisce in maniera univoca l'insieme dei due autospazi<sup>3</sup>.

<sup>2</sup>In inglese *Zel'dovich-type*.

<sup>3</sup> $\cot 2\theta$  definisce  $\theta$  a meno di un angolo di  $\frac{\pi}{2}$ , ma la trasformazione  $\theta \rightarrow \theta + \frac{\pi}{2}$  scambia i due autospazi lasciando il loro insieme immutato.

Per quanto visto nelle precedenti sezioni, per un flusso omnipotenziale gli autospazi della matrice Hessiana degli  $(0, t)$ -potenziali dipendono solo da  $\mathbf{q}$  e non da  $t$ : chiamando  $\Phi(\mathbf{q}, t)$  una tale potenziale, e  $g(\mathbf{q})$  il valore di  $\cot 2\theta$  lungo la traiettoria uscente da  $\mathbf{q}$ , quanto appena visto porge per il potenziale l'equazione alle derivate parziali

$$(\partial_{q_1 q_1}^2 - \partial_{q_2 q_2}^2)\Phi(\mathbf{q}, t) = g(\mathbf{q})\partial_{q_1 q_2}^2 \Phi(\mathbf{q}, t), \quad (3.16)$$

con intesa la condizione iniziale  $\Phi(\mathbf{q}, 0) = \frac{|\mathbf{q}|}{2}$ , il cui gradiente è l'identità.

## Esempi di flussi omnipotenziali

Consideriamo (3.16) nel caso particolare dato da

$$g(\mathbf{q}) = \frac{aq_1^2 - bq_2^2}{q_1 q_2} \quad (3.17)$$

con  $a$  e  $b$  numeri reali qualsiasi. Si può mostrare che in questo caso una soluzione è il polinomio omogeneo di grado pari  $2k$ ,  $k \geq 2$

$$p_{2k}(q_1, q_2) = \sum_{i=0}^k \left( \prod_{j=1}^{i-1} (2k-1+2j(a-1)) \prod_{j=0}^{k-1-i} (2k-1+2j(b-1)) \right) \frac{k! q_1^{2i} q_2^{2(k-i)}}{i! (k-i)! (2k-1)!}; \quad (3.18)$$

ad esempio, per  $k = 2$  si trova

$$p_4(q_1, q_2) = (2a+1)q_1^4 + 6q_1^2 q_2^2 + (2b+1)q_2^4, \quad (3.19)$$

mentre per  $k = 3$  vale

$$p_6(q_1, q_2) = (4a+1)(2a+3)q_1^6 + 15(2a+3)q_1^4 q_2^2 + 15(2b+3)q_1^2 q_2^4 + (4b+1)(2b+3)q_2^6. \quad (3.20)$$

Si può mostrare anche che  $p_{2k}(q_1, q_2)$  dato da (3.18) è identicamente nullo per interi  $j \geq 1$  e  $\hat{j} \geq 1$  tali che  $j + \hat{j} \leq k - 1$  in termini dei quali le costanti  $a$  e  $b$  assumono i valori

$$\hat{a} = 1 - \frac{2k-1}{2\hat{j}}, \quad \hat{b} = 1 - \frac{2k-1}{2j}, \quad (3.21)$$

ma che per tali valori dei parametri esistono comunque due soluzioni indipendenti date da

$$\left. \frac{\partial}{\partial a} p_{2k}(q_1, q_2) \right|_{a=\hat{a}, b=\hat{b}}, \quad \left. \frac{\partial}{\partial b} p_{2k}(q_1, q_2) \right|_{a=\hat{a}, b=\hat{b}}. \quad (3.22)$$

Se tutti i coefficienti che compaiono in  $p_{2k}(q_1, q_2)$  sono positivi<sup>4</sup> allora  $p_{2k}(q_1, q_2)$  è convesso  $\forall k \geq 2$ ; in questo caso è pure convesso il potenziale

<sup>4</sup>Ciò si verifica se  $\min(a, b) \geq \frac{-1}{(2k-2)}$ .

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \mu_2(t) \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} + \sum_{k \geq 2} \mu_{2k}(t) p_{2k}(q_1, q_2) \quad (3.23)$$

se tutti i coefficienti  $\mu_{2k}(t)$  sono non-negativi e la successione  $(\mu_{2k}(t))_k$  tende a zero abbastanza rapidamente da far convergere la sommatoria; infine la condizione iniziale è soddisfatta se  $\mu_2(0) = 1$  e  $\mu_{2k}(0) = 0, \forall k \geq 2$ , dando così flussi omnipotenziali non alla Zel'dovich.

La generalizzazione naturale di quanto appena visto è data dall'aggiunta di un polinomio omogeneo di grado dispari al potenziale (3.23), con il grado del nuovo termine superiore di 1 a quello del grado più alto che compare in  $\Phi$ . Una tale generalizzazione non è in generale permessa, nel senso che la convessità di  $\Phi$  su tutto il piano sarebbe inevitabilmente persa; su un dominio limitato, invece, un tale termine aggiuntivo non rovina la convessità di (3.23) se compare riscaldato da un coefficiente  $\mu_{2K+1}$  ( $K = \max k$ ) sufficientemente piccolo. Questo è ciò che avviene nel caso esaminato, cioè  $g(\mathbf{q}) = (aq_1^2 - bq_2^2)/(q_1q_2)$ : si trova che un tale  $p_{2k+1}$  può essere soluzione di (3.16) solo se  $k \geq 2$  e  $a = b = -1/(k-1)$ . A queste condizioni si trova la soluzione, per costanti arbitrarie  $c_1$  e  $c_2$ ,

$$p_{2k+1}(q_1, q_2) = c_1 \mathcal{P}_k(q_1, q_2) + c_2 \mathcal{P}_k(q_2, q_1) \quad (3.24)$$

con

$$\mathcal{P}_k(q_1, q_2) = \sum_{i=0}^{k-i} \left( \prod_{j=0}^{i-1} \frac{(2(k-j)+1)(k-1-j)}{(j+1)(2j-1)} \right) q_1^{2i} q_2^{2(k-i)+1}. \quad (3.25)$$

Ad esempio, per  $a = b = -1$ , si trova il polinomio di quinto grado

$$p_5(q_1, q_2) = c_1(q_1^5 - 5q_1^3q_2^2) - c_2(5q_1^2q_2^3 + q_2^5). \quad (3.26)$$

Infine, dalle condizioni sulle costanti  $a$  e  $b$  che compaiono in  $g(\mathbf{q})$ , segue facilmente che il grado di tale polinomio omogeneo di grado dispari è superiore di 1 rispetto al grado del polinomio omogeneo di grado pari convesso che sia soluzione a (3.16) per questa scelta di  $g(\mathbf{q})$ .

## Metodo WKB per flussi omnipotenziali

Assumiamo ora che il potenziale ammetta lo sviluppo in serie

$$\Phi(\mathbf{q}) = e^{ikS(\mathbf{q})} \left[ A_0(\mathbf{q}) + \frac{1}{k} A_1(\mathbf{q}) + \frac{1}{k^2} A_2(\mathbf{q}) + \dots \right] + c.c., \quad (3.27)$$

dove  $k$  è molto grande; questo *ansatz* è detto approssimazione WKB. Inserendo questa espressione per  $\Phi(\mathbf{q})$  troncata al primo ordine in  $k$  l'equazione 3.16 diventa

$$\frac{(\partial_1 S)^2 - (\partial_2 S)^2}{(\partial_1 S)(\partial_2 S)} = g(\mathbf{q}). \quad (3.28)$$

Questa equazione è equivalente al fatto che, al primo ordine,  $\nabla_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q})$  è autovettore di  $\mathcal{H}(\varphi_0(\mathbf{q}))$ : questo fatto permette di costruire la funzione iconale  $S(\mathbf{q})$  in un dominio  $\Omega$  in cui  $\mathcal{H}(\varphi_0(\mathbf{q}))$  sia regolare e i suoi autovalori siano distinti<sup>5</sup>.

Chiamiamo  $\mathbf{u}(\mathbf{q})$  e  $\mathbf{v}(\mathbf{q})$  i due autovettori unitari di  $\mathcal{H}(\varphi_0(\mathbf{q}))$  scelti in modo da dipendere in maniera regolare da  $\mathbf{q}$  in  $\Omega$ . Il fatto che  $\nabla_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q})$  è autovettore di  $\mathcal{H}(\varphi_0(\mathbf{q}))$  implica che  $\mathbf{u}(\mathbf{q}) \cdot \nabla_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q}) = 0$  oppure  $\mathbf{v}(\mathbf{q}) \cdot \nabla_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q}) = 0$ ; detto in altri termini, le curve di livello di  $S(\mathbf{q})$  sono le curve integrali definite da  $\mathbf{v}(\mathbf{q})$  oppure  $\mathbf{u}(\mathbf{q})$ , ovvero esistono due classi di soluzioni che si ottengono scegliendo una funzione iconale  $S(\mathbf{q})$  arbitraria su una di queste curve ed estendendola in modo tale che rimanga costante sull'altra classe di curve.

Le equazioni per i successivi due termini ( $k^1$  e  $k^0$ ) nello sviluppo di  $\Phi(\mathbf{q})$  si trovano inserendo (3.27) nell'equazione (3.16). Per chiarezza di notazione è utile adottare la notazione<sup>6</sup>

$$\hat{p} = \partial_1 S(\mathbf{q}), \quad \hat{q} = \partial_2 S(\mathbf{q}), \quad \hat{r} = \partial_{11}^2 S(\mathbf{q}), \quad \hat{s} = \partial_{12}^2 S(\mathbf{q}), \quad \hat{t} = \partial_{22}^2 S(\mathbf{q}); \quad (3.29)$$

allora l'equazione del termine principale e dei primi due termini secondari si scrivono

$$\hat{p}^2 - \hat{q}^2 - g\hat{p}\hat{q} = 0, \quad (3.30)$$

$$(\hat{r} - g\hat{s} - \hat{t})A_1 + 2(\hat{p}\partial_1 A_0 - \hat{q}\partial_2 A_0) - g(\hat{p}\partial_2 A_0 + \hat{q}\partial_1 A_0) = 0, \quad (3.31)$$

$$(\hat{r} - g\hat{s} - \hat{t})A_1 + 2(\hat{p}\partial_1 A_1 - \hat{q}\partial_2 A_1) - g(\hat{p}\partial_2 A_1 + \hat{q}\partial_1 A_1) - i(\partial_{11}^2 - \partial_{22}^2 - g\partial_{12}^2)A_0 = 0. \quad (3.32)$$

Esplicitando  $g$  dalla prima e sostituendo nelle altre due otteniamo

$$\hat{q}\partial_1 A_0 - \hat{p}\partial_2 A_0 + \frac{\hat{p}\hat{q}(\hat{r} - \hat{t}) - \hat{s}(\hat{p}^2 - \hat{q}^2)}{\hat{p}^2 + \hat{q}^2} A_0 = 0, \quad (3.33)$$

<sup>5</sup>Tipicamente gli autovalori si eguagliano in punti isolati, quindi questa condizione non è particolarmente restrittiva.

<sup>6</sup>Le derivate in  $q_1$  e  $q_2$  sono scritte, per compattezza, come  $\partial_1$  e  $\partial_2$ ; notazioni simili valgono per le derivate seconde.

$$\hat{q}\partial_1 A_1 - \hat{p}\partial_2 A_1 + \frac{\hat{p}\hat{q}(\hat{r} - \hat{t}) - \hat{s}(\hat{p}^2 - \hat{q}^2)}{\hat{p}^2 + \hat{q}^2} A_1 - i \frac{\hat{p}\hat{q}}{\hat{p}^2 + \hat{q}^2} (\partial_{11}^2 - \partial_{22}^2 - g\partial_{12}^2) A_0 = 0. \quad (3.34)$$

La 3.33 è una equazione al primo ordine lineare omogenea per  $A_0$ , e si può integrare lungo le curve ortogonali con dati iniziali non nulli; la 3.34 è una equazione per  $A_1$  non omogenea, che si integra partendo da dati iniziali nulli. L'estensione ai termini successivi si tratta in modo simile.

Ora per una data  $g(\mathbf{q})$  costruiamo (localmente in  $t$  e  $\mathbf{q}$ ) un flusso omnipotenziale. Consideriamo un potenziale di velocità iniziale  $\varphi_0(\mathbf{q})$  arbitrario ma regolare: con i metodi visti sopra possiamo costruire per esso una funzione iconiale  $S(\mathbf{q})$  regolare e ampiezze  $A_0(\mathbf{q}), A_1(\mathbf{q}), \dots$  regolari, ottenendo così una soluzione regolare  $\tilde{\Phi}(\mathbf{q})$  per 3.16; supponiamo anche che la serie 3.27 converga. A causa della fase  $e^{ikS(\mathbf{q})}$ , le derivate seconde in  $\mathbf{q}$  di  $\tilde{\Phi}(\mathbf{q})$  così ottenuto sono molto grandi ed esso non può essere convesso. È però convesso, per  $\epsilon$  piccolo e  $f(t)$  regolare e tale che  $f(0) = \dot{f}(0) = 0$ , il potenziale

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} + t\varphi_0(\mathbf{q}) + f(t) \frac{\epsilon}{k^2} \tilde{\Phi}(\mathbf{q}) : \quad (3.35)$$

a tempi piccoli, il secondo ed il terzo termine preservano la convessità del primo, assicurando che a  $\Phi(\mathbf{q}, t)$  sia associato un flusso omnipotenziale. Per  $k$  grandi si trova che le traiettorie di  $\nabla_{\mathbf{q}}\Phi(\mathbf{q}, t)$  differiscono di poco da quelle associate ai primi due termini, cioè di un flusso alla Zel'dovich; in ogni caso, questa è effettivamente una famiglia di flussi omnipotenziali più ampia.

## Flussi omnipotenziali in dimensioni superiori a 2

Accenniamo al caso generale di  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 3$ .

Per prima cosa notiamo che, mentre nel caso 2-dimensionale la sola equazione (3.16) prescrive la struttura di  $\mathcal{H}(\Phi)$ , in generale gli invarianti per determinare la struttura di una matrice simmetrica sono più di uno, come illustrato nell'appendice di [8]. Nel caso  $d = 3$ , ad esempio, si trovano tre invarianti indipendenti, che portano a scrivere per il flusso  $\Phi(\mathbf{q})$  le equazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial_{1,3}^2 \Phi}{\partial_{1,2}^2 \Phi} \left( \frac{(\partial_{1,1}^2 - \partial_{2,2}^2) \Phi}{\partial_{1,2}^2 \Phi} + \frac{\partial_{2,3}^2 \Phi}{\partial_{1,3}^2 \Phi} - \frac{\partial_{1,3}^2 \Phi}{\partial_{2,3}^2 \Phi} \right) = \\ \left( g_1(\mathbf{q}) + \frac{(\partial_{1,1}^2 - \partial_{2,2}^2) \Phi}{\partial_{1,2}^2 \Phi} \right) \left( \frac{(\partial_{2,2}^2 - \partial_{3,3}^2) \Phi}{\partial_{2,3}^2 \Phi} + \frac{\partial_{1,3}^2 \Phi}{\partial_{1,2}^2 \Phi} - \frac{\partial_{1,2}^2 \Phi}{\partial_{1,3}^2 \Phi} \right), \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial_{2,3}^2 \Phi}{\partial_{1,3}^2 \Phi} \left( g_1(\mathbf{q}) + \frac{(\partial_{1,1}^2 - \partial_{2,2}^2) \Phi}{\partial_{1,2}^2 \Phi} \right) = g_2(\mathbf{q}) - g_3(\mathbf{q}) \frac{(\partial_{1,1}^2 - \partial_{2,2}^2) \Phi}{\partial_{1,2}^2 \Phi}, \quad (3.37)$$

$$g_3(\mathbf{q}) \left( \frac{(\partial_{2,2}^2 - \partial_{3,3}^2) \Phi}{\partial_{2,3}^2 \Phi} + \frac{\partial_{1,3}^2 \Phi}{\partial_{1,2}^2 \Phi} - \frac{\partial_{1,2}^2 \Phi}{\partial_{1,3}^2 \Phi} \right) = \frac{(\partial_{3,3}^2 - \partial_{1,1}^2) \Phi}{\partial_{1,3}^2 \Phi} + \frac{\partial_{1,2}^2 \Phi}{\partial_{2,3}^2 \Phi} - \frac{\partial_{1,2}^2 \Phi}{\partial_{2,3}^2 \Phi}. \quad (3.38)$$

Queste equazioni, oltre ad essere evidentemente complicate, presentano un fondamentale problema di compatibilità: non è chiaro quali condizioni debbano soddisfare  $g_1(\mathbf{q})$ ,  $g_2(\mathbf{q})$  e  $g_3(\mathbf{q})$  perché tali equazioni abbiano almeno due soluzioni distinte. Nonostante questa difficoltà nel problema generale, è possibile trovare qualche soluzione a questo sistema a patto di restringersi a somme (con coefficienti dipendenti dal tempo) di polinomi omogenei simmetrici nei loro argomenti (cioè invarianti per scambio di coordinate).

Per quanto riguarda il metodo WKB, l'estensione della procedura vista al caso  $d = 3$  incontra una difficoltà generale nella costruzione della funzione iconale  $S$ . Come visto,  $\nabla_{\mathbf{q}}S$  deve essere parallelo ad un autovettore di  $\mathcal{H}(\varphi_0)$ : preso un tale autovettore unitario  $\mathbf{n}(\mathbf{q})$ , regolare in  $\mathbf{q}$ , deve esistere una funzione  $\mu(\mathbf{q})$  tale che

$$\nabla_{\mathbf{q}}S = \mu(\mathbf{q})\mathbf{n}(\mathbf{q}) : \tag{3.39}$$

ciò equivale a dire che la 1-forma differenziale  $\mathbf{n}(\mathbf{q}) \cdot d\mathbf{q}$  deve ammettere un fattore integrante, cioè una funzione  $\rho(\mathbf{q})$  tale che  $\rho(\mathbf{q})(\mathbf{n}(\mathbf{q}) \cdot d\mathbf{q})$  sia una forma differenziale esatta. Un tale fattore integrante esiste sempre (localmente) in due dimensioni, mentre in tre dimensioni non si hanno garanzie sulla sua esistenza.

# Discussione dei risultati

I risultati trovati sui flussi omnipotenziati spiegano l'efficacia del metodo MAK. Consideriamo una distribuzione di massa iniziale che venga fatta evolvere tramite il sistema di Euler-Poisson nell'approssimazione di Zel'dovich ad una distribuzione di massa finale senza shell crossing: la ricostruzione (discreta) tramite il metodo MAK è esatta. In realtà questo fatto si estende a tutte le mappe lagrangiane che siano gradienti di potenziali convessi, il che giustifica l'interesse nei flussi equipotenziati.

Le soluzioni al sistema di Euler-Poisson generale, che regola il moto di materia nell'universo in assenza di collisioni e con fenomeni di multi-streaming confinati a scale trascurabili, non possiedono questa proprietà, al contrario di un raffinamento dell'approssimazione di Zel'dovich dato dalla teoria perturbativa lagrangiana al secondo ordine, che descrive effetti gravitazionali rilevanti nell'evoluzione delle LSS; per tale teoria, la mappa lagrangiana e la sua inversa sono ricostruite esattamente dal metodo MAK, che quindi funziona bene su scale sufficientemente ampie.

Infine bisogna tenere conto che le equazioni di Euler-Poisson sono valide finché non si verifica multi-streaming, il quale però si presenta molto prima dell'epoca attuale partendo da condizioni iniziali fisicamente realistiche. Per evitare questo problema si può regolarizzare il campo di velocità iniziale eliminando tutte le sue componenti di Fourier il cui numero d'onda eccede  $K = 1/L$  data la scala di regolarizzazione  $L$ ; con questo accorgimento si può mostrare che non avviene shell crossing (e quindi multi-streaming) almeno per un tempo finito  $T(L)$ , e quindi fino a tale tempo le equazioni di Euler-Poisson restano valide. Un confronto con una simulazione a  $N$  corpi evidenzia che per  $T/T(L) \ll 1$  la teoria perturbativa lagrangiana resta valida sopra la scala  $L$ , essendo  $T/T(L)$  il parametro che regola le perturbazioni della teoria; questi fatti non sono ancora ben compresi, ma qualche informazione è data in [9].

# Bibliografia

- [1] P.J.E. Peebles. *Tracing galaxy orbits back in time*. The Astrophysical Journal, 344:L53-L56(1989).
- [2] P.J.E. Peebles. *The gravitaional instability picture and the formation of the Local Group*. The Astrophysical Journal, 362:1-13(1990).
- [3] E. Branchini, A. Nusser. *On the least action principle in cosmology*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 313,587-595(2000).
- [4] U. Frisch, S. Matarrese, R. Mohayaee and A. Sobolevskii. *A Reconstruction of the initial conditions of the universe by optimal mass transportation* Nature 417, 260(2002).
- [5] Y. Brenier, U. Frisch, M. Hénon, G. Loeper, S. Matarrese, R. Mohayaee, A. Sobolevskii. *Reconstruction of the early Universe as a convex optimization problem*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 346,501-524(2003).
- [6] R. Mohayaee, U. Frisch, S. Matarrese, and A. Sobolevskii. *Back to the primordial Universe by a Monge–Ampère–Kantorovich optimization scheme* Astronomy & Astophysics 406, 393–401 (2003).
- [7] Y. Brenier. *Polar Factorization and Monotone Rearrangement of Vector-Valued Functions*. Communications on Pure and Applied Mathematics. 44,4,375-417(1991).
- [8] U. Frisch, O. Podvigina, B. Villone, V. Zheligovsky *Optimal transport by omni-potential flow and cosmological reconstruction*. Journal of Mathematical Physics 53, 033703 (2012).
- [9] T. Buchert *Lagrangian perturbation approach to the formation of larg-scale structure*. Proceedings of the IOP Enrico Fermi, Course CXXXII, Dark Matter in the Universe, 543-564(1995).