

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Design of a Satellite's Attitude Control

Relatore: Prof. **Alessandro Beghi**

Tesi di Laurea di:

Matteo Ferronato

Matr. n. 573319

ANNO ACCADEMICO 2012/2013

Indice

| | |
|--|----|
| 1. Introduzione | 4 |
| 1.1. Il caso di studio: il Satellite | 4 |
| 2. Modellizzazione | 5 |
| 2.1 Composizione del Satellite | 5 |
| 2.2 Equazioni del moto | 8 |
| 2.3 Funzione di trasferimento dalle equazioni di stato | 12 |
| 3. Descrizione del controllore | 14 |
| 3.1. Specifiche di controllo..... | 14 |
| 3.2. Sintesi del controllore | 15 |
| 4. Controllore dallo spazio di stato..... | 23 |
| 4.1. Matrice di controllo e stimatore | 23 |
| 4.2. Selezione della locazione dei poli..... | 24 |
| 4.3. Sintesi del controllore | 26 |
| 5. Conclusioni..... | 29 |
| Bibliografia | 30 |

Indice delle figure

| | |
|-----------------|----|
| Figura 2.1..... | 5 |
| Figura 3.1..... | 16 |
| Figura 3.2..... | 16 |
| Figura 3.3..... | 18 |
| Figura 3.4..... | 19 |
| Figura 3.5..... | 21 |
| Figura 3.6..... | 22 |
| Figura 4.1..... | 23 |
| Figura 4.2..... | 24 |
| Figura 4.3..... | 27 |
| Figura 4.4..... | 27 |

“... ai miei genitori”

1. Introduzione

1.1. Il caso di studio: il Satellite

Con questa tesina ci si propone di analizzare e risolvere un problema tratto dal libro: *"Feedback Control of Dynamic Systems"* di **Gene F. Franklin, J. David Powell, Abbas Emami-Naeini**. Si tratta del controllo della direzione di puntamento di un satellite in orbita attorno ad una stella o ad un pianeta. Tale corpo viene inizialmente semplificato in modo consistente riducendolo a due masse e un'asta che le connette. In seguito ne viene controllato il "comportamento" attraverso principalmente due metodi: mediante controllore **PID** e mediante l'analisi del sistema in spazio di stato. A tal fine si sono utilizzati alcuni risultati numerici del libro.



2. Modellizzazione

2.1 Composizione del Satellite

Il satellite si presenta principalmente composto da due masse connesse da un'asta flessibile. Una massa, che chiameremo m_2 , rappresenta la sezione nella quale sono contenuti gli strumenti di analisi del satellite e la strumentazione. La seconda massa, che chiameremo m_1 , rappresenta il restante corpo del satellite. Quest'ultima contiene il sensore per rilevare gli eventuali spostamenti del pacchetto di strumentazione, dall'allineamento richiesto nelle specifiche di progetto.

Il sensore in questione è uno **Star Tracker**. Questo tipo di sensore è basato su un sistema che colleziona una serie di immagini della stella, o del pianeta, rispetto al quale si deve orientare la strumentazione. Tale strumento, è molto accurato nel leggere l'angolo di deviazione, del pacchetto di strumentazione, dall'angolo desiderato (θ_2). Ciò non basta, viene infatti introdotto un giroscopio per leggere la velocità angolare di m_2 .

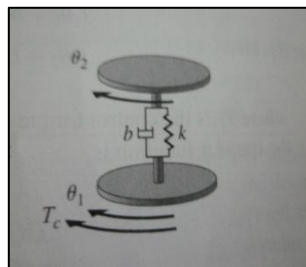


Figura 2.1

Nella figura 2.1 troviamo una rappresentazione del modello delle due masse rappresentate dai due dischi sovrapposti. All'asta è associato il relativo coefficiente di smorzamento b , che modella la coppia dovuta all'attrito viscoso dei due dischi. È indicato inoltre coefficiente k che ne rappresenta la costante di elasticità.

Ad ogni massa vengono poi associati due angoli, θ_1 e θ_2 che rappresentano la direzione in cui si trovano le due componenti del satellite ovvero strumentazione e restante corpo, rispetto alla direzione desiderata (verso il pianeta o la stella da osservare). Per controllare la posizione della strumentazione, che ricordiamo essere posizionata nel modello sulla massa m_2 , applichiamo un momento torcente T_c che rappresenta il segnale di ingresso.

Tale momento sarà applicato fisicamente da un attuatore che sarà montato sul corpo principale del satellite, questo genererà poi la coppia necessaria per portare in posizione sia l'elemento modellizzato da m_1 sia quello modellizzato da m_2 . L'attuatore deve naturalmente essere scelto adeguatamente in base alle necessità progettuali, deve dunque incontrare caratteristiche quali : precisione, affidabilità, peso (non dimentichiamo che si sta considerando il caso di un veicolo spaziale e che i mezzi per spedire attrezzature nello spazio hanno un costo elevato), potenza e durata (nel senso di durata nel tempo del componente).

Si presentano perciò varie possibilità per la scelta di tale componente. Di seguito viene riportata la descrizione dei generatori di momento possibili tratta dal “*Fondamenti di Meccanica del Volo Spaziale*” di G. Mengali e A. Quarta :

- **Ruote di reazione (Reaction wheels).** Sono dei rotori che operano a basso numero di giri. Vengono portati in rotazione (e controllati) mediante un motore elettrico e tipicamente l'asse di rotazione del rotore è allineato con un asse di controllo del satellite. Il motore elettrico agisce sulla ruota di reazione in risposta ad un disturbo esterno. Il livello di coppie ottenibili con questo sistema è compreso nel campo 0.05-2 Nm. Le principali caratteristiche, positive e negative, sono riassumibili nelle seguenti:
Vantaggi: Risposta rapida : i sistemi di controllo che impiegano questi dispositivi hanno elevate bande passanti (fino a diverse decine di hertz).
Svantaggi: Sono sistemi pesanti e costosi. Come tutte le ruote di reazione possono generare solo coppie interne al satellite.
- **Ruote di momento angolare (Momentum wheels).** Sono dei rotori che, a differenza delle ruote di reazione, operano ad elevato numero di giri, fornendo così al satellite una stabilità giroscopica. Il sistema di controllo tende ad aumentare (o diminuire) la velocità angolare con la quale operano nominalmente. Pertanto le variazioni di coppie che si possono ottenere con questi sistemi sono relativamente basse ed il loro tipico impiego è in satelliti con elevati requisiti di puntamento.

- **Giroscopi di controllo di coppia (Control Moment Gyros).** Sono costituiti da un rotore di momento angolare montato su un supporto (gimbal) orientabile in cui l'asse è perpendicolare all'asse di rotazione del rotore. Tipicamente possono fornire delle coppie molto più grandi di quelle caratteristiche delle ruote di reazione (fino a cento volte maggiori, cioè si raggiungono coppie dell'ordine dei 200 Nm) anche se hanno, come svantaggio, la pesantezza, ingombro e la maggior complessità del sistema.
- **Generatori di coppia magnetici.** Forniscono coppie continue e sono capaci di generare delle coppie di controllo precise. Lo svantaggio consiste nel basso livello di coppie generabili (dell'ordine di 0.001-0.01 Nm) che risulta generalmente insufficiente per effettuare rapide manovre di assetto. Inoltre le coppie magnetiche dipendono dall'inclinazione dell'orbita e dalla quota operativa . I generatori di coppia magnetici sono generalmente costituiti da bobine disposte lungo gli assi caratteristici del veicolo spaziale. Quando la bobina è percorsa da corrente elettrica, viene generato un campo magnetico che interagendo con quello terrestre fornisce una forza dipendente dalle caratteristiche della bobina e dall'entità della corrente che la attraversa.
- **Razzi di controllo.** Sono molto flessibili nel senso che possono fornire coppie di controllo di diversa entità, e per certe manovre sono indispensabili. Lo svantaggio è costituito dal fatto che tali sistemi sono intrinsecamente non lineari in quanto forniscono coppie di controllo di ampiezza costante e di durata finita.

Poiché nel modello le specifiche di progettazione lo permettono selezioniamo un **razzo di controllo** come attuatore per il modello che si andrà a realizzare, trascurando per il momento le non linearità dello strumento e supponendo quindi che fornisca coppie di controllo da considerarsi di durata infinita .

2.2 Equazioni del moto

Vengono ora costruite le equazioni che regolano il comportamento del sistema a due masse ed un asse che è stato descritto in precedenza. Tali equazioni non tengono conto delle non linearità del sistema e vengono dunque presentate come un sistema di equazioni differenziali di secondo grado; nelle quali i parametri descritti in sezione 2.1 sono i coefficienti. Il sistema risulterà come segue :

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 + b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k(\theta_1 - \theta_2) = T_c \\ J_2 \ddot{\theta}_2 + b(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + k(\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases}$$

Oltre alle costanti già introdotte nel sistema compaiono anche J_1 e J_2 che sono i relativi momenti di inerzia delle masse m_1 e m_2 . Va notato che nella formulazione di tali equazioni non sono stati inseriti, né sono stati considerati, termini relativi ad eventuali disturbi portati dall'ambiente esterno.

A questo punto possiamo scegliere come vettore di stato :

$$x = [\theta_2 \quad \dot{\theta}_2 \quad \theta_1 \quad \dot{\theta}_1]^T$$

Allora possiamo scrivere il sistema sopra citato nel seguente modo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k & -b & k & b \\ \frac{J_2}{J_2} & \frac{J_2}{J_2} & \frac{J_2}{J_2} & \frac{J_2}{J_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J_1} & \frac{b}{J_1} & -\frac{k}{J_1} & -\frac{b}{J_1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{J_2} \end{bmatrix} u$$

E l'uscita da controllare nel nostro caso assumerebbe la forma :

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]x$$

Naturalmente u sta ad indicare l'ingresso che, nel nostro caso, è il momento torcente T_c impresso dai razzi di controllo scelti per tale sistema. Ottenute ora le equazioni andiamo ad applicare la trasformata di Laplace per ottenere la funzione di trasferimento che lega l'ingresso di controllo con l'angolo θ_2 da controllare.

Introduciamo dunque la Laplace trasformata al sistema e otteniamo :

$$\begin{cases} s^2 J_1 \Theta_1(s) + sb(\Theta_1(s) - \Theta_2(s)) + k(\Theta_1(s) - \Theta_2(s)) = U(s) \\ s^2 J_2 \Theta_2(s) + sb(\Theta_2(s) - \Theta_1(s)) + k(\Theta_2(s) - \Theta_1(s)) = 0 \end{cases}$$

Dove $\Theta_1(s)$ e $\Theta_2(s)$ sono rispettivamente le Laplace trasformate delle funzioni, che individuano gli angoli θ_1 e θ_2 . A questo punto lo scopo è trovare la funzione :

$$G_2(s) = \frac{\Theta_2(s)}{U(s)}$$

In tal modo si lega , come detto in precedenza, l'ingresso, che in tal caso è indicato dalla sua trasformata $U(s)$,e l'angolo θ_2 .

Nei seguenti passaggi chiameremo per comodità $\Theta_1(s) = \Theta_1$ mentre $\Theta_2(s) = \Theta_2$ e l'ingresso sarà semplicemente $U(s) = U$. Procedendo quindi con le sostituzioni otteniamo :

$$\begin{cases} " \\ -k\Theta_1 - sb\Theta_1 = -s^2 J_2 \Theta_2 - sb\Theta_2 - k\Theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} " \\ \Theta_1 = \frac{(s^2 J_2 + sb + k) \Theta_2}{(sb + k)} \end{cases}$$

$$s^2 J_1 \frac{(s^2 J_2 + sb + k)}{(sb + k)} \Theta_2 + sb \left(\frac{(s^2 J_2 + sb + k)}{(sb + k)} \Theta_2 - \Theta_2 \right) + k \left(\frac{(s^2 J_2 + sb + k)}{(sb + k)} \Theta_2 - \Theta_2 \right) = U$$

$$\frac{s^2 J_1 (s^2 J_2 + sb + k) + s^3 b J_2 + s^2 k J_2}{(sb + k)} \Theta_2 = U$$

A questo punto basta un semplice passaggio per ottenere la funzione inizialmente ricercata:

$$G_2 = \frac{\Theta_2}{U} = \frac{(sb + k)}{s^2(s^2 J_2 J_1 + sb(J_1 + J_2) + k(J_1 + J_2))}$$

A tale formula andiamo a sostituire dei valori sperimentali dei momenti di inerzia J_1 e J_2 , ricordando che essi sono riferiti a due masse ideali che in realtà rappresentano corpi più complessi. Avremo quindi : $J_1 = 1$ e $J_2 = 0.1$. Sostituendo tali valori all'equazione precedente otteniamo :

$$G_2(s) = \frac{10bs + 10k}{s^2 (s^2 + 11sb + 11k)}$$

Andiamo ora a scrivere tale funzione in forma di Bode. Ne risulterà perciò la funzione :

$$G_2 = \frac{\frac{10}{11}(1 + \frac{b}{k}s^2)}{s^2(\frac{s^2}{11k} + \frac{bs}{k} + 1)}$$

Da tale funzione non siamo ancora in grado di ricavare i parametri come la pulsazione naturale e il fattore di smorzamento ξ , questo in quanto il coefficiente di smorzamento e la costante di elasticità dell'asta sono parametri variabili. In particolare, nel nostro caso, li considereremo variare come segue :

$$0.09 \leq k \leq 0.4$$

$$0.038 \sqrt{\frac{k}{10}} \leq b \leq 0.2 \sqrt{\frac{k}{10}}$$

Ciò considerato avremo, per la pulsazione naturale e per il fattore di smorzamento ξ risultati diversi a seconda dei valori dei parametri b e k . Possiamo ora scrivere delle formule generali per questi due valori ricavandole dalla forma di Bode, infatti, se la forma di Bode di una qualsiasi funzione di trasferimento razionale si presenta come :

$$W(s) = \frac{K_B}{s^l} \frac{\prod_k (1 + sT_k) \prod_k (1 + 2\xi_k \frac{s}{\omega_{nk}} + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2})}{\prod_k (1 + s\bar{T}_k) \prod_k (1 + 2\bar{\xi}_k \frac{s}{\bar{\omega}_{nk}} + \frac{s^2}{\bar{\omega}_{nk}^2})}$$

Allora dalla formula di G_2 si ricava facilmente che :

$$\omega_n = \sqrt{11k}$$

$$\xi = \frac{b\sqrt{11k}}{2k}$$

Con tali formule possiamo dunque calcolare entro quali intervalli di valori variano :

$$0.99 \leq \omega_n \leq 2.09$$

$$0.02 \leq \xi \leq 0.1$$

Naturalmente a seconda dei valori otterremo diverse funzioni di trasferimento e perciò sarebbero necessari vari studi di stabilità per tali funzioni. Quando ci si trova in tali situazioni è utile selezionare dei parametri nominali per tali valori, poi analizzare il comportamento della funzione in tali casi, costruire un compensatore, ed in seguito controllare il comportamento al variare dei parametri.

2.3 Funzione di trasferimento dalle equazioni di stato

Si può procedere ad una verifica sulla funzione di trasferimento del modello ottenuta nel paragrafo precedente mediante la descrizione in spazio di stato del sistema. Sappiamo dunque che dalla forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx + Ju \end{cases}$$

Possiamo ricavare la funzione di trasferimento ingresso/uscita come :

$$W(s) = H(sI - F)^{-1}G + J$$

Procedendo perciò al calcolo della funzione da noi desiderata partiamo considerando le matrici:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k & -b & k & b \\ J_2 & J_2 & J_2 & J_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k & b & -k & -b \\ J_1 & J_1 & J_1 & J_1 \end{bmatrix} ; \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ J_2 \end{bmatrix} ; \quad H = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] ; \quad J = 0$$

Procediamo quindi al calcolo nel seguente modo:

$$(sI - F)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - F)}{\det(sI - F)}$$

Per quanto riguarda il calcolo del determinante otteniamo:

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ k & s + \frac{b}{J_2} & -\frac{k}{J_2} & -\frac{b}{J_2} \\ J_2 & J_2 & J_2 & J_2 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -\frac{k}{J_1} & -\frac{b}{J_1} & \frac{k}{J_1} & s + \frac{b}{J_1} \end{bmatrix} \\ &= s \left[s \left(s + \frac{b}{J_2} \right) \left(s + \frac{b}{J_1} \right) - \frac{kb}{J_2 J_1} - s \frac{b^2}{J_1 J_2} + \left(s + \frac{b}{J_2} \right) \frac{k}{J_1} \right] + s^2 \frac{k}{J_2} \\ & \det(sI - F) = s^4 + s^3 \frac{b}{J_2} + s^3 \frac{b}{J_1} + s^2 \frac{k}{J_2} + s^2 \frac{k}{J_1} \end{aligned}$$

Come si vede dal determinante della matrice ottenuto, esso si dimostra essere esattamente il denominatore della funzione cercata, mentre per quanto riguarda il calcolo della matrice $adj(sI - F)$ il calcolo risulterebbe piuttosto laborioso.

Sfruttiamo dunque le proprietà delle moltiplicazioni tra matrici per notare che, poiché interessa il prodotto $H(sI - F)^{-1}G$ esso si presenta come segue :

$$[1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & l & m & n \\ o & p & q & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_2} \end{bmatrix} = [a \ b \ c \ d] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_2} \end{bmatrix} = \frac{d}{J_2}$$

Nella fattispecie d si dimostra essere pari a :

$$d = \frac{-\det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ s + \frac{b}{J_2} & -\frac{k}{J_2} & -\frac{b}{J_2} \\ 0 & s & -1 \end{bmatrix}}{\det(sI - F)}$$

Mediante semplici passaggi otteniamo dunque la funzione desiderata $G_2(s)$.

Approfitando del modello in spazio di stato facciamo un'ultima considerazione sul sistema. Cerchiamo gli eventuali punti di equilibrio. Facendo una prima considerazione sulla struttura fisica del sistema ci aspetteremo che esso sia in una condizione di equilibrio qualora le due masse fossero allineate, ovvero quando non ci sia più una forza su una delle due causata dalla rotazione dell'altra.

Procedendo con i calcoli abbiamo che i punti di equilibrio del sistema a ingresso nullo corrispondono ai risultati della seguente equazione $Fx = 0$ dove F è la matrice considerata precedentemente mentre x è il vettore colonna:

$$x = [\theta_2 \ \dot{\theta}_2 \ \theta_1 \ \dot{\theta}_1]^T$$

Si trova quindi che il punto di equilibrio cercato è del tipo $x_{eq} = [1 \ 0 \ 1 \ 0]$; risultato perfettamente compatibile con le considerazioni fatte.

3. Descrizione del controllore

3.1. Specifiche di controllo

Una volta stabilito il modello del sistema si procede alla definizione delle relative specifiche di controllo. Si era richiesto, in particolare, un tempo di assestamento pari a 20 secondi ed una sovra elongazione non superiore al 15%. Da queste specifiche nel dominio del tempo cerchiamo ora le loro corrispondenti nel dominio della frequenza. Prima di fare ciò, tuttavia, bisogna stabilire dei valori dei parametri b e k sui quali lavorare, tenendo sempre a mente che questi sono soggetti a variazione. Una scelta ragionevole per tali valori è di considerare ad esempio gli estremi inferiori dei due valori ovvero $k = 0.091$ e conseguentemente $b = 0.0036$. Questa scelta fa sperare che un design buono per tali valori sia valido anche per valori superiori. Stabilito ciò si possono ora ricavare i parametri richiesti :

$$t_s = 20s$$

$$M_p \leq 15\%$$

Otteniamo quindi:

$$M_p = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \leq 0.15$$

$$\xi = 0.517 \cong 0.5$$

Tali specifiche corrispondono in particolare a una frequenza di attraversamento pari ad $\omega_c \cong 0.5$ rad/s e ad un margine di fase pari a :

$$m_\varphi = 1 - 0.8S = 1 - 0.8 * 0.15 = 0.88 \text{ rad} = 50^\circ$$

3.2. Sintesi del controllore

Cominciamo con il considerare il luogo delle radici ed i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento da controllare $G_2(s)$. Il luogo delle radici in particolare è un grafico che permette di studiare lo spostamento dei poli di una funzione di trasferimento ad anello chiuso al variare di un parametro reale K . Inoltre tale grafico fornisce la posizione di tutti i poli della funzione desiderata ed in particolare la loro distanza dall'asse immaginario e la loro posizione angolare rispetto l'origine. Tali dati permettono sia la valutazione dei poli dominanti, anche in presenza di una quasi cancellazione zero-polo, che la valutazione di tutti i picchi di risonanza.

Il diagramma di Bode invece dà un'utile descrizione del sistema da analizzare in funzione della frequenza. E' costituito da due diagrammi, quello delle ampiezze e quello delle fasi, utili entrambi per la valutazione della "lontananza" del sistema dai margini richiesti nel dominio della frequenza e, conseguentemente, utile per la sintesi del controllore.

Veniamo ora ai diagrammi in questione per la funzione:

$$G_2(s) = \frac{10bs + 10k}{s^2 (s^2 + 11sb + 11k)}$$

La quale con i parametri scelti $k = 0.091$ e $b = 0.0036$ sarà:

$$G_2(s) = \frac{0.036(s + 25)}{s^2(s^2 + 0.04s + 1)}$$

Di conseguenza i diagrammi citati per tale funzione saranno:

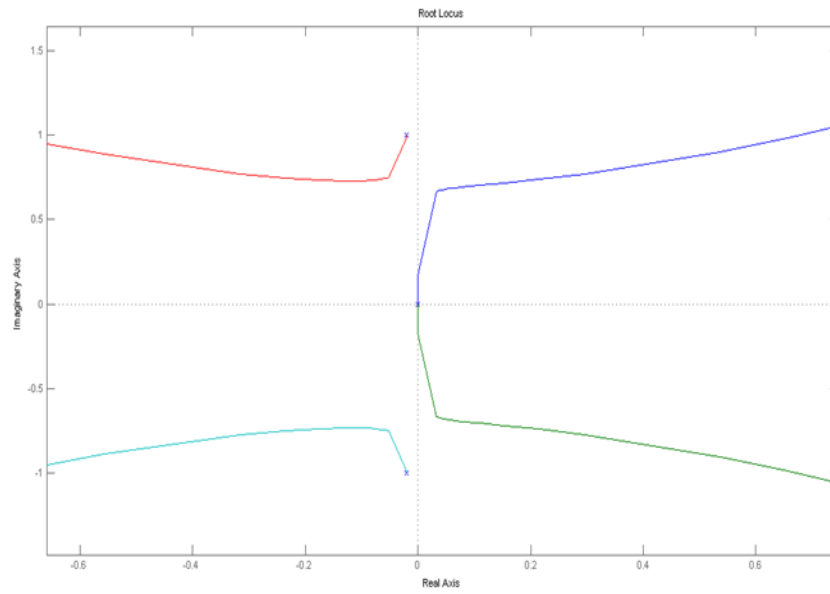


Figura 3.1

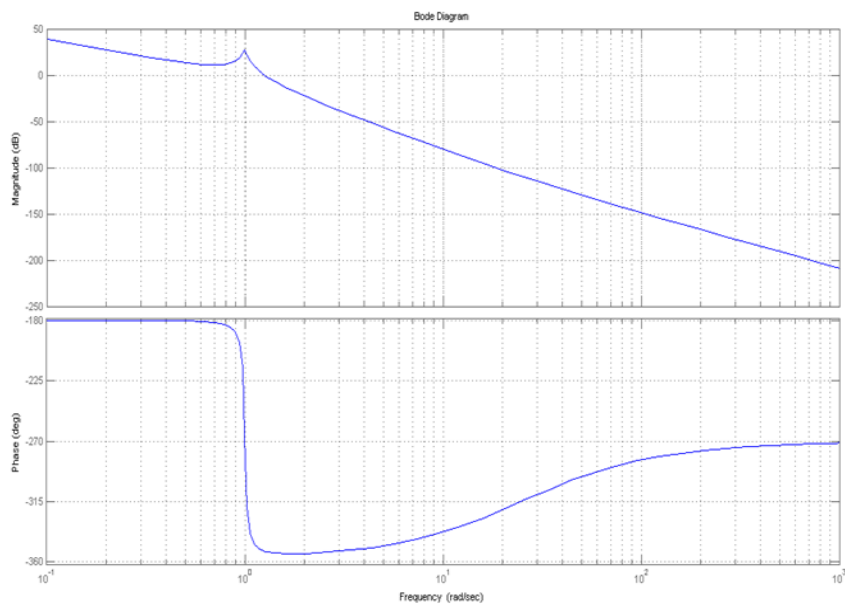


Figura 3.2

Come possiamo notare dal luogo delle radici di $KG_2(s)$ abbiamo due poli reali esattamente in corrispondenza dello zero e due radici complesse coniugate molto vicine all'asse immaginario (cosa che si poteva intuire osservando il denominatore della funzione di trasferimento analizzata). Questi poli portano il sistema retro azionato all'instabilità per valori crescenti di K , inoltre i poli coniugati complessi in tali posizione (di poli dominanti) comportano un transitorio dal carattere oscillatorio.

Dai diagrammi di Bode della funzione notiamo poi che in catena aperta siamo ben sotto il margine di fase richiesto di 50° .

Nell'intorno della pulsazione $\omega = 1 \text{ rad/s}$ è presente un picco di risonanza di ampiezza superiore ai 20dB che costituisce un problema per la stabilità del sistema. Il fatto che la frequenza di risonanza sia poi superiore di solo un fattore due rispetto alla pulsazione di attraversamento ω_c potrebbe costituire un ulteriore problema nella scelta del controllore.

Per prima cosa andiamo dunque a trattare il problema della risonanza. Notiamo anzitutto che invertendo la funzione di trasferimento del sistema ed escludendo i due poli nell'origine otteniamo un pre filtro per la nostra funzione:

$$G_2(s)^{-1} = \frac{s^2(s^2 + 0.04s + 1)}{0.036(s + 25)}$$

Non considerando perciò i due poli nell'origine, ora divenuti zeri, e levando il guadagno $1/0.036$; otteniamo, aggiungendo un'ulteriore polo in $s = -25$ per rendere il pre filtro proprio:

$$P(s) = \frac{(s^2 + 0.04s + 1)}{(s + 25)^2}$$

Ci aspetteremo da tale azione di eliminare il picco legato alla risonanza del sistema, ottenendo così una funzione molto più facilmente controllabile. Andiamo dunque a considerare i diagrammi di bode relativi alla funzione filtrata $P(s)G_2(s)$:

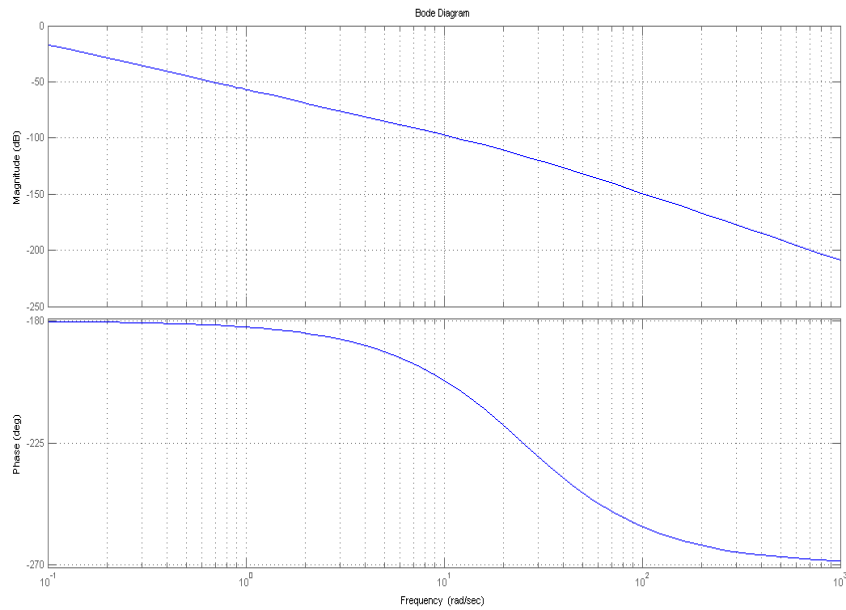


Figura 3.3

Come possiamo notare dal diagramma abbiamo eliminato il picco, questo risultato tuttavia è stato ottenuto invertendo la funzione di trasferimento $G_2(s)$. E' dunque lecito supporre che il pre filtro in questione sia ottimo per la funzione considerata, ma che non sia altrettanto efficace al variare dei parametri k e b che determinano i coefficienti di tale funzione. Il design richiesto deve infatti tenere conto delle variazioni dei parametri; andiamo allora a considerare l'effetto di $P(s)$ su :

$$\hat{G}_2(s) = \frac{(0.02s + 1)}{s^2(0.25s^2 + 0.02s + 1)}$$

Questa è la funzione di trasferimento con i massimi valori di b e di k e quindi in corrispondenza della massima rigidità dell'asta che connette le due masse; ottenuta ponendo $k = 0.4$ e $b = 0.04$. Pre filtrando dunque tale funzione con $P(s)$ otteniamo:

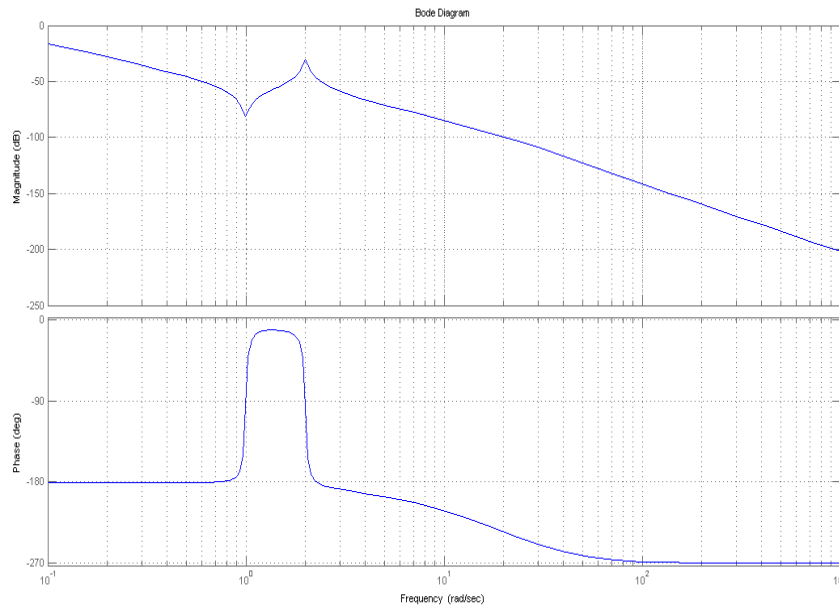


Figura 3.4

Da tale diagramma di Bode si osserva che il picco di risonanza non viene eliminato e al contrario si va a creare un ulteriore picco negativo di ampiezza intorno ai -80 dB. Il procedimento sembra tuttavia promettente soprattutto per quanto riguarda la funzione con i valori più bassi dei parametri. Proseguiamo perciò con una serie di tentativi per ottenere un buon compensatore per la nostra funzione di trasferimento filtrata.

Come possiamo notare dal diagramma di Bode che le specifiche di controllo non sono affatto rispettate, si nota infatti che la pulsazione di attraversamento non è ancora di 0.5 radianti al secondo e che il margine di fase non è soddisfatto a tale pulsazione, in nessuno dei due casi.

Per correggerle utilizziamo un controllore di tipo **PID**, utilizziamo a tal proposito il software MATLAB per la simulazione. Tale controllore è nella forma :

$$D(s)_{PID} = K_p + K_d s + \frac{K_I}{s}$$

I tre coefficienti sono rispettivamente, in ordine di apparizione nell'equazione: il guadagno proporzionale, quello derivativo ed infine quello integrativo. Il primo ha lo scopo sostanziale di migliorare la prontezza del sistema, in secondo di correggere le eventuali sovra elongazioni mentre il terzo si occupa dell'errore a regime. Per i nostri scopi uti-

lizziamo un metodo di iterazioni. Di seguito riportiamo un algoritmo utile per eseguire un'analisi per tentativi della risposta al gradino:

```
%iterazioni PD %
disp('-----G-----')
num=[0.036 0.036*25];
den=[1 0.04 1 0 0];
G1=tf(num,den);% funzione di trasferimento del sistema
numn=[1/(0.9)^2 0 1 ];
nump=[1 0.04 1];
denp=[1 50 25^2];
p=tf(nump,denp);%funzione di trasferimento del prefiltro
G=p*G1;

disp('-----Iterazioni-----')
p=[0.5 1 10 100]; %valori di Kp
d=[0.5,1,10,100,1000]; %valori di Kd
for n=1:length(p) %ciclo for per Kp
figure(n)
kp=p(n); %imposto il valore di Kp
for m=1:length(d) %ciclo for per Kd
kd=d(m); %imposto valore per Kd
pd=tf([kd kp],1); %scrivo il controllore PD
sys=feedback(pd*G,1); %retroazione del sistema per il controllo
step(sys,0:0.001:40) %disegno grafico
hold on
legend('Kd=0.5','Kd=1','Kd=10','Kd=100','Kd=1000');
end
Title('Risposta per Kp');
end
```

Come si può notare dal codice qui riportato si sono scelti diversi valori dei guadagni di K_p , mentre i valori di K_d sono stati scelti in tal modo per tenere sotto controllo la sovra elongazione che non deve superare il 15%.Le iterazioni avvengono attraverso due cicli for, di cui il primo seleziona il valore di k_p mentre il secondo il valore di k_d .In seguito vengono disegnati i grafici in corrispondenza di ogni valore del guadagno proporzionale.

Di questi si sono valutati il tempo di assestamento e la sovra elongazione massima e si è preso in considerazione il grafico con i valori migliori. Di seguito è riportato con il corrispondente tempo di assestamento e picco, alla risposta al gradino corrispondente al miglior compensatore.

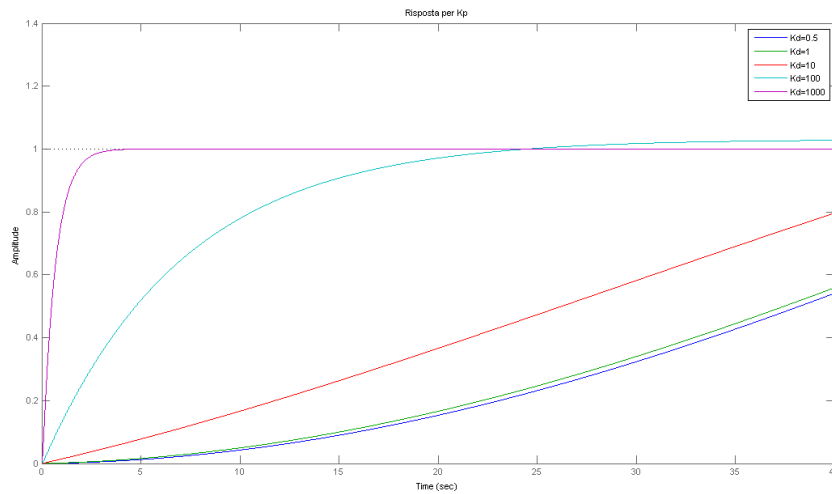


Figura 3.5

Un buon compromesso per le nostre necessità di controllo lo troviamo in corrispondenza dei parametri $K_p = 0.5$ e $K_d = 1000$. In corrispondenza di tali valori infatti la sovra elongazione si attesta attorno al 0.0346% mentre la specifica sul tempo di assestamento risulta pienamente raggiunta con un tempo di 2.58 secondi. Il design fino ad ora ottenuto sembra dunque ampiamente soddisfacente, bisogna tuttavia considerare anche altri valori per i parametri variabili. Andiamo dunque ad analizzare il comportamento del compensatore ottenuto, ovvero il pre filtro in serie al controllore PD di cui la funzione di trasferimento:

$$D(s)_{PD} = (1000s + 0.5)$$

nel caso di massima rigidità dell'asta ovvero con i valori di $k = 0.4$ e $b = 0.04$. Come già scritto in precedenza se andiamo a considerare la funzione trasferimento del sistema nel caso di massima rigidità dell'asta avremmo:

$$\hat{G}_2(s) = \frac{(0.02s + 1)}{s^2(0.25s^2 + 0.02s + 1)}$$

Imponendo a tale funzione il medesimo controllore trovato per la funzione precedente:

$$D(s) = (1000s + 0.5) \frac{(s^2 + 0.04s + 1)}{(s + 25)^2}$$

Ricaviamo allora il sistema in catena aperta :

$$D(s)\hat{G}(s)$$

Questo dà origine alla risposta al gradino:

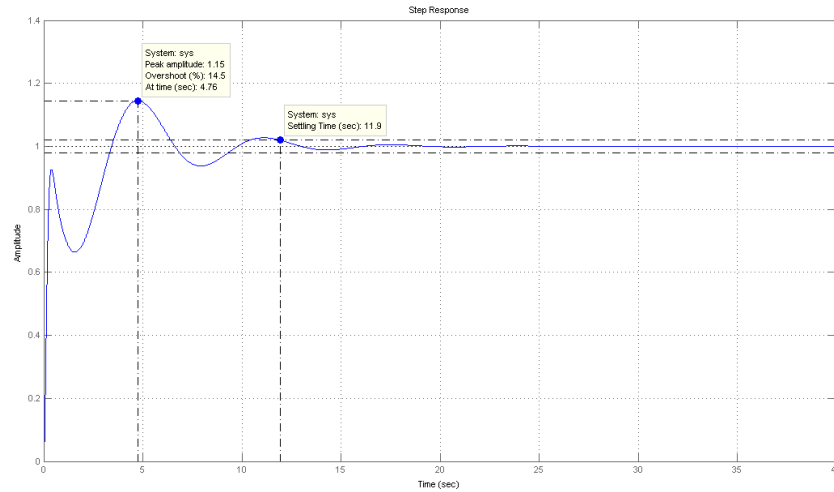


Figura 3.6

Anche in tal caso il grafico ci mostra come le specifiche per il tempo di assestamento alla risposta al gradino siano rispettate, la sovra elongazione è tuttavia aumentata avvicinandosi al valore limite dato dalle specifiche. Si possono naturalmente provare altre iterazioni per il controllo di tipo PID, anche se i risultati ottenuti sembrano più che soddisfacenti avendo rispettato in entrambi i casi le specifiche.

Bisogna inoltre considerare che le componenti derivate sono una idealità e nella realizzazione dei controllori PD considerati in questo paragrafo sarà necessario aggiungere un polo (solitamente in alta frequenza) per rendere la funzione di trasferimento propria e quindi realizzabile.

4. Controllore dallo spazio di stato

4.1. Matrici di controllo e stimatore

Cerchiamo, in questo capitolo, di costruire un compensatore partendo dal sistema in forma di spazio di stato. Introduciamo quindi una retroazione nella quale il controllore viene costruito per passi successivi:

1. Il primo passo è determinare il controllo. Lo scopo della legge di controllo è, partendo da un polinomio che indica la locazione dei poli in catena chiusa, di allocarli in modo adeguato. Il risultato è un sistema con polinomio caratteristico pari a quello desiderato. La locazione viene determinata in base alle specifiche di controllo, ed avviene mediante una retroazione sull'ingresso mediante la matrice K . La legge di controllo sarà infatti nella forma:
$$u = -Kx + Nv$$
2. Il secondo passo, che si rende necessario nel caso non fossero disponibili gli stati del sistema, è di costruire uno stimatore che andrà per l'appunto a stimare l'intero vettore di stato. Se lo stato stimato viene indicato con \hat{x} , sarebbe conveniente rimpiazzare il vero stato con quello stimato, la nuova legge di controllo ne risulterebbe: $u = -K\hat{x} + Nv$.
3. Le due componenti di stima e controllo andranno poi combinate insieme per costruire la legge di controllo finale e dunque il controllore vero e proprio.

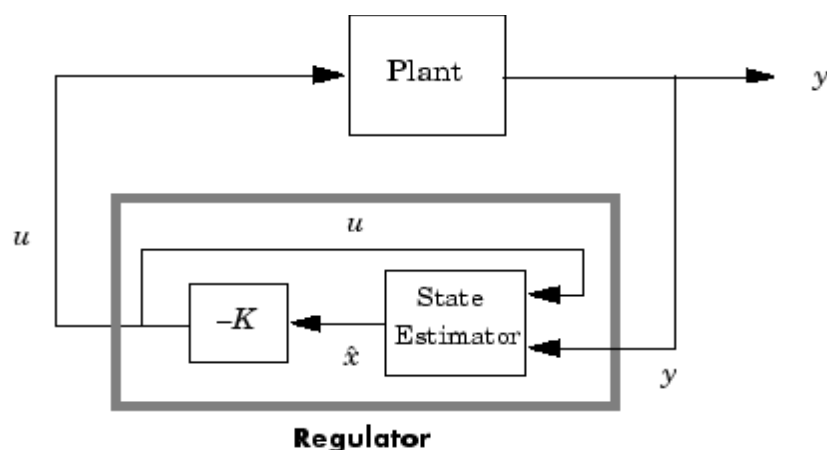


Figura 4.1

4.2. Selezione della locazione dei poli

Prima di produrre la legge di controllo bisogna selezionare i poli in catena chiusa. Un modo per ottenere tali dati è utilizzare un risultato ottenuto dalla Teoria del controllo ottimo. Tale teoria si propone di ricercare una funzione che ottimizza (massimizza o minimizza) una data funzione detta funzione obiettivo. Nel caso in questione si vorrà ad esempio minimizzare la norma dell'errore di inseguimento. Per fare ciò utilizzeremo un metodo chiamato Symmetric Root Locus (SRL). Tale metodo si basa su una scelta fatta a partire dal luogo definito dall'equazione:

$$1 + \rho G_0(-s)G_0(s) = 0$$

Dove G_0 è la funzione di trasferimento tra ingresso e uscita del sistema:

$$G_0(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = H(sI - F)^{-1}G = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Ne risulterà così un luogo delle radici simmetrico rispetto all'asse immaginario, con parametro ρ . Scegliendo quindi opportunamente il valore di tale parametro si otterranno dei poli corrispondenti alla minimizzazione della funzione obiettivo.

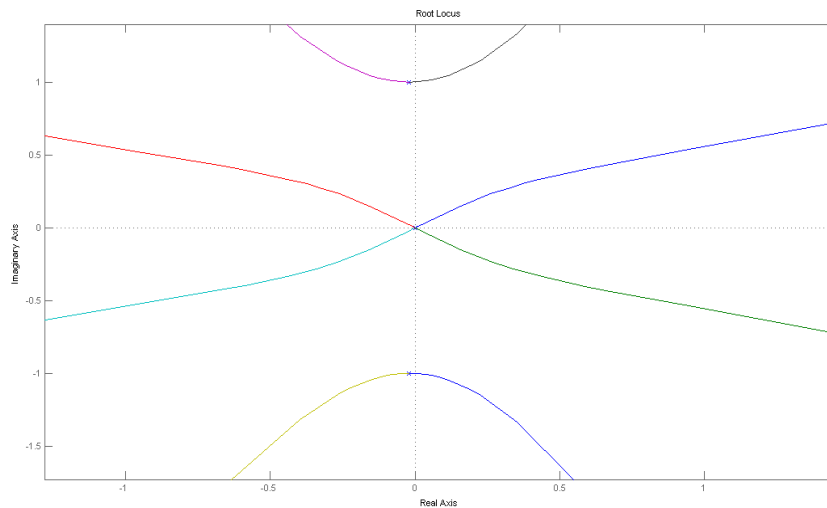


Figura 4.2

Dopo aver disegnato l'SRL dobbiamo selezionare ρ in modo tale da rispettare le specifiche di controllo iniziali, in particolare una banda di 0.5 rad/s.

Tra i poli selezioniamo quelli stabili, presenti cioè nel semipiano sinistro. Questi risulteranno perciò: $-0.45 \pm 0.34i$ e $-0.15 \pm 1.05i$. A questo punto ci serviamo della funzione place per ricavare la matrice di retroazione desiderata K .

$$K = [-0.2756 \quad 0.0415 \quad 0.6688 \quad 1.1604]$$

Per completare la selezione dei parametri per il controllore abbiamo bisogno dello stimatore. Per trovare la matrice L selezioniamo dei poli di molto superiori a quelli di controllo, questo per evitare di intaccare la robustezza del design. In effetti, uno stimatore molto veloce equivale all'incirca a non avere per nulla uno stimatore.

Sceghieremo perciò i seguenti poli: $-7.7 \pm 3.12i$ e $-3.32 \pm 7.58i$ e con la funzione place otteniamo la seguente matrice :

$$L = [22 \quad 242.1 \quad 1512.8 \quad 5486]$$

I risultati ottenuti con la funzione place si discostano leggermente da quelli forniti dal libro, si procede comunque alla sintesi del compensatore con i valori appena forniti.

Con l'introduzione di queste due matrici otteniamo delle nuove equazioni per il sistema, e in particolare per la legge di controllo. Troviamo, infatti, le nuove equazioni per il sistema retro azionato:

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx - GKx + GK\tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}} = F\tilde{x} - LH\tilde{x} \end{cases}$$

Dove x è lo stato del sistema, mentre \tilde{x} è l'errore che si commette utilizzando lo stato stimato al posto di quello reale. A questo punto ricaviamo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F - GK & GK \\ 0 & F - LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}$$

Di conseguenza l'equazione caratteristica per il sistema in catena chiusa sarà:

$$\det \begin{bmatrix} sI - F + GK & -GK \\ 0 & sI - F + LH \end{bmatrix} = 0$$

Poiché la matrice è triangolare a blocchi il suo determinante è dato dal prodotto dei determinanti dei blocchi sulla diagonale, perciò:

$$\det(sI - F + GK) \det(sI - F + LH) = \alpha_c(s)\alpha_e(s) = 0$$

Dove $\alpha_c(s)$ e $\alpha_e(s)$ sono rispettivamente il polinomio avente come radici i poli di controllo e quello avente come radici i poli legati allo stimatore.

4.3. Sintesi del controllore

Dalle specifiche sulla posizione dei poli di controllo e di stima possiamo infine ricavare la funzione di trasferimento del controllore desiderata. Prendiamo dunque in considerazione le equazioni dello stimatore:

$$\dot{\hat{x}} = (F - GK - LH)\hat{x} + Ly$$

$$u = -K\hat{x}$$

Da tali equazioni, dove \hat{x} indica lo stato stimato, si ricava facilmente, passando alle trasformate di Laplace, la relazione ingresso/uscita :

$$D_c(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = -K(sI - F + GK + LH)^{-1}L$$

Sostituendo con i valori delle matrici ottenute fino a questo momento ho perciò, il seguente codice MATLAB:

```
pc=[-0.45+0.34i -0.45-0.34i -0.15+1.05i -0.15-1.05i];
pl=[-7.7+3.12i -7.7-3.12i -3.32+7.85i -3.32-7.85i];
pll=cplxpair(pl);
pcc=cplxpair(pc);

F=[0 1 0 0;-0.91 -0.036 0.91 0.036;0 0 0 1;0.091 0.0036 -0.091 -
0.0036];
H=[1 0 0 0];
G=[0 ; 0 ; 0 ; 1];
K=place(F,G,pcc);
L=place(F',H',pll)';

%compensatore%
Feq=F-G*K-L*H;
dc=ss(Feq,L,K,0);
dcl=tf(dc)
```

la funzione di trasferimento per il compensatore ottenuta è pari a:

$$D_c(s) = \frac{7382s^3 + 3780s^2 + 6647s + 1972}{s^4 + 23.2s^3 + 270.2s^2 + 1875s + 6739}$$

Con questo tipo di compensatore abbiamo soddisfatto completamente le specifiche di progetto, per la funzione di trasferimento nominale scelta, ovvero $G_2(s)$. Di seguito è riportato il grafico della risposta al gradino del sistema in catena chiusa:

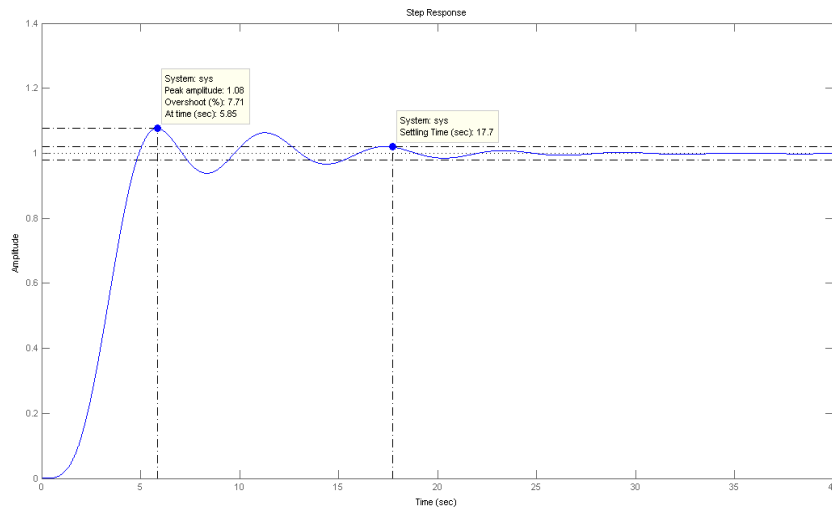


Figura 4.3

Come possiamo notare le specifiche sono ampiamente soddisfatte nel caso della funzione di trasferimento con asta meno rigida ovvero per valori più bassi di k . Infatti la sovra elongazione si ferma al 7.71% mentre il tempo di assestamento è di 17.7 secondi. Dato il risultato ottenuto si procede con la verifica della bontà del design anche nel caso di maggior rigidezza del collegamento fra le due masse. Con la funzione $\hat{G}_2(s)$, otteniamo il seguente andamento temporale:

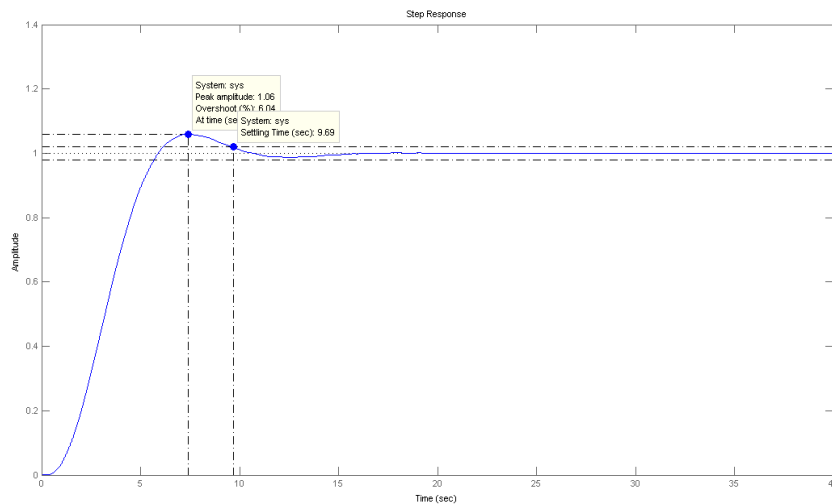


Figura 4.4

L'andamento ottenuto in tal caso è ancora migliore con una sovra elongazione dello 6.04% ed un tempo di assestamento di 9.69 secondi. Confrontando i due grafici si osserva che con valori di k e conseguentemente di b maggiori si ottengono migliori transitori ed in generale migliori prestazioni in risposta al gradino.

5. Conclusioni

Andando a comparare i controllori ricavati, si può affermare che la loro definizione è fortemente influenzata dalla presenza della risonanza provocata dall'accoppiamento delle masse, e quindi dai valori di k . I valori dei due compensatori ottenuti si discostano da quelli forniti dal libro. Ho ottenuto infatti prestazioni di gran lunga migliori utilizzando come filtro, invece di quello riportato dal testo una versione ottenuta invertendo la funzione di trasferimento originaria e privandola del guadagno e dei poli nell'origine. Aggiungendo poi il controllore PD, le specifiche vengono soddisfatte sia per valori minori che maggiori di k e b .

Anche per quanto riguarda il compensatore con metodo di spazio di stato si può notare che le specifiche di controllo sono completamente soddisfatte per entrambi i casi sia di k preso come estremo inferiore, sia come estremo superiore. Una differenza si nota per quanto riguarda le sovra elongazioni che mentre nel primo caso cambiano sensibilmente al variare dei parametri, nel secondo rimangono sostanzialmente sullo stesso ordine di grandezza. Per quanto riguarda i tempi di assestamento invece sono migliori nel caso del controllore PD preceduto da filtro rispetto al caso del compensatore ottenuto con il secondo metodo.

Nonostante entrambi i metodi portino a risultati soddisfacenti il primo compensatore sembra più influenzato dalla variazione dei parametri, visto il notevole cambiamento dell'overshoot tra i due valori di k presi in esame; mentre il secondo sembra più solido, ovvero meno influenzato dalle variazioni.

Bibliografia

Gene F. Franklin, J.David Powell, Abbas Emami-Naeini, “*Feedback Control of dynamic Systems*”, sixth edition, Pearson, 2010

Sandro Zampieri, “*Dispensa di Controlli Automatici*”, Edizioni Libreria Progetto Padova

Mauro Bisiacco, Maria Elena Valcher, “*Controlli Automatici*”, Edizioni Libreria Progetto Padova, 2008

G. Mengali, A. Quarta, “*Fondamenti di meccanica del volo spaziale*”, Edizioni Plus, 2006

Marco Ombrella, “*Controllo di velocità di un motore elettrico in corrente continua*”, relatore: prof. Alessandro Beghi, Università degli studi di Padova, 2012