Luca Francesco Midolo 12/7/2004

MISURE DI RADON

INTRODUZIONE

La misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ interagisce bene con la topologia di $\mathbb{R}^n$: gli insiemi misurabili possono essere 'approssimati' da aperti e da compatti, e le funzioni integrabili possono essere 'approssimate' da funzioni continue. Vogliamo studiare misure che abbiano proprietà simili in spazi piú generali, e precisamente misure boreliane su spazi di Hausdorff localmente compatti. Questo comporta qualche ipotesi in piú da spendere sulle misure stesse: non ci andranno bene misure di Borel qualunque, ma chiederemo per esempio che tali misure siano finite sui compatti. Questo essenzialmente perchè vogliamo integrare le funzioni continue a supporto compatto.
È chiaro che data una misura μ la posizione $I(f) = \int f \, d\mu$ definisce un funzionale lineare su $L^1(\mu)$; cercheremo di invertire questo fatto, considerando funzionali lineari definiti su opportuni spazi di funzioni, come per esempio quello delle funzioni continue a supporto compatto.
Ogni funzionale di questo tipo sarà dato da integrazione rispetto ad una misura con proprietà simili alla misura di Lebesgue.

Indice

Spazi LCH

Definizione. Sia X spazio topologico. X si dice localmente compatto se ogni punto ha un intorno compatto.
Chiameremo spazi LCH gli spazi di Hausdorff localmente compatti.

Proposizione. *Se X è spazio LCH, U è aperto di X, e $x \in U$, allora esiste un intorno compatto di x contenuto in U.*

Dimostrazione. Possiamo assumere senza perdita di generalità che $cl_X U = \overline{U}$ sia compatto; altrimenti sostituiamo U con $U \cap \mathrm{int}_X F$ ove F è intorno compatto di X. Dimostriamo innanzitutto che se K è un compatto di X e $y \in K^c$, ci sono due aperti disgiunti A, B tali che $y \in A$ e $K \subseteq B$. Infatti per ogni $z \in K$ scegliamo A_z, B_z disgiunti con $y \in A_z$, $z \in B_z$. Allora $\{B_z\}_{z \in K}$ è un ricoprimento aperto di K, ed estraiamo un sottoricoprimento $\{B_{z_j}\}_{j=1}^n$. Basta ora porre $A = \bigcap_{j=1}^n A_{z_j}$ e $B = \bigcup_{j=1}^n B_{y_j}$.
Grazie a questo, scegliamo aperti (per $\overline{U}$) V, W disgiunti con $x \in V$ e $\partial U \subseteq W$. Siccome $W \subseteq U$, V è aperto anche di X, $\overline{V}$ è chiuso e quindi compatto in $U \setminus W$. Basta allora prendere $N = \overline{V}$. $\square$

Chiamiamo $C(X) = C(X, \mathbb{C})$ l'insieme delle funzioni continue su X a valori complessi.
Useremo molto spesso il seguente:

Lemma di Urysohn. *Se X spazio LCH, e $K \subseteq U \subseteq X$ dove K è compatto e U è aperto,allora esiste $f \in C(X, [0, 1])$ tale che $f = 1$ su K e $f = 0$ al di fuori di un compatto di U.*

Dimostrazione. omessa. $\square$

Enunciamo solo anche il:

Teorema di estensione di Tietze. *Se X spazio LCH e sia $K \subseteq X$ un compatto. Se $f \in C(K)$, allora esiste $F \in C(X)$ la cui restrizione a K coincide con f e $F = 0$ al di fuori di un compatto di X.*

Definizione. Se X è spazio topologico ed $f \in C(X)$, chiamiamo supporto di f il piú piccolo chiuso al di fuori del quale la funzione si annulla, cioè $\mathrm{supp}(f) = \mathrm{cl}_X(f^{\leftarrow}(\mathbb{R} \setminus \{0\}))$. Definiamo

$$C_c(X) = \{f \in C(X) : \mathrm{supp}(f) \text{ e' compatto}\}$$

Il lemma di Urysohn ci permette quindi di costruire funzioni continue a supporto compatto.
Infine, diciamo che $f \in C(X)$ si annulla all'infinito se preso $\varepsilon > 0$
l'insieme $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ è compatto, e definiamo infine

$$C_0(X) = \{f \in C(X) : f \text{ che si annulla a } \infty\}$$

Si ha ovviamente che $C_c(X) \subseteq C_0(X)$.

Nota. Se (X, τ) è spazio topologico, è definita la compattificazione di Alexandroff in questo modo: prendiamo un oggetto $\infty_X \notin X$, e definiamo una topologia su $\alpha X = X \cup \infty_X$: gli aperti di αX sono gli aperti di X e gli insiemi della forma $\alpha X \setminus K$, ove K è un sottoinsieme chiuso e compatto di X.
Allora αX è compatto, X è chiuso in αX se e solo se X è compatto, ed αX è di Hausdorff se e solo se X è LCH.
Le funzioni $f \in C(X)$ si estendono con continuità ad αX se e solo se $\lim_{x \to \infty_X} f(x)$ esiste finito.
Infine $C_0(X)$ consta esattamente delle $f \in C(X)$ tali che $\lim_{x \to \infty_X} f(x) = 0$.
Infatti se $f \in C_0(X)$,preso $\varepsilon > 0$ si ha

$$\{x : |f(x)| < \varepsilon\} = (\alpha X \setminus \{x : |f(x)| \geq \varepsilon\}) \setminus \{\infty_X\},$$

e il membro di destra è intorno bucato di ∞_X perchè $\alpha X \setminus \{x : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ è aperto in quanto $\{x : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ è compatto per ipotesi; viceversa, se $f \in C(X)$ ed il limite è zero, prolunghiamo f con continuità ponendo $f(\infty_X) = 0$, e allora preso $\varepsilon > 0$ si ha che $\{x : f(x) < \varepsilon\}$ è aperto che contiene ∞_X, quindi è della forma $\alpha X \setminus K$, ove K è un compatto di X, e semplicemente $K = \{x : |f(x)| \geq \varepsilon\}$: così $f \in C_0(X)$.

Proposizione. *Se X spazio LCH, $C_0(X)$ è la chiusura di $C_c(X)$ nella norma uniforme.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\{f_n\}$ sia una successione in $C_c(X)$ che converge uniformemente ad $f \in C(X)$. Preso $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $||f - f_n||_\infty < \varepsilon$. Ma allora se $x \notin \text{supp}(f_n)$ si ha $|f(x)| < \varepsilon$, e allora $f \in C_0(X)$.
Dobbiamo ora vedere che presa una $f \in C_0(X)$ troviamo una successione in $C_c(X)$ che converge uniformemente ad f. Innanzitutto ci possiamo restringere a funzioni positive, dividendo eventualmente la parte reale e quella immaginaria e poi le parti positive e negative. Poniamo ora $f_k = (f - 1/k) \vee 0$. Si ha

$$\text{cl}_X\{x : f_k(x) \neq 0\} = \text{cl}_X\{x : f(x) - 1/k > 0\} \subseteq \{x : f(x) - 1/k \geq 0\} =$$
$$= \{x : f(x) \geq 1/k\},$$

che è compatto per ipotesi, e dunque $f_k \in C_c(X)$.
Inoltre $||f - f_k)||_\infty \leq 1/k \to 0$; notiamo infine che le f_k formano una successione crescente. $\square$

Definizione. Se U aperto di X una $f \in C_c(X)$ si dice subordinata ad U (e si indica con $f \prec U$) se $0 \leq f \leq 1$ e $\text{supp}(f) \subseteq U$.

Notiamo che $f \prec U$ è una condizione piú forte di $0 \leq f \leq \chi_U$, che implica solo $\text{supp}(f) \subseteq \text{cl}_X U$.
Infine, concludiamo questo paragrafo introduttivo con una costruzione utile in diversi contesti.

Definizione. Sia X spazio topologico, $E \subseteq X$. $\{h_i\}_{i \in I} \in C(X, [0, 1])$ è detta una partizione dell'unità su E subordinata ad un ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di E se
i) ogni $x \in X$ ha un intorno nel quale solo un numero finito di h_i è non nullo,
ii) per ogni $i \in I$ si ha $U \in \mathcal{U}$ tale che $\text{supp}(h_i) \subseteq U$,
iii) si ha $\sum_{i \in I} h_i = 1$.

Allora vale il seguente fatto:

Proposizione. Sia X spazio LCH,K compatto di X, e $\{U_j\}_{j=1}^n$ un ricoprimento aperto di K. Allora c'è una partizione dell'unità su K subordinata a $\{U_j\}_{j=1}^n$ formata da funzioni in $C_c(X)$.

Dimostrazione. traccia. Sia $\{U_j\}_{j=1}^n$ ricoprimento aperto di K. Per ogni $x \in K$ abbiamo visto possiamo scegliere un intorno N_x di x compatto e contenuto in qualche U_j. Allora $\{\operatorname{int}_X N_x\}$ è ricoprimento aperto di K, da cui estraiamo un sottoricoprimento $K \subseteq \bigcup_{k=1}^m N_{x_k}$. Sia ora F_j l'unione degli N_{x_k} contenuti in U_j. Per il lemma di Urysohn esistono $g_1, ..., g_n \in C_c(X)$ con $g_j = 1$ su F_j e $\operatorname{supp}(g_j) \subseteq U_j$. Allora $\sum_{k=1}^n g_k \geq 1$ su K, e allora ancora per Urysohn esiste $f \in C_c(X)$ con $f = 1$ su K e $\operatorname{supp}(f) \subseteq \{x : \sum_1^n g_k(x) > 0\}$. Poniamo ora $g_{n+1} = 1 - f$; allora $\sum_1^{n+1} g_k > 0$ ovunque, e posto $h_j = g_j / \sum_1^{n+1} g_k$, si ha $\operatorname{supp}(h_j) \subseteq \operatorname{supp}(g_j) \subseteq U_j$ ed inoltre $\sum_1^n h_j = 1$ su K. $\square$

MISURE DI RADON

Definizione e prime proprietà

D'ora in avanti se non detto altrimenti sia X uno spazio LCH.

Definizione. Una misura μ su X è detta di Borel, o *boreliana*, se è definita su una σ-algebra $\mathcal{S}$ contenente quella dei boreliani.
La misura μ è detta *esternamente regolare* a un sottoinsieme $E \in \mathcal{S}$ se

$$\mu(E) = \inf \{\mu(U) : U \text{ aperto}, \ U \supseteq E\},$$

ed è detta *internamente regolare* a $E \in \mathcal{S}$ se

$$\mu(E) = \sup \{\mu(K) : K \text{ compatto}, \ K \subseteq E\}.$$

Una *misura di Radon* è una misura boreliana finita sui compatti che sia esternamente regolare su tutti i boreliani, ed internamente regolare su tutti gli aperti. La misura è detta regolare se è sia esternamente che internamente regolare su tutti i boreliani.

Esempi. 1) Le misure boreliane su $\mathbb{R}$ costruite a partire da una funzione crescente continua a destra sono di Radon. Questo si dimostra costruendole a partire dagli intervalli, rinviamo a [F].
2) Sia X spazio discreto. La misura cardinale ($\mu(E) = \text{Card}(E)$ se E è finito, $\mu(E) = \infty$ altrimenti) è chiaramente misura di Radon regolare.
3) Sia X discreto, e non numerabile. Sia $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ definita ponendo $\mu(E) = 0$ se E è finito o numerabile, $\mu(E) = \infty$ altrimenti.
Tale misura è esternamente regolare su ogni $E \in \mathcal{P}(X)$, ed è internamente regolare soltanto sui sottoinsiemi numerabili di X. Non è dunque misura di Radon.
4) Sia $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_d$ dove con $\mathbb{R}_d$ si intende $\mathbb{R}$ dotato della topologia discreta. Definiamo una misura μ sui boreliani di X ponendo $\mu(E) = \sum_{y \in \mathbb{R}_d} \lambda(E \cap (\mathbb{R} \times \{y\}))$, ove con λ si intende la misura di Lebesgue unidimensionale. Notiamo che $\mathbb{R} \times \{y\}$ è aperto in X, quindi per ogni boreliano di E di X l'insieme $E \cap (\mathbb{R} \times \{y\})$ è un boreliano di $\mathbb{R}$; inoltre il teorema di integrazione per serie a termini positivi mostra che effettivamente questa è una misura di Borel su X.
Tale misura non è esternamente regolare. Infatti se $\lambda(E \cap (\mathbb{R} \times \{y\})) > 0$ per un'infinità più che numerabile di $y \in \mathbb{R}_d$ allora $\mu(E) = \infty$: segue che ogni aperto la cui proiezione su $\mathbb{R}_d$ è più che numerabile ha misura infinita; quindi ogni aperto che contiene il chiuso $C = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$ ha misura infinita, ma $\mu(C) = 0$.

Vediamo qualche proprietà delle misure di Radon. Intanto possiamo estendere la regolarità a tutti gli insiemi σ-finiti.

Proposizione. *Sia μ misura di Radon su X. Allora μ è internamente regolare su tutti gli insiemi σ-finiti.*

Dimostrazione. Sia $\mu(E) < \infty$. Preso $\varepsilon > 0$, esiste U aperto, $U \supseteq E$ tale che $\mu(U) < \mu(E) + \varepsilon$, ed anche un compatto $F \subseteq U$ tale che $\mu(F) > \mu(U) - \varepsilon$. Allora $\mu(U \setminus E) < \varepsilon$, e per la regolarità esterna ($(U \setminus E)$ boreliano) esiste un aperto $V \supseteq (U \setminus E)$ tale che $\mu(V) < \varepsilon$. Sia ora $K = F \setminus V$. Allora $K \subseteq E$, è compatto

$(K = F \cap V^c)$, e si ha:

$$\mu(K) = \mu(F) - \mu(F \cap V) > \mu(U) - \varepsilon - \mu(V) > \mu(E) - \varepsilon - \varepsilon = \mu(E) - 2\varepsilon.$$

Se ora $\mu(E) = \infty$, E σ-finito, allora $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, dove gli E_j li prendiamo crescenti, $\mu(E_j) < \infty$, e $\mu(E_j) \to \infty$. Sia N un naturale; allora esiste j tale che $\mu(E_j) > N$, e quindi per l'argomento precedente esiste un compatto $K \subseteq E_j$ tale che $\mu(K) > N$. □

Corollario. *Ogni misura di Radon su X $\sigma - finita$ è regolare; se X è σ-compatto, ogni misura di Radon su X è regolare.*

Dimostrazione. La prima affermazione è ovvia, la seconda segue dal fatto che le misure di Radon sono finite sui compatti. □

Così per esempio la misura di Lebesgue è regolare. Inoltre è utile osservare che:

Proposizione. *Sia μ misura di Radon su X σ-finita, ed $E \in \mathcal{B}_X$.*
i) scelto $\varepsilon > 0$, esiste un aperto U e un chiuso F tali che $F \subseteq E \subseteq U$ e $\mu(U \backslash F) < \varepsilon$;
ii) esistono un F_σ-insieme A e un G_δ-insieme B tali che $A \subseteq E \subseteq B$ e $\mu(B \backslash A) = 0$.

Dimostrazione. i) Sia $\varepsilon > 0$.Siccome $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, con $\mu(E_j) < \infty$, per ogni j esiste U_j aperto, $U_j \supseteq E_j$, tale che $\mu(U_j \setminus E_j) < \varepsilon 2^{-j-1}$. Sia $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$. Si ha $U \supseteq E$ e

$$\mu(U \setminus E) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty}(U_j \setminus E_j) < \sum_{j=1}^{\infty}(U_j \setminus E_j) < \varepsilon/2.$$

Applicando lo stesso ragionamento a E^c esiste un aperto $V \supseteq E^c$ tale che $\mu(V \setminus E^c) < \varepsilon/2$. Poniamo $F = V^c$; F è chiuso e $F \subseteq E$. Ma ora

$$\mu(U \setminus F) = \mu(U \setminus E) + \mu(E \setminus F) = \mu(U \setminus E) + \mu(V \setminus E^c) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

ii) Sia $\varepsilon > 0$. Se N è un naturale, esistono aperti U_N e chiusi F_N, con $F_N \subseteq E \subseteq U_N$ tali che $\mu(U_N \setminus F_N) < \varepsilon 2^{-j-1}$ (per il punto i) . Posto $A = \bigcup_{N=1}^{\infty} F_N$ e $B = \bigcap_{N=1}^{\infty} U_N$, allora A è un F_σ-insieme, B è un G_δ-insieme, $A \subseteq E \subseteq B$ e

$$\mu(B \setminus A) \leq \mu(\bigcup_{N=1}^{\infty}(U_N \setminus F_N)) \leq \sum_{N=1}^{\infty} \mu(U_N \setminus F_N) < \varepsilon.$$

Essendo ε arbitrario si conclude. □

Vediamo infine un teorema di approssimazione per funzioni misurabili. Richiamiamo prima l'importante

Teorema di Egoroff. *Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio con misura finita e siano f_n una successione di funzioni misurabili ed f una funzione misurabile tali che $f_n \to f$ μ quasi ovunque.Allora preso $\varepsilon > 0$ esiste $E \subseteq X$ con $\mu(E) < \varepsilon$ e tale che $f_n \to f$ uniformemente su E^c.*

Ci servirà anche la seguente osservazione.

Proposizione. *Se μ misura di Radon su X, $C_c(X)$ è denso in $L^p(\mu)$ per $1 \leq p < \infty$.*

Dimostrazione. . Le funzioni semplici sono dense in $L^p(\mu)$, così basta mostrare che preso $E \in \mathcal{B}_X$ con $\mu(E) < \infty$, allora χ_E è approssimabile nella norma L^p con elementi di $C_c(X)$. Prendiamo $\varepsilon > 0$. Siccome μ è internamente regolare su tutti gli insiemi σ-finiti (in particolare su quelli finiti) esiste un compatto $K \subseteq E$ tale che $\mu(E \setminus K) < \varepsilon/2$ e un aperto U tale che $\mu(U \setminus E) < \varepsilon/2$. così $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$, e per il lemma di Uhryson possiamo scegliere $f \in C_c(X)$ tale che $\chi_K \leq f \leq \chi_U$.
Quindi, essendo $|\chi_E - f| \leq |\chi_U - f| \leq |\chi_U - \chi_K|$ si ottiene

$$||\chi_E - f||_p \leq \mu(U \setminus K)^{1/p} < \varepsilon^{1/p}.$$

□

Teorema di Lusin. *Sia μ misura di Radon su X, $f : X \to \mathbb{C}$ misurabile e tale che $\mu(E) < \infty$ dove $E = \{x : f(x) \neq 0\}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\varphi \in C_c(X)$ tale che $\mu\{x : f(x) \neq \varphi(x)\} < \varepsilon$. Se f è limitata, si può scegliere φ in modo tale che $||\varphi||_\infty \leq ||f||_\infty$.*

Dimostrazione. Sia f limitata. Allora $f \in L^1(\mu)$, e per la proposizione precedente prendiamo una successione $\{g_n\}$ che tenda ad f in $L^1(\mu)$; da questa estraiamo una sottosuccessione che converga ad f μ-quasi ovunque. Per il teorema di Egoroff ($\mu(E) < \infty$)) esiste $A \subseteq E$ tale che $\mu(E \setminus A) < \varepsilon/3$ e $g_n \to f$ uniformemente su A. A ha misura finita, in particolare è σ-finito e quindi possiamo scegliere B compatto, $B \subseteq A$ tale che $\mu(A \setminus B) < \varepsilon/3$ ed un aperto $U \supseteq E$ tale che $\mu(U \setminus E) < \varepsilon/3$. Ma f su B è continua, e per il teorema di estensione di Tietze esiste $g \in C_c(X)$ tale che $g = f$ su B e $\text{supp}(g) \subseteq U$. Ma siccome $\{x : f(x) \neq \varphi(x)\} \subseteq (U \setminus B)$ allora

$$\mu\{x : f(x) \neq \varphi(x)\} \leq \mu(U \setminus B) = \mu(A \setminus B) + \mu(E \setminus A) + \mu(U \setminus E) = \varepsilon.$$

Infine consideriamo $\alpha : C \to C$ definita da $\alpha(z) = z$ se $|z| < ||f||_\infty$, e $\alpha(z) = \text{sgn}(z)||f||_\infty$ altrimenti. Si ha che α è continua, e posto $\varphi = \alpha \circ g$ si ha che φ soddisfa ancora alla condizione $\mu(\varphi \neq f) < \varepsilon$ ed anche $||\varphi||_\infty \leq ||f||_\infty$.
Sia ora f illimitata. Definiamo $A_n := \{x : |f(x)| \leq n \, e \, f(x) \neq 0\}$. Allora $A_n \to E$ quando $n \to \infty$ e quindi esiste n tale che $\mu(E \setminus A_n) < \varepsilon/2$. Ma essendo f limitata su A_n, per il ragionamento fatto sopra esiste $\varphi \in C_c(X)$ tale che $\mu\{x : \varphi(x) \neq f\chi_{A_n}(x)\} < \varepsilon/2$, e quindi $\mu\{x : f(x) \neq \varphi(x)\} < \varepsilon$. □

Misure esterne

Interrompiamo un attimo per fare una breve digressione sulle misure esterne, che ci serviranno nel prossimo paragrafo.

Definizione. Sia X non vuoto.Una funzione $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ si dice misura esterna se:
i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
iii) Se $(A_j)_{j=1}^\infty \subseteq P(X)$, allora $\mu^*(\bigcup_1^\infty A_j) \leq \sum_1^\infty \mu^*(A_j)$.

Definizione.Se μ^* è una misura esterna su X, $A \subseteq X$ è detto μ^*-misurabile se per ogni $E \subseteq X$

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

Osserviamo che per verificare se un insieme è μ^*-misurabile è sufficiente verificare che il primo membro sia minore o uguale del secondo, ed anche solo per $\mu^*(E) < \infty$.

L'importanza delle misure esterne e della precedente definizione sta nel:

Teorema di Carathèodory. *Se μ^* è una misura esterna su X, l'insieme $\mathcal{M}$ dei μ^* misurabili è una σ-algebra, e la restrizione di μ^* a $\mathcal{M}$ è una misura completa.*

Funzionali lineari positivi su $C_c(X)$

Vogliamo caratterizzare lo spazio dei funzionali lineari positivi su $C_c(X)$ tramite le misure di Radon. Innanzitutto:

Definizione. Un funzionale lineare I su $C_c(X)$ è detto *positivo* se $f \geq 0 \Rightarrow I(f) \geq 0$.

Lemma. *Sia I funzionale lineare positivo su $C_c(X)$. Allora vale $|I(f)| \leq I(|f|)$.*

Dimostrazione. Innanzitutto se $f \leq g$ si ha $I(g-f) \geq 0$ e quindi $I(f) \leq I(g)$. Se f è reale, $-|f| \leq f \leq |f|$ da cui $-I(|f|) \leq I(f) \leq I(|f|$ e quindi $|I(f)| \leq I(|f|)$.
In generale, possiamo trovare α complesso di modulo 1 tale che $|I(f)| = \alpha I(f)$, e si ha $|I(f)| = \alpha I(f) = I(\alpha f) = I(\Re(\alpha f) + i\Im(\alpha f))$, ma essendo $|I(f)|$ un numero reale, si ha $\Im(\alpha f) = 0$, e dunque $|I(f)| = I(\Re(\alpha f)) \leq I(|\Re(\alpha f)|) \leq I(|\alpha f|) = I(|f|)$. □

Non è detto che un funzionale linare positivo su $C_c(X)$ sia continuo nella sup-norma, tuttavia:

Proposizione. *Se I funzionale linare positivo su $C_c(X)$, per ogni compatto $K \subseteq X$ esiste una costante L_K tale che se $f \in C_c(X)$ e $\operatorname{supp}(f) \subseteq K$ allora $|I(f)| \leq L_K||f||_\infty$.*

Dimostrazione. . Per il lemma sopra possiamo ridurci al caso in cui f sia reale. Se K è un compatto, per il lemma di Urysohn scegliamo $\varphi \in C_c(X)$ tale che $\varphi = 1$ su K. Se $f \in C_c(X)$ e $\operatorname{supp}(f) \subseteq K$, allora $|f| \leq ||f||_\infty \varphi$, cioè $||f||_\infty \varphi - f \geq 0$ e $||f||_\infty \varphi + f \geq 0$.
così $||f||_\infty I(\varphi) - I(f) \geq 0$ e $||f||_\infty I(\varphi) + I(f) \geq 0$, cioè $|I(f)| \leq I(\varphi)||f||_\infty$. □

In altre parole, è continua la restrizione di I al sottospazio $C_K(X)$ delle $f \in C_c(X)$ il cui supporto è contenuto in K (se è munito della sup-norma).
Se μ è una misura boreliana su X finita sui compatti, si ha chiaramente $C_c(X) \subseteq L^1(\mu)$, e quindi la mappa $f \to \int f d\mu$ definisce un funzionale lineare positivo su $C_c(X)$.
In realtà, *ogni* funzionale lineare positivo su $C_c(X)$ è dato da integrazione rispetto ad una unica misura di Radon, come dice il

Teorema di Rappresentazione di Riesz. *Sia I funzionale lineare positivo su $C_c(X)$. Allora esiste una unica misura di Radon μ su X tale che $I(f) = \int f d\mu$ per ogni $f \in C_c(X)$. Inoltre valgono*
i) $\mu(U) = \sup\{I(f) : f \in C_c(X) \text{ e } f \prec U\}$ per ogni aperto $U \subseteq X$;
ii)$\mu(K) = \inf\{I(f) : f \in C_c(X) \text{ e } f \geq \chi_K\}$ per ogni compatto $K \subseteq X$.

Dimostrazione. . Proviamo innanzitutto l'unicità. Sia μ misura di Radon con la proprietà che $I(f) = \int f d\mu$; vogliamo vedere che se U è aperto,

$$\mu(U) = \sup\{I(f) : f \in C_c(X) \text{ e } f \prec U\}$$

Se $f \prec U$, si ha $I(f) = \int f d\mu \leq \mu(U)$, e quindi passando al sup il membro di destra è minore o uguale del membro di sinistra.
Se ora K è compatto, $K \subseteq U$, scegliamo $f \in C_c(X)$ tale che $f \prec U$ ed $f = 1$ su K

(lemma di Uhryson), quindi $\mu(K) \leq \int f d\mu = I(f)$. Ma μ è internamente regolare su U, e quindi i) è soddisfatta.
Allora μ è fissata da I sugli aperti, e quindi su tutti i boreliani per la regolarità esterna.
Definiamo ora per ogni U aperto

$$\mu(U) = \sup\{I(f) : f \in C_c(X)\, e\, f \prec U\}$$

e definiamo anche per ogni $E \subseteq X$

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(U), U \text{ aperto}, U \supseteq E\}$$

Osserviamo che se $U \subseteq V$ allora $\mu(U) \leq \mu(V)$, e quindi se U è aperto $\mu(U) = \mu^*(U)$.
Dividiamo la dimostrazione in 4 punti.
(I) $\mu^*(E)$ è una misura esterna;
(II) Ogni aperto è μ^*-misurabile;
A questo punto si potrà dire grazie al teorema di Caratheodory che ogni boreliano è μ^*-misurabile e che $\mu = \mu^*_{|\mathcal{B}_X}$ è una misura boreliana; inoltre è esternamente regolare e soddisfa a i) per definizione.
(III) μ soddisfa a ii);
A questo punto μ è finita sui compatti. Inoltre, μ è anche internamente regolare sugli aperti: scelto U aperto e $\alpha < \mu(U)$, prendiamo $f \in C_c(X)$ tale che $f \prec U$ e $I(f) > \alpha$, e sia $K = \text{supp}(f)$. Se $g \in C_c(X)$ e $g \geq \chi_K$, allora $g \geq f$ e quindi $I(g) \geq I(f) \geq \alpha$; ma allora per la ii) si ha $\mu(K) < \alpha$, così μ è internamente regolare su U.
(IV) se $f \in C_c(X)$ allora $I(f) = \int f d\mu$.
Con questo la dimostrazione sarà terminata.
(I). Vogliamo mostrare che se $\{U_j\}_{j=1}^\infty$ è una successione di aperti tale che $U = \bigcup_{j=1}^\infty U_j$, allora $\mu(U) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(U_j)$. Sia $U = \bigcup_{j=1}^\infty U_j$, $f \in C_c(X)$, $f \prec U$, $K = \text{supp}(f)$.
Essendo K compatto, $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_j$, e come abbiamo visto possiamo scegliere una partizione dell'unità su K subordinata a tale ricoprimento, cioè prendiamo $g_1, .., g_n \in C_c(X)$ tali che $g_j \prec U_j$ e $\sum_1^n g_j = 1$ su K. Ma siccome $f = \sum_1^n f g_j$ e $f g_j \prec U_j$, si ha

$$I(f) = \sum_1^n I(f g_j) \leq \sum_1^n \mu(U_j) \leq \sum_1^\infty \mu(U_j)$$

Passando al sup nella relazione sopra si ottiene $\mu(U) \leq \sum_1^\infty \mu(U_j)$, come voluto.
Da questo segue subito che per ogni $E \subseteq X$,

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_1^\infty \mu(U_j) : U_j \text{ aperti}, E \subseteq \bigcup_1^\infty U_j\right\}$$

e questa espressione definisce una misura esterna. Brevemente: se $E = \bigcup_i E_i$, e $\varepsilon > 0$, scegliamo U_{ij} tale che $E_i \subseteq \bigcup_j U_{ij}$ e $\sum_{j=1}^\infty \mu(U_{ij}) \leq \mu^*(E_i) + \varepsilon 2^{-i}$. Si ha $E_i \subseteq \bigcup_j U_{ij}$ e allora

$$\mu^*(\bigcup_i E_i) \leq \sum_i \sum_j \mu(U_{ij}) \leq \sum_i \mu^*(E_i) + \varepsilon.$$

(II) Dobbiamo mostrare che se U è aperto ed $E \subseteq X$ tale che $\mu^*(E) < \infty$, allora $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \setminus U)$ [se $\mu^*(E) = \infty$ sarebbe ovvio, e la disuguaglianza inversa è una proprietà della misura esterna; infine $(E \cap U^c) = (E \setminus U)$].

Supponiamo E aperto. Allora $E \cap U$ è aperto, quindi preso $\varepsilon > 0$ esiste $f \in C_c(X)$ tale che $f \prec E \cap U$ e $I(f) > \mu(E \cap U) - \varepsilon$. Inoltre, $E \setminus \mathrm{supp}(f)$ è aperto, quindi esiste $g \in C_c(X)$ tale che $g \prec E \setminus \mathrm{supp}(f)$ e $I(g) > \mu(E \setminus \mathrm{supp}(f)) - \varepsilon$. Ma adesso $f + g \prec E$, e allora

$$\mu(E) \geq I(f)+I(g) > \mu(E\cap U)+\mu(E\setminus \mathrm{supp}(f))-2\varepsilon \geq \mu^*(E\cap U)+\mu^*(E\setminus U)-2\varepsilon.$$

Se $\varepsilon \to 0$ abbiamo la disuguaglianza voluta.
In generale, se $\mu^*(E) < \infty$ scegliamo un aperto $V \supseteq E$ tale che $\mu(V) < \mu^*(E) + \varepsilon$, e quindi

$$\mu^*(E) + \varepsilon > \mu(V) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*((V \setminus U) \geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \setminus U).$$

Se $\varepsilon \to 0$ abbiamo la disuguaglianza voluta.
(III) Se K è compatto, $f \in C_c(X)$, e $f \geq \chi_K$, sia $U_\varepsilon = \{x : f(x) > 1-\varepsilon\}$. Allora U_ε è aperto, e se $g \in C_c(X)$,$g \prec U_\varepsilon$, si ha $g \leq (1-\varepsilon)^{-1} f$ e quindi $I(g) \leq (1-\varepsilon)^{-1} I(f)$, e se $\varepsilon \to 0$ si ha $\mu(K) \leq I(f)$, e passando all'inf abbiamo provato che $\mu(K) \leq \inf\{I(f) : f \in C_c(X)\ e\ f \geq \chi_K\}$.
Se ora U aperto, $U \supseteq K$, scegliamo (lemma di Urysohn) $f \in C_c(X)$ tale che $f \prec U$ e $f \geq \chi_K$; dunque $I(f) \leq \mu(U)$, e per la regolarità esterna su K, abbiamo (prendere l'inf) anche l'altra disuguaglianza.
(IV) Basta provare $I(f) = \int f d\mu$ solo quando $f \in C_c(X, [0, 1])$: scritta $f = u + iv$, $u = u^+ - u^-$,e posto ad esempio $\mu = \max_X(u^+)$, e $h = u^+/\mu$, allora $h \in C_c(X, [0, 1])$ e anche $u^+ = h\mu$, cioè I è determinato da come agisce su $C_c(X, [0, 1])$.
Dato N un naturale, per $1 \leq j \leq N$ sia $K_j = \{x : f(x) \geq j/N\}$ e sia $K_0 = \mathrm{supp}(f)$.
Definiamo poi $f_1, ..., f_n \in C_c(X)$ in questo modo: $f_j(x) = 0$ se $x \notin K_{j-1}$, $f_j(x) = f(x) - (j-1)/N$ se $x \in K_{j-1} \setminus K_j$, e $f_j(x) = 1/N$ se $x \in K_j$.
In altri termini $f_j = ((f - \frac{j-1}{N}) \vee 0) \wedge \frac{1}{N}$.
Allora $\chi_{K_j}/N \leq f_j \leq \chi_{K_{j-1}}/N$, quindi

$$\mu(K_j)/N \leq \int f_j d\mu \leq \mu(K_{j-1})/N$$

Inoltre, se U aperto, $U \supseteq K_{j-1}$ si ha $I(f_j) \leq \mu(U)/N$, e quindi, sfruttando ii) e la regolarità esterna,

$$\mu(K_j)/N \leq I(f_j) \leq \mu(K_{j-1})/N.$$

Inoltre, si ha che $f = \sum_{j=1}^n f_j$, quindi

$$N^{-1}\sum_{j=1}^{N} \mu(K_j) \leq \int f d\mu \leq N^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} \mu(K_j),$$

$$N^{-1}\sum_{j=1}^{N} \mu(K_j) \leq I(f) \leq N^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} \mu(K_j).$$

Segue che

$$|I(f) - \int f d\mu| \leq (\mu(K_0) - \mu(K_n))/N \leq \mu(\mathrm{supp}(f))/N.$$

Ma μ è finita sui compatti, e per l'arbitrarietà di N si conclude. $\square$

Osservazione. Se I è un funzionale lineare positivo su $C_c(X)$ la norma operatoriale di I è $||I|| = \mu(X)$, ove μ indica la misura di Radon associata a I. Infatti se $f \in C_c(X)$, $0 \leq |f| \leq 1$, si ha $|I(f)| \leq |\int_X f d\mu \leq \int_X |f| d\mu \leq \mu(X)$, e d'altra parte se $t < \mu(X)$ in virtú dell'equazione $\mu(X) = \sup\{I(f) : f \in C_c(X)\ e\ 0 \leq f \leq 1\}$ si

troverebbe una f con $I(f) > t$.
Quindi un funzionale lineare positivo si estende (in modo unico) a $C_0(X)$ se e solo se $\mu(X) < \infty$.

In realtà nella dimostrazione fatta sopra si è ottenuta una misura completa su tutti i μ^*-misurabili, e dalla regolarità esterna segue anche che per ogni $E \subseteq X$,

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{B}_X, B \supseteq E\},$$

quindi μ^* è proprio la misura esterna indotta da μ.
Infine, qualche autore preferisce limitare l'attenzione alla σ-algebra generata da $C_c(X)$ (la piú piccola σ-algebra che rende misurabili le $f \in C_c(X)$); tale σ-algebra si indica con $\mathcal{B}^0_X$, e i suoi elementi si dicono *insiemi di Baire*.

Insiemi di Baire. Apriamo una parentesi sugli insiemi di Baire. Innanzitutto è chiaro che $\mathcal{B}^0_X \subseteq \mathcal{B}_X$, infatti se $f \in C_c(X)$ ed A è aperto di $\mathbb{C}$, allora $f^{\leftarrow}(A)$ è aperto, dunque boreliano.
Vogliamo dare un esempio in cui coincidono e uno in cui l'inclusione è propria.
Sia dunque X uno spazio LCH. Proveremo due fatti:
1) Se $f \in C_c(X, [0, \infty)))$, allora preso $a > 0$ si ha che $f^{\leftarrow}([a, \infty])$ è un G_δ insieme compatto: infatti $\{x : f(x) \geq a\}$ è un chiuso contenuto nel supporto di f, e dunque è compatto; per vedere che è un G_δ insieme basta osservare che $\{x : f(x) \geq a\} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}}\{x : f(x) > a - 2^{-j}\}$.
2)Se $K \subseteq X$ è un G_δ insieme compatto, esiste $f \in C_c(X, [0, 1])$ tale che $K = f^{\leftarrow}(\{1\})$: infatti scritto $K = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j$, dove gli A_j sono aperti e decrescenti, prendiamo $f_0 \in C_c(X, [0, 1]$ tale che $f_0 = 1/2$ su K e $\mathrm{supp}(f) \subseteq A_0$, e in generale prendiamo $f_n \in C_c(X)$ tale che $f_n = 2^{-j-1}$ su K e $\mathrm{supp}(f_n) \subseteq A_n$. Posto ora $f = \sum_{j\in\mathbb{N}} f_j$, tale serie converge totalmente, così $f \in C_0(X)$, ed anzi $f \in C_c(X, [0, 1])$. Ora se $x \in K$ si ha $f(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j-1} = 1$, mentre se $x \notin K$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x \in A_n \setminus A_{n+1}$, e così $f(x) \leq \sum_{j=1}^{n} 2^{-j-1} < 1$.
Questi due fatti insieme provano che la σ-algebra $\mathcal{B}^0_X$ è la σ-algebra generata dai G_δ insieme compatti: infatti $\mathcal{B}^0_X$ è generata dagli insiemi $\{f^{\leftarrow}([a, \infty])\}$,$f \in C_c(X, \mathbb{R})$,$a \in \mathbb{R}$, e un insieme di questo tipo è un G_δ insieme compatto; viceversa se K è un G_δ insieme compatto cè una $f \in C_c(X)$ tale che $K^c = f^{\leftarrow}(\{1\}^c)$, cioè $K^c \in \mathcal{B}^0_X$, e dunque anche $K \in \mathcal{B}^0_X$.
Possiamo ora dare un esempio in cui $\mathcal{B}^0_X = \mathcal{B}_X$.
Sia X spazio LCH e C_{II}: ogni compatto è un G_δ insieme, visto che se K è compatto, K^c è aperto, e ogni aperto è σ-compatto, dunque $K^c = \bigcup_j K_j$, K_j compatti, e allora $K = \bigcap_j K_j^c$, e i K_j^c sono aperti. Dobbiamo vedere che ogni aperto A di X sta nella σ-algebra generata dai G_δ insieme compatti: ma ciò è ovvio, visto che ogni aperto in X è unione numerabile di compatti, ed ogni compatto in X è anche G_δ compatto.
Viceversa, diamo un esempio in cui l'inclusione è stretta. Sia X un insieme piú che numerabile munito della topologia discreta. Ovvio che tale spazio è LCH, e i compatti sono tutti e soli gli insiemi finiti: allora siccome ogni compatto di X è banalmente G_δ compatto, $\mathcal{B}^0_X$ è la σ-algebra generata dagli insiemi finiti. Tale σ-algebra consta degli insiemi finiti, di quelli numerabili, e degli insiemi piú che numerabili il cui complementare sia finito o numerabile. Preso $A \in \mathcal{P}(X) = \mathcal{B}_X$ in

modo tale che A sia piú che numerabile assieme al suo complementare, si ha $A \notin \mathcal{B}_X^0$.

Una misura boreliana su $\mathbb{R}^n$ è detta regolare se è finita sui compatti ed è esternamente regolare su ogni boreliano.
In realtà la prima condizione implica la seconda, e anzi implica anche che tale misura sia di Radon, e regolare: questo perchè la topologia di $\mathbb{R}^n$ ha una base numerabile.

Teorema. *Sia X spazio LCH in cui ogni aperto è σ-compatto (ad esempio, se X è C_{II}). Allora ogni misura boreliana su X finita sui compatti è di Radon, e anche regolare.*

Dimostrazione. . Se μ è misura boreliana finita sui compatti, allora $C_c(X) \subseteq L^1(\mu)$, quindi la mappa $I(f) = \int f d\mu$ è un funzionale lineare positivo su $C_c(X)$. Sia ν la misura associata a tale funzionale come nel teorema di Riesz. Se $U \subseteq X$ è aperto, sia $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ dove i K_j sono compatti. Scegliamo ora $f_1 \in C_c(X)$ tale che $f_1 \prec U$ e $f = 1$ su K. Induttivamente, scegliamo $f_n \in C_c(X)$ tale che $f_n \prec U$ ed $f = 1$ su $\bigcup_{j=1}^{n} K_j$ e su $\bigcup_{j=1}^{n-1} \operatorname{supp}(f_j)$.
Allora $f_n \to \chi_U$ puntualmente quando $n \to \infty$, quindi per il teorema di convergenza monotona

$$\mu(U) = \int \lim_n f_n d\mu = \lim_n \int f_n d\mu = \lim_n I(f_n) = \lim_n \int f_n d\nu = \nu(U).$$

Quindi le misure μ e ν coincidono sugli aperti.
Se ora $E \subseteq \mathcal{B}_X$ e $\varepsilon > 0$, possiamo prendere un aperto V e un chiuso F tali che $F \subseteq E \subseteq V$ e $\nu(V \setminus F) < \varepsilon$. Ma $V \setminus F$ è aperto, dunque $\mu(V \setminus F) = \nu(V \setminus F) < \varepsilon$, in particolare si ha $\mu(V) < \mu(F) + \varepsilon \leq \mu(E) + \varepsilon$, cioè μ è esternamente regolare su tutti i boreliani; inoltre, F è σ-compatto (F è chiuso, e da $X = \bigcup_j C_j$ segue $F = \bigcup_j (F \cap C_j)$), quindi c'è un compatto $K \subseteq F$ tale che $\mu(F) < \mu(K) + \varepsilon$, da cui

$$\mu(E) \leq \mu(F) + \varepsilon < \mu(K) + \varepsilon + \varepsilon = \mu(K) + 2\varepsilon.$$

Quindi μ è di Radon, regolare, e anche uguale a ν per l'unicità asserita nel teorema di Riesz. $\square$

Osservazione. Se μ è misura boreliana (non necessariamente di Radon) finita sui compatti, possiamo associare al funzionale $\int f d\mu$ la misura di Radon ν: rifacendo pari pari la prima parte della dimostrazione sopra, si vede che le due misure coincidono sugli aperti σ-compatti.

Naturalmente non tutte le misure di Radon sono regolari: chiedere la regolarità è chiedere troppo se lo spazio non è σ-compatto.

Esempio. Sia $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_d$, ove con $\mathbb{R}_d$ denotiamo $\mathbb{R}$ con la topologia discreta. Sia $f : X \to \mathbb{C}$ funzione, e poniamo $f^y(x) = f(x, y)$.
(a) $f \in C_c(X)$ se e solo se $f^y \in C_c(\mathbb{R})$ per ogni y e $f^y = 0$ eccetto un numero finito di y;
Infatti se $f \in C_c(X)$, il supporto di f^y è un chiuso contenuto nella proiezione su $\mathbb{R}$ del supporto di f, che è un compatto; inoltre se $f^y = 0$ valesse per un numero finito o nullo di y, la proiezione del supporto di f su $\mathbb{R}_d$ sarebbe un insieme non finito, e quindi non sarebbe un compatto, perchè i compatti di $\mathbb{R}_d$ sono tutti e soli gli insiemi finiti. Viceversa, se $f^y \in C_c(\mathbb{R})$ per ogni y e $f^y = 0$ eccetto un numero

finito di y, si ha $\mathrm{supp}(f) = \bigcup_{y\in\mathbb{R}} \mathrm{supp}(f^y)$, e $\mathrm{supp}(f^y)$ è anche un compatto di X, e unione finita di compatti è un compatto.
(b) Definiamo un funzionale lineare positivo su $C_c(X)$ ponendo $I(f) = \sum_{y\in\mathbb{R}} \int f^y(x)dx$, e sia μ la misura di Radon associata a tale funzionale.
Allora $\mu(E) = \infty$ per tutti gli E tali che $E \cap (\mathbb{R} \times \{y\}) \neq \emptyset$ per una quantità piú che numerabile di y.
Il fatto che I sia un funzionale lineare positivo su $C_c(X)$ segue subito dalla definizione, e da quanto appena detto; per la regolarità esterna di μ su tutti i boreliani basta mostrare che preso comunque un aperto $U \supseteq E$ si ha $\mu(U) = \infty$. Scegliamo per ogni y tale che $E \cap (\mathbb{R} \times \{y\}) \neq \emptyset$ un x tale che $(x, y) \in U$. L'insieme di questi punti è piú che numerabile: li indicizziamo con $i \in I$. Per ognuno di questi punti esiste poi $\varepsilon_i > 0$ tale che $\{]x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i[\times\{y_i\}\} \subseteq U$. Sicuramente esiste ora $t > 0$ ed una successione $\{(x_j, y_j)\}$ presa dall'insieme $\{(x_i, y_i)_{i\in I}\}$ tale che $\varepsilon_j > t$ per ogni j : se così non fosse preso $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $\{i : \varepsilon_i > 2^{-n}\}$ sarebbe finito, e allora $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{i : \varepsilon_i > 2^{-n}\}$ sarebbe numerabile. Sia ora $N \in \mathbb{N}$. Siccome $\mu(U) = \sup\{I(f) : f \in C_c(X)\ e\ f \prec U\}$, vogliamo trovare una f come sopra e tale che $I(f) \geq N$. Definiamo $f_j \in C_c(X, [0, 1]$ tale che $f(x, y) = 1$ su $\{y_j\} \times [x_j - \varepsilon_j/2, x_j + \varepsilon_j/2]$, ed f_j si annulli al di fuori di un compatto contenuto nell'aperto (di X) $]x_j - \varepsilon_j, x_j + \varepsilon_j[\times\{y_j\}$. Poniamo ora $f = \sum_{j=1}^N f_j$. Si ha che f ha le proprietà richieste, e

$$I(f) = \sum_{j=1}^{N} \int f_j dx \geq \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j \geq \sum_{j=1}^{N} t = tN.$$

(c) Sia $E = \{0\} \times \mathbb{R}_d$. Allora $\mu(E) = \infty$ ma $\mu(K) = 0$ per ogni compatto $K \subseteq E$.
Il punto (c) ci dice insomma che μ non è internamente regolare su E. Proviamolo.
Che $\mu(E) = \infty$ segue dal punto precedente; inoltre, se prendiamo un compatto $K \subseteq E$, K non può essere che un insieme finito, quindi $K = \{0, y_j\}_{j=1}^n$, e notiamo che χ_K è continua a supporto compatto. Allora essendo $\mu(K) = \inf\{I(f) : f \in C_c(X)\ e\ f \geq \chi_K\}$, si ha semplicemente $\mu(K) = I(\chi_K) = \sum_{j=1}^n 0 = 0$.
Possiamo esplicitare la misura μ: $\mu(E) = \infty$ se la proiezione su $\mathbb{R}_d$ di E è più che numerabile, altrimenti $\mu(E) = \sum_{y\in\mathbb{R}_d} \lambda(E \cap (\mathbb{R} \times \{y\}))$, ove λ è la misura di Lebesgue unidimensionale.

Misure complesse

Il nostro scopo è quello di estendere il teorema di rappresentazione di Riesz ai funzionali definiti su $C_0(X)$, positivi o no: per fare questo, occorre considerare misure il cui codominio sia il campo complesso.
Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ è spazio con misura, ed $f : X \to \mathbb{C}$ appartiene ad $L^1(\mu)$, resta definita una funzione $\nu_f : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ ponendo

$$\nu_f(E) = \int_E f \, d\mu$$

Tale funzione è numerabilmente additiva (se E_j è una successione disgiunta di elementi di $\mathcal{M}$ la cui unione sia E basta applicare il teorema della convergenza dominata alla successione $g_m = \sum_{j=1}^m f\chi_{E_j}$).
La funzione ν_f è un esempio di *misura complessa*.

Definizione. Sia $(X, \mathcal{M})$ spazio misurabile. Una misura complessa su $(X, \mathcal{M})$ una funzione $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ tale che:
i) $\nu(\emptyset) = 0$;
ii) se A_j successione in $\mathcal{M}$ di insiemi disgiunti, allora $\nu(\bigcup_1^\infty A_j) = \sum_1^\infty \nu(A_j)$.

Osserviamo subito che nelle nostre ipotesi la serie a secondo membro deve convergere assolutamente, altrimenti riordiniamo gli indici e la serie sarebbe indeterminata.

Indicheremo con ν_r e con ν_i la parte reale e la parte immaginaria di ν. Naturalmente ν_r e ν_i sono misure reali con segno finite, e indicate con $|\nu_r|$ e $|\nu_i|$ le loro variazioni totali, $\mu = |\nu_r| + |\nu_i|$ è una misura totalmente finita. Per ogni $E \in \mathcal{M}$ vale

$$|\nu(E)| = |\nu_r(E) + i\nu_i(E)| \leq |\nu_r(E)| + |\nu_i(E)| \leq |\nu_r|(E) + |\nu_i|(E) = \mu(E) \leq \mu(X).$$

Quindi l'insieme dei valori assunti da ν è limitato, contenuto nel disco di centro l'origine e raggio $\mu(X)$.
Una misura positiva è complessa solo se finita.
Infine, se ν è misura complessa, definiamo $L^1(\nu) = L^1(\nu_r) \cap L^1(\nu_i)$ e se $f \in L^1(\nu)$ poniamo $\int f d\nu = \int f d\nu_r + i \int f d\nu_i$.
Richiamiamo ora l'importante:

Teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym. *Sia ν misura con segno σ-finita e μ misura positiva σ-finita. Allora esistono uniche misure con segno ν_a e ν_s ed una $f : X \to [-\infty, \infty]$ μ-integrabile in senso generalizzato tali che $\nu = \nu_a + \nu_s$, $\nu_a << \mu$, $\nu_s \perp \mu$, e $d\nu_a = f d\mu$. Infine f è essenzialmente unica: se g ha la stessa proprietà allora $f = g$ μ-q.o.*

Le misure reali finite ν_r e ν_i sono assolutamente continue rispetto a $\mu = |\nu_r| + |\nu_i|$, quindi per il teorema sopra esistono funzioni $u, v \in L^1(\mu)$ tali che $d\nu_r = u d\mu$ e $d\nu_i = v d\mu$, e posto $f = u + iv$, si ha che $f \in L^1(\mu)$ ed anche $d\nu = f d\mu$. Si è visto quindi che ogni misura complessa è l'integrale di una $f \in L^1(\mu)$ per qualche misura positiva μ.

Vogliamo ora trovare una misura positiva μ tale che $|\nu(E)| \leq \mu(E)$, per ogni $E \in \mathcal{M}$, e vogliamo anzi la piú piccola con questa proprietà, se esiste. Innanzitutto se $(E_j)_j \in \mathbb{N}$ è una partizione numerabile di $E \in \mathcal{M}$ si dovrà avere

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\nu(E_j)|,$$

e quindi μ è almeno uguale all'estremo superiore dell'ultimo membro dell'espressione precedente fatto su tutte le partizioni di E. In effetti, posto per ogni $E \in \mathcal{M}$,

$$|\nu|(E) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\nu(E_j)|,\ E_j \text{ partizione di } E \right\},$$

questa è effettivamente una misura positiva e finita, come dimostreremo, e ha la proprietà richiesta. Si ha anche $|\nu|(E) \geq |\nu(E)|$.
Chiameremo $|\nu|$ la variazione totale di ν.

Teorema. *La variazione totale $|\nu|$ di una misura complessa ν è una misura positiva.*

Dimostrazione. Sia $\{E_i\}$ partizione di $E \in \mathcal{M}$. Siano t_i numeri reali tali che $t_i < |\nu|(E_i)$. Ogni E_i ha una partizione $\{A_{ij}\}$ tale che $\sum_j |\nu(A_{ij}| > t_i$. Ma anche $\{A_{ij}\}$ è una partizione di E, così

$$\sum_i t_i \leq \sum_{i,j} |\nu(A_{ij})| \leq |\nu|(E).$$

Pendendo l'estremo superiore nel primo membro dell'espressione sopra, per ogni scelta di $\{t_i\}$, si ha che $\sum_i |\nu(E_i)| \leq |\nu|(E)$.
Per dimostrare la disuguaglianza inversa, sia $\{A_j\}$ partizione di E. Per ogni j fissato, $\{A_j \cap E_i\}$ è una partizione di A_j, e per ogni i fissato, $\{A_j \cap E_i\}$ è una partizione di E_i. Ma allora

$$\begin{aligned}\sum_j |\nu(A_j)| &= \sum_j |\sum_i \nu(A_j \cap E_i) \leq \sum_j \sum_i |\nu(A_j \cap E_i)| \\ &= \sum_i \sum_j |\nu(A_j \cap E_i)| \leq \sum_i |\nu|(E_i)\end{aligned}$$

e poichè questo vale per ogni partizione $\{A_j\}$ di E, passiamo al sup nel primo membro e otteniamo $|\nu|(E) \leq \sum_i |\nu|(E_j)$, così $|\nu|$ è numerabilmente additiva, e ovviamente $|\nu|(\emptyset) = 0$. $\square$

In effetti è piú facile fare i calcoli con le variazioni totali usando un'altra definizione equivalente, forse meno intuitiva:

Definizione. La variazione totale $|\nu|$ di una misura complessa ν è la misura positiva con la proprietà che se $d\nu = f d\mu$ dove μ è una misura positiva, allora $d|\nu| = |f| d\mu$.

Diamo una traccia del fatto che la definizione sopra sia una buona definizione. Se $d\nu = f_1 d\mu_1 = f_2 d\mu_2$, sia $\lambda = \mu_1 + \mu_2$. Allora

$$f_1 \frac{d\mu_1}{d\lambda} d\lambda = d\nu = f_2 \frac{d\mu_2}{d\lambda} d\lambda,$$

da cui per la positività di $d\mu_1/d\lambda$ e $d\mu_2/d\lambda$,

$$|f_1|d\mu_1 = |f_1|\frac{d\mu_1}{d\lambda}d\lambda = |f_2|\frac{d\mu_2}{d\lambda}d\lambda = |f_2|d\mu_2,$$

così $|\nu|$ è indipendente dalla scelta di f e μ.
Notiamo che la definizione coincide con quella data per una misura con segno: semplicemente se $X = P \cup N$ è una decomposizione di Hahn per ν, si ha $d\nu = (\chi_P - \chi_N)d|\nu|$, e ovviamente $|\chi_P - \chi_N| = 1$.

Prima di dimostrare l'equivalenza delle due definizioni, vediamo qualche proprietà della variazione totale.

Proposizione. *Sia ν misura complessa su $(X, \mathcal{M})$. Allora*
i) $\nu << |\nu|$ e $|d\nu/d|\nu|| = 1$ $|\nu|$ quasi ovunque;
ii) $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$ per ogni $E \in \mathcal{M}$;
iii) $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$ e se $f \in L^1(\nu)$, $|\int f d\nu| \leq \int |f|d|\nu|$.

Dimostrazione. i) Ovvio che $\nu << |\nu|$, poi se $d\nu = fd\mu$ e $g = d\nu/d|\nu|$, si ha $fd\mu = d\nu = gd|\nu| = g|f|d\mu$ e quindi $g|f| = f$ μ-q.o. e quindi anche $|\nu|$-q.o. Ma $|f| > 0$ $|\nu|$-q.o. e quindi $|g| = 1$ $|\nu|$-q.o.
ii) Si ha $|\nu(E)| = |\int_E fd\mu| \leq \int_E |f|d\mu = |\nu|(E)$
iii) Scritta $d\nu = gd\mu$, abbiamo $\int\ |f|d|\nu| = \int |f||g|d\mu \geq \left|\int fgd\mu\right| = \left|\int fd\nu\right|$. $\square$

Dimostriamo ora l'equivalenza delle due definizioni: la misura μ_2 della prossima proposizione corrisponde alla nostra prima definizione di variazione totale.

Proposizione. *Sia ν misura complessa su $(X, \mathcal{M})$. Per ogni $E \in \mathcal{M}$, siano*

$$\mu_1(E) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} |\nu(E_j)|, E_j \textit{ disgiunti},\ E = \bigcup_{j=1}^{n} E_j\right\},$$

$$\mu_2(E) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |\nu(E_j)|, E_j \textit{ disgiunti},\ E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right\},$$

$$\mu_3(E) = \sup\left\{\left|\int_E f\ d\nu\right| : |f| \leq 1\right\}.$$

Allora $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = |\nu|$.

Dimostrazione. Dimostriamo che $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 = |\nu|$, e poi $\mu_3 \leq \mu_1$.
$\mu_1 \leq \mu_2$:ovvio;
$\mu_2 \leq \mu_3$: presa E_j suddivisione, scegliamo f in modo tale che $f = \frac{|\nu(E_j)|}{\nu(E_j)}$ su E_j. Allora $|f| = 1$, e $|\int fd\nu| = \sum_{j\in\mathbb{N}} |\nu(E_j)|$.
$\mu_3 = |\nu|$: scegliamo $f = \overline{\frac{d\nu}{d|\nu|}}$. Allora $|f| = 1$ $|\nu|$-q.o., e anche ν-q.o., e si ha

$$\left|\int_E fd\nu\right| = \left|\int_E \overline{\frac{d\nu}{d|\nu|}}\right| = \left|\int_E \overline{\frac{d\nu}{d|\nu|}}\frac{d\nu}{d|\nu|}d|\nu|\right| = \int_E 1d|\nu| = |\nu|(E).$$

D'altra parte si ha anche $|\int_E fd\nu| \leq |\nu(E)| \leq |\nu|(E)$, e quindi anche il sup.
$\mu_3 \leq \mu_1$: sappiamo che $\mu_3(E) = |\int_E fd\nu|$, ove $f = \overline{\frac{d\nu}{d|\nu|}}$,come visto sopra. Sia $\varepsilon > 0$;

esiste allora $\varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}$, $\varphi \leq |f|$ (e quindi $|c_j| \leq 1$) tale che $\int |f - \varphi| < \varepsilon$, e allora

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f - \varphi + \varphi| d\nu \leq \int |f - \varphi| d\nu + \int |\varphi| d\nu \leq \varepsilon + \sum_{j=1}^{n} |\nu(E_j)|.$$

□

Diremo che μ è una misura di Radon con segno se è una misura boreliana con segno le cui parti positiva e negativa sono di Radon, e diremo che è una misura di Radon complessa se è una misura boreliana complessa le cui parti reale ed immaginaria sono misure di Radon con segno.
Osserviamo che in uno spazio LCH e C_{II}, ogni misura complessa boreliana è di Radon, perchè ogni misura complessa è limitata.Osserviamo infine che:

Proposizione. *Se μ è misura di Borel complessa, allora μ è di Radon se e solo se $|\mu|$ è di Radon .*

Dimostrazione. Osserviamo che una misura boreliana positiva finita ν è di Radon se e solo se per ogni boreliano E ed ogni $\varepsilon > 0$ esistono un aperto U e un compatto K con $K \subseteq E \subseteq U$ e $\nu(U \setminus K) < \varepsilon$ (le misure di Radon sono regolari sugli insiemi σ-finiti, e quindi in particolare su quelli finiti).
Allora scritta $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$, se $|\mu|(U \setminus K) < \varepsilon$ si ha $\mu_j(U \setminus K) < \varepsilon$ per ogni j da 1 a 4; viceversa se $\mu_j(U_j \setminus K_j) < \varepsilon/4$, basta porre $K = \bigcup_{j=1}^{4} K_j$ e $U = \bigcap_{j=1}^{4} U_j$ per avere $|\mu|(U \setminus K) < \varepsilon$. □

Denoteremo com $M(X)$ lo spazio delle misure di Radon complesse su X.
Possiamo dotare $M(X)$ di una struttura di spazio vettoriale, definendo la somma tra due misure in $M(X)$ e la moltiplicazione per scalari (in $\mathbb{C}$) nel modo ovvio. Definiamo inoltre, per ogni $\mu \in M(X)$,

$$||\mu|| = |\mu|(X).$$

Allora:

Proposizione. *$M(X)$ è spazio vettoriale, e $||\cdot||$ è una norma su tale spazio.*

Dimostrazione. Siamo ricondotti a dimostrare che la somma di due misure di Radon è di Radon; preso $\varepsilon > 0$, se ν e μ sono di Radon, ed E un boreliano, allora esistono aperti $U_1 \subseteq E$ e $U_2 \subseteq E$ tali che $\mu(E) \leq \mu(U_1 + \varepsilon/2$ e $\mu(E) \leq \nu(U_2) + \varepsilon/2$, e posto $U = U_1 \cup U_2$, $\mu(U_1) \leq \mu(U)$, $\nu(U_2) \leq \nu(U)$, $E \subseteq U$, e $(\mu + \nu)(E) \leq (\mu + \nu)(U) + \varepsilon$. Analogo ragionamento per la regolarità interna, ed è infine ovvio che $\nu + \mu$ sia finita sui compatti.
Dimostriamo la disuguaglianza triangolare: se $\nu_1 = f_1 d\mu_1$ e $\nu_2 = f_2 d\mu_2$, sia $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Allora $\nu_1 << \mu_1 << \mu$, quindi $\nu_1 << \mu$, quindi (per Radon Nikodym) esiste g_1 tale che $d\nu_1 = g_1 d\mu$, e analogamente $d\nu_2 = g_2 d\mu$. Ma allora

$$d|\nu_1 + \nu_2| = |g_1 + g_2| d\mu \leq (|g_1| + |g_2|) d\mu = d|\nu_1| + d|\nu_2|.$$

Infine osserviamo che presa $\nu \in M(X)$, e scritta $d\nu = f d\mu$ allora siccome $f \in L^1(\mu)$ si ha $||\nu|| = |\nu|(X) = \int_X |f| d\mu < \infty$, cioè la variazione totale di una misura complessa (anche non di Radon) è una misura finita. □

Il duale di $C_0(X)$

Possiamo caratterizzare ora il duale di $C_0(X)$ (lo indichiamo con $C_0(X)^*$) , estendendo il teorema di rappresentazione di Riesz.
Ricordiamo innanzitutto che $C_0(X)$ è la chiusura di $C_c(X)$ nella norma uniforme, e che presa $f \in C_0(X)$ positiva c'è una successione crescente $f_j \in C_c(X)$ che tende uniformemente ad f.
Il fatto sorprendente è che i funzionali lineari positivi definiti su $C_0(X)$ sono continui nella norma uniforme:

Proposizione. *Sia X uno spazio LCH, e $I : C_0(X) \to \mathbb{C}$ un funzionale lineare positivo. Poniamo*

$$L := \sup\{I(f) : \ 0 \leq f \leq 1, \ f \in C_0(X)\}.$$

Allora:
(i) Si ha che $L < \infty$ e $||I|| = L$;
(ii) detta μ la misura di Radon associata alla restrizione di I a $C_c(X)$, si ha $\mu(X) = L$;
(iii) Per ogni $f \in C_0(X)$ si ha $I(f) = \int f d\mu$.

Dimostrazione. (i) Per assurdo: se $L = \infty$ esisterebbe per ogni $k \in \mathbb{N}$ una $f_k \in C_0(X)$, con $0 \leq f_k \leq 1$, tale che $I(f_k) \geq 2^k$.
Sia ora $f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} f_k$: tale serie converge totalmente, quindi $f \in C_0(X)$ ($C_0(X)$ è di Banach) ed anche $f \geq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} f_k$ per ogni m (la serie è a termini positivi).
Ma adesso per la positività di I si ha

$$I(f) \geq I(\sum_{k=1}^{m} \frac{f_k}{2^k}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{I(f_k)}{2^k} \geq \sum_{k=1}^{m} 1 = m;$$

e l'assurdo è raggiunto, valendo la relazione sopra per ogni $m \in \mathbb{N}$.
Siccome poi $||I|| = \sup\{|I(f)| : |f| \leq 1, \ f \in C_0(X)\}$, sicuramente $L \leq ||I||$; d'altra parte se $0 \leq |f| \leq 1$ si ha $|I(f)| \leq I(|f|) \leq L$ e passando al sup anche la disuguaglianza inversa è provata.
(ii) Si ha che

$$\mu(X) = \sup\{I(f) : \ 0 \leq f \leq 1, \ f \in C_c(X)\},$$

da cui $\mu(X) \leq L$; d'altra parte presa $f \in C_0(X)$, $0 \leq f \leq 1$, esiste una successione $f_j \in C_c(X)$ che tende uniformemente ad f, e siccome I è continuo nella sup-norma (provato sopra) si ha $\sup I(f_j) = I(f)$, e l'uguaglianza è allora provata.
(iii) Basta provarlo per f reale positiva: se f_j successione crescente in $C_c(X)$ che tende uniformemente ad f, per la continuità di I si ha

$$I(f) = \lim_j I(f_j) = \lim_j \int f_j d\mu = \int \lim_j f_j = \int f d\mu.$$

□

La proposizione sopra ci ha permesso di identificare i funzionali lineari positivi su $C_0(X)$: essi sono dati da integrazione rispetto a misure di Radon finite. Vogliamo estendere questo fatto per dare una descrizione completa di $C_0(X)^*$.

Lemma. *Se $I : C_0(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ funzionale lineare continuo nella sup-norma, allora esistono $I^+, I^- : C_0(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ funzionali lineari positivi tali che $I = I^+ - I^-$.*

Dimostrazione. Se $f \in C_0(X, [0, \infty))$, definiamo

$$I^+(f) = \sup\{I(g) : g \in C_0(X, \mathbb{R}), \ 0 \le g \le f\}.$$

Siccome $|I(g)| \le ||I|| \ ||g||_\infty \le ||I|| \ ||f||_\infty$ se $0 \le g \le f$, si ha che $I^+(f)$ è finito e limitato da $||I||||f||_\infty$. Affermiamo che I^+ è la restrizione a $C_0(X, [0\infty))$ di un funzionale lineare. Ovviamente $I^+(cf) = cI^+(f)$ se $c \in [0, \infty)$. Inoltre, se $0 \le g_1 \le f_1$ e $0 \le g_2 \le f_2$ si ha $0 \le g_1 + g_2 \le f_1 + f_2$, quindi $I^+(f_1 + f_2) \ge I(g_1) + I(g_2)$, e segue che $I^+(f_1 + f_2) \ge I^+(f_1) + I^+(f_2)$. D'altra parte, se $0 \le g \le f_1 + f_2$, sia $g_1 = \min(g, f_1)$ e $g_2 = g - g_1$. Allora $0 \le g_1 \le f_1$ e $0 \le g_2 \le f_2$, e allora $I(g) = I(g_1) + I(g_2) \le I^+(f_1) + I^+(f_2)$; quindi $I^+(f_1 + f_2) \le I^+(f_1) + I^+(f_2)$.
Se ora $f \in C_0(X, \mathbb{R})$, si ha che $f^+, f^- \in C_0(X, [0, \infty))$, e definiamo $I^+(f) = I^+(f^+) - I^+(f^-)$. Se ancora $f = g - h$ ove $g, h \ge 0$, allora $g + f^- = h + f^+$, quindi $I^+(g) + I^+(f^-) = I^+(h) + I^+(f^+)$. Allora $I^+(f) = I^+(g) - I^+(h)$, e segue facilmente che I^+ è lineare su $C_0(X, \mathbb{R})$. Inoltre,

$$|I^+(f)| \le \max(I^+(f^+), I^+(f^-)) \le ||I|| \max(||f^+||_\infty, ||f^-||_\infty) = ||I|| \ ||f||_\infty,$$

quindi $||I^+|| \le ||I||$.
Infine, sia $I^- = I^+ - I$. Allora $I^- \in C_0(X, \mathbb{R})$, e I^+ e I^- sono positivi. □

Sia ora $I \in C_0(X)^*$. Si ha sfruttando il lemma sopra $I(f) = I(u + iv) = I(u) + iI(v) = I_r(u) + iI_i(u) + iI_r(v) - I_i(v) = I_r^+(u) - I_r^-(u) + iI_i^+(u) - iI_i^-(u) + iI_r^+(v) + ... = \int f d\mu$, ove $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$, e μ_1 è la misura di Radon associata a I_r^+ ecc.., e le μ_j sono misure di Radon finite, quindi $\mu \in M(X)$.
Possiamo finalmente rienunciare il:

Teorema di Rappresentazione di Riesz. *Sia X spazio LCH, e per ogni $\mu \in M(X)$ ed $f \in C_0(X)$ sia $I_\mu = \int f d\mu$.*
Allora la mappa $\mu \to I_\mu$ è un isomorfismo isometrico da $M(X)$ in $C_0(X)^*$.

Dimostrazione. La suriettività è stata dimostrata sopra: si è visto che ogni $I \in C_0(X)^*$ è della forma I_μ per qualche $\mu \in M(X)$. Proviamo che tale mappa è un'isometria.
Se $\mu \in M(X)$, si ha

$$|I_\mu(f)| = \left| \int f d\mu \right| \le \int |f| d|\mu| \le ||f||_\infty ||\mu||,$$

il che mostra che effettivamente $I_\mu \in C_0(X)^*$ e che $||I_\mu|| \le ||\mu||$.
Per dimostrare la disuguaglianza inversa, scelto $\varepsilon > 0$ dobbiamo trovare una $f \in C_0(X)$, $||f||_\infty \le 1$ tale che $||\mu|| \le \varepsilon + |I(f)|$. Osservato che si ha $|\mu|(X) = \sup\left\{\left|\int_X g \, d\mu\right| : |g| \le 1\right\}$, scegliamo g in modo che $|\mu|(X) \le |\int_X g d\mu| + \varepsilon/3$. Dal teorema di Lusin possiamo ora scegliere ($|\mu|(X) < \infty$) una $f \in C_c(X)$ (e quindi anche $f \in C_0(X)$) che sia uguale a g a meno di un insieme E con $|\mu|(E) \le \varepsilon/3$, ed anche $||f||_\infty \le ||g||_\infty \le 1$.
Osservato infine che $|f - g| \le |f| + |g| \le 2$ troviamo

$$||\mu|| \le \left| \int_X (g - f + f) d\mu \right| + \varepsilon/3 \le \int_{E^c} |g - f| d|\mu| + \int_E |g - f| d|\mu| + \left| \int_X f d\mu \right| + \varepsilon/3 \le$$
$$\le 0 + 2\varepsilon/3 + |I(f| + \varepsilon/3 = \varepsilon + |I(f)|.$$

□

Corollario. *Se X è uno spazio compatto di Hausdorff, allora $C(X)^*$ è isometricamente isomorfo a $M(X)$.*

Dimostrazione. Se X è compatto di Hausdorff si ha $C_0(X) = C(X)$. $\square$

Osservazione. Sia μ una misura di Radon su X, fissata. Se $f \in L^1(\mu)$, la misura complessa $d\nu_f = f d\mu$ è di Radon e si ha $||\nu_f|| = \int |f| d\mu = ||f||_1$.
Allora $f \to \nu_f$ è un'immersione isometrica di $L^1(\mu)$ in $M(X)$. Così per esempio se indichiamo con m la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$, possiamo identificare $L^1(m)$ con un sottospazio di $M(\mathbb{R}^n)$.

Funzioni semicontinue

Definizione. Sia X spazio topologico.
Una funzione $f : X \to (-\infty, \infty]$ è detta *inferiormente semicontinua* (brevemente *l.s.c.*) se l'insieme $\{x : f(x) > a\}$ è aperto per ogni $a \in \Re$.
Una funzione $f : X \to [-\infty, \infty)$ è detta *superiormente semicontinua* (brevemente *u.s.c.*) se l'insieme $\{x : f(x) < a\}$ è aperto per ogni $a \in \Re$.

Proposizione. *Sia X spazio topologico.*
i) Se U è aperto , allora χ_U è l.s.c.;
ii) Se f è l.s.c. e $c \geq 0$, allora cf è l.s.c.;
iii) Se $\mathcal{G}$ è una famiglia di funzioni l.s.c. e $f(x) = \sup\{g(x) : g \in \mathcal{G}\}$, allora f è l.s.c.;
iv) Se f_1,f_2 sono l.s.c., allora $f_1 + f_2$ è l.s.c.;
v) Se X è spazio LCH e f è l.s.c. e non negativa, allora

$$f(x) = \sup\{g(x) : \ g \in C_c(X), \ 0 \leq g \leq f\}.$$

Dimostrazione. i) ovvio: distinguere tra $a > 1$ e $a \leq 1$;
ii) ovvio se $c = 0$, altrimenti si ha $\{x : cf(x) > a\} = \{x : f(x) > a/c\}$;
iii) si ha $\{x : f(x) > a\} =\bigcup_{g\in\mathcal{G}} \{x : g(x) > a\}$, e unione di aperti è aperto;
iv) Sia $a \in \Re$, e x_0 tale che $f_1(x_0)+f_2(x_0) > a$. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $f_1(x_0) > a - f_2(x_0) + \varepsilon$, e si ha

$$\{x : f_1(x) + f_2(x) > a\} \supseteq \{x : f_1(x) > a - f_2(x_0) + \varepsilon\} \cap \{x : f_2(x) > f_2(x_0) - \varepsilon\},$$

e quindi essendo il membro di destra un intorno di x_0 (è intersezione di due aperti che contengono x_0), lo è anche il membro di sinistra, che è allora intorno di ogni suo punto;
v) Se x è tale che $f = 0$ vale, altrimenti preso $0 < a < f(x)$, consideriamo $U = \{y : f(y) > a\}$: esso è aperto, e contiene x, allora per il lemma d Urysohn scegliamo $g \in C_c(X)$ tale che $g(x) = 1$, e allora $ag(x) = a\chi_U \leq f(x)$, ed $ag(x) = a$. □

Proposizione. . *Sia $\mathcal{G}$ una famiglia di funzioni l.s.c. non negative tale che per ogni $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ esiste $g \in \mathcal{G}$ con $g_1 \leq g$ e $g_2 \leq g$. Sia $f = \sup\{g : g \in \mathcal{G}\}$.*
Se μ è misura di Radon su X, allora $\int f d\mu = \sup\{\int g d\mu : \ g \in \mathcal{G}\}$.

Dimostrazione. Dalla proposizione precedente f è *l.s.c.* (e quindi anche Borel-misurabile). Consideriamo una successione di funzioni semplici $\{\varphi_n\}$ che tenda ad f puntualmente, per esempio

$$\varphi_n = 2^{-n}\sum_{j=1}^{2^{2^n}} \chi_{U_{nj}}, \, U_{nj} = \{x : \ f(x) > j2^{-n}\}.$$

Dal teorema di Beppo Levi, preso $a < \int f d\mu$ esiste n tale che $\sum_j \mu(U_{nj}) = \int \varphi_n d\mu > a$. Siccome U_{nj} è aperto, per $1 \leq j \leq 2^{2^n}$ c è un compatto $K_j \subseteq U_{nj}$ tale che $2^{-n} \sum_j \mu(K_j) > a$. Sia ora $\psi = 2^{-n} \sum_j \chi_{K_j}$.
Per ogni $x \in \bigcup_j K_j$ si ha $f(x) > \varphi_n(x) \geq \psi(x)$, e allora possiamo prendere $g_x \in \mathcal{G}$ tale che $g_x(x) \geq \psi(x)$. Ma $-\chi_{K_j}$ è *l.s.c.*, quindi $g_x - \psi$ è *l.s.c.* dalla proposizione precedente, e allora $V_x = \{y : \ \psi(y) < g_x(y)\}$ è aperto, e $\{V_x : \ x \in \bigcup_j K_j\}$ forma un ricoprimento aperto di $\bigcup_j K_j$, da cui estraiamo un sottoricoprimento finito $V_{x_1}, ..., V_{x_m}$.

Scegliamo (per ipotesi su $\mathcal{G}$) una $g \in \mathcal{G}$ tale che $g_{x_k} \leq g$ per $k = 1, ..., m$: allora $\psi \leq g$, e quindi

$$\int g \, d\mu \geq \int \psi \, d\mu = 2^{-n} \sum_{j}^{2^{2^n}} \mu(K_j) > a.$$

Per l'arbitrarietà di a questo prova che $\int f d\mu \leq \sup\{\int g d\mu : g \in \mathcal{G}\}$, e l'altra disuguaglianza è ovvia. $\square$

Corollario. *Sia μ misura di Radon su X.*
Se f è non negativa e l.s.c., allora

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int g \, d\mu : \, g \in C_c(X), \, 0 \leq g \leq f \right\}.$$

Dimostrazione. . Sappiamo che $f(x) = \sup\{g(x) : g \in C_c(X), \, 0 \leq g \leq f\}$, e quindi basta applicare la proposizione precedente con $\mathcal{G}$=$\{g(x) : g \in C_c(X), \, 0 \leq g \leq f\}$. $\square$

Proposizione. *Sia μ misura di Radon su X e f funzione Borel-misurabile non-negativa; allora si ha*

$$\int f \, d\mu \; = \; \inf \; \left\{ \int g \, d\mu : \, g \geq f, \, g \, l.s.c. \right\}$$

Inoltre, se l'insieme $\{x : \, f(x) > 0\}$ è σ-finito, allora

$$\int f \, d\mu \; = \; \sup \; \left\{ \int g \, d\mu : \, 0 \leq g \leq f, \, g \, u.s.c. \right\}.$$

Dimostrazione. . Sia $\{\varphi_n\}$ una successione di funzioni semplici non-negative che converge puntualmente ad f. Allora $f = \varphi_1 + \sum_{j=2}^{\infty} (\varphi_n - \varphi_{n-1})$, che possiamo riscrivere come $f = \sum_{j=2}^{\infty} a_j \chi_{E_j}$, per certi E_j e $a_j > 0$. Preso $\varepsilon > 0$, possiamo scegliere per ogni j un aperto $U_j \supseteq E_j$ tale che $\mu(U_j) \leq \mu(E_j) + \varepsilon 2^{-j}/a_j$. Allora posto $g = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \chi_{U_j}$, si ha che g è *l.s.c.*[osserviamo che $\sum_j \chi_{U_j} = \chi_{\bigcup_j U_j}$], $g \geq f$ e

$$\int g \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mu(U_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mu(E_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-j} = \int f \, d\mu + \varepsilon.$$

Quindi abbiamo provato la prima affermazione.
Sia ora $a < \int f \, d\mu$, e sia $N \in \mathbb{N}$ abbastanza grande affinchè $\sum_{j=1}^{N} a_j \mu_(E_j) > a$; gli E_j sono σ-finiti, perchè sono tutti contenuti in $\{x : \, f(x) > 0\}$, e preso $\varepsilon > 0$ esistono dei compatti $K_j \subseteq E_j$ tali che $\mu(E_j) < \mu(K_j) + \varepsilon/(N a_j)$. Allora $a < \sum_{j=1}^{N} a_j \mu(E_j) \leq \sum_{j=1}^{N} a_j \mu(K_j) + \varepsilon$, da cui $\sum_{j=1}^{N} a_j \mu(K_j) > a$.
Poniamo allora $g = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{K_j}$:si ha che g è *u.s.c.* [infatti χ_K è *u.s.c.* se K è compatto]; ed anche $g \geq f$ ed infine $\int g \, d\mu = \sum_{j=1}^{N} a_j \mu(K_j) > a$. $\square$

References

[F] : Gerald B.Folland. *Real analysis. Modern Techniques and Their Applications*. Wiley and Sons, New York, 1984.

[R] : Rudin. *Analisi Reale e Complessa*.