

UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Introduzione all’analisi simplettica delle soluzioni  
asintotiche dell’equazione di Schrödinger

Relatore

Prof. Franco Cardin

Laureando

Pietro Panazzolo

Anno Accademico 2019/2020



---

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Varietà simplettiche</b>	<b>2</b>
	Definizione e teorema di Darboux . . . . .	2
	1-forma di Liouville . . . . .	3
	Sottovarietà Lagrangiane . . . . .	4
	Parametrizzazione locale . . . . .	5
	Inversione di Mappe gradienti . . . . .	6
	Materiali iperelastici . . . . .	6
	Campo Hamiltoniano . . . . .	7
	Equazione di Hamilton Jacobi . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Le soluzioni dell'equazione di Schrödinger</b>	<b>8</b>
	Esempio: soluzione esatta . . . . .	8
	Esempio: un'altra soluzione esatta . . . . .	9
	Esempio: soluzione asintotica . . . . .	10
	Onde ad alta frequenza . . . . .	12
	Soluzioni asintotiche oscillanti . . . . .	13
	Studio di $I$ . . . . .	13
	Metodo di fase stazionaria . . . . .	14
	Quantizzazione sul toro . . . . .	15
	<b>Riferimenti bibliografici</b>	<b>17</b>

*“Il voler trattare le quistioni naturali  
senza geometria è un tentar di fare  
quello che è impossibile ad esser  
fatto.”*

---

Galileo Galilei, Dialogo sopra i due  
massimi sistemi del mondo

---

## §1 Introduzione

L'equazione di Schrödinger governa la dinamica dei sistemi quantistici: detta  $\psi(t, \mathbf{x})$  la funzione d'onda, l'equazione si scrive

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2} \nabla^2 \psi(t, \mathbf{x}) + V(t, \mathbf{x}) \psi(t, \mathbf{x}) \quad (1)$$

con  $V(t, \mathbf{x})$  potenziale. Nel presente lavoro di tesi si analizzano alcuni aspetti delle soluzioni per tale equazione. Se in alcuni semplici casi è possibile giungere a soluzioni esatte, diventa chiaro che è sufficiente aumentare di poco la complessità del sistema, ad esempio richiedendo l'esistenza di energie potenziali oppure condizioni iniziali più sofisticate, per rendere estremamente complicata la ricerca di soluzioni esatte. La ricerca di soluzioni approssimate introducendo come *ansatz* opportune, sebbene molto generali, strutture oscillanti asintotiche (per  $\hbar \rightarrow 0$ ), nate dall'esigenza di generalizzare l'ambiente di lavoro delle trasformate di Fourier<sup>1</sup>, riconduce al cosiddetto limite semiclassico. Il limite semiclassico della meccanica quantistica consiste nell'effettuare il limite  $\hbar \rightarrow 0$  una volta fissato un range finito di energie. Per altri versi, quando la lunghezza d'onda di De Broglie di una particella è trascurabile rispetto alle dimensioni spaziali caratteristiche del sistema studiato, questo esibisce un comportamento vicino a quello classico: un criterio quantitativo per fornire una stima di "semiclassicità" viene studiato in [1]. Questo è un comportamento tipico anche dell'ottica ondulatoria, che nell'approssimazione iconale (ovverosia di elevate frequenze) si riduce all'ottica geometrica. Lo studio di soluzioni asintotiche si presta ad essere effettuato in un ambiente di lavoro simplettico: per questo la prima metà (il §2) di questo lavoro mira a dare delle definizioni essenziali per lavorare con le varietà simplettiche. Il risultato principale è dato dal teorema di Maslov-Hörmander (enunciato e dimostrato in [2]), che fornisce un modo per caratterizzare le sottovarietà Lagrangiane di una certa varietà simplettica, le quali sono di fondamentale importanza per la seconda parte. L'enunciato del teorema è seguito da due applicazioni che non riguardano la meccanica quantistica, ma che aiutano nella comprensione del risultato, oltre a mostrare la versatilità dell'ambiente di lavoro simplettico. Nel §3 si tratta dapprima di alcuni esempi (tratti da [3]), per poi cercare soluzioni asintotiche mediante l'utilizzo del metodo di fase stazionaria seguendo [2]. Nella ricerca di soluzioni asintotiche viene sfruttato un approccio tipico della teoria WKB<sup>2</sup>, la quale fornisce un metodo per approssimare le soluzioni di equazioni differenziali dove il termine (spaziale) di ordine più alto è moltiplicato per un piccolo parametro. Nell'ultimo punto di §3 viene discussa brevemente la quantizzazione sulle varietà Lagrangiane: imponendo una certa condizione di periodicità alle funzioni generatrici verrà ricavata la regola di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld.

## §2 Varietà simplettiche

**Definizione e teorema di Darboux** Sia  $M$  una varietà differenziale di dimensione pari,  $\dim(M) = 2n$ . Indichiamo con  $\Omega^2(M)$  lo spazio delle 2-forme differenziali sulla varietà  $M$ . La *struttura simplettica*<sup>3</sup> su  $M$  è una 2-forma differenziale  $\omega \in \Omega^2(M)$  che sia

- Chiusa,  $d\omega = 0$
- Non degenera,  $\forall \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \exists \mathbf{u} : \omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$  con  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}} M$

È la non degeneratezza di  $\omega$  che fa richiedere che la dimensione di  $M$  sia pari: infatti per ogni  $\mathbf{x} \in M$  possiamo considerare le componenti di  $\omega$  in una qualche carta locale, e tali componenti

---

<sup>1</sup>Ambiente matematico ben adatto per lo studio di equazioni differenziali alle derivate parziali lineari a coefficienti costanti.

<sup>2</sup>Dai fisici Gregor Wentzel, Hendrik Anthony Kramers e Léon Brillouin, i quali svilupparono la teoria nel 1926. Nonostante l'acronimo sia WKB, il matematico Harold Jeffreys era arrivato a risultati analoghi già nel 1923, ovvero due anni prima che Schrödinger postulasse l'equazione omonima.

<sup>3</sup>L'aggettivo *simplettico* (dal greco *σμπλεκτικός*, relativo all'intreccio) è un calco linguistico della parola *complesso*: venne usato per la prima volta dal matematico Hermann Weyl nel 1939, al fine di evitare confusione con i numeri complessi.

si rappresentano con una matrice antisimmetrica  $W$ . Allora  $\det W = \det W^T = (-1)^n \det(W)$  e  $\det(W) \neq 0$  proprio per soddisfare la non-degenerazione: si ha che necessariamente  $n$  deve essere pari. La struttura simplettica è rigida, nel senso che non ogni varietà di dimensione pari ammette una struttura simplettica (mentre per esempio è vero che ogni varietà  $Q$  sufficientemente regolare ammette struttura riemanniana). Inoltre, tutte le varietà simplettiche di uguale dimensione sono isomorfe: infatti per il *teorema di Darboux* si ha che ogni varietà simplettica  $M$  di dimensione  $2n$  ammette un atlante di carte locali  $\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  detta *carta simplettica*, tale che

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i \quad (2)$$

**1-forma di Liouville** Consideriamo una varietà differenziale  $n$ -dimensionale  $M$ . Una 1-forma definita su  $T_{\mathbf{x}}M$ , con  $\mathbf{x} \in M$  è detta *vettore cotangente* a  $M$  nel punto  $\mathbf{x}$ . L'insieme di tutti i vettori cotangenti a  $M$  nel punto  $\mathbf{x}$  formano un spazio vettoriale  $n$ -dimensionale, duale di  $T_{\mathbf{x}}M$ . Tale duale si indica con  $T_{\mathbf{x}}^*M$  e viene detto *spazio cotangente* alla varietà  $M$  nel punto  $\mathbf{x}$ . Considerando tutti gli spazi cotangenti di  $M$  al variare di tutti i suoi punti e prendendone l'unione, si ottiene il *fibrato cotangente* della varietà:

$$T^*M = \bigcup_{\mathbf{x} \in M} T_{\mathbf{x}}^*M \quad (3)$$

Un punto di  $T^*M$  è una 1-forma su  $T_{\mathbf{x}}M$  per qualche punto  $\mathbf{x} \in M$ . Se  $\mathbf{q}$  è la  $n$ -upla delle coordinate del punto in una certa carta locale, una tale forma è data dalle sue  $n$  componenti  $\mathbf{p}$ . L'insieme delle  $2n$ -uple  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  costituisce una carta locale per il punto di  $T^*M$ . Oltre ad avere una struttura di varietà  $2n$ -dimensionale, il fibrato cotangente  $T^*M$  esibisce una proprietà ancora più forte: ammette infatti una struttura simplettica naturale<sup>4</sup>. Nel seguito mostreremo come si possa definire su di esso dapprima una certa 1-forma, che differenziata darà luogo alla 2-forma non degenera richiesta dalla definizione di varietà simplettica. Consideriamo allora  $T^*Q = M$  come varietà simplettica: possiamo definire su questa una particolare 1-forma, detta *1-forma di Liouville* e indicata con  $\theta_Q$ . Tale forma è così definita<sup>5</sup>

$$\theta_Q : M \rightarrow T^*M \quad \theta_Q(\mathbf{v}) = \langle T\pi_Q(\mathbf{v}) | \tau_M \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in TM \quad (4)$$

dove  $T\pi_Q$  è il sollevamento della proiezione canonica cotangente. Date due varietà  $M, N$ , il sollevamento tangente della funzione differenziabile  $f : M \rightarrow N$  è una mappa  $Tf : TM \rightarrow TN$  definita come

$$Tf(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (f(\mathbf{q}), (df)_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})) \quad (5)$$

Localmente la forma di Liouville si scrive

$$\theta_Q = \mathbf{p} d\mathbf{q} \quad (6)$$

Applicando l'operatore di differenziazione alla forma  $\theta_Q$  si ottiene una 2-forma, ovvero

$$d\theta_Q = \omega_Q = d(\mathbf{p} d\mathbf{q}) = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} + \mathbf{p} \overbrace{d^2\mathbf{q}}^{=0} = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} \quad (7)$$

che è chiusa e non degenera. Nel conto precedente si è usata la *proprietà di complesso* dell'operatore di differenziazione, ovvero  $d^2 = d \circ d = 0$ . L'azione locale della 2-forma  $\omega_Q$  è rappresentabile con una matrice dalla struttura a blocchi, detta matrice *unità simplettica*, data da

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix} \quad (8)$$

<sup>4</sup>È in virtù di questo fatto che è possibile una formulazione hamiltoniana della meccanica: se un dato sistema ha Lagrangiana  $L$  e  $Q$  è la varietà delle configurazioni, allora il vettore velocità generalizzata  $\dot{\mathbf{q}}$  è tangente ad essa. Il momento coniugato  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$  è un vettore cotangente. Lo spazio delle fasi  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , essendo un fibrato cotangente, ammette una struttura simplettica.

<sup>5</sup>Nella definizione si fa uso delle proiezioni canoniche. Data una varietà  $Q$ , la proiezione canonica tangente è una mappa  $\tau_Q : TQ \rightarrow Q$  data da  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto \mathbf{q}$ . Analogamente si può definire la proiezione canonica cotangente  $\pi_Q : T^*Q \rightarrow Q$ .

Facendo uso dell'unità simplettica appena definita possiamo scrivere

$$\omega_Q(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \left( \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{P}_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} \right) = (\mathbf{Q}_2, \mathbf{P}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{P}_1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

ovvero  $\omega_Q(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbb{J}\mathbf{y}$ .

**Sottovarietà Lagrangiane** Sia  $M$  una varietà simplettica. Consideriamo una sottovarietà  $S$  di  $M$ , con  $j : S \hookrightarrow M$  immersione. Per ogni  $\mathbf{x} \in S$  si definisce il *sottospazio ortogonale simplettico* di  $S$  in  $\mathbf{x}$  come

$$\mathbb{T}_x^\S S = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{T}_{j(\mathbf{x})} M \mid \omega(\mathbb{T}j(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{T}_x S \} \quad (10)$$

Per definizione, la sottovarietà  $S$  è

- *Isotropa* se  $\mathbb{T}_x S \subset \mathbb{T}_x^\S S$  per ogni  $\mathbf{x} \in S$
- *Coisotropa* se  $\mathbb{T}_x^\S S \subset \mathbb{T}_x S$  per ogni  $\mathbf{x} \in S$
- *Lagrangiana*<sup>6</sup> se  $\mathbb{T}_x^\S S = \mathbb{T}_x S$  per ogni  $\mathbf{x} \in S$

Le (sotto)varietà Lagrangiane sono dette *massimalmente isotrope*: le sottovarietà isotrope sono infatti a “bassa” dimensione (da 1 fino a  $n-1$ ), mentre le coisotrope sono a dimensione “alta” (da  $n+1$  a  $2n$ ). Il caso lagrangiano è intermedio ai due citati: supponiamo infatti  $M = \mathbb{T}^*Q$ , allora la sottovarietà  $\Lambda \xrightarrow{j} M$  è Lagrangiana se e solo se

1.  $j^*\omega_Q = 0$ , ovvero  $\omega_Q|_\Lambda = 0$
2.  $\dim \Lambda = \dim Q$

La prima condizione può essere riformulata come segue

$$0 = j^*\omega_Q = j^*d\theta_Q = d(j^*\theta_Q) = 0 \quad (11)$$

Pertanto la 1-forma  $j^*\theta_Q$  è chiusa su  $\Lambda$ , e dunque per il lemma di Poincaré<sup>7</sup> è anche localmente esatta. Esiste pertanto una funzione

$$\tilde{s} : \Lambda \rightarrow \mathbb{R} \quad \lambda \mapsto \tilde{s}(\lambda) \quad (12)$$

tale che, almeno localmente, si abbia

$$d\tilde{s} = j^*\theta_Q \quad (13)$$

Diciamo che  $\Lambda$  è *trasversale* alle fibre di  $\mathbb{T}^*Q$  quando date le funzioni

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda & \xrightarrow{j} & \mathbb{T}^*Q & \xrightarrow{\pi_Q} & Q \\ \mathbf{x} & \mapsto & (\mathbf{q}(\mathbf{x}), \mathbf{p}(\mathbf{x})) & \mapsto & \mathbf{q}(\mathbf{x}) \end{array} \quad (14)$$

si ha

$$\text{rk } D(\pi_Q \circ j) = \dim Q \text{ (Massimale)} \quad (15)$$

L'insieme  $Z \subset \Lambda$  in cui invece si ha una “*caduta di rango*” e quindi non si verifica la condizione di trasversalità (15) è detto *ciclo di Maslov*. Supponiamo che la condizione di trasversalità sia verificata, allora almeno localmente esiste una funzione  $\mathbf{L} : Q \rightarrow \mathbb{R}$  tale che posto  $s = \tilde{s} \circ \mathbf{L}$ , si ha che il grafico del differenziale di  $s$  “localmente disegna”  $\Lambda$ . Quindi localmente vale l'uguaglianza  $\text{im}(ds) = j(\Lambda)$ . Viceversa, il differenziale  $ds : Q \rightarrow \mathbb{T}^*Q$  di una qualunque funzione  $s : Q \rightarrow \mathbb{R}$  genera una sottovarietà Lagrangiana trasversale.

<sup>6</sup>Le sottovarietà lagrangiane sono oggetti relativamente recenti: vennero introdotte per la prima volta negli anni '60 dal fisico matematico sovietico Viktor Pavlovich Maslov in [4].

<sup>7</sup>Lemma di Poincaré: Ogni  $p$ -forma chiusa è localmente esatta. Se il poi il dominio di definizione è semplicemente connesso, la  $p$ -forma è esatta per ogni  $p$  (si veda, ad esempio, pag. 288 di [5]).

**Parametrizzazione locale** Viene qui presentato il teorema di Maslov-Hörmander, di fondamentale importanza poiché da un lato permette una caratterizzazione per le sottovarietà Lagrangiane, dall'altro fornisce un modo di parametrizzare queste ultime. La parametrizzazione si vedrà essere dipendente da un vettore  $k$ -dimensionale  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ , la cui possibile interpretazione fisica è descritta in seguito.

*Teorema* ► Data l'applicazione  $Q \times \mathbb{R}^k \ni (\mathbf{q}, \mathbf{u}) \mapsto W(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}$ , si considerino i  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \Lambda$  tali che, per qualche  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \quad \mathbf{0} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \quad (16)$$

Supponiamo che  $\mathbf{0}$  sia un valore regolare per la mappa  $Q \times \mathbb{R}^k \ni (\mathbf{q}, \mathbf{u}) \mapsto \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}} \in \mathbb{R}$ , ovvero

$$\text{rk} \left( \nabla_{\mathbf{u}\mathbf{q}}^2 W, \nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2 W \right) \Big|_{\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}}=0} = k \text{ Massimale} \quad (17)$$

allora  $\Lambda \subset T^*Q$  è una sottovarietà Lagrangiana. Viceversa, sia  $\Lambda$  una sottovarietà Lagrangiana, e sia  $\mathbf{x}_0 \in \Lambda$ . Sia

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda & \xrightarrow{j} & T^*Q & \xrightarrow{\pi_Q} & Q \\ \mathbf{x} & \mapsto & (\mathbf{q}(\mathbf{x}), \mathbf{p}(\mathbf{x})) & \mapsto & \mathbf{q}(\mathbf{x}) \end{array} \quad (18)$$

Allora, localmente in  $\mathbf{x}_0$  la sottovarietà Lagrangiana  $\Lambda$  può essere descritta dalle equazioni (16) per qualche  $k$ , e per  $W$  che soddisfa alla condizione (17).

Le funzioni  $W(\mathbf{q}, \mathbf{u})$  che soddisfano (16) e generano una sottovarietà Lagrangiana sono dette *funzioni generatrici*. Se invece le  $W(\mathbf{q}, \mathbf{u})$  soddisfano (16) e (17) sono dette *famiglie di Morse*. Il teorema non fornisce un metodo per calcolare  $k$  (e quindi il numero di parametri da cui dipende la varietà Lagrangiana): tuttavia il teorema fornisce una stima “dal basso”: si ha infatti

$$k \geq \dim Q - \text{rk}[D(\pi_Q \circ j)(\mathbf{x}_0)] \quad (19)$$

Il caso con il minor numero di parametri si ha pertanto quando il rango della matrice jacobiana di  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  calcolata in  $\mathbf{x}_0$  è massimale e coincide con la dimensione di  $Q$ , situazione che si verifica quando  $\Lambda$  è trasversale alle fibre di  $T^*Q$ . Se vale la condizione di trasversalità, i parametri ausiliari  $\mathbf{u}$  possono essere rimossi usando opportune funzioni  $\mathbf{u}(\mathbf{q})$ , e  $W(\mathbf{q}, \mathbf{u}(\mathbf{q}))$  è soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi. È possibile dare un'interpretazione fisica del parametro ausiliario  $\mathbf{u}$ : ad esempio, il parametro d'ordine della teoria di Landau può essere interpretato come un parametro ausiliario alla Maslov-Hörmander<sup>8</sup>: in tale teoria infatti (esposta in [6]), le proprietà di un materiale vicino ad un punto di transizione del secondo ordine (transizione continua) possono essere studiate espandendo il potenziale termodinamico nel parametro  $\eta$ . Si hanno dunque le condizioni

$$S = \frac{\partial \Phi}{\partial T}(P, T, \eta) \quad 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}(P, T, \eta) \quad (20)$$

analoghe a quelle richieste nell'enunciato del teorema. Un'altra interpretazione fisica dei parametri ausiliari è descritta in [7]: nei sistemi vincolati olònomi ideali le  $\mathbf{u}$  assumono il ruolo di moltiplicatori di Lagrange.

Nel seguito (§3) il teorema di Maslov-Hörmander verrà applicato in un problema di meccanica quantistica, ovvero la ricerca di soluzioni asintotiche per l'equazione di Schrödinger. Tuttavia è interessante vedere alcuni aspetti dell'applicazione dello stesso ad altri contesti: il primo esempio riguarda una costruzione semplice, che permette di considerare da un punto di vista симпlettico la trasformata di Legendre. Il secondo esempio tratta invece l'utilizzo del teorema nella descrizione di una classe particolare di materiali, i cosiddetti *iperelastici*.

<sup>8</sup>Consideriamo il potenziale termodinamico  $\Phi(P, T)$ , funzione di pressione e temperatura. Questo viene fatto dipendere da un parametro ausiliario, ottenendo così  $\Phi(P, T, \eta)$ .

**Inversione di Mappe gradienti** Una prima applicazione del teorema di Maslov-Hörmander è fornita dal seguente esempio, in cui la varietà base è data dallo spazio  $\mathbb{R}^n$ . Consideriamo la funzione

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n) \quad (21)$$

La funzione gradiente è una mappa da  $\mathbb{R}^n$  in sé: dotiamo il dominio ed il codominio di differenti sistemi di coordinate, ottenendo così

$$\nabla f : \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{R}_y^n \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \nabla f(\mathbf{x}) \quad (22)$$

Definiamo la famiglia di Morse globale come

$$W : \overbrace{\mathbb{R}_y^n}^{=Q} \times \underbrace{\mathbb{R}^n}_{n=k} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\mathbf{y}, \mathbf{u}) \mapsto W(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} - f(\mathbf{u}) \quad (23)$$

La  $W$  appena definita genera una sottovarietà Lagrangiana di  $T^*\mathbb{R}_y^n$

$$\Lambda = \left\{ (\mathbf{y}, \mathbf{p}) \in T^*\mathbb{R}_y^n : \mathbf{p} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \mathbf{u} \quad \mathbf{0} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \mathbf{y} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{u}) \right\} \quad (24)$$

con<sup>9</sup>

$$\text{rk}(\nabla_{\mathbf{u}\mathbf{y}}^2 W | \nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2 W) = \text{rk}(\mathbf{1} - \nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2 f) = n \text{ Massimale} \quad (25)$$

Su  $\Lambda$  la 1-forma di Liouville è data da  $\theta = \mathbf{x} d\mathbf{y}$ : tale forma è naturalmente chiusa

$$0 = j^*(d\mathbf{x} \wedge d\mathbf{y}) = j^* d(\mathbf{x} d\mathbf{y}) = dj^*(\mathbf{x} d\mathbf{y}) = d(\mathbf{x} d\mathbf{y}|_\Lambda) \quad (26)$$

In generale può non esistere l'inverso di un gradiente<sup>10</sup>: tuttavia se la varietà è semplicemente connessa esiste una funzione  $g : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $dg = \mathbf{x} d\mathbf{y}|_\Lambda$  e che si può interpretare come una mappa inversa generalizzata di  $\nabla f$ . La funzione generatrice  $W$  è simile ad una trasformata di Legendre<sup>11</sup>: effettivamente  $W$  è una sorta di Hamiltoniana relativa alla funzione Lagrangiana  $f$ .

**Materiali iperelastici** Indichiamo con  $\sigma : F \mapsto \sigma(F) \in \mathbb{R}$  la funzione *densità di energia immagazzinata*. Il tensore di stress di Piola-Kirchhoff è definito come

$$S = \frac{\partial \sigma}{\partial F}(F) \quad (27)$$

Naturalmente sul fibrato cotangente<sup>12</sup>  $T^*(\text{Lin}^+)$  si può considerare una struttura simplettica, dove la 2-forma  $d\Theta$  è data da

$$\Theta = S_{iL} dF_{iL} \quad d\Theta = dS_{iL} \wedge dF_{iL} \quad (28)$$

<sup>9</sup>Una precisazione sulla notazione utilizzata qui ed in seguito: la matrice Hessiana delle derivate seconde di una certa funzione  $f$  rispetto alle variabili  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  è indicata con  $\nabla_{\mathbf{x}\mathbf{y}}^2 f$ . Supporremo sempre valide le ipotesi del teorema di Schwartz, pertanto si potrà scrivere indifferentemente  $\nabla_{\mathbf{x}\mathbf{y}}^2 \circ \nabla_{\mathbf{y}\mathbf{x}}^2$ .

<sup>10</sup>Consideriamo il gradiente come un campo vettoriale: potrebbe mancare la condizione di iniettività, necessaria per l'inversione.

<sup>11</sup>La trasformata di Legendre è un algoritmo matematico ausiliario che permette di passare da funzioni definite su uno spazio lineare a funzioni del duale: ad esempio operando la trasformazione su una certa Lagrangiana si ottiene la corrispondente Hamiltoniana. Operativamente, la trasformazione per una certa funzione convessa  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è

$$f^*(p) = \sup_x [px - f(x)] \quad p \in \mathbb{R}$$

Nel caso  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si ha

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - f(\mathbf{x})) = 0$$

con  $\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{x}} f$ . La trasformata di Legendre pertanto trasforma  $f$  in un'altra funzione dipendente esplicitamente da  $\nabla f$  invece che da  $\mathbf{x}$ . Ad esempio, per  $f(x) = x^2$  si ha  $f^*(p) = \frac{1}{4}p^2$ . Ulteriori esempi si possono trovare nel §14 di [8].

<sup>12</sup>Viene denotato con  $\text{Lin}^+$  l'insieme degli operatori lineari invertibili di dimensione 3 che preservano l'orientazione: questi sono dunque rappresentati da matrici  $3 \times 3$  con determinante positivo.



Nella precedente equazione  $\Theta = S_{iL} dF_{iL}$  è la 1-forma di Liouville, che in questo contesto è la *forma lavoro* di  $T^*(\text{Lin}^+)$ . Ad ogni sottovarietà Lagrangiana di  $T^*(\text{Lin}^+)$  corrisponde un materiale iperelastico in senso generalizzato<sup>13</sup>. La parametrizzazione di tale sottovarietà può essere ricavata mediante il teorema di Maslov-Hörmander. Detta  $\sigma$  la famiglia di Morse

$$\text{Lin}^+ \times \mathbb{R}^k \ni (F, \mathbf{u}) \mapsto \sigma(F, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \quad (29)$$

la sottovarietà Lagrangiana  $\Lambda$  è descritta da

$$S = \frac{\partial \sigma}{\partial F}(F, \mathbf{u}) \quad 0 = \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{u}}(F, \mathbf{u}) \quad (30)$$

con aggiunta la condizione di non-degenerazione. I parametri ausiliari  $\mathbf{u}$  possono essere rimossi nei punti dove  $\Lambda$  è localmente trasversale alle fibre di  $\pi_{\text{Lin}^+}$ . Ulteriori aspetti delle relazioni tra funzioni generatrici di varietà Lagrangiane sono descritti in [7] e al capitolo 9 di [2]. Un esempio concreto di materiale iperelastico generalizzato è dato dall' $\alpha$ -quarzo e dal  $\beta$ -quarzo.<sup>14</sup> Le due fasi  $\alpha$  e  $\beta$  sono entrambe stabili a bassa pressione: a pressione ambientale invece la fase  $\alpha$  è osservata fino ad una temperatura di 547° C, la fase  $\beta$  oltre tale punto. Gli stati del quarzo possono essere descritti per mezzo di una densità generalizzata dipendente da parametri ausiliari non rimovibili (come fatto in [9]), in modo simile a quanto appena fatto con  $\sigma$  nello spazio  $(F, S)$ .

**Campo Hamiltoniano** Sia  $Q$  una varietà liscia. Un campo vettoriale  $\mathbf{X}_H : T^*Q \rightarrow TT^*Q$  è localmente Hamiltoniano se la 1-forma  $i_{\mathbf{X}_H} d\theta_Q$  è chiusa

$$d(i_{\mathbf{X}_H} d\theta_Q) = 0 \quad (31)$$

Qui  $i_{\mathbf{X}_H}$  denota l'operatore di prodotto interno per le forme differenziali: in generale data una  $k+1$  forma  $\omega^{(k+1)}$  e un campo vettoriale  $\mathbf{X}$ , l'operatore  $i_{\mathbf{X}} : \Omega^{k+1}(Q) \rightarrow \Omega^k(Q)$  mappa lo spazio delle  $k+1$  forme nello spazio delle  $k$  forme secondo la relazione  $i_{\mathbf{X}}\omega^{(k+1)}(\mathbf{X}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \omega^{(k)}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ . Se poi  $i_{\mathbf{X}_H} d\theta_Q$  è esatta, allora il campo  $\mathbf{X}_H$  è globalmente Hamiltoniano, e indichiamo con  $-H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$  una delle sue primitive. In questo caso pertanto

$$i_{\mathbf{X}_H} d\theta_Q = -dH \quad (32)$$

La funzione  $H$  è detta *Hamiltoniana*. Una volta fissate delle carte locali, la condizione di hamiltonianità globale si può scrivere come

$$\mathbb{J}\mathbf{X}_H = -\nabla_{(q,p)} H \quad (33)$$

Ad ogni campo vettoriale Hamiltoniano  $\mathbf{X}_H = (\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_p)$  è associato il seguente sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali

$$\dot{q} = \mathbf{X}_q = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \quad \dot{p} = \mathbf{X}_p = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \quad (34)$$

detto *sistema canonico*.

**Equazione di Hamilton Jacobi** Consideriamo una Hamiltoniana  $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ . L'equazione di Hamilton Jacobi per l'Hamiltoniana  $H$  è la seguente equazione differenziale alle derivate parziali nell'incognita  $S(q)$

$$H \circ dS = 0 \quad H \left( q, \frac{\partial S}{\partial q}(q) \right) = 0 \quad (35)$$

<sup>13</sup>Per ottenere invece un materiale iperelastico in senso stretto la sottovarietà deve essere anche trasversale. Se vale  $\text{rk}(D(\pi \circ j)) = 9$ , allora la condizione di rango massimale (e dunque di trasversalità) è verificata ( $\pi$  e  $j$  sono definiti in modo del tutto analogo a quanto fatto in (14), con  $Q = \text{Lin}^+$ ).

<sup>14</sup>Il quarzo è la fase cristallina dell'ossido di silicio  $\text{SiO}_2$ , detto anche *silice*: i prefissi  $\alpha$ - e  $\beta$ - si riferiscono al fatto che gli atomi di silicio e ossigeno possono organizzarsi in due diverse strutture cristalline.

Se  $Q \ni \mathbf{q} \rightarrow S(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}$  è una soluzione classica dell'equazione di Hamilton Jacobi, allora  $\Lambda = \text{Im}(dS)$  è una varietà Lagrangiana contenuta nell'insieme di livello coisotropo  $H^{-1}(0)$ . La nozione di soluzione geometrica generalizza le soluzioni classiche dell'equazione di Hamilton-Jacobi: ogni sottovarietà Lagrangiana  $\Lambda$  tale che  $\Lambda \subset H^{-1}(0)$  è detta *soluzione geometrica* dell'equazione di Hamilton-Jacobi. La definizione di soluzione geometrica è fondamentale nel metodo delle soluzioni asintotiche dell'equazione di Schrödinger mediante integrali oscillanti, presentato nel §3: si vedrà infatti come le soluzioni asintotiche si sviluppino, in un certo senso, in intorni dei punti di varietà Lagrangiane, le quali a loro volta sono soluzioni geometriche per l'equazione di Hamilton-Jacobi associata al problema. Enunciamo (e dimostriamo) ora un teorema di fondamentale importanza, poiché alla base del metodo delle caratteristiche (utile per definire soluzioni geometriche per mezzo di curve integrali associate al campo vettoriale  $\mathbf{X}_H$ ).

*Teorema* ► Il campo vettoriale Hamiltoniano  $\mathbf{X}_H$  è tangente a ogni varietà Lagrangiana  $\Lambda \subset H^{-1}(0)$ .

*Dimostrazione.* La tesi afferma che  $\mathbf{X}_H \in T_{\mathbf{x}} \Lambda$ . Dal momento che  $\Lambda \subset H^{-1}(0)$ , vale l'inclusione tra spazi  $T_{\mathbf{x}} \Lambda \subset T_{\mathbf{x}} H^{-1}(0)$ , pertanto ogni vettore  $\mathbf{v}$  tangente a  $\Lambda$  in  $\mathbf{x}$  è tangente pure a  $H^{-1}(0)$  nel medesimo punto. Dunque  $\mathbf{v}$  è nel nucleo di  $dH$ ,  $dH(\lambda)\mathbf{v} = 0$ . Possiamo riscrivere l'ultima relazione come

$$0 = dH\mathbf{v} = -\omega(\mathbf{X}_H, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}} \Lambda \quad (36)$$

Quindi  $\mathbf{X}_H \in T_{\mathbf{x}}^{\S} \Lambda$ , ma  $T_{\mathbf{x}}^{\S} \Lambda = T_{\mathbf{x}} \Lambda$  perchè  $\Lambda$  è una varietà Lagrangiana.  $\square$

Un importante esempio di equazione di Hamilton-Jacobi si trova nell'ambito della meccanica quantistica, più precisamente considerando il limite classico dell'equazione di Schrödinger. Consideriamo infatti un'onda con fase  $\frac{S}{\hbar}$ , ovvero

$$\phi = \phi_0 e^{i\frac{S}{\hbar}} \quad (37)$$

Imponendo che questa risolva l'equazione di Schrödinger (1) otteniamo

$$\frac{1}{2m} |\nabla^2 S| + V + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{i}{2m} \hbar \nabla^2 S \quad (38)$$

L'equazione (38) si riduce all'equazione di Hamilton-Jacobi nel limite  $\hbar \rightarrow 0$ . Dalla relazione di Planck  $E = h\nu$  si nota come il limite classico  $\hbar \rightarrow 0$  sia equivalente al limite di alte frequenze,  $\nu \rightarrow \infty$ . Dalla relazione fondamentale tra lunghezza d'onda e frequenza  $c = \nu\lambda$  si ottiene che il precedente limite è equivalente a  $\lambda \rightarrow 0$ : nel contesto dell'ottica tale limite è detto approssimazione dell'ottica geometrica: per una trattazione completa si veda [10].

### §3 Le soluzioni dell'equazione di Schrödinger

Nel presente capitolo dapprima vengono esposti due esempi di soluzioni esatte per problemi agli autovalori di operatori differenziali polinomiali. Tali operatori differenziali sono tutti presi da un contesto di meccanica quantistica, in particolare si farà riferimento agli operatori momento ed energia. Questi sono dipendenti da un parametro  $\varepsilon$ , che nei primi due casi possiamo pensare pari alla costante di Planck ridotta,  $\varepsilon = \hbar$ . Il terzo esempio mostra come semplicemente imponendo condizioni iniziali più generali non sia possibile trovare soluzioni esatte, ma solo asintotiche: in questo caso il parametro  $\varepsilon$  viene pensato prossimo al valore nullo e viene effettuata una espansione in serie degli operatori. Tutti gli esempi sono presentati in [3]. Infine, si analizza il metodo della fase stazionaria per la risoluzione dell'equazione di Schrödinger con integrali oscillanti.

**Esempio: soluzione esatta** Sia  $\Pi_n = a_0 p^0 + \dots + a_n p^n$  un polinomio di grado  $n$  nella variabile  $p$ . Effettuiamo la sostituzione formale  $p \rightarrow P$ , dove  $P$  è l'*operatore momento* della meccanica quantistica in dimensione uno:

$$P = -i\hbar \frac{d}{dx} \quad (39)$$

Si ottiene così un operatore polinomiale a coefficienti costanti (o meglio, dipendenti dal parametro  $\varepsilon$ , che qui vale  $\hbar$ )

$$\Pi_n(P) = \sum a_j (-i\hbar)^j \frac{\partial^j}{\partial x^j} \quad (40)$$

Costruiamo ora le soluzioni  $\psi(x)$  dell'equazione omogenea

$$\Pi_n(P)\psi(x) = 0 \quad (41)$$

Tali soluzioni saranno della forma

$$\psi(x) = \exp\left(\frac{i\lambda}{\hbar}x\right) C \quad (42)$$

con  $C$  costante. Dato che la  $\psi(x)$  così definita è un'autofunzione dell'operatore  $P$ , ovvero

$$P\psi(x) = P \exp\left(\frac{i\lambda}{\hbar}x\right) C = -i\hbar \frac{d}{dx} \left[ \exp\left(\frac{i\lambda}{\hbar}x\right) C \right] = \lambda \exp\left(\frac{i\lambda}{\hbar}x\right) C = \lambda\psi(x) \quad (43)$$

possiamo sostituire la soluzione nell'equazione (41), ottenendo così

$$\Pi_n(P)\psi(x) = a_0\mathbb{I}\psi + a_1P\psi + a_2P^2\psi + \dots = a_0\psi + a_1\lambda\psi + a_2\lambda^2\psi + \dots = \Pi_n(\lambda)\psi(x) \quad (44)$$

Pertanto la risoluzione dell'omogenea è equivalente al trovare le radici del polinomio di grado  $n$   $\Pi_n(\lambda)$ . L'equazione  $\Pi_n(\lambda) = 0$  è un'equazione della forma Hamilton-Jacobi: infatti riscrivendo la soluzione come

$$\psi(x) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\lambda x\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(x)\right) \quad (45)$$

dove  $S(x)$  è l'azione, si ha che vale la relazione  $\lambda = \frac{\partial S}{\partial x}$  e pertanto si può riscrivere l'equazione come

$$\Pi_n\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0 \quad (46)$$

che è manifestamente un'equazione di Hamilton-Jacobi.

**Esempio: un'altra soluzione esatta** Consideriamo l'operatore differenziale *energia*, dato da

$$E = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (47)$$

Anche in questo caso l'operatore è dipendente da un parametro  $\varepsilon$ , che qui vale  $\varepsilon = \hbar$ . Consideriamo ora il problema di Cauchy per l'operatore  $E + \Pi_n(P)$ , dove  $\Pi_n(P)$  è l'operatore polinomiale dell'esempio precedente. Il problema di Cauchy (omogeneo) è il seguente<sup>15</sup>

$$\begin{cases} [E + \Pi_n(P)]\psi(x, t) = 0 \\ \psi(x, 0) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\alpha x\right) c_0 \quad \alpha, c_0 \text{ costanti} \end{cases} \quad (48)$$

Analogamente al caso discusso in precedenza, cerchiamo una soluzione della forma

$$\psi(x, t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\lambda_1 x + \lambda_2 t)\right) c \quad (49)$$

Questa funzione è autofunzione sia dell'operatore energia che dell'operatore momento, rispettivamente di autovalori  $\lambda_2$  e  $\lambda_1$ :

$$E\psi(x, t) = \lambda_2\psi(x, t) \quad P\psi(x, t) = \lambda_1\psi(x, t) \quad (50)$$

Tenendo conto di (50), sostituiamo (49) nel problema di Cauchy, ottenendo così

$$\begin{cases} [E + \Pi_n(P)]\psi(x, t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\lambda_1 x + \lambda_2 t)\right) [\lambda_2 + \Pi_n(\lambda_1)] c = 0 \\ \psi(x, 0) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\lambda_1 x\right) c_0 = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\alpha x\right) c_0 \end{cases} \quad (51)$$

<sup>15</sup>Notiamo che scegliendo  $\Pi_2(p) = \frac{1}{2}p^2$  il problema di Cauchy è l'equazione di Schrödinger per la particella libera.

L'equazione precedente mostra come per fare in modo che (49) sia effettivamente una soluzione dobbiamo richiedere che valgano le seguenti condizioni:

$$\lambda_2 + \Pi_n(\lambda_1) = 0 \quad \lambda_1 = \alpha \quad c = c_0 \quad (52)$$

La prima di queste è l'equazione di Hamilton-Jacobi per il nostro problema di Cauchy: infatti riconoscendo l'azione  $S(x, t)$  in

$$S(x, t) = \lambda_1 x + \lambda_2 t \quad (53)$$

possiamo riscrivere la prima delle (52) in forma manifestamente Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \Pi_n \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right) = 0 \quad (54)$$

La seconda delle (52) fornisce le condizioni iniziali per l'equazione di Hamilton-Jacobi, scrivibili come

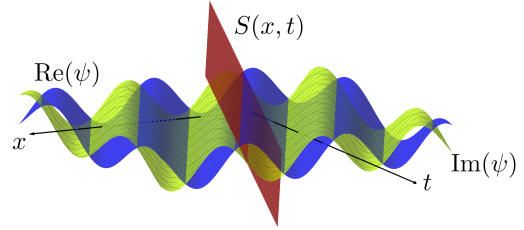
$$S(x, 0) = S_0(x) = \alpha x \quad (55)$$

Queste ultime due equazioni costituiscono un problema di Cauchy per l'equazione non lineare di Hamilton-Jacobi. Le condizioni (52) forniscono un'espressione per la funzione  $S(x, t)$

$$S(x, t) = \alpha x - \Pi_n(\alpha)t \quad (56)$$

e quindi una soluzione generale *esatta* (non asintotica) per il problema di Cauchy di partenza, data da

$$\psi(x, t) = \exp \left( \frac{i}{\hbar} (\alpha x - \Pi_n(\alpha)t) \right) c_0 \quad (57)$$



**Esempio: soluzione asintotica** Riconsideriamo il problema di Cauchy dell'esempio precedente, aggiungendo ora delle condizioni iniziali più generali, ovvero

$$\begin{cases} [E + \Pi_n(P)] \psi(x, t) = 0 \\ \psi(x, 0) = \exp \left( \frac{i}{\varepsilon} \alpha x \right) \varphi_0(x) \quad \alpha \text{ cost.} \end{cases} \quad (58)$$

In questo caso lasciamo il parametro  $\varepsilon$  libero<sup>16</sup>.

La soluzione del sistema viene cercata con la medesima fase del punto precedente, ma con ampiezza differente. Prima di procedere osserviamo che gli operatori  $P$  e  $E$  in questo caso non agiscono in modo banale sulla  $\psi(x, t)$ , che infatti non è più autofunzione:

$$E\psi(x, t) = \exp \left( \frac{i}{\varepsilon} (\lambda_1 x + \lambda_2 t) \right) \left[ \lambda_2 - i\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right] \varphi(x, t) = \left[ \lambda_2 - i\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi(x, t) \quad (59)$$

$$P\psi(x, t) = \exp \left( \frac{i}{\varepsilon} (\lambda_1 x + \lambda_2 t) \right) \left[ \lambda_1 - i\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \right] \varphi(x, t) = \left[ \lambda_1 - i\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi(x, t) \quad (60)$$

Sostituendo la forma della soluzione nel problema di Cauchy otteniamo

$$[E + \Pi_n(P)] \psi(x, t) = \exp \left( \frac{i}{\varepsilon} (\lambda_1 x + \lambda_2 t) \right) \left\{ \overbrace{\left[ \lambda_2 - i\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right] + \Pi_n \left[ \lambda_1 - i\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \right]}^{F(\varepsilon)} \right\} \varphi(x, t) = 0 \quad (61)$$

<sup>16</sup>Nel seguito dovremo fare un'espansione nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Sostituendo nella condizione iniziale si trova invece

$$\psi(x, 0) = \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\lambda_1 x\right) \varphi(x, 0) = \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\alpha x\right) \varphi_0(x) \quad (62)$$

da cui si vede che bisogna richiedere

$$\lambda_1 = \alpha \quad \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \quad (63)$$

L'espressione denotata con  $F(\varepsilon)$  è un polinomio in  $\varepsilon$ , con coefficienti dati da operatori differenziali: l'espansione in serie di Taylor intorno a  $\varepsilon = 0$  risulta essere

$$\begin{aligned} F(h) &= (\lambda_2 + \Pi_n(\lambda_1)) + \varepsilon \left( -i \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\partial \Pi_n}{\partial p}(\lambda_1) \frac{\partial}{\partial x} \right) + \sum_{k=2}^n \frac{\varepsilon^k}{k!} (-i)^k \frac{\partial^k \Pi_n}{\partial p^k}(\lambda_1) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^k \\ &= (\lambda_2 + \Pi_n(\lambda_1)) + \varepsilon \left( -i \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\partial \Pi_n}{\partial p}(\lambda_1) \frac{\partial}{\partial x} \right) + \sum_{k=2}^n \frac{\varepsilon^k}{k!} (-i)^k \frac{\partial^k \Pi_n}{\partial p^k}(\lambda_1) \frac{\partial^k}{\partial x^k} \end{aligned} \quad (64)$$

dove si è arrestata l'espansione all'ordine  $n$  poiché i termini dal  $n+1$ -esimo in poi sono nulli (infatti  $\Pi_n$  è un polinomio di grado  $n$ ). Sostituendo l'espansione nel problema di Cauchy (come formulato in (61)) troviamo

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}(\lambda_1 x + \lambda_2 t)\right) \left[ (\lambda_2 + \Pi_n(\lambda_1))\varphi(x, t) - i\varepsilon \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_n}{\partial p}(\lambda_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} (-i\varepsilon)^k \frac{\partial^k \Pi_n}{\partial p^k}(\lambda_1) \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k} \right] = 0 \end{aligned} \quad (65)$$

Una soluzione esatta dovrebbe soddisfare l'equazione precedente, ma non è possibile, almeno con tecniche risolutive semplici, trovare una funzione tale. Tuttavia annullando quanti più termini possibili nell'espansione si ottiene una *soluzione asintotica* in  $\varepsilon$ . Annullando il primo addendo

$$\lambda_2 + \Pi_n(\lambda_1) = 0 \quad (66)$$

troviamo un'equazione per determinare le costanti  $\lambda_1, \lambda_2$  del tipo Hamilton-Jacobi, mentre annullando il secondo addendo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_n}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (67)$$

si ottiene l'*equazione del trasporto*, dalla quale si può determinare l'ampiezza  $\varphi(x, t)$ . La soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi si scrive nella forma

$$\lambda_1 = \alpha \quad \lambda_2 = -\Pi_n(\alpha) \quad S(x, t) = \alpha x - \Pi_n(\alpha)t \quad (68)$$

Contrariamente ai casi precedenti, non siamo giunti ad una soluzione esatta del problema di Cauchy. La soluzione  $\psi(x, 0) = \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\alpha x\right) \varphi_0(x)$  tende asintoticamente a zero con ordine  $O(\varepsilon^2)$ : per ottenere termini di ordine superiore bisogna cercare una funzione  $\varphi(x, t)$  della forma

$$\varphi(x, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \varepsilon^\ell \varphi_\ell(x, t) \quad (69)$$

Ad esempio, per  $\varphi_{\ell=0}(x, t)$  si ottiene l'equazione del trasporto. Per  $\varphi_{\ell=1}(x, t)$ , prendendo i termini di ordine  $\varepsilon^2$  nell'equazione (65) si ottiene l'equazione<sup>17</sup>

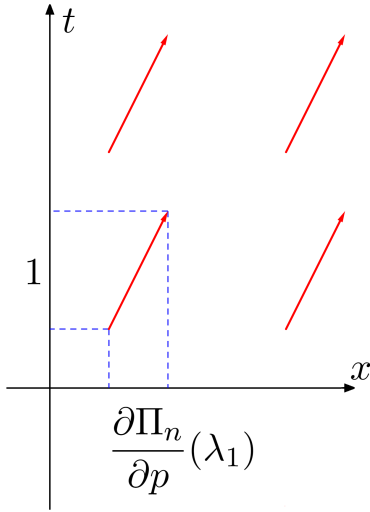
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_n}{\partial p}(\lambda_1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = -\frac{i}{2} \frac{\partial^2 \Pi_n}{\partial p^2}(\lambda_1) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} \implies \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{i}{2} \frac{\partial^2 \Pi_n}{\partial p^2}(\lambda_1) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} \quad (70)$$

<sup>17</sup>L'operatore  $\frac{d}{dt}$  è definito come la derivata lungo le curve integrali del campo vettoriale  $\mathbf{V}$ , definito a sua volta come

$$\mathbf{V}(x, t) = \left( \frac{\partial \Pi_n}{\partial p}(\lambda_1), 1 \right)$$

L'equazione di trasporto (67) si può allora scrivere come  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ . Questo giustifica anche il nome dell'equazione: essendo  $\varphi$  costante lungo le traiettorie del campo, possiamo pensare che questa ampiezza venga *trasportata* dal campo  $\mathbf{V}$ .

Determinando la funzione  $\varphi_0(x, t)$  dall'equazione  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ , la (70) permette di trovare la funzione  $\varphi_1$  integrando lungo le traiettorie di  $\mathbf{V}$ . Considerando i termini di ordine crescente di (65), si può trovare ricorsivamente la funzione  $\varphi_\ell(x, t)$  integrando  $\varphi_{\ell-1}(x, t)$ .



Il campo vettoriale  $\mathbf{V}$ .

Seguendo ora la trattazione effettuata in [11], prepariamo la nozione di soluzione asintotica oscillante che sarà utile nel seguito. Cerchiamo quindi di motivare l'*ansatz* della forma dell'equazione (79) come una *sovrapposizione continua* di onde ad alta frequenza elementari.<sup>18</sup>

**Onde ad alta frequenza** Le onde ad alta frequenza sono funzioni della forma

$$u(\mathbf{x}, h) = b(\mathbf{x}, h)e^{\frac{i}{h}\phi(\mathbf{x})} \quad (71)$$

dove  $h > 0$  è un parametro e  $\phi(\mathbf{x})$  è la fase, una funzione reale  $\mathcal{C}^\infty$  delle posizioni  $(x^1, \dots, x^n)$ . Siamo interessati allo studio di formule asintotiche per  $h \rightarrow 0$ . L'ampiezza  $b(\mathbf{x}, h)$  è una funzione liscia a valore complesso, la quale ammette espansione in serie di potenze nella variabile  $h$

$$b(\mathbf{x}, h) \simeq \sum_r b_r(\mathbf{x})h^{r-\mu} \quad (72)$$

Consideriamo un operatore lineare alle derivate parziali  $P$ , che sia polinomiale in  $h$ . L'equazione che ci proponiamo di risolvere è  $Pu = 0$ , tuttavia una soluzione asintotica richiede più semplicemente che  $Pu$  sia di ordine  $h^n$  per  $h \rightarrow 0$ , con  $n$  sufficientemente grande. L'equazione con la soluzione asintotica  $Pu \simeq 0$  è equivalente alla seguente PDE del primo ordine non lineare

$$H(\mathbf{x}, d\phi(\mathbf{x})) = 0 \quad (73)$$

corrispondente all'equazione di Hamilton-Jacobi per la fase  $\phi$ , accoppiata con l'equazione del trasporto

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial b_r}{\partial x_j} + c(\mathbf{x})b_r = F_r(b_0, \dots, b_{r-1})(\mathbf{x}) \quad (74)$$

La funzione  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  è polinomiale (di ordine  $m$ ) in  $\mathbf{p}$ . Si ha poi  $F_0 = 0$  e  $F_r$  è un operatore lineare alle derivate parziali in  $b_0, \dots, b_{r-1}$ : tale operatore è al massimo di ordine  $\max\{m, r+1\}$ . Il grafico di  $d\phi$ , dato da

$$\Lambda_\phi = \{(\mathbf{x}, d\phi(\mathbf{x})) | \mathbf{x} \in X\} \quad (75)$$

è una varietà Lagrangiana, contenuta nell'insieme di livello 0 di  $H$ : è pertanto una soluzione geometrica dell'equazione (73). Posto  $\mathbf{p} = d\phi(\mathbf{x})$  (il differenziale totale della funzione fase è una 1-forma su  $T^*X$ ), si ha che  $\Lambda$  è invariante sotto il flusso del sistema Hamiltoniano definito dalla funzione  $H$ , ovvero

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \quad \frac{d}{dt}\mathbf{p} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \quad (76)$$

In generale, prolungando  $\Lambda_\phi$  lungo le curve  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  che risolvono il precedente sistema Hamiltoniano, questa smette di essere il grafico di una funzione  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ . Nei punti in cui questo avviene, si ha che la soluzione  $a_0$  dell'equazione (74) è discontinua. Rimane tuttavia possibile trovare un prolungamento della soluzione asintotica  $u$  passando da una semplice onda ad altra frequenza ad una sovrapposizione continua di esse

$$u(\mathbf{x}; h) = \int_U b(\mathbf{x}, \mathbf{u}; h)e^{\frac{i}{h}\phi(\mathbf{x}, \mathbf{u})} d\mathbf{u} \quad (77)$$

<sup>18</sup>Nella review [11] e nel corrispondente libro [3] vengono esposti altri aspetti importanti della teoria delle varietà Lagrangiane, che però non vengono citati in questa tesi. È interessante il collegamento tra gli operatori integrali di Fourier, sviluppati dai matematici Lars Hörmander e Johannes Jisse (Hans) Duistermaat negli articoli [12], [13] e le varietà Lagrangiane: tale trattazione fornisce un ambiente naturale per la descrizione delle trasformazioni canoniche.

La sovrapposizione è operata integrando sulle variabili ausiliarie  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ . Consideriamo ora

$$\Lambda_\phi = \left\{ \left( x, \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, \theta) \right) \mid (x, \theta) \in S_\phi \right\} \quad (78)$$

La fase  $\phi$  è non degenera se  $\text{rk}(d_{(x,\mathbf{u})}d\mathbf{u}\phi) = k$ : in questo caso  $\Lambda_\phi$  è sottovarietà Lagrangiana di  $T^*X$ .

**Soluzioni asintotiche oscillanti** Per quanto detto in precedenza, assumiamo che le soluzioni asintotiche oscillanti dell'equazione di Schrödinger siano date da integrali del tipo

$$I(t, \mathbf{x}; \varepsilon) = \int_U b(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}; \varepsilon) e^{\frac{i}{\varepsilon}\phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})} d\mathbf{u} \quad (79)$$

con  $U \subset \mathbb{R}^k$ , dove  $b$  è un'ampiezza e  $\phi$  è una fase reale. La funzione (79) dipende da un (piccolo) parametro  $\varepsilon$ . Si noti come la fase  $\phi$  venga scelta indipendente dal parametro  $\varepsilon$ . In tutta generalità si potrebbe espandere l'ampiezza in serie di potenze in  $\varepsilon$  come segue

$$b(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}; \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \varepsilon^r \quad (80)$$

Tuttavia nell'analisi che segue supporremo  $b$  indipendente da  $\varepsilon$ . Sostituendo la funzione  $I$  nell'equazione di Schrödinger si ottiene la seguente espressione

$$\begin{aligned} 0 = \int_U & \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla_{\mathbf{x}} \phi|^2 + V \right) b e^{\frac{i}{\varepsilon}\phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})} \right. \\ & - i\varepsilon \left( \frac{\partial b}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \phi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} b + \frac{1}{2} b \nabla^2 \phi \right) e^{\frac{i}{\varepsilon}\phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})} \\ & \left. - \varepsilon^2 \left( \frac{1}{2} \nabla^2 b \right) e^{\frac{i}{\varepsilon}\phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})} \right] d\mathbf{u} \end{aligned} \quad (81)$$

ovvero un'espressione in cui compare  $\varepsilon$  fino al secondo ordine  $\varepsilon^2$ . Fino a questo punto non è ancora stata definita la natura del dominio  $U$ , né la sua dimensione, utile per sapere da quanti parametri  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$  dipende  $I$ . Cerchiamo soluzioni asintotiche in  $\varepsilon$  di accuratezza zero, ovvero soluzioni la cui fase  $\phi$  soddisfa l'equazione di Hamilton-Jacobi per l'Hamiltoniana  $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = p_0 + \frac{1}{2} |\mathbf{p}|^2 + V$ , data da

$$H \left( t, \mathbf{x}, \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \right) = 0 \implies \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla_{\mathbf{x}} \phi|^2 + V = 0 \quad (82)$$

Per soluzioni di ordine più alto,  $b$  deve soddisfare l'equazione di trasporto, ovvero

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \phi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} b + \frac{1}{2} \nabla^2 \phi b = 0 \quad (83)$$

corrispondente al primo ordine in  $\varepsilon$ .

**Studio di  $I$**  Sia  $\mathbf{q} = (t, \mathbf{x})$  un generico punto nello spazio tempo. Supponiamo l'ampiezza  $b$  a supporto<sup>19</sup> compatto. Supponiamo inoltre esista una funzione  $C^\infty(\mathbb{R}^k) \ni \mathbf{v} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  tale che<sup>20</sup>

$$b(\mathbf{u}) = v^\alpha(\mathbf{u}) \frac{\partial \phi}{\partial u^\alpha}(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} \phi \quad (84)$$

Osserviamo anzitutto che l'integrale  $I$  con questa nuova ipotesi si può riscrivere come

$$I = \int_U v^\alpha \left( \frac{\partial \phi}{\partial u^\alpha} \right) e^{\frac{i}{\varepsilon}\phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})} d\mathbf{u} = -i\varepsilon \int_U v^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left( e^{\frac{i}{\varepsilon}\phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})} \right) d\mathbf{u} \quad (85)$$

<sup>19</sup>Il supporto della funzione  $b : D \rightarrow \mathbb{R}$ , denotato  $\text{supp}(b)$ , è il sottoinsieme  $\text{supp}(b) \subseteq D$  dato da

$$\text{supp}(b) = \overline{\{\mathbf{x} \in D : b(\mathbf{x}) \neq 0\}}$$

<sup>20</sup>Si sottoindende la somma sugli indici ripetuti.

Applicando ora la regola di Leibniz per le derivate si ottiene

$$I = -i\varepsilon \int_U \left[ \overbrace{\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left( v^\alpha e^{\frac{i}{\varepsilon} \phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})} \right)}^{\spadesuit} - e^{\frac{i}{\varepsilon} \phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^\alpha} \right] d\mathbf{u} \quad (86)$$

Il termine indicato con  $\spadesuit$  è nullo: applicando infatti il teorema della divergenza si ottiene

$$\int_U \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left( v^\alpha e^{\frac{i}{\varepsilon} \phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})} \right) d\mathbf{u} = \int_{\partial U} v^\alpha e^{\frac{i}{\varepsilon} \phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})} n_\alpha d\sigma = 0 \quad (87)$$

poiché  $\mathbf{v}$  (e dunque ogni sua componente  $v^\alpha$ ) si annulla su  $\partial U$ . Infine dunque si trova

$$I = i\varepsilon \int_U (\nabla \cdot \mathbf{v}) e^{\frac{i}{\varepsilon} \phi} d\mathbf{u} \quad (88)$$

Pertanto l'integrale  $I$  di partenza è pari a un altro integrale con la stessa fase ma differente ampiezza, a meno di un fattore  $\varepsilon$ . Se  $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}} \neq 0 \forall \mathbf{u} \in K \subset U$ , iterando si trova che  $I$  è maggiorato da qualunque potenza di  $\varepsilon$ , opportunamente moltiplicata per una costante  $C_m$

$$|I| \leq C_m \varepsilon^m \quad (89)$$

La stima effettuata in [14] mostra che se l'ampiezza  $b$  è una funzione analitica nella variabile  $\mathbf{u}$  allora è possibile stimare la costante  $C_m$  come  $m!$ : pertanto  $|I(\varepsilon)| \leq C_m m! \varepsilon^m \forall m \in \mathbb{N}$ . Utilizzando l'approssimazione di Stirling

$$m! \simeq \sqrt{2\pi m} m^m e^{-m} \quad (90)$$

si ottiene

$$|I| \leq C m! \varepsilon^m \simeq \sqrt{2\pi m} m^{m+\frac{1}{2}} e^{-m} \varepsilon^m \quad (91)$$

pertanto  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |I| = 0$  per ogni  $m \in \mathbb{N}$  fissato.

**Metodo di fase stazionaria** La dipendenza da  $b$  dell'integrale  $I$  diventa pertanto significativa in intorni piccoli a piacere dell'insieme dei punti critici (stazionari) della fase, ovvero

$$\bar{U} = \{\bar{\mathbf{u}} \in K \mid \nabla_{\mathbf{u}} \phi(\bar{\mathbf{u}}) = 0\} \quad (92)$$

Se in  $K$  esistono un numero finito di punti stazionari con Hessiana non degenera, ovvero punti  $\mathbf{u}^*$  che soddisfano

$$\nabla_{\mathbf{u}} \phi(\mathbf{u}^*) = 0 \quad \det(\nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2 \phi(\mathbf{u}^*)) \neq 0 \quad (93)$$

allora vale l'*espansione di fase stazionaria*

$$I(\varepsilon) = (2\pi\varepsilon)^{\frac{k}{2}} \sum_{\mathbf{u}^*} b(\mathbf{u}^*) e^{\frac{i}{\varepsilon} \phi(\mathbf{u}^*)} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2 \phi(\mathbf{u}^*)}}{|\det(\nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2 \phi(\mathbf{u}^*))|^{\frac{1}{2}}} [1 + O(\varepsilon)] \quad (94)$$

dove per ogni matrice simmetrica  $A$  la sua *segnatura*  $\operatorname{sgn} A$  denota la differenza tra il numero di autovalori positivi e il numero di autovalori negativi di  $A$ . La condizione di non-degenerazione ( $\det \nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2 \phi(\mathbf{u}^*) \neq 0$ ) del punto stazionario è molto forte: definiamo dunque una classe più ampia di integrali oscillanti. Diremo che l'integrale  $I(t, \mathbf{x}; \varepsilon) = \int_U b(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}; \varepsilon) e^{\frac{i}{\varepsilon} \phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})} d\mathbf{u}$  appartiene a tale classe se per ogni funzione di test della forma

$$\psi(t, \mathbf{x}; \varepsilon) = \beta(t, \mathbf{x}) e^{\frac{i}{\varepsilon} \xi(t, \mathbf{x})} \quad (95)$$

con  $\beta(t, \mathbf{x})$  arbitraria funzione a supporto compatto (*bump function*<sup>21</sup>) e  $\xi$  un'opportuna funzione fase reale, il comportamento asintotico di<sup>22</sup>

$$\langle I | \psi \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_U b(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}; \varepsilon) \beta(t, \mathbf{x}) e^{\frac{i}{\varepsilon} [\phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) - \xi(t, \mathbf{x})]} d\mathbf{u} dt d\mathbf{x} \quad (96)$$

<sup>21</sup>In realtà una *bump function* deve essere anche una funzione *liscia*. Un esempio 1-dimensionale è fornito dalla funzione  $\beta(x) = \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \chi(x)$ , ove  $\chi$  è la funzione indicatrice dell'intervallo aperto  $(-1, 1)$ .

<sup>22</sup>Indichiamo con  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$  il prodotto scalare di  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , definito come  $\langle f | g \rangle_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})^* g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ .



può essere stimato tramite il metodo della fase stazionaria. Questo avviene se per la funzione fase totale  $\Phi$ , data da  $\Phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) - \xi(t, \mathbf{x})$ , vi sono un numero finito di punti stazionari  $(t^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$  non degeneri. La prima condizione (stazionarietà) si scrive

$$d\Phi = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) - \frac{\partial \xi}{\partial t}(t^*, \mathbf{x}^*) = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}(t^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) - \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}(t^*, \mathbf{x}^*) = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}}(t^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = 0 \end{cases} \quad (97)$$

mentre la seconda condizione (non degenerazione) comporta che la matrice hessiana di  $\Phi$  non deve essere singolare nel punto critico  $(t^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ , dunque

$$\det \begin{pmatrix} \nabla_{tt}^2 \Phi & \nabla_{xt}^2 \Phi & \nabla_{ut}^2 \Phi \\ \nabla_{tx}^2 \Phi & \nabla_{xx}^2 \Phi & \nabla_{ux}^2 \Phi \\ \nabla_{tu}^2 \Phi & \nabla_{xu}^2 \Phi & \nabla_{uu}^2 \Phi \end{pmatrix} \Big|_{(t^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)} = \det \begin{pmatrix} \nabla_{tt}^2 \phi - \nabla_{tt}^2 \xi & \nabla_{xt}^2 \phi - \nabla_{xt}^2 \xi & \nabla_{ut}^2 \phi \\ \nabla_{tx}^2 \phi - \nabla_{tx}^2 \xi & \nabla_{xx}^2 \phi - \nabla_{xx}^2 \xi & \nabla_{ux}^2 \phi \\ \nabla_{tu}^2 \phi & \nabla_{xu}^2 \phi & \nabla_{uu}^2 \phi \end{pmatrix} \Big|_{(t^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)} \neq 0 \quad (98)$$

L'hessiana nella formula precedente è una matrice quadrata di ordine  $n + 1 + k$ . Una condizione necessaria per far sì che si verifichi quanto richiesto in (98) è che per ogni punto che stazionarizza la fase  $\phi$  in  $\mathbf{u}$ , ovvero  $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}}(t^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = 0$ , si deve avere che la sottomatrice composta dalle ultime  $k$  righe dell'hessiana deve avere rango massimale (pari a  $k$ , essendo una matrice  $k \times (n + 1 + k)$ ). In sintesi, se per ogni  $(t^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$  tale che  $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}}(t^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = 0$  si ha

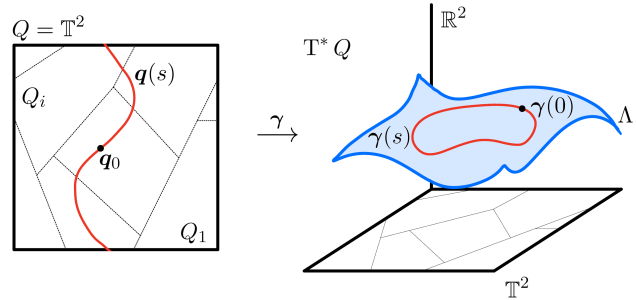
$$\text{rk} \begin{pmatrix} \nabla_{tu}^2 \phi & \nabla_{xu}^2 \phi & \nabla_{uu}^2 \phi \end{pmatrix} \Big|_{(t^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)} = k \quad (\text{Massimale}) \quad (99)$$

Scegliendo appropriatamente la  $\xi$  la condizione (99) diviene anche sufficiente per fare in modo che anche la (98) venga rispettata. Dal teorema di Maslov-Hörmander si nota che le due condizioni

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}}(t^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = 0 \quad \text{rk} \begin{pmatrix} \nabla_{tu}^2 \phi & \nabla_{xu}^2 \phi & \nabla_{uu}^2 \phi \end{pmatrix} \Big|_{(t^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)} = k \quad (\text{Massimale}) \quad (100)$$

rendono la fase  $\phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$  una famiglia di Morse con parametri ausiliari  $\mathbf{u}$ . A questo punto emerge forte il ruolo del parametro vettoriale  $\mathbf{u} \in U$ , che si rivela essere un parametro ausiliario nel senso del teorema di Maslov-Hörmander: tale risultato garantisce dunque che la famiglia di Morse generi una sottovarietà Lagrangiana  $\Lambda$ , sulla quale si concentrano le soluzioni asintotiche. Tale sottovarietà è una soluzione geometrica dell'equazione di Hamilton-Jacobi.

**Quantizzazione sul toro** Nel paragrafo precedente si è trattato di varietà Lagrangiane descritte da un'unica famiglia di Morse  $\phi$ . Tuttavia per spazi con proprietà topologiche meno banali, come ad esempio un toro, la rappresentazione della funzione d'onda come integrale oscillante ha significato solo locale. In questo caso introdurre una quantizzazione significa richiedere che la funzione  $I$  sia univoca<sup>23</sup> sulla varietà Lagrangiana. Siano  $\phi_1(\mathbf{q}, \mathbf{u}_1), \dots, \phi_k(\mathbf{q}, \mathbf{u}_k)$  un insieme di  $k$  famiglie di Morse. Un risultato di equivalenza tra funzioni generatrici presentato nel capitolo 7 di [2] garantisce che i domini delle  $\mathbf{u}_i$  hanno tutti



A sinistra, la varietà base  $T^2$ : il toro è rappresentato come un quadrato in cui i lati opposti si identificano. A destra, il fibrato  $T^*Q$ , con la varietà Lagrangiana e la curva  $\gamma$ .

<sup>23</sup>Che associ ad ogni punto un solo valore, che non sia dunque *polidroma*.

la stessa dimensione. Consideriamo una curva chiusa  $s \mapsto \mathbf{q}(s)$  contenuta nel dominio in  $\mathbf{q}$  delle  $\phi$ . Proiettando la curva sulla varietà Lagrangiana  $\Lambda$  generata da  $\phi_i$ , la quale è soluzione geometrica dell'equazione di Hamilton-Jacobi, si ottiene

$$\gamma(s) = (\mathbf{q}(s), \mathbf{p}(s)) = \left( \mathbf{q}(s), \nabla_{\mathbf{q}} \phi_i(\mathbf{q}(s), \mathbf{u}_i) \Big|_{\nabla_{\mathbf{u}} \phi_\alpha = 0} \right) \quad (101)$$

Compiendo un giro completo lungo la curva, non è detto che la fase rimanga invariata: per l'univocità dobbiamo richiedere che nei punti della varietà Lagrangiana valga<sup>24</sup>

$$\exp \left( \frac{i}{\hbar} \phi_1(\mathbf{q}, \mathbf{u}_1) \right) = \exp \left( \frac{i}{\hbar} \phi_k(\mathbf{q}, \mathbf{u}_k) \right) \quad (102)$$

ovvero

$$\phi_k(\mathbf{q}, \mathbf{u}_k) - \phi_1(\mathbf{q}, \mathbf{u}_1) = 2\pi\hbar n \quad n \in \mathbb{Z} \quad (103)$$

La curva considerata sul toro non è nullomotopa, e questo nella varietà Lagrangiana si traduce nel fatto che la forma di Liouville  $\theta_Q$  risulta chiusa ma solo localmente esatta. La condizione di quantizzazione è proprio quella espressa dalla regola di Sommerfeld:

$$\oint_{\gamma} \theta_Q = \oint_{\gamma} \mathbf{p} d\mathbf{q} = \phi_k(\mathbf{q}, \mathbf{u}_k) - \phi_1(\mathbf{q}, \mathbf{u}_1) = 2\pi\hbar n \quad (104)$$

$$\oint_{\gamma} \theta_Q = 2\pi\hbar n = \hbar n \quad n \in \mathbb{Z} \quad (105)$$

con  $\hbar = 2\pi\hbar$  costante di Planck. Si noti come la quantizzazione qui presentata (in chiave semiclassica) sia basata in larga parte su un argomento di natura topologica, ovvero il fatto che la varietà base è topologicamente non banale (altrimenti si avrebbe  $\oint \theta_Q = 0$ ). Questo schema di quantizzazione si può già intravedere in un poco noto<sup>25</sup> articolo di Einstein del 1917<sup>26</sup> [16], nel quale viene proposta una quantizzazione di sistemi non necessariamente integrabili, senza tuttavia fare uso del formalismo симплетico delle varietà Lagrangiane (che venne introdotto solo decenni dopo).

<sup>24</sup>Per la quantizzazione poniamo  $\varepsilon = \hbar$ .

<sup>25</sup>L'articolo venne ignorato sino agli anni '50, quando Joseph Keller giunse allo schema di quantizzazione proposto da Einstein in modo indipendente. [15]

<sup>26</sup>Una traduzione in italiano di [16] curata da S. Graffi si può trovare in appendice al libro [17].

---

## Riferimenti bibliografici

- [1] L. D. Landau, E. M. Lifšits. *Meccanica Quantistica, Teoria non relativistica*. Editori Riuniti University Press, 2010.
- [2] F. Cardin. *Elementary Symplectic Topology and Mechanics*. Springer, 2015.
- [3] A. S. Mishchenko, V. E. Shatalov, B. Yu. Sternin. *Lagrangian Manifolds and the Maslov Operator*. Springer Series in Soviet Mathematics. Springer-Verlag, 1990.
- [4] V. P. Maslov. *Perturbation Theory and Asymptotic Methods. (Russo)*. Moscow University Press, 1965.
- [5] G. De Marco. *Analisi Due*. Edizioni Libreria Progetto Padova, 2018.
- [6] L. D. Landau, E. M. Lifšits. *Fisica statistica, Parte prima*. Editori Riuniti, 1977.
- [7] F. Cardin. Morse Families and Constrained Mechanicals Systems. Generalized Hyperelastic Materials. *Meccanica*, (26): pp. 161–167, 1991.
- [8] V.I. Arnol'd. *Metodi matematici della meccanica classica*. Editori Riuniti University Press, 2010.
- [9] M. Pitteri, G. Zanzotto. *Continuum Models for Phase Transitions and Twinning in Crystals*. Taylor & Francis Inc, 2002.
- [10] A. Fasano, S. Marmi. *Analytical Mechanics*. Oxford University Press, 2006.
- [11] J. J. Duistermaat. Book review — Lagrangian Manifolds and the Maslov Operator. *Bullettin of American Mathematical Society*, 27(1): pp. 174–179, 1992.
- [12] L. Hörmander. Fourier integral operators. *Acta Mathematica*, (127): pp. 79–183, 1971.
- [13] L. Hörmander, J.J. Duistermaat. Fourier integral operators. II. *Acta Mathematica*, (128): pp. 183–269, 1972.
- [14] A. Lovison F. Cardin. Lack of Critical Phase Points and Exponentially Faint Illumination. *Meccanica*, (40): pp. 65–71, 2005.
- [15] A. D. Stone. Einstein's Unknown Insight and the Problem of Quantizing Chaos. *Physics Today*, 58(8): pp. 37–43, 2005.
- [16] A. Einstein. Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein. (Tedesco) [Sulla quantizzazione di Sommerfeld e Epstein]. *Deutsche Physikalische Gesellschaft Verhandlungen*, (19): pp. 82–92, 1917.
- [17] S. Graffi. *Le radici della quantizzazione*. Quaderni di fisica teorica. Università degli studi di Pavia, Dipartimento di fisica nucleare e teorica, 1992.

---

Alla fine di questo lavoro di tesi desidero ringraziare il prof. Franco Cardin non solo per la gentilezza e la disponibilità che ha dimostrato in questi mesi, ma soprattutto per la grande passione con cui ha saputo trasmettere la conoscenza.