



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

**L’invarianza conforme in meccanica quantistica**

Relatore

Prof. Stefano Giusto

Laureando

Christian Carchen

Anno Accademico 2018/2019



# Indice

1.1	Introduzione . . . . .	1
1.2	Presentazione del sistema . . . . .	3
1.3	Simmetria conforme . . . . .	4
1.3.1	Gruppo conforme . . . . .	4
1.3.2	Spettro dell'Hamiltoniana . . . . .	7
1.3.3	Equazioni del moto . . . . .	8
1.3.4	Autostati e autovalori di $L_0$ e $L^2$ . . . . .	10
1.3.5	Rappresentazione dell'energia . . . . .	12
1.3.6	Sistemi ad N particelle . . . . .	14
1.4	Rinormalizzazione . . . . .	16
1.4.1	Funzione $\beta$ di rinormalizzazione . . . . .	17
1.4.2	Stati non legati . . . . .	18
1.5	Conclusioni . . . . .	20
1.6	Appendici . . . . .	21
1.6.1	Costante di accoppiamento . . . . .	21
1.6.2	Gruppo conforme . . . . .	21
1.6.3	Integrali . . . . .	22
1.6.4	Rappresentazione dell'energia . . . . .	22
1.6.5	Connessioni e metrica . . . . .	23
1.6.6	Rinormalizzazione . . . . .	23
1.7	Ringraziamenti . . . . .	26



## 1.1 Introduzione

Il presente elaborato tratterà di un semplice sistema quantistico unidimensionale con lo scopo di introdurre ed applicare due concetti rilevanti nella fisica teorica contemporanea: l'*invarianza conforme* e la teoria della *rinormalizzazione*.

Le trasformazioni conformi sono trasformazioni di coordinate che preservano localmente gli angoli; esse sono state introdotte formalmente nel 1910 da Bateman e Cunningham che dimostrarono l'invarianza delle equazioni di Maxwell nel vuoto sotto l'intero gruppo conforme. Successivamente queste trasformazioni furono adottate come base per una riformulazione della teoria della relatività ad opera di Weyl, ma la restrizione a considerare solamente trasformazioni locali portò la comunità scientifica a definire la teoria fisicamente irrilevante.

Con la formulazione delle prime teorie di campo conformi (CFT), questa proprietà di invarianza è tornata ad essere studiata; nello specifico inizialmente si è cercato un collegamento con alcune teorie già formulate e studiate come quelle della relatività speciale e generale: nel primo caso è stato dimostrato come in regime ultra-relativistico essa risulti una teoria conforme; in questo limite, infatti, le velocità delle particelle sono prossime a quella della luce nel vuoto e di conseguenza i termini di massa, che a basse energie causano la rottura spontanea della simmetria, sono trascurabili. Questo è principalmente dovuto alla proprietà di preservare gli angoli delle trasformazioni conformi; infatti da essa segue l'invarianza della struttura del cono di luce che, da un lato, non intacca il principio di causalità e dall'altro permette di verificare la costanza della velocità della luce nel vuoto a tutte le scale di lunghezza. Nel secondo caso, invece, l'invarianza conforme della teoria risulta essere "rotta" dalla presenza di costanti di accoppiamento *dimensionali*, come la costante di gravitazione universale di Newton  $G$  e la costante cosmologica  $\Lambda$ , che identificano una precisa scala per il sistema.

Questi esempi possono essere generalizzati. Una teoria, infatti, per essere invariante conforme deve essere sprovvista di tutti le costanti legate a precise scale di lunghezza, tempo o energia, come la massa delle particelle, la velocità della luce nel vuoto  $c$  o la costante di Planck  $h$ . Una teoria che presenta costanti di accoppiamento, tuttavia, potrebbe tornare a possedere invarianza conforme nel limite di alte energie; esempi di questo tipo sono l'elettrodinamica quantistica (QED) e il modello standard in cui i campi scalari massivi a basse energie, come quello di Higgs, rompono la simmetria. Più precisamente fino a questo momento si è parlato di invarianza conforme ed invarianza di scala come se fossero sinonimi; in teoria quantistica dei campi, sebbene risulta vero il contrario, la sola invarianza di scala non sempre implica anche invarianza conforme in quanto quest'ultima racchiude al suo interno trasformazioni aggiuntive oltre a quelle di scala. Questo si traduce in ulteriori condizioni e vincoli da porre al sistema, ma la loro determinazione risulta tutt'oggi priva di una formulazione generale, nonostante si sia raggiunta una soluzione in particolari casi, come per sistemi bidimensionali ad opera di A.Zamolodchikov e J.Polchinski (1988).

La simmetria conforme, inoltre, riveste un ruolo chiave nella meccanica statistica, più precisamente nello studio delle transizioni di fase del secondo ordine, o continue, nelle vicinanze di un punto critico, come il passaggio a superfluido, a superconduttore, a ferromagnete oppure la transizione liquido-vapore. Lo studioso A.M. Polyakov, infatti, nel 1970 riuscì a dimostrare che questi sistemi risultano invarianti sotto trasformazioni conformi. In essi l'utilizzo della sola simmetria conforme permette di imporre delle condizioni sulla funzione di correlazione e di determinare esplicitamente gli "esponenti critici" che descrivono l'andamento divergente delle grandezze termodinamiche all'avvicinarsi del punto critico. Due esempi di questo tipo sono il modello di Ising che descrive la transizione da ferromagnetico a paramagnetico e una sua generalizzazione, il modello di Potts; quest'ultimo non è invariante conforme, ma è strettamente collegato a questa simmetria in quanto considerato una perturbazione di CFT. Due ultimi esempi di applicazione dell'invarianza conforme sono costituiti dai buchi neri in cui la simmetria conforme entra nello studio dell'orizzonte degli eventi e dalla teoria delle stringhe in cui l'inizio di questo studio arrivò nel 1997 con l'articolo di Maldacena sulla corrispondenza AdS/CFT.

È importante evidenziare, infine, come in generale è falso che sistemi classici invarianti sotto trasformazioni conformi mantengano questa proprietà quando si passa ad una descrizione quantistica; essi possono

rappresentare le cosiddette "anomalie conformi", ovvero sistemi quantistici in cui l'invarianza conforme valida a livello classico viene rotta. Ciò è strettamente collegato alla teoria di rinormalizzazione in quanto quest'ultima, per risolvere il problema degli infiniti, introduce nel sistema una precisa scala di lunghezza che determina la rottura della simmetria. È dunque importante studiare parallelamente questi due concetti in modo da comprendere meglio il legame tra di essi.

La teoria della rinormalizzazione nacque in seguito ai problemi degli infiniti nell'elettrodinamica classica e nello specifico in relazione alle particelle puntiformi e al calcolo del campo da esse generato nel limite di distanze molto piccole. Il suo obiettivo è quello di trattare gli infiniti nelle teorie quantistiche e spiegare come le costanti di accoppiamento della teoria vengano modificate al variare della scala che si sta considerando.

Inizialmente essa fu applicata all'elettrodinamica quantistica e portò nel 1965 R.Feynman, J.Schwinger e S.Tomonaga a ricevere il premio Nobel per una rinormalizzazione completa della teoria; nonostante i successi ottenuti dall'applicazione di questo metodo, molti fisici del tempo, tra cui Dirac e Feynman stesso, criticarono questa formulazione: il primo si focalizzò sulla non rigorosità della procedura, mentre il secondo osservò come tutte le teorie fino a quel momento conosciute presentassero interazioni infinitamente forti a distanze sufficientemente piccole, inducendo qualche studioso a ipotizzare che fossero incoerenti. Questa ipotesi fu abbandonata quando nel 1974 D.Gross, D.Politzer e F.Wilczek dimostrarono l'assenza di questa proprietà nella cromodinamica quantistica (QCD).

Le perplessità generali furono parzialmente risolte a partire dall'inizio degli anni '70 quando Wilson attuò una formulazione rigorosa della teoria introducendo il cosiddetto *gruppo di rinormalizzazione* che attualmente svolge un ruolo chiave in quasi tutti gli ambiti della fisica. Esso ha permesso in particolare di evidenziare un collegamento preciso tra invarianza conforme di una teoria e rinormalizzazione della stessa, costituito dalla funzione  $\beta$  di rinormalizzazione. I suoi punti fissi, cioè i valori per cui si annulla, corrispondono infatti ad un'indipendenza delle costanti di accoppiamento dalla scala di energia  $e$ , di conseguenza, alla presenza di invarianza conforme nella teoria.

Nello specifico la teoria della rinormalizzazione è basata sull'introduzione di una particolare funzione, detta *funzione beta*; essa è definita da  $\beta(k) = a(dk/da)$  dove  $a$  identifica la scala di energia del sistema mentre  $k$  rappresenta la costante di accoppiamento. Successivamente viene determinata la forma di questa funzione in modo tale da regolarizzare le grandezze in precedenza infinite e rinormalizzare di conseguenza la teoria. In generale la funzione  $\beta$  può assumere espressioni diverse; può essere positiva, ad esempio in QED, o negativa come nella QCD. Se la funzione beta, infine, dovesse annullarsi per particolari valori della costante di accoppiamento, allora la teoria di campo considerata risulterebbe essere invariante di scala  $e$ , nella maggior parte dei casi, anche invariante conforme.

Nel presente elaborato verrà considerato il sistema quantistico unidimensionale soggetto ad un potenziale del tipo  $g/(2x^2)$  in cui la costante di accoppiamento risulta adimensionale; esso presenta superficialmente invarianza di scala, ma per verificare che essa si conservi a livello quantistico e che sia possibile dimostrare anche l'invarianza conforme è necessario studiare approfonditamente il sistema. L'analisi delle sue proprietà sarà funzione del valore di  $g$  e si presenteranno dunque due casi:  $g \geq -1/4$  e  $g < -1/4$ , analizzati rispettivamente in sezione 1.3 e 1.4.

Nello specifico si seguirà il seguente schema:

1.  $g \geq -1/4$ : in questo caso il sistema risulterà essere invariante sotto trasformazioni conformi. Si definiranno, dunque, queste ultime e si studierà in dettaglio la struttura del gruppo ad esse associate, sfruttando il teorema di Noether e determinando di conseguenza i tre generatori  $H, D, K$  dell'algebra. Si procederà in seguito a dimostrare come per questo sistema l'Hamiltoniana presenti uno spettro continuo. Si formulerà dunque una teoria equivalente in termini di un nuovo operatore  $G$  definito come combinazione lineare dei tre generatori, ricavando delle condizioni sui coefficienti che permetteranno di selezionare alcuni operatori particolari dotati di spettro discreto e autostati normalizzabili. In termini di uno di essi,  $L_0$ , e dell'operatore di Casimir dell'algebra  $L^2$  verrà descritto il sistema, determinando autovalori e autostati di questi ultimi. Verrà inoltre formulato un procedimento generale per collegare gli autostati di  $L_0$  a quelli dell'Hamiltoniana. Si

considererà, infine, una generalizzazione ad un sistema unidimensionale a  $N$  particelle immerso in uno spazio descritto dalla metrica  $g$  e si determineranno le condizioni sotto le quali esso ammette invarianza conforme.

2.  $g < -1/4$ : in questo caso l'Hamiltoniana del sistema si dimostrerà essere illimitata inferiormente, pertanto occorrerà implementare la teoria della rinormalizzazione in modo da avere uno stato fondamentale finito. Si introdurrà nello specifico un parametro di cut-off  $a$  e si determinerà la funzione  $\beta$  della teoria. Questo procedimento, e nello specifico l'introduzione del parametro  $a$ , porterà alla selezione di specifiche scale di lunghezza e alla conseguente rottura della simmetria conforme.

In seguito si studierà lo spettro completo dell'Hamiltoniana, includendo anche gli autostati non normalizzabili e infine si dimostrerà come nel caso  $g \geq -1/4$ , venga ripristinata l'invarianza conforme.

## 1.2 Presentazione del sistema

Si consideri la seguente Hamiltoniana quantistica che descrive un sistema unidimensionale in cui l'operatore posizione può assumere solamente valori in  $0 \leq x < +\infty$ :

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{\epsilon}{\hat{x}^2} \quad \text{con} \quad p = -i\hbar \frac{d}{dx} \quad \text{e} \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (1.1)$$

Come introdotto precedentemente è necessario che il problema non sia funzione di parametri dimensionali ( $m$  e  $\epsilon$  in questo caso) in modo tale da poter utilizzare la proprietà d'invarianza conforme per studiarlo. Per ottenere ciò introduciamo la costante di accoppiamento *adimensionale*  $g = 2m\epsilon/\hbar^2$  in termini della quale si analizzerà il problema; in questo modo possiamo definire l'Hamiltoniana  $\hat{H}$  che verrà studiata nelle sezioni successive.<sup>1</sup>

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar^2}{m} \left( \frac{\hat{p}'^2}{2} + \frac{g}{2\hat{x}^2} \right) = \frac{\hbar^2}{m} \hat{H} \quad \text{con} \quad \hat{p}' = -i \frac{d}{dx} \quad \text{e} \quad [\hat{x}, \hat{p}'] = i \quad (1.2)$$

$H$  presenta proprietà differenti in funzione del parametro  $g$ :  $g \geq -1/4$  e  $g < -1/4$ . Nel primo caso lo spettro dell'energia risulta limitato inferiormente, mentre nel secondo lo stato fondamentale si dimostra avere energia pari a  $-\infty$  e pertanto il problema in questa formulazione risulta fisicamente privo di significato.

Per prima cosa dimostriamo il range di  $g$  in cui l'Hamiltoniana risulta limitata inferiormente. Per farlo consideriamo la seguente riscrittura

$$H = \left( i\hat{p} + \frac{\alpha}{x^2} \right) \left( -i\hat{p} + \frac{\alpha}{x^2} \right) = \left( \frac{d}{dx} + \frac{\alpha}{x^2} \right) \left( -\frac{d}{dx} + \frac{\alpha}{x^2} \right) = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2} \quad (1.3)$$

e confrontiamola con quella precedente; per avere due formulazioni equivalenti è necessario che sia soddisfatta la relazione  $\alpha(\alpha-1) = g$  che, se risolta in funzione di  $\alpha$  restituisce come risultato

$$\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4g}}{2} \quad (1.4)$$

A questo punto osserviamo che, nel caso in cui  $\alpha$  sia reale, ovvero  $g \geq -1/4$ , l'Hamiltoniana può essere vista come prodotto di un operatore per il suo autoaggiunto, cioè  $H = O^\dagger O$ .<sup>2</sup> Come conseguenza di ciò abbiamo che il valor medio dell'Hamiltoniana,  $\langle \psi | H | \psi \rangle$ , calcolato rispetto ad una generica funzione d'onda  $\psi$ , risulti pari a  $|O\psi|^2$  che, per definizione di norma, è sempre maggiore o uguale di zero. Sotto questa condizione abbiamo dunque un'Hamiltoniana limitata inferiormente.

<sup>1</sup>Per semplicità in seguito verrà omissa il simbolo di operatore  $\hat{\cdot}$ .

<sup>2</sup>L'operatore  $O$  è definito da  $O = -i\hat{p} + \alpha/x^2$ .

Per verificare la condizione opposta, invece, calcoliamo il valor medio dell'Hamiltoniana  $(\psi, H\psi)$  con  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$  normalizzata e consideriamo nel caso specifico una funzione d'onda del tipo  $\psi_\lambda(x) = \sqrt{\lambda}\psi(\lambda x)$ , con  $\lambda$  parametro reale:<sup>3</sup>

$$(\psi_\lambda, H\psi_\lambda) = \frac{\lambda^2}{4} \left( \int |\psi'(x)|^2 dx + g \int \frac{|\psi(x)|^2}{x^2} dx \right) \quad (1.5)$$

dove nel calcolo del primo termine sono state utilizzate l'integrazione per parti e le proprietà della funzione d'onda per annullare il termine di bordo. A questo punto occorre determinare un valore critico  $g_c$  per il quale il termine di destra diventi negativo; a questo segue che, nel limite  $\lambda \rightarrow +\infty$ , l'operatore risulta illimitato inferiormente.

Procediamo dunque scegliendo una funzione di test  $\psi = \sqrt{x}h_1(x)h_2(x)$  dove  $h_1(x)$  è nulla per  $x \leq a/2$ , cresce da 0 a 1 in maniera differenziabile tra  $a/2$  e  $a$  e rimane costante successivamente, mentre  $h_2(x)$  è pari a 1 fino a  $x = b$ , decresce fino a 0 in maniera differenziabile tra  $b$  e  $2b$  e resta nulla per  $x \geq 2b$ ; poniamo inoltre  $a < b$  costanti reali. Tramite delle maggiorazioni riportate per esteso in 1.6.1 si arriva alla seguente condizione:

$$\frac{\int |\psi'(x)|^2 dx}{\int |\psi(x)|^2 x^{-2} dx} \leq \frac{1}{4} \frac{\ln b/a + C}{\ln b/a} \quad (1.6)$$

dove  $C$  è una costante. Se prendiamo ora il limite  $b/a \rightarrow \infty$ , troviamo il valore limite  $g_c \geq -1/4$ , in quanto in questo limite  $C$  si annulla o rimane al più finita; abbiamo dunque una condizione di limite superiore per  $g$ , ma dalla combinazione di quest'ultima con il risultato trovato precedentemente (1.4) possiamo dedurre che  $g_c = -1/4$ , ovvero che per  $g_c < -1/4$  l'operatore risulta illimitato.

Nella sezione successiva verrà analizzato in dettaglio il caso  $g \geq -1/4$ , mentre in seguito sarà trattato il caso  $g < -1/4$ .

## 1.3 Simmetria conforme

### 1.3.1 Gruppo conforme

Le *trasformazioni conformi* sono descritte dalle trasformazioni sotto riportate in funzione di quattro parametri reali che formano una matrice  $M$  appartenente al gruppo speciale lineare  $SL(2, \mathbb{R})$ :<sup>4</sup>

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \quad x'(t') = \frac{1}{\gamma t + \delta} x(t) \quad M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Tra di esse vengono evidenziate tre trasformazioni particolari: traslazioni, dilatazioni e trasformazioni conformi speciali, determinate ciascuna da un parametro, rispettivamente  $a, b$  e  $c$ , come segue:

1. *Traslazioni*: associate a matrici in cui  $\alpha = \delta = 1$ ,  $\gamma = 0$  e  $\beta = a$  a cui corrispondono le trasformazioni

$$t' = t + a \quad x'(t') = x(t) \quad (1.8)$$

2. *Dilatazioni*: descritte dalle matrici con  $\beta = \gamma = 0$  e  $\alpha = \delta^{-1} = \exp(b/2)$  con trasformazioni associate della forma

$$t' = e^{bt} \quad x'(t') = e^{\frac{b}{2}} x(t) \quad (1.9)$$

3. *Trasformazioni conformi speciali*: corrispondenti ad un'inversione delle coordinate seguita da una rotazione e da un'ulteriore inversione, sono determinate dalle matrici tali che  $\alpha = \delta = 1$ ,  $\beta = 0$  e  $\gamma = -c$  da cui derivano le trasformazioni

$$t' = \frac{t}{-ct + 1} \quad x'(t') = \frac{1}{-ct + 1} x(t) \quad (1.10)$$

<sup>3</sup> $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$  è l'insieme delle funzioni lisce a supporto compatto che si annullano nell'origine.

<sup>4</sup> $SL(2, \mathbb{R})$  è il gruppo delle matrici invertibili con determinante pari a +1.



Definiamo ora il *gruppo conforme* come il gruppo comprendente queste tre tipologie di trasformazioni; per studiarlo in dettaglio consideriamo il più semplice modello non massivo di Lagrangiana  $\mathcal{L}$  per un campo scalare  $\phi$  invariante sotto di esse, in funzione della dimensione  $d$  dello spazio delle fasi del sistema e di un parametro *adimensionale*  $\gamma$ . Riportiamo, inoltre, il caso di sistema unidimensionale corrispondente descritto dalla Lagrangiana  $L$  che sarà quello analizzato successivamente:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \gamma \phi^{\frac{2d}{d-2}} \quad L = \frac{1}{2} \left( \dot{x}^2 - \frac{g}{x^2} \right) \quad (1.11)$$

Si ponga l'attenzione sul fatto che le costanti di accoppiamento della teoria,  $\lambda$  e  $g$  rispettivamente per il caso generale e particolare, debbano risultare adimensionali; questo è necessario affinché il sistema presenti invarianza sotto trasformazioni conformi. Se non fossero adimensionale, infatti, esso sarebbe legato ad una particolare scala del sistema, rompendo di conseguenza l'invarianza di scala che rappresenta una parte delle trasformazioni conformi, nello specifico quella legata alle dilatazioni. Per dimostrare la scelta della potenza del campo, definiamo  $[\phi]$  la dimensione di quest'ultimo e partiamo dalla richiesta di avere un'azione adimensionale: da essa segue che ciascun addendo debba avere dimensione pari a  $d$  in modo da compensare la dimensione data dalla misura dell'integrale. Per il primo addendo abbiamo che  $2([\phi] + 1) = d$  dove il fattore  $+1$  deriva dall'operazione di derivazione. A partire da quanto ottenuto abbiamo che per il secondo addendo, invece, si debba avere che  $k[\phi] = d$ , pertanto ricaviamo che  $k = 2d/(d-2)$

Nel caso specifico, inoltre, non è la Lagrangiana ad essere strettamente invariante sotto 1.7, ma è l'azione, definita come l'integrale della Lagrangiana rispetto al tempo, a risultare invariante a meno di una derivata totale rispetto al tempo di una funzione  $K$ , cioè<sup>5</sup>

$$I' [x'(t'), \dot{x}'(t')] - I [x(t), \dot{x}(t)] = \int dt' I' - \int dt I = \int dt \frac{dK}{dt}. \quad (1.12)$$

A questo punto occorre passare dalle trasformazioni di simmetria *finite* alle corrispettive *infinitesime*, in modo da poter in seguito applicare alla teoria il *teorema di Noether* nella sua forma debole e determinare di conseguenza le correnti di Noether conservate che corrisponderanno ai generatori dell'algebra associata al gruppo. Per fare ciò definiamo preliminarmente la variazione infinitesima *totale*  $\bar{\delta}x = x'(t') - x(t)$  e la variazione infinitesima *in forma*  $\delta x = x'(t) - x(t)$ , dove  $t' = t + \bar{\delta}t$  con  $|\bar{\delta}t| \ll 1$ ; la variazione totale si può ricavare a partire dal troncamento dell'espansione in serie di Taylor, fatta rispetto ai parametri  $a, b, c$ , delle trasformazioni 1.8, 1.9 e 1.10 al primo ordine tramite le quali si ricavano le seguenti relazioni:<sup>6</sup>

$$\bar{\delta}t = f(t) = a + bt + ct^2 \quad \bar{\delta}x = \frac{1}{2} \dot{f}x = \frac{1}{2} (b + 2ct)x \quad (1.13)$$

Consideriamo ora l'espansione in serie di Taylor rispetto a  $\bar{\delta}t$ , sempre troncata al primo ordine, di  $x'(t)$ , osservando che la differenza  $\dot{x}'(t) - \dot{x}(t)$  risulta essere del secondo ordine nelle variazioni (è proporzionale a  $\bar{\delta}t \delta \dot{x}$ ) e pertanto può essere trascurata coerentemente con quanto fatto finora.

$$x'(t') = x'(t + \bar{\delta}t) = x'(t) + \dot{x}'(t) \bar{\delta}t + o(\bar{\delta}t^2) \approx x'(t) + \dot{x}(t) \bar{\delta}t + o(\bar{\delta}t^2) \quad (1.14)$$

Segue a questo punto da 1.14 una relazione tra variazione totale e variazione in forma del tipo  $\bar{\delta}x \approx \delta x + \dot{x}(t) \bar{\delta}t$  che, se invertita, ci fornisce la seguente espressione per la variazione in forma a cui viene associata la variazione delle velocità  $\delta \dot{x}$ :

$$\delta t = 0 \quad \delta x = \frac{1}{2} \dot{f}x - f\dot{x} = \frac{1}{2} (b + 2ct)x - (a + bt + ct^2)\dot{x} \quad (1.15)$$

$$\delta \dot{x} = c\dot{x} - \frac{1}{2} (b + 2ct)\ddot{x} - (a + bt + ct^2)\ddot{x}. \quad (1.16)$$

<sup>5</sup>Per il conto esplicito si rimanda alla sezione in appendice 1.6.2.

<sup>6</sup>Si ricorda che  $e^b \approx 1 + b + o(b^2)$  e che  $\frac{1}{-ct+1} \approx 1 + ct + o(c^2)$ .

Il motivo del passaggio da variazione totale a variazione in forma è legato alle proprietà rispetto all'operazione di derivazione: la variazione in forma, infatti, commuta con essa nel senso che  $\delta(\dot{x})(t) = \dot{x}'(t) - \dot{x}(t) = (\delta\dot{x})(t)$  dove è stata sfruttata la linearità della derivata e sono stati trascurati termini di ordine superiore al primo. Questa proprietà non è valida nel caso della variazione totale, pertanto si è ritenuto opportuno passare a questa descrizione equivalente che permette di ricavare agevolmente la variazione delle velocità 1.16.

Definite ora le variazioni possiamo procedere in maniera analoga al caso trattato precedentemente di variazioni finite, consideriamo cioè la variazione infinitesima dell'azione e ipotizziamo che anche in questo caso essa sia nulla a meno della derivata totale rispetto al tempo di una funzione  $\Lambda$ , come verrà verificato in seguito:

$$\delta I = \frac{1}{2} \int dt \left( \delta(\dot{x}^2) - g\delta\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = \int dt \left( \dot{x}\delta\dot{x} + g\frac{\delta x}{x^3} \right) = \int dt \frac{d\Lambda}{dt} \quad (1.17)$$

Concludiamo questa prima parte di trattazione derivando i tre generatori: il teorema di Noether, nella sua forma debole, garantisce che ad ogni simmetria infinitesima che lascia invariata l'azione a meno di una derivata temporale totale è associata una quantità  $J$  conservata, chiamata corrente di Noether, che assume nel caso unidimensionale la seguente forma:

$$J = \delta x \frac{dL}{d\dot{x}} - \delta t \left( \dot{x} \frac{dL}{d\dot{x}} - L \right) - \Lambda \quad \text{con} \quad \frac{dJ}{dt} \equiv 0 \quad (1.18)$$

Applichiamo ora questa formulazione generale alle variazioni infinitesime corrispondenti alle tre trasformazioni in modo da ottenere i generatori dell'algebra rispettivamente corrispondenti a traslazioni, dilatazioni e trasformazioni conformi speciali. Di seguito verranno riportati per chiarezza espositiva solamente le espressioni dei tre generatori  $H, D$  e  $K$ , mentre per i calcoli espliciti delle tre funzioni  $\Lambda$  si rimanda alla sezione 1.6.2 posta in Appendice.<sup>7</sup>

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{g}{2x^2}; \quad (1.19)$$

$$D = tH - \frac{1}{4}(px + xp); \quad (1.20)$$

$$K = t^2H - \frac{1}{2}t(px + xp) + \frac{1}{2}x^2. \quad (1.21)$$

Passiamo ora ad una descrizione hamiltoniana equivalente, considerando il sistema quantistico descritto dall'Hamiltoniana 1.19 e calcoliamo i commutatori tra i vari generatori, sfruttando il fatto che  $[x, p] = i$ , la relazione  $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ , la proprietà di antisimmetria, la commutatività di un operatore con sè stesso e la riscrittura  $2D - 2tH = -(xp + px)/2$ :

$$[D, H] = -\frac{1}{2} \left( i \frac{g}{x^2} - ip^2 + [x, p^3] + [xp, p^2] - g \left[ \frac{1}{x}, p \right] - g \left[ \frac{1}{x^2}, px \right] \right) = -\frac{1}{2} \left( ip^2 + i \frac{g}{x^2} \right) = -iH \quad (1.22)$$

$$[H, K] = 2t[H, D] + \frac{1}{4} \left( p[p, x^2] + [p, x^2]p \right) = 2itH - \frac{i}{2}(px + xp) = 2iD \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} [D, K] &= \left[ D, -t^2H + 2D + \frac{1}{2}x^2 \right] = it^2H - \frac{i}{2}t(px + xp) - \frac{1}{8} \left( [p, x^2]x + x[p, x^2] \right) \\ &= it^2H - \frac{i}{2}t(px + xp) + \frac{i}{2}x^2 = iK \end{aligned} \quad (1.24)$$

Analogamente a quanto derivato precedentemente tramite teorema di Noether, possiamo verificare come  $D$  e  $K$  siano, anche in questa formulazione della teoria, costanti del moto del sistema, ossia soddisfano:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + i[H, D] = 0 \quad \frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial t} + i[H, K] = 0 \quad (1.25)$$

<sup>7</sup>nel calcolo dei generatori è stata effettuata una *simmetrizzazione* ed è stata utilizzata la definizione di momento coniugato  $p = \dot{x}$ .

È importante notare come sembrerebbe superflua la presenza di tre generatori per descrivere un sistema con spazio delle fasi bidimensionale; in realtà non sono indipendenti, ma tra essi intercorre una relazione che emergerà nelle successive sezioni attraverso la definizione dell'operatore di Casimir  $L^2$  dell'algebra.

Come ultimo punto possiamo osservare come le parti dipendenti dal tempo contenute negli operatori  $D$  e  $K$  possano essere riassorbite tramite l'applicazione dell'operatore unitario di evoluzione temporale definito in termini dell'Hamiltoniana:

$$D = e^{itH} D_0 e^{-itH} \quad K = e^{itH} K_0 e^{-itH} \quad (1.26)$$

dove  $D_0$  e  $K_0$  rappresentano la parte indipendente dal tempo. A seguito di questa proprietà a partire dalla sezione successiva verrà considerata solamente la parte indipendente dal tempo che verrà denotata con  $D$  e  $K$ .

### 1.3.2 Spettro dell'Hamiltoniana

Dai risultati ricavati nella sezione precedente è emerso come il sistema considerato possa essere descritto mediante tre generatori, riportati di seguito insieme ai relativi commutatori, che sottostanno all'algebra di Lie  $sl(2, \mathbb{R})$ , associata al gruppo di Lie *speciale lineare*  $SL(2, \mathbb{R})$ .

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{g}{2x^2} \quad D = -\frac{1}{4}(px + xp) \quad K = \frac{1}{2}x^2 \quad (1.27)$$

$$[D, H] = -iH \quad [D, K] = iK \quad [H, K] = 2iD \quad (1.28)$$

In questa sezione si utilizzeranno queste informazioni per dedurre alcune proprietà dello spettro dell'Hamiltoniana; nello specifico si dimostrerà come esso sia *continuo* e di conseguenza i suoi autostati siano *non normalizzabili*. Per fare ciò consideriamo la seguente proprietà, derivata sfruttando iterativamente 1.28:

$$\begin{aligned} HD^k &= (HD)D^{k-1} = (DH + [H, D])D^{k-1} \\ &= (D + i)HD^{k-1} = (D + i)^2 HD^{k-2} \\ &= \dots \\ &= (D + i)^k H \end{aligned} \quad (1.29)$$

Definiamo ora un autostato dell'energia in notazione di Dirac  $|E\rangle$  corrispondente all'autovalore  $E$ ; per dimostrare la proprietà di continuità dello spettro dell'Hamiltoniana di un qualsiasi sistema quantistico con operatori che sottostanno all'algebra di Lie di  $sl(2, \mathbb{R})$  è sufficiente verificare che

$$He^{i\alpha D}|E\rangle = e^{-\alpha} E e^{i\alpha D}|E\rangle \quad (1.30)$$

dove  $\alpha$  è un parametro reale non nullo. Per fare ciò riscriviamo l'operatore  $e^{i\alpha D}$  sfruttando lo sviluppo in serie di Taylor della funzione esponenziale, ottenendo:

$$\begin{aligned} He^{i\alpha D}|E\rangle &= H \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\alpha D)^k}{k!} |E\rangle \right) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\alpha(D+i))^k}{k!} H |E\rangle \right) \\ &= E e^{i\alpha(D+i)} |E\rangle = e^{-\alpha} E e^{i\alpha D} |E\rangle \end{aligned} \quad (1.31)$$

Da questo ragionamento segue che se esiste un autostato di  $H$  corrispondente ad un autovalore non nullo, allora lo spettro dell'Hamiltoniana risulta essere *continuo* e i suoi autostati *non normalizzabili*, come ipotizzato ad inizio sezione.

Occorrerà dunque introdurre nuovi operatori come combinazioni lineari di  $H$ ,  $D$  e  $K$  che presenteranno spettro *discreto* e autostati *normalizzabili* in termini dei quali verrà descritto il sistema.

### 1.3.3 Equazioni del moto

Dal paragrafo precedente è emersa la necessità di introdurre nuovi operatori a spettro discreto rispetto ai quali verrà descritto il sistema. Per fare ciò in questa sezione si partirà da un operatore generico  $G$  definito come combinazione lineare dei tre generatori  $H, D, K$  in termini dei coefficienti  $u, v, w$  e si studierà la possibilità di utilizzare quest'ultimo come "nuova Hamiltoniana", cioè come operatore di evoluzione temporale del sistema in termini di una nuova variabile temporale e della corrispondente coordinata spaziale; si vedrà, inoltre, come l'implementazione di questa riformulazione, effettuata solamente sfruttando la proprietà di invarianza conforme, porti a definire delle restrizioni sui coefficienti e, conseguentemente, sugli operatori che potranno essere utilizzati per la descrizione del sistema.

Definiamo  $G$  nel seguente modo e osserviamo che, essendo combinazione lineare di costanti del moto, possiede anch'esso derivata temporale totale nulla:

$$G = uH + vD + wK \quad \frac{dG}{dt} \equiv 0 \quad (1.32)$$

Introduciamo ora una nuova coordinata temporale rispetto alla quale  $G$  ricoprirà il ruolo di operatore di evoluzione temporale ed esprimiamo l'evoluzione temporale del sistema rispetto ad essa nelle due equivalenti formulazioni di Heisenberg e Schrödinger, detta  $\psi(\tau)$  la funzione d'onda nelle nuove variabili.

$$d\tau = \frac{1}{u + vt + wt^2} dt \quad q(\tau) = \frac{1}{\sqrt{u + vt + wt^2}} x(t) \quad (1.33)$$

$$i [G, q(\tau)] = \frac{dq}{d\tau} \quad G|\psi(\tau)\rangle = i \frac{d}{d\tau} |\psi(\tau)\rangle. \quad (1.34)$$

A questo punto occorre dimostrare che la riformulazione del problema permette di descrivere completamente l'evoluzione temporale, cioè bisogna verificare che l'espressione di  $\tau$  in termini della vecchia variabile temporale  $t$  non presenti alcuna singolarità lungo l'intervallo  $-\infty < t < +\infty$ . Consideriamo pertanto l'integrale

$$\tau = \int_{t_0}^t \frac{1}{u + vt' + wt'^2} dt' + \tau_0 \quad (1.35)$$

la cui soluzione dipende dagli zeri del denominatore e in particolare dal segno del discriminante  $\Delta = v^2 - 4uw$ . Possono dunque presentarsi tre casi diversi, i cui conti espliciti sono riportati in 1.6.3:<sup>8</sup>

1. Operatori *non compatti*:  $\Delta > 0$

le radici  $t_{1,2}$  del denominatore sono reali, di conseguenza la soluzione è

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \left( \frac{t - t_1}{t - t_2} \frac{t_2}{t_1} \right) \quad (1.36)$$

In questo caso la variabile  $\tau$  non può definire l'intervallo temporale completo a causa della restrizione sull'argomento del logaritmo, dunque queste soluzioni sono fisicamente inaccettabili. In questa categoria rientra l'operatore  $D$  in cui una delle due radici del denominatore  $\rightarrow +\infty$ .

2. Operatori *compatti*:  $\Delta < 0$  le radici del denominatore sono complesse, pertanto la risoluzione risulta essere

$$\tau = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \left( \arctan \frac{2wt + v}{\sqrt{-\Delta}} - \arctan \frac{v}{\sqrt{-\Delta}} \right) \quad (1.37)$$

in questo caso l'intervallo temporale richiesto può essere percorso interamente senza riscontrare singolarità nella variabile  $\tau$ ; ciò è connesso al fatto che gli operatori di questa classe generano una rotazione.

<sup>8</sup>Verrà sempre presa come normalizzazione  $\tau(0) = 0$ .

3. Operatori *parabolici*:  $\Delta = 0$  il denominatore presenta due radici coincidenti  $t_0$ , che forniscono la soluzione

$$\tau = \frac{1}{w} \left( -\frac{1}{t - t_0} + \frac{1}{t_0} \right) \quad (1.38)$$

in questo caso, nonostante il parametro  $\tau$  possa variare da  $-\infty$  a  $+\infty$ , si ha una singolarità in  $\tau$  per un valore finito di  $t$ . Appartengono a questa categoria "limite" gli operatori  $H$  e  $K$ .

Da questi risultati emerge come solamente gli operatori con discriminante strettamente negativo siano adatti a descrivere il sistema fisico. Prima di introdurre uno di essi come faremo nella sezione successiva, tuttavia, è utile completare la riformulazione generale, determinando una nuova Lagrangiana in termini della quale verrà descritta la dinamica. Per farlo inseriamo le sostituzioni 1.33 nell'azione della Lagrangiana e troviamo il risultato sottostante, avendo utilizzato la proprietà che due Lagrangiane equivalenti, cioè uguali a meno di una derivata temporale totale, conducono alle stesse equazioni del moto.

$$I = \frac{1}{2} \int d\tau \left( \dot{q} - \frac{g}{q^2} + \frac{\Delta}{4} q^2 + \frac{d}{d\tau} \left( q^2 \left( \frac{v}{2} + wt \right) \right) \right) \quad \text{con} \quad L_G = \frac{1}{2} \left( \dot{q}^2 + \frac{\Delta}{4} q^2 - \frac{g}{q^2} \right). \quad (1.39)$$

Alla Lagrangiana così determinata corrisponde canonicamente l'Hamiltoniana  $H_G$  riportata di seguito che soddisfa la proprietà  $G(x, \dot{x}) = H_G(q, \dot{q})$ .<sup>9</sup> A questo punto possiamo scrivere l'equazione di Schrödinger in termini del nuovo operatore, sfruttando il fatto che  $[q, \dot{q}] = i$ , ponendo  $q(0) = y$  e  $\dot{q}(0) = -i d/dy$  e introducendo la funzione d'onda  $\psi(y, \tau)$ . Abbiamo dunque

$$H_G(q(\tau), \dot{q}(\tau)) = \frac{1}{2} \left( \dot{q} + \frac{g}{q^2} - \frac{\Delta}{4} q^2 \right) \quad i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = H_G \left( y, -i \frac{d}{dy} \right) \psi(y, \tau) \quad (1.40)$$

Per terminare scegliamo la funzione d'onda come un autostato di  $G$  di autovalore  $G'$ , cioè il suo evoluto temporale e la sua equazione agli autovalori assumono la forma

$$\psi_{G'}(y, \tau) = e^{-iG'\tau} \psi_{G'}^{(0)}(y) \quad G \psi_{G'}^{(0)}(y) = \left( -\frac{d^2}{dy^2} + \frac{g}{y^2} - \frac{\Delta}{4} y^2 \right) \psi_{G'}^{(0)}(y) = G' \psi_{G'}^{(0)}(y). \quad (1.41)$$

Questa ultima formulazione ci permette di analizzare alcune caratteristiche generali dello spettro e della normalizzabilità delle autofunzioni; per fare ciò consideriamo il comportamento di  $G$  nei limiti  $y \rightarrow 0$  e  $y \rightarrow \infty$ :

1. Per quanto riguarda l'origine il termine dominante risulta essere  $g/y^2$ , pertanto esso dipende dal valore che assume la costante di accoppiamento: se  $g = 0$  la singolarità viene eliminata e il sistema si riduce a quello di una particella non interagente definita nel range  $-\infty < y < +\infty$ ; per  $g < 0$  siamo in presenza di un potenziale infinitamente attrattivo che, nonostante abbia una formulazione matematica consistente, rappresenta soluzioni *fisicamente* inaccettabili;  $g > 0$ , infine, descrive un potenziale infinitamente repulsivo che confina la particella solamente nell'intervallo  $0 \leq y < +\infty$ . Da ciò che emergerà nel paragrafo successivo si vedrà come quest'ultimo caso è l'unico che porterà ad avere autostati normalizzabili in grado di soddisfare le condizioni al contorno fisiche.
2. Nel caso opposto il termine che conta maggiormente è  $-y^2 \Delta/4$ , dunque il segno del discriminante determina il comportamento di questo potenziale: quando il discriminante è maggiore o uguale a zero il potenziale decresce monotonicamente e ciò porta ad uno spettro *continuo*, illimitato inferiormente nel caso  $\Delta > 0$ ; nell'ipotesi opposta di  $\Delta < 0$ , invece, il potenziale tende all'infinito sia per  $y \rightarrow 0$  che per  $y \rightarrow \infty$  e presenta un minimo ad un valore fissato  $y_0$ , dunque lo spettro risulta discreto e le autofunzioni normalizzabili.

<sup>9</sup>Si ricordi la relazione che intercorre tra Lagrangiana ed Hamiltoniana:  $H_G = \dot{q} \frac{dL_G}{d\dot{q}} - L_G$ .

### 1.3.4 Autostati e autovalori di $L_0$ e $L^2$

Nella sezione precedente è stata formulata una teoria generale in funzione dell'operatore  $G$ , ma è stato dimostrato come solamente gli operatori con discriminante  $\Delta = v^2 - 4uw < 0$  possano essere utilizzati per una corretta descrizione dell'evoluzione temporale del sistema. A questo proposito introduciamo l'operatore  $L_0$  corrispondente all'operatore  $G$  con discriminante pari a meno uno e ad esso affianchiamo altri due operatori  $L_{\pm}$  che, per motivi che chiariremo successivamente, vengono denominati rispettivamente operatore di innalzamento e di abbassamento. Ad essi vengono associati anche i rispettivi commutatori che discendono da 1.28 e dall'applicazione di regole algebriche, da cui si può osservare come anche questi operatori obbediscano all'algebra di  $sl(2, \mathbb{R})$ . Si osservi, infine, la dipendenza da un parametro di cut-off  $a$  con dimensioni di una lunghezza, i cui limiti  $\rightarrow (0, +\infty)$  verranno studiati al termine della trattazione.

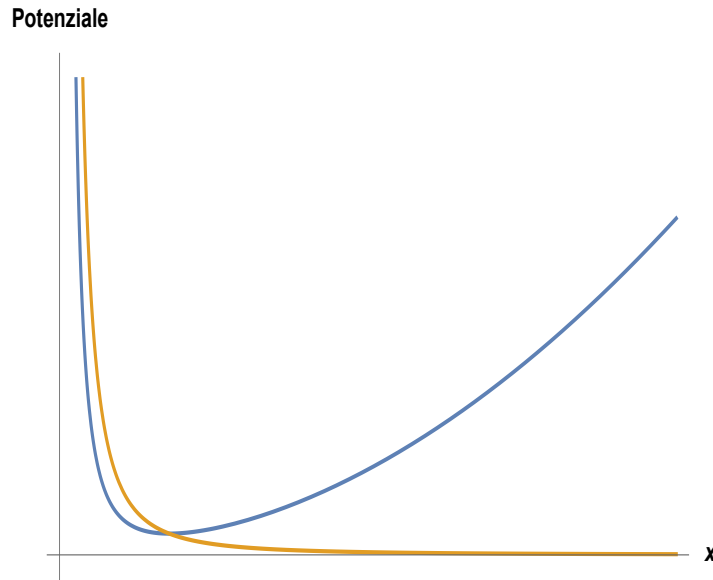
$$L_0 = \frac{1}{2} \left( aH + \frac{K}{a} \right) \quad L_{\pm 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{K}{a} - aH \pm 2iD \right) \quad (1.42)$$

$$[L_0, L_{\pm 1}] = \pm L_{\pm 1} \quad [L_1, L_{-1}] = -2L_0 \quad (1.43)$$

Esprimiamo ora l'operatore  $L_0$  in termini di  $x, p$  e confrontiamo il suo potenziale, denominato  $V_0(x)$ , con quello associato all'Hamiltoniana  $H$ ,  $V(x)$ :

$$L_0 = a \frac{p^2}{4} + a \frac{g}{4x^2} + \frac{x^2}{4a} \quad H = \frac{p^2}{2} + \frac{g}{2x^2}. \quad (1.44)$$

Rappresentando i potenziali su di un grafico in funzione della coordinata  $x$  si osserva come per  $V(x)$  (linea arancione) il potenziale decresca monotonicamente da  $+\infty$  a 0, mentre  $V_0(x)$  (linea azzurra) presenta un minimo ad un certo valore  $x_0$  finito e una tendenza asintotica a  $+\infty$  da cui discenderanno la discretezza dello spettro e la normalizzabilità degli autostati.



**Figura 1.1:** Confronto tra i due potenziali con  $g=10$  e  $a=1$

Definiamo ora un quarto operatore,  $L^2$ , in termini di  $L_{0,\pm 1}$  che può anche essere espresso in funzione di  $H, D, K$  tramite 1.42:<sup>10</sup>

$$L^2 = L_0(L_0 - 1) - L_1L_{-1} = L_0(L_0 + 1) - L_{-1}L_1 = \frac{1}{2} \left\{ aH, \frac{K}{a} \right\} - D^2 \quad (1.45)$$

<sup>10</sup>Con il simbolo  $\{\cdot, \cdot\}$  viene indicato l'anticommutatore tra due operatori.

Tramite conti diretti si dimostra che  $L^2$  è l'operatore di Casimir dell'algebra  $sl(2, \mathbb{R})$ , ovvero l'operatore che commuta con tutti i generatori dell'algebra:

$$\begin{aligned} [L^2, L_0] &= -[L_1 L_{-1}, L_0] = -(L_1 L_{-1} - L_{-1} L_1) = 0 \\ [L^2, L_{\pm 1}] &= [L_0 L_0, L_{\pm 1}] - [L_0, L_{\pm 1}] - [L_1 L_{-1}, L_{\pm 1}] = [L_0, L_{\pm 1}] \mp L_{\pm 1} = 0 \end{aligned} \quad (1.46)$$

A questo punto possiamo sfruttare la commutatività tra gli operatori  $L_0$  e  $L^2$  per utilizzare il teorema sulle osservabili compatibili che ci permette di definire una base ortonormale di autovettori comuni per  $L^2$  e  $L_0$ , indicata con  $|l, l_n\rangle$  tale che:

$$L^2 |l, l_n\rangle = l |l, l_n\rangle \quad \text{e} \quad L_0 |l, l_n\rangle = l_n |l, l_n\rangle \quad (1.47)$$

Applichiamo ora  $L_{\pm 1}$  a  $|l, l_n\rangle$ , sfruttando i commutatori 1.43:

$$L_0 L_{\pm 1} |l, l_n\rangle = (L_{\pm 1} L_0 \pm L_{\pm 1}) |l, l_n\rangle = (l_n \pm 1) L_{\pm 1} |l, l_n\rangle \quad (1.48)$$

ricavando che  $L_{\pm 1} |l, l_n\rangle$  sono autovettori di  $L_0$  di autovalori rispettivamente pari a  $(l_n \pm 1)$ , da cui discendono i nomi utilizzati precedentemente; in questo modo è stato possibile dimostrare che gli autovalori di  $L_0$  differiscono l'uno dall'altro per un numero *intero*. Consideriamo ora  $L^2$  e tramite 1.27 e il commutatore tra  $x$  e  $p$  determiniamo il valore che esso assume:<sup>11</sup>

$$\begin{aligned} L^2 &= \frac{1}{8} \left[ \left( p^2 + \frac{g}{x^2} \right) x^2 + x^2 \left( p^2 + \frac{g}{x^2} \right) \right] - \frac{1}{16} (px + xp)^2 \\ &= \frac{g}{4} + \frac{1}{16} (-p[x, p]x - x[p, x]p - [p, x^2 p] - [x, p^2 x]) \\ &= \frac{g}{4} + \frac{1}{16} (3i[x, p]) = \frac{g}{4} - \frac{3}{16} \end{aligned} \quad (1.49)$$

Poniamo ora l'autovalore  $l$  di  $L^2$  in modo da avere  $l = l_0(l_0 - 1)$  e confrontiamo questa espressione con 1.49, trovando:

$$l_0 = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{g + \frac{1}{4}} \right) \quad (1.50)$$

per scegliere quale delle due radici utilizzare consideriamo l'equazione di Schrödinger nel limite  $x \rightarrow 0$  con la condizione al contorno data dal problema fisico: per un potenziale infinitamente repulsivo si ha una barriera impenetrabile che pone come limitazione l'annullarsi nell'origine della funzione d'onda e, per regolarità, della sua derivata. Abbiamo dunque, riscrivendo  $g$  in termini di  $L^2$  a partire da 1.49 e successivamente di  $l_0$  e trascurando il termine proporzionale a  $x^2$  che si annulla per  $x$  tendente a zero:

$$\left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{4L^2 + 3/4}{2x^2} \right) \psi(x) = \left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{(2l_0 - 1/2)(2l_0 - 3/2)}{2x^2} \right) \psi(x) = 0 \quad (1.51)$$

ipotizziamo che in questo limite  $\psi(x) \propto x^\alpha$  con  $\alpha > 0$ ; inserendo questo in 1.51 troviamo l'equazione:

$$(-\alpha(\alpha - 1) + (2l_0 - 1/2)(2l_0 - 3/2))x^{(\alpha-2)} = 0 \quad (1.52)$$

che restituisce come soluzione  $\alpha = 2l_0 - 1/2$ . Determiniamo infine il minimo valore di  $l_0$  consentito dalla richiesta di annullamento nell'origine di  $\psi$  e  $\psi'$  e troviamo  $l_0 > 3/4$  che ci permette di escludere una delle due soluzioni di 1.50 e di trovare di conseguenza:

$$l_0 = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{g + \frac{1}{4}} \right) \quad (1.53)$$

Prima di procedere occorre considerare la condizione su  $l_0$  che è appena stata determinata; da essa consegue, tramite 1.53, una condizione sulla costante di accoppiamento:  $g > 0$ . Questo evidenzia, come già accennato alla fine della sezione precedente, una disparità tra descrizione matematica e fisica del

<sup>11</sup>Si osservi come questa relazione costituisca il vincolo di cui si parlava alla fine della sezione 1.3.1.

sistema: per quanto riguarda la prima a partire solamente dall'algebra degli operatori discendono tutti i risultati trovati fino a questo momento, ma la condizione al contorno imposta dalla considerazione di uno specifico sistema ha determinato il vincolo appena trovato che restringe l'insieme delle costanti di accoppiamento possibili.

Cerchiamo ora una relazione tra  $l_n$  e  $l_0$  e per farlo consideriamo la norma di  $L_{-1}|l_0, l_n\rangle$ , sfruttiamo il fatto che  $L_1^\dagger = L_{-1}$ , la prima formulazione in 1.45 e l'ortonormalità degli stati. Abbiamo:

$$\|L_{-1}|l_0, l_n\rangle\|^2 = l_n(l_n - 1) - l_0(l_0 - 1) \geq 0 \quad (1.54)$$

che, sotto la condizione verificata di  $l_0 \geq 1/2$  fornisce la soluzione  $l_n \geq l_0$ , pertanto abbiamo dimostrato che lo *stato fondamentale* di  $L_0$  è quello corrispondente all'autovalore  $l_0$ , a partire dal quale possono essere determinati i successivi  $l_n = l_0 + n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , grazie all'applicazione dell'operatore di innalzamento. Per concludere quest'analisi osserviamo che combinando 1.48 e 1.54 è possibile determinare tutti gli autostati di  $L_0$  a partire dall'autostato con autovalore minore per il quale vale  $L_{-1}|l_0, l_0\rangle = 0$  e applicando successivamente  $L_1$  in modo da avere infiniti autostati con autovalori successivi che differiscono per un'unità.

Determiniamo ora gli autostati. Definiamo  $\psi_0(x)$  come l'autostato corrispondente al minimo autovalore; si ha dunque  $L_{-1}\psi_0(x) = 0$  che se riscritta in termini di  $L_0$ , sfruttando 1.27 e la definizione di  $x$  e  $p$  restituisce:

$$L_{-1}\psi_0(x) = \left(K - L_0 - iD\right)\psi_0(x) = \frac{1}{2}\left(x\frac{d}{dx} + x^2 - (2l_0 - \frac{1}{2})\right)\psi_0(x) = 0 \quad (1.55)$$

che ha come soluzione

$$\psi_0(x) = C_0 e^{-x^2/2} x^{2l_0-1/2} \quad x \geq 0 \quad (1.56)$$

con  $C_0$  costante fissata dalla normalizzazione  $\int_0^\infty |\psi_0(x)|^2 dx = 1$  e pari a  $C_0 = [2\Gamma(2l_0)]^{-1/2}$ .<sup>12</sup>

Applicando ora  $L_1$  a  $\psi_0(x)$  è possibile determinare l'autostato  $\psi_1(x)$  e tramite iterazioni successive si riesce a ricavare tutte le autofunzioni normalizzate (con il reinserimento del parametro  $a$ ) che risultano essere dipendenti dai polinomi associati di Laguerre  $L_n^m(x)$ :

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \sqrt{\frac{\Gamma(n+1)}{2\Gamma(n+2l_0)}} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{x^2}{a}\right)^{l_0} e^{-x^2/2a} L_n^{2l_0-1}\left(\frac{x^2}{a}\right) \\ L_n^{2l_0-1}(x^2) &= e^{x^2} (x^2)^{-2l_0+1} \left(\frac{d}{dx^2}\right)^n e^{-x^2} (x^2)^{2l_0-1+n} \end{aligned} \quad (1.57)$$

### 1.3.5 Rappresentazione dell'energia

Nella sezione precedente è stato descritto il sistema fisico in funzione degli autovalori e degli autostati di  $L_0$ , ora vogliamo analizzare quale sia il collegamento tra questi ultimi e quelli *generalizzati* dell'Hamiltoniana. Per fare ciò possiamo intraprendere due percorsi: espandere gli autostati di  $L_0$  in termini di quelli di  $H$  oppure, come verrà fatto in seguito, utilizzare una proprietà delle rappresentazioni di gruppo.

Fino a questo momento gli operatori e gli autostati sono stati definiti in *rappresentazione x*, mentre ora vogliamo esprimerli in *rappresentazione t*, in termini della quale l'Hamiltoniana assume la nota formulazione alla quale seguono quelle dei generatori  $D$  e  $K$  in funzione dell'autovalore minimo  $l_0$ . Queste espressioni garantiscono la validità dei commutatori che definiscono l'algebra e la relazione di dipendenza tra i generatori definita dalla forma dell'operatore di Casimir  $L^2$ :

$$H \rightarrow h_t = i\frac{d}{dt} \quad D \rightarrow d_t = i\left(t\frac{d}{dt} + l_0\right) \quad K \rightarrow k_t = i\left(t^2\frac{d}{dt} + 2l_0t\right) \quad (1.58)$$

<sup>12</sup> $\Gamma(x)$  rappresenta la funzione *gamma di Eulero*.



A questo punto scriviamo l'equazione agli autovalori per  $L_0$ , applicando l'operatore alle autofunzioni  $\beta_n(t)$  espresse anch'esse in funzione di  $t$ , ricordando 1.42:

$$L_0\beta_n(t) = \frac{i}{2} \left( (1+t^2) \frac{d}{dt} + 2l_0t \right) \beta_n(t) = l_n\beta_n(t) \quad (1.59)$$

che ha come soluzioni

$$\beta_n(t) = (-1)^n \sqrt{\frac{\Gamma(n+2l_0)}{\Gamma(n+1)}} \left( \frac{1-it}{1+it} \right)^{l_n} \frac{1}{(1+t^2)^{l_0}}. \quad (1.60)$$

Prima di procedere invertiamo le espressioni 1.42 in modo da ottenere  $H, D, K$  in funzione di  $L_{0,\pm}$ :

$$H = L_0 - \frac{1}{2}(L_+ + L_-) \quad D = \frac{1}{2i}(L_+ + L_-) \quad K = L_0 + \frac{1}{2}(L_+ + L_-) \quad (1.61)$$

Ora per semplicità definiamo  $X_1 = H$ ,  $X_2 = K$  e  $X_3 = D$  e sfruttiamo quanto ottenuto in 1.61 per determinare l'azione degli operatori sugli autostati di  $L_0$  sia in rappresentazione  $x$  sia  $t$ , ricordando l'azione degli operatori di innalzamento e abbassamento:

$$X_\alpha |n\rangle = \gamma_{n,n'}^\alpha |n'\rangle \quad x_t^{(\alpha)} \beta_n(t) = \gamma_{n,n'}^\alpha \beta_{n'}(t) \quad (1.62)$$

dove i coefficienti  $\gamma_{n,n'}^\alpha$  e  $C_\pm(l_0, l_n)$  sono dati da<sup>13</sup>

$$\begin{aligned} \gamma_{n,n'}^{1,2} &= l_n \delta_{n,n'} \pm \frac{1}{2} \left( C_+(l_0, l_n) \delta_{n',n+1} + C_-(l_0, l_n) \delta_{n',n-1} \right) \\ \gamma_{n,n'}^3 &= \frac{1}{2i} \left( C_+(l_0, l_n) \delta_{n',n+1} - C_-(l_0, l_n) \delta_{n',n-1} \right) \\ C_\pm(l_0, l_n) &= \sqrt{l_n(l_n \pm 1) - l_0(l_0 - 1)} \end{aligned} \quad (1.63)$$

Completiamo la descrizione di questa rappresentazione definendone la base di autostati,  $|t\rangle$  a partire dalla quale procederemo successivamente a collegare le autofunzioni di  $L_0$  a quelle di  $H$

$$|t\rangle = \sum_n \beta_n^*(t) |n\rangle \quad \text{con} \quad \beta_n(t) = \langle t|n\rangle \quad x_\alpha |t\rangle = x_t^{(\alpha)*} |t\rangle \quad (1.64)$$

Il passo successivo è quello di passare da questa descrizione intermedia a quella finale, ovvero esprimere gli operatori e gli autostati in *rappresentazione E*. Per farlo definiamo la quantità sottostante in cui il termine che precede l'integrale è giustificato dalla necessità di verificare la condizione di normalizzazione:

$$C_n(E) = e^{l_0 E^{\frac{1}{2} - l_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{iEt} \beta_n(t) \quad \text{con} \quad \sum_n C_n(E) C_n^*(E') = \delta(E - E') \quad (1.65)$$

Questa nuova formulazione permette, in maniera analoga a quanto fatto precedentemente, di esprimere i tre generatori in funzione del parametro che definisce la rappresentazione ( $E$  in questo caso) e di scrivere la loro azione sulle funzioni  $C_n(E)$ :

$$H \rightarrow X_E^{(-)} = E \quad D \rightarrow X_E^3 = -i \left( E \frac{d}{dE} + \frac{1}{2} \right) \quad K \rightarrow X_E^{(+)} = -E \frac{d^2}{dE^2} - \frac{d}{dE} + \left( l_0 - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{1}{E} \quad (1.66)$$

$$x_E^\alpha C_n(E) = \gamma_{n,n'}^\alpha C_{n'}(E) \quad (1.67)$$

Per terminare dobbiamo determinare espressioni esplicite per le funzioni  $C_n(E)$ ; per farlo possiamo risolvere la trasformata di Fourier 1.65 oppure, come faremo, risolvere direttamente l'equazione agli autovalori di  $L_0$  in questa rappresentazione.

$$L_0 C_n(E) = \frac{1}{2} \left( E + \left( l_0 - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{E} - \frac{d}{dE} - E \frac{d^2}{dE^2} \right) C_n(E) = l_n C_n(E) \quad (1.68)$$

<sup>13</sup>Per determinare i coefficienti  $C_\pm$  è stata presa la radice quadrata di 1.54 e l'equazione associata per  $L_+$ .

A questo punto, definendo

$$C_n(E) = e^{l_0} E^{l_0 - \frac{1}{2}} e^{-E} \varphi(E) \quad (1.69)$$

troviamo che le funzioni  $\varphi(E)$  soddisfano le equazioni differenziali per i polinomi di Laguerre,<sup>14</sup> pertanto, tenendo conto della condizione di ortonormalità, abbiamo

$$C_n(E) = 2^{l_0} \sqrt{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2l_0)}} \frac{(aE)^{l_0}}{\sqrt{E}} e^{-aE} L_n^{2l_0-1}(2aE) \quad E > 0 \quad (1.70)$$

Grazie a questa discussione possiamo ora definire gli autostati dell'energia in due formulazioni equivalenti, rispettivamente espressi rispetto alla base della rappresentazione  $t$  e  $x$ ; questa derivazione garantisce inoltre la consistenza dell'equazione agli autovalori e la correttezza delle relazioni di ortonormalità e di completezza.

$$|E\rangle = 2^{l_0} E^{\frac{1}{2}-l_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-itE} |t\rangle \quad |E\rangle = \sum_n C_n^*(E) |n\rangle \quad (1.71)$$

$$H|E\rangle = E|E\rangle \quad \langle E|E'\rangle = \delta(E-E') \quad \int_0^{+\infty} dE |E\rangle \langle E| = 1. \quad (1.72)$$

In conclusione possiamo trarre alcune informazioni da queste relazioni: per prima cosa la formulazione così definita ci permette di identificare  $\rho_n(E) = |C_n(E)|^2$  come la probabilità di trovare un valore di energia compreso tra  $E$  e  $E+dE$  se si effettua una misura; secondariamente possiamo effettuare alcune osservazioni sul sistema nello stato fondamentale, analizziamo cioè solo la situazione in cui  $n=0$ . In questo caso la probabilità  $\rho_0(E)$  mostra un massimo in funzione di  $l_0$  con corrispondente larghezza

$$E_0 = \left(l_0 - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{a}; \quad (1.73)$$

possiamo inoltre calcolare il valor medio e la deviazione quadratica media che risultano essere pari a<sup>15</sup>

$$\langle H \rangle_0 = \frac{l_0}{a} \quad (\Delta E)^2 \equiv \langle H^2 \rangle_0 - \langle H \rangle_0^2 = \frac{l_0^2}{2a^2}. \quad (1.74)$$

Concludiamo ora l'analisi: a partire dai risultati emersi in 1.71 abbiamo dimostrato come il sistema non possa essere in un autostato dell'energia se è confinato nel tempo, escludendo la situazione banale. Nonostante ciò la densità di probabilità mostra un massimo ad  $E_0$  e, a causa dell'esponenziale decrescente presente in 1.70, è altamente improbabile che l'energia che si troverebbe se si effettuasse una misura si discosti eccessivamente da questo valore, pertanto il sistema può essere descritto come uno stato *risonante* la cui posizione del massimo dipende dalle costanti  $a$  e  $g$ , quest'ultima in quanto funzione di  $l_0$ . Studiamo infine i due limiti del parametro  $a$ : per  $a \rightarrow 0$  si ha  $L_0 \propto K$  e  $\Delta E \rightarrow \infty$ , ovvero una distribuzione dell'energia che non presenta alcun picco; per  $a \rightarrow \infty$   $L_0 \propto H$  e  $E_0 \rightarrow 0$ , cioè la distribuzione di probabilità si comporta come nel caso di uno stato stazionario ad energia nulla.

### 1.3.6 Sistemi ad N particelle

Consideriamo il sistema di  $N$  particelle caratterizzato dalla seguente Hamiltoniana<sup>16</sup>

$$H = \frac{1}{2} P_a^\dagger g^{ab} P_b + V(X) \quad (1.75)$$

dove  $a, b = 1, \dots, N$  e il momento  $P_a$  è definito generalizzando quello canonico ad uno spazio descritto dal tensore metrico  $g$ ; si hanno dunque le seguenti condizioni:

$$P_a = g_{ab} \dot{X}^b = -i\partial_a \quad \text{con} \quad [P_a, X^b] = -i\delta_a^b \quad [P_a, P_b] = 0 \quad (1.76)$$

<sup>14</sup>Le equazioni differenziali considerate sono della forma  $2E\varphi_n'' + (2r_0 - 2E)\varphi_n' + 2E\varphi_n = 0$ .

<sup>15</sup>I calcoli sono riportati in 1.6.4.

<sup>16</sup>In questa sezione si utilizzerà la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti.

Introduciamo ora una *norma*  $(f_1, f_2)$  a partire dalla quale è possibile definire l'operatore momento aggiunto  $P_a^\dagger$  secondo due diverse formulazioni, una in funzione del determinante della matrice associata alla metrica  $\sqrt{g} = \sqrt{|detg|}$  e l'altra in termini dei simboli di Christoffel  $\Gamma_{ab}^c$  della connessione; l'equivalenza tra le due formulazione è dimostrata in 1.6.5.<sup>17</sup>

$$(f_1, f_2) = \int d^N X \sqrt{g} f_1^* f_2 \quad P_a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{g}} P_a \sqrt{g} = P_a - i\Gamma_{ba}^c \quad (1.77)$$

Osserviamo infine che, se applicata ad una funzione d'onda  $\Psi(X)$ , la parte cinetica dell'Hamiltoniana agisce secondo la generalizzazione dell'operatore di *Laplace-Beltrami*.

$$\begin{aligned} H\Psi &= \left( \frac{1}{2} P_a^\dagger g^{ab} P_b + V(X) \right) \Psi = \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} (-i\partial_a) \sqrt{g} g^{ab} (-i\partial_b) + V(X) \right) \Psi \\ &= \left( -\frac{\nabla^2}{2} + V(X) \right) \Psi(X) \end{aligned} \quad (1.78)$$

Cerchiamo ora i vincoli sotto i quali un generico sistema quantistico ad  $N$  particelle ammette una simmetria sotto l'algebra  $sl(2, \mathbb{R})$ , ovvero determiniamo sotto quali condizioni sia possibile definire una generalizzazione degli operatori  $D$  e  $K$  che soddisfino le relazioni di commutazioni caratteristiche, ovvero:

$$[D, H] = -iH \quad [D, K] = iK \quad [H, K] = 2iD \quad (1.79)$$

Partiamo dall'operatore  $D$  che caratterizza le dilatazioni e ipotizziamo che esso sia definito dall'operatore autoaggiunto sottoriportato;

$$D = -\frac{1}{4} D^a P_a - \frac{1}{4} P_a^\dagger D^a \quad (1.80)$$

Prima di procedere al calcolo esplicito del commutatore con l'Hamiltoniana risulta utile riscrivere l'operatore appena introdotto, in termini della connessione  $\nabla$ ; per fare ciò utilizziamo la seconda formulazione dell'operatore momento aggiunto 1.77 e il fatto che  $[P_a, D^a] = -i\partial_a D^a$  in quanto  $D^a$  rappresenta una funzione  $\mathcal{C}^\infty$  e pertanto il commutatore si riduce all'applicazione dell'operatore a quest'ultima:

$$\begin{aligned} D &= -\frac{1}{4} D^a P_a - \frac{1}{4} (P_a - i\Gamma_{ba}^c) D^a = -\frac{1}{2} D^a P_a - \frac{1}{4} ([P_a, D^a] - i\Gamma_{ba}^c D^a) \\ &= \frac{i}{2} D^a \partial_a + \frac{i}{4} \nabla_a D^a \end{aligned} \quad (1.81)$$

A questo punto è possibile calcolare il commutatore che risulta essere definito in funzione della derivata di Lie  $\mathcal{L}_D$ :

$$[D, H] = -\frac{i}{4} P_a^\dagger (\mathcal{L}_D g^{ab}) P_b + \frac{i}{8} \nabla^2 \nabla_a D^a - \frac{i}{2} \mathcal{L}_D V; \quad (1.82)$$

il primo termine è dato dalla generalizzazione della relazione che intercorre tra derivata di Lie e commutatori, il secondo deriva dall'applicazione dell'operatore di Laplace-Beltrami al secondo addendo di 1.81 che rappresenta una funzione, mentre l'ultimo è l'applicazione dell'operatore  $D$  ad un generico potenziale  $V(X)$ .<sup>18</sup> Dal confronto col commutatore  $[D, H] = -iH$  emergono le seguenti condizioni:

$$\mathcal{L}_D g_{ab} = 2g_{ab} \quad \mathcal{L}_D V = -2V \quad (1.83)$$

Un campo vettoriale per il quale vale in generale  $\mathcal{L}_D g_{ab} = 2C(X)g_{ab}$  con  $C(X)$  funzione della posizione è detto *vettore di Killing conforme*; nel nostro caso  $C(X) = 1$  è costante, pertanto il campo vettoriale corrispondente viene detto campo vettoriale *omotetico* e la corrispondente azione  $D$  è detta *omotetia*. Fisicamente l'esistenza di un campo vettoriale con tali proprietà corrisponde al fatto di avere, lungo le sue curve integrali, il tensore metrico che varia solamente in modulo tramite un fattore costante.

<sup>17</sup>Nell'intera sezione si considera la connessione di *Levi-Civita* che rappresenta l'unica connessione priva di torsione e compatibile con la metrica.

<sup>18</sup>Riportiamo l'espressione della derivata di Lie  $\mathcal{L}_D g^{ab} = D^c \partial_c g^{ab} - g^{cb} \partial_c D^a - g^{ac} \partial_c D^b$ .

Possiamo inoltre notare come sembrerebbe esserci una terza condizione per l'operatore  $D$ , cioè  $\nabla^2 \nabla_a D^a = 0$ ; essa tuttavia è diretta conseguenza della prima condizione ottenuta in 1.83. Per vederlo riscriviamo la condizione sulla derivata di Lie nel seguente modo<sup>19</sup>

$$\mathcal{L}_D g_{ab} = \nabla_a D_b + \nabla_b D_a = 2g_{ab} \quad (1.84)$$

a questo punto possiamo applicare ad ambo i membri la matrice inversa della metrica  $g^{ab}$  in modo da "alzare" l'indice della connessione e, considerando che  $g_{ab}g^{ab} = N$ , otteniamo  $2\nabla^a D_a = 2N$ . A questo punto applicando l'operatore di Laplace-Beltrami ad entrambi i membri otteniamo il risultato cercato. Dobbiamo cercare, infine, un operatore  $K = K(X)$ , generatore delle trasformazioni conformi speciali, che soddisfi

$$[D, K] = iK \quad \text{e} \quad [H, K] = 2iD \quad (1.85)$$

Ipotizziamo che  $K$  sia definito come la norma di  $D$  e dimostriamo che esso soddisfa le condizioni sui commutatori.

$$K = \frac{1}{2} g_{ab} D^a D^b \quad (1.86)$$

Per prima cosa consideriamo l'applicazione di  $D$  nella formulazione 1.81 ad una funzione d'onda generica  $\psi(X)$  e successivamente effettuiamo la stessa operazione con il commutatore  $[H, K]$ , considerando solamente la parte dell'Hamiltoniana proporzionale all'operatore di Laplace-Beltrami in quanto l'altra commuta con l'operatore  $K$ .

$$2iD = -D^a \partial_a \psi - \frac{1}{4} \nabla_a D^a \psi \quad (1.87)$$

$$\begin{aligned} [H, K] \psi &= -\frac{1}{2} \nabla^a \nabla_a (K\psi) + \frac{1}{2} K \nabla^2 \psi \\ &= -\frac{1}{2} (\nabla^a \nabla_a K\psi + 2\nabla^a K \partial_a \psi + K \nabla^2 \psi) + \frac{1}{2} K \nabla^2 \psi \\ &= -\nabla^a K \partial_a \psi - \frac{1}{2} \nabla^a \nabla_a K\psi \end{aligned} \quad (1.88)$$

Richiediamo ora che i due risultati siano equivalenti, ottenendo un vincolo che lega i due operatori, cioè  $D^a = \nabla^a K$ ; la seconda relazione, ovvero  $\nabla_a \nabla^a K = \nabla_a D^a$  discende dalla prima tramite l'applicazione della connessione. La correttezza di questa discende dalla simmetria del tensore metrico, dalla relazione  $g_{ac}g^{bc} = \delta_a^b$  e dalla definizione 1.84; infatti si ha:

$$\nabla_a K = g^{bc} \nabla_a (D_b D_c) = \frac{1}{2} g^{bc} (\nabla_a D_b) D_c = D_a \quad (1.89)$$

Verifichiamo ora l'altro commutatore, considerando per  $D$  solo il primo addendo riportato in 1.81 in quanto l'altro commuta con  $K$  e utilizzando la prima condizione su  $D$  in 1.83:

$$[D, K] = \frac{i}{4} (D^c \partial_c) (g_{ab} D^a D^b) - \frac{i}{4} (g_{ab} D^a D^b) (D^c \partial_c) = \frac{i}{4} (D^c \partial_c g_{ab} + g_{ac} \partial_b D^c + g_{cb} \partial_a D^c) = iK \quad (1.90)$$

## 1.4 Rinormalizzazione

In questa sezione considereremo inizialmente il caso  $g < -1/4$  e studieremo le proprietà del sistema in funzione di questa scelta; nello specifico utilizzeremo una procedura analoga a quella di rinormalizzazione per ottenere un valore finito per lo stato fondamentale dell'energia, mentre in seguito studieremo gli stati non legati del sistema. Mostreremo, infine, come sia possibile ottenere risultati analoghi a quelli discussi nella sezione precedente in relazione al caso di  $g \geq -1/4$ .

<sup>19</sup>L'equivalenza delle due formulazioni discende dall'espressione esplicita dei simboli di Christoffel riportata in 1.6.5.

### 1.4.1 Funzione $\beta$ di rinormalizzazione

Introduciamo il parametro  $\alpha = -g$  e ridefiniamo il problema in modo da ottenere uno stato fondamentale *finito* per l'energia; per farlo procediamo seguendo il processo di *rinormalizzazione di Wilson*. Come prima cosa poniamo  $\alpha = \mu^2 + 1/4$  e introduciamo un parametro di *cut-off*  $a > 0$  di cui è funzione  $\alpha$ ; questa introduzione è necessaria in quanto il problema presenta una divergenza del tipo  $1/x^2$  nel limite  $x \rightarrow 0$  che non permette una trattazione analoga a quella di problemi con divergenze più deboli, come il caso  $1/x$ . Si osservi come l'introduzione di questo parametro di cut-off, necessario per ottenere uno stato finito come verrà dimostrato in seguito, *rompa* l'invarianza conforme del sistema; ciò è dovuto al fatto che il sistema non risulta più invariante di scala (e dunque a maggior ragione invariante conforme) a causa di una scala specifica determinata da  $a$ . Questo è un esempio di *anomalia quantistica*. Definiamo l'Hamiltoniana  $H' = 2H$  che avrà come dominio le funzioni lisce in  $[a, +\infty]$  e modifichiamo le condizioni al contorno in funzione del cut-off data da  $\psi(a) = 0$ :<sup>20</sup>

$$H' = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\alpha(a)}{x^2} \quad (1.91)$$

Consideriamo ora il problema agli autovalori per lo stato fondamentale in modo da determinare la dipendenza  $\alpha(a)$ , richiedendo che il *ground state* sia indipendente da  $a$ . Utilizziamo la sostituzione  $z = \kappa a$  per ottenere l'equazione differenziale del secondo ordine sottoriportata.

$$H\psi = E_1\psi = -\kappa^2\psi \quad (1.92)$$

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \left( \frac{\mu^2 + 1/4}{z^2} - 1 \right) \psi = 0 \quad (1.93)$$

La soluzione generale di questa equazione comprende una combinazione lineare di termini proporzionali alla funzione di Bessel modificata del primo ( $I_{i\mu}(z)$ ) e del secondo tipo ( $K_{i\mu}(z)$ ); si ha tuttavia che  $I_{i\mu}(z)$  diverge nel limite  $z \rightarrow +\infty$  in quanto proporzionale a  $e^z$ . Di conseguenza, col fine studiare gli autostati *normalizzabili*, prenderemo in considerazione una soluzione del tipo  $\psi(z) = A\sqrt{z}K_{i\mu}(z)$ .<sup>21</sup> Per determinare i livelli energetici consideriamo il comportamento della funzione di Bessel nei limiti  $z \rightarrow 0$  e  $\mu \rightarrow 0$  e, in questo limite, determiniamo i valori  $z_n$  che soddisfano la condizione al contorno data da  $K_{i\mu}(z) = 0$ . L'approssimazione della funzione è ottenuta da quella per piccoli valori di  $z$  riportata in 1.6.6 a cui è stato applicato il limite sul parametro  $\mu$  per il quale abbiamo che  $\arg(\Gamma + i\mu) \approx -\gamma\mu$ , dove  $\gamma$  indica la costante di *Eulero-Mascheroni*.<sup>22</sup> Alla determinazione dei valori  $z_n$  consegue quella dei possibili valori dell'energia dalla relazione  $E_n = -\kappa^2 = -z_n^2/a^2$ :

$$K_{i\mu}(z) \approx B \left( \mu \ln \left( \frac{z}{2} \right) + \mu\gamma \right) = 0 \quad z_n = e^{-n\pi/\mu} (2e^{-\gamma}) [1 + O(\mu)] \quad (1.94)$$

$$E_n = e^{-2n\pi/\mu} \left( \frac{2}{ae^\gamma} \right)^2 [1 + O(\mu)] \quad (1.95)$$

Osserviamo ora che se prendessimo il limite  $a \rightarrow 0$  mantenendo fisso  $\mu$  troveremmo stati di energia che tenderebbero a  $-\infty$ , com'era prevedibile dalla formulazione iniziale del problema. Definiamo dunque  $\mu(a)$  in funzione del parametro di cut-off e studiamone la dipendenza con la condizione di avere lo stato fondamentale  $E_1$  indipendente da  $a$  nel limite  $a \rightarrow 0$ . Per fare ciò occorre introdurre la funzione  $\beta$  di rinormalizzazione che valuta la variazione di  $\mu$  al variare del parametro di cut-off. Questa formulazione può essere vista come un richiamo al procedimento di rinormalizzazione utilizzato in teoria dei campi in cui  $a$  determina la scala di energia (di lunghezza nel caso specifico) considerata, mentre  $\mu$  costituisce l'equivalente della costante di accoppiamento della teoria.

$$\beta(\mu) = -a \frac{d\mu}{da} \quad (1.96)$$

<sup>20</sup>Nel seguito la nuova Hamiltoniana verrà indicata con il simbolo  $H$  per semplicità.

<sup>21</sup>Per maggiori informazioni sulle funzioni di Bessel e le loro stime sotto opportuni limiti si rimanda a 1.6.6.

<sup>22</sup>la costante di *Eulero-Mascheroni* vale  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$ .

Per determinare  $\beta$  imponiamo l'indipendenza dello stato fondamentale da  $a$ , ovvero imponiamo la condizione di annullamento alla sua derivata; nello specifico, sfruttando la regola di derivazione della funzione composta  $\mu(a)$ :

$$a \frac{dE_1}{da} = C \left( -2 + \frac{2\pi a}{\mu^2} \right) = C \left( -2 - \frac{2\pi}{\mu^2} \beta \right) = 0 \quad \text{con} \quad C = \left( \frac{2}{ae^\gamma} \right)^2 e^{-2\pi/\mu} \quad (1.97)$$

dalla quale si ricava che per piccoli valori di  $\mu$  la funzione  $\beta$  assume il valore  $\beta(\mu) = -\mu^2/\pi$  che, come ci si aspettava, si annulla a  $\mu = 0$ , cioè a  $\alpha = 1/4$ . Nello specifico si può osservare, in analogia con quanto avviene in teoria dei campi, che questo problema presenta l'equivalente di un *polo di Landau*, ovvero una costante di accoppiamento che diverge quando si considera un limite finito del momento o della posizione in questo caso; il procedimento applicato è risultato coerente grazie al fatto che il problema presenta un punto fisso ultravioletto (cioè a scale basse di lunghezza), ancora una volta in analogia con quanto avviene in QFT.

### 1.4.2 Stati non legati

Per completare l'analisi del sistema studiamo le autofunzioni non normalizzabili che descrivono gli stati *non legati* del sistema, ovvero quelli per cui si ha  $E = k^2 > 0$ ; inizialmente non introduciamo alcun parametro di cut-off. In questo caso otteniamo dall'equazione agli autovalori la seguente ODE:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \left( \frac{\mu^2 + 1/4}{z^2} + 1 \right) \psi = 0 \quad \text{con} \quad z = kx \quad (1.98)$$

La soluzione è una combinazione lineare delle funzioni di *Hankel*  $\psi(z) = \sqrt{z}(AH_{i\mu}^{(2)}(z) + BH_{i\mu}^{(1)}(z))$ , dove  $A$  e  $B$  sono due costanti da determinare; consideriamo ora le stime asintotiche di queste funzioni per grandi valori di  $x$  (si veda 1.6.6) ed esprimiamo la funzione d'onda in termini del numero d'onda  $k$ , ottenendo quanto segue:

$$\psi_k(x) \approx A \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-\pi\mu/2} e^{i\pi/4} \left( e^{-ikx} - i \frac{B}{A} e^{\pi\mu} e^{ikx} \right) \quad (1.99)$$

Questa espressione contiene due addendi distinti: il primo, proporzionale a  $e^{-ikx}$ , rappresenta un'onda *incidente*, mentre il secondo, associato a  $e^{ikx}$ , l'onda *riflessa*.

A questo punto in teoria si potrebbero determinare le costanti  $A$  e  $B$ , imponendo la condizione al contorno  $\psi(0) = 0$  e si otterrebbe una stima asintotica del tipo

$$\psi_k(x) \approx e^{-ikx} - e^{i(2\delta+kx)} \quad (1.100)$$

che descrive un'onda riflessa della stessa ampiezza di quella incidente, traslata di una fase pari a  $\delta(k)$ . Ciò tuttavia non risulta essere un procedimento in grado di fornire risultati in quanto la condizione al contorno imposta a 1.99 risulta, dalla definizione delle funzioni di Hankel, automaticamente soddisfatta (si veda la seconda stima in 1.6.6); questo comporta un'impossibilità di ottenere vincoli su  $B$  e un'espressione esplicita per la variazione di fase  $\delta(k)$ .

Consideriamo dunque come nel caso precedente l'introduzione di un parametro di cut-off  $a$  a causa del quale la condizione al contorno diviene  $\psi(ka) = 0$ . A questo punto possiamo determinare il rapporto  $B/A$  applicando quest'ultima alla soluzione generale dell'equazione differenziale e poi inserire quanto ottenuto nella stima asintotica in modo da determinare esplicitamente la variazione di fase; per fare ciò consideriamo la relazione che intercorre tra le due funzioni di Hankel ricavata a partire dalle stime asintotiche:  $H_{i\mu}^{(2)}(x) = H_{-i\mu}^{(1)}(x)^* = H_{i\mu}^{(1)}(x)^* \exp(-\pi\mu)$ ; otteniamo dunque:<sup>23</sup>

$$\frac{B}{A} = -\frac{H_{i\mu}^{(2)}(ka)}{H_{i\mu}^{(1)}(ka)} \quad e^{2i\delta} = i \frac{B}{A} e^{\pi\mu} = -i \frac{H_{i\mu}^{(2)}(ka)}{H_{i\mu}^{(1)}(ka)} e^{\pi\mu} = -i \frac{H_{i\mu}^{(1)}(ka)^*}{H_{i\mu}^{(1)}(ka)} \quad (1.101)$$

<sup>23</sup>Riportiamo la definizione di logaritmo complesso  $\ln(z) = \ln(|z|) + i \arg(z)$  che è stata utilizzata per ricavare  $\delta$ .

$$\delta = -\arg(H_{i\mu}^{(1)}(ka)) - \frac{\pi}{4} \quad (1.102)$$

Studiamo ora il comportamento della variazione di fase nel limite  $ka \ll 1$  e per fare ciò ricorriamo all'espressione della funzione di Hankel in questo limite riportata in 1.6.6; a partire da essa otteniamo un'espressione per  $\tan(\arg(H_{i\mu}^{(1)}(ka)))$  e di conseguenza per  $\tan \delta$ , sfruttando la proprietà di tangente di una somma di angoli e moltiplicando e dividendo il risultato per  $(-\tanh \pi\mu/2)$ :

$$\begin{aligned} \tan(\arg(H_{i\mu}^{(1)}(ka))) &\approx \coth \frac{\pi\mu}{2} \tan(\mu \ln(z/2) - \arg \Gamma(1 + i\mu)) \\ \tan \delta &\approx \frac{\tan \chi + \tanh \pi\mu/2}{\tan \chi - \tanh \pi\mu/2} \end{aligned} \quad (1.103)$$

dove  $\chi = \mu \ln(ka/2) - \arg \Gamma(1 + i\mu)$ . A questo punto possiamo osservare che se  $ka \rightarrow 0$  la differenza di fase non possiede un limite ben definito; abbiamo infatti che  $\tan \chi$  fluttua indefinitamente in funzione dei valori che assume  $\chi$ . Per superare questo problema consideriamo il caso limite di  $\mu \rightarrow 0$  già valutato nella sezione precedente; anche in questo caso le approssimazioni delle funzioni, e di conseguenza della variazione di fase, risultano semplificate in funzione della costante di Eulero-Mascheroni; nello specifico abbiamo

$$H_{i\mu}^{(1)}(z) \approx 1 + \frac{2i}{\pi} \ln(\gamma z/2) \quad \tan(\arg H_{i\mu}^{(1)}(ka)) \approx 2 \ln(\gamma z/2)/\pi \quad (1.104)$$

$$\tan \delta \approx \frac{\ln(\gamma ka/2) + \pi/2}{\ln(\gamma ka/2) - \pi/2} \quad (1.105)$$

A questo punto possiamo sfruttare quanto ottenuto nella sezione precedente: per lo stato fondamentale dell'energia  $E_1$ , infatti, è stato richiesto di essere indipendente dalla scala a cui lo si considera, cioè indipendente da  $a$ . Utilizzando questo risultato e nello specifico il numero d'onda  $\kappa_1$  associato a questo livello energetico possiamo riscrivere la variazione di fase in termini solamente di  $k$ , eliminando la dipendenza di  $a$ . Ricaviamo dunque da 1.95  $\kappa_1 = a\sqrt{E_1}$ , esplicitiamo  $a$  e inseriamo quanto ottenuto in 1.105, ottenendo:

$$\tan \delta \approx \frac{\ln(k/\kappa_1) + \pi/2}{\ln(k/\kappa_1) - \pi/2} \quad (1.106)$$

Abbiamo ottenuto un'espressione dalla quale si può osservare come, nell'opportuno limite considerato in cui  $E_1$  non risulta dipendente da  $a$ , la variazione di fase risulta *indipendente* da  $\mu$ .

Come ultima verifica consideriamo il caso  $\alpha < 1/4$ ; per farlo definiamo  $\alpha = 1/4 - \nu^2$ . In questo modo l'equazione differenziale diventa

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \left( \frac{1/4 - \nu^2}{z^2} - 1 \right) \psi = 0 \quad (1.107)$$

e le sue soluzioni possono essere espresse analogamente a quanto fatto precedentemente come combinazione lineare delle funzioni di Hankel  $H_\nu^{(1)}(z)$  e  $H_\nu^{(2)}(z)$ . In maniera equivalente a quanto fatto prima calcoliamo la variazione di fase a partire dalle stime asintotiche, dove adesso la relazione tra le due funzioni di Hankel risulta essere  $H_\nu^{(1)} = -H_\nu^{(2)}$ ; abbiamo:

$$\psi_k(x) \approx A \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{i\pi\nu/2} e^{i\pi/4} \left( e^{-ikx} - i \frac{B}{A} e^{-i\pi\nu} e^{ikx} \right) \quad (1.108)$$

$$e^{2i\delta} = i e^{-i\pi\nu} \quad \delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\nu}{2} \quad (1.109)$$

Come ci aspettavamo questo risultato è *indipendente* dal numero d'onda  $k$  come conseguenza dell'invarianza di scala, che viene rotta nel caso  $\alpha > 1/4$ .

## 1.5 Conclusioni

Inizialmente è stato dimostrato come al variare della costante di accoppiamento  $g$  l'Hamiltoniana del sistema risulti ( $g \geq -1/4$ ) o meno ( $g < 1/4$ ) *limitata inferiormente*.

Nel primo caso è stata verificata l'invarianza del sistema sotto trasformazioni conformi ed è stato applicato il teorema di Noether nella sua forma debole al fine di ricavare i tre generatori  $H, D$  e  $K$  dell'algebra  $sl(2, \mathbb{R})$  e i corrispondenti commutatori sottoriportati.

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{g}{2x^2} \quad D = -\frac{1}{4}(px + xp) \quad K = \frac{1}{2}x^2 \quad (1.110)$$

$$[D, H] = -iH \quad [D, K] = iK \quad [H, K] = 2iD \quad (1.111)$$

In seguito si è visto come in questo caso e sotto l'ipotesi di esistenza di un autovalore  $E$  non nullo, l'Hamiltoniana presenti uno spettro *continuo*; è stata dunque riformulata la teoria in termini di nuove variabili e di un nuovo operatore di evoluzione temporale  $G = uH + vD + wK$  definito come combinazione lineare dei tre generatori.

Durante questa analisi, tuttavia, è emerso come solamente per determinati valori dei coefficienti della combinazione lineare sia possibile ottenere una formulazione consistente che permetta una descrizione completa dell'evoluzione temporale del sistema; questa classe di opportuni operatori, caratterizzati dall'avere  $\Delta = v^2 - 4uw < 0$ , presenta spettro *discreto* e autostati *normalizzabili*.

Tra di essi è stato selezionato quello corrispondente a  $\Delta = -1$ , denominato  $L_0$ , a cui sono stati affiancati gli operatori di innalzamento e abbassamento  $L_{\pm}$ ; è stato dunque dimostrato come anch'essi soddisfino le regole di commutazione dell'algebra  $sl(2, \mathbb{R})$  e, di conseguenza, è stato determinato l'operatore di Casimir dell'algebra  $L^2$ . Successivamente, data la commutatività di  $L_0$  e  $L^2$ , sono state determinate esplicitamente le autofunzioni comuni normalizzate che sono risultate essere proporzionali ai polinomi di Laguerre; tramite l'utilizzo di  $L_{\pm}$ , inoltre, sono stati ricavati anche gli autovalori. Si riportano di seguito le formule esplicite di  $L_0$  e  $L^2$ :

$$L_0 = \frac{1}{2} \left( aH + \frac{K}{a} \right) \quad L^2 = \frac{1}{2} \left\{ aH, \frac{K}{a} \right\} - D^2 = \frac{g}{4} - \frac{3}{16} \quad (1.112)$$

Successivamente, utilizzando la scrittura degli operatori in *rappresentazioni* diverse, sono stati messi in relazione gli autostati di  $L_0$  con quelli, generalizzati, di  $H$ , e sono stati analizzati i limiti  $a \rightarrow 0, +\infty$ .

Infine è stato considerato un sistema di  $N$  particelle immerso in uno spazio descritto dal tensore metrico  $g$  e caratterizzato da un potenziale  $V(X)$ ; sono state dunque determinate esplicitamente le formulazioni generalizzate degli operatori  $H, D$  e  $K$ , riportate di seguito, tali che siano soddisfatti i commutatori corrispondenti all'algebra  $sl(2, \mathbb{R})$ .

$$H = \frac{1}{2} P_a^\dagger g^{ab} P_b + V(X) \quad D = -\frac{1}{4} D^a P_a - \frac{1}{4} P_a^\dagger D^a \quad K = \frac{1}{2} g_{ab} D^a D^b \quad (1.113)$$

Nel secondo caso, invece, inizialmente è stata applicata la teoria della rinormalizzazione per ottenere uno stato fondamentale per l'energia; questo procedimento ha portato alla determinazione esplicita della funzione  $\beta = -\mu^2/\pi$  che permette di descrivere la variazione della costante della teoria,  $\mu$  in questo caso, al variare della scala di lunghezza.

Successivamente è stato studiato il caso di autostati non normalizzabili, determinando esplicitamente una formula per la tangente della variazione di fase  $\delta$  tra l'onda incidente e quella riflessa, utilizzando i risultati ottenuti precedentemente.

Infine è stato dimostrato come, nel caso  $g \geq -1/4$ , la variazione di fase sia *indipendente* dalla scala considerata, risultato che evidenzia il ritorno dell'invarianza conforme in accordo con quanto ottenuto nella sezione precedente.



## 1.6 Appendici

### 1.6.1 Costante di accoppiamento

1. **Dimostrazione di 1.6:** calcoliamo preliminarmente la derivata della funzione d'onda e il suo modulo quadro.

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(h_1(x)h_2(x)) + \sqrt{x}(h_1'(x)h_2(x) + h_1(x)h_2'(x)) \\ |\psi(x)'|^2 &= \frac{1}{4x}h_1^2h_2^2 + x(h_1'^2h_2^2 + h_1^2h_2'^2) + h_1h_1'h_2^2 + h_1^2h_2h_2' + 2\sqrt{x}h_1h_1'h_2h_2'\end{aligned}\tag{1.114}$$

Sfruttiamo ora il fatto che nell'intervallo  $[a, b]$  entrambe le funzioni  $h_{1,2}(x)$  siano uguali a 1 e osserviamo inoltre come  $h_1'(x)$  sia diversa da zero solamente tra  $a/2$  e  $a$ , mentre  $h_2'(x)$  solo tra  $b$  e  $2b$  che sono intervalli disgiunti per costruzione. Abbiamo dunque:

$$\begin{aligned}\frac{\int |\psi'(x)|^2 dx}{\int |\psi(x)|^2 x^{-2} dx} &\leq \frac{\int_a^b 1/(4x) dx + \int_{a/2}^a (h_1h_1' + xh_1'^2) dx + \int_b^{2b} (h_2h_2' + xh_2'^2) dx}{\int_a^b 1/x dx} \\ &\leq \frac{\ln(b/a)/4 + C}{\ln(b/a)}\end{aligned}\tag{1.115}$$

dove  $C$  comprende il secondo e il terzo integrale a numeratore che, nel limite considerato, mantengono al più un valore finito, ininfluente rispetto al termine proporzionale al logaritmo. Questo perché il limite  $b/a \rightarrow +\infty$  corrisponde ad avere  $b \rightarrow +\infty$ ,  $a \rightarrow 0$  o entrambe le condizioni; queste condizioni hanno la conseguenza di rendere identicamente nulla rispettivamente  $h_2'(x)$  e  $h_1'(x)$  e di conseguenza anche gli integrali ad esse proporzionali.

### 1.6.2 Gruppo conforme

1. **Invarianza dell'azione sotto trasformazioni conformi finite:** definiamo preliminarmente le trasformazioni del differenziale  $dt$  e delle velocità  $\dot{x}(t)$ , sfruttando le proprietà delle matrici  $M$  di avere determinante unitario e la formula della derivata di una funzione composta:

$$dt' = \left( \frac{\alpha}{\gamma t + \delta} - \frac{\gamma(\alpha t + \beta)}{(\gamma t + \delta)^2} \right) = \frac{1}{(\gamma t + \delta)^2} dt;\tag{1.116}$$

$$\dot{x}(t') = \frac{dx'(t')}{dt'} \frac{dt}{dt'} = (\gamma t + \delta)^2 \left( \frac{\dot{x}}{\gamma t + \delta} - \frac{x}{(\gamma t + \delta)^2} \right) = (\gamma t + \delta)\dot{x} - \gamma x.\tag{1.117}$$

Calcoliamo ora l'azione  $I'$  in funzione delle coordinate e delle variabili trasformate:

$$\begin{aligned}I' &= \int \frac{1}{(\gamma t + \delta)^2} dt \left( (\gamma t + \delta)^2 \dot{x}^2 + \gamma^2 x^2 - 2\gamma(\gamma t + \delta)x\dot{x} - \frac{g(\gamma t + \delta)^2}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int dt \left( \dot{x}^2 - \frac{g}{x^2} \right) + \int dt \frac{d}{dt} \left( -\frac{\gamma x^2}{2(\gamma t + \delta)} \right) \\ &= I + \int dt \frac{dK}{dt}\end{aligned}\tag{1.118}$$

che corrisponde al risultato cercato.

2. **Calcolo delle funzioni  $\Lambda$ :** per ognuna delle tre tipologie di trasformazioni verranno considerate le variazioni infinitesime in forma e verrà utilizzata l'espressione della variazione dell'azione 1.17.

(a) **Traslazioni:** date le variazioni  $\delta x = -a\dot{x}$  e  $\delta \dot{x} = -a\ddot{x}$ , abbiamo

$$\delta I = -a \int dt \left( \dot{x}\ddot{x} + g \frac{\dot{x}}{x^3} \right) = a \int dt \frac{d}{dt} \left( -\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{g}{2x^2} \right)\tag{1.119}$$

da cui segue  $\Lambda_{\text{traslazioni}} = -L$ ;

(b) Dilatazioni: abbiamo le variazioni  $\delta x = \frac{1}{2}bx - bt\dot{x}$  e  $\delta\dot{x} = -\frac{1}{2}b\dot{x} - bt\ddot{x}$  da cui discende

$$\delta I = b \int dt \left( -\frac{\dot{x}^2}{2} - t\dot{x}\ddot{x} + g \frac{x - 2t\dot{x}}{2x^3} \right) = b \int dt \frac{d}{dt} \left( -\frac{t\dot{x}^2}{2} + g \frac{t}{2x^2} \right) \quad (1.120)$$

a cui corrisponde  $\Lambda_{\text{dilatazioni}} = -tL$ ;

(c) Trasformazioni conformi speciali: descritte dalle variazioni  $\delta x = ct x - ct^2\dot{x}$  e  $\delta\dot{x} = -ct\dot{x} - ct^2\ddot{x} + \frac{1}{2}cx$  a cui corrisponde

$$\delta I = x \int dt \left( -t\dot{x}^2 - t^2\dot{x}\ddot{x} + x\dot{x} + g \frac{tx - t^2\dot{x}}{x^3} \right) = c \int dt \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{t^2\dot{x}^2}{2} + g \frac{t^2}{2x^2} \right) \quad (1.121)$$

cioè  $\Lambda_{\text{speciali}} = \frac{1}{2}x^2 - t^2L$ .

### 1.6.3 Integrali

1. **Caso  $\Delta > 0$ :** scomponiamo il denominatore in un prodotto di due fattori in funzione delle radici  $t_{1,2}$  e utilizziamo lo sviluppo in fratti semplici per ricondurci a integrali elementari; nello specifico risulta che  $A = -B$  e  $A = w/\sqrt{\Delta}$ . Infine utilizziamo la condizione di normalizzazione  $\tau(0) = 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} \int \frac{1}{(t-t_1)(t-t_2)} dt &= \frac{1}{w} \int \frac{A}{t-t_1} + \frac{B}{t-t_2} dt = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int \frac{1}{t-t_1} - \frac{1}{t-t_2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \frac{t-t_1}{t-t_2} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \frac{t_2(t-t_1)}{t_1(t-t_2)} \end{aligned} \quad (1.122)$$

2. **Caso  $\Delta < 0$ :** per ricondurci ad un integrale del tipo  $1/(1+ax^2)$  raccogliamo il coefficiente del termine di secondo grado, aggiungiamo e sottraiamo  $v^2/4w^2$  ed effettuiamo delle sostituzioni, ricordando che  $4uw - v^2 = -\Delta > 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} \int \left( t^2 + \frac{v}{w}t + \frac{u}{w} + \frac{v^2}{4w^2} - \frac{v^2}{4w^2} \right)^{-1} dt &= \frac{1}{w} \int \left( \frac{4uw - v^2}{4w^2} + \left( t + \frac{v}{2w} \right)^2 \right)^{-1} dt \\ &= \frac{1}{w} \int \left( \frac{4uw - v^2}{4w^2} + s^2 \right)^{-1} ds = \frac{4w}{-\Delta} \int \left( 1 + \frac{4w^2}{4uw - v^2} s^2 \right)^{-1} ds \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \\ &= \int \frac{1}{p^2 + 1} dp = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \left( \arctan \frac{2wt + v}{\sqrt{-\Delta}} - \arctan \frac{v}{\sqrt{-\Delta}} \right) \end{aligned} \quad (1.123)$$

3. **Caso  $\Delta = 0$ :** in questo caso occorre solamente scrivere il denominatore come  $w(t-t_0)^2$ , integrare questa funzione elementare e porre la condizione di normalizzazione.

$$\frac{1}{w} \int \frac{1}{(t-t_0)^2} dt = \frac{1}{w} \left( -\frac{1}{t-t_0} + \frac{1}{t_0} \right) \quad (1.124)$$

### 1.6.4 Rappresentazione dell'energia

In questa sezione dimostriamo i risultati finali del paragrafo 1.3.5. Partiamo dal fatto che, per  $n = 0$  i polinomi di Laguerre si riducono a  $+1$ ; calcoliamo dunque la derivata di  $\rho_0(E)$  rispetto all'energia e poniamola uguale a zero per trovare il minimo:

$$\frac{d\rho_0(E)}{dE} = K a^{2l_0} E^{2l_0-2} (-2aE + 2l_0 - 1) e^{-2aE} \quad (1.125)$$

che conduce al risultato cercato. Troviamo ora il valor medio dell'Hamiltoniana, sfruttando la rappresentazione in energia di quest'ultima, l'integrazione per parti che annulla il primo termine e la condizione di normalizzazione dei coefficienti  $C_0(E)$ :

$$\int_0^{+\infty} C_0^* H C_0 dE = K^2 \int_0^{+\infty} (aE)^{2l_0} e^{-2aE} dE = \frac{l_0}{a} K^2 \int_0^{+\infty} \frac{(aE)^{2l_0}}{E} e^{-2aE} dE = \frac{l_0}{a} \quad (1.126)$$

Analogamente si ritrova il risultato per la deviazione quadratica media, sfruttando una doppia integrazione per parti nel computo del valor medio di  $H^2$ .

### 1.6.5 Connessioni e metrica

1. **Operatore  $P^\dagger$** : Consideriamo l'operatore applicato ad una generica funzione d'onda  $\psi$

$$P_a^\dagger \psi = \frac{1}{\sqrt{g}} (-i\partial_a)(\sqrt{g}\psi) = -i\partial_a \psi - i\frac{1}{\sqrt{g}}(\partial_a \sqrt{g})\psi \quad (1.127)$$

occorre ora dimostrare che  $\Gamma_{ba}^b = (\partial_a \sqrt{g})/\sqrt{g}$ . Per fare ciò consideriamo la forma dei simboli di Christoffel sottoriportata in cui il primo e il terzo termine all'interno della parentesi si annullano grazie alla simmetria del tensore metrico e al fatto di poter rinominare gli indici in quanto muti; abbiamo dunque da dimostrare che

$$\Gamma_{ba}^b = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a \sqrt{g} = \frac{1}{2} g^{bc} \partial_a g_{cb} \quad \text{con} \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \quad (1.128)$$

Utilizziamo a questo proposito la proprietà del determinante di una matrice tale per cui  $\det g = \exp(\text{Tr}(\log g))$  grazie alla quale abbiamo:<sup>24</sup>

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_a \sqrt{\det g} &= \frac{1}{2(\det g)} \partial_a (\det g) = \frac{1}{2(\det g)} \partial_a e^{\text{Tr}(\log g)} \\ &= \frac{1}{2(\det g)} (\det g) \text{Tr}(\partial_a (\log g)) = \frac{1}{2} g^{bc} \partial_a g_{bc}. \end{aligned} \quad (1.129)$$

### 1.6.6 Rinormalizzazione

1. **Funzione di Bessel modificata del secondo tipo**: riportiamo di seguito l'approssimazione della funzione nei limiti  $z, \mu \rightarrow 0$ .

$$K_{i\mu}(z) \approx K \sin \left( \mu \ln \left( \frac{z}{2} \right) - \arg \Gamma(1 + i\mu) \right) \quad (1.130)$$

2. **Funzioni di Hankel**: riportiamo le stime asintotiche delle funzioni di Hankel prima per grandi valori di  $z$  e poi per  $|z| \ll 1$ :

$$\begin{aligned} H_{i\mu}^{(1,2)}(z) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi k z}} e^{\pm i(kz - \pi/4)} e^{\mp \pi\mu/2} \\ H_{i\mu}^{(1)}(z) &\approx e^{i\mu \ln(z/2)} \frac{1 + \coth \pi\mu}{\Gamma(1 + i\mu)} - e^{-i\mu \ln(z/2)} \frac{\Gamma(1 + i\mu)}{\pi\mu} \end{aligned} \quad (1.131)$$

<sup>24</sup> $\text{Tr}(x)$  indica la *traccia* di una matrice.



# Bibliografia

- [1] Abate M., Tovena F. (2011), "Geometria differenziale", Springer.
- [2] Banados M. e Reyes I. (2017), *A short review on Noether's theorems, gauge symmetries and boundary terms*
- [3] Britto-Pacumio R., Michelson J., Strominger A. e Volovich A. (2000), *Lectures on superconformal quantum mechanics and multi-black hole moduli spaces*.
- [4] De Alfaro V., Fubini S. e Furlan G. (1976), *Conformal invariance in quantum mechanics*.
- [5] Essin A.M. e Griffiths D.J (2006), *Quantum mechanics of the  $1/x^2$  potential*.
- [6] Fulton T., Rohrlich F., Witten L. (1962), *Conformal Invariance in Physics*.
- [7] Gaberdiel M.R. (1999), *An introduction to Conformal Field Theory*.
- [8] Gupta K.S. e Rajeev S.G. (1993), *Renormalization in quantum mechanics*.
- [9] Konishi K. e Paffuti G. (2012), "Meccanica quantistica: una nuova introduzione", Pisa University Press.
- [10] Molander E. (2015), *Quantum black holes and balanced metrics*.
- [11] Okazaki T. (2015), *Superconformal quantum mechanics from M2-branes*.
- [12] Schmidt F., *The Laplace-Beltrami operator on riemannian manifolds*.

## 1.7 Ringraziamenti

Innanzitutto vorrei ringraziare tutte quelle persone che mi hanno detto di essere "pazzo" per aver scelto questo corso di laurea, che hanno sussultato alla parola "fisica", ma che alla fine hanno sempre creduto che potessi farcela.

Ringrazio poi il mio relatore, il Professor Stefano Giusto, per avermi permesso di ampliare le mie conoscenze e di studiare e approfondire argomenti interessanti e stimolanti.

Ringrazio tutti i miei amici: ringrazio quelli che conosco da tanto tempo, più di vent'anni in certi casi, per essermi stati vicini in questi anni, aver deciso di trascorrere con me attimi della loro vita ed essere andati oltre la distanza geografica che ci separava; ringrazio quelli che ho incontrato all'inizio di questo percorso quando ero uno spaesato fuorisede e che, tra teatri, autobus, mense e aule studio hanno condiviso con me momenti felici e tristi della vita da aspirante fisico.

Ringrazio infine i miei genitori, senza i quali probabilmente non sarei arrivato fino a qua. Grazie per avermi sempre sostenuto e aiutato ad andare avanti nonostante tutto. Grazie per esserci sempre nonostante la distanza.

Grazie.