Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di laurea

Recenti sviluppi della formula di Baker-Campbell-Hausdorff

Ralatore: Prof. Marco Matone

Laureando: Leonardo Pagani
Matricola: 1048350

Anno accademico 2015-2016

Abstract: La formula di Baker-Campbell-Hausdorff (o BCH) fornisce un'espressione esplicita per la grandezza $e^X e^Y$, dove X e Y sono elementi di un'algebra di Lie. I primi studi sulla BCH risalgono all'ultimo decennio del '900, ma solo nel corso dell'ultimo anno (2015) la ricerca si è concentrata nell'individuare casi in cui questa formula assuma una forma chiusa (di particolare interesse sono, in quest'ambito, i lavori di Van-Brunt e Visser [7] [8] e di Matone [9] [10]). Questo lavoro consiste sia in un *review* dei risultati presentati negli articoli citati, sia in una generalizzazione di questi; la parte più originale consiste nell'applicazione dell'algoritmo presentato in [9] e [10] ai risultati esposti in [8].

Indice

1 Introduzione **3**

2 Forma chiusa della BCH **6**

2.1 Primo caso: $\mathfrak{g}$ è nilpotente 7

2.2 Secondo caso: $[X, Y]$ è autovettore di ad_X e ad_Y 8

2.2.1 Costanti di struttura 9

2.2.2 $[X, Y]$ è combinazione lineare di X, Y, I 11

2.3 Terzo caso: ad_X e ad_Y commutano agendo sui commutatori 12

3 Estensione tramite *splitting* **14**

3.1 Primo caso: $[\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] \neq 0$ 16

3.2 Secondo caso: $[\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] = 0$ 19

3.2.1 $(m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1,\gamma}, \Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1}) \neq (0,0)$ e $(m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}, h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1})$ qualsiasi 21

3.2.2 $(m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma}, \Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1}) = (0,0)$ e $(m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}, h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}) \neq (0,0)$ 24

3.2.3 $(m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma}, \Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1}) = (0,0)$ e $(m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}, h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}) = (0,0)$ 25

4 Applicazioni **27**

4.1 La BCH nelle algebre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e di Virasoro 27

4.2 La BCH nell'algebra $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ 29

4.3 Forma chiusa della BCH nelle algebre di Lie semisemplici complesse 31

5 Conclusioni **33**

1 Introduzione

Si supponga che un sistema quantistico sia descritto dallo stato $|\psi\rangle$; se si vuole cambiare sistema di riferimento, è necessario agire su $|\psi\rangle$ tramite gli operatori di traslazione e di rotazione, dati rispettivamente da $e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\vec{P}\cdot\vec{u}}$ e $e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\vec{J}\cdot\vec{v}}$ (qui $\vec{P}$ e $\vec{J}$ sono le osservabili impulso e momento angolare, α e β sono parametri continui, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono versori); si noti che gli operatori di traslazione e rotazione sono proporzionali all'esponenziale rispettivamente delle osservabili $\vec{P}\cdot\vec{u}$ e $\vec{J}\cdot\vec{v}$. Ci si può chiedere: è possibile definire un operatore di *rototraslazione*, esprimibile come esponenziale di una qualche grandezza legata ad impulso e momento angolare? Ponendo $e^Z = e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\vec{P}\cdot\vec{u}}e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\vec{J}\cdot\vec{v}}$, è evidente che in generale non si avrà $Z = \frac{i}{\hbar}\alpha\vec{P}\cdot\vec{u} - \frac{i}{\hbar}\beta\vec{J}\cdot\vec{v}$: se così fosse, infatti, si dovrebbe avere $e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\vec{P}\cdot\vec{u}}e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\vec{J}\cdot\vec{v}} = e^Z = e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\vec{J}\cdot\vec{v}}e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\vec{P}\cdot\vec{u}}$; ma questo in generale non è vero, poiché, se si compie una traslazione lungo $\vec{u}$ dopo una rotazione attorno a $\vec{v}$, si ha un effetto diverso rispetto a quello che si ottiene invertendo le due operazioni (a meno che $\vec{u}$ non sia proporzionale a $\vec{v}$). La corretta espressione di Z è più complicata e risulta essere funzione del commutatore $[\vec{P}\cdot\vec{u}, \vec{J}\cdot\vec{v}]$ di impulso e momento angolare.

Da un punto di vista matematico, il problema della determinazione di $Z = \ln\left(e^X e^Y\right)$ è formalizzato nell'ambito della teoria dei gruppi e delle algebre di Lie. In questo contesto, dati un gruppo di Lie G e la corrispondente algebra $\mathfrak{g}$, X e Y sono elementi di $\mathfrak{g}$, mentre e^X ed e^Y sono i corrispondenti elementi in G. Le uniche operazioni definite in un'algebra di Lie sono la somma vettoriale, la moltiplicazione di un vettore per uno scalare ed il prodotto di Lie: pertanto, essendo Z funzione di X e Y, la sua espressione non può essere altro che una serie, per l'indice i che va da zero a infinito, di termini dati da combinazioni lineari di commutatori di ordine i[1] contenenti X e Y.

Quanto appena detto è essenzialmente il risultato degli studi condotti in questo campo da parte di Henry Baker, John Campbell e Felix Hausdorff a cavallo fra il XIX e il XX secolo (una trattazione storica sistematica del *teorema di Baker, Campbell e Hausdorff* è presentata in [1]). Si tratta di un risultato non affatto banale. Si esamini, ad esempio, il problema della determinazione di Z per un'algebra $\mathfrak{g}$ di tipo matriciale: in questo caso si dispone di un'ulteriore operazione - la moltiplicazione matriciale - tramite la quale è possibile costruire sviluppi in serie di potenze; applicando alla grandezza $\ln\left(e^X e^Y\right)$ i noti sviluppi dell'esponenziale e del logaritmo, si ottiene così uno sviluppo di Z in serie di potenze di X e Y: non è affatto ovvio, a priori, che questo sviluppo sia esprimibile in soli termini di commutatori di X e Y.

[1] È definito commutatore *di ordine i* un elemento di $\mathfrak{g}$ dato da $[X_n, [...[X_2, [X_1, X_0]]...]]$, per qualche $X_0, X_1, X_2, ..., X_n \in \mathfrak{g}$.

Evgenij Dynkin fu il primo a fornire, nel 1947, un'espressione esplicita per $\ln\left(e^X e^Y\right)$; per scriverla, bisogna prima introdurre la notazione:

$$[X^{r_1}Y^{s_1}...X^{r_n}Y^{s_n}] := [\underbrace{X,[X,...[X}_{r_1},\underbrace{Y,[Y,...[Y}_{s_1},...[\underbrace{X,[X,...[X}_{r_n},\underbrace{Y,[Y,...Y}_{s_n}]]...]].$$

L'espressione trovata da Dynkin è la seguente:

$$\ln\left(e^X e^Y\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{r_i,s_i\geq 0,\\ r_i+s_i\neq 0}}\frac{(r_1+s_1+...+r_n+s_n)^{-1}}{r_1!s_1!...r_n!s_n!}[X^{r_1}Y^{s_1}...X^{r_n}Y^{s_n}]; \tag{1.1}$$

essa prende il nome di *formula di Baker-Campbell-Hausdorff*, o semplicemente *BCH* (nella formulazione di Dynkin) e i suoi primi termini sono dati da:

$$\begin{aligned}\ln\left(e^X e^Y\right) &= X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}([X,[X,Y]]-[Y,[X,Y]])-\frac{1}{24}[Y,[X,[X,Y]]]+...\\ &= X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}ad_{X-Y}[X,Y]-\frac{1}{24}ad_Y ad_X[X,Y]+...,\end{aligned} \tag{1.2}$$

dove *ad* indica la *rappresentazione aggiunta* di $\mathfrak{g}$, tale che $ad_A = [A,\#]$ $(\forall A\in\mathfrak{g})$ ovvero $ad_A B = [A,B]$ $(\forall A,B\in\mathfrak{g})$.

Quella che verrà adoperata in questa tesi è la *forma integrale* della BCH, derivata già da Henri Poincaré nell'anno 1900 [1, 2]:

$$ln(e^X e^Y) = X+\left(\int_0^1 g(e^{ad_X}e^{t\cdot ad_Y})dt\right)Y = X+Y-\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(I-e^{ad_X}e^{t\cdot ad_Y})^n}{n(n+1)}Y dt, \tag{1.3}$$

dove $g(z) = \frac{z\cdot ln(z)}{z-1} = 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-z)^n}{n(n-1)}$ ($g(z)$ coincide con la funzione generatrice dei *secondi numeri di Bernoulli*, valutata in $\ln(z)$).

Come mostrato in [1] e [7], dagli anni '60 la BCH ha conosciuto delle significative applicazioni in diversi ambiti della Fisica teorica, riguardanti in particolare la meccanica quantistica, la teoria di campo quantistica, la meccanica statistica, la teoria delle perturbazioni, la fisica dei cristalli.

Questo lavoro si dividerà in tre parti.

- La prima sezione consisterà in un *review* degli articoli [7] e [8] di Van-Brunt e Visser. La strategia qui seguita sarà quella di prendere come punto di partenza l'espressione della BCH in forma integrale (1.3), in modo da individuare dei casi via via meno restrittivi, tali da semplificare la formula di partenza e in particolare ridurla in forma chiusa[2]. Verrà inoltre mostrata una semplice applicazione dei risultati ottenuti, con possibili risvolti nel formalismo degli stati *squeezed* della meccanica quantistica.

- La sezione centrale sarà dedicata allo sviluppo di un algoritmo che porterà ad un'estensione dei risultati presentati nella prima sezione. Dati X e Z tali per cui non sia possibile applicare tali risultati, la strategia qui seguita sarà quella di considerare la quantità $e^X e^{\lambda Y} e^Z$ e *splittare* il termine centrale, ottenendo così $e^X e^{\lambda_- Y} e^{\lambda_+ Y} e^Z$: applicando ora i risultati noti, separatamente per $e^X e^{\lambda_- Y}$ e $e^{\lambda_+ Y} e^Z$, sotto certe condizioni si arriva ad una risoluzione della BCH in forma chiusa (seguendo questo procedimento si studia in realtà la BCH *tripla*, ma una volta risolta questa si può facilmente ottenere il termine $\ln\left(e^X e^Z\right)$ passando al limite per $\lambda \to 0$). Questa idea sta alla base dell'algoritmo sviluppato negli articoli [9] e [10] di Matone: scopo di questa sezione è quello di generalizzare tale algoritmo, combinandolo con i risultati di [8] ed estendendolo al caso di algebre di dimensione arbitraria.

- L'ultima sezione è dedicata all'applicazione dell'algoritmo precedentemente messo a punto, nel caso di algebre di particolare interesse per la fisica teorica. La prima applicazione riguarderà l'algebra di Virasoro: si tratta di un caso non trattato in letteratura prima di [9]. La particolarità dell'algebra di Virasoro è data dalla presenza, nelle relazioni di commutazione, di una carica centrale C; quest'algebra riveste inoltre una certa importanza nella teoria delle stringhe e nella teoria di campo conforme. Come caso particolare di quest'ultima, sarà poi studiata la BCH per l'algebra dell'isospin $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Questa sarà poi essenziale per studiare il caso di $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ e mostrare infine che la BCH assume forma chiusa per qualsiasi algebra di Lie semisemplice complessa.

[2] Con *forma chiusa* si intende un'espressione riducibile ad un numero finito di operazioni quali somma vettoriale, prodotto per uno scalare e prodotto di Lie.

2 Forma chiusa della BCH

Scopo di questa sezione è individuare, seguendo [7] e [8], delle condizioni via via meno restrittive tali per cui la BCH risulti avere forma chiusa. Partendo dall'equazione (1.3), il primo passo è quello di mostrare che l'integrale che in essa compare non dipende esplicitamente dalle grandezze X e Y, ma solo dal commutatore $[X, Y]$. Si consideri infatti la seguente relazione:

$$e^{t \cdot ad_Y} Y = \left(I + t[Y, \#] + \frac{t^2}{2}[Y, [Y, \#]] + ... \right) Y = Y;$$

questa implica

$$\begin{aligned} \frac{\left(I - e^{ad_X} e^{t \cdot ad_Y}\right)^n}{n(n+1)} Y &= \frac{\left(I - e^{ad_X} e^{t \cdot ad_Y}\right)^{n-1}}{n(n+1)} \left(I - e^{ad_X}\right) Y = \\ &= \frac{\left(I - e^{ad_X} e^{t \cdot ad_Y}\right)^{n-1}}{n(n+1)} \frac{I - e^{ad_X}}{ad_X} [X, Y], \end{aligned}$$

per cui l'integrale nell'equazione (1.3) può essere riscritto nel seguente modo:

$$-\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(I - e^{ad_X} e^{t \cdot ad_Y})^n}{n(n+1)} Y dt = \left(\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(I - e^{ad_X} e^{t \cdot ad_Y}\right)^{n-1}}{n(n+1)} \frac{e^{ad_X} - I}{ad_X} dt \right) [X, Y].$$

Definendo ora l'operatore

$$F(ad_X, ad_Y) := \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(I - e^{ad_X} e^{t \cdot ad_Y}\right)^{n-1}}{n(n+1)} \frac{e^{ad_X} - I}{ad_X} dt, \tag{2.1}$$

la BCH può quindi essere scritta nel seguente modo:

$$\ln\left(e^X e^Y\right) = X + Y + F(ad_X, ad_Y)[X, Y]. \tag{2.2}$$

Nei prossimi paragrafi è mostrato sotto quali condizioni l'espressione di $F(ad_X, ad_Y)$ assume una forma chiusa, o comunque una forma semplificata rispetto alla (2.2); si possono individuare tre casi principali:

- l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è *nilpotente*;
- il commutatore $[X, Y]$ è un *autovettore* comune di ad_X e ad_Y;
- ad_X e ad_Y commutano *quando agiscono su un commutatore*.

2.1 Primo caso: $\mathfrak{g}$ è nilpotente

Data un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, si definisce *sottoalgebra dei commutatori* l'insieme $\mathfrak{g}_1$ dei commutatori di due qualsiasi elementi di $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}_1 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \equiv \{[A_1, A_0] : A_0, A_1 \in \mathfrak{g}\}$; se la sottoalgebra dei commutatori coincide con il sottospazio nullo ($\mathfrak{g}_1 \equiv \mathbf{0}$), ciò significa che $\mathfrak{g}$ è commutativa e la BCH si riduce banalmente alla seguente relazione:

$$\ln\left(e^X e^Y\right) = X + Y.$$

Si può generalizzare quanto appena detto e definire in maniera ricorsiva la sottoalgebra dei commutatori di ordine n:

$$\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{g}_n := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{n-1}] \equiv \{[A_n, [...[A_2, [A_1, A_0]]...]] : A_0, A_1, A_2, ..., A_n \in \mathfrak{g}\}; \quad (2.3)$$

se, per un qualche n naturale, si ha $\mathfrak{g}_n \equiv \mathbf{0}$, allora l'algebra $\mathfrak{g}$ è detta *nilpotente*. Ora, se l'algebra $\mathfrak{g}$ risulta nilpotente per un dato valore di n, tutti i commutatori di ordine n o superiore si annullano, come diretta conseguenza della definizione appena data; questo significa che la BCH è troncata all'ordine $n-1$, come risulta evidente dallo sviluppo di Dynkin (1.1).

Il caso dell'algebra $\mathfrak{g}$ nilpotente, dunque, implica che la BCH assuma sempre una forma chiusa. Il problema della scrittura esplicita della formula si riduce pertanto al calcolo di un numero finito di coefficienti; come mostrato nella (1.2), i primi termini dello sviluppo sono particolarmente semplici:

- $X + Y$ (ordine zero),
- $\frac{1}{2}[X, Y]$ (primo ordine),
- $\frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]]$ (secondo ordine),
- $-\frac{1}{24}[Y, [X, [X, Y]]]$ (terzo ordine).

I coefficienti relativi agli ordini successivi, in linea di principio, possono essere valutati a partire dalla formula di Dynkin, ma i calcoli si fanno presto molto laboriosi (ad esempio, come mostrato in [6], se m è un numero primo, allora i termini di ordine m aventi coefficiente non nullo sono $2^n - 2$); per minimizzare i tempi di computazione, sono reperibili in letteratura (ad esempio in [5] e [6]) degli algoritmi che permettono in tempi ridotti, tramite un semplice pc, di calcolare i coefficienti fino ad almeno il ventesimo ordine.

2.2 Secondo caso: $[X, Y]$ è autovettore di ad_X e ad_Y

Si consideri ora il caso in cui

$$ad_X[X, Y] = x[X, Y], \qquad ad_Y[X, Y] = y[X, Y], \tag{2.4}$$

con x e y nel campo sopra cui è definita l'algebra $\mathfrak{g}$. In questo caso, dall'equazione (2.2) risulta evidente che $[X, Y]$ è autovettore anche dell'operatore $F(ad_X, ad_Y)$, relativamente all'autovalore

$$F(x, y) := \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - e^x e^{ty})^{n-1}}{n(n+1)} \frac{e^x - 1}{x} dt;$$

il termine $F(ad_X, ad_Y)[X, Y]$, insomma, è proporzionale a $[X, Y]$ stesso secondo il coefficiente $F(x, y)$.

Ora, $F(ad_X, ad_Y)$ e $F(x, y)$ hanno la stessa forma, a patto di sostituire gli operatori ad_X e ad_Y con i coefficienti x e y; tuttavia, il fatto che x e y, a differenza di ad_X e ad_Y, siano due grandezze commutanti, fa sì che l'espressione di $F(x, y)$ possa essere notevolmente semplificata. Siccome infatti $1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n(n+1)} = \frac{z \cdot \ln(z)}{z - 1}$, si può scrivere

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - e^x e^{ty})^{n-1}}{n(n+1)} &= \frac{1}{1 - e^x e^{ty}} \left(1 - \frac{e^x e^{ty} \cdot \ln(e^x e^{ty})}{e^x e^{ty} - 1} \right) = \\
&= \frac{(1 - e^{x+ty}) + (x + ty) e^{x+ty}}{(1 - e^{x+ty})^2},
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
F(x, y) &:= \frac{e^x - 1}{x} \int_{t=0}^{t=1} \left(\frac{(1 - e^{x+ty}) + (x + ty) e^{x+ty}}{(1 - e^{x+ty})^2} \right) \frac{1}{y} d(x + ty) = \\
&= \frac{e^x - 1}{x} \frac{1}{y} \int_{t=0}^{t=1} d \left(\frac{x + ty}{1 - e^{x+ty}} \right) = \\
&= \frac{e^x - 1}{x} \left(\frac{x + y}{y(1 - e^{x+y})} - \frac{x}{y(1 - e^x)} \right) = \\
&= \frac{e^x - 1}{x} \frac{(x + y) e^{-y} (1 - e^x) - x(e^{-y} - e^x)}{y(e^{-y} - e^x)(1 - e^x)}.
\end{aligned}$$

Si ha pertanto

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \frac{(x + y) e^{x-y} - (x e^x + y e^{-y})}{xy(e^{-y} - e^x)} = \\
&= \frac{1}{e^{-x} - e^y} \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} + \frac{1 - e^y}{y} \right).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

La notazione utilizzata in letteratura, in realtà, prevede le seguenti sostituzioni: $x \to v$, $y \to -u$, $F(x,y) \to f(u,v)$; è dunque dimostrato il seguente enunciato:

Se $$ad_X[X,Y] = v[X,Y], \qquad ad_Y[X,Y] = -u[X,Y], \tag{2.4}$$
allora $$\ln\left(e^X e^Y\right) = X + Y + f(u,v)[X,Y], \tag{2.6}$$
con $$f(u,v) = \frac{(u-v)e^{u+v} - (ue^u - ve^v)}{uv(e^u - e^v)} = \frac{1}{e^{-u} - e^{-v}}\left(\frac{1-e^{-u}}{u} - \frac{1-e^{-v}}{v}\right). \tag{2.7}$$

Si noti che $f(u,v)$ è una funzione simmetrica; risulteranno utili le seguenti proprietà: $f(0,v) = \lim_{u\to 0} f(u,v) = \frac{ve^v - e^v + 1}{v(e^v - 1)}$, $\quad f(0,0) = \lim_{(u,v)\to(0,0)} f(u,v) = \frac{1}{2}$.

2.2.1 Costanti di struttura

Ci si può chiedere in quali condizioni effettivamente la condizione (2.4) è verificata. Per rispondere, è molto utile introdurre il concetto di costanti di struttura di un'algebra di Lie: detta $\{T_a\}$ la base di riferimento per l'algebra $\mathfrak{g}$ considerata, si definiscono *costanti di struttura* per $\mathfrak{g}$ i coefficienti $f_{ab}{}^c$ tali che $[T_a, T_b] = f_{ab}{}^c T_c$ per qualsiasi scelta di a e b (si ha necessariamente $f_{ab}{}^c = -f_{ba}{}^c$).

Siano ora x^a e y^a le coordinate degli operatori X e Y nella base $\{T_a\}$ (siano, in altri termini, soddisfatte le relazioni $X = x^a T_a$ e $Y = y^a T_a$); allora, in base alla definizione di costanti di struttura, il commutatore di X e Y si scrive nel seguente modo:

$$[X,Y] = \left(x^a y^b f_{ab}{}^c\right) T_c. \tag{2.8}$$

La condizione (2.4), quindi, equivale a richiedere $\left(x^d x^a y^b f_{ab}{}^c f_{dc}{}^e\right) T_e = v\left(x^a y^b f_{ab}{}^c\right) T_c$ e $\left(y^d x^a y^b f_{ab}{}^c f_{dc}{}^e\right) T_e = -u\left(x^a y^b f_{ab}{}^c\right) T_c$, ovvero:

$$x^a y^b x^c f_{ab}{}^d f_{cd}{}^e = v x^a y^b f_{ab}{}^e, \qquad x^a y^b y^c f_{ab}{}^d f_{cd}{}^e = -u x^a y^b f_{ab}{}^e. \tag{2.9}$$

Si può ora tradurre il precedente enunciato nel formalismo delle costanti di struttura.

Se $$x^a y^b x^c f_{ab}{}^d f_{cd}{}^e = v x^a y^b f_{ab}{}^e, \qquad x^a y^b y^c f_{ab}{}^d f_{cd}{}^e = -u x^a y^b f_{ab}{}^e, \tag{2.9}$$
allora $$\ln\left(e^X e^Y\right) = X + Y + f(u,v)[X,Y], \tag{2.6}$$
con $$f(u,v) = \frac{(u-v)e^{u+v} - (ue^u - ve^v)}{uv(e^u - e^v)} = \frac{1}{e^{-u} - e^{-v}}\left(\frac{1-e^{-u}}{u} - \frac{1-e^{-v}}{v}\right). \tag{2.7}$$

È naturale domandarsi sotto quali condizioni la forma semplificata (2.6) della BCH sia valida *per ogni scelta* di X e Y nell'algebra $\mathfrak{g}$; per soddisfare questa richiesta, le condizioni (2.9) devono essere valide per qualsiasi x^a e y^a: si deve quindi avere

$$x^c f_{ab}{}^d f_{cd}{}^e = v f_{ab}{}^e, \qquad y^c f_{ab}{}^d f_{cd}{}^e = -u f_{ab}{}^e \qquad (\forall x^c, y^c).$$

Queste relazioni danno informazioni ben precise sulla forma delle costanti di struttura; esaminando ad esempio l'equazione $x^c f_{ab}{}^d f_{cd}{}^e = v f_{ab}{}^e$, evidentemente si dovrà imporre una condizione del tipo $v \sim (x \cdot f)$: l'unico scalare che si può estrarre da x e f è $x^c f_{cd}{}^d$, dunque si dovrà avere $x^c f_{ab}{}^d f_{cd}{}^e \sim x^c f_{cd}{}^d f_{ab}{}^e$, da cui, per l'arbitrarietà di x^c, si ottiene $f_{ab}{}^d f_{cd}{}^e \sim f_{ab}{}^e f_{cd}{}^d$. Non è difficile a questo punto convincersi che le costanti di struttura debbano essere del tipo

$$f_{ab}{}^c = \omega_{ab} n^c \qquad (\text{con } \omega_{ab} = -\omega_{ba})\,. \tag{2.10}$$

La condizione (2.10) è *equivalente* ad asserire che il commutatore di una qualsiasi coppia di elementi di $\mathfrak{g}$ appartenga al sottospazio unidimensionale generato da $N := n^c T_c$: dati infatti $X = x^a T_a$ e $Y = y^a T_a$, se le costanti di struttura hanno la forma $f_{ab}{}^c = \omega_{ab} n^c$, allora $[X, Y] = \left(x^a y^b \omega_{ab}\right) n^c T_c = \left(x^a y^b \omega_{ab}\right) N$; per il viceversa basta definire ω_{ab} tale che $[T_a, T_b] = \omega_{ab} N$ ed automaticamente si ha $f_{ab}{}^c = \omega_{ab} n^c, \forall a, b, c$.

Se poi è verificata la (2.10), allora gli autovalori v e $-u$ di cui sopra valgono

$$v = x^a \omega_{ab} n^b, \qquad -u = y^a \omega_{ab} n^b; \tag{2.11}$$

infatti $\quad x^a y^b x^c f_{ab}{}^d f_{cd}{}^e = x^a y^b \omega_{ab} x^c \omega_{cd} n^d n^e = \left(x^c \omega_{cd} n^d\right) x^a y^b \omega_{ab} n^e = v x^a y^b f_{ab}{}^e$
e $\quad x^a y^b y^c f_{ab}{}^d f_{cd}{}^e = x^a y^b \omega_{ab} y^c \omega_{cd} n^d n^e = \left(y^c \omega_{cd} n^d\right) x^a y^b \omega_{ab} n^e = -u x^a y^b f_{ab}{}^e$.
Può dunque essere enunciato il seguente risultato:

Data un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, se la sottoalgebra dei commutatori $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ha dimensione unitaria o, equivalentemente, se le costanti di struttura hanno la forma

$$f_{ab}{}^c = \omega_{ab} n^c, \tag{2.10}$$

allora, detti

$$u = -y^a \omega_{ab} n^b, \qquad v = x^a \omega_{ab} n^b, \tag{2.11}$$

si ha

$$\ln\left(e^X e^Y\right) = X + Y + f(u, v)[X, Y] \qquad (\forall X, Y \in \mathfrak{g}), \tag{2.6}$$

con

$$f(u, v) = \frac{(u - v)e^{u+v} - (ue^u - ve^v)}{uv(e^u - e^v)} = \frac{1}{e^{-u} - e^{-v}} \left(\frac{1 - e^{-u}}{u} - \frac{1 - e^{-v}}{v} \right). \tag{2.7}$$

Si noti che, se $\omega_{ab} n^b = 0$, allora $[T_a, [T_b, T_c]] = \omega_{ad} n^d \omega_{bc} N = 0$, ovvero l'algebra $\mathfrak{g}$ è nilpotente al secondo ordine e ci si riconduce al caso già studiato nel paragrafo 2.1 (in particolare, si ha $\ln\left(e^X e^Y\right) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y]$).

2.2.2 $[X, Y]$ è combinazione lineare di X, Y, I

Data l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, è definito *centro* di $\mathfrak{g}$ l'insieme di vettori tali da commutare con qualsiasi elemento dell'algebra stessa:

$$Z_{\mathfrak{g}} := \{I \in \mathfrak{g} : [I, g] = 0, \ \ \forall g \in \mathfrak{g}\}. \tag{2.12}$$

Di particolare interesse è il caso in cui due vettori $X, Y \in \mathfrak{g}$ generano, eventualmente insieme ad un elemento del centro $I \in Z_{\mathfrak{g}}$, una sottoalgebra[3] di $\mathfrak{g}$, ovvero il caso in cui il commutatore $[X, Y]$ è dato da una combinazione lineare di X, Y e I stessi. Si tratta di una situazione immediatamente riconducibile al caso trattato nel paragrafo 2.2.1: se infatti $[X, Y] = uX + vY + cI$, basta porre $T_0 = I$, $T_1 = X$ e $T_2 = Y$ e le costanti di struttura assumono la forma ${f_{ab}}^c = \omega_{ab} n^c$, con $\omega_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $n^c = \begin{pmatrix} c \\ u \\ v \end{pmatrix}$.

La letteratura precedente a [7] e [8] si limita a fornire la soluzione esatta della BCH nei seguenti, semplici casi:

- se $[X, Y] = 0$ (algebra abeliana), la soluzione è banalmente data da $\ln\left(e^X e^Y\right) = X + Y$;
- se $[X, Y] = cI$ (il che implica $\langle I, X, Y\rangle$ nilpotente al secondo ordine), la soluzione è data da $\ln\left(e^X e^Y\right) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y]$: ad esempio, nella Meccanica Quantistica, detti $a^\dagger$ e a gli operatori di *creazione* e *distruzione* e detti X e P gli operatori *posizione* e *impulso*, si hanno proprio le relazioni $[a^\dagger, a] = -I$ e $[X, P] = i\hbar I$;
- se $[X, Y] = vY$, la soluzione è data da $\ln\left(e^X e^Y\right) = X + Y + \frac{ve^v - e^v + 1}{v(e^v - 1)}[X, Y]$: riprendendo l'esempio appena fatto e detto H l'*hamiltoniano* del sistema, si hanno le relazioni $[H, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger$ e $[H, a] = -\hbar\omega a$.

Il caso $[X, Y] = uX + vY + cI$ appena trattato consiste nella prima generalizzazione, reperibile in letteratura [7], di questi tre risultati (il che spiega la scelta di aver sostituito x e y con v e $-u$ nel paragrafo 2.2). Il caso studiato nei paragrafi 2.2 e 2.2.1 consiste invece in una seconda generalizzazione [8], la quale include situazioni in cui la relazione $[X, Y] = uX + vY + cI$ non vige. Nel prossimo paragrafo, seguendo [8], verrà presentata un'ulteriore generalizzazione dei risultati già trovati: in quel caso la BCH assumerà una forma notevolmente semplificata rispetto all'equazione (2.2), ma non una forma chiusa (a differenza di quanto finora visto), in quanto compariranno in essa e^{ad_X} e e^{ad_Y}, dati ciascuno da una serie infinita di commutatori di ordine progressivamente crescente.

[3] Con *sottoalagebra* si intende un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{g}$ chiuso rispetto al prodotto di Lie.

Relativamente al caso $[X, Y] = uX + vY + cI$, viene proposto in [6] un esempio che porta a possibili applicazioni nell'ambito degli stati *squeezed* della meccanica quantistica. Indicando con $a^\dagger$ e a gli operatori di creazione e distruzione e ricordando $[a, a^\dagger] = 1$ e $N := a^\dagger a$, si ottengono le seguenti relazioni di commutazione:

$$[a^2, N] = 2a^2, \;\; [(a^\dagger)^2, N] = -2(a^\dagger)^2;$$

applicando ora i risultati presentati in questo paragrafo, si ottiene

$$\ln\left(e^{sa^2}e^{tN}\right) = sa^2 + tN + 2stf(2t, 0)a^2 = \frac{2ste^{2t}}{e^{2t} - 1}a^2 + tN,$$
$$\ln\left(e^{s(a^\dagger)^2}e^{tN}\right) = s(a^\dagger)^2 + tN - 2stf(-2t, 0)(a^\dagger)^2 = -\frac{2ste^{-2t}}{e^{-2t} - 1}(a^\dagger)^2 + tN.$$

Un'altra relazione interessante da studiare può essere la seguente:

$$[a^2, (a^\dagger)^2] = 4N + 2I.$$

I risultati di [7] e [8], non sono applicabili a questo tipo di relazione; il problema, però, può essere aggirato scrivendo

$$\ln\left(e^{a^2}e^{(a^\dagger)^2}\right) = \lim_{\lambda\to 0} e^{a^2}e^{\lambda N}e^{(a^\dagger)^2} = \lim_{\lambda\to 0} e^{a^2}e^{\lambda_- N}e^{\lambda_+ N}e^{(a^\dagger)^2}$$

ed applicando i risultati noti separatamente per $e^{a^2}e^{\lambda_- N}$ e $e^{\lambda_+ N}e^{(a^\dagger)^2}$. Scegliendo opportunamente i valori di λ_- e λ_+, è poi possibile riapplicare i suddetti risultati e risolvere la BCH in forma chiusa. Quello appena descritto è l'algoritmo sviluppato da Matone in [9] e [10] e generalizzato nella prossima sezione. Il caso qui considerato è in realtà riconducibile all'algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (basta porre $a^2 = -2E_-$, $(a^\dagger)^2 = 2E_+$ e $N + \frac{1}{2}I = H$), la quale verrà studiata nell'ultima sezione di questa tesi.

2.3 Terzo caso: ad_X e ad_Y commutano agendo sui commutatori

Come precedentemente sottolineato, è stato possibile ricavare l'equazione (2.5) sfruttando la commutatività di x e y (che sono semplicemente elementi di un campo); contrariamente, non è stato possibile semplificare l'espressione di $F(ad_X, ad_Y)$ (2.1) in quanto ad_X e ad_Y sono operatori che *in generale* non commutano. Se però si considera che, nella BCH, gli operatori ad_X e ad_Y agiscono sempre su commutatori, allora l'espressione di $F(ad_X, ad_Y)$ può essere semplificata ripercorrendo formalmente gli stessi passaggi con cui si è giunti alla (2.5), a patto che si verifichi la condizione

$$ad_X ad_Y W = ad_Y ad_X W \qquad (\forall W \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]). \tag{2.13}$$

Ora, la suddetta condizione può essere riscritta in altre forme equivalenti: sfruttando l'*identità di Jacobi*, si ottiene

$$ad_X ad_Y W = [X,[Y,W]] = -[Y,[W,X]] - [W,[X,Y]] = [Y,[X,W]] + [[X,Y],W],$$

da cui $(ad_X ad_Y - ad_Y ad_X)W = ad_{[X,Y]}W$; ciò significa che la condizione (2.13) equivale alla $ad_{[X,Y]}W = 0$ $(\forall W \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$. In termini più astratti, questo implica

$$[[X,Y],[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]] \equiv \mathbf{0} \tag{2.14}$$

e quindi $[X,Y]$ deve appartenere al centro $Z_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ dell'algebra dei commutatori $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. In termini di costanti di struttura, invece, la condizione diventa

$$x^a y^b f_{ab}{}^m f_{cd}{}^n f_{mn}{}^e = 0. \tag{2.15}$$

È dunque possibile enunciare il seguente risultato:

Se $$[[X,Y],[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]] \equiv \mathbf{0}, \tag{2.14}$$

ovvero se $$x^a y^b f_{ab}{}^m f_{cd}{}^n f_{mn}{}^e = 0, \tag{2.15}$$

allora $$\ln\left(e^X e^Y\right) = X + Y + F(ad_X, ad_Y)[X,Y], \tag{2.2}$$

con $$F(ad_X, ad_Y) = \frac{(ad_X + ad_Y)e^{ad_X - ad_Y} - \left(ad_X e^{ad_X} + ad_Y e^{-ad_Y}\right)}{ad_X ad_Y\left(e^{-ad_Y} - e^{ad_X}\right)} = \frac{1}{e^{-ad_X} - e^{ad_Y}}\left(\frac{1-e^{-ad_X}}{ad_X} + \frac{1-e^{ad_Y}}{ad_Y}\right). \tag{2.16}$$

Richiedendo ora che l'ultimo risultato sia valido per ogni coppia $X, Y \in \mathfrak{g}$, si ottiene:

Data un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, se la sottoalgebra dei commutatori è abeliana,

ovvero $$[[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]] \equiv \mathbf{0}, \tag{2.17}$$

o, equivalentemente, se le costanti di struttura di $\mathfrak{g}$ soddisfano la condizione

$$f_{ab}{}^m f_{cd}{}^n f_{mn}{}^e = 0, \tag{2.18}$$

allora $$\ln\left(e^X e^Y\right) = X + Y + F(ad_X, ad_Y)[X,Y] \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{g}), \tag{2.2}$$

con $$F(ad_X, ad_Y) = \frac{(ad_X + ad_Y)e^{ad_X - ad_Y} - \left(ad_X e^{ad_X} + ad_Y e^{-ad_Y}\right)}{ad_X ad_Y\left(e^{-ad_Y} - e^{ad_X}\right)} = \frac{1}{e^{-ad_X} - e^{ad_Y}}\left(\frac{1-e^{-ad_X}}{ad_X} + \frac{1-e^{ad_Y}}{ad_Y}\right). \tag{2.16}$$

---

3 Estensione tramite *splitting*

I risultati finora presentati sono stati ricavati sfruttando direttamente le proprietà della formula generale di Baker-Campbell-Hausdorff, come presentata nella forma (2.2). Nel corso di questa sezione, verranno utilizzati i risultati di [8], e specificamente quelli presentati nel paragrafo 2.2.1, come punto di partenza per sviluppare un algoritmo il quale estenderà i risultati stessi e porterà a risolvere la BCH in forma chiusa per un'importante classe di algebre.

Seguendo [9] e [10], la strategia su cui si basa l'algoritmo è la seguente: date due grandezze X e Z tali per cui non è possibile applicare i risultati visti nella precedente sezione, è comunque possibile scrivere il termine $e^X e^Z$ come limite di $e^X e^{\lambda Y} e^Z$ per λ tendente a zero e *splittare* il termine centrale, ottenendo quindi $e^X e^{\lambda_- Y} e^{\lambda_+ Y} e^Z$ (con $\lambda_- + \lambda_+ = \lambda$); a questo punto, i risultati del paragrafo 2.2.1 possono essere sfruttati per ricavare le grandezze $\tilde{X}(\lambda_-) := \ln\left(e^X e^{\lambda_- Y}\right)$ e $\tilde{Z}(\lambda_+) := \ln\left(e^{\lambda_+ Y} e^Z\right)$ (a patto, naturalmente, che vi siano le condizioni per applicare tali risultati)[4]. In questo modo si arriva a scrivere $e^X e^Z = e^{\tilde{X}(\lambda_-)} e^{\tilde{Z}(\lambda_+)}$; tuttavia, uno fra i parametri λ_- e λ_+ può essere scelto liberamente: se quindi esiste un valore di λ_- (o λ_+) tale per cui si possano applicare i risultati del paragrafo 2.2.1 alle grandezze $\tilde{X}(\lambda_-)$ e $\tilde{Z}(\lambda_+)$, allora la BCH risulterà risolta in forma chiusa per le grandezze X e Z. È

In questa sezione, pertanto, si considererà la situazione in cui l'algebra di Lie

$$\mathfrak{g} = \langle T_1, ..., T_r, T_{r+1}, ..., T_s, T_{s+1}, ..., T_t \rangle$$

contiene le sottoalgebre

$$\mathfrak{g}_{12} := \langle T_1, ..., T_r, T_{r+1}, ..., T_s \rangle,$$
$$\mathfrak{g}_{23} := \langle T_{r+1}, ..., T_s, T_{s+1}, ..., T_t \rangle,$$

entrambe le quali hanno la proprietà di avere una sottoalgebra dei commutatori di dimensione unitaria (proprietà tuttavia non vera, in generale, per l'intera algebra $\mathfrak{g}$); Si indicherà con $\langle M \rangle$ la sottoalgebra dei commutatori di $\mathfrak{g}_{12}$ e con $\langle N \rangle$ la sottoalgebra dei commutatori di $\mathfrak{g}_{23}$. Si definiscono poi i sottospazi $\mathfrak{g}_1 := \langle T_1, ..., T_r \rangle$, $\mathfrak{g}_2 := \langle T_{r+1}, ..., T_s \rangle$ e $\mathfrak{g}_3 := \langle T_{s+1}, ..., T_t \rangle$: mentre $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_3$ in generale *non* sono sottoalgebre di $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_2$ invece lo è sempre (infatti, essendo $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_{12} \cap \mathfrak{g}_{23}$ ed essendo $\mathfrak{g}_{12}$ e $\mathfrak{g}_{23}$ due sottoalgebre, il commutatore di due elementi in $\mathfrak{g}_2$ deve appartenere sia a $\mathfrak{g}_{12}$ che a $\mathfrak{g}_{23}$, cioè deve appartenere all'intersezione di questi ultimi, ovvero a $\mathfrak{g}_2$ stessa).

[4] Si noti che il passaggio al limite non è necessario; il procedimento di splitting, di per sé, permette di studiare la cosiddetta BCH *tripla*, ma, per economia del discorso, di seguito verranno esposti i risultati per $e^X e^Z$, che si ottengono tramite il passaggio al limite.

Prima di procedere, conviene introdurre la seguente notazione ad indici:

- $a, b, c, ... = 1, ..., t$;
- $\mu, \mu_1, \mu_2, ... = 1, ..., s$;
- $\nu, \nu_1, \nu_2, ... = r + 1, ..., t$;
- $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, ... = 1, ..., r$;
- $\beta, \beta_1, \beta_2, ... = r + 1, ..., s$;
- $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, ... = s + 1, ..., t$.

Questo significa, ad esempio, che un generico elemento di base di $\mathfrak{g}$ sarà indicato con T_a, un elemento di base di $\mathfrak{g}_{12}$ sarà indicato con T_μ, uno di $\mathfrak{g}_{23}$ con T_ν, uno di $\mathfrak{g}_1$ con T_α, uno di $\mathfrak{g}_2$ con T_β e uno di $\mathfrak{g}_3$ con T_γ. Indicando le costanti di struttura dell'algebra $\mathfrak{g}$ con ${f_{ab}}^c$, quelle di $\mathfrak{g}_{12}$ e $\mathfrak{g}_{23}$ saranno dunque indicate con ${f_{\mu_1\mu_2}}^{\mu_3}$ e ${f_{\nu_1\nu_2}}^{\nu_3}$; ricordando poi che le sottoalgebre dei commutatori di $\mathfrak{g}_{12}$ e $\mathfrak{g}_{23}$ sono unidimensionali e generate da $M \equiv m^\mu T_\mu$ e $N \equiv n^\nu T_\nu$, si potrà scrivere ${f_{\mu_1\mu_2}}^{\mu_3} = h_{\mu_1\mu_2} m^{\mu_3}$ e ${f_{\nu_1\nu_2}}^{\nu_3} = k_{\nu_1\nu_2} n^{\nu_3}$.
Insomma, la situazione di seguito considerata prevede che, nelle sottoalgebre $\mathfrak{g}_{12}$ e $\mathfrak{g}_{23}$, la BCH assuma la forma chiusa $\ln\left(e^X e^Z\right) = X + Z + f(u, v)[X, Z]$, ma questo non sia in generale vero per l'intera algebra $\mathfrak{g}$ (ovvero non sia noto il comportamento di $\ln\left(e^X e^Z\right)$ nel caso in cui $X \in \mathfrak{g}_1$ e $Z \in \mathfrak{g}_3$); le costanti ${f_{\mu_1\mu_2}}^{\mu_3}$ e ${f_{\nu_1\nu_2}}^{\nu_3}$, come detto, sono note a priori, mentre le costanti ${f_{\mu_1\mu_2}}^{\gamma}$ e ${f_{\nu_1\nu_2}}^{\alpha}$ sono nulle per costruzione; sulle ${f_{\alpha\gamma}}^c$ non vengono per ora fatte ipotesi.

È infine necessario distinguere due casi, che verranno trattati separatamente: l'algebra $\mathfrak{g}_2$, infatti, può essere abeliana o non commutativa. Nel secondo caso, esisterà una coppia $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}_2$ tale che $[Y_1, Y_2] \neq 0$; ora, $[Y_1, Y_2]$ deve appartenere a $\mathfrak{g}_2$ (essendo $\mathfrak{g}_2$ una sottoalgebra), ma deve anche appartenere a $\langle M \rangle$ e $\langle N \rangle$ (poiché $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}_{12}$ e $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}_{23}$), il che implica $\langle M \rangle \equiv \langle N \rangle \subseteq \mathfrak{g}_2$: questo significa $M \equiv N \in \mathfrak{g}_2$ (infatti M e N possono essere riscalati di un fattore arbitrario, pur di riscalare rispettivamente $h_{\mu_1\mu_2}$ e $k_{\nu_1\nu_2}$ del fattore reciproco). In definitiva, il caso in cui $\mathfrak{g}_2$ sia non commutativa è molto più semplice del caso in cui $\mathfrak{g}_2$ sia abeliana, in quanto nel primo caso M coincide con N (verranno entrambi indicati con P), mentre nel secondo caso l'argomento appena presentato non può essere applicato e in generale si ha $\langle M \rangle \neq \langle N \rangle$.

3.1 Primo caso: $[\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] \neq 0$

Il primo passo, dunque, è quello di studiare cosa succede nel caso in cui la sottoalgebra $\mathfrak{g}_2$ non sia commutativa. In base a quanto detto, si ha

$$M \equiv N =: P = p^\beta T_\beta, \tag{3.1}$$

pertanto le costanti di struttura sono date da

$$f_{\mu_1\mu_2}{}^\alpha = 0, \qquad f_{\mu_1\mu_2}{}^\beta = h_{\mu_1\mu_2} p^\beta, \qquad f_{\mu_1\mu_2}{}^\gamma = 0 \tag{3.2}$$

$$f_{\nu_1\nu_2}{}^\alpha = 0, \qquad f_{\nu_1\nu_2}{}^\beta = k_{\nu_1\nu_2} p^\beta, \qquad f_{\nu_1\nu_2}{}^\gamma = 0. \tag{3.3}$$

Come anticipato, l'idea è quella di prendere

$$X = x^\alpha T_\alpha \in \mathfrak{g}_1, \qquad Y = y^\beta T_\beta \in \mathfrak{g}_2, \qquad Z = z^\gamma T_\gamma \in \mathfrak{g}_3$$

e sfruttare i risultati del paragrafo 2.2.1 per scrivere

$$e^X e^Z = \lim_{\lambda\to 0} e^X e^{\lambda Y} e^Z = \lim_{\lambda\to 0} e^X e^{\lambda_+ Y} e^{\lambda_- Y} e^Z = \lim_{\lambda\to 0} e^{\tilde{X}} e^{\tilde{Z}},$$

con

$$\lambda_- + \lambda_+ = \lambda,$$

$$\begin{aligned}
\tilde{X} &= X + \lambda_- Y + \lambda_- f(\lambda_- u, v)[X, Y] = \\
&= X + \lambda_- Y + \lambda_- x^\alpha h_{\alpha\beta} y^\beta f(\lambda_- p^{\beta_1} h_{\beta_1\beta_2} y^{\beta_2}, x^\alpha h_{\alpha\beta} p^b) P, \\
\tilde{Z} &= \lambda_+ Y + Z + \lambda_+ f(w, \lambda_+ z)[Y, Z] = \\
&= \lambda_+ Y + Z + \lambda_+ y^\beta k_{\beta\gamma} z^\gamma f(p^\beta k_{\beta\gamma} z^\gamma, \lambda_+ y^{\beta_1} k_{\beta_1\beta_2} p^{\beta_2}) P.
\end{aligned}$$

Per semplificare i successivi passaggi, è conveniente considerare due generici elementi di base T_α e T_γ piuttosto che X e Z, e scegliere $Y = P$ (la scelta di Y, infatti, è sostanzialmente arbitraria), ottenendo così:

$$e^{T_\alpha} e^{T_\gamma} = \lim_{\lambda\to 0} e^{T_\alpha} e^{\lambda P} e^{T_\gamma} = \lim_{\lambda\to 0} e^{T_\alpha} e^{\lambda_- P} e^{\lambda_+ P} e^{T_\gamma} = \lim_{\lambda\to 0} e^{\tilde{T}_\alpha} e^{\tilde{T}_\gamma}, \tag{3.4}$$

$$\tilde{T}_\alpha = T_\alpha + \lambda_- \left(1 + h_{\alpha\beta} p^\beta f\left(0, h_{\alpha\beta} p^\beta\right)\right) = T_\alpha + \varphi P, \tag{3.5}$$

$$\tilde{T}_\gamma = T_\gamma + \lambda_+ \left(1 + p^\beta k_{\beta\gamma} f\left(p^\beta k_{\beta\gamma}, 0\right)\right) = T_\gamma + \psi P. \tag{3.6}$$

Ora, bisogna capire quando risulta possibile applicare i risultati del paragrafo 2.2.1 ai vettori $\tilde{T}_\alpha$ e $\tilde{T}_\gamma$, ovvero quando si verifica

$$[\tilde{T}_\alpha, [\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma]] = \tilde{v}[\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma], \qquad [\tilde{T}_\gamma, [\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma]] = -\tilde{u}[\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma]. \tag{3.7}$$

Prima, però, è opportuno estrarre informazioni utili dall'identità di Jacobi. Scegliendo P, T_α e T_γ, l'identità di Jacobi implica che $[P, [T_\alpha, T_\gamma]] + [T_\alpha, [T_\gamma, P]] + [T_\gamma, [P, T_\alpha]] = 0$, ovvero $[P, [T_\alpha, T_\gamma]] = 0$: siccome si ha anche $[P, [T_\alpha, T_\beta]] = 0$ e $[P, [T_\beta, T_\gamma]] = 0$, allora *ogni commutatore dell'algebra* $\mathfrak{g}$ *commuta con* P.

A questo punto si calcola:

$$\begin{aligned}
[\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma] &= [T_\alpha, T_\gamma] + \psi[T_\alpha, P] + \varphi[P, T_\gamma] = f_{\alpha\gamma}{}^c T_c + \left(\psi h_{\alpha\beta} p^\beta + \varphi p^\beta k_{\beta\gamma}\right) P, \\
[\tilde{T}_\alpha, [\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma]] &= [T_\alpha, [\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma]] + \varphi[P, [\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma]] = [T_\alpha, [\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma]] = \\
&= f_{\alpha\gamma}{}^c f_{\alpha c}{}^d T_d + \left(\psi h_{\alpha\beta} p^\beta + \varphi p^\beta k_{\beta\gamma}\right)\left(h_{\alpha\beta} p^\beta\right) P, \\
[\tilde{T}_\gamma, [\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma]] &= [T_\gamma, [\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma]] + \psi[P, [\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma]] = [T_\gamma, [\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma]] = \\
&= -\left(f_{\gamma\alpha}{}^c f_{\gamma c}{}^d T_d + \left(\psi h_{\alpha\beta} p^\beta + \varphi p^\beta k_{\beta\gamma}\right)\left(p^\beta k_{\beta\gamma}\right) P\right).
\end{aligned}$$

Le condizioni (3.7) si scrivono quindi nel seguente modo:

$$f_{\alpha\gamma}{}^c f_{\alpha c}{}^d + \left(\psi h_{\alpha\beta} p^\beta + \varphi p^\beta k_{\beta\gamma}\right)\left(h_{\alpha\beta} p^\beta\right) p^d = \tilde{v}\left(f_{\alpha\gamma}{}^d + \left(\psi h_{\alpha\beta} p^\beta + \varphi p^\beta k_{\beta\gamma}\right) p^d\right), \tag{3.8}$$

$$f_{\gamma\alpha}{}^c f_{\gamma c}{}^d + \left(\psi h_{\alpha\beta} p^\beta + \varphi p^\beta k_{\beta\gamma}\right)\left(p^\beta k_{\beta\gamma}\right) p^d = \tilde{u}\left(f_{\alpha\gamma}{}^d + \left(\psi h_{\alpha\beta} p^\beta + \varphi p^\beta k_{\beta\gamma}\right) p^d\right). \tag{3.9}$$

Ricordando ora che φ e ψ sono funzioni di λ_- e λ_+, è possibile fissare il valore di λ_- in modo tale che esistano $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ tali da soddisfare le condizioni (3.8) e (3.9). Un modo standard di operare questa scelta è quello di annullare il termine $\psi h_{\alpha\beta} p^\beta + \varphi p^\beta k_{\beta\gamma}$: a conti fatti, risulta

$$\lambda_- = \frac{h_{\alpha\beta} p^\beta \left(1 + p^\beta k_{\beta\gamma} f\left(p^\beta k_{\beta\gamma}, 0\right)\right)}{h_{\alpha\beta} p^\beta - p^\beta k_{\beta\gamma} - h_{\alpha\beta_1} p^{\beta_1} p^{\beta_2} k_{\beta_2\gamma}\left(f\left(0, h_{\alpha\beta} p^\beta\right) - f\left(p^\beta k_{\beta\gamma}, 0\right)\right)} \lambda; \tag{3.10}$$

si ha pertanto:

$$f_{\alpha\gamma}{}^c f_{\alpha c}{}^d = \tilde{v} f_{\alpha\gamma}{}^d, \qquad f_{\gamma\alpha}{}^c f_{\gamma c}{}^d = -\tilde{u} f_{\gamma\alpha}{}^d.$$

Si esamini intanto la prima condizione:

$$\left(f_{\alpha\gamma}{}^{\alpha_1} h_{\alpha\alpha_1} + f_{\alpha\gamma}{}^{\beta_1} h_{\alpha\beta_1}\right) p^d + f_{\alpha\gamma}{}^{\gamma_1} f_{\alpha\gamma_1}{}^{d} = \tilde{v} f_{\alpha\gamma}{}^{d},$$

considerando che $p^\alpha = 0$ e $p^\gamma = 0$, questa si divide in tre equazioni:

- $f_{\alpha\gamma}{}^{\gamma_1} f_{\alpha\gamma_1}{}^{\gamma_2} = \tilde{v} f_{\alpha\gamma}{}^{\gamma_2}$: questa prima condizione è risolta imponendo $f_{\alpha\gamma}{}^{\gamma_2} = \Omega_{\alpha\gamma} q^{\gamma_2}$, con $\Omega_{\alpha\gamma}$ e q^γ arbitrari (e $\tilde{v} = \Omega_{\alpha\gamma_1} q^{\gamma_1}$);
- $f_{\alpha\gamma}{}^{\gamma_1} f_{\alpha\gamma_1}{}^{\alpha_2} = \tilde{v} f_{\alpha\gamma}{}^{\alpha_2}$, ovvero $\Omega_{\alpha\gamma} q^{\gamma_1} f_{\alpha\gamma_1}{}^{\alpha_2} = \Omega_{\alpha\gamma_1} q^{\gamma_1} f_{\alpha\gamma}{}^{\alpha_2}$: questa seconda condizione è risolta imponendo $f_{\alpha\gamma}{}^{\alpha_2} = \Omega_{\alpha\gamma} q^{\alpha_2}$, con q^α arbitrario;
- $\left(f_{\alpha\gamma}{}^{\alpha_1} h_{\alpha\alpha_1} + f_{\alpha\gamma}{}^{\beta_1} h_{\alpha\beta_1}\right) p^{\beta_2} + f_{\alpha\gamma}{}^{\gamma_1} f_{\alpha\gamma_1}{}^{\beta_2} = \tilde{v} f_{\alpha\gamma}{}^{\beta_2}$, ovvero $\left(\Omega_{\alpha\gamma} q^{\alpha_1} h_{\alpha\alpha_1} + f_{\alpha\gamma}{}^{\beta_1} h_{\alpha\beta_1}\right) p^{\beta_2} + \Omega_{\alpha\gamma} q^{\gamma_1} f_{\alpha\gamma_1}{}^{\beta_2} = \Omega_{\alpha\gamma_1} q^{\gamma_1} f_{\alpha\gamma}{}^{\beta_2}$: questa terza condizione è risolta imponendo $f_{\alpha\gamma}{}^{\beta_2} = \Omega_{\alpha\gamma} q^{\beta_2}$, con $q^\beta = p^\beta$ e $h_{\alpha\alpha_1} q^{\alpha_1} = -h_{\alpha\beta_1} p^{\beta_1}$.

Pertanto, l'equazione $f_{\alpha\gamma}{}^{c} f_{\alpha c}{}^{d} = \tilde{v} f_{\alpha\gamma}{}^{d}$ è risolta da $f_{\alpha\gamma}{}^{c} = \Omega_{\alpha\gamma} q^c$ e $\tilde{v} = \Omega_{\alpha\gamma} q^\gamma$, a patto che $q^\beta = p^\beta$ e $q^{\alpha_1} h_{\alpha_1\alpha} = h_{\alpha\beta} p^\beta$; inserendo questi risultati nella seconda condizione $f_{\gamma\alpha}{}^{c} f_{\gamma c}{}^{d} = -\tilde{u} f_{\gamma\alpha}{}^{d}$ (con $\tilde{u} = q^\alpha \Omega_{\alpha\gamma}$), emerge l'ulteriore vincolo $k_{\gamma\gamma_1} q^{\gamma_1} = p^\beta k_{\beta\gamma}$.

Se risultano verificate le condizioni appena indicate, allora si ha

$$\begin{aligned}
\ln\left(e^{T_\alpha} e^{T_\gamma}\right) &= \lim_{\lambda\to 0} \ln\left(e^{\tilde{T_\alpha}} e^{\tilde{T_\gamma}}\right) = \lim_{\lambda\to 0}\left(\tilde{T_\alpha} + \tilde{T_\gamma} + f\left(\tilde{u},\tilde{v}\right)[\tilde{T_\alpha},\tilde{T_\gamma}]\right) = \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\left(T_\alpha + T_\gamma + (\varphi+\psi)P + f\left(\tilde{u},\tilde{v}\right)[\tilde{T_\alpha},\tilde{T_\gamma}]\right) = \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\left(T_\alpha + T_\gamma + (\varphi+\psi)P + f\left(q^\alpha\Omega_{\alpha\gamma}, \Omega_{\alpha\gamma} q^\gamma\right)\left([T_\alpha,T_\gamma] + \psi[T_\alpha,P] + \varphi[P,T_\gamma]\right)\right) = \\
&= T_\alpha + T_\gamma + f\left(q^\alpha\Omega_{\alpha\gamma} + \Omega_{\alpha\gamma} q^\gamma\right)[T_\alpha,T_\gamma],
\end{aligned}$$

in quanto φ e ψ sono entrambi proporzionali a λ.

I risultati di questo paragrafo possono essere riassunti nel seguente enunciato:

Se	$f_{\alpha\gamma}{}^{c} = \Omega_{\alpha\gamma} q^c,$	(3.11)
con	$q^{\alpha_1} h_{\alpha_1\alpha} = h_{\alpha\beta} p^\beta, \;\; q^\beta = p^\beta, \;\; k_{\gamma\gamma_1} q^{\gamma_1} = p^\beta k_{\beta\gamma},$	(3.12)
allora	$\ln\left(e^{T_\alpha} e^{T_\gamma}\right) = T_\alpha + T_\gamma + f\left(q^\alpha\Omega_{\alpha\gamma} + \Omega_{\alpha\gamma} q^\gamma\right)[T_\alpha,T_\gamma].$	(3.13)

3.2 Secondo caso: $[\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] = 0$

In questo paragrafo sarà studiato il caso in cui la sottoalgebra $\mathfrak{g}_2$ sia abeliana.
Non è più vero che $M \equiv N$; le costanti di struttura saranno date da:

$$f_{\mu_1\mu_2}{}^{\alpha} = h_{\mu_1\mu_2} m^{\alpha}, \;\; f_{\mu_1\mu_2}{}^{\beta} = h_{\mu_1\mu_2} m^{\beta}, \;\; f_{\mu_1\mu_2}{}^{\gamma} = 0 \tag{3.14}$$

$$f_{\nu_1\nu_2}{}^{\alpha} = 0, \;\; f_{\nu_1\nu_2}{}^{\beta} = k_{\nu_1\nu_2} n^{\beta}, \;\; f_{\nu_1\nu_2}{}^{\gamma} = k_{\nu_1\nu_2} n^{\gamma}. \tag{3.15}$$

Nel caso di $[\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] \neq 0$, essendo possibile scegliere arbitrariamente in $\mathfrak{g}_2$ il termine di splitting Y, si era deciso di porre $Y = P$, in modo da semplificare alcuni conti; nel caso in oggetto, non vi è alcun elemento "privilegiato" in $\mathfrak{g}_2$ da porre uguale a Y, pertanto si prenderà un generico elemento di base T_β:

$$e^{T_\alpha} e^{T_\gamma} = \lim_{\lambda \to 0} e^{T_\alpha} e^{\lambda T_\beta} e^{T_\gamma} = \lim_{\lambda \to 0} e^{T_\alpha} e^{\lambda_+ T_\beta} e^{\lambda_- T_\beta} e^{T_\gamma} = \lim_{\lambda \to 0} e^{\tilde{T_\alpha}} e^{\tilde{T_\gamma}}, \tag{3.16}$$

$$\tilde{T_\alpha} = T_\alpha + \lambda_- T_\beta + \lambda_- f\left(\lambda_- m^{\alpha_1} h_{\alpha_1\beta}, h_{\alpha\mu} m^{\mu}\right) h_{\alpha\beta} M = T_\alpha + \lambda_- T_\beta + \varphi M, \tag{3.17}$$

$$\tilde{T_\gamma} = \lambda_+ T_\beta + T_\gamma + \lambda_+ f\left(n^{\nu} k_{\nu\gamma}, \lambda_+ k_{\beta\gamma_1} n^{\gamma_1}\right) k_{\beta\gamma} N = \lambda_+ T_\beta + T_\gamma + \psi N. \tag{3.18}$$

Ora, dall'identità di Jacobi possono essere estratte informazioni determinanti riguardo alla forma delle costanti di struttura; impostando la condizione

$$\begin{aligned}
&[T_\alpha, [T_\beta, T_\gamma]] + [T_\beta, [T_\gamma, T_\alpha]] + [T_\gamma, [T_\alpha, T_\beta]] = \\
&\quad = k_{\beta\gamma} h_{\alpha\beta_1} n^{\beta_1} M + k_{\beta\gamma} f_{\alpha\gamma_1}{}^{c} n^{\gamma_1} T_c + f_{\alpha\gamma}{}^{\alpha_1} h_{\alpha_1\beta} M + \\
&\qquad - f_{\alpha\gamma}{}^{\gamma_1} k_{\beta\gamma_1} N - h_{\alpha\beta} m^{\alpha_1} f_{\alpha_1\gamma}{}^{c} T_c - h_{\alpha\beta} m^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma} N = 0,
\end{aligned}$$

si ottengono le seguenti condizioni (o *vincoli di Jacobi*):

$$\begin{aligned}
&\left(k_{\beta\gamma} h_{\alpha\beta_1} n^{\beta_1} + f_{\alpha\gamma}{}^{\alpha_1} h_{\alpha_1\beta}\right) m^A + \left(k_{\beta\gamma} f_{\alpha\gamma_1}{}^{A} n^{\gamma_1} - h_{\alpha\beta} m^{\alpha_1} f_{\alpha_1\gamma}{}^{A}\right) = 0, \\
&\left(k_{\beta\gamma} h_{\alpha\beta_1} n^{\beta_1} + f_{\alpha\gamma}{}^{\alpha_1} h_{\alpha_1\beta}\right) m^B - \left(h_{\alpha\beta} m^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma} + f_{\alpha\gamma}{}^{\gamma_1} k_{\beta\gamma_1}\right) n^B + \\
&\qquad\qquad + \left(k_{\beta\gamma} f_{\alpha\gamma_1}{}^{B} n^{\gamma_1} - h_{\alpha\beta} m^{\alpha_1} f_{\alpha_1\gamma}{}^{B}\right) = 0, \\
&-\left(h_{\alpha\beta} m^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma} + f_{\alpha\gamma}{}^{\gamma_1} k_{\beta\gamma_1}\right) n^{\Gamma} + \left(k_{\beta\gamma} f_{\alpha\gamma_1}{}^{\Gamma} n^{\gamma_1} - h_{\alpha\beta} m^{\alpha_1} f_{\alpha_1\gamma}{}^{\Gamma}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Nel caso $[\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] \neq 0$, l'identità di Jacobi si traduceva nella relazione $[P, [T_\alpha, T_\gamma]] = 0$, la quale non dava indicazioni particolarmente utili sulla forma delle costanti di struttura; solo dopo aver imposto che la BCH assumesse forma chiusa per $\tilde{T}_\alpha$ e $\tilde{T}_\gamma$ si è giunti a delle costanti di struttura del tipo ${f_{\alpha\gamma}}^c = \Omega_{\alpha\gamma} q^c$. Nel caso in oggetto, invece, l'identità di Jacobi ha portato a tre condizioni di non immediata interpretazione, le quali tuttavia si rivelano in grado di dare informazioni un po' più restrittive riguardo alla forma delle costanti di struttura. Pertanto, in primo luogo si procederà discutendo i vincoli di Jacobi, distinguendo così tre diversi casi a seconda dei valori assunti da $h_{\mu_1\mu_2}$, $k_{\nu_1\nu_2}$, m^μ e n^ν; dopodiché, per ciascuna delle varie situazioni così individuate, verrà mostrato come risolvere la BCH in forma chiusa per $\tilde{T}_\alpha$ e $\tilde{T}_\gamma$.

Nel corso dei prossimi paragrafi si rivelerà necessario avanzare di volta in volta ipotesi più o meno restrittive riguardo i parametri in gioco, in modo da risolvere più o meno esplicitamente i vincoli di Jacobi e garantire la possibilità di scrivere la BCH in forma chiusa; non sarà quindi fatta una trattazione esaustiva, ma saranno considerati diversi casi particolari. Le ipotesi introdotte, però, saranno tali da essere banalmente verificate almeno nel caso in cui i sottospazi $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_3$ siano di dimensione unitaria.

La prima ipotesi da avanzare è che le costanti di struttura incognite assumano la forma ${f_{\alpha\gamma}}^c = \Omega_{\alpha\gamma} q^c$; conseguentemente, i vincoli di Jacobi diventano:

$$\left(k_{\beta\gamma} h_{\alpha\beta_1} n^{\beta_1} + \Omega_{\alpha\gamma} q^{\alpha_1} h_{\alpha_1\beta}\right) m^A + \left(k_{\beta\gamma} \Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1} - h_{\alpha\beta} m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma}\right) q^A = 0, \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\left(k_{\beta\gamma} h_{\alpha\beta_1} n^{\beta_1} + \Omega_{\alpha\gamma} q^{\alpha_1} h_{\alpha_1\beta}\right) m^B - \left(h_{\alpha\beta} m^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma} + \Omega_{\alpha\gamma} k_{\beta\gamma_1} q^{\gamma_1}\right) n^B + \\ + \left(k_{\beta\gamma} \Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1} - h_{\alpha\beta} m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma}\right) q^B = 0,\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$-\left(h_{\alpha\beta} m^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma} + \Omega_{\alpha\gamma} k_{\beta\gamma_1} q^{\gamma_1}\right) n^\Gamma + \left(k_{\beta\gamma} \Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1} - h_{\alpha\beta} m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma}\right) q^\Gamma = 0. \tag{3.21}$$

La seconda ipotesi consiste nell'assumere che $h_{\alpha\beta}$ e $k_{\beta\gamma}$ siano entrambe non nulle.[5] La terza ipotesi sotto cui saranno studiate le relazioni (3.19), (3.20), (3.21) è la seguente:

$$\Omega_{\alpha\gamma} m^{\alpha_1} h_{\alpha_1\beta} = h_{\alpha\beta} m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma}, \qquad \Omega_{\alpha\gamma} k_{\beta\gamma_1} n^{\gamma_1} = k_{\beta\gamma} \Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1}. \tag{3.22}$$

Infine, i tre casi in cui verranno separatamente discussi i vincoli di Jacobi sono:

- $(m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma}, \Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1}) \neq (0,0)$ e $(m^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma}, h_{\alpha\beta_1} n^{\beta_1})$ qualsiasi;
- $(m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma}, \Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1}) = (0,0)$ e $(m^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma}, h_{\alpha\beta_1} n^{\beta_1}) \neq (0,0)$;
- $(m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma}, \Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1}) = (0,0)$ e $(m^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma}, h_{\alpha\beta_1} n^{\beta_1}) = (0,0)$.

[5] Questa condizione implica $[T_\alpha, T_\beta] \neq 0$ e $[T_\beta, T_\gamma] \neq 0$, a meno che non sia $M = 0$ o $N = 0$: nel primo caso, ad esempio, si ha $[T_\alpha, T_\beta] = h_{\alpha\beta} M = 0$ e si può convenzionalmente porre $h_{\alpha\beta} = 1$.

3.2.1 $(m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1,\gamma}, \Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1}) \neq (0,0)$ e $(m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}, h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1})$ qualsiasi

Si esamini quindi il vincolo (3.19): ricordando che si presuppone valida la (3.22), allora la sua soluzione è data da:

$$q^A = -\frac{h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}}{\Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1}}m^A.$$

Ora, se $\Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1} = 0$, l'espressione appena scritta dovrebbe essere priva di significato; ma, in questo caso, il vincolo (3.19) impone semplicemente che q^A sia proporzionale a m^A, con la condizione aggiuntiva che $h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1} = 0$. È dunque possibile includere il caso $\Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1} = 0$ nell'espressione di q^A appena data se si adotta la convenzione di interpretare il termine $\frac{h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}}{\Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1}}$ come un parametro libero, non appena denominatore e numeratore si annullino. Analogamente, il vincolo (3.21) porta a

$$q^\Gamma = -\frac{m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}}{m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma}}n^\Gamma;$$

di nuovo, il termine $\frac{m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}}{m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma}}$, nel caso in cui denominatore e numeratore siano nulli, va interpretato come un parametro libero (indeterminato).

Esaminando ora il vincolo (3.20), si rivela necessario distinguere due diversi casi:

(a) se $h_{\alpha\beta}m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma} \neq k_{\beta\gamma}\Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1}$, allora il vincolo è risolto da

$$q^B = -\frac{h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}}{\Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1}}m^B - \frac{m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}}{m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma}}n^\Gamma :$$

in questo caso, quindi, definendo $Q := q^cT_c$, si può semplicemente scrivere

$$Q = -\frac{h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}}{\Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1}}M - \frac{m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}}{m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma}}N; \tag{3.23}$$

(b) se invece $h_{\alpha\beta}m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma} = k_{\beta\gamma}\Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1}$, allora il vincolo è automaticamente verificato dalle espressioni di q^A e q^Γ già trovate e quindi il valore di q^B rimane del tutto indeterminato: si può quindi scrivere

$$Q = -\frac{h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}}{\Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1}}M - \frac{m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}}{m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma}}N + L, \tag{3.24}$$

con $L = l^\beta T_\beta \in \mathfrak{g}_2$ che non può essere determinato tramite i vincoli di Jacobi.

È giunto il momento di imporre $[\tilde{T}_\alpha,[\tilde{T}_\alpha,\tilde{T}_\gamma]]=\tilde{v}[\tilde{T}_\alpha,\tilde{T}_\gamma]$ e $[\tilde{T}_\gamma,[\tilde{T}_\alpha,\tilde{T}_\gamma]]=-\tilde{u}[\tilde{T}_\alpha,\tilde{T}_\gamma]$; prima, però, è necessario introdurre la seguente ipotesi:

$$h_{\alpha\beta}m^{\alpha_1}h_{\alpha_1\beta_1}n^{\beta_1}=m^{\alpha_1}h_{\alpha_1\beta}h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1},\qquad k_{\beta\gamma}m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma_1}n^{\gamma_1}=m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}k_{\beta\gamma_1}n^{\gamma_1} \tag{3.25}$$

(questa condizione è verificata banalmente se $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_3$ hanno dimensione unitaria). La (3.25) implica $[M,N]=0$ nel caso (a) e $[M,N]=m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma_1}n^{\gamma_1}L$ nel caso (b).

(a) Si consideri quindi il caso $h_{\alpha\beta}m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma}\neq k_{\beta\gamma}\Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1}$; si ha:

$$\begin{aligned}
[\tilde{T}_\alpha,\tilde{T}_\gamma]&=\left(\lambda_+h_{\alpha\beta}+\lambda_+\varphi m^{\alpha_1}h_{\alpha_1\beta}+\psi h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}\right)M+\\
&\quad+\left(\lambda_-k_{\beta\gamma}+\lambda_-\psi k_{\beta\gamma_1}n^{\gamma_1}+\varphi m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}\right)N+\\
&\quad+\left(\Omega_{\alpha\gamma}+\varphi m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma}+\psi\Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1}\right)Q=\\
&=\left(\lambda_+-\frac{\Omega_{\alpha\gamma}}{h_{\alpha\beta}}\frac{h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}}{\Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1}}\right)(h_{\alpha\beta}+\varphi m^{\alpha_1}h_{\alpha_1\beta})M+\\
&\quad+\left(\lambda_--\frac{\Omega_{\alpha\gamma}}{k_{\beta\gamma}}\frac{m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}}{m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma}}\right)(k_{\beta\gamma}+\psi k_{\beta\gamma_1}n^{\gamma_1})N=\\
&=\eta M+\theta N,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
[\tilde{T}_\alpha,[\tilde{T}_\alpha,\tilde{T}_\gamma]]&=\eta h_{\alpha\mu}m^\mu M+\theta h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}M+\theta\Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1}Q+\\
&\quad-\eta\lambda_-m^{\alpha_1}h_{\alpha_1\beta}M+\theta\lambda_-k_{\beta\gamma_1}n^{\gamma_1}N=\\
&=\left(h_{\alpha\mu}m^\mu-\lambda_-m^{\alpha_1}h_{\alpha_1\beta}\right)\eta M+\\
&\quad+\left(\left(\lambda_--\frac{\Omega_{\alpha\gamma}}{k_{\beta\gamma}}\frac{m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}}{m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma}}\right)k_{\beta\gamma_1}n^{\gamma_1}\right)\theta N,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\tilde{T}_\gamma,[\tilde{T}_\alpha,\tilde{T}_\gamma]]&=-\eta\lambda_+m^{\alpha_1}h_{\alpha_1\beta}M+\theta\lambda_+k_{\beta\gamma_1}n^{\gamma_1}N+\\
&\quad-\eta m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma}Q-\eta m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}N-\theta n^\nu k_{\nu\gamma}N=\\
&=-\left(\left(\lambda_+-\frac{\Omega_{\alpha\gamma}}{h_{\alpha\beta}}\frac{h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}}{\Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1}}\right)m^{\alpha_1}h_{\alpha_1\beta}\right)\eta M+\\
&\quad-\left(n^\nu k_{\nu\gamma}-\lambda_+k_{\beta\gamma_1}n^{\gamma_1}\right)\theta N.
\end{aligned}$$

- Ponendo ora

$$\lambda_-=\frac{\Omega_{\alpha\gamma}}{k_{\beta\gamma}}\frac{m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}}{m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma}}, \tag{3.27}$$

si ottiene:

$$\tilde{u}=\left(\lambda-\frac{\Omega_{\alpha\gamma}}{k_{\beta\gamma}}\frac{m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}}{m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma}}-\frac{\Omega_{\alpha\gamma}}{h_{\alpha\beta}}\frac{h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}}{\Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1}}\right)m^{\alpha_1}h_{\alpha_1\beta}, \tag{3.28}$$

$$\tilde{v}=h_{\alpha\mu}m^\mu-\frac{\Omega_{\alpha\gamma}}{k_{\beta\gamma}}\frac{m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}}{m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma}}m^{\alpha_1}h_{\alpha_1\beta}; \tag{3.29}$$

- ponendo invece

$$\lambda_+ = \frac{\Omega_{\alpha\gamma}}{h_{\alpha\beta}} \frac{h_{\alpha\beta_1} n^{\beta_1}}{\Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1}}, \tag{3.30}$$

si ottiene:

$$\tilde{u} = n^\nu k_{\nu\gamma} - \frac{\Omega_{\alpha\gamma}}{h_{\alpha\beta}} \frac{h_{\alpha\beta_1} n^{\beta_1}}{\Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1}} k_{\beta\gamma_1} n^{\gamma_1}, \tag{3.31}$$

$$\tilde{v} = \left(\lambda - \frac{\Omega_{\alpha\gamma}}{k_{\beta\gamma}} \frac{m^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma}}{m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma}} - \frac{\Omega_{\alpha\gamma}}{h_{\alpha\beta}} \frac{h_{\alpha\beta_1} n^{\beta_1}}{\Omega_{\alpha\gamma_1}} n^{\gamma_1} \right) k_{\beta\gamma_1} n^{\gamma_1}. \tag{3.32}$$

(b) Si consideri ora il caso $h_{\alpha\beta} m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma} = k_{\beta\gamma} \Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1}$; a conti fatti, si ottiene:

$$\begin{aligned}
[\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma] = & \left(\lambda_+ - \frac{\Omega_{\alpha\gamma}}{h_{\alpha\beta}} \frac{h_{\alpha\beta_1} n^{\beta_1}}{\Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1}} \right) (h_{\alpha\beta} + \varphi m^{\alpha_1} h_{\alpha_1\beta}) M + \\
& + \left(\lambda_- - \frac{\Omega_{\alpha\gamma}}{k_{\beta\gamma}} \frac{m^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma}}{m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma}} \right) (k_{\beta\gamma} + \psi k_{\beta\gamma_1} n^{\gamma_1}) N + \\
& + (\Omega_{\alpha\gamma} + \varphi m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma} + \psi \Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1} + \varphi\psi m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma_1} n^{\gamma_1}) L = \\
= & \, \eta M + \theta N + \xi L,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
[\tilde{T}_\alpha, [\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma]] = & (h_{\alpha\mu} m^\mu - \lambda_- m^{\alpha_1} h_{\alpha_1\beta}) \eta M + \left(h_{\alpha\beta_1} l^{\beta_1} + \varphi m^{\alpha_1} h_{\alpha_1\beta_1} l^{\beta_1} \right) \xi M + \\
& + \left(\left(\lambda_- - \frac{\Omega_{\alpha\gamma}}{k_{\beta\gamma}} \frac{m^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma}}{m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma}} \right) k_{\beta\gamma_1} n^{\gamma_1} \right) \theta N + \\
& + (\Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1} + \varphi m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma_1} n^{\gamma_1}) \theta L,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\tilde{T}_\gamma, [\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma]] = & - \left(\left(\lambda_+ - \frac{\Omega_{\alpha\gamma}}{h_{\alpha\beta}} \frac{h_{\alpha\beta_1} n^{\beta_1}}{\Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1}} \right) m^{\alpha_1} h_{\alpha_1\beta} \right) \eta M + \\
& - (n^\nu k_{\nu\gamma} - \lambda_+ k_{\beta\gamma_1} n^{\gamma_1}) \theta N - \left(l^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma} + \psi l^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma_1} n^{\gamma_1} \right) \xi N + \\
& - (m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma} + \psi m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma_1} n^{\gamma_1}) \eta L.
\end{aligned}$$

Ora, l'idea è quella di porre

$$\tilde{u} = \left(\lambda_+ - \frac{\Omega_{\alpha\gamma}}{h_{\alpha\beta}} \frac{h_{\alpha\beta_1} n^{\beta_1}}{\Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1}} \right) m^{\alpha_1} h_{\alpha_1\beta}, \qquad \tilde{v} = \left(\lambda_- - \frac{\Omega_{\alpha\gamma}}{k_{\beta\gamma}} \frac{m^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma}}{m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma}} \right) k_{\beta\gamma_1} n^{\gamma_1}, \tag{3.34}$$

ottenendo in questo modo

$$\begin{aligned}
[\tilde{T}_\alpha, [\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma]] = & \, \tilde{v} [\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma] + ((\Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1} + \varphi m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma_1} n^{\gamma_1}) \theta - \tilde{v}\xi) L + \\
& + \left((h_{\alpha\mu} m^\mu - \lambda_- m^{\alpha_1} h_{\alpha_1\beta}) \eta + (h_{\alpha\beta_1} l^{\beta_1} + \varphi m^{\alpha_1} h_{\alpha_1\beta_1} l^{\beta_1}) \xi - \tilde{v}\eta \right) M, \\
[\tilde{T}_\gamma, [\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma]] = & - \tilde{u} [\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma] - ((m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma} + \psi m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma_1} n^{\gamma_1}) \eta - \tilde{u}\xi) L + \\
& - \left((n^\nu k_{\nu\gamma} - \lambda_+ k_{\beta\gamma_1} n^{\gamma_1}) \theta + (l^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma} + \psi l^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma_1} n^{\gamma_1}) \xi - \tilde{u}\theta \right) N;
\end{aligned}$$

ma $(\Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1} + \varphi m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma_1}n^{\gamma_1})\theta - \tilde{v}\xi = (m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma} + \psi m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma_1}n^{\gamma_1})\eta - \tilde{u}\xi = 0$ (per la (3.22)), quindi basta trovare λ_- tale da far valere le seguenti condizioni:

$$(h_{\alpha\mu}m^{\mu} - \lambda_- m^{\alpha_1}h_{\alpha_1\beta})\eta + (h_{\alpha\beta_1}l^{\beta_1} + \varphi m^{\alpha_1}h_{\alpha_1\beta_1}l^{\beta_1})\xi = \tilde{v}\eta, \tag{3.35}$$

$$(n^{\nu}k_{\nu\gamma} - \lambda_+ k_{\beta\gamma_1}n^{\gamma_1})\theta + (l^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma} + \psi l^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma_1}n^{\gamma_1})\xi = \tilde{u}\theta. \tag{3.36}$$

Si tratta di due equazioni in un'incognita (poiché λ_+ è automaticamente determinata una volta scelta λ_-), quindi, per poterle risolvere, è necessario che queste risultino equivalenti; questo si verifica se valgono le ulteriori condizioni:

$$\begin{aligned}(h_{\alpha\beta_1}l^{\beta_1} + \varphi m^{\alpha_1}h_{\alpha_1\beta_1}l^{\beta_1})(k_{\beta\gamma} + \psi k_{\beta\gamma_1}n^{\gamma_1}) &= \\ &= (h_{\alpha\beta} + \varphi m^{\alpha_1}h_{\alpha_1\beta})(l^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma} + \psi l^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma_1}n^{\gamma_1}),\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}(h_{\alpha\mu}m^{\mu} - \lambda_- m^{\alpha_1}h_{\alpha_1\beta})(\lambda_+ - \frac{\Omega_{\alpha\gamma}}{h_{\alpha\beta}}\frac{h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}}{\Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1}}) &= \\ &= (n^{\nu}k_{\nu\gamma} - \lambda_+ k_{\beta\gamma_1}n^{\gamma_1})(\lambda_- - \frac{\Omega_{\alpha\gamma}}{k_{\beta\gamma}}\frac{m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}}{m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma}}).\end{aligned} \tag{3.38}$$

Nel momento in cui queste sono verificate (ed in effetti lo sono banalmente almeno nel caso in cui $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_3$ siano unidimensionali), basterà quindi scegliere λ_- in modo che una fra le equazioni (3.35) e (3.36) sia verificata, e si avrà

$$[\tilde{T}_\alpha, [\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma]] = \tilde{v}[\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma], \qquad [\tilde{T}_\gamma, [\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma]] = -\tilde{u}[\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma].$$

3.2.2 $(m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma}, \Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1}) = (0,0)$ e $(m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}, h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}) \neq (0,0)$

I vincoli (3.19) e (3.21) si traducono nelle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}\Omega_{\alpha\gamma}q^{\alpha_1}h_{\alpha_1\beta} &= -k_{\beta\gamma}h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}, \\ \Omega_{\alpha\gamma}k_{\beta\gamma_1}q^{\gamma_1} &= -h_{\alpha\beta}m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}.\end{aligned}$$

Il vincolo (3.20) è automaticamente verificato da queste ultime relazioni, dunque il valore di q^B è totalmente indeterminato.

A conti fatti, si ottiene:

$$\begin{aligned}[\tilde{T}_\alpha, \tilde{T}_\gamma] &= (\lambda_+ h_{\alpha\beta} + \psi h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1})M + (\lambda_- k_{\beta\gamma} + \varphi m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma})N + \Omega_{\alpha\gamma}Q = \\ &= \eta M + \theta N + \xi Q.\end{aligned} \tag{3.39}$$

Le ipotesi da introdurre, in modo tale che sia possibile risolvere la BCH in forma chiusa per $\tilde{T}_\alpha$ e $\tilde{T}_\gamma$, sono le seguenti:

$$h_{\alpha\beta_1}m^{\beta_1} = m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}, \qquad n^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma} = h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}, \qquad h_{\alpha\beta} = k_{\beta\gamma} \tag{3.40}$$

$$h_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\gamma_1}q^{\gamma_1} = \Omega_{\alpha\gamma}k_{\beta\gamma_1}q^{\gamma_1}, \qquad k_{\beta\gamma}q^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma} = \Omega_{\alpha\gamma}q^{\alpha_1}h_{\alpha_1\beta}; \tag{3.41}$$

si tratta di condizioni molto restrittive, ma, come per tutte le ipotesi introdotte, queste si riducono ad un'identità banale nel caso di $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_3$ unidimensionali. Si ottiene così:

$$\begin{aligned}
[\tilde{T_\alpha},[\tilde{T_\alpha},\tilde{T_\gamma}]] &= -(m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma})[\tilde{T_\alpha},\tilde{T_\gamma}]+ \\
&\quad + \big((h_{\alpha\mu}m^\mu + m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma})(\lambda_+ h_{\alpha\beta} + \psi h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1})+ \\
&\qquad + 2h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}(\lambda_- k_{\beta\gamma} + \varphi m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}) + \Omega_{\alpha\gamma}h_{\alpha\mu}q^\mu + \varphi\Omega_{\alpha\gamma}m^{\alpha_1}h_{\alpha_1\alpha_2}q^{\alpha_2}\big)M; \\
[\tilde{T_\alpha},[\tilde{T_\alpha},\tilde{T_\gamma}]] &= (h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1})[\tilde{T_\alpha},\tilde{T_\gamma}]+ \\
&\quad - \big((n^\nu k_{\nu\gamma} + h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1})(\lambda_- k_{\beta\gamma} + \varphi m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma})+ \\
&\qquad + 2m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}(\lambda_+ h_{\alpha\beta} + \psi h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}) + \Omega_{\alpha\gamma}q^\nu k_{\nu\gamma} + \psi\Omega_{\alpha\gamma}q^{\gamma_1}k_{\gamma_1\gamma_2}n^{\gamma_2}\big)N.
\end{aligned}$$

Si sceglie quindi un opportuno valore di λ_- tale per cui valgano le condizioni

$$\begin{aligned}
(h_{\alpha\mu}m^\mu + m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma})(\lambda_+ h_{\alpha\beta} + \psi h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}) + 2h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}(\lambda_- k_{\beta\gamma} + \varphi m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma})+ \\
+ \Omega_{\alpha\gamma}h_{\alpha\mu}q^\mu + \varphi\Omega_{\alpha\gamma}m^{\alpha_1}h_{\alpha_1\alpha_2}q^{\alpha_2} = 0, \quad (3.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(n^\nu k_{\nu\gamma} + h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1})(\lambda_- k_{\beta\gamma} + \varphi m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}) + 2m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}(\lambda_+ h_{\alpha\beta} + \psi h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1})+ \\
+ \Omega_{\alpha\gamma}q^\nu k_{\nu\gamma} + \psi\Omega_{\alpha\gamma}q^{\gamma_1}k_{\gamma_1\gamma_2}n^{\gamma_2} = 0 \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

(a patto che queste due equazioni siano equivalenti); in questo modo, quindi, si avrà $[\tilde{T_\alpha},[\tilde{T_\alpha},\tilde{T_\gamma}]] = \tilde{v}[\tilde{T_\alpha},\tilde{T_\gamma}]$ e $[\tilde{T_\gamma},[\tilde{T_\alpha},\tilde{T_\gamma}]] = -\tilde{u}[\tilde{T_\alpha},\tilde{T_\gamma}]$, con

$$\tilde{u} = -h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}, \qquad \tilde{v} = -m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}. \tag{3.44}$$

3.2.3 $(m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma}, \Omega_{\alpha\gamma_1}n^{\gamma_1}) = (0,0)$ e $(m^{\beta_1}k_{\beta_1\gamma}, h_{\alpha\beta_1}n^{\beta_1}) = (0,0)$

I vincoli di Jacobi implicano $q^{\alpha_1}h_{\alpha_1\beta} = 0$, $k_{\beta\gamma_1}q^{\gamma_1} = 0$ (q^B rimane indeterminato).

A conti fatti, si ottiene $[\tilde{T_\alpha},\tilde{T_\gamma}] = \lambda_+ h_{\alpha\beta}M + \lambda_- k_{\beta\gamma}N + \Omega_{\alpha\gamma}Q$.

Le ipotesi da introdurre in questo caso sono le seguenti: $q^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma} = 0$, $\Omega_{\alpha\gamma_1}q^{\gamma_1} = 0$;
si ottiene così $[\tilde{T_\alpha},[\tilde{T_\alpha},\tilde{T_\gamma}]] = (\lambda_+ h_{\alpha\beta}h_{\alpha\mu}m^\mu + \Omega_{\alpha\gamma}h_{\alpha\mu}q^\mu + \varphi\Omega_{\alpha\gamma}m^{\alpha_1}h_{\alpha_1\alpha_2}q^{\alpha_2})M$
e $[\tilde{T_\gamma},[\tilde{T_\alpha},\tilde{T_\gamma}]] = (\lambda_- k_{\beta\gamma}n^\nu k_{\nu\gamma} + \Omega_{\alpha\gamma}q^\nu k_{\nu\gamma} + \psi\Omega_{\alpha\gamma}q^{\gamma_1}k_{\gamma_1\gamma_2}n^{\gamma_2})N$.
Si sceglie quindi λ_- tale che valgano le seguenti condizioni:

$$\lambda_+ h_{\alpha\beta}h_{\alpha\mu}m^\mu + \Omega_{\alpha\gamma}h_{\alpha\mu}q^\mu + \varphi\Omega_{\alpha\gamma}m^{\alpha_1}h_{\alpha_1\alpha_2}q^{\alpha_2} = 0, \tag{3.45}$$

$$\lambda_- k_{\beta\gamma}n^\nu k_{\nu\gamma} + \Omega_{\alpha\gamma}q^\nu k_{\nu\gamma} + \psi\Omega_{\alpha\gamma}q^{\gamma_1}k_{\gamma_1\gamma_2}n^{\gamma_2} = 0, \tag{3.46}$$

a patto che le due equazioni siano equivalenti; chiaramente, in questo caso $\tilde{u} = \tilde{v} = 0$.

Riassumendo, negli ultimi tre paragrafi si è ottenuto il seguente risultato.

Siano verificate le seguenti ipotesi:

1. ${f_{\alpha\gamma}}^c = \Omega_{\alpha\gamma} q^c$; (3.47)
2. $h_{\alpha\beta} \neq 0, \;\; k_{\beta\gamma} \neq 0$; (3.48)
3. $\Omega_{\alpha\gamma} m^{\alpha_1} h_{\alpha_1\beta} = h_{\alpha\beta} m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma}, \;\; \Omega_{\alpha\gamma} k_{\beta\gamma_1} n^{\gamma_1} = k_{\beta\gamma} \Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1}$. (3.22)

(I.a) Nel caso $h_{\alpha\beta} m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma} \neq k_{\beta\gamma} \Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1}$,

i vincoli di Jacobi sono risolti da $Q = -\dfrac{h_{\alpha\beta_1} n^{\beta_1}}{\Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1}} M - \dfrac{m^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma}}{m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma}} N$;

se poi vale la condizione (3.25), allora

$$\ln\left(e^{T_\alpha} e^{T_\gamma}\right) = T_\alpha + T_\gamma + \varphi M + \psi N + f(\tilde{u}, \tilde{v})(\eta M + \theta N), \tag{3.49}$$

con φ, ψ, η, θ dati da (3.17), (3.18), (3.26)

e $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\lambda_\pm$ dati da (3.28), (3.29), (3.27) o da (3.31), (3.32), (3.30)

(I.b) Nel caso $h_{\alpha\beta} m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma} = k_{\beta\gamma} \Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1} \neq 0$,

i vincoli di Jacobi sono risolti da $Q = -\dfrac{h_{\alpha\beta_1} n^{\beta_1}}{\Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1}} M - \dfrac{m^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma}}{m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma}} N + L$;

se poi valgono le condizioni (3.25), (3.37), (3.38), allora

$$\ln\left(e^{T_\alpha} e^{T_\gamma}\right) = T_\alpha + T_\gamma + \varphi M + \psi N + f(\tilde{u}, \tilde{v})(\eta M + \theta N + \xi L), \tag{3.50}$$

con φ, ψ, η, θ, ξ, $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\lambda_\pm$ dati da (3.17), (3.18), (3.33), (3.34), (3.35) o (3.36).

(II) Nel caso $(m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma}, \Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1}) = (0, 0), \;\; (m^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma}, h_{\alpha\beta_1} n^{\beta_1}) \neq (0, 0)$,

i vincoli di Jacobi implicano

$$\Omega_{\alpha\gamma} q^{\alpha_1} h_{\alpha_1\beta} = -k_{\beta\gamma} h_{\alpha\beta_1} n^{\beta_1}, \qquad \Omega_{\alpha\gamma} k_{\beta\gamma_1} q^{\gamma_1} = -h_{\alpha\beta} m^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma};$$

se poi valgono le condizioni (3.40), (3.41), allora

$$\ln\left(e^{T_\alpha} e^{T_\gamma}\right) = T_\alpha + T_\gamma + \varphi M + \psi N + f(\tilde{u}, \tilde{v})(\eta M + \theta N + \xi Q), \tag{3.51}$$

con φ, ψ, η, θ, ξ, $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\lambda_\pm$ dati da (3.17), (3.18), (3.39), (3.44), (3.42) o (3.43).

(III) Nel caso $(m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma}, \Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1}) = (0, 0), \;\; (m^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma}, h_{\alpha\beta_1} n^{\beta_1}) = (0, 0)$,

i vincoli di Jacobi implicano

$$q^{\alpha_1} h_{\alpha_1\beta} = 0, \qquad k_{\beta\gamma_1} q^{\gamma_1} = 0;$$

se poi valgono le condizioni (3.40), (3.41), allora

$$\ln\left(e^{T_\alpha} e^{T_\gamma}\right) = T_\alpha + T_\gamma + \varphi M + \psi N + \frac{1}{2}(\lambda_+ h_{\alpha\beta} M + \lambda_- k_{\beta\gamma} N + \Omega_{\alpha\gamma} Q), \tag{3.52}$$

con φ, ψ, $\lambda_\pm$ dati da (3.17), (3.18), (3.45) o (3.46).

---

4 Applicazioni

Scopo di questa ultima sezione è quello di applicare i risultati finora ottenuti al caso specifico delle algebre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ e di Virasoro, per poi concludere mostrando che la BCH può essere risolta in forma chiusa per qualsiasi algebra di Lie semisemplice complessa. La trattazione seguirà [9] e [11].

Ai fini delle applicazioni di seguito presentate, sarà sufficiente sfruttare i risultati della precedente sezione nel caso specifico in cui i sottospazi $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_3$ siano di dimensione unitaria, mentre l'algebra $\mathfrak{g}_2$ sia bidimensionale, ma contenga un sottospazio centrale. Dati $X \in \mathfrak{g}_1$, $Y \in \mathfrak{g}_2$ non centrale, $I \in \mathfrak{g}_2$ centrale e $Z \in \mathfrak{g}_3$ non nulli, la situazione che verrà di seguito considerata prevede quindi $\mathfrak{g} = \langle X, Y, I, Z \rangle$, con $[X, Y] \in \langle X, Y, I \rangle$ e $[Y, Z] \in \langle Y, Z, I \rangle$. Esisteranno dunque, nel campo sopra cui è definita l'algebra $\mathfrak{g}$, degli elementi u, v, c, w, d, z tali per cui $[X, Y] = uX + vY + cI$ e $[Y, Z] = wY + dI + zZ$. Si definiscono poi m, n, e, p tali che $[X, Z] = mX + nY + eI + pZ$.

Riprendendo ora il formalismo della precedente sezione, si pone $T_\alpha = X$, $T_\beta = Y$, $T_{\beta'} = I$, $T_\gamma = Z$; in questo modo, si ha proprio $[T_\alpha, T_\beta] = h_{\alpha\beta} M$ e $[T_\beta, T_\gamma] = k_{\beta\gamma} N$, con $m^\alpha = u$, $m^\beta = v$, $m^{\beta'} = c$, $m^\gamma = 0$ e $n^\alpha = 0$, $n^\beta = w$, $n^{\beta'} = d$, $n^\gamma = z$, mentre $h_{\alpha\beta} = 1$, $k_{\beta\gamma} = 1$ e $h_{\alpha\beta'} = 0$, $k_{\beta'\gamma} = 0$; si pone inoltre $q^\alpha = m$, $q^\beta = n$, $q^{\beta'} = e$, $q^\gamma = p$ e $\Omega_{\alpha\gamma} = 1$, in modo da avere proprio $[T_\alpha, T_\gamma] = \Omega_{\alpha\gamma} Q$.

Si può facilmente verificare che *tutte* le ipotesi che sono state introdotte nel paragrafo 3.2 sono automaticamente verificate nel caso di un'algebra $\mathfrak{g}$ che abbia la struttura appena descritta. In particolare, i risultati che verranno utilizzati nel corso di questa sezione sono quelli relativi al caso $h_{\alpha\beta} m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma} = k_{\beta\gamma} \Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1} \neq 0$ (che significa semplicemente $u = z \neq 0$).

4.1 La BCH nelle algebre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e di Virasoro

L'algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ è solitamente rappresentata tramite i generatori E_-, H e E_+, le cui relazioni di commutazione sono date da:

$$[H, E_+] = 2E_+, \qquad [H, E_-] = -2E_-, \qquad [E_+, E_-] = H. \tag{4.1}$$

Definendo però $L_{-1} := -E_+$, $L_0 := -\frac{1}{2}H$ e $L_{+1} := E_-$, risulta evidente che $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ altro non è che una sottoalgebra dell'algebra di Virasoro, la quale può essere rappresentata tramite i generatori $\{L_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ e C, le cui relazioni di commutazione sono date da:

$$[C, L_i] = 0, \qquad [L_i, L_j] = (j - i)L_{i+j} + \frac{1}{12}(j^3 - j)\delta_{i+j,0} C. \tag{4.2}$$

In questo paragrafo verrà risolta la BCH in forma chiusa per una generica sottoalgebra del tipo $\langle L_{-k}, L_0, C, L_{+k}\rangle$, contenenti quindi la *carica centrale* C; fra queste, $k = 1$ rappresenta un caso speciale, poiché sia $\langle L_{-1}, L_0, C, L_{+1}\rangle$ che $\langle L_{-1}, L_0, L_{+1}\rangle \equiv \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ costituiscono una sottoalgebra.

Ponendo $T_\alpha = l_- L_{-k}$, $T_\beta = L_0$, $T_{\beta'} = C$ e $T_\gamma = l_+ L_{+k}$, le relazioni di commutazione (4.2) implicano

$$m^\alpha = k, \;\; m^\beta = 0, \;\; m^{\beta'} = 0, \;\; m^\gamma = 0, \tag{4.3}$$

$$n^\alpha = 0, \;\; n^\beta = 0, \;\; n^{\beta'} = 0, \;\; n^\gamma = k. \tag{4.4}$$

Si ha pertanto $h_{\alpha\beta} m^{\alpha_1} \Omega_{\alpha_1\gamma} = k_{\beta\gamma} \Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1} \neq 0$: il risultato ottenuto al paragrafo 3.2 relativamente a questo caso afferma anzitutto che, come conseguenza dei soli vincoli di Jacobi, si ha $Q = -\frac{h_{\alpha\beta_1} n^{\beta_1}}{\Omega_{\alpha\gamma_1} n^{\gamma_1}} M - \frac{m^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma}}{m^{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1\gamma}} N + L$; ma le (4.3) e (4.4) implicano $h_{\alpha\beta_1} n^{\beta_1} = 0$ e $m^{\beta_1} k_{\beta_1\gamma} = 0$, ovvero semplicemente $Q = L$ (il che significa che Q debba essere un non meglio specificato elemento di $\mathfrak{g}_2 \equiv \langle L_0, C\rangle$): questo fatto è confermato dalle (4.2), le quali, per l'appunto, implicano

$$q^\alpha = 0, \;\; q^\beta = 2 l_- l_+ k, \;\; q^{\beta'} = \frac{l_- l_+}{12}(k^3 - k), \;\; q^\gamma = 0. \tag{4.5}$$

Ma i risultati del paragrafo 3.2 implicano anche che

$$\ln\left(e^{T_\alpha} e^{T_\gamma}\right) = T_\alpha + T_\gamma + \varphi M + \psi N + f(\tilde{u}, \tilde{v})(\eta M + \theta N + \xi L), \tag{4.6}$$

con φ, ψ, η, θ, ξ, $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ i quali, in questo caso, risultano essere dati da:

$$\varphi = \lambda_- f(\lambda_- k, 0), \qquad \psi = \lambda_+ f(0, \lambda_+ k), \tag{4.7}$$

$$\eta = \lambda_+(1 + \varphi k), \qquad \theta = \lambda_-(1 + \psi k), \qquad \xi = (1 + \varphi k)(1 + \psi k) \tag{4.8}$$

$$\tilde{u} = \lambda_+ k, \qquad \tilde{v} = \lambda_- k. \tag{4.9}$$

I valori di λ_- e λ_+, invece, si ricavano risolvendo la seguente equazione:

$$(-\lambda_- k)\eta + (2 l_- l_+ k(1+\varphi k))\xi - \tilde{v}\eta = \left(-2k\lambda_-\lambda_+ + 2 l_- l_+ k(1 + \varphi k)(1 + \psi k)\right)(1+\varphi k) = 0,$$

dalla quale, considerando $1 + \varphi k = \dfrac{\lambda_- k}{1 - e^{-\lambda_- k}}$ e $1 + \psi k = \dfrac{\lambda_+ k}{1 - e^{-\lambda_+ k}}$, si ottiene

$$-2k\lambda_-\lambda_+ + 2 l_- l_+ k(1 + \varphi k)(1 + \psi k) = -2k\lambda_-\lambda_+ \left(1 - \frac{l_- l_+ k^2}{(1 - e^{-\lambda_- k})(1 - e^{-\lambda_+ k})}\right) = 0;$$

ma $\lambda_- + \lambda_+ = 0$ (poiché l'equazione (4.6) presuppone il limite $\lambda \to 0$), quindi si ha

$$e^{-\lambda_\pm k} = \frac{2 - l_- l_+ k^2 \pm \sqrt{(2 - l_- l_+ k^2)^2 - 4}}{2}. \tag{4.10}$$

Considerando ora le equazioni (4.3), (4.4) e (4.5) ed esplicitando i valori di φ, ψ, η, θ, ξ, $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$, si ottiene la formula generale della BCH per le sottoalgebre di Virasoro del tipo $\langle L_{-k}, L_0, C, L_{+k}\rangle$:

$$\ln\left(e^{l_- L_{-k}} e^{l_+ L_{+k}}\right) = \frac{\lambda_- k}{\sinh(\lambda_- k)}\left(l_- L_{-k} + l_- l_+ k L_0 + l_+ L_{+k} + \frac{l_- l_+}{24}(k^3 - k)C\right), \quad (4.11)$$

con λ_- dato dall'equazione (4.10).

La BCH per $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ si ottiene inserendo le condizioni $k = 1$, $l_- = -1$ e $l_+ = +1$ nella (4.11) e sostituendo L_{-1}, L_0 e L_{+1} rispettivamente con $-E_+$, $-\frac{1}{2}H$ e E_-: si ha quindi $\ln\left(e^{E_+} e^{E_-}\right) = \dfrac{\lambda_-}{\sinh(\lambda_-)}\left(E_+ + \dfrac{1}{2}H + E_-\right)$, con $e^{-\lambda_\pm} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, ovvero

$$\ln\left(e^{E_+} e^{E_-}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \ln\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(E_+ + \frac{1}{2}H + E_-\right). \quad (4.12)$$

4.2 La BCH nell'algebra $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$

Il risultato appena ottenuto riguardo all'algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ è la chiave per studiare il problema della BCH in una generica algebra di Lie semisemplice complessa. In questo paragrafo, a titolo di esempio, verrà esaminata l'algebra $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, mentre nel prossimo verrà effettivamente dimostrato che la BCH assume forma chiusa in una qualsiasi algebra di Lie semisemplice complessa.

Si consideri le seguenti relazioni di commutazione fra gli elementi di base di $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ [3]:

$$[H^1, E^1_+] = +2E^1_+, \qquad [H^1, E^1_-] = -2E^1_-, \qquad [E^1_+, E^1_-] = H^1,$$

$$[H^2, E^2_+] = +2E^2_+, \qquad [H^2, E^2_-] = -2E^2_-, \qquad [E^2_+, E^2_-] = H^2,$$

$$[H^1, E^\theta_+] = [H^2, E^\theta_+] = +E^\theta_+, \qquad [H^1, E^\theta_-] = [H^2, E^\theta_-] = -E^\theta_-, \qquad [E^\theta_+, E^\theta_-] = H^1 + H^2,$$

$$[H^1, H^2] = 0, \qquad [E^1_\pm, E^2_\pm] = \pm E^\theta_\pm, \qquad [E^1_\pm, E^2_\mp] = 0,$$

$$[H^1, E^2_\pm] = \mp E^2_\pm, \qquad [H^2, E^1_\pm] = \mp E^1_\pm,$$

$$[E^1_\pm, E^\theta_\pm] = [E^2_\pm, E^\theta_\pm] = 0, \qquad [E^1_\pm, E^\theta_\mp] = \mp E^2_\mp, \qquad [E^2_\pm, E^\theta_\mp] = \pm E^1_\mp.$$

Dalle relazioni presentate nelle prime tre righe si evince che vi sono tre sottoalgebre di $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ le quali godono delle medesime relazioni di commutazione di $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$: queste sono

$$\langle E^1_+, H^1, E^1_-\rangle, \qquad \langle E^2_+, H^2, E^2_-\rangle, \qquad \langle E^3_+ := E^\theta_-, H^3 := -H^1 - H^2, E^3_- := E^\theta_+\rangle.$$

Per queste sottoalgebre, quindi, la BCH è risolta dalle seguenti relazioni (sia $i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned}
\ln\left(e^{H^i}e^{E^i_+}\right) &= H^i + E^i_+ + 2E^i_+ f(0,2) = H^i + \frac{2}{1-e^{-2}}E^i_+,\\
\ln\left(e^{H^i}e^{E^i_-}\right) &= H^i + E^i_- - 2E^i_- f(0,-2) = H^i - \frac{2}{1-e^{2}}E^i_-,\\
\ln\left(e^{E^i_+}e^{E^i_-}\right) &= \frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(E^i_+ + \frac{1}{2}H^i + E^i_-\right).
\end{aligned}$$

Le relazioni presentate nelle ultime tre righe, invece, si prestano ad applicazioni immediate dei risultati visti nel paragrafo 2.2.2: ad esempio, si ha $[E^1_\pm, E^2_\pm] = \pm E^\theta_\pm$, ma $\pm E^\theta_\pm$ commuta sia con $E^1_\pm$ che con $E^2_\pm$ (quindi $\langle E^1_\pm, E^2_\pm, \pm E^\theta_\pm\rangle$ costituisce una sottoalgebra, di cui $\pm E^\theta_\pm$ è elemento centrale); analogo discorso per $\langle E^1_\pm, E^\theta_\mp, \mp E^2_\mp\rangle$ e $\langle E^2_\pm, E^\theta_\mp, \pm E^1_\mp\rangle$. Si ha pertanto

$$\begin{aligned}
\ln\left(e^{E^1_\pm}e^{E^2_\pm}\right) &= E^1_\pm + E^2_\pm \pm \frac{1}{2}E^\theta_\pm,\\
\ln\left(e^{E^1_\pm}e^{E^\theta_\mp}\right) &= E^1_\pm + E^\theta_\mp \mp \frac{1}{2}E^2_\mp,\\
\ln\left(e^{E^2_\pm}e^{E^\theta_\mp}\right) &= E^2_\pm + E^\theta_\mp \pm \frac{1}{2}E^1_\mp,
\end{aligned}$$

e banalmente

$$\ln\left(e^{E^1_\pm}e^{E^\theta_\pm}\right) = E^1_\pm + E^\theta_\pm, \qquad \ln\left(e^{E^2_\pm}e^{E^\theta_\pm}\right) = E^2_\pm + E^\theta_\pm, \qquad \ln\left(e^{E^1_\pm}e^{E^2_\mp}\right) = E^1_\pm + E^2_\mp.$$

Rimangono infine le relazioni $[H^1, H^2] = 0$, $[H^1, E^2_\pm] = \mp E^2_\pm$ e $[H^2, E^1_\pm] = \mp E^1_\pm$, dalle quali si ottiene

$$\begin{aligned}
\ln\left(e^{H^1}e^{H^2}\right) &= H^1 + H^2,\\
\ln\left(e^{H^1}e^{E^2_\pm}\right) &= H^1 + E^2_\pm \mp E^2_\pm f(0,\mp 1) = H^1 \mp \frac{1}{1-e^{\pm 1}}E^2_\pm,\\
\ln\left(e^{H^2}e^{E^1_\pm}\right) &= H^2 + E^1_\pm \mp E^1_\pm f(0,\mp 1) = H^2 \mp \frac{1}{1-e^{\pm 1}}E^1_\pm.
\end{aligned}$$

4.3 Forma chiusa della BCH nelle algebre di Lie semisemplici complesse

Per risolvere la BCH in una generica algebra di Lie $\mathfrak{g}$ semisemplice complessa, verrà considerata in questo paragrafo la base di Cartan-Weyl dell'algebra stessa, nella forma rivisitata da Chevalley. I generatori sono dati da $\{H^\alpha, E^\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$, dove α è detta *radice* per l'algebra $\mathfrak{g}$ e Φ è il *sistema di radici* di $\mathfrak{g}$; quest'ultimo è un insieme di generatori per il duale ${\mathfrak{g}_0}^*$ della sottoalgebra di Cartan, la quale è definita come una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$ abeliana massimale, tale per cui la rappresentaziona aggiunta di un qualsiasi suo elemento sia diagonalizzabile. Le relazioni di commutazione fra i generatori di $\mathfrak{g}$, per generici $\alpha, \beta \in \Phi$, sono date da:

$$[H^\alpha, H^\beta] = 0, \tag{4.13}$$

$$[H^\alpha, E^\beta] = \langle\beta, \alpha\rangle E^\beta, \tag{4.14}$$

$$[E^\alpha, E^{-\alpha}] = H^\alpha, \tag{4.15}$$

$$[E^\alpha, E^\beta] = e_{\alpha,\beta} E^{\alpha+\beta} \ \text{ se } \ \beta \neq -\alpha \ \text{ e } \ \alpha+\beta \in \Phi, \tag{4.16}$$

$$[E^\alpha, E^\beta] = 0 \ \text{ se } \ \beta \neq -\alpha \ \text{ e } \ \alpha+\beta \notin \Phi, \tag{4.17}$$

dove $\langle\beta, \alpha\rangle = \dfrac{2\,(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ e (β, α) indica il prodotto interno standard nello spazio ${\mathfrak{g}_0}^*$, mentre $e_{\alpha,\beta}$ sono dei generici coefficienti.

Prima di studiare la BCH a partire da queste relazioni, è necessario richiamare i seguenti risultati, validi per una qualsiasi algebra di Lie semisemplice complessa [3], [4].

- Se $\alpha \in \Phi$, allora gli unici multipli di α contenuti in Φ sono $\pm\alpha$.
- Se $\alpha, \beta \in \Phi$, allora $\langle\beta, \alpha\rangle$ è un numero intero; ora, indicando con θ l'angolo formato da α e β in ${\mathfrak{g}_0}^*$, si ha $\langle\beta, \alpha\rangle = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = \frac{2||a||||b||\cos\theta}{||a||^2} = 2\frac{||a||}{||b||}\cos\theta$, e quindi $\langle\beta, \alpha\rangle\langle\alpha, \beta\rangle = 4\cos^2\theta$: dunque $\cos\theta$ può solo valere 0, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ o 1.
- Le *stringhe di radici*[6] hanno lunghezza massima 4.

Dato $\alpha \in \Phi$, in base alle relazioni (4.14) e (4.15) i vettori H^α, E^α e $E^{-\alpha}$ generano una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$ che soddisfa le stesse relazioni di commutazione di $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (con le

[6] È detto *stringa di radici* per le radici $\alpha \neq \pm\beta$ l'insieme delle radici del tipo $\beta + k\alpha$; si può mostrare che i valori di k tali per cui $\beta + k\alpha$ sia una radice corrispondono a tutti i numeri interi compresi fra due estremi n_- e n_+; il numero intero $n_+ - n_- + 1$ è detto *lunghezza* della stringa.

identificazioni $H^\alpha = H$, $E^\alpha = E_+$, $E^{-\alpha} = E_-$); dunque, per ogni radice α, si ha

$$\ln\left(e^{H^\alpha} e^{E^\alpha}\right) = H^\alpha + \frac{2}{1-e^{-2}} E^\alpha, \tag{4.18}$$

$$\ln\left(e^{H^\alpha} e^{E^{-\alpha}}\right) = H^\alpha - \frac{2}{1-e^{2}} E^{-\alpha}, \tag{4.19}$$

$$\ln\left(e^{E^\alpha} e^{E^{-\alpha}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \ln\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(E^\alpha + \frac{1}{2}H^\alpha + E^{-\alpha}\right). \tag{4.20}$$

Supponendo ora $\alpha, \beta \in \Phi$ e $\alpha \neq \pm\beta$, si ha banalmente

$$\ln\left(e^{H^\alpha} e^{H^\beta}\right) = H^\alpha + H^\beta, \tag{4.21}$$

$$\ln\left(e^{H^\alpha} e^{E^\beta}\right) = H^\alpha + \frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{1-e^{-\langle\beta,\alpha\rangle}} E^\beta; \tag{4.22}$$

se poi $\alpha + \beta \notin \Phi$, allora

$$\ln\left(e^{E^\alpha} e^{E^\beta}\right) = E^\alpha + E^\beta. \tag{4.23}$$

Rimane quindi da esaminare la relazione (4.16). Si consideri la proprietà sopra menzionata, secondo cui il coseno dell'angolo θ fra due radici può solo assumere i valori 0, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ e 1; questo significa che gli unici valori possibili dell'angolo θ sono dati da 0, $\pm\frac{\pi}{6}$, $\pm\frac{\pi}{4}$, $\pm\frac{\pi}{3}$, $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{2\pi}{3}$, $\pm\frac{3\pi}{4}$, $\pm\frac{5\pi}{6}$ e π. Si considerino ora combinazioni lineari di α e β: ricordando che gli unici multipli di una radice α tai da essere essi stessi radici sono $\pm\alpha$, quanto appena detto è sufficiente a dimostrare che le radici della forma $m\alpha + n\beta$ sono *al massimo 16*. Ora, sviluppando la grandezza $\ln\left(e^{E^\alpha} e^{E^\beta}\right)$, si ottiene:

$$\begin{aligned}\ln\left(e^{E^\alpha} e^{E^\beta}\right) =& E^\alpha + E^\beta + \frac{1}{2}[E^\alpha, E^\beta] + \\ &+ \frac{1}{12}([E^\alpha, [E^\alpha, E^\beta]] - [E^\beta, [E^\alpha, E^\beta]]) - \frac{1}{24}[E^\beta, [E^\alpha, [E^\alpha, E^\beta]]] + ...;\end{aligned}$$

gli unici termini non nulli di questa serie corrispondono ai commutatori contenenti m volte E^α ed n volte E^β, con $m\alpha + n\beta$ tale da essere una radice: ma, per quanto appena detto, ci sono al massimo 16 tali termini, e questo basta a garantire che la BCH, per la relazione (4.16), assuma sempre forma chiusa.

In realtà, il ragionamento appena mostrato non tiene conto del fatto che, per ipotesi, oltre ad α e β anche $\alpha + \beta$ è una radice: questo permette di affermare con maggior precisione quali possono essere le radici del tipo $m\alpha + n\beta$. Si noti anzitutto che, detto θ l'angolo compreso fra α e β, allora l'angolo compreso fra α e $\alpha + \beta$ avrà necessariamente

un coseno maggiore di $\cos\theta$; si tenga conto, inoltre, del fatto che le stringhe di radici possono avere una lunghezza massima pari a 4. Un esempio di stringa di lunghezza 4 corrisponde al caso in cui β forma un angolo di $\frac{5\pi}{6}$ con α e $\alpha+\beta$ forma un angolo di $\frac{2\pi}{3}$ con α: con un semplice argomento di geometria elementare si mostra poi che $2\alpha+\beta$ e $3\alpha+\beta$ formano angoli rispettivamente di $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$ con α, e quindi *possono* essere delle radici, a differenza di $4\alpha+\beta$, $5\alpha+\beta$ e via dicendo. Un esmpio di stringa di lunghezza 3 corrisponde al caso in cui β forma un angolo di $\frac{3\pi}{2}$ con α e $\alpha+\beta$ forma un angolo di $\frac{\pi}{2}$ con α: in questo caso $2\alpha+\beta$ forma un angolo di $\frac{\pi}{2}$ con αe può essere una radice, mentre $3\alpha+\beta$, $4\alpha+\beta$, ecc, non lo possono essere.

Nel caso appena considerato di stringhe del tipo $m\alpha+\beta$ o $\alpha+m\beta$, osservando lo sviluppo di $\ln\left(e^{E^\alpha}e^{E^\beta}\right)$ è immediato notare che tutti i termini di ordine superiore al terzo si annullano; in questo caso, quindi, la BCH assume la seguente espressione:

$$\ln\left(e^{E^\alpha}e^{E^\beta}\right) = E^\alpha + E^\beta + \frac{1}{2}e_{\alpha,\beta}E^{\alpha+\beta} + \frac{1}{12}e_{\alpha,\beta}\left(e_{\alpha,\alpha+\beta}E^{2\alpha+\beta} - e_{\beta,\alpha+\beta}E^{\alpha+2\beta}\right). \quad (4.24)$$

5 Conclusioni

Il problema della determinazione di $\ln\left(e^X e^Y\right)$ cominciò ad essere approfondito negli ultimi anni del XIX secolo, ma gli studi ad esso legati proseguono ancora oggi, in ambito sia matematico che fisico. Nel corso dell'ultimo anno, tali studi si sono concentrati sull'individuazione dei casi in cui è possibile conoscere la soluzione esatta della BCH, estendendo notevolmente i risultati precedentemente conosciuti (gli articoli su cui si è basata questa tesi sono stati tutti pubblicati nel 2015). La ricerca in questo campo è quindi destinata a proseguire. L'algoritmo presentato nella sezione centrale della tesi, ad esempio, è ancora in fase di sviluppo; fino ad ora, infatti, non è stata considerata la possibilità di reiterare il procedimento dello splitting: se ad esempio l'algoritmo non funzionasse per la quantità $e^X e^{\lambda Y} e^Z$, potrebbe invece funzionare inserendo ulteriori termini da splittare e considerando quindi una grandezza del tipo $e^X e^{\mu S} e^{\lambda Y} e^{\nu T} e^Z$. Un altro modo di affrontare il problema potrebbe essere quello di utilizzare come punto di partenza le caratteristiche della sottoalgebra dei commutatori, come ad esempio la dimensione di questa (si tratta di un principio che può già essere individuato in [8]). Si è mostrato, infatti, che la BCH assume forma chiusa nel caso di una sottoalgebra dei commutatori ($\mathfrak{g}_1$) unidimensionale, ma tramite l'algoritmo sono stati individuati diversi casi in cui si ha una forma chiusa pur avendo $\mathfrak{g}_1$ bidimensionale o tridimensionale (probabilmente, reiterando l'algoritmo, è possibile individuare anche casi di BCH in forma chiusa con $\mathfrak{g}_1$ di dimensione maggiore).

Riferimenti bibliografici

[1] A. Bonfiglioli, R. Fulci, "Topics in Noncommutative Algebra: The Theorem of Campbell, Baker, Hausdorff and Dynkin";
Springer-Verlag, 2012.

[2] B. C. Hall, "Lie Groups, Lie Algebras and Representations: An Elementary Introduction";
Springer-Verlag, 2003.

[3] J. Fuchs, C, Schweigert, "Symmetries, Lie Algebras and Representations: A graduate course for physicists";
Cambridge University Press, 1997.

[4] J. E. Humphreys, "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory";
Springer-Verlag, 1980.

[5] F. Casas and A. Murua, "An efficient algorithm for computing the Baker-Campbell-Hausdorff series and some of its applications",
Journal of Mathematical Physics **50** (2009), 033513;
doi:10.1063/1.3078418 [arXiv: 0810.2656 [math-ph]].

[6] A. Van-Brunt and M. Visser, "Simplifying the Reinsch algorithm for the Baker-Campbell-Hausdorff series";
arXiv:1501.05034 [math-ph].

[7] A. Van-Brunt and M. Visser, "Special-case closed form of the Baker–Campbell–Hausdorff formula",
Journal of Physics A **48** (2015) 22, 225207;
doi:10.1088/1751-8113/48/22/225207 [arXiv:1501.02506 [math-ph]].

[8] A. Van-Brunt and M. Visser, "Explicit Baker-Campbell-Hausdorff formulae for some specific Lie algebras";
arXiv:1505.04505v1 [math-ph].

[9] M. Matone, "An algorithm for the Baker-Campbell-Hausdorff formula",
Journal of High Energy Physics **1505** (2015) 113;
doi:10.1007/JHEP05(2015)113 [arXiv:1502.06589v4 [math-ph]].

[10] M. Matone, "Classification of Commutator Algebras Leading to the New Type of Closed Baker-Campbell-Hausdorff Formulas",
Journal of Geometry and Physics **97** (2015) 34;
doi:10.1016/j.geomphys.2015.06.016 [arXiv:1503.08198v3 [math-ph]].

[11] M. Matone, "Closed Form of the Baker-Campbell-Hausdorff Formula for Semisimple Complex Lie Algebras";
arXiv:1504.05174v1 [math-ph].