

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea

## Interferometri di materia per la rivelazione di onde gravitazionali

**Relatore**

Prof. Jean-Pierre Zendri

**Laureanda**

Laura Ravagnani

**Anno Accademico 2022/2023**



---

## Sommario

Nel prossimo decennio entrerà in funzione una rete di interferometri ottici terrestri e su satellite che permetteranno la rivelazione di onde gravitazionali nella banda di frequenze tra 1 mHz fino a qualche decina di kHz con sensibilità finora mai esplorate. Questo tipo di dispositivi non sono però in grado di coprire la regione di frequenze intorno all'Hz, lasciando un "buco" di sensibilità in una regione dove sono aspettati fenomeni astrofisici interessanti. Per ovviare a questo fenomeno sono stati proposti nuovi tipi di rivelatori basati sull'interferometria atomica. In questa tesi si vuole analizzare il principio di funzionamento di questi dispositivi, le sorgenti fisiche che ne limitano le prestazioni ed affrontare il calcolo della sensibilità prevista. Alla luce di queste considerazioni si descriverà lo stato dell'arte dei prototipi attualmente in costruzione.

# Indice

<b>1</b>	<b>Onde gravitazionali</b>	<b>1</b>
1.1	Introduzione . . . . .	1
1.2	Derivazione delle equazioni . . . . .	1
1.2.1	Soluzioni nel vuoto . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Sorgenti</b>	<b>3</b>
2.1	Range di frequenze . . . . .	3
2.2	Sorgenti nelle MF . . . . .	3
2.2.1	Fusione di IMBH . . . . .	4
2.2.2	Sistemi binari compatti . . . . .	4
2.2.3	Transizione di fase del primo ordine nell'universo primordiale . . . . .	4
2.2.4	Stringhe cosmiche . . . . .	5
2.3	Spettro di potenza in strain . . . . .	5
2.3.1	Strain caratteristico . . . . .	6
2.3.2	PSD . . . . .	7
2.4	Sorgenti di rumore per gli interferometri di materia . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Interferometri di materia</b>	<b>9</b>
3.1	Interazione radiazione-materia . . . . .	9
3.1.1	Hamiltoniana del sistema . . . . .	9
3.1.2	Autostati . . . . .	11
3.1.3	Oscillazioni di Rabi . . . . .	12
3.2	Apparato strumentale . . . . .	13
3.2.1	Interferometria Raman . . . . .	13
3.2.2	Differenza di fase indotta dal passaggio di una GW . . . . .	14
3.2.3	Configurazione a gradiometro . . . . .	17
3.2.4	Spettro di potenza . . . . .	17
3.2.5	Diffrazione di Bragg . . . . .	18
3.2.6	Raffreddamento degli atomi . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Stato dell'arte dell'interferometro <i>MIGA</i></b>	<b>23</b>
4.1	Lo strumento . . . . .	23
4.2	Sensibilità allo strain . . . . .	24
4.3	Proiezioni future . . . . .	24
	<b>Conclusioni</b>	<b>27</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>29</b>



# Capitolo 1

## Onde gravitazionali

### 1.1 Introduzione

Le onde gravitazionali (GWs) sono oscillazioni dello spazio-tempo che si propagano alla velocità della luce  $c$ . Esse sono state predette da Einstein nel 1916 come diretta conseguenza della sua *Teoria della Relatività Generale*, ma solo nel 1993 avvenne la prima conferma sperimentale diretta della loro esistenza. Sorgenti tipiche possono essere sistemi binari di stelle di neutroni o buchi neri che ruotano molto velocemente l'uno attorno all'altro, il Big Bang, la rotazione di stelle di neutroni non caratterizzate da simmetria sferica o ancora esplosioni di Supernovae.

Esse sono molto difficili da rivelare perchè, nonostante vengano prodotte da processi violenti, interagiscono debolmente con la materia.

### 1.2 Derivazione delle equazioni

Come illustrato in precedenza, le onde gravitazionali sono state teorizzate a partire dalle cosiddette *Equazioni di Einstein*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

ovvero da un sistema di 10 equazioni differenziali accoppiate e non lineari che mette in relazione le contrazioni del *tensore di curvatura*  $R_{\mu\nu\beta}^\alpha$ , ovvero  $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha$  e  $R = R^\alpha_\alpha$ , con il *tensore energia-impulso*  $T_{\mu\nu}$ . In particolare queste equazioni legano la curvatura dello spazio-tempo alla presenza di materia. Considerando campi gravitazionali deboli è possibile applicare l'approssimazione

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

che descrive il *tensore metrico*  $g_{\mu\nu}$  come somma del *tensore di Minkowski*  $\eta_{\mu\nu}$  e di una piccola perturbazione  $h_{\mu\nu}$ , con  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . In questo modo è possibile linearizzare le equazioni (1.1) e ottenere, nella *Gauge di Lorenz*  $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$ , le *equazioni delle onde gravitazionali*

$$\begin{cases} \square^2 \bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} \\ \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

dove  $\bar{h}^{\mu\nu} \equiv h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h^\alpha_\alpha$  è la *traccia inversa* di  $h^{\mu\nu}$ .

### 1.2.1 Soluzioni nel vuoto

Le soluzioni delle equazioni (1.3) sono onde piane, in particolare nel vuoto ( $T_{\mu\nu} = 0$ ) esse prendono la forma

$$\bar{h}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} \exp\{ik_{\sigma}x^{\sigma}\} \quad (1.4)$$

dove nelle coordinate *TT-Gauge* e per un'onda propagante in direzione  $z$

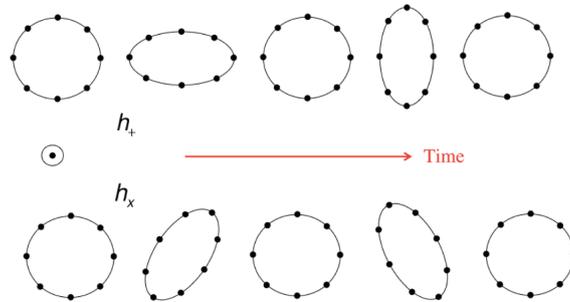
$$A_{TT}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Le soluzioni delle equazioni di Einstein per le onde gravitazionali come onde piane sono quindi determinate dai due parametri  $a$  e  $b$ . La (1.5) può essere riscritta come  $A_{TT}^{\mu\nu} = ae_1^{\mu\nu} + be_2^{\mu\nu}$ , dove

$$e_1^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_2^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

corrispondono a due diverse polarizzazioni dell'onda.

Esse si distinguono perchè producono effetti differenti sulla materia: considerando un anello di materia e un'onda che incide perpendicolarmente su di esso, se  $a \neq 0$  e  $b = 0$  questa causerà una deformazione come quella mostrata in Figura 1.1 in alto; nel caso  $a = 0$  e  $b \neq 0$  la deformazione appare come quella in basso. Proprio a causa della tipologia di deformazione queste polarizzazioni sono definite rispettivamente "+" e "×".



**Figura 1.1:** Deformazione indotta ad un anello di materia al passaggio di una GW in base al tipo di polarizzazione: "+" (in alto) e "×" (in basso).

È importante inoltre sottolineare che l'effetto dell'onda è trasversale alla direzione di propagazione, per cui non è prevista alcuna deformazione nella direzione ortogonale al piano dell'anello.

# Capitolo 2

## Sorgenti

### 2.1 Range di frequenze

Le onde gravitazionali possono essere divise in cinque principali regimi di frequenza: Extremely Low Frequency (ELF), Very Low Frequency (VLF), Low Frequency (LF), Middle Frequency (MF) e High Frequency (HF); ad ognuno di questi sono associate diverse tecniche di rivelazione, come mostrato nella Tabella 2.1.

	Frequenza (Hz)	Metodi di rivelazione
ELF	$10^{-16} - 10^{-15}$	Esperimenti attraverso fondo cosmico di microonde
VLF	$10^{-9} - 10^{-7}$	Rivelatori "pulsar timing"
LF	$10^{-7} - 0.1$	Doppler tracking, interferometria laser su satelliti
MF	$0.1 - 10$	Interferometria atomica, interferometria laser su satelliti
HF	$10 - 10^4$	Interferometria laser sulla Terra

**Tabella 2.1:** Riassunto dei principali regimi di frequenza delle onde gravitazionali e dei metodi di rivelazione ad essi associati.

Oltre agli esperimenti *LIGO* e *VIRGO*, che hanno portato alla prima rivelazione di onde gravitazionali di frequenza relativamente alta ( $\sim 10$  Hz), sono in corso studi su altri progetti, come l'interferometro *LISA*, per la rivelazione di onde con frequenza minore, intorno a  $10^{-2}$  Hz. È importante sottolineare la presenza di un *gap* nel range di frequenze sopraccitate: nessuno degli esperimenti nominati è infatti abbastanza risolutivo nelle MF; gli interferometri di materia, argomento di questa tesi, si propongono di andare a coprire questo range di frequenze.

Prima di procedere con lo studio di nuovi rivelatori è fondamentale verificare la presenza di sorgenti che emettano onde in questo range.

### 2.2 Sorgenti nelle MF

In questa sezione verranno presentate sorgenti che producono onde gravitazionali di media frequenza, le quali sono invisibili agli interferometri a laser utilizzati fino ad oggi, ma corrispondono alla fonte principale di GWs per strumenti basati sull'interferometria atomica [1], [2], [3].

### 2.2.1 Fusione di IMBH

Una delle possibili sorgenti di GWs di media frequenza sono gli IMBHs (Intermediate Mass Black Holes). È stato teorizzato che la massa di questi buchi neri assume un valore intermedio tra quella dei buchi neri stellari ( $\mathcal{O}(10M_{\odot})$ ) e quella dei buchi neri supermassicci (SMBHs) ( $\mathcal{O}(10^9M_{\odot})$ ), ma le prove della loro esistenza sono ancora esigue.

La loro scoperta potrebbe portare a sviluppi per quanto riguarda la conoscenza dei buchi neri supermassicci: la misura del *merging* di un sistema binario di IMBHs potrebbe provare qualora i SMBHs nascano dall'accrescimento di "semi" di buchi neri stellari molto massivi o di buchi neri di massa solare. Lo studio dello spettro di massa dei buchi neri è un aspetto cruciale per una migliore conoscenza del loro ruolo nella formazione delle galassie.

### 2.2.2 Sistemi binari compatti

L'osservazione di onde gravitazionali prodotte da sistemi binari compatti di nane bianche (WDs), stelle di neutroni (NSs) e buchi neri (BHs) potrebbe fornire nuovi dati utili in astrofisica ed in relatività generale: lo studio di questi sistemi è importante per determinare con più precisione le distanze astronomiche ed il rate di espansione dell'universo. Le supernovae di tipo Ia sono infatti uno dei principali indicatori secondari di distanza, ma la loro formazione è ancora ignota; le due principali ipotesi sono la fusione di due WDs o l'accrescimento di una WD da una compagna. L'osservazione di GW potrebbe portare ad una risposta: la presenza di una supernova e di GWs proverebbe la prima ipotesi, mentre l'assenza di queste ultime indicherebbe una formazione dovuta all'accrescimento di una WD da parte di una stella compagna.

I sistemi precedentemente elencati emettono onde gravitazionali la cui ampiezza di emissione vale circa

$$h \sim \frac{(GM_1)(GM_2)}{rR} \sim G\mu \frac{(GM\Omega)^{2/3}}{r} \quad (2.1)$$

dove  $M_{1,2}$  sono le masse dei componenti,  $M = M_1 + M_2$ ,  $\mu$  è la massa ridotta del sistema,  $\Omega$  è la frequenza orbitale,  $r$  è la distanza a cui si osserva l'onda e  $R$  il raggio del sistema.

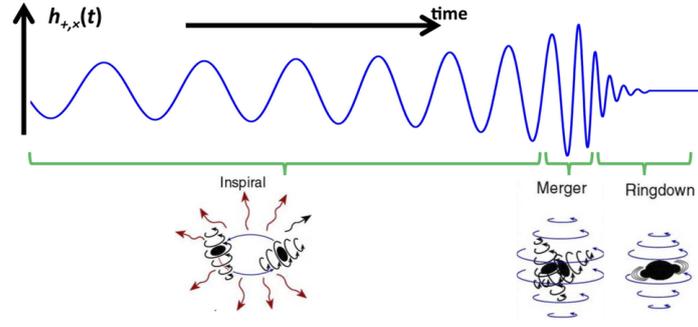
L'osservazione di queste onde è cruciale per localizzare sistemi binari compatti giorni o addirittura anni prima che avvenga il *merge*, rendendo più facile il posizionamento dei telescopi sulla Terra per studiarne la fusione. Aumentando il tempo di osservazione di questi eventi infatti, migliora anche la precisione con cui vengono localizzati gli oggetti nel cielo; per eventi relativamente vicini, essere a conoscenza della distanza e della posizione porta a maggiori informazioni sulla relazione tra la formazione di questi sistemi binari e le proprietà della galassia in cui si trovano.

Un'altra osservabile misurabile attraverso lo studio di onde gravitazionali di media frequenza è l'accelerazione del centro di massa di un sistema binario: se questa è sufficientemente elevata può produrre un *drift* nella fase delle GWs. Lo studio di questa accelerazione potrebbe, ad esempio, mostrare se il sistema in questione è isolato, oppure dimostrare la presenza di un terzo oggetto, o ancora se il sistema si trova in un ammasso globulare.

Poter osservare onde gravitazionali in questo range di frequenze è doppiamente vantaggioso: innanzitutto il numero di sorgenti di questo tipo è elevato; in secondo luogo un sistema binario che emette a frequenze medio-basse vive più a lungo e questo permette un maggior tempo di osservazione.

### 2.2.3 Transizione di fase del primo ordine nell'universo primordiale

La scoperta dell'espansione e raffreddamento dell'universo portò alla teoria dell'esistenza di materia ed energia oscura. I diversi risultati ottenuti dalla misurazione della *costante di Hubble*  $H_0$  però, indussero ad una modifica del modello finora teorizzato: la diminuzione della temperatura dell'universo avrebbe provocato la rottura della simmetria delle proprietà dello stesso, portando alla separazione tra la forza debole e quella elettromagnetica. Tali transizioni di fase del primo ordine avvengono con la formazione di *bolle* della nuova fase nel mezzo della vecchia fase, che si sviluppano a velocità prossime a quelle della luce  $c$  e collidono producendo onde gravitazionali .



**Figura 2.1:** Segnale di GW generato da un sistema binario. È possibile distinguere le fasi di *inspiral*, *fusione* e *ringdown*.

Grazie allo studio di queste onde si possono ottenere importanti informazioni sulla nascita e sviluppo dell'universo primordiale e sono codificate nel fondo stocastico di onde gravitazionali (SGWB): la scala energetica della rottura della simmetria elettrodebole corrisponde a temperature  $T \sim 100$  GeV e osservare segnale di SGWB corrispondente a questa transizione di fase potrebbe provare la teoria fisica *oltre il Modello Standard* a energie di 100 GeV.

La frequenza misurata di queste onde è data dalla frequenza con cui sono state prodotte, corretta con il valore del redshift  $z$ : il valore atteso per la transizione elettrodebole è di circa  $10^{-3}$  Hz, mentre transizioni di fase a temperature più elevate ed avvenute precedentemente producono onde con frequenze maggiori.

### 2.2.4 Stringhe cosmiche

Una delle principali sorgenti cosmologiche di GWs sono le stringhe cosmiche: sono state teorizzate come difetti topologici 1-dimensionali che si sono formati durante la fase di rottura di simmetria nell'universo primordiale. Esse emettono energia sotto forma di onde gravitazionali attraverso la loro vibrazione o tramite le loro *cuspidi* e *kink*. È possibile che le onde prodotte abbiano un'intensità maggiore rispetto al fondo stocastico, permettendo così la loro rivelazione.

## 2.3 Spettro di potenza in strain

Il principio di funzionamento di un interferometro è basato sul fatto che il passaggio di un'onda gravitazionale generi una deformazione dei bracci dello strumento. Questa deformazione viene definita *strain* e corrisponde alla variazione frazionaria della lunghezza che viene indotta, che è legata ad  $h$  come

$$h = \frac{\Delta L}{L} \quad (2.2)$$

Anche per le sorgenti astrofisiche più intense esso è un valore molto piccolo, tipicamente dell'ordine di  $10^{-22} - 10^{-21}$  sulla Terra, per questo motivo è necessario conoscere le fonti di rumore che affliggono i detector per progettare dei rivelatori che siano sensibili, nel range di frequenze interessato, a queste deformazioni.

Vengono utilizzati diversi approcci per studiare la curva di sensibilità di un detector e l'impatto di un'onda gravitazionale su di esso: i principali sono lo *strain caratteristico*  $h_{c,n}$  e la *densità spettrale di potenza* (PSD)  $S_{h,n}(f)$ .

Nella rivelazione di onde gravitazionali è utile poter visualizzare le componenti in frequenza del rumore cui è affetto il rivelatore, tenendo in considerazione che esso è un processo stocastico, per poter poi isolare il segnale interessato. L'output  $s(t)$  di un interferometro è in generale formato dalla sovrapposizione del rumore di fondo  $n(t)$  e del segnale creato dal passaggio dell'onda  $h(t)$  [4]:

$$s(t) = n(t) + h(t) \quad (2.3)$$

Assumiamo, per semplicità, che il rumore sia stazionario e gaussiano: sotto queste ipotesi esso può essere caratterizzato tramite la sua PSD

$$\langle \tilde{n}(f) \tilde{n}^*(f') \rangle = \frac{1}{2} \delta(f - f') S_n(f) \quad (2.4)$$

dove  $\tilde{n}(f)$  rappresenta la trasformata di Fourier del rumore

$$\tilde{n}(f) = \mathcal{F}\{n(t)\}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt n(t) e^{-2\pi i f t} \quad (2.5)$$

e le parentesi angolari indicano una media calcolata sull'ensemble. Avendo considerato uno spettro di rumore stazionario e stocastico, per il teorema ergodico, questa media è equivalente ad una media temporale. Per trovare la PSD del rumore quindi si procede misurando quest'ultimo per un periodo di tempo sufficientemente lungo  $T$  e calcolandone quindi la trasformata di Fourier  $\tilde{n}(f)$  con una risoluzione in frequenza  $\Delta f = T^{-1}$ .

Un vantaggio della PSD è che essa, se integrata in un range positivo di frequenze, restituisce la varianza

$$\overline{|n(t)|^2} = \int_0^{+\infty} df S_n(f) \quad (2.6)$$

Il problema principale nella rivelazione di onde gravitazionali è l'estrazione del segnale dal rumore di fondo del detector. Per ottimizzare questa operazione si filtra l'uscita del rivelatore con il filtro ottimo di Wiener  $K(t)$  e rispettiva trasformata  $\tilde{K}(f)$ , per cui

$$(s * K)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt [h(t) + n(t)] K(t - \tau) \sim \mathcal{S} + \mathcal{N} \quad (2.7)$$

e si cerca il valore di  $\tilde{K}(f)$  ideale in modo da massimizzare il rapporto segnale-rumore, che risulta essere

$$\tilde{K}(f) = \frac{\tilde{h}(f)}{S_n(f)} \quad (2.8)$$

Come si può notare, è necessario quindi conoscere a priori la forma del segnale  $\tilde{h}(f)$ .

### 2.3.1 Strain caratteristico

Lo strain caratteristico  $h_{c,n}$  esprime la deformazione del rivelatore causata dal passaggio di un'onda gravitazionale in funzione della frequenza della stessa. Lo strain legato al segnale dell'onda  $h_c$  è definito in base al tipo di sorgente, mentre quello del rumore,  $h_n$ , può essere definito come segue

$$[h_n(f)]^2 = f S_n(f) \quad (2.9)$$

e corrisponde alla radice della media quadratica del rumore nella banda  $f$ .

Rappresentando graficamente gli strain caratteristici di segnale e rumore è possibile avere un'immediata raffigurazione dei range di frequenza in cui un detector è particolarmente sensibile ad un certo tipo di sorgente, come si può osservare in Figura 2.2. In particolare, conoscendo lo strain caratteristico di un segnale atteso e lo strain del rumore di un detector, è facilmente ricavabile il rapporto tra segnale e rumore  $\varrho^2$  nel range di frequenze interessato [4]

$$\varrho^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} d(\log f) \left[ \frac{h_c(f)}{h_n(f)} \right]^2 \quad (2.10)$$

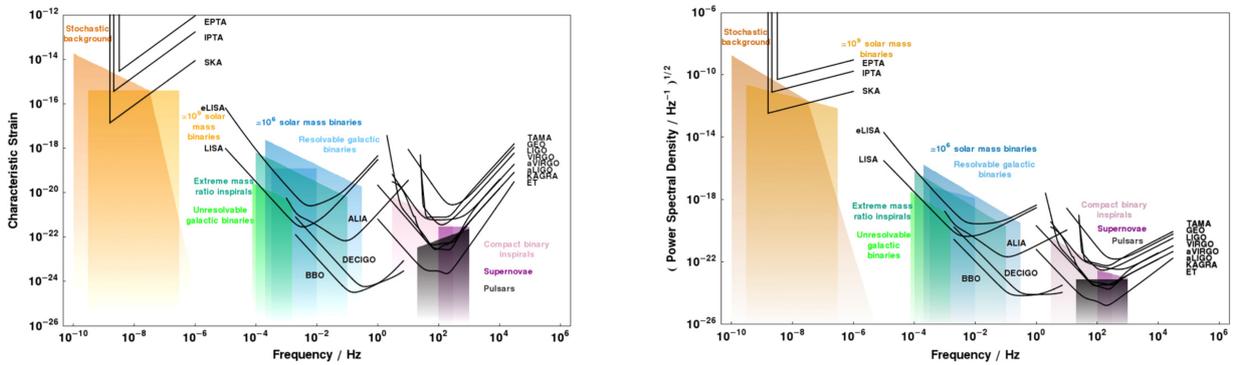
Il principale svantaggio nell'uso dello strain caratteristico è che il suo valore non è legato all'ampiezza delle onde che lo generano [4].

### 2.3.2 PSD

Similmente allo strain caratteristico, un'altra quantità altrettanto utilizzata è la radice quadrata della PSD, definita *densità spettrale di ampiezza*

$$\sqrt{S_n(f)} = h_n(f) f^{-1/2} \quad (2.11)$$

Essa è maggiormente utilizzata rispetto allo strain caratteristico in quanto, come mostrato nell'equazione (2.6), integrando la PSD in un range positivo di frequenze si ottiene il quadrato dell'ampiezza media del rumore nel detector. A differenza dello strain caratteristico però, se rappresentata graficamente in funzione della frequenza, non offre una figurazione del rapporto tra segnale e rumore [4].



**Figura 2.2:** Curve di sensibilità di diversi rivelatori e sorgenti in funzione della frequenza. Le curve sono rappresentate attraverso lo strain caratteristico (sinistra) e la densità spettrale di ampiezza (destra).

Come si può osservare dalla Figura 2.2 è presente un *gap* nel range di frequenze coperto dagli interferometri ottici terrestri attualmente in funzione come *LIGO* e *VIRGO* e su satellite come il progetto *LISA*, finanziato, ma non ancora in funzione. Questa regione di frequenze potrebbe essere coperta dagli interferometri atomici, argomento di questa tesi, oppure dai nuovi interferometri laser su satellite, come il progetto giapponese *DECIGO*.

## 2.4 Sorgenti di rumore per gli interferometri di materia

Il problema principale degli interferometri sono le fonti di rumore: esse diminuiscono di molto il range di frequenze sui cui questi strumenti possono lavorare, rendendoli insensibili per alcune sorgenti. Lo spettro di frequenze in cui sono sensibili gli interferometri a laser, infatti, presenta una regione vuota nelle MF, come presentato precedentemente.

Le sorgenti di rumore per gli interferometri atomici sono molteplici; di seguito si presentano le principali, la cui trattazione verrà approfondita nei capitoli successivi.

### Rumore sismico

Il rumore sismico è generato da movimenti del terreno dovuti per esempio a terremoti, vento, attività umane, etc. Il principio su cui si basano gli interferometri, sia atomici che ottici, è il seguente: si misurano le variazioni di distanza di due masse in caduta libera. Vibrazioni dovute al rumore sismico potrebbero portare a spostamenti di queste masse per cause non dovute al passaggio di un'onda gravitazionale. Nell'interferometria a laser le masse utilizzate sono specchi sospesi attraverso sistemi antisismici molto sofisticati, ma l'uso di atomi in caduta libera al posto degli specchi permette di ovviare la maggior parte dei problemi dovuti a questo tipo di rumore; l'unica parte sensibile a vibrazioni

di questo tipo, negli interferometri atomici, rimangono le cavità ottiche.

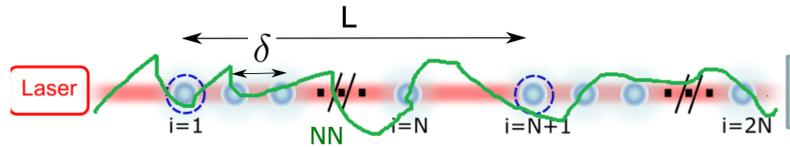
Un metodo utilizzato negli esperimenti di *LIGO* e *VIRGO* per isolare le masse di test da questo tipo di rumore è quello di sospendere le masse all'interno di un sistema di pendoli "a cascata" che attenua convenientemente le vibrazioni del terreno [5].

### Rumore newtoniano

Il rumore newtoniano è dovuto a fluttuazioni del campo gravitazionale locale, che possono generare una forza sulle masse di test causando una fase spuria nel rivelatore. Questo tipo di rumore ha componenti significative prevalentemente per frequenze al di sotto di qualche Hz ed è il principale fattore limitante della sensibilità degli interferometri ottici a bassa frequenza.

Le cause principali di questo tipo di rumore possono essere divise in due categorie: il movimento di masse vicino alle masse di test, oppure la variazione di densità del mezzo in cui si trova lo strumento. Al primo gruppo appartengono per esempio perturbazioni causate dall'attività umana o da processi geofisici, del secondo fanno parte invece perturbazioni dovute ad attività sismica o alla variazione della pressione atmosferica.

Per ridurre il più possibile questo tipo di rumore viene sfruttato il fatto che la lunghezza d'onda tipica di una GW con  $f \sim 1$  Hz è di circa  $3 \cdot 10^5$  km, a differenza della minore lunghezza di circa 1 km caratteristica del rumore newtoniano. Di conseguenza, utilizzando un array di interferometri atomici interrogati dallo stesso fascio laser è possibile abbattere il contributo del rumore newtoniano, come mostrato in Figura 2.3. In particolare in una configurazione a gradiometro con  $N$  interferometri è possibile ridurlo di un fattore  $\sqrt{N}$  [6].



**Figura 2.3:** Array di interferometri atomici per la minimizzazione del rumore newtoniano.

### Rumore in frequenza del laser

Il rumore in frequenza del laser origina per esempio da ritardi nella propagazione dei fasci laser contro-propaganti: la distanza  $L$  tra le due cavità determina la frequenza di risonanza per il laser, in quanto per avere interferenza costruttiva essa deve essere un multiplo intero della lunghezza d'onda della luce; di conseguenza uno spostamento  $\delta x$  della posizione dello specchio si traduce in un rumore in frequenza del laser  $\delta \nu$ . Per ridurre l'impatto di questo tipo di rumore è utile sfruttare una configurazione in cui lo strumento è costituito da due bracci perpendicolari della stessa lunghezza e interrogati dallo stesso laser: in questa configurazione, se l'onda incidente è polarizzata "+", misurando la differenza di fase tra i due bracci, il contributo  $h$  dovuto all'onda si somma, mentre il rumore in frequenza, comune ad entrambi, si annulla [6].

### Detection noise

La stima del numero di atomi che si trovano in una certa popolazione viene effettuata tramite misure in fluorescenza. Dal momento che  $N$  è proporzionale al numero di atomi, la popolazione è quindi misurata attraverso il flusso di atomi sul detector, il tempo di arrivo dei quali è scorrelato e segue una distribuzione poissoniana con deviazione standard  $\sqrt{N}$ .

Strumenti più moderni utilizzano tecniche di entanglement che grazie a correlazioni quantistiche permettono di superare il limite di shot noise [7], [8].

# Capitolo 3

## Interferometri di materia

Dopo aver presentato la tipologia di sorgenti di onde e di rumore e di segnale aspettato utilizzando interferometri atomici, questo capitolo tratta lo strumento vero e proprio, concentrandosi sul principio di funzionamento e sullo spettro delle principali fonti di rumore che ne limitano la sensibilità.

### 3.1 Interazione radiazione-materia

Nella seguente trattazione si vuole descrivere analiticamente l'interazione tra un campo elettromagnetico e un atomo ipotizzando che quest'ultimo possieda solamente due livelli energetici:  $|1\rangle$  per lo stato fondamentale e  $|2\rangle$  per lo stato eccitato.

#### 3.1.1 Hamiltoniana del sistema

Utilizzando come sistema di riferimento quello del centro di massa, l'hamiltoniana che descrive l'interazione radiazione-materia viene espressa come segue

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \right)^2 + eU(\mathbf{r}) \quad (3.1)$$

dove  $\hat{\mathbf{p}}$  rappresenta il momento dell'elettrone dell'atomo,  $\mathbf{r}$  la sua posizione rispetto all'origine,  $\hat{\mathbf{A}}$  corrisponde al potenziale vettore del campo elettromagnetico che soddisfa

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (3.2)$$

ed  $U$  è il termine di interazione coulombiana. Il primo termine tra parentesi dell'equazione (3.1) è composto da 3 contributi:

- $\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}$ , che corrisponde all'energia cinetica dell'elettrone;
- un termine proporzionale a  $\hat{\mathbf{A}}^2$  che è trascurabile in quanto può essere considerata una piccola perturbazione all'interazione con il potenziale coulombiano  $eU(r)$ ;
- un ultimo contributo proporzionale a  $\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{A}}$  che compone la parte di interazione tra atomo e radiazione elettromagnetica dell'hamiltoniana.

Di conseguenza l'hamiltoniana può essere definita

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_I \quad (3.3)$$

dove  $\hat{H}_A$  è il contributo dell'atomo libero che corrisponde alla somma dell'energia cinetica del sistema con le energie interne dei due stati, rispettivamente  $\hbar\omega_1$  e  $\hbar\omega_2$

$$\hat{H}_A = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} + \hbar\omega_1 |1\rangle \langle 1| + \hbar\omega_2 |2\rangle \langle 2| \quad (3.4)$$

mentre  $\hat{H}_I$  rappresenta l'hamiltoniana d'interazione tra la materia e il campo elettromagnetico.

### Approssimazione di dipolo elettrico

Dal momento che la lunghezza d'onda della radiazione utilizzata è in generale molto maggiore delle dimensioni dell'atomo ( $\sim 10^3 \text{ \AA}$  contro  $\sim 1 \text{ \AA}$ ), l'hamiltoniana (3.1) può essere semplificata attraverso l'*approssimazione di dipolo elettrico*, ovvero rappresentando un'onda piana attraverso il suo sviluppo in serie arrestato all'ordine zero:

$$e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sim 1 \pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \dots \sim 1 \quad (3.5)$$

Considerando quindi un potenziale vettore della forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = A_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.6)$$

dove  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  rappresenta il vettore di polarizzazione, in questa approssimazione si avrà

$$e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \sim (1 + \mathcal{O}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})) e^{-i\omega t} \sim e^{-i\omega t} \quad (3.7)$$

$$\implies \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \sim \mathbf{A}(t) \quad (3.8)$$

ottenendo quindi che, all'interno dell'atomo, il campo elettromagnetico esterno non cambia significativamente, mantenendo solo la dipendenza temporale.

È utile per la trattazione definire il contributo di interazione tra campo e atomo  $\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{A}}$  attraverso l'*operatore di dipolo elettrico*  $\hat{\mathbf{d}}$ . Attraverso l'equazione (3.2), si ottiene per il campo elettrico la forma

$$\hat{\mathbf{E}}(t) = \frac{1}{c} \underbrace{i\omega A_0}_{E_0} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \sim \frac{E_0}{c} e^{-i\omega t} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.9)$$

Valutando ora l'operatore impulso  $\hat{\mathbf{p}}$  in visuale di interazione

$$\hat{\mathbf{p}} = m \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = m \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_A, \hat{\mathbf{r}}] = m \frac{i}{\hbar} (\hat{H}_A \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}} \hat{H}_A) \quad (3.10)$$

per un sistema a due livelli  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  l'elemento di matrice non diagonale prende la forma

$$\langle 2 | \hat{\mathbf{p}} | 1 \rangle = m \frac{i}{\hbar} \langle 2 | \hat{H}_A \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}} \hat{H}_A | 1 \rangle = mi \underbrace{\frac{(E_2 - E_1)}{\hbar}}_{\omega_0} \langle 2 | \hat{\mathbf{r}} | 1 \rangle \quad (3.11)$$

$$\implies \hat{\mathbf{p}} = im\omega_0 \hat{\mathbf{r}} \quad (3.12)$$

dove  $\omega_0$  è la frequenza di risonanza per la transizione  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ ; assumendo  $\omega \approx \omega_0$

$$\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{A}} = im\omega_0 \hat{\mathbf{r}} \cdot A_0 e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{e}} = cm \hat{\mathbf{r}} \cdot E_0 e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{e}} = cm \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}} \quad (3.13)$$

L'hamiltoniana di interazione in approssimazione di dipolo prende quindi la forma

$$\hat{H}_I = -2 \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{A}}) = -e \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}} \quad (3.14)$$

L'hamiltoniana totale del sistema può quindi essere espressa come segue

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_I = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \hbar\omega_1 |1\rangle \langle 1| + \hbar\omega_2 |2\rangle \langle 2| - \hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}} \quad (3.15)$$

dove  $\hat{\mathbf{d}}$  è l'operatore di momento di dipolo elettrico.

### 3.1.2 Autostati

Considerando un campo elettrico

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \phi) \quad (3.16)$$

e osservando che

$$e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \int d^3\mathbf{p} e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| = \int d^3\mathbf{p} |\mathbf{p} \pm \hbar\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{p}| \quad (3.17)$$

si può affermare quindi che l'interazione di un atomo di impulso  $\mathbf{p}$  con un campo elettrico della forma (3.16) induce l'atomo ad assorbimento o emissione di un fotone, portando alla modifica del suo impulso di un valore  $\pm \hbar\mathbf{k}$ .

Esprimendo uno stato atomico come prodotto tensore dei due spazi di Hilbert di particella e impulso

$$|1\rangle \otimes |\mathbf{p}_1\rangle = |1, \mathbf{p}_1\rangle \quad |2\rangle \otimes |\mathbf{p}_2\rangle = |2, \mathbf{p}_2\rangle \quad (3.18)$$

consideriamo gli unici due autostati  $|1, \mathbf{p}\rangle$  e  $|2, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle$ , ovvero quello fondamentale e quello eccitato; la generica funzione d'onda dell'atomo al tempo  $t$  corrisponde quindi ad una sovrapposizione di questi, ognuno pesato con la sua probabilità

$$|\psi(t)\rangle = a_{1,\mathbf{p}}(t) |1, \mathbf{p}\rangle + a_{1,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}}(t) |2, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle \quad (3.19)$$

definendo i coefficienti  $a(t)$  come prodotto di contributi legati all'evoluzione temporale libera della funzione d'onda atomica ed all'interazione del campo elettrico

$$a_{1,\mathbf{p}}(t) = c_{1,\mathbf{p}}(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \left( \hbar\omega + \frac{|\mathbf{p}|^2}{m} \right) t} \quad (3.20)$$

$$a_{2,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}}(t) = c_{2,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}}(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \left( \hbar\omega + \frac{|\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}|^2}{m} \right) t} \quad (3.21)$$

È possibile, applicando la generica funzione d'onda (3.19) all'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (3.22)$$

trovare i valori dei coefficienti  $c(t)$  nel caso di perfetta risonanza:

$$c_{1,\mathbf{p}}(t) = c_{1,\mathbf{p}}(0) \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - ic_{2,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}}(0)e^{-i\phi} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \quad (3.23)$$

$$c_{2,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}}(t) = -ic_{1,\mathbf{p}}(0)e^{i\phi} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + c_{2,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}}(0) \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \quad (3.24)$$

dove

$$\Omega = -\frac{\langle 1 | \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0 | 2 \rangle}{\hbar} \quad (3.25)$$

è la cosiddetta *frequenza di Rabi*.

Nel caso in cui un impulso di durata  $\tau$  venga inviato ad un atomo con momento  $\mathbf{p}$  che si trova nello stato fondamentale, poichè  $c_{1,\mathbf{p}}(0) = 1$  e  $c_{2,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}}(0) = 0$ , questo si troverà successivamente nello stato

$$|\psi(\tau)\rangle = \cos\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) |1, \mathbf{p}\rangle + e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i\phi} \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) |2, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle \quad (3.26)$$

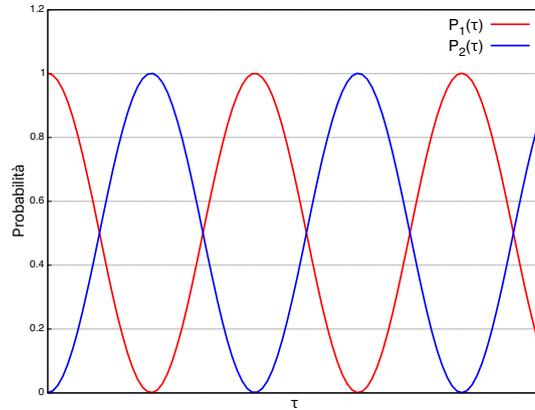
Da quest'ultima equazione si può notare quindi che gli atomi eccitati ricevono una fase  $-\frac{\pi}{2}$  in aggiunta alla fase  $\phi$  data dalla radiazione incidente, la quale gioca un ruolo fondamentale nell'interferometria atomica.

### 3.1.3 Oscillazioni di Rabi

Un altro aspetto interessante da conoscere è la probabilità che l'atomo si trovi nello stato  $|1, \mathbf{p}\rangle$  piuttosto che nello stato  $|2, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle$ . Essa oscilla con frequenza  $\Omega$ . Infatti

$$P_1(\tau) = |\langle 1, \mathbf{p} | \psi(\tau) \rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) = \frac{1 + \cos \Omega\tau}{2} \quad (3.27)$$

$$P_2(\tau) = |\langle 2, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k} | \psi(\tau) \rangle|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) = \frac{1 - \cos \Omega\tau}{2} \quad (3.28)$$



**Figura 3.1:** Probabilità di trovare un atomo nello stato  $|1, \mathbf{p}\rangle$  ( $P_1(\tau)$ ) o nello stato  $|2, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle$  ( $P_2(\tau)$ ).

Si osserva che se  $\tau = \frac{\pi}{\Omega}$  (*impulso*  $\pi$ ), l'atomo si troverà, conclusa l'interazione con il campo, interamente nello stato  $|2, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle$ , mentre se  $\tau = \frac{\pi}{2\Omega}$  (*impulso*  $\pi/2$ ) la funzione d'onda dell'atomo sarà una sovrapposizione equiprobabile degli stati  $|1, \mathbf{p}\rangle$  e  $|2, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle$ . In Figura 3.1 si vede l'andamento delle probabilità di trovare l'atomo nello stato eccitato o in quello fondamentale in funzione del tempo.

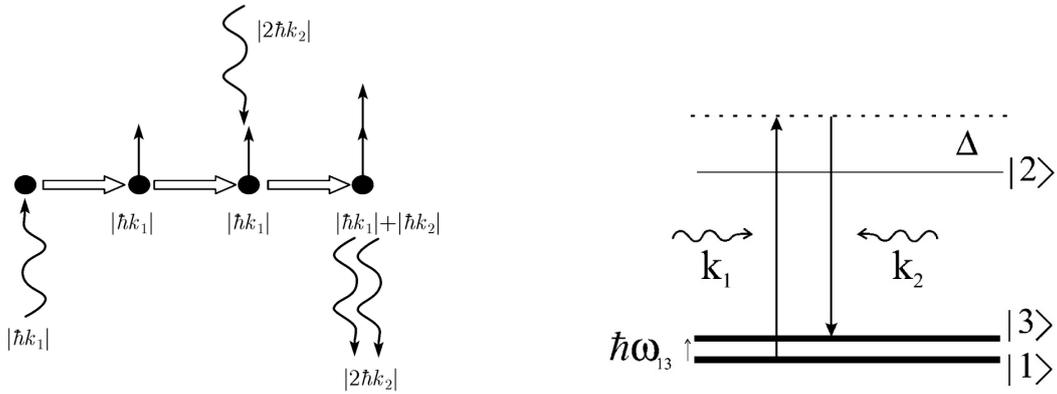
## 3.2 Apparato strumentale

Lo scopo di questa sezione è la trattazione sul funzionamento vero e proprio degli interferometri atomici, partendo da una discussione sulle fasi impresse agli atomi [6].

### 3.2.1 Interferometria Raman

Il principio di funzionamento degli interferometri atomici è analogo a quello degli interferometri ottici: viene misurata la differenza di fase acquisita dalla funzione d'onda tra i due bracci dello strumento. Negli interferometri di materia però i due "bracci" sono creati a partire da un fascio atomico che viene diffratto da un fascio di luce. Un metodo utilizzato è la *transizione Raman a due fotoni*, schematizzata in Figura 3.2. In questo tipo di transizione l'atomo riceve un impulso iniziale in modulo  $\hbar\mathbf{k}_1$  da parte del laser incidente, ed assorbe un fotone da esso; un raggio laser contropropagante con impulso  $\hbar\mathbf{k}_2$  induce poi l'atomo all'emissione stimolata di due fotoni che porta l'atomo nello stato finale  $|3\rangle$ . Se  $\hbar\mathbf{k}_1 \sim \hbar\mathbf{k}_2$ , il momento totale trasferito all'atomo vale

$$\Delta\mathbf{p} = \hbar(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \sim 2\hbar\mathbf{k}_2 \equiv 2\hbar\mathbf{k} \quad (3.29)$$



**Figura 3.2:** Schema di funzionamento di una transizione Raman.

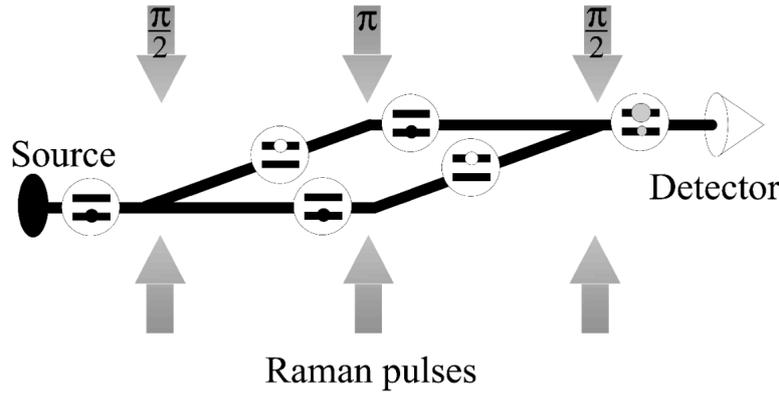
Quella che si crea è quindi una sovrapposizione di stati con momento  $|\mathbf{p}\rangle$  e  $|\mathbf{p} + 2\hbar\mathbf{k}\rangle$  che per questo seguono due cammini differenti separando il fascio iniziale.

La necessità di utilizzare una transizione a due fotoni nasce per poter sfruttare un tempo di misura  $T$  più lungo, in quanto la differenza di fase che si misura dipende quadraticamente da esso ( $\Delta\phi \propto T^2$ ). Per prolungare  $T$  è necessario che il tempo di vita media  $\tau$  dello stato eccitato degli atomi sia sufficientemente lungo. Esso dipende dalla pulsazione  $\omega$  della radiazione secondo la relazione  $\tau \propto \omega^{-3}$  e, poichè in generale la radiazione utilizzata è in risonanza con le transizioni ottiche ( $\omega \sim 10^{15}$ ), il tempo di vita dello stato eccitato sarà in generale molto breve. Per ovviare a questo problema si sono studiate due principali soluzioni:

- utilizzare un'interferometria a più fotoni che induce transizioni tra livelli iperfini dell'atomo, che hanno vita media molto lunga (praticamente infinita);
- indurre una transizione tra stati metastabili che abbiano vita media lunga rispetto ai tempi caratteristici dello strumento, per esempio sfruttando transizioni proibite dalle regole di selezione.

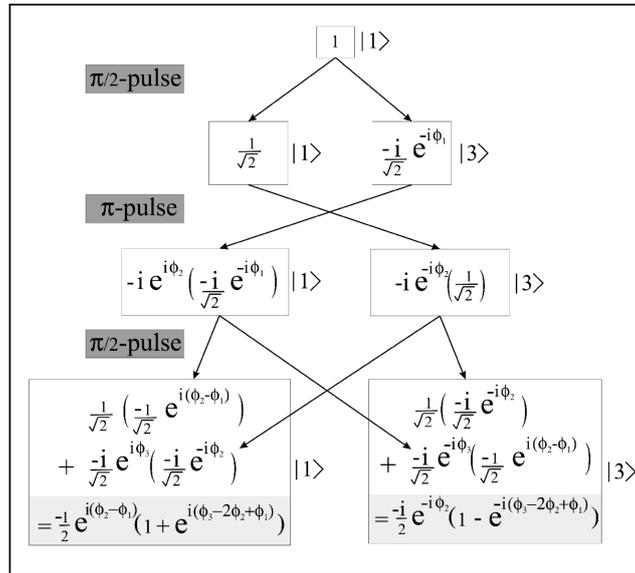
Nel primo caso, che è quello che tratteremo in questa tesi, questi strumenti impiegano tre impulsi Raman di tipo  $\pi/2$ ,  $\pi$  e di nuovo  $\pi/2$  che rispettivamente dividono, direzionano e ricombinano i fasci atomici, come rappresentato in Figura 3.3, in analogia con gli specchi e gli splitter degli interferometri di Mach-Zehnder.

Nella Figura 3.4 sono mostrate le ampiezze delle componenti degli stati  $|1\rangle$  e  $|3\rangle$  e le rispettive fasi indotte dopo che interagiscono con i tre impulsi Raman: il fascio atomico iniziale si trova completa-



**Figura 3.3:** Schema di un interferometro atomico. I tre impulsi Raman si occupano di dividere, direzionare e ricombinare i fasci.

mente nello stato  $|1\rangle$ , esso viene successivamente diviso fino ad ottenere una sovrapposizione di stati fondamentale  $|1\rangle$  ed eccitato  $|3\rangle$  la cui probabilità di essere presente dipende dalle fasi  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$  [9].



**Figura 3.4:** Ampiezze delle componenti degli stati  $|1\rangle$  e  $|3\rangle$  e rispettive fasi indotte dopo che interagiscono con i tre impulsi Raman.

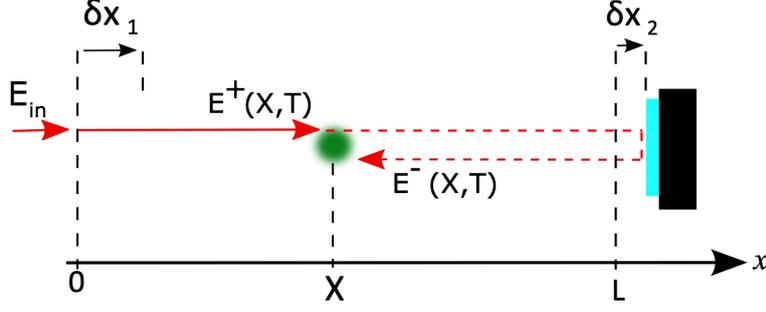
La misura della popolazione che si trova nello stato  $|3\rangle$  viene eseguita attraverso misure di fluorescenza, la cui intensità è proporzionale al numero di atomi presenti nello stato eccitato. Conoscendo questa quantità è possibile, secondo lo schema in Figura 3.4, calcolare i valori delle fasi  $(\phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3)$  degli impulsi ottici.

### 3.2.2 Differenza di fase indotta dal passaggio di una GW

Come presentato nella sezione precedente, lo sfasamento relativo dei due fasci atomici è contenuto nella parte diffratta di questi, che al passaggio di un'onda gravitazionale acquista un contributo dipendente dalla sua ampiezza  $h$ .

Per valutarlo consideriamo uno schema come quello mostrato in Figura 3.5: una nuvola atomica nella posizione  $X$  viene interrogata trasversalmente da un campo elettromagnetico  $E(t)$  che colpisce uno specchio retroriflettente per formare due fasci laser contropropaganti  $E^\pm(t)$ .

Per calcolare la fase relativa dei due bracci quindi è sufficiente derivare la differenza di fase tra  $E^+$  ed  $E^-$ . Considerando un'onda gravitazionale incidente che si propaga perpendicolarmente al piano e



**Figura 3.5:** Schema trasversale di un fascio atomico interrogato da un laser al passaggio di un'onda gravitazionale.

polarizzata lungo  $x$ , l'invariante relativistico  $ds^2$ , in accordo con l'equazione (1.2), durante il passaggio di una GW prenderà la forma, nelle coordinate del laboratorio,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 + h(t) dx^2 = 0 \quad (3.30)$$

$$\implies dx^2(1 - h(t)) = c^2 dt^2 \quad (3.31)$$

ovvero, dal momento che siamo in approssimazione di campo debole ( $h(t) \ll 1$ )

$$dx = \pm \sqrt{\frac{1}{1 - h(t)}} c dt \sim \pm \sqrt{1 + h(t)} c dt \sim \pm \left(1 + \frac{h(t)}{2}\right) c dt \quad (3.32)$$

Supponiamo che al tempo  $t^+$  venga emessa un'onda elettromagnetica dalla posizione  $\delta x_1$ , che arriva in  $X$  al tempo  $T$

$$\int_{\delta x_1(t^+)}^X dx = c(T - t^+) + \frac{c}{2} \int_{t^+}^T h(t) dt \quad (3.33)$$

$$\implies X - \delta x_1(t^+) = cT - ct^+ + \frac{c}{2} \int_{t^+}^T h(t) dt \quad (3.34)$$

$$\implies t^+ = T - \frac{1}{c}[X - \delta x_1(t^+)] + \frac{1}{2} \int_{t^+}^T h(t) dt$$

approssimando  $t^+ \sim T - \frac{X}{c}$  si ottiene infine

$$t^+ \sim T - \frac{X - \delta x_1(T - X/c)}{c} + \frac{1}{2} \int_{T - X/c}^T h(t) dt \quad (3.35)$$

Allo stesso modo si calcola  $t^-$ , ovvero il tempo in cui l'onda arriva allo specchio, viene riflessa e raggiunge il fascio atomico, partendo da

$$X - \delta x_1(t^-) + 2(L - X) + 2\delta x_2 \left(T - \frac{L - X}{c}\right) = c(T - t^-) + \frac{c}{2} \int_{t^-}^T h(t) dt \quad (3.36)$$

e approssimando  $t^- \sim T - \frac{2L - X}{c}$  si ricava

$$t^- \sim T - \frac{1}{c} \left[ 2L - X - \delta x_1 \left(T - \frac{2L - X}{c}\right) + 2\delta x_2 \left(T - \frac{L - X}{c}\right) \right] + \frac{1}{2} \int_{T - (2L - X)/c}^T h(t) dt \quad (3.37)$$

Quasi simultaneamente al tempo  $T$  gli atomi interagiscono con i campi  $E^\pm(X, T)$  e viene indotta alla funzione d'onda una fase  $\Delta\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$  data dalla differenza temporale  $t^+ - t^-$  dei due impulsi  $E^\pm(X, T)$ . Dalla misura di  $\Delta\varphi$  si può risalire dunque al segnale gravitazionale  $h$ . Supponiamo ora che il campo laser abbia frequenza  $\nu_0$  più un piccolo rumore in fase  $\tilde{\phi}$ , per cui

$$E(t) = E_{in}(t)e^{i\alpha(t)} \quad \text{con} \quad \alpha(t) = 2\pi\nu_0 t + \tilde{\phi}(t) \quad (3.38)$$

Tramite uno sviluppo in serie di Taylor al primo ordine si può scrivere

$$\tilde{\phi}(t + \Delta t) \sim \phi_0 + 2\pi\delta\nu(t)\Delta t \quad (3.39)$$

Di conseguenza nel punto in cui il laser interagisce con gli atomi

$$E^+(X, T) \equiv E(t^+) = E_{in}(t^+)e^{i\alpha(t^+)} \sim E_{in}(T)e^{i2\pi T(\nu_0 + \delta\nu(T)) + i\phi_0} e^{i\varphi^+(X, T)} \quad (3.40)$$

dove

$$\varphi^+(X, T) = -\frac{2\pi\nu_0}{c}X + \frac{2\pi\nu_0}{c}\delta x_1(T) + \frac{2\pi}{c}\left(-\delta\nu(T) + \frac{\nu_0}{2}h(T)\right)X \quad (3.41)$$

Allo stesso modo si trova

$$\varphi^-(X, T) = -\frac{2\pi\nu_0}{c}(2L - X) + \frac{2\pi\nu_0}{c}(\delta x_1(T) - 2\delta x_2(T)) + \frac{2\pi}{c}\left(-\delta\nu(T) + \frac{\nu_0}{2}h(T)\right)(2L - X) \quad (3.42)$$

di conseguenza la fase relativa avrà la forma

$$\Delta\varphi(X, T) = 2 \cdot \underbrace{\frac{2\pi\nu_0}{c}}_k \left[ (L - X) + \delta x_2(T) + \left( \frac{\delta\nu(T)}{\nu_0} - \frac{h(T)}{2} \right) (L - X) \right] \quad (3.43)$$

in cui  $k$  è il numero d'onda del laser incidente. È importante notare inoltre che la fase finale non dipende dalla posizione  $\delta x_1$  in quanto è un termine in comune tra  $\varphi^+$  e  $\varphi^-$ .

La fase misurata realmente dal detector non è costituita solamente da  $\Delta\varphi$ , ma dalla convoluzione di questa con la funzione di sensibilità dell'interferometro  $s(t) \sim \delta(t - 2T) - 2\delta(t - T) + \delta(t)$ , legata ai tre impulsi Raman, dove  $\delta$  rappresenta la delta di Dirac. Considerando che l'interferometro prende una misura alla fine di ogni ciclo di durata

$$T_c = T_{\text{prep}} + 2T + T_{\text{det}} \quad (3.44)$$

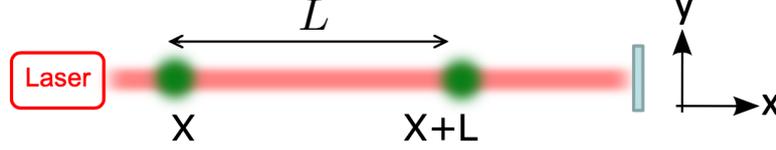
dove  $T_{\text{prep}}$  è il tempo in cui gli atomi vengono preparati, ad esempio raffreddati,  $T$  è la durata dell'interazione tra fascio atomico e laser, mentre  $T_{\text{det}}$  coincide con il tempo di rivelazione, il segnale in output dopo l' $m$ -esimo ciclo è dato da

$$\begin{aligned} s_\varphi(X, mT_c) &= \Delta\varphi(X, t) \otimes s(t - mT_c) = \\ &= 2k \frac{2\pi\nu_0}{c} \left[ -\delta x(X, T) + \delta x_2(t) + \left( \frac{\delta\nu(t)}{\nu_0} - \frac{h(t)}{2} \right) (L - X) \right] \otimes s(t - mT_c) \end{aligned} \quad (3.45)$$

in cui viene sostituito il termine  $(L - X)$  dell'equazione (3.43) con  $\delta x(X, T)$  in quanto  $L$  essendo costante non contribuisce al segnale, mentre la posizione degli atomi  $X$  può variare lungo la direzione  $x$  per esempio a causa di fluttuazioni del campo gravitazionale locale.

### 3.2.3 Configurazione a gradiometro

Come si può notare dall'equazione (3.45), il segnale in output dipende da  $\delta x_2$ , ovvero dal rumore dato dalla posizione dello specchio retroriflettente. Per eliminare questo contributo è efficace costruire l'interferometro con una configurazione *a gradiometro*, come mostrato in Figura 3.6, in cui due interferometri atomici posti a una distanza  $L$  tra loro vengono interrogati dallo stesso laser.



**Figura 3.6:** Configurazione a gradiometro per un interferometro atomico.

Considerando ora il segnale differenziale in uscita

$$\psi(X, mT_c) = s_\varphi(X, mT_c) - s_\varphi(X + L, mT_c) \quad (3.46)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \psi(X, mT_c) = 2k \left[ L \left( \frac{h(t)}{2} - \frac{\delta\nu(t)}{\nu_0} \right) + \delta x(X + L, t) - \delta x(X, t) \right] \otimes s(t - mT_c) + \\ + \alpha(X + L, t) - \alpha(X, t) \end{aligned} \quad (3.47)$$

dove si sono aggiunti anche i termini  $\alpha$  derivanti dal rumore di rivelazione degli atomi (detection noise). Si può notare come in questa configurazione il termine  $\delta x_2$  si elida, rendendo gli interferometri atomici molto meno sensibili a questo tipo di rumore rispetto agli interferometri ottici terrestri attualmente in uso. L'equazione (3.47) evidenzia inoltre come l'effetto del passaggio di un'onda gravitazionale sia indistinguibile dal rumore dovuto alle fluttuazioni della frequenza del laser e del campo gravitazionale.

### 3.2.4 Spettro di potenza

Partendo dalla forma del segnale appena trovata, l'obiettivo in questa sezione è quello di calcolare lo spettro di rumore per un interferometro con struttura a gradiometro.

#### Segnale

Limitandoci al contributo di segnale dell'equazione (3.47), calcoliamone la trasformata di Fourier

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\psi(t)\} &= 2kL \frac{\tilde{h}(\omega)}{2} \cdot \tilde{s}(\omega) = 2kL \frac{\tilde{h}(\omega)}{2} \cdot \left[ -4e^{i\omega t} \sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right] \equiv \\ &\equiv H(\omega) \tilde{h}(\omega) \end{aligned} \quad (3.48)$$

dove si è utilizzata l'espressione  $s(t) \sim \delta(t - 2T) - 2\delta(t - T) + \delta(t)$  e i noti teoremi della trasformata di Fourier per la convoluzione.

#### Rumore

Escluso il termine proporzionale all'ampiezza  $h$  dell'onda gravitazionale, i rimanenti contributi dell'equazione (3.47) sono le sorgenti di rumore che disturbano il sistema. È comodo esprimere i rumori

come se derivassero da un rumore equivalente in onda gravitazionale  $h_n$ , ovvero

$$\tilde{\psi}(\omega) = H(\omega)\tilde{h}(\omega) + \tilde{\psi}_n(\omega) = H(\omega)\tilde{h}(\omega) + H(\omega)\tilde{h}_n(\omega) \quad (3.49)$$

$$\implies \tilde{h}_n(\omega) = \frac{\tilde{\psi}_n(\omega)}{H(\omega)} \quad (3.50)$$

Lo spettro di rumore di  $h_n$  è quindi

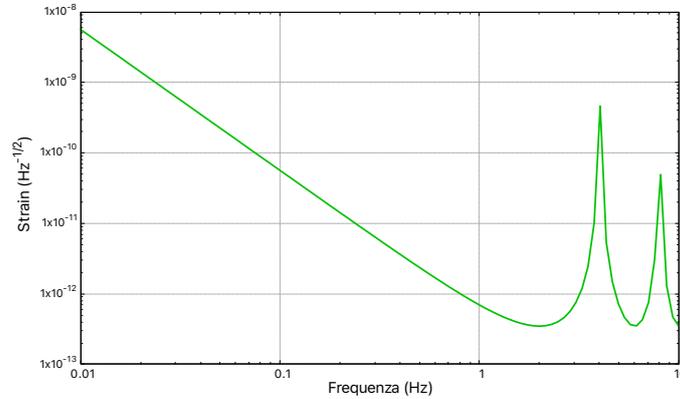
$$S_{h_n}(\omega) = \frac{S_{\psi_n}(\omega)}{|H(\omega)|^2} \quad (3.51)$$

dove  $S_{\psi_n}(\omega)$  è lo spettro totale di rumore.

Considerando quindi come fonti di rumore il detection noise  $\alpha(t)$  e il rumore in frequenza del laser  $\delta\nu(t)$ , le cui rispettive PSD sono  $S_{\delta\nu}(\omega)$  e  $S_\alpha(\omega)$  si ottiene per lo spettro di rumore di  $h_n$  la seguente forma:

$$\begin{aligned} S_{h_n}(\omega) &= \frac{1}{|H(\omega)|^2} \left[ \frac{(2kL)^2}{\nu_0^2} 16 \sin^4\left(\frac{\omega T}{2}\right) S_{\delta\nu}(\omega) + 2S_\alpha(\omega) \right] = \\ &= 4 \frac{S_{\delta\nu}(\omega)}{\nu_0^2} + \frac{S_\alpha(\omega)}{2(kL)^2 16 \sin^4\left(\frac{\omega T}{2}\right)} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Lo spettro corrispondente è mostrato in Figura 3.7, ottenuto inserendo i valori tipici degli attuali progetti in studio o in costruzione [10]:  $S_{\delta\nu}(f) = 0.01 \times (1 \text{ Hz}/f) \text{ Hz}^2/\text{Hz}$ ,  $\frac{c}{\nu_0} = 780 \text{ nm}$ ,  $S_\alpha(\omega) = \frac{\eta}{N_{\text{at}}} = \frac{\eta}{10^6} \text{ atomi/s}$ , dove  $\eta$  nel limite quantistico standard vale 1, ma attraverso tecniche di entanglement quantistico è possibile raggiungere un valore  $\eta = 0.01$ ;  $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/780 \text{ nm}$  è il numero d'onda del laser che interroga gli atomi,  $L = 200 \text{ m}$  è la lunghezza di un braccio dello strumento, infine  $T = 250 \text{ ms}$  è il tempo di interrogazione.



**Figura 3.7:** Spettro di potenza del rumore in frequenza e di rivelazione di un interferometro i cui parametri di costruzione sono:  $S_{\delta\nu}(f) = 0.01 \times (1 \text{ Hz}/f) \text{ Hz}^2/\text{Hz}$ ,  $\frac{c}{\nu_0} = 780 \text{ nm}$ ,  $S_\alpha(\omega) = 0.01 \cdot 10^{-6} \text{ atomi/s}$ ,  $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/780$ ,  $L = 200 \text{ m}$ ,  $T = 250 \text{ ms}$ .

Come si può osservare però, il valore minimo è di circa  $3 \cdot 10^{-13} \text{ Hz}^{-1/2}$ , circa 7 ordini di grandezza maggiore rispetto all'obiettivo di  $\sim 10^{-20} \text{ Hz}^{-1/2}$  che permette di rivelare onde gravitazionali. È necessario quindi apportare dei miglioramenti, ad esempio l'utilizzo di cavità ottiche per il trasferimento di maggiore momento agli atomi.

### 3.2.5 Diffrazione di Bragg

Negli interferometri più moderni, gli impulsi Raman sono stati sostituiti da un reticolo di diffrazione di Bragg. In analogia con le diffrazioni Bragg dei raggi X tra i piani cristallini, quando un fascio atomico attraversa un reticolo luminoso formato da un'onda stazionaria e interagisce con esso, può

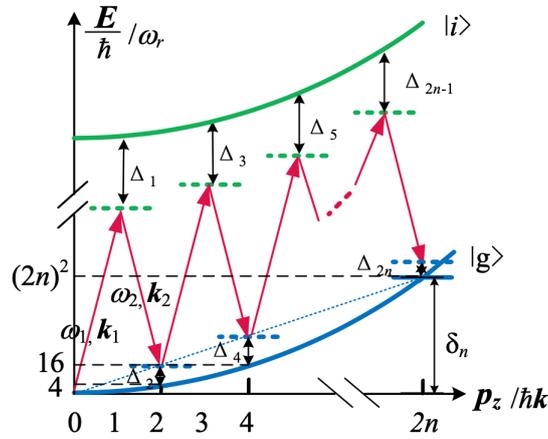
subire questo tipo di diffrazione [11], [12], [13].

Un evento di diffrazione Bragg di ordine  $n$  può essere assimilato ad un processo di transizione Raman a  $2n$ -fotoni, con la differenza che nel secondo caso viene variato lo stato interno dell'atomo, mentre attraverso diffrazione Bragg esso torna nello stato fondamentale e dopo l'emissione dei fotoni acquista puramente energia cinetica di rinculo

$$\frac{(n\mathbf{p})^2}{2m} = n\hbar\delta_\omega \quad (3.53)$$

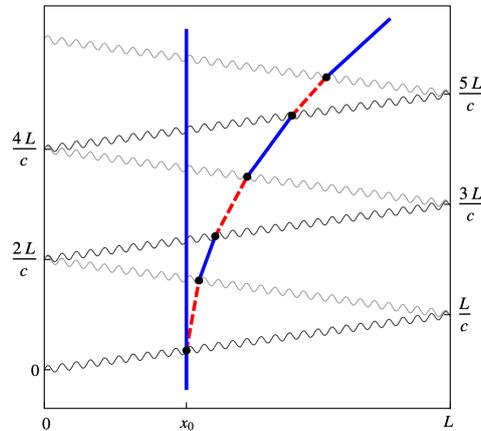
dove  $\mathbf{p}$  è il momento acquistato in un processo a due fotoni e  $\delta_\omega$  è la differenza di frequenza dei due laser contropropaganti.

Come mostrato nella Figura 3.8, l'atomo si trova inizialmente nello stato  $|g, 0\rangle$  con momento  $\mathbf{p} = 0$ , attraverso la stimolazione con un reticolo laser assorbe e emette fotoni, per poi finire nello stato  $|g, 2n\hbar\mathbf{k}\rangle$  dopo aver attraversato gli stati virtuali  $|i, \hbar\mathbf{k}\rangle$ ,  $|g, 2\hbar\mathbf{k}\rangle$ , ...,  $|i, (2n-1)\hbar\mathbf{k}\rangle$ . I valori  $\Delta_i$  rappresentano invece la differenza tra la frequenza del laser e quella della transizione  $i$ -esima, mentre  $\delta_n$  corrisponde alla condizione di risonanza per la diffrazione Bragg all' $n$ -esimo ordine.



**Figura 3.8:** Rappresentazione di una diffrazione Bragg di ordine  $n$ -esimo per un atomo.

Questa tecnica permette di avere trasferimenti di impulso elevati (LMT): come si osserva nella Figura 3.9, dopo la prima separazione dei fasci con un impulso  $\frac{\pi}{2}$ , solo una parte degli atomi viene successivamente interrogata con una serie di impulsi  $\pi$ , acquisendo così un momento del valore di  $2n\hbar\mathbf{k}$ . Per ottenere questi risultati si utilizzano cavità ottiche dal momento che aumentano la probabilità di interazione tra campo elettromagnetico e atomi.



**Figura 3.9:** Diagramma spazio-tempo del meccanismo di LMT per una cavità lunga  $L$ . In questo caso  $n = 3$ .

I vantaggi principali dell'utilizzo di diffrazione Bragg sono:

- gli atomi, rimanendo nello stato fondamentale, non intercrono a possibili emissioni spontanee di fotoni in direzioni casuali, che potrebbero interferire con il fascio;
- è possibile ottenere LMT, il che rende più semplice la misura dello sfasamento, in quanto  $\Delta\phi \propto n$ .

### 3.2.6 Raffreddamento degli atomi

Un aspetto essenziale nella preparazione dei fasci atomici è il loro raffreddamento: considerando infatti una nuvola atomica con velocità quadratica media iniziale  $\sigma_v$ , essa tende ad espandersi e dopo un tempo  $2T$  il suo raggio sarà  $\sigma_r = 2T\sigma_v$  [6]. Il problema di questo fenomeno di espansione è che il raggio del fascio atomico deve essere mantenuto più piccolo rispetto al raggio del laser che lo interroga. La temperatura ideale si dimostra essere dell'ordine dei  $\mu\text{K}$  per due principali motivi:

- tipicamente vengono utilizzati raggi laser con *waist* di circa 1 cm, che corrisponde a temperature della nuvola atomica di qualche  $\mu\text{K}$ ;
- se gli atomi si muovono a velocità elevate, la frequenza del laser subisce effetto Doppler, di conseguenza se  $\mathbf{k}\sigma_v$  è maggiore della frequenza di Rabi  $\frac{\Omega}{2\pi}$  alcuni atomi potrebbero non subire transizione Raman. Valori tipicamente utilizzati per le frequenze di Rabi sono di circa 50 kHz, che inducono quindi ad utilizzare atomi relativamente lenti raffreddati a temperature dell'ordine dei  $\mu\text{K}$ .

I metodi principali di raffreddamento sono esposti di seguito.

#### Laser cooling

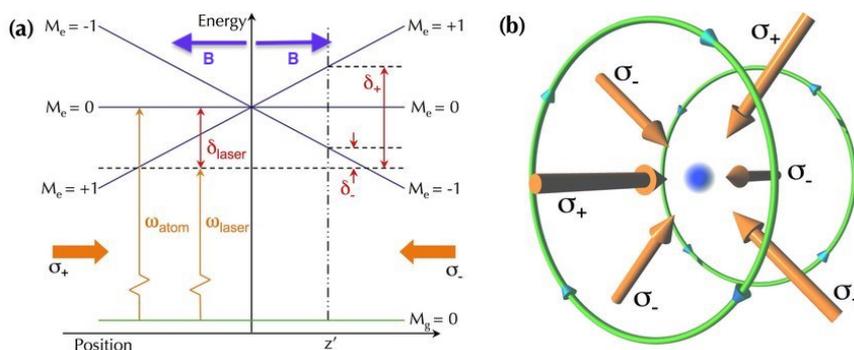
Gli atomi utilizzati per interferometria atomica vengono in generale raffreddati tramite trappole magneto-ottiche (MOT) che utilizzano il principio del *laser cooling* [14]: un atomo veloce che si muove in una direzione viene rallentato (e quindi raffreddato) tramite raggi laser che si propagano nella direzione opposta. Questi infatti, se della frequenza giusta, inducono l'atomo ad assorbire un fotone il quale trasferisce un momento  $p = \frac{h}{\lambda}$  rallentando così l'atomo. Per evitare che un atomo venga accelerato dal laser si sfrutta l'effetto Doppler impostando la frequenza del fascio ad un valore leggermente inferiore rispetto alla frequenza di transizione, in modo che solo gli atomi che si muovono verso la sorgente laser vengano rallentati; il successivo diseccitamento dell'atomo induce l'emissione di un fotone in direzione casuale, quindi in media questo effetto è nullo. Per rallentare gli atomi in maniera isotropica vengono utilizzati tre fasci laser disposti lungo le direzioni cartesiane; l'effetto, per gli atomi, è quello di muoversi in un mezzo viscoso che li rallenta, chiamato *melassa ottica*.

Le MOT vengono utilizzate per confinare gli atomi entro il volume in cui lavora il laser e sono costituite da melassa ottica che rallenta il fascio atomico e da un gradiente di campo magnetico generato da due bobine che lo confina sfruttando l'effetto Zeeman: consideriamo una MOT monodimensionale, come quella in Figura 3.10 (a) ed una transizione tra livelli atomici  $J = 0 \rightarrow J = 1$ ; nel punto  $z = 0$ , ovvero al centro delle due bobine, il campo magnetico è nullo, mentre in prossimità del centro è presente un gradiente di campo uniforme cosicché  $B$  prende la forma  $B(z) = \frac{\partial B}{\partial z} z = bz$  dove  $b$  è costante. Il campo magnetico per effetto Zeeman induce uno shift energetico lineare dei tre sottolivelli  $m_J = 0, \pm 1$  del livello eccitato  $J = 1$

$$\Delta E(z) = g_j m_j \mu_B B(z) = g_j m_j \mu_B b z \quad (3.54)$$

Vengono quindi utilizzati due fasci laser contropropaganti con polarizzazioni circolari opposte, in questo caso  $\sigma^-$  per  $z > 0$  e  $\sigma^+$  per  $z < 0$ , la cui frequenza è minore di un fattore  $\delta_{\text{laser}}$  rispetto alla frequenza di risonanza atomica per lo zero magnetico.

Considerando lo schema in figura 3.10, nella posizione  $z'$  l'effetto Zeeman provoca uno spostamento della transizione  $\Delta m_J = -1$  verso la risonanza, transizione permessa dalle regole di selezione per radiazione polarizzata circolarmente; di conseguenza se gli atomi in questa posizione interagiscono con il fascio di polarizzazione  $\sigma^-$  ricevono una spinta verso il centro dove  $B = 0$ . Il processo analogo



**Figura 3.10:** (a) schema di funzionamento di una MOT monodimensionale per la transizione  $J = 0 \rightarrow J = 1$ . (b) MOT tridimensionale.

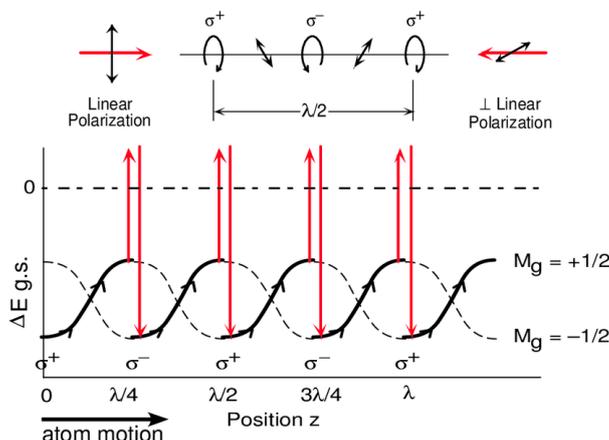
avviene per  $z$  negativi in cui il campo ha polarizzazione  $\sigma^+$  e i ruoli di  $m_J = \pm 1$  sono invertiti. Con questa tecnica di laser cooling è possibile raggiungere temperature di qualche decina di  $\mu\text{K}$ .

### Effetto Sisifo

L'effetto Sisifo sfrutta i sottolivelli Zeeman di un atomo in presenza di campo elettromagnetico. Questo effetto si ottiene attraverso due fasci laser contropropaganti con polarizzazione lineare ortogonale, come illustrato in Figura 3.11; questa combinazione genera un gradiente di polarizzazione che cambia nello spazio ogni  $\lambda/8$  alternandosi tra lineare e circolare  $\sigma^\pm$ . In presenza del campo elettrico del laser, se il momento angolare dell'atomo  $J \neq 0$  i sottolivelli si separano. A causa del gradiente di polarizzazione, le energie e le popolazioni di questi dipendono dalla posizione dell'atomo lungo l'asse di propagazione. Attraverso cicli di assorbimento ed emissione spontanea di fotoni è possibile trasferire un atomo da un sottolivello fondamentale  $m$  a un altro  $m'$  [15].

Supponiamo per esempio che gli atomi possiedano due livelli energetici, quello fondamentale  $J = 1/2$  e quello eccitato  $J = 3/2$  e che inizialmente nella posizione  $\lambda/4$  la popolazione degli atomi si trovi prevalentemente nel sottolivello  $m_j = -1/2$ . Gli atomi migrano nella posizione  $\lambda/2$ , aumentando la loro energia potenziale a spese di quella cinetica. In questa posizione la luce è polarizzata  $\sigma^+$  e, attraverso un ciclo di assorbimento e emissione di fotoni, gli atomi vengono spostati nel sottolivello  $m_j = +1/2$ , ad energia potenziale più bassa. La differenza energetica è pari a quella della radiazione elettromagnetica emessa, ottenendo così un raffreddamento del sistema.

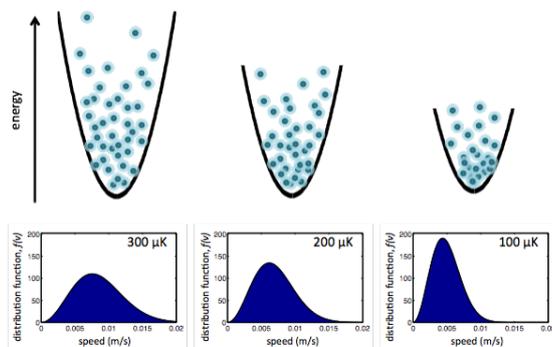
Sfruttando questo effetto è possibile raggiungere temperature dell'ordine dei  $\mu\text{K}$ .



**Figura 3.11:** Schema di funzionamento dell'effetto Sisifo per il raffreddamento dei fasci atomici.

**Raffreddamento evaporativo**

Questo metodo si basa sull'espulsione degli atomi troppo energetici e su una successiva termalizzazione delle particelle rimanenti. Il principio di raffreddamento è analogo a quello di un liquido caldo all'interno di un contenitore: le particelle più energetiche evaporano, lasciando sul fondo quelle meno energetiche che così si raffreddano più facilmente. Gli atomi in questione vengono contenuti in buche di potenziale di profondità sempre minore, per selezionare al meglio le temperature degli atomi [14], come mostrato in Figura 3.12. Anche con questa tecnica le temperature raggiunte sono dell'ordine dei  $\mu\text{K}$ .



**Figura 3.12:** Schema di funzionamento del raffreddamento evaporativo.

## Capitolo 4

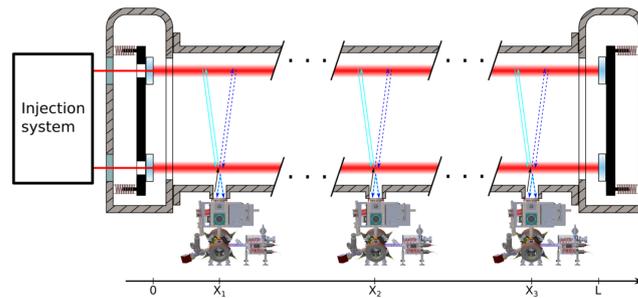
# Stato dell'arte dell'interferometro *MIGA*

In questo capitolo viene presentato uno degli interferometri atomici attualmente in costruzione: il progetto *MIGA* (Matter-wave laser Interferometric Gravitation Antenna), procedendo con una prima descrizione dell'apparato e successivamente con l'analisi dello spettro di rumore [10], [6].

### 4.1 Lo strumento

Il progetto *MIGA* è nato nel 2013 con lo scopo di realizzare uno strumento che sia un'avanguardia per i futuri interferometri atomici che riveleranno onde gravitazionali nelle MF. Lo strumento verrà costruito nel laboratorio sotterraneo LSBB a Rustrel, nel sud della Francia.

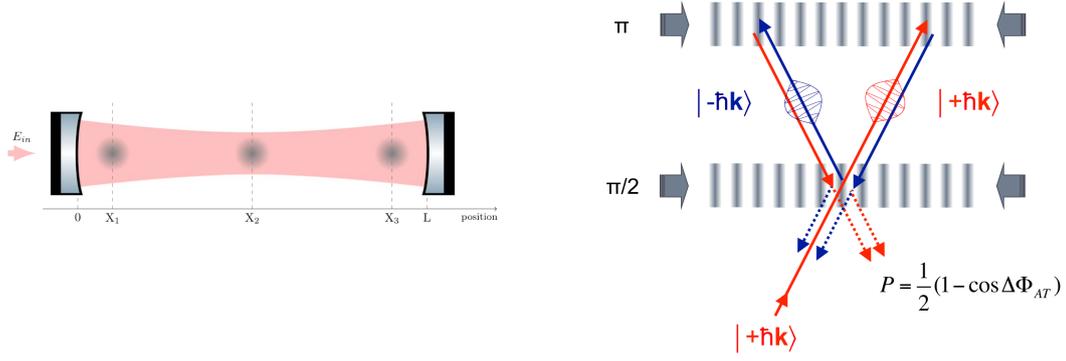
Lo strumento è costituito da due bracci perpendicolari tra loro di lunghezza  $L = 200$  m, ognuno formato da tre interferometri atomici caratterizzati da un flusso uscente di  $N_{\text{at}} \sim 10^6$  atomi/s e disposti in una configurazione a gradiometro distanziati di  $\sim 100$  m che si trovano nelle posizioni  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  (Figura 4.1).



**Figura 4.1:** Schema di un braccio dello strumento *MIGA*.

I fasci atomici, dopo essere stati lanciati verticalmente, interagiscono con due campi elettromagnetici di lunghezza d'onda  $\lambda = 780$  nm, comuni a tutti e tre gli interferometri, risonanti all'interno di cavità ottiche che permettono LMT con un tempo di interazione di  $T = 250$  ms. Gli impulsi laser all'interno di queste cavità sono rispettivamente di tipo  $\frac{\pi}{2}$  e  $\pi$ , cosicché la nuvola atomica viene inizialmente divisa in due fasci con impulsi  $| -n\hbar\mathbf{k} \rangle$  e  $| +n\hbar\mathbf{k} \rangle$ , poi ridirezionata ed infine quando attraversa nuovamente il primo fascio viene ricombinata, come mostrato nella Figura 4.2.

Per questo tipo di strumenti si preferisce in generale utilizzare atomi alcalini o alcalino-terrosi per la loro struttura elettronica relativamente semplice, ma soprattutto per la lunga vita dello stato otticamente eccitato. In particolare per *MIGA* si predilige l'utilizzo di atomi di Rubidio 87, in quanto manipolabile con un laser di lunghezza d'onda  $\lambda = 780$  nm, facilmente reperibile; l'obiettivo è quello di ottenere, attraverso diffrazione di Bragg, LMT con  $n = 10$ .



**Figura 4.2:** Cavità ottica utilizzata nell'esperimento *MIGA* (sinistra). Interazione tra un fascio atomico ed i campi elettromagnetici all'interno delle cavità (destra).

## 4.2 Sensibilità allo strain

In questa sezione lo scopo è ricostruire la curve di sensibilità che caratterizzano l'esperimento *MIGA*. Ripercorrendo la trattazione sulla differenza di fase misurata (sezione 3.2.2) e considerando una configurazione a gradiometro, il segnale differenziale  $\psi(t)$  acquista una forma più complessa se si considera la presenza delle cavità ottiche, in particolare bisogna tener conto della funzione di trasferimento della cavità ottica e del rumore aggiuntivo derivante dalle fluttuazioni di lunghezza della cavità che si riflettono in rumore di frequenza del laser rivelato dall'interferometro atomico

$$S_h(\omega) = \frac{4S_{\delta\nu}(\omega)}{\nu_0^2} + \frac{4}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_p^2}} \left( \frac{2\omega^2 S_x(\omega)}{\omega_p^2 L^2} + S_{NN}(\omega) + \frac{S_\alpha(\omega)}{2(nkL)^2 16 \sin^4\left(\frac{\omega T}{2}\right)} \right) \quad (4.1)$$

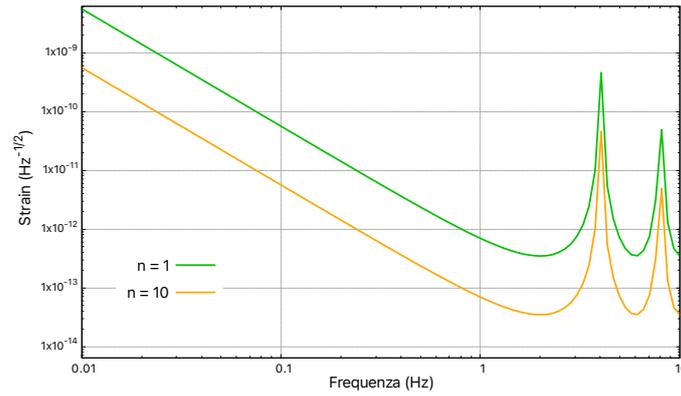
dove

- $S_{\delta\nu}(\omega)$  è la PSD del rumore in frequenza del laser che per *MIGA* vale  $S_{\delta\nu}(f) = 0.01/f \text{ Hz}^{-1}$ ;
- $\frac{\omega_p}{2\pi} = 2.5 \text{ kHz}$  è la frequenza del polo della cavità ottica, che agisce come un filtro passa-basso;
- $S_x(\omega)$  è la PSD del rumore dato oscillazioni della lunghezza delle cavità; esso viene mitigato attraverso i sistemi di sospensione simili ai super-attenuatori utilizzati per l'interferometro *VIRGO*, in particolare consistono in due pendoli lunghi 20 cm per attenuare vibrazioni orizzontali in aggiunta ad un sistema di molle compresse per ridurre i movimenti verticali [16];
- $S_{NN}(\omega)$  corrisponde alla PSD del rumore newtoniano dovuto a fluttuazioni di densità del mezzo che circonda l'interferometro. In [17] viene studiato il limite inferiore per il rumore newtoniano nei laboratori LSBB, trovando un valore di  $10^{-16} \text{ Hz}^{-1/2}$  in corrispondenza di una frequenza di 0.1 Hz;
- $S_\alpha(\omega)$  è la PSD del detection noise, che corrisponde a  $S_\alpha(\omega) = 10^{-6} \text{ Hz}^{-1}$  per un flusso atomico di  $\dot{N}_{\text{at}} = 10^6$  atomi/s.

In Figura 4.3 è mostrato un confronto tra lo spettro di potenza per l'interferometro *MIGA* se  $n = 1$  e se  $n = 10$ , in cui si è trascurato il termine  $S_x(\omega)$  supponendo di aver opportunamente sospeso le cavità. L'utilizzo di LMT con  $n = 10$  migliora inoltre la sensibilità dello strumento di un'ordine di grandezza.

## 4.3 Proiezioni future

Come mostrato nel paragrafo precedente, il massimo regime di sensibilità per *MIGA* corrisponde a circa  $3 \cdot 10^{-13} \text{ Hz}^{-1/2}$  per frequenze di 2 Hz (Figura 3.7); questo valore è però svariati ordini di grandezza



**Figura 4.3:** Confronto tra spettri di potenza per l'interferometro *MIGA* se  $n = 1$  (curva verde) e se  $n = 10$  (curva arancio).

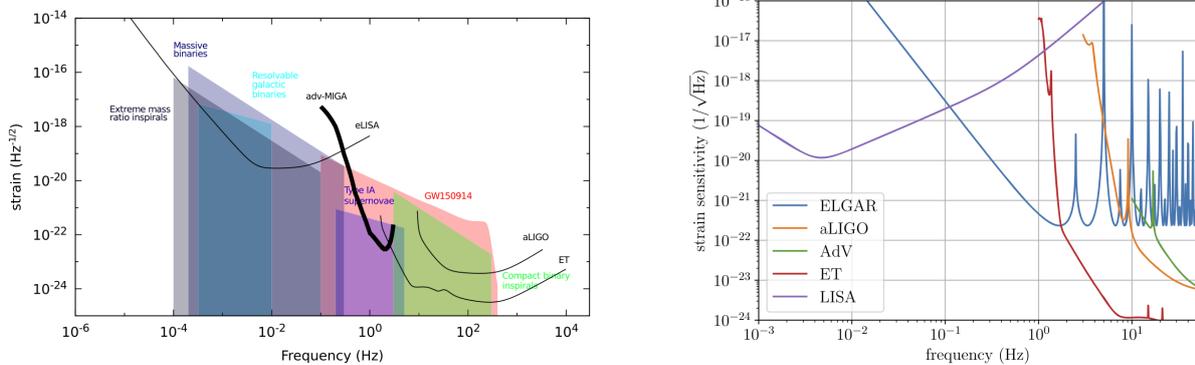
maggiore rispetto allo strain caratteristico di un'onda gravitazionale, che si aggira intorno a  $10^{-20} \text{ Hz}^{-1/2}$ . L'obiettivo di *MIGA* non è infatti la rivelazione di GW, ma lo studio di nuove tecnologie alla base dei futuri interferometri atomici con questo scopo.

Sarà necessario quindi attuare dei miglioramenti nello strumento per poter raggiungere le sensibilità desiderate, i principali sono:

- utilizzare flussi atomici con un numero maggiore di atomi;
- aumentare il momento trasferito agli atomi;
- aumentare il tempo di interazione tra atomi e laser;
- utilizzare bracci di lunghezza maggiore.

L'applicazione di questi miglioramenti, come si può osservare nella Figura 4.4 a sinistra, dovrebbe portare gli interferometri atomici a rivelare onde gravitazionali nelle MF, regione di frequenze in cui gli attuali interferometri ottici non sono sufficientemente sensibili.

Un progetto candidato per la rivelazione di GWs nelle medie frequenze attraverso interferometria atomica è *ELGAR* (European Laboratory for Gravitation and Atom-interferometric Research) [8]: l'obiettivo è costruire uno strumento che utilizzi un flusso atomico di  $10^{12}$  atomi/s, un valore 6 ordini di grandezza maggiore rispetto a *MIGA*, composto da  $N = 80$  gradiometri disposti lungo una baseline lunga  $L = 16.3$  km e distanti 200 m tra loro. Per aumentare la sensibilità l'obiettivo è di interrogare il fascio atomico attraverso diffrazione di Bragg con  $LMT \ 2n = 1000\hbar k$  per un tempo  $T = 200$  ms. In questa configurazione sarà possibile raggiungere picchi di sensibilità di  $4.1 \cdot 10^{-21} \text{ Hz}^{-1/2}$  per frequenze di 1.7 Hz, come mostrato in Figura 4.4 a destra.



**Figura 4.4:** Strain caratteristico di diversi rivelatori e sorgenti in funzione della frequenza. A sinistra la curva aspettata per l'esperimento *MIGA*, a destra per l'esperimento *ELGAR*.



# Conclusioni

Le onde gravitazionali sono un fenomeno rivelato per la prima volta negli anni novanta del Novecento. Esse si propagano alla velocità della luce e vengono classificate in base alla loro frequenza. Gli strumenti attualmente in funzione per rivelare questo fenomeno sono interferometri ottici, come il progetto statunitense *LIGO* e *VIRGO*, installato in Italia, i quali rivelano onde di frequenza relativamente alta; è inoltre in fase di costruzione l'interferometro ottico su satellite *LISA*, che verrà lanciato nel 2037, il quale è sensibile a basse frequenze.

È evidente che onde gravitazionali di frequenze medie non verrebbero rivelate dai precedenti detector, nonostante esse vengano prodotte da numerose sorgenti quali: sistemi binari rotanti, transizioni di fase del primo ordine nell'universo primordiale o stringhe cosmiche. Nascono quindi nuovi studi sull'interferometria atomica, in particolare sul suo ruolo nella rivelazione di onde gravitazionali.

La limitazione principale per questi strumenti sono le fonti di rumore sismico, che viene diminuito attraverso super-attenuatori, rumore newtoniano, limitato tramite configurazioni a gradiometro, rumore in frequenza del laser e detection noise.

Un progetto attualmente in costruzione è l'interferometro *MIGA*, nato nel 2013 con lo scopo di realizzare uno strumento che sia un'avanguardia per i futuri interferometri atomici che riveleranno onde gravitazionali nelle MF. Con i suoi parametri costruttivi infatti lo strumento non sarà abbastanza sensibile per rivelare onde, ma una volta completato lo studio su queste nuove tecnologie sarà possibile costruire nuovi strumenti in grado di raggiungere sensibilità sufficienti per la loro rivelazione; un esempio è l'interferometro *ELGAR*, il quale promette di raggiungere sensibilità di  $4.1 \cdot 10^{-21} \text{ Hz}^{-1/2}$ .



# Bibliografia

- [1] S. Dimopoulos, P. W. Graham, J. M. Hogan, M. A. Kasevich e S. Rajendran, «Atomic gravitational wave interferometric sensor», *Physical Review D*, vol. 78, n. 12, p. 122 002, 2008.
- [2] J. M. Hogan, D. M. Johnson, S. Dickerson et al., «An atomic gravitational wave interferometric sensor in low earth orbit (AGIS-LEO)», *General Relativity and Gravitation*, vol. 43, pp. 1953–2009, 2011.
- [3] P. W. Graham, J. M. Hogan, M. A. Kasevich, S. Rajendran e R. W. Romani, «Mid-band gravitational wave detection with precision atomic sensors», *arXiv preprint arXiv:1711.02225*, 2017.
- [4] C. J. Moore, R. H. Cole e C. P. Berry, «Gravitational-wave sensitivity curves», *Classical and Quantum Gravity*, vol. 32, n. 1, p. 015 014, 2014.
- [5] S. Braccini, L. Barsotti, C. Bradaschia et al., «Measurement of the seismic attenuation performance of the VIRGO Superattenuator», *Astroparticle Physics*, vol. 23, n. 6, pp. 557–565, 2005.
- [6] R. Geiger, «Future gravitational wave detectors based on atom interferometry», in *An overview of gravitational waves: Theory, sources and detection*, World Scientific, 2017, pp. 285–313.
- [7] C. Beenakker e C. Schonenberger, «Quantum shot noise», *arXiv preprint cond-mat/0605025*, 2006.
- [8] B. Canuel, S. Abend, P. Amaro-Seoane et al., «Technologies for the ELGAR large scale atom interferometer array», *arXiv preprint arXiv:2007.04014*, 2020.
- [9] R. Godun, M. d’Arcy, G. Summy e K. Burnett, «Prospects for atom interferometry», *Contemporary Physics*, vol. 42, n. 2, pp. 77–95, 2001.
- [10] B. Canuel, A. Bertoldi, L. Amand et al., «Exploring gravity with the MIGA large scale atom interferometer», *Scientific Reports*, vol. 8, n. 1, p. 14064, 2018.
- [11] M. Kozuma, L. Deng, E. W. Hagley et al., «Coherent splitting of Bose-Einstein condensed atoms with optically induced Bragg diffraction», *Physical Review Letters*, vol. 82, n. 5, p. 871, 1999.
- [12] Q. Hu, J. Yang, Y. Luo, A. Jia, C. Wei e Z. Li, «A theoretical analysis and determination of the technical requirements for a Bragg diffraction-based cold atom interferometry gravimeter», *Optik*, vol. 131, pp. 632–639, 2017.

- [13] P. W. Graham, J. M. Hogan, M. A. Kasevich e S. Rajendran, «New method for gravitational wave detection with atomic sensors», *Physical review letters*, vol. 110, n. 17, p. 171 102, 2013.
- [14] O. Amer, «Raffreddamento atomico e condensati Bose-Einstein», 2019.
- [15] D. Iazzetta, «Tecniche di raffreddamento di gas monoatomici alcalini», 2020.
- [16] B. Canuel, L. Amand, A. Bertoldi et al., «The matter-wave laser interferometer gravitation antenna (MIGA): New perspectives for fundamental physics and geosciences», in *E3S Web of Conferences*, EDP Sciences, vol. 4, 2014, p. 01 004.
- [17] B. Canuel, S. Pelisson, L. Amand et al., «MIGA: combining laser and matter wave interferometry for mass distribution monitoring and advanced geodesy», in *Quantum Optics*, SPIE, vol. 9900, 2016, pp. 54–65.
- [18] B. Canuel, S. Abend, P. Amaro-Seoane et al., «ELGAR—a European laboratory for gravitation and atom-interferometric research», *Classical and Quantum Gravity*, vol. 37, n. 22, p. 225 017, 2020.