Università degli Studi di Padova

Facoltà di Ingegneria

Dipartimento di tecnica e gestione dei sistemi industriali

Tesi di Laurea Triennale

ASPETTI TEORICI DELLA OTTIMIZZAZIONE NON LINEARE

Relatore: Ch.mo Prof. RomaninJacur Giorgio

Laureando: Massimo Tomaello

ANNO ACCADEMICO 2010 - 2011

INDICE

SOMMARIO

Questa tesi affronta edillustra i principali aspetti teorici della programmazione non lineare, analizzando con particolare interesse i problemi di ottimizzazione convessa. Il lavoro si articola in una prima partenella quale vengono introdotte alcuni nozioni teoriche di base della Ricerca Operativa finalizzata all'ottimizzazione, con particolare riferimento al concetto del modello di ottimizzazione matematica. Successivamente vengono studiate le proprietà dei problemi di ottimizzazione non lineare e identificate le condizioni per l'esistenza e per la caratterizzazione delle soluzioni ottimali. Si sono poi riportate alcune applicazioni dell'ottimizzazione non lineare, rappresentandone geometricamente le caratteristiche. Infine, è stata definita la condizione di dualità per problemi di ottimizzazione lineare, estendendo poi le proprietà ricavate alla nozione di dualità per problemi di ottimizzazione non lineare vincolata.

INTRODUZIONE

Nel linguaggio comune *ottimizzare* significa scegliere l'opzione migliore tra diverse alternative disponibili. Ciascuno di noi ottimizza l'itinerario per raggiungere una destinazione, l'organizzazione della propria giornata, l'impiego dei risparmi.

Nel linguaggio matematico *ottimizzare* significa determinare il valore delle variabili di una funzione in modo che questa assuma il suo minimo o il suo massimo.

L'ottimizzazione è quella disciplina che si occupa di formulare modelli utili nelle applicazioni, impiegando metodi efficienti per identificare una soluzione ottimale.

Per applicazioni, si intendono quei problemi che si presentano nella gestione delle imprese e della pubblica amministrazione e che richiedono di selezionare la decisione che rende minimo il costo o massimo il guadagno. Essi riguardano la pianificazione logistica e produttiva, l'analisi finanziaria, la pianificazione di marketing, la determinazione dei prezzi di servizi e prodotti.

I modelli di ottimizzazione presentano un grande interesse pratico per le molteplici applicazioni offerte.Vi sono infatti numerosi processi decisionali che si presentano nella gestione delle imprese e della pubblica amministrazione,che richiedono di determinare la scelta che rende minimo il costo o massimo il guadagno, e sono quindi riconducibili a modelli di ottimizzazione.

Nella teoria dell'ottimizzazione, una posizione di rilievo è occupata dai modelli di ottimizzazione matematica, per i quali la funzione di valutazione e i vincoli che caratterizzano le alternative ammissibili sono espressi mediante equazioni e disequazioni. I modelli di ottimizzazione matematica si presentano in forme diverse: ottimizzazione lineare, ottimizzazione intera e ottimizzazione non lineare.

Questa tesi mira ad approfondire i problemi di ottimizzazione non lineare, ovveroquei problemi formalizzabili come minimizzazione o massimizzazione di una funzione, e risolvibili mediante un processo di soluzione di un sistema di equazioni e disequazioni su un insieme di variabili reali incognite.

CAPITOLO 1

Ottimizzazione e modelli matematici

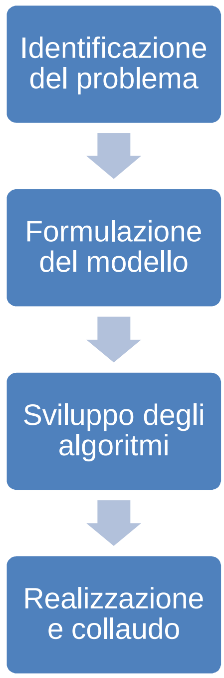
1.Ricerca operativa e modelli

La ricerca operativa è quella disciplina che si occupa della formulazione e della risoluzione di modelli matematici che si presentano nel corso di processi decisionali complessi. Essa nascenel corso del secondo conflitto mondiale, grazie ad una task force di studiosi britannici formatasi con lo scopo di analizzare e risolvere problemi complessi di natura logistica e militare. Al termine del conflitto le metodologie sviluppate furono adattate e applicate per risolvere problemi complessi relativi alla gestione delle imprese e della pubblica amministrazione.

Grazie al rapido sviluppo della tecnologia che rese disponibili mezzi di calcolo di elevata potenza, a partire dalla seconda metà degli anni ’80 vi fu una rapida diffusione dei modelli di ricerca operativa e dei modelli di ottimizzazione in particolare.

In generale, un modello rappresenta un’astrazione selettiva di un sistema reale. Un modello viene progettato per analizzare e comprendere da un punto di vista astratto il funzionamento di un sistema concreto, del quale contiene solo gli elementi ritenuti rilevanti ai fini dell’indagine svolta.

Lo sviluppo di un modello matematico è articolato in quattro fasi principali, cui si aggiunge una fase di feedback che consente di apportare eventuali modifiche e revisioni*(Vercellis, 2006)*:



Queste fasi di sviluppo consentono di individuare le variabili decisionali del problema e l'insieme dei dati, quindi l'insieme di valori dei parametri noti che non costituiscono l'oggetto della decisione.

A partire da questi due insiemi (dati e variabili) è allora possibile costruire un criterio di prestazione del sistema da ottimizzare, cioè da minimizzare se si tratta di un costo o da massimizzare se si tratta di un ricavo o di un profitto.

L'ottimizzazione del criterio di prestazione è però limitata dalla necessità di rispettare un insieme di vincoli definiti all'interno del sistema stesso e posti al suo funzionamento.

Questi vincoli, anch'essi costruiti attraverso le variabili decisionali e i dati del problema, esprimono per esempio la limitatezza delle risorse.

Il modello matematico si presenta quindi costituito da una funzione "obiettivo", associata al criterio di prestazione del sistema, e da un insieme di relazioni vincolari (disequazioni e/o equazioni) che rappresentano i vincoli del problema.

Il modello matematico deve essere risolto. Risolvere un modello significa determinare il valore delle variabili decisionali in modo da rendere ottimo (massimo o minimo) il valore della funzione obiettivo, nel rispetto dei vincoli del modello.

1.1.Un problema di localizzazione

Consideriamo il seguente problema di localizzazione in ambito logistico, un esempio utile per introdurre il concetto di ottimizzazione non lineare *(Vercellis, 2008)*.

Una catena della grande distribuzione è interessata ad aprire un nuovo ipermercato in un'area geografica che comprende tre centri urbani principali che indicheremo come A, B e C, di cui sono note le coordinate geografiche e il numero di abitanti, indicati nella seguente tabella.

Centro urbano	A	B	C
Coordinate (km)	(5, 9)	(7, 8.8)	(4, 3)
Abitanti	22000	55000	32000

Per rispettare la normativa vigente, il nuovo ipermercato deve essere collocato a una distanza non inferiore a 0.5 km dai centri urbani. L'obiettivo dell'azienda consiste nella massimizzazione del fatturato derivante dalle vendite, che indicheremo come *z*.

Le variabili di decisione per il problema di localizzazione sono rappresentate dalle coordinate dell'ipermercato, indicate con *x*, *y*. Le analisi empiriche, condotte sui dati di vendita per configurazioni simili realizzate in passato, indicano che il fatturato di vendita segue un modello di tipo gravitazionale, ovvero caratterizzato da un legame direttamente proporzionale alla dimensione della popolazione di ciascun centro e inversamente proporzionale al quadrato della sua distanza dall'ipermercato, incrementato di 1, secondo la seguente relazione:

$$z \infty \frac{22}{(x-5)^2+(y-9)^2+1}+\frac{55}{(x-7)^2+(y-8.8)^2+1}+\frac{32}{(x-4)^2+(y-3)^2+1}$$

Per ciascun centro urbano il numeratore esprime la popolazione in migliaia di abitanti, e il simbolo ∞ indica la proporzionalità tra primo e secondo membro.

I vincoli del problema, relativi al rispetto della distanza non inferiore a 0.5 km tra l'ipermercato e i centri urbani, si traducono nelle seguenti relazioni:

$$(x-5)^2+(y-9)^2 \geq (0.5)^2$$

$$(x-7)^2+(y-8.8)^2 \geq (0.5)^2$$

$$(x-4)^2+(y-3)^2 \geq (0.5)^2$$

E' quindi possibile formulare il problema di localizzazione mediante il seguente modello di ottimizzazione:

$$\max \frac{22}{(x-5)^2+(y-9)^2+1}+\frac{55}{(x-7)^2+(y-8.8)^2+1}+\frac{32}{(x-4)^2+(y-3)^2+1}$$

soggetto a:

$$(x-5)^2+(y-9)^2 \geq (0.5)^2$$

$$(x-7)^2+(y-8.8)^2 \geq (0.5)^2$$

$$(x-4)^2+(y-3)^2 \geq (0.5)^2$$

$$x, y \geq 0$$

Il modello ricavato rappresenta un esempio di problema di ottimizzazione matematica, con due variabili e tre vincoli, in cui la funzione obiettivo e i vincoli dipendono non linearmente dalle variabili di decisione. Per questo motivo, il modello trovato costituisce inoltre un primo problema di *ottimizzazione non lineare*.

1.2.Modelli di ottimizzazione e ottimalità globale

Definizione. Dato un insieme ammissibile S, contenente un numero finito o infinito di soluzioni ammissibili $s \in S$ e una funzione obiettivo $f : S \mapsto \Re$ che associa a ogni $s \in S$ un numero reale $f(s)$, il problema di ottimizzazioneassociato alla coppia (S, f) richiede di determinare la soluzione ammissibile che rende minima la funzione obiettivo, ed è espresso simbolicamente come:

$$\min_{s \in S} f(s)$$

Gli elementi $s^* \in S$ che minimizzano la funzione $f(s)$ soddisfacendo la relazione

$$f^* = f(s^*) = \min_{s \in S} f(s),$$

vengono detti *soluzioni ottimali globali*, o anche *soluzioni ottimali* o *soluzioni di minimo*. Il corrispondente valore della funzione obiettivo $f^* = f(s^*)$ viene detto *valore ottimo globale*, o anche *ottimo* o *minimo*.

In generale, non è detto che esista sempre una soluzione ottimale per il problema e, ove esista, non è detto che essa sia unica.

<u>Definizione</u>.Se l'insieme ammissibile S non possiede soluzioni ammissibili, ovvero $S = 0$, si dice che il problema è *inammissibile* e si pone il valore di ottimo pari a $f^* = +\infty$. Altrimenti, se esiste almeno una soluzione ammissibile, ovvero $S \neq 0$, diremo che il problema è *ammissibile*.

Le soluzioni ammissibili di un insieme S rappresentano le scelte alternative ritenute accettabili in uno specifico ambito di applicazionee la funzione obiettivo $f(s)$ costituisce l'indicatore di valutazione che permette di confrontare le alternative ammissibili $s \in S$, al fine di identificare la decisione migliore. Se il criterio di valutazione esprime un costo economico, una decisione viene considerata ottimale se rende minima la funzione obiettivo.

Vi sono tuttavia situazioni in cui le decisioni vengono confrontate mediante una funzione di valutazione che rappresenta un guadagno monetario, un'utilità o comunque una caratteristica che deve essere massimizzata anziché minimizzata. In questi casi il generico problema assume la forma:

$$\max_{s \in S} f(s)$$

così come visto in precedenza nell'esempio del problema di localizzazione, nel quale ci si era posti come obiettivo quello di massimizzare il fatturato del nuovo ipermercato, ottimizzandone la localizzazione geografica.

1.3.Ottimalità locale

Accanto alla nozione di ottimalità globale, introdotta mediante la definizione del modello di ottimizzazione, è opportuno definire il concetto di ottimalità locale.

<u>Definizione</u>.Si dice che un insieme S è dotato di un sistema di *intorni* quando è definita una corrispondenza $T : S \mapsto P(S)$ tra S e l'insieme delle parti (insieme di tutti i sottoinsiemi di S) $P(S)$, che fa corrispondere a ogni elemento s dell'insieme S un sottoinsieme $T(s) \subseteq S$, denominato *intorno*.

Nel caso in cui $S = \Re^n$, assegnata una distanza $\delta > 0$, per ogni punto $x_0 \in \Re^n$, si definisce l'intorno sferico aperto di raggio δ

$$T(x_0) = \{x \in \Re^n : d(x, x_0) < \delta\},$$

dove si fa uso della distanza euclidea d, cioè la distanza fra i due punti in $\Re^n$, definita in termini generali come:

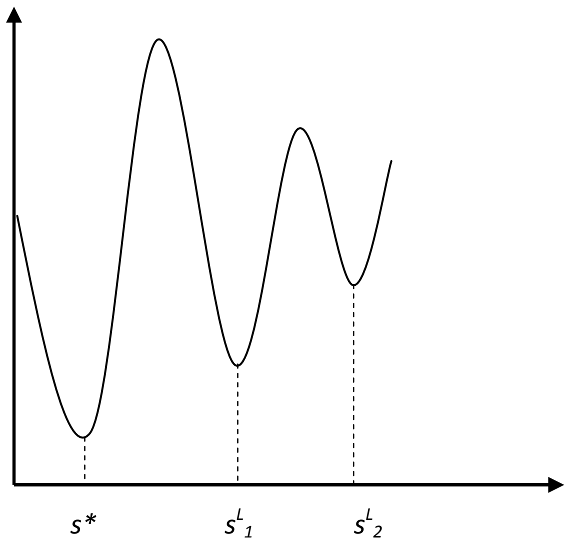
$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

<u>Definizione</u>. Supponiamo che l'insieme ammissibile S sia dotato di un sistema di intorni T.
Gli elementi $s^L \in S$ per cui vale la relazione

$$f(s^L) \leq f(s) \; \forall s \in T(s^L)$$

vengono detti soluzioni ottimi locali, o soluzioni di minimo locale, rispetto al sistema di intorni T.

In generale, non è detto che una soluzione di minimo locale sia anche una soluzione di minimo globale. Come illustrato nella figura seguente, la funzione possiede tre soluzioni di minimo locale, di cui soltanto *s** costituisce una soluzione di minimo globale.



1.4.Modelli di ottimizzazione matematica

Una classe di problemi di ottimizzazione particolarmente rilevante sotto il profilo teorico e applicativo è costituita dai modelli di ottimizzazione matematica.

Definizione.Si indichi come $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ il vettore delle variabili di decisione nello spazio n-dimensionale $\Re^n$, e come $f(x)$ una funzione reale definita in $\Re^n$, $f:\Re^n \mapsto \Re$ che costituisce la funzione obiettivo. Sono inoltre assegnate le funzioni reali $g_i(x), i=1,2,...,m$, a loro volta definite in $\Re^n$, $g_i:\Re^n \mapsto \Re$, che costituiscono i vincoli.

Un problema di ottimizzazione matematica è definito come

$$\min f(x)$$

soggetto a:

$$g_i(x) \le 0 \qquad i=1,2,...,m.$$

Definizione.L'insieme $K=\{x \in \Re^n : g_i(x) \le 0, i=1,2,...,m\}$ viene detto *insieme ammissibile* o *regione ammissibile* del problema. I vettori $x \in K$ dell'insieme ammissibile costituiscono le *soluzioni ammissibili*.

Definizione.Una soluzione ammissibile $x^* \in K$ viene detta *soluzione ottimale globale* se soddisfa la relazione

$$f(x^*) \le f(x) \; \forall x \in K,$$

e il corrispondente valore $f^* = f(x^*)$ viene denominato *valore ottimo globale*.

Definizione.Dato un numero $\delta > 0$, i vettori $x^L \in K$ per cui vale la relazione

$$f(x^L) \le f(x) \; \forall x \in K : \|x - x^L\| < \delta$$

vengono detti *soluzioni ottimali locali*.

1.5.Tipologie di ottimizzazione

Se dalla formulazione del problema vengono rimossi i vincoli, il modello risultante costituisce un problema di ottimizzazione matematica non vincolata. I problemi non vincolati presentano una limitata applicabilità nella rappresentazione di processi decisionali complessi, dal momento che i sistemi reali prevedono in genere diversi vincoli (fisici, tecnologici, logici), necessari per tradurre tutte le condizioni che definiscono l'ammissibilità di una decisione.

E' importante osservare che in corrispondenza di differenti assunzioni relative alla funzione obiettivo e ai vincoli, si ottengono diverse classi di problemi di ottimizzazione matematica.

In particolare, il problema viene detto di ottimizzazione lineare se la funzione obiettivo $f(x)$ e le funzioni $g_i(x), i = 1,2,...m$ sono lineari. Un altro caso notevole, a sua volta rilevante sotto il profilo teorico e applicativo, si ottiene quando le variabili del vettore x sono vincolate ad assumere valori interi. Si parla in questo caso di problemi di ottimizzazione intera. Infine, il problema viene detto di ottimizzazione convessa se la funzione obiettivo $f(x)$ e le funzioni $g_i(x), i = 1,2,...m$ sono convesse. Sarà proprio quest'ultima tipologia di problema ad essere affrontata nel seguito. Una caratterizzazione dei problemi di ottimizzazione chevedremo essere di assoluto rilievo nell'ambito dell'ottimizzazione non lineare.

CAPITOLO 2

Ottimizzazione non lineare

2.1.Funzioni convesse

D'ora in avanti analizzeremo e studieremo problemi di ottimizzazione matematica, secondo la definizione precedentemente riportata, per i quali la funzione obiettivo f e i vincoli g_i risultano *non lineari*.

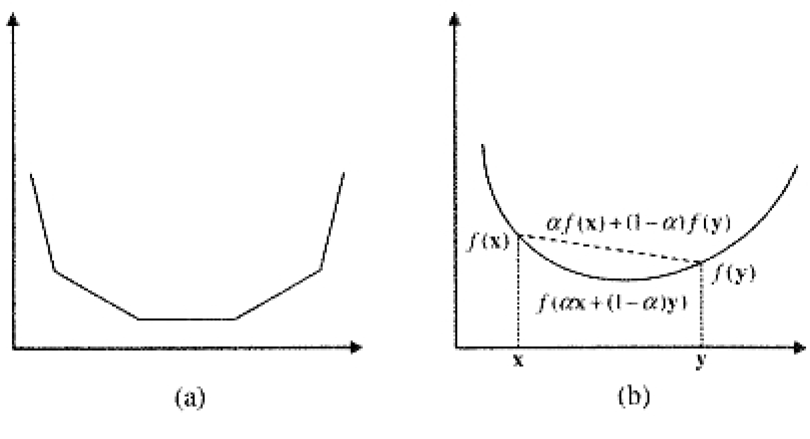
Nell'ambito dell'ottimizzazione non lineare, rivestono particolare importanza i problemi di ottimizzazione convessa, per i quali è possibile garantire l'ottimalità globale di ogni soluzione ottimale locale. In effetti, per i problemi di ottimizzazione non lineare non convessi è in genere possibile determinare soltanto soluzioni ottimali locali, senza poterne assicurare l'ottimalità globale.

Introduciamo dunque le definizioni di funzione convessa, strettamente convessa e concava.

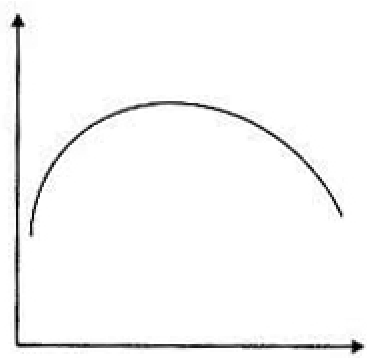
<u>Definizione</u>.Sia $S \subseteq \Re^n$ un insieme convesso. Una funzione $f : S \mapsto \Re$ si dice *convessa(figura a)*se per ogni coppia di punti $x, y \in S$ e per ogni scalare $\alpha \in [0,1]$ vale la relazione

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

La funzione f si dice strettamente convessa *(figura b)* se questa disuguaglianza vale in modo stringente.



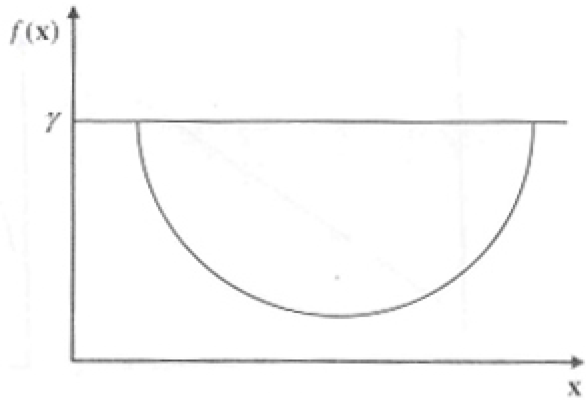
Definizione.Sia $S \subseteq \Re^n$ un insieme convesso. Una funzione $f : S \mapsto \Re$ si dice *concava* (strettamente concava) se la funzione $-f$ è convessa (strettamente convessa). Vedi figura sottostante.



Da un punto di vista geometrico, una funzione si dice convessa (concava) se il suo diagramma si trova al di sotto (al di sopra) della corda sottesa a due suoi punti comunque scelti. Una funzione lineare risulta simultaneamente convessa e concava.

Definizione.L'*epigrafo* di una funzione $f : S \mapsto \Re$ è l'insieme

$$epi(f) = \{(x,z) \in \Re^{n+1} : x \in S, z \in \Re, f(x) \le z\}$$



Teorema.L'epigrafo di una funzione convessa è convesso.

Siano f e g funzioni convesse definite in $S \subseteq \Re^n$. Valgono le seguenti proprietà:

- Dato uno scalare $a \ge 0$, il prodotto af è una funzione convessa.
- Dati due scalari $a,b \ge 0$, la somma pesata $af + bg$ è una funzione convessa.
- La funzione $h = \max\{f, g\}$ è convessa.

Il seguente teorema presenta invece una caratterizzazione del primo ordine per le funzioni convesse differenziabili.

Teorema.Sia $f \in C^1$ definita in un insieme convesso $S \subseteq \Re^n$. Allora f è convessa se e solo se la seguente relazione vale per ogni coppia di punti $x, y \in S$:

$$f(y) \geq f(x) + (y - x)' \nabla f(x).$$

Inoltre f è strettamente convessa se e solo se la disuguaglianza è stringente.

2.2.Problemi di ottimizzazione non lineare

In generale, per i problemi di ottimizzazione non lineare, è sempre possibile ricondurre un vincolo di disuguaglianza alla forma di uguaglianza e viceversa, mediante opportune trasformazioni impiegate anche nei problemi di ottimizzazione lineare. Tuttavia, per gli sviluppi successivi, è utile distinguere tra i due tipi di vincoli, considerando la seguente formulazione:

$$f^* = \min f(x)$$

soggetto a:

$$g_i(x) \leq 0 \qquad i \in Q = \{1,2,\ldots,q\}$$

$$h_i(x) = 0 \qquad i \in P = \{1,2,\ldots,p\}$$

$$x \in S \subseteq \Re^n$$

Questa formulazione prevede *q* + *p* vincoli espliciti, di cui *q* di disuguaglianza e *p* di uguaglianza, e un vincolo implicito rappresentato dal dominio *S*, che supporremo in alcuni casi coincidere con l'intero spazio, ossia $S = \Re^n$.

Ponendo

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_q(x))$$

e

$$h(x) = (h_1(x), h_2(x), \ldots, h_p(x)),$$

possiamo esprimere il problema di ottimizzazione mediante la notazione matriciale:

$$f^* = \min\ f(x)$$

soggetto a:

$$g(x) \leq 0$$

$$h(x) = 0$$

$$x \in S \subseteq \Re^n$$

Definizione.Il problema di ottimizzazione viene detto *non vincolato* se $q = p = 0$. Si dice altrimenti che il problema è *vincolato*.

Definizione.Data una soluzione ammissibile y del problema, si dice che un vincolo di disuguaglianza g_i è *attivo* in y se esso viene soddisfatto come un'uguaglianza, ossia $g_i(y) = 0$. Si dice altrimenti che il vincolo è *inattivo* in y .

Come precedentemente annunciato, un'importante classe di problemi di ottimizzazione matematica è costituita dai modelli di ottimizzazione convessa.

Definizione.Il problema di ottimizzazione viene detto di *ottimizzazione convessa* se la funzione obiettivo $f(x)$ e le funzioni $g_i, i \in Q$, sono convesse, mentre le funzioni $h_i, i \in P$, sono lineari.

Definizione.Un problema di massimizzazione viene detto di *ottimizzazione concava* se il corrispondente problema di minimizzazione con funzione obiettivo $-f(x)$ è di ottimizzazione convessa.

Definizione.Il problema viene detto di *ottimizzazione con vincoli lineari* se le funzioni $g_i, i \in Q$, $h_i, i \in P$, sono lineari.

Un'altra classe rilevante di problemi di ottimizzazione, più semplici da risolvere rispetto al caso generale, si ricava assumendo che la funzione obiettivo sia quadratica e i vincoli lineari.

Definizione.Il problema viene detto di *ottimizzazione quadratica* se la funzione f è quadratica e le funzioni $g_i, i \in Q$, $h_i, i \in P$, sono lineari.

Un altro caso particolare, che conduce a una semplificazione rispetto alla forma generale di problema di ottimizzazione, corrisponde a funzioni separabili.

Definizione.Una funzione $f:\Re^n \mapsto \Re$ si dice *separabile* se esistono n funzioni reali $f_j:\Re^n \mapsto \Re$, $j = 1,2,...,n$, tali che

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j).$$

Definizione.Il problema viene detto di *ottimizzazione separabile* se le funzioni $f, g_i, i \in Q$ e $h_i, i \in P$ sono separabili.

Il seguente risultato indica che la minimizzazione di funzioni separabili in $\Re^n$ è riconducibile alla minimizzazione di funzioni in $\Re$.

Teorema.Se $f:\Re^n \mapsto \Re$ è una funzione separabile, vale la relazione

$$\min_{x\in\Re^n}\{f(x): g_i(x) \le 0, i \in Q, h_i(x) = 0, i \in P\}$$

$$=$$

$$\sum_{j=1}^{n} \min_{x_j\in\Re}\{f_j(x_j): g_{ij}(x_j) \le 0, i \in Q, h_{ij}(x_j) = 0, i \in P\}.$$

2.3.Applicazioni dell'ottimizzazione non lineare

Verranno ora forniti alcuni esempi di modelli di ottimizzazione non lineare*(Sherali, Shetty, 1993)*, che illustrano diversi tipi di applicazioni. I modelli di ottimizzazione non lineare sono stati e vengono tuttora utilizzati in diversi domini di applicazione, sia in ambito aziendale sia nelle scienze economiche, nella pubblica amministrazione e in campo scientifico. Tra le applicazioni più significative in ambito aziendale, possiamo ricordare i numerosi modelli sviluppati per la pianificazione della produzione, la logistica, il marketing, l'analisi finanziaria, l'allocazione del personale.

La formulazione di un modello di ottimizzazione (lineare e non) può essere schematizzata attraverso quattro fasi principali:

1. *Identificazione del problema*. Occorre in primo luogo identificare il problema che si vuole affrontare. Devono quindi essere compresi con chiarezza gli obiettivi del processo decisionale e i vincoli che la decisione ottimale deve rispettare.
2. *Definizione delle variabili.* E' necessario definire le variabili di decisione del modello, corrispondenti alle scelte che il processo decisionale comporta.
3. *Rappresentazione dell'obiettivo.* Occorre identificare e rappresentare la funzione obiettivo del modello, che deve costituire una funzione lineare (o non) delle variabili di decisione, e determinare i coefficienti numerici che compaiono nell'espressione lineare (o non) della funzione obiettivo.
4. *Rappresentazione dei vincoli.* Da ultimo, è necessario identificare e rappresentare i vincoli del modello. I diversi tipi di vincoli che definiscono una decisione ammissibile, di natura logica, fisica e procedurale, devono essere espressi mediante equazioni e disequazioni nelle variabili di decisione.

2.3.1.Regressione con i minimi quadrati

In un problema di regressione è disponibile un insieme di *m* osservazioni, rappresentate come record di una tabella formata da *m* righe e *n+1* colonne denominate attributi, tra cui distinguiamo una variabile numerica target e le rimanenti *n* variabili esplicative, che possono spiegare in modo casuale il valore del target. Le variabili esplicative di ciascuna osservazione possono essere rappresentate da un vettore $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \dots , m$, nello spazio $\Re^n$, mentre l'attributo target viene indicato come y_i .

Un modello di regressione si propone di identificare i parametri $\mathbf{w}$ e b di un legame lineare tra la variabile target e le variabili esplicative $\{ x_1, x_2, \dots , x_n\}$, basato sulla relazione :

$$y = w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n + b = \mathbf{w'x} + b$$

Ad esempio, $y_i$può rappresentare le vendite di un prodotto nel periodo *i*, mentre ciascuna della variabili esplicative del vettore $\mathbf{x}_i$ indica il livello di spesa pubblicitaria sostenuta per diversi canali di promozione nel corso del medesimo periodo.

In generale, essendo il numero di osservazioni maggiore del numero di variabili esplicative, risulta impossibile determinare i parametri $\mathbf{w}$ e b in modo che tutte le osservazioni soddisfino esattamente il legame prima esposto.

Per ciascuna osservazione si definisce pertanto il residuo r_i = | y_i - ***w'x***$_i$ - *b*|, che rappresenta lo scarto assoluto tra il valore $y_i$del target e il valore ***w'x***$_i$ + *b*previsto in accordo al modello lineare.

Il principio dei minimi quadrati costituisce il più noto metodo per la determinazione dei parametri ***w*** e *b* , e si basa sulla minimizzazione della somma dei quadrati dei residui.

L'identificazione dei parametri ***w*** e *b* può quindi essere ricondotta al seguente problema di ottimizzazione convessa non vincolata:

$$\min_{w,b} \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - w' x_i - b\right)^2 .$$

<u>2.3.2.Selezione di investimenti finanziari</u>

Supponiamo che sia possibile investire in *n* titoli, indicati mediante l'indice *j = 1, 2, … , n.* Il titolo *j* determina sull'orizzonte di pianificazione un rendimento medio r_j e un rischio σ_{jj} , solitamente espresso dalla varianza del rendimento. Inoltre, per ogni coppia di investimenti indichiamo come σ_{ij}la covarianza del rendimento. I valori dei parametri possono essere stimati mediante l'analisi dei dati storici relativi ai rendimenti degli *n* titoli, tenendo eventualmente conto delle opinioni di esperti e delle tendenze dei mercati. Il capitale da investire è pari a *B*, mentre il parametro *h* indica il rendimento minimo sul capitale *B* che l'investitore desidera percepire sull'orizzonte di pianificazione.

Le variabili di decisione rappresentano il valore dell'investimento in ciascun titolo

x_j = valore da investire nel titolo *j.*

E' quindi possibile formulare un modello di ottimizzazione quadratica che considera come obiettivo la minimizzazione del rischio associato al portafoglio di titoli, espresso tramite le covarianze dei rendimenti,

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$$

soggetto a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq B$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq hB$$

$$x_j \geq 0$$

$$j = 1,2,...,n.$$

Il primo vincolo esprime il limite di budget disponibile per gli investimenti, mentre il secondo garantisce che il rendimento medio complessivo sull'orizzonte di pianificazione sia non inferiore alla soglia *h* prefissata.

<u>2.3.3.Mix produttivo e trasporto con costi variabili</u>

Consideriamo il seguente problema di pianificazione produttiva formulato come problema di ottimizzazione lineare.

Sono dati *n* prodotti, indicati come *j = 1, 2, … , n* , che competono per l'utilizzo di *m* risorse, indicate come *i = 1, 2, … , m* , la cui disponibilità totale è limitata, necessarie al compimento del processo di trasformazione produttiva. Ogni prodotto *j* è caratterizzato da un margine lordo unitario c_j e da un assorbimento unitario della risorsa *i* pari a a_{ij} . A ciascuna risorsa *i* è associata una disponibilità massima b_i, assegnata sull'orizzonte temporale di pianificazione. Il problema di mix produttivo richiede di determinare un piano di produzione che massimizzi il margine lordo nel rispetto dei vincoli di capacità delle risorse. Se indichiamo come x_j la quantità di prodotto *j* che deve essere realizzata, possiamo formulare il seguente modello di ottimizzazione, avente *n* variabili di decisione e *m* vincoli:

$$\max c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

soggetto a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2$$

………………………………………

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$$

Il modello richiede di massimizzare il margine lordo, rispetto alle variabili di decisionex_j, in presenza di *m* vincoli di capacità. Il vincolo i-esimo impone che la quantità di risorsa *i* utilizzata, rappresentata dal primo membro della corrispondente disequazione, sia non superiore alla disponibilità b_i, che figura a secondo membro. Occorre inoltre imporre le condizioni di non negatività per le variabili di decisione.

Consideriamo ora un problema di trasporto anch'esso formulato come problema di ottimizzazione lineare.

Consideriamo *m* origini, indicate come $i = 1, 2, \dots, m$, e *n* destinazioni, indicate come $j = 1, 2, \dots, n$. Ad esempio, le origini possono rappresentare le unità produttive di un'azienda industriale, mentre le destinazioni possono corrispondere ai clienti che devono essere riforniti di prodotti trasportati dalle unità produttive. Ogni origine è caratterizzata da una disponibilità massima di prodotto, indicata come a_i , mentre a ogni destinazione è associata una domanda d_j . E' inoltre assegnato un costo di trasporto c_{ij}sostenuto per inviare un'unità di prodotto dall'origine *i* alla destinazione *j* , per ogni coppia *(i, j)*. L'obiettivo consiste nella formulazione di un piano di trasporto ottimale, che soddisfi a costo minimo la domanda delle destinazioni, nel rispetto della disponibilità delle origini. Per formulare un modello di ottimizzazione consideriamo le seguenti variabili di decisione che rappresentano le quantità da trasportare da ciascuna origine verso ogni destinazione

x_{ij} = quantità di prodotto da trasportare dall'origine *i* alla destinazione *j.*

La funzione obiettivo rappresenta il costo di trasporto totale, e può essere espressa nella forma

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

I vincoli del modello sono di due tipi. Da un lato, occorre garantire che la disponibilità di ciascuna origine non venga superata, imponendo che la quantità prelevata dall'origine *i* per il trasporto a tutte le destinazioni sia non superiore alla quantità disponibile a_i:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

D'altra parte, è necessario soddisfare la domanda di ciascuna destinazione, imponendo che la quantità trasportata alla destinazione *j* da tutte le origini sia non inferiore alla domanda d_j :

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j$$

$$j = 1,2,\dots,n.$$

La seguente disuguaglianza rappresenta pertanto una condizione necessaria e sufficiente perché il problema di trasporto ammetta soluzioni ammissibili:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} d_j \; .$$

Il problema di trasporto può quindi essere formulato tramite il seguente modello di ottimizzazione lineare:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

soggetto a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$i = 1,2,\dots,m \qquad j = 1,2,\dots,n.$$

Tuttavia, per quanto riguarda il modello di mix produttivo, vi è da considerare il fatto che in alcuni sistemi produttivi, l'ipotesi che il costo di produzione sia proporzionale al numero di unità prodotte non è realistica, in quanto il costo marginale unitario (la variazione nei costi totali che si verifica quando si varia di una unità la quantità prodotta) varia in modo significativo in funzione del volume produttivo. Può accadere ad esempio, che il costo unitario si incrementi perché un maggior volume produttivo comporta il ricorso all'orario straordinario o a lavorazioni effettuate da terzisti per far fronte alla maggiore richiesta di unità di prodotto.Analogamente, per il problema di trasporto può accadere che si realizzino delle economie di scala (locuzione usata in economia per indicare la relazione esistente tra aumento della scala di produzione e diminuzione del costo medio unitario di produzione) in corrispondenza di un maggiore volume di prodotto trasportato.

Di conseguenza i costi di trasporto unitari non sono proporzionali al volume di prodotto trasferito da un'origine a una destinazione. Per entrambi i casi descritti, dunque, la funzione obiettivo risulta non lineare rispetto alle variabili, e quindi il relativo modello di ottimizzazione è non lineare.

In particolare possiamo riformulare il modello di mix produttivo minimizzando una funzione obiettivo non lineare che si presenta nella seguente forma:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

dove $C_j(x_j)$ indica il costo relativo alla produzione di x_j unità di prodotto *j*.

In modo analogo, la funzione obiettivo per il problema di trasporto assume la seguente forma:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \quad .$$

2.3.4.Localizzazione e allocazione logistica

Consideriamo un'azienda che debba affrontare due problemi logistici tra loro interconnessi. Da un lato si richiede di localizzare *d* depositi su un territorio suddiviso in *r* regioni, decidendo per ogni deposito in quale regione debba essere collocato. Dall'altro è necessario determinare il piano distributivo sull'orizzonte temporale considerato, decidendo per ciascuna regione e per ciascun deposito il numero di viaggi di carico per la consegna delle merci richieste.

Indichiamo come $i = 1,2,...,d$, i depositi e come $j = 1,2,...,r$, le regioni. Per ogni regione *j* sono note le coordinate geografiche (a_j, b_j) del centro e il numero totale e_j di viaggi richiesti sull'orizzonte di pianificazione per soddisfare la domanda.

Definiamo le seguenti variabili:

p_i= ascissa in cui collocare il deposito *i*

q_i= ordinata in cui collocare il deposito *i*

x_{ij}= numero di viaggi da effettuare dal deposito *i* alla regione *j.*

Il problema di localizzazione e allocazione logistica può quindi essere formulato come modello di ottimizzazione non lineare con vincoli lineari:

$$\min \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{r} x_{ij} \sqrt{\left(p_i - a_j\right)^2 + \left(q_i - b_j\right)^2}$$

soggetto a:

$$\sum_{i=1}^{d} x_{ij} = e_j$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$i = 1,2,\ldots,d \qquad j = 1,2,\ldots,r \,.$$

La funzione obiettivo esprime il costo totale di allocazione, rappresentato dal prodotto tra il numero di viaggi dal deposito *i* verso la regione *j* e la corrispondente distanza, nell'ipotesi che il costo di viaggio sia direttamente proporzionale alla distanza percorsa. Il vincolo impone che il numero di viaggi verso ciascuna regione sia pari al valore richiesto e_j.

2.4.Geometria dell'ottimizzazione non lineare

L'interpretazione geometrica permette di illustrare in modo efficace e intuitivo le principali proprietà dell'ottimizzazione lineare e non. E' tuttavia importante ricordare che le rappresentazioni geometriche offrono un efficace ausilio interpretativo, ma non costituiscono un metodo risolutivo di utilità pratica.

Per comprendere appieno la geometria dell'ottimizzazione non lineare, introdurremo un semplice esempio numerico che costituirà il problema di ottimizzazione da rappresentare geometricamente. Inizialmente ricaveremo da questo un modello di ottimizzazione lineare e poi con opportune modifiche renderemo la funzione obiettivo non lineare, estendendo dunque l'analisi geometrica ad un problema di ottimizzazione non lineare, per porre in luce le principali differenze e le analogie che emergono rispetto al caso lineare.

Esempio mix produttivo

Un'azienda alimentare produce due diversi formati di pasta, farfalle e rigatoni, e desidera ricavare il piano ottimale di produzione per un orizzonte temporale costituito da un unico periodo, pari a una settimana. Il ciclo produttivo prevede tre fasi critiche, corrispondenti alle risorse limitate che devono essere allocate in modo ottimale ai due prodotti: la macinazione delle semole, la produzione e la confezione della pasta. Per ogni quintale del formato farfalle viene utilizzata 1 ora per la fase di macinazione, 4 ore per la produzione e 2 ore per la confezione.

Analogamente, l'assorbimento di capacità per realizzare un quintale del formato rigatoni è pari a 1 ora per la macinazione, 2 ore per la produzione e 4 ore per la confezione. La disponibilità di capacità produttiva nell'orizzonte di pianificazione è pari a 40 ore per la macinazione, 132 ore per la produzione e 140 ore per la confezione. Il margine lordo unitario è pari a 24 euro per quintale per le farfalle e 18 euro per quintale per i rigatoni. I dati del problema sono riassunti nella seguente tabella:

		assorbimento unitario (h/q)	
	capacità (h)	farfalle	rigatoni
macinazione	40	1	1
produzione	132	4	2
confezione	140	2	4
	margine (€/q)	**24**	**18**

Si suppone inoltre che, entro i limiti consentiti dalla capacità produttiva disponibile, l'azienda possa collocare sul mercato la quantità prodotta per ciascun formato. L'obiettivo dell'azienda consiste nel determinare un piano di produzione, rappresentato da un mix dei due prodotti, tale da massimizzare il margine lordo totale, nel rispetto dei limiti di capacità delle risorse disponibili. Per formulare un modello di ottimizzazione che rappresenti il processo decisionale descritto, è necessario in primo luogo identificare e rappresentare simbolicamente le variabili di decisione. In questo caso le decisioni corrispondono al volume di produzione per ciascuno dei due formati di pasta. Per indicare le variabili decisionali utilizziamo i simboli F e R, con il seguente significato:

F = quintali di pasta del formato farfalle da produrre;

R = quintali di pasta del formato rigatoni da produrre.

Il passo successivo consiste nell'esprimere la funzione obiettivo del modello. Indicando come z il margine lordo corrispondente al mix produttivo (F,R), otteniamo la relazione:

$$z = 24F + 18R\,.$$

Infine, per completare la formulazione del modello di ottimizzazione, è necessario esprimere i vincoli di capacità produttiva mediante disequazioni relative alle variabili di decisione. Consideriamo dapprima la fase di macinazione, la cui disponibilità è pari a 40 ore. Possiamo supporre che la realizzazione del mix produttivo comporti un assorbimento proporzionale e additivo, ovvero *lineare*, della capacità di macinazione, formulando la relazione:

capacità di macinazione: $F + R \leq 40$.

Essa impone che la capacità assorbita, espressa dal primo membro della disequazione, sia non superiore alla capacità disponibile, rappresentata a sua volta dal secondo membro.

Applicando un analogo ragionamento alle fasi di produzione e di confezione, otteniamo rispettivamente le disequazioni:

capacità di produzione: $4F + 2R \leq 132$

capacità di confezione: $2F + 4R \leq 140$.

Da ultimo, è necessario introdurre due vincoli per esprimere le condizioni di non negatività per le variabili di decisione:

$$F, R \geq 0 .$$

Riassumendo, il problema di mix ottimale di produzione è riconducibile al seguente modello di ottimizzazione *lineare*:

$$\max 24F + 18R$$

$$F + R \leq 40$$

$$4F + 2R \leq 132$$

$$2F + 4R \leq 140$$

$$F, R \geq 0$$

Per comodità di rappresentazione grafica, applichiamo al modello trovato una traslazione costante di 200€ e una scalatura di un fattore 1/10 dei profitti unitari. Il modello assume quindi la seguente forma:

$$\max 2.4F + 1.8R + 200$$

soggetto a:

$$F + R \leq 40$$

$$4F + 2R \leq 132$$

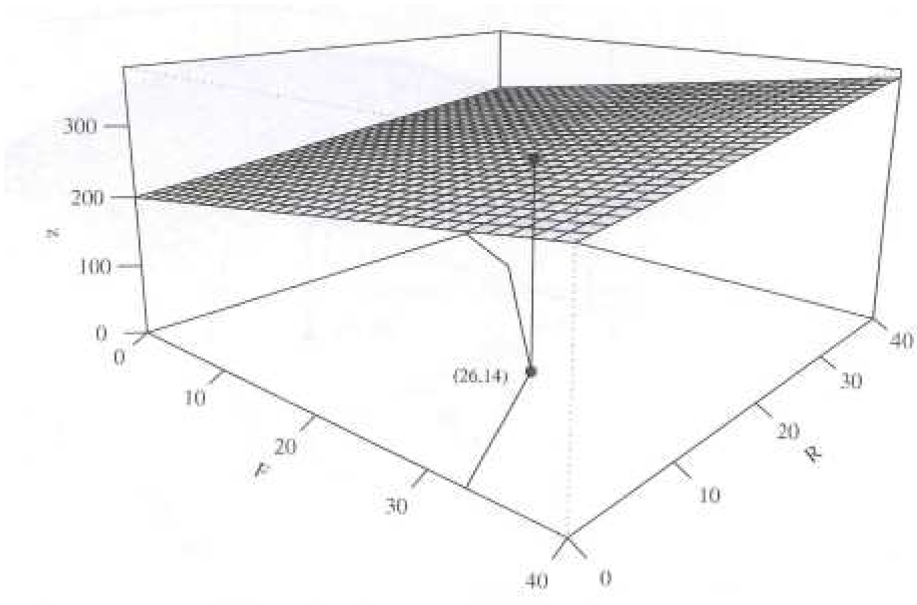
$$2F + 4R \leq 140$$

$$F, R \geq 0$$

Per rappresentare geometricamente questo problema vi sono delle regole e delle procedure precise, che consentono di ricavare un'interpretazione geometrica della regione ammissibile, della funzione obiettivo e dei vincoli del modello di ottimizzazione. Tuttavia, poiché questo esula dal contenuto dell'elaborato proposto, ci limiteremo a fornire un breve passaggio procedurale, con le nozioni e i concetti più importanti, per facilitare la comprensione dei problemi esemplificativi che seguiranno.

Se f è una funzione di due variabili, gli insiemi di livello si dicono curve di livello. Gli insiemi di livello di una funzione $f : S \mapsto \Re$ definita in un insieme $S \subseteq \Re^n$ costituiscono il luogo geometrico dei punti in cui la funzione assume un valore costante. Le curve possono essere pertanto rappresentate geometricamente nel piano evidenziando il valore della funzione f al variare delle due variabili x e y collocate sugli assi del diagramma. Se la funzione obiettivo di un problema di ottimizzazione rappresenta un profitto da massimizzare (come nel nostro caso), allora si fa riferimento alle sue superfici di livello con i termini di isoprofitto. Per rappresentare la funzione obiettivo, è necessario infatti tracciare nel piano *(F, R)* le curve isoprofitto della funzione obiettivo stessa, che in questo caso, essendo una funzione lineare in $\Re^2$, costituiscono un fascio di rette parallele che crescono in una direzione ad esse ortogonale.

Tornando al nostro problema del mix produttivo, la sua rappresentazione geometrica può essere ricavata in un sistema di coordinate spaziali in cui l'ascissa e l'ordinata sono associate alle variabili *F* e *R*, mentre la quota corrisponde al valore della funzione obiettivo. Come si vede dalla figura seguente, la regione ammissibile corrisponde ad un poliedro nel piano $z = 0$, mentre la funzione obiettivo lineare identifica un piano. La soluzione ottimale, di coordinate (26, 14) è identificata dall'ultimo punto della regione ammissibile incontrato dalle curve di livello nella direzione di accrescimento, e corrisponde a un vertice del poliedro ammissibile.



Supponiamo ora che la funzione obiettivo del modello fin qui considerato, sia concava, mantenendo i medesimi vincoli, come nella seguente formulazione:

$$\max 4F - 0.1F^2 + 2R - 0.1R^2 + 80$$

soggetto a:

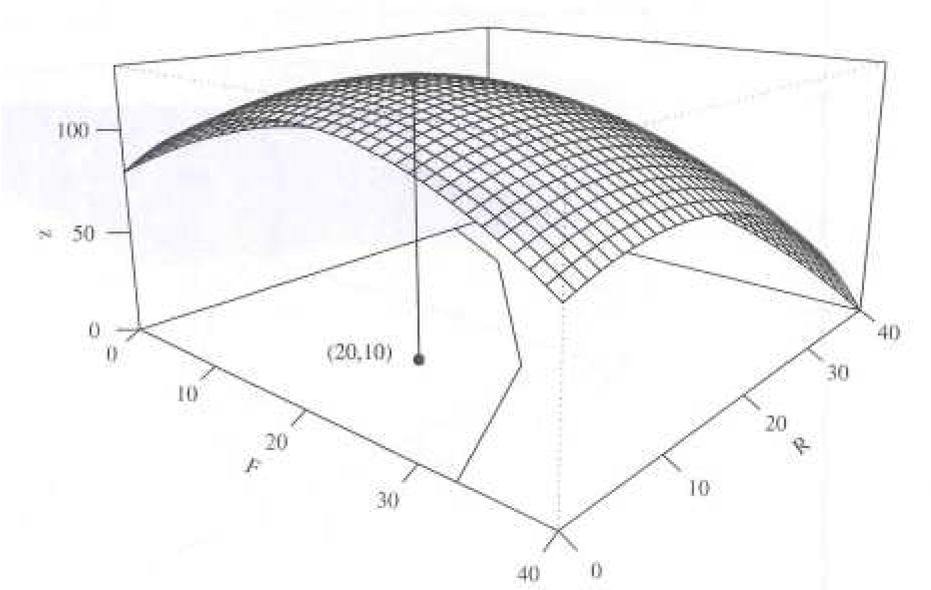
$$F + R \leq 40$$

$$4F + 2R \leq 132$$

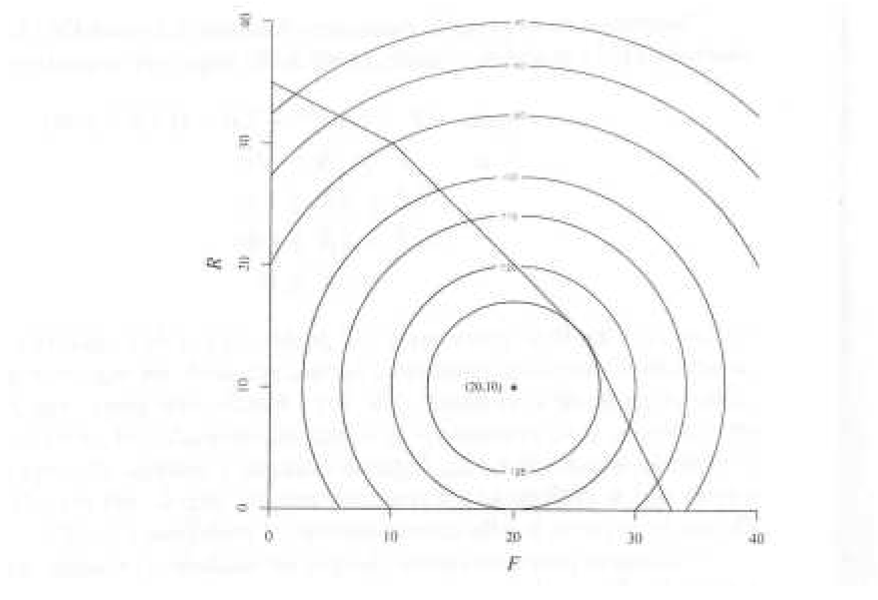
$$2F + 4R \leq 140$$

$$F, R \geq 0$$

La rappresentazione geometrica del problema, illustrata nella figura seguente, indica che la funzione obiettivo concava possiede un massimo globale corrispondente al punto di coordinate (20, 10). Poiché tale punto appartiene al poliedro ammissibile, esso costituisce la soluzione ottimale del problema. Come si vede, in questo caso la soluzione ottimale è interna alla regione ammissibile e quindi non si colloca su un vertice o su uno spigolo del poliedro.



La figura seguente mostra invece le curve di livello corrispondenti al problema considerato:



L’esempio proposto indica che per un modello di ottimizzazione non lineare, pur dotato di vincoli lineari, la soluzione ottimale può corrispondere a un punto interno alla regione ammissibile, a differenza di quanto avviene per l’ottimizzazione lineare.

Consideriamo ora una diversa funzione obiettivo, a sua volta concava, in presenza dei medesimi vincoli del problema originario, come nella seguente formulazione:

$$\max 6F - 0.1F^2 + 2R - 0.05R^2$$

soggetto a:

$$F + R \leq 40$$

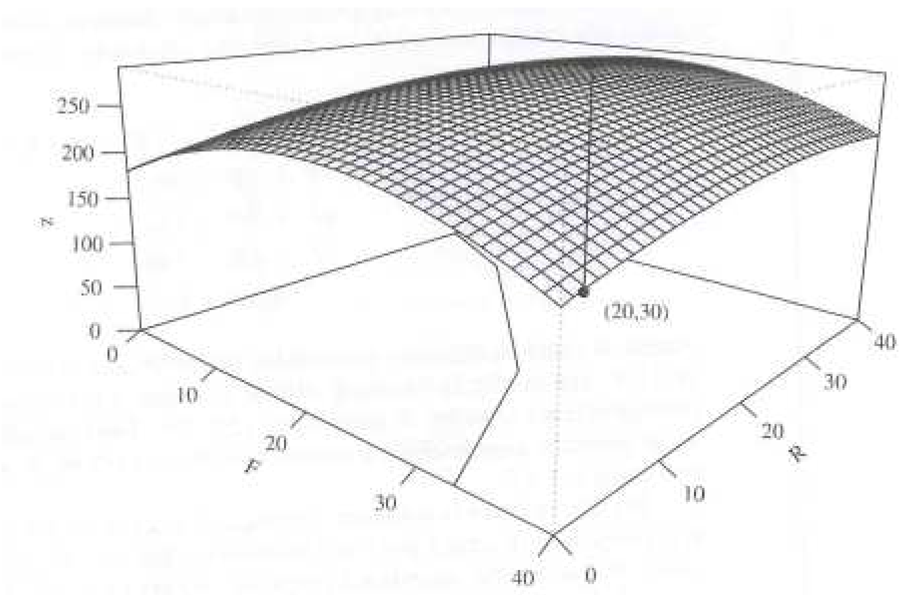
$$4F + 2R \leq 132$$

$$2F + 4R \leq 140$$

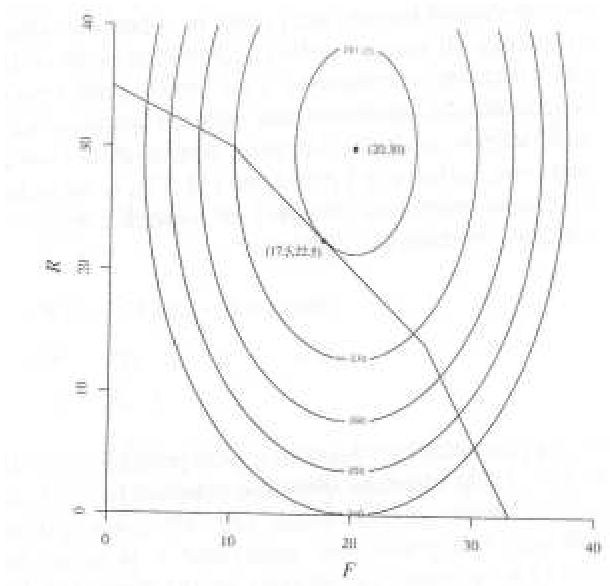
$$F, R \geq 0$$

Anche la rappresentazione geometrica di questo problema, illustrata nella figura sottostante, indica che la funzione obiettivo concava possiede un massimo globale corrispondente al punto di coordinate (20,30). Tuttavia, tale punto non appartiene al poliedro ammissibile, e quindi non può costituire la soluzione ottimale del problema.

Per determinare la soluzione ottimale è necessario procedere in modo analogo alla procedura descritta precedentemente per l'ottimizzazione lineare, identificando l'ultima delle curve di livello che interseca la regione ammissibile.



La figura seguente mostra invece le curve di livello corrispondenti al problema considerato, e permette di individuare la soluzione ottimale, costituita dal punto di coordinate (17.5,22.5). In questo caso la soluzione ottimale si colloca su uno spigolo del poliedro ammissibile ma non corrisponde ad un suo vertice.



Questo secondo esempio indica che per i modelli di ottimizzazione non lineare con vincoli lineari, per i quali la soluzione ottimale del problema non vincolato si colloca all'esterno della regione ammissibile, la soluzione ottimale del problema vincolato corrisponde ad un punto sulla frontiera della regione ammissibile.

2.5.Condizioni di esistenza di soluzioni ottimali

Come osservato, un generico problema di ottimizzazione non possiede necessariamente soluzioni ottimali. E' tuttavia possibile dimostrare che, sotto opportune condizioni, l'insieme delle soluzioni di minimo (di massimo) costituisce un sottoinsieme non vuoto e compatto (chiuso e limitato) di $\Re^n$. Dimostreremo questa proprietà mediante un'estensione del teorema di Weierstrass che garantisce l'esistenza di soluzioni di minimo e di massimo per funzioni continue su un insieme compatto. Osserviamo infatti che il teorema di Weierstrass nella sua formulazione originale non può essere applicato a problemi di ottimizzazione definiti su domini illimitati, che si presentano in numerose applicazioni dei modelli di ottimizzazione.

D’altra parte nei problemi di ottimizzazione si è interessati all’esistenza di soluzioni di minimo o di massimo, rispettivamente per modelli di minimizzazione o di massimizzazione, ma non alla simultanea esistenza di entrambi. Di conseguenza, l’estensione del teorema riguarderà appunto condizioni sufficienti per l’esistenza di soluzioni di minimo. E’ agevole poi adattare le definizioni e il teorema a un problema di massimizzazione per garantire l’esistenza di soluzioni di massimo.

Prima di procedere è necessario premettere alcune definizioni.

Definizione.Una funzione $f : S \mapsto \Re$, $S \subseteq \Re^n$, si dice *chiusa* se il suo epigrafo è un insieme chiuso.

Definizione.Una funzione $f : S \mapsto \Re$, $S \subseteq \Re^n$, si dice *coercitiva* su S se per ogni successione $\{x_k\} \subset S$ tale che $\|x_k\| \to \infty$, si ha $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = \infty$.

Estensione del teorema di*Weierstrass*:

data una funzione chiusa f, definita su un dominio $dom(f)$non vuoto, supponiamo che valga una delle seguenti condizioni:

(a) il dominio $dom(f)$ è limitato;

(b) esiste un numero $w \in \Re$ tale che l’insieme di sottolivello $\{x : f(x) \leq w\}$ è chiuso e limitato;

(c) la funzione f è coercitiva.

Allora l’insieme X^* delle soluzioni di minimo di f in $\Re^n$ è compatto e non vuoto.

2.6.Ottimi locali e globali di funzioni convesse

L’insieme delle soluzioni di ottimo locale per un generico problema di ottimizzazione, non coincide necessariamente con l’insieme delle soluzioni di ottimo globale. In altri termini, può accadere che un ottimo locale non costituisca anche un ottimo globale del problema. Tuttavia, nel caso di problemi di ottimizzazione convessa, è possibile dimostrare che tutte le soluzioni di minimo locale, sono anche soluzioni di minimo globale.

Teorema.Per un problema di ottimizzazione convessa ogni soluzione di minimo locale costituisce anche una soluzione di minimo globale. Se inoltre f è strettamente convessa, allora esiste al più una soluzione di minimo globale di f.

Dimostrazione.

Indichiamo come K la regione ammissibile del problema di ottimizzazione convessa, che sappiamo essere convessa. Per assurdo, supponiamo che esista un minimo locale $\boldsymbol{x}^L$ che non sia anche un minimo globale. Deve quindi esistere un punto $\boldsymbol{x}^*$ tale che $f(\boldsymbol{x}^*) < f(\boldsymbol{x}^L)$.

La convessità di f implica che, per ogni $\alpha \in [0,1]$, sia

$$f(\alpha \boldsymbol{x}^L + (1 - \alpha)\, \boldsymbol{x}^*) \leq \alpha f(\boldsymbol{x}^L) + (1 - \alpha)\, f(\boldsymbol{x}^*) < f(\boldsymbol{x}^L).$$

Ne consegue che f assume valori strettamente minori di $f(\boldsymbol{x}^L)$ in ogni punto del segmento che collega $\boldsymbol{x}^L$ a $\boldsymbol{x}^*$. Essendo un insieme convesso, K contiene l'intero segmento, e questo contraddice l'ipotesi di ottimalità locale di $\boldsymbol{x}^L$, in quanto in ogni intorno di $\boldsymbol{x}^L$ esistono soluzioni ammissibili aventi valore della funzione obiettivo strettamente minore di $f(\boldsymbol{x}^L)$.

Se f è strettamente convessa, supponiamo per assurdo che esistano due soluzioni ottimali globali distinte $\boldsymbol{x}^*_1$e $\boldsymbol{x}^*_2$. Il punto di mezzo del segmento che le collega, rappresentato da $(\boldsymbol{x}^*_1 + \boldsymbol{x}^*_2)/2$, appartiene all'insieme convesso K. D'altra parte il valore di f nel punto di mezzo del segmento deve essere minore che negli estremi $\boldsymbol{x}^*_1$ e $\boldsymbol{x}^*_2$, poiché f è strettamente convessa, in contraddizione con l'ipotesi che i due vettori siano soluzioni ottimali globali.

Nel caso di un problema di massimizzazione, il teorema appena dimostrato implica che per una funzione concava le soluzioni le soluzioni di massimo locale coincidono con le soluzioni di massimo globale.

CAPITOLO 3

Condizioni di ottimalita' e teoria della dualita'

3.1.Condizioni di ottimalita' per problemi non vincolati

Vogliamo ora ricavare condizioni necessarie e sufficienti di ottimalità per problemi di ottimizzazione non lineare non vincolata, posti nella forma

$$f^* = \min\ f(x)$$

$$x \in S \subseteq \Re^n .$$

<u>Definizione</u>.Sia $f \in C^1$ su S. Un punto $x \in S$ tale che $\nabla f(x) = 0$ viene detto *punto stazionario* di f *.*

$\nabla f(x)$, definito come il gradiente di f in x, è il vettore

$$\nabla f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} .$$

che ha per componenti cartesiane le derivate parziali della funzione $f(x)$.

<u>3.1.1.Condizioni necessarie del primo ordine</u>

Dapprima ricaviamo una condizione necessaria di ottimalità locale legata al concetto di direzione ammissibile.

<u>Definizione</u>.Dato un generico problema di ottimizzazione matematica, dotato di una regione ammissibile $K = \{x \in \Re^n : g_i(x) \leq 0, i = 1,2,\ldots,m\}$, e una soluzione ammissibile $y \in K$, diremo che un vettore $h \in \Re^n$ è una *direzione ammissibile* in y se esiste un numero $\vartheta > 0$ tale che il vettore $y + \alpha h$ appartiene a K per ogni $\alpha \in [0, \vartheta]$.

Teorema.Sia $f \in C^1$ su S. Se $x^* \in S$ è una soluzione di minimo locale di f, allora per ogni direzione ammissibile $d \in \Re^n$ in $x^* \in S$ vale la condizione

$$d'\nabla f(x^*) \geq 0 .$$

Corollario.Sia $f \in C^1$ su S. Se $x^* \in S$ è una soluzione di minimo locale di f e se inoltre $x^* \in \operatorname{int}(S)$ allora vale la condizione

$$\nabla f(x^*) = 0 .$$

Dove con $\operatorname{int}(S)$ si è indicato l'insieme di tutti i punti interni di S.

3.1.2.Condizioni necessarie e sufficienti per funzioni convesse

Vogliamo ora mostrare che per le funzioni convesse le condizioni necessarie del primo ordine risultano anche sufficienti per l'ottimalità globale.

Teorema.Sia $f \in C^1$ convessa su un insieme convesso S. Un punto $x^* \in S$ è una soluzione di minimo globale di f se e solo se per ogni direzione ammissibile $d \in \Re^n$ in $x^* \in S$ vale la condizione

$$d'\nabla f(x^*) \geq 0 .$$

Corollario.Sia $f \in C^1$ convessa su un insieme convesso S. Un punto $x^* \in \operatorname{int}(S)$ è una soluzione di minimo globale di f in S se e solo se

$$\nabla f(x^*) = 0 .$$

Se in particolare $S = \Re^n$, un punto x^* è una soluzione di minimo globale di f in $\Re^n$ se e solo se

$$\nabla f(x^*) = 0 .$$

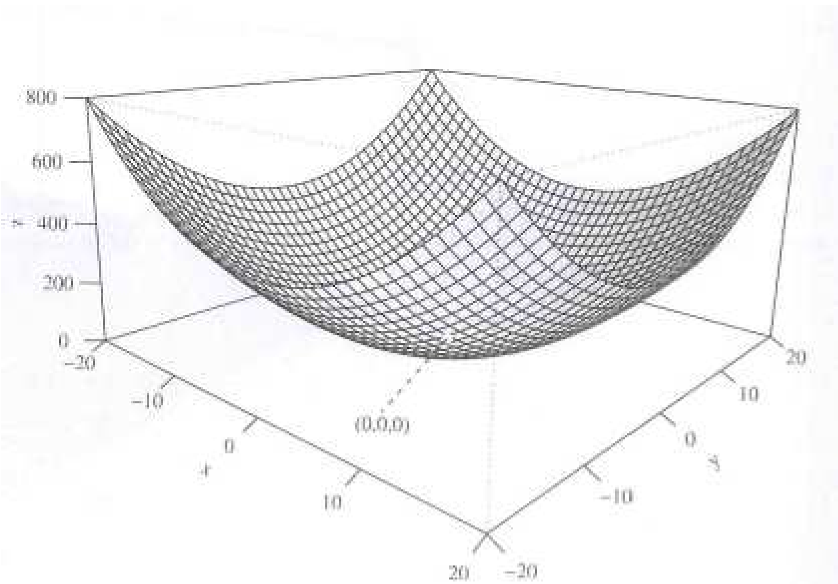
Questo importante corollario, esprime una caratterizzazione delle soluzioni di ottimo globale per i problemi di ottimizzazione convessa differenziabili non vincolata, asserendo che le soluzioni ottimali coincidono con i punti stazionari della funzione obiettivo.

3.2.Geometria dei punti stazionari

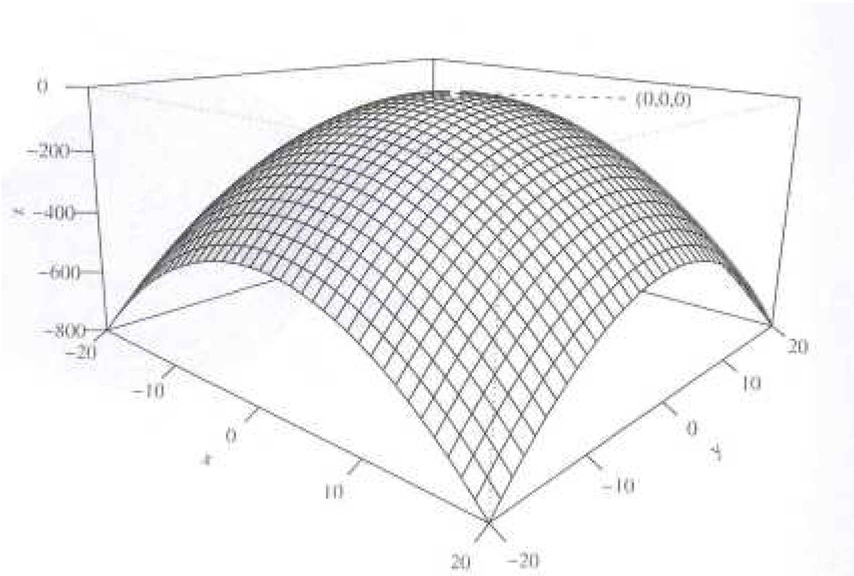
Mediante le condizioni necessarie della precedente sezione abbiamo dedotto che le soluzioni di ottimo globale e locale di una funzione differenziabile sono punti stazionari. D'altra parte, le condizioni sufficienti permettono di concludere che anche l'implicazione opposta è vera, ossia che i punti stazionari costituiscono punti di minimo globale, se la funzione è convessa e differenziabile. Per funzioni non convesse, i punti stazionari costituiscono soluzioni di minimo locale se la funzione risulta localmente strettamente convessa.

Per funzioni concave, le condizioni sufficienti per la minimizzazione nel caso convesso implicano che i punti stazionari siano rispettivamente soluzioni di massimo globale e di massimo locale.

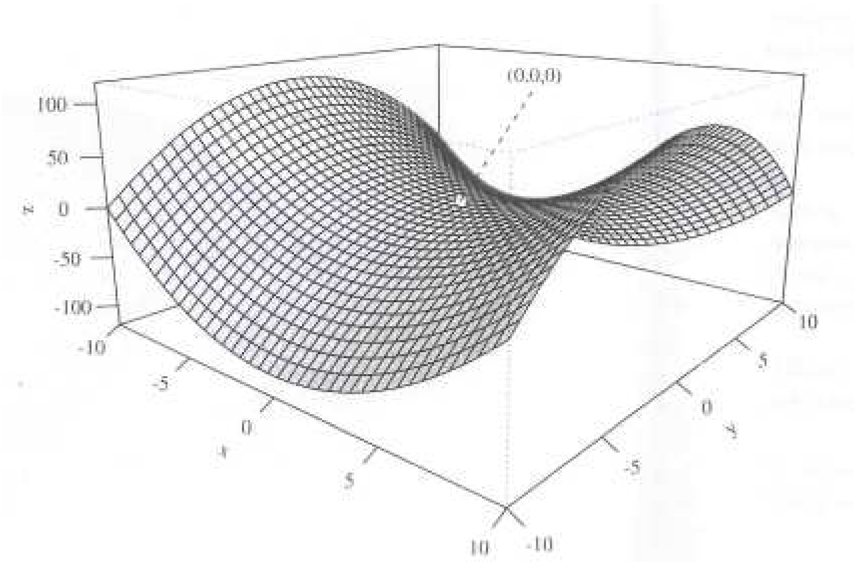
Da un punto di vista geometrico, la figura seguente illustra quanto descritto per una funzione convessa. In questo caso abbiamo un punto stazionario che costituisce una soluzione di minimo globale.



Quest'altra rappresentazione invece, illustra quanto descritto per una funzione concava. In questo caso abbiamo un punto stazionario che rappresenta una soluzione di massimo globale.



Osserviamo infine che non tutti i punti stazionari rappresentano soluzioni di minimo o di massimo globale o locale. Può infatti accadere che essi siano punti di sella come illustrato nella figura seguente.



<u>Definizione</u>.Sia $f \in C^1$ su S. Un punto $x \in S$ tale che $\nabla f(x) = 0$ viene detto *punto di sella* di f se non costituisce una soluzione di minimo o di massimo locale.

3.3.Dualita' per problemi di ottimizzazione non lineare

La teoria della dualità riveste un ruolo di grande rilievo nell'ottimizzazione matematica, in quanto offre una visione unificatrice che permette di stabilire un legame strutturale tra un problema di ottimizzazione assegnato, che chiameremo *primale* e un altro problema di ottimizzazione, denominato *duale*.

Prima di procedere con la trattazione della dualità estesa a problemi non lineari vincolati, illustreremo lo stesso esempio di modello di mix produttivo visto in precedenza, introducendo dunque la teoria della dualità nell'ottimizzazione lineare. Solo successivamente vedremo che la teoria della dualità può essere estesa a problemi di ottimizzazione non lineare mediante il ricorso ai moltiplicatori di Lagrange, per ottenere vantaggi teorici e computazionali *(Vercellis, 2008)*.

3.3.1.Duale del problema di mix produttivo

Consideriamo l'esempio di modello di mix produttivo introdotto in precedenza, relativo alla produzione dei due diversi formati di pasta.

Indichiamo come Primal l'azienda cui corrisponde la formulazione del seguente modello*primale*:

$$\max 2.4F + 1.8R$$

soggetto a:

$$F + R \leq 40$$

$$4F + 2R \leq 132$$

$$2F + 4R \leq 140$$

$$F, R \geq 0$$

Supponiamo che una seconda azienda, denominata Dual, realizzi i medesimi *n* prodotti della Primal (pasta nel formato *farfalle* e *rigatoni*), ritenendo di poter impiegare in maniera più efficiente le risorse disponibili presso la Primal. Per questa ragione l'azienda Dual intende stipulare un contratto di subfornitura con la Primal per l'utilizzo delle risorse necessarie a svolgere la propria attività produttiva. A tale scopo deve determinare il prezzo di acquisto unitario delle risorse per ciascuna delle fasi che costituiscono il ciclo produttivo. Indichiamo come $\lambda_M, \lambda_P, \lambda_C$ i tre prezzi unitari per il noleggio delle risorse di macinazione, produzione e confezione, rispettivamente.

L'azienda Dual giunge alla formulazione del seguente modello di ottimizzazione *lineare*, che rappresenta il problema *duale*:

$$\min 40\lambda_M + 132\lambda_P + 140\lambda_C$$

soggetto a:

$$\lambda_M + 4\lambda_P + 2\lambda_C \geq 24$$

$$\lambda_M + 2\lambda_P + 4\lambda_C \geq 18$$

$$\lambda_M, \lambda_P, \lambda_C \geq 0$$

La soluzione ottimale del primale è costituita da $(F, R) = (26{,}14)$, cui corrisponde il valore ottimo $z^* = 876$.

La soluzione ottimale del problema duale è data invece da $(\lambda_M, \lambda_P, \lambda_C) = (12{,}3{,}0)$, cui corrisponde un valore ottimo $d^* = 876$. Il costo minimo che la Dual deve sostenere per il noleggio delle risorse è quindi uguale al profitto massimo che la Primal otterrebbe in corrispondenza del mix produttivo ottimale.

I due problemi soddisfano le seguenti proprietà, che valgono in generale per ogni coppia di problemi primale e duale:

- un problema è di massimizzazione, mentre l'altro è di minimizzazione;
- i vincoli del problema corrispondono in modo biunivoco alle variabili del duale, mentre le variabili del primale corrispondono in modo biunivoco ai vincoli del duale;
- i coefficienti della funzione obiettivo del primale si trasformano nei termini noti del duale;
- i termini noti del primale si trasformano nei coefficienti della funzione obiettivo del duale.

La teoria della dualità per problemi di ottimizzazione non lineare estende la nozione di dualità appena descritta per i problemi di ottimizzazione lineare. Vedremo infatti che la definizione di duale introdotta qui di seguito conduce a risultati coincidenti con quelli ottenuti in precedenza per i problemi di ottimizzazione lineare.

3.3.2.Dualità per problemi non lineari vincolati

Per poter definire il duale del generico problema di ottimizzazione non lineare, è necessario dapprima definire la *funzione Lagrangiana* associata al problema stesso.

Ricordiamo che la formulazione del generico problema di ottimizzazione non lineare è la seguente:

$$f^* = \min\ f(x)$$

soggetto a:

$$g_i(x) \leq 0 \qquad i \in Q = \{1,2,\dots,q\}$$

$$h_i(x) = 0 \qquad i \in P = \{1,2,\dots,p\}$$

$$x \in S \subseteq \Re^n$$

La funzione Lagrangiana si basa sull'idea di introdurre i vincoli del problema nella funzione obiettivo, in modo da ricavare un problema di ottimizzazione non vincolata.

Definizione.Dati due vettori di coefficienti, denominati *moltiplicatori di Lagrange*, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q) \geq 0$ e $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$, associati rispettivamente ai vincoli di disuguaglianza $g_i(x) \leq 0$ e di uguaglianza $h_i(x) = 0$, si definisce la *funzione Lagrangiana*

$$L(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i h_i(x) = f(x) + \lambda' g(x) + \mu' h(x).$$

La funzione Lagrangianadipende sia dalle variabili originali x sia dai moltiplicatori λ e μ. Fissato il valore di questi ultimi, possiamo calcolare il minimo della funzione Lagrangiana rispetto a x, risolvendo quindi un problema di ottimizzazione non vincolata.

Definizione.La *funzione duale Lagrangiana*, o semplicemente *funzione duale*, del generico problema di ottimizzazione non lineare, è definita come

$$d(\lambda,\mu) = \min_{x \in S} f(x) + \lambda' g(x) + \mu' h(x).$$

In corrispondenza dei valori (λ,μ) per i quali il minimo non esiste, si pone $d(\lambda,\mu) = -\infty$, mentre si pone $d(\lambda,\mu) = \infty$ se la funzione duale non ammette soluzioni ammissibili.

Inoltre, si può assumere che la funzione duale Lagrangiana è concava.

Ricordando la formulazione del problema di ottimizzazione non lineare mediante la notazione matriciale:

$$f^* = \min f(x)$$

soggetto a:

$$g(x) \leq 0$$

$$h(x) = 0$$

$$x \in S \subseteq \Re^n,$$

che indicheremo come *primale*, viene detto *problema duale Lagrangiano*, o semplicemente *duale*, del problema di ottimizzazione *primale*, il seguente problema di ottimizzazione

$$d^* = \max_{\lambda \geq 0, \mu} d(\lambda, \mu).$$

Il duale è un problema di ottimizzazione concava, in quanto la funzione obiettivo è concava e la regione ammissibile è convessa.

Definizione.Diremo che una coppia di vettori $\bar{x} \in S$ e $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ soddisfa le condizioni di ottimalità globale se valgono le seguenti relazioni:

$$f(\bar{x}) + \bar{\lambda}' g(\bar{x}) + \bar{\mu}' h(\bar{x}) = \min_{x \in S} f(x) + \bar{\lambda}' g(x) + \bar{\mu}' h(x)$$

$$\bar{\lambda}' g(\bar{x}) = 0$$

$$g(\bar{x}) \leq 0$$

$$h(\bar{x}) = 0$$

$$\bar{\lambda} \geq 0.$$

La prima delle condizioni di ottimalità globale indica che $\bar{x}$ è una delle soluzioni che minimizzano la funzione Lagrangiana in corrispondenza dei moltiplicatori $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$. La terza e la quarta condizione indicano che la soluzione $\bar{x}$ è ammissibile per il primale, mentre la quinta esprime le condizioni di non negatività per i moltiplicatori Lagrangiani dei vincoli di disuguaglianza.

Il seguente teorema mostra che le condizioni di ottimalità globale sono sufficienti per garantire che la soluzione $\bar{x}$ sia ottimale per il primale.

Teorema.Se i vettori $\bar{x}$ e $\left(\bar{\lambda},\bar{\mu}\right)$ soddisfano le condizioni di ottimalità globale, allora $\bar{x}$ è una soluzione ottimale del problema primale.

Le condizioni di ottimalità globale non sono in generale necessarie per l'ottimalità, poiché vi sono problemi che possiedono soluzioni ottimali x^* in corrispondenza delle quali non esistono moltiplicatori di Lagrange (λ^*,μ^*) che soddisfano le condizioni di ottimalità globale.

3.4.Dualita' debole e forte

Vogliamo ora formulare due teoremi relativi alla relazione tra i valori ottimi di una coppia di problemi primale e duale.

Teorema (di dualità debole).

Per la coppia di problemi primale

$$f^* = \min\ f(x)$$

$$x \in S \subseteq \Re^n,$$

e duale

$$d^* = \max_{\lambda \geq 0, \mu} d(\lambda,\mu),$$

vale la disuguaglianza

$$d^* \leq f^*.$$

Dimostrazione.

Se il primale non ammette soluzioni ammissibili, si ha per definizione $f^* = \infty$ e $d^* = \infty$ e il teorema è verificato. Se il primale è inferiormente illimitato, si ha $f^* = -\infty$ e $d^* = -\infty$ per definizione, e quindi anche in questo caso il teorema è verificato.

Altrimenti, sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile del primale. Poiché $g(\bar{x}) \leq 0$ e $h(\bar{x}) = 0$, per ogni vettore di moltiplicatori Lagrangiani $\lambda \geq 0$ e μ vale la disuguaglianza

$$d(\lambda, \mu) \leq f(\bar{x}) + \lambda' g(\bar{x}) + \mu' h(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) = f^*.$$

Di conseguenza, si ha anche

$$d^* = \max_{\lambda \geq 0, \mu} d(\lambda, \mu) \leq f^*.$$

L'eventuale differenza $f^* - d^*$, non negativa per il teorema di dualità debole, viene denominata *scarto duale (duality gap)*.

Teorema (di dualità forte).

Se i vettori $\bar{x}$ e $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ soddisfano le condizioni di ottimalità globale, allora $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ è una soluzione ottimale del problema duale, e i valori ottimi del primale e del duale coincidono, ossia $d^* = f^*$.

Dimostrazione.

Ricordiamo le condizioni di ottimalità globale:

1. $f(\bar{x}) + \bar{\lambda}' g(\bar{x}) + \bar{\mu}' h(\bar{x}) = \min_{x \in S} f(x) + \bar{\lambda}' g(x) + \bar{\mu}' h(x)$
2. $\bar{\lambda}' g(\bar{x}) = 0$
3. $g(\bar{x}) \leq 0$
4. $h(\bar{x}) = 0$
5. $\bar{\lambda} \geq 0$

Per la condizione 5, il vettore $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ è una soluzione ammissibile per il duale, e quindi $d(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leq d^*$. Per le condizioni 1,2,4 si ha

$$d(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = f(\bar{x}) + \bar{\lambda}' g(\bar{x}) + \bar{\mu}' h(\bar{x}) = f(\bar{x}).$$

Il teorema prima esposto, afferma che il vettore $\bar{x}$ è una soluzione ammissibile e ottimale del primale, e quindi per il teorema di dualità debole $d^* \leq f^* = f(\bar{x})$.

Di conseguenza si ha

$$d^* \leq f^* = f(\bar{x}) = d(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leq d^*.$$

Pertanto $d^* = f^*$, e il vettore di moltiplicatori Lagrangiani $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ è ottimale per il duale.

La conseguenza immediata del teorema sulla dualità forte, è che possiamo ritenere le condizioni di ottimalità globale equivalenti alla relazione di dualità forte.

CONCLUSIONI

L'ottimizzazione prevede lo sviluppo di metodi e applicazioni che siano in grado di determinare una soluzione ottimale al problema considerato.

Tuttavia, essa non può limitarsi alla formulazione di modelli e algoritmi risolutivi. E' infatti necessario disporre anche di *teorie* approfondite che permettano di descrivere e caratterizzare le principali proprietà dei modelli di ottimizzazione, di collegare tra loro ambiti apparentemente distanti, di trasformare e scomporre problemi complessi in problemi più semplici.

La conoscenza degli aspetti teorici sopra descritti, è di fondamentale importanza per la risoluzione di problemi che si presentano nella gestione delle imprese o nella pubblica amministrazione.

La selezione di una decisione che rende minimo il costo o massimo il guadagno, infatti, è frutto dell'impiego di algoritmi risolutivi molto efficienti, sviluppati grazie alla conoscenza e all'utilizzo di concetti matematici basilari.

Nella maggior parte dei casi, le aziende si trovano a dover affrontare situazioni commerciali, economiche e logistiche di natura *non lineare*, come quelle affrontate a titolo esemplificativo in questo trattato.

L'ottimizzazione si occupa infatti di problemi formalizzabili come minimizzazione o massimizzazione di una funzione, in questo caso, non lineare.Conoscere le problematiche ed affrontarle con i corretti metodi e con le nozioni teoriche appropriate, può fare la differenza e creare un vantaggio competitivo anche nel mercato.

BIBLIOGRAFIA

- Sherali M., Shetty D., 1993, *Nonlinear Programming: Theory and applications*, New York, Wiley.

- Vercellis C., 2006, *Business intelligence: Modelli matematici e sistemi per le decisioni*, Milano, McGraw-Hill Companies.

- Vercellis C., 2008, *Ottimizzazione: Teoria, metodi, applicazioni*, Milano, McGraw-Hill Companies.