Indice

Introduzione

L'obbiettivo di questa tesi è di studiare alcuni aspetti della teoria di campo di Born-Infeld.

Nel 1933 uscirono sulla rivista *Nature* tre articoli di M. Born e L. Infeld relativi ad una nuova teoria per il campo elettromagnetico [1, 2, 3]. I risultati di questi articoli vennero raccolti e ampliati in un articolo dell'anno successivo pubblicato dalla *Royal Society* [4].

Questa teoria naque con l'idea di eliminare le divergenze associate alle cariche localizzate nell'elettromagnetismo classico introducendo un limite superiore al valore del campo, in modo simile a c come limite della velocità in relatività ristretta.

L'idea fondamentale è quella di sostituire l'azione lineare dell'elettromagnetismo classico con una non-lineare

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}_{BI} = \beta^2 \left(1 - \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + \beta^{-1}F_{\mu\nu})}\right)$$

dove β gioca il ruolo di limite superiore per il campo. Infatti nel limite per $\beta \to \infty$ ritroviamo la teoria classica.

In questo modo la teoria ha la caratteristica di dare una descrizione in cui l'energia totale del campo risulta essere finita e il campo regolare in ogni punto.

Nonostante queste buone proprietà la teoria fu abbandonata con la nascita dell'elettrodinamica quantistica. Solo vari decenni dopo venne ripresa in considerazione nell'ambito della teoria delle stringhe, risultando l'azione effettiva di bassa energia che descrive la dinamica del campo elettromagnetico sulle D-brane.

Ripercorreremo nei primi due capitoli gli aspetti fondamentali di questa teoria, soffermandoci principalmente su come venne sviluppata, sulla derivazione delle equazioni del moto e sulla sua interpretazione fisica.

Successivamente analizzeremo alcune proprietà di dualità di questa teoria. Vedremo infatti che essa risulta essere self-duale rispetto al gruppo $SL(2,\mathbb{Z})$, che incorpora come caso particolare lo scambio dei campi elettrico e magnetico.

Nel capitolo 4 cercheremo la soluzione del semplice caso elettrostatico e mostreremo in cosa essa si trasforma sotto $SL(2,\mathbb{Z})$ considerando due casi particolari.

Infine nell'ultimo capitolo estenderemo la discussione accoppiando la teoria di Born-Infeld a dei campi scalari associati alla dinamica della D-brana su cui il campo elettromagnetico di Born-Infeld vive. Studieremo l'analogo della soluzione di particella carica e vedremo che la teoria contiene in modo "naturale" aspetti tipici della teoria delle stringhe.

Capitolo 1

Campi di Born-Infeld

La teoria di campo di Born-Infeld nacque all'inizio degli anni trenta con due principali obbiettivi: tentare di eliminare le divergenze del campo elettromagnetico associate alla presenza di cariche puntiformi e costruire una teoria in cui le particelle cariche fossero un aspetto del campo stesso piuttosto che delle entità fisiche a se stanti [4].

In questa teoria assumiamo che la Lagrangiana del campo elettromagnetico classica[1]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2) \tag{1.1}$$

venga sostituita dall'espressione

$$\mathcal{L} = \beta^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2}(E^2 - B^2)}\right) \tag{1.2}$$

dove $\beta > 0$ è un parametro, delle dimensioni di $F^{\mu\nu}$,[2] che compare per ragioni dimensionali e che ha la funzione di valore limite del campo.

Questa scelta può essere giustificata notando che la teoria della relatività speciale, nonostante storicamente abbia avuto uno sviluppo diverso, può essere derivata imponendo un limite superiore (c) alla velocità di una particella libera.

Per fare questo si sostituisce la Lagrangiana classica $L = \frac{1}{2}mv^2$ con quella relativistica in modo che essa sia reale solo per valori $v < c$

$$L = mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) = b^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{b^2}mv^2}\right), \quad b^2 = mc^2 \tag{1.3}$$

è allora evidente la similarità con l'equazione (1.2).

[1] Useremo $c = 1$ se non quando esplicitamente indicato.
[2] $[\beta] = [F] = \mathrm{V m^{-2} s^2} = \mathrm{T}$.

Si vede subito che per $E^2 - B^2 \ll \beta^2$ la (1.2) si può approssimare alla Lagrangiana classica (1.1), esattamente come la (1.3) si riduce a $\frac{1}{2}mv^2$ per $v \ll c$.

Infine se sostituiamo la (1.1) con la sua forma covariante

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{1.4}$$

la (1.2) diventa

$$\mathcal{L} = \beta^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{2\beta^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}\right). \tag{1.5}$$

1.1 Postulato dell'invarianza dell'azione

L'argomento precedente sembra un buon punto di partenza ma non è certo sufficiente a definire una teoria fisica. Tenteremo allora di ricavare la (1.5) tramite dei principi generali sull'invarianza dell'azione sotto diffeomorfismi locali.

Consideriamo una generica azione

$$I = \int \mathcal{L}\, \mathrm{d}^4x \tag{1.6}$$

e postuliamo che debba essere invariante sotto diffeomorfismi. Dovremo dunque trovare una Lagrangiana $\mathcal{L}$ che soddisfi tale proprietà a meno di derivate totali.

Prendiamo in considerazione un generico campo tensoriale covariante $\mathcal{A}_{\mu\nu}$ senza assumere nessuna proprietà di simmetria e cerchiamo una Lagrangiana che sia funzione di tale campo e che renda (1.6) invariante; una risposta a questo quesito con un'espressione particolarmente semplice è[3]

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\det(\mathcal{A}_{\mu\nu})}$$

Il modo più semplice per includere in questa Lagrangiana la descrizione sia della metrica che del campo elettromagnetico è identificare la parte simmetrica di $\mathcal{A}_{\mu\nu}$

[3] Tale scelta risulta la più semplice se si richiede che l'azione sia ben definita per ogni scelta di coordinate. Infatti per un generico cambio di coordinate $x^\mu \to \tilde{x}^\mu$ si ha

$$\mathrm{d}^4x = \left|\det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}\right)\right| \mathrm{d}^4\tilde{x} \qquad \mathcal{A}_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial \tilde{x}^\sigma}{\partial x^\nu}\tilde{\mathcal{A}}_{\rho\sigma}$$

dunque

$$\mathrm{d}^4\tilde{x}\sqrt{-\det\left(\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{x})\right)} = \mathrm{d}^4x\sqrt{-\det\left(\mathcal{A}(x)\right)}$$

e quindi l'azione resta ben definita.

con il tensore metrico e la sua parte antisimmetrica col tensore elettromagnetico

$$\mathcal{A}_{(\mu\nu)} = g_{\mu\nu} \qquad \mathcal{A}_{[\mu\nu]} = \beta^{-1} F_{\mu\nu}$$

Nello sviluppo seguente porremo $\beta = 1$ per semplificare l'analisi.

Imponiamo ora che per piccoli valori di $F_{\mu\nu}$ la Lagrangiana nello spazio di Minkowski piano ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}{}^4$) debba ridursi a (1.4). Calcoliamo allora il determinante del primo termine

$$\begin{aligned} -\det(\eta_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}) &= -\det(\eta_{\mu\nu}) - \det(F_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= 1 - \det(F_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

per piccoli valori di $F_{\mu\nu}$ il suo determinante può essere trascurato

$$\sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})} \sim \sqrt{1 + \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}} \sim 1 + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

si vede allora che dobbiamo aggiungere un termine che cancelli il termine costante.

Possiamo allora scrivere la Lagrangiana in coordinate piane come

$$\mathcal{L} = 1 - \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})} = 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \det(F_{\mu\nu})}$$

e tornando ad una metrica generica abbiamo

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} - \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})} \tag{1.7}$$

dove possiamo sviluppare il determinante come[5]

$$\det(g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}) = g + \Phi(g_{\mu\nu}, F_{\mu\nu}) + \det(F_{\mu\nu}) = g \left(1 + \frac{\Phi}{g} + \frac{\det F_{\mu\nu}}{g}\right)$$

e si può vedere che

$$\frac{\Phi}{g} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu}$$

dunque la Lagrangiana prende la forma

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(1 - \sqrt{1 + 2P - S^2}\right) \tag{1.8}$$

[4] $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$

[5] Denotiamo $g = \det(g_{\mu\nu})$.

con

$$P = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{\Phi}{g}$$
$$S = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} {*F}^{\mu\nu} = \left(\frac{\det(F_{\mu\nu})}{-g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

dove abbiamo usato il duale di Hodge[6] del campo tensoriale F

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \qquad *F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \tag{1.9}$$

La (1.8) è la più semplice Lagrangiana che soddisfa il principio di covarianza sotto diffeomorfismi tale che l'azione sia ben definita per ogni scelta di coordinate, ma differisce dalla (1.2) e dalla (1.5) per il termine S^2. Vediamo però che tale termine è del quarto ordine nelle componenti di $F_{\mu\nu}$ per cui è rilevante solo in un intorno molto piccolo di sorgenti localizzate o per valori grandi del campo; ricordiamo infatti che ponendo $\beta = 1$ abbiamo imposto che $E^2 - B^2 < 1$.

Un'altra Lagrangiana che rispetta l'invarianza dell'azione è però

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} - \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}) + \det(F_{\mu\nu})} \tag{1.10}$$

ed essa è equivalente alla (1.2).

Reintroducendo infine il parametro β riotteniamo la (1.5).

1.2 Equazioni del moto e leggi di conservazione

Deriviamo ora le leggi del moto dalla Lagrangiana (1.7)[7] tramite il principio variazionale.

Come varibile dinamica prendiamo in considerazione il potenziale vettore A_μ definito da

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

[6]In generale in uno spazio n-dimensionale il duale di Hodge di un tensore a k indici completamente antisimmetrico $T^{\nu_1,\ldots,\nu_k}$ è definito come

$$*T_{\mu_1,\ldots,\mu_{n-k}} = \frac{1}{k!}\sqrt{|\det g_{\mu\nu}|}\, \varepsilon_{\mu_1,\ldots,\mu_{n-k},\nu_1,\ldots,\nu_k} T^{\nu_1,\ldots,\nu_k}$$

dove $g_{\mu\nu}$ indica come al solito il tensore metrico e $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ il simbolo di Levi-Civita.

[7]Usiamo questa Lagrangiana, piuttosto che la (1.10), poiché è per costruzione la più semplice e risulta essere la forma più corretta nello sviluppo dell'elettromagnetismo in teoria delle stringhe.

come soluzione all'identità di Bianchi $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0$ e che grazie alla (1.9) può essere riscritta come

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}{*F^{\mu\nu}}) = 0. \tag{1.11}$$

Vediamo allora che poiché la Lagrangiana $\mathcal{L}(A, \partial A)$ dipende solo dalle derivate del potenziale si ha che

$$\begin{aligned}0 = \delta I = \int \delta\mathcal{L}(\partial A)\,\mathrm{d}^4x = \int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\delta(\partial_\mu A_\nu)\,\mathrm{d}^4x = \\ = \int \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\delta A_\nu\right) - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\delta A_\nu\,\mathrm{d}^4x = -\int \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\delta A_\nu\,\mathrm{d}^4x\end{aligned}$$

calcoliamo quindi

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) = \\ &= -\frac{\sqrt{-g}}{2\sqrt{1+2P-S^2}}\left(2\frac{\partial P}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - 2S\frac{\partial S}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) = \\ &= -\frac{\sqrt{-g}(F^{\mu\nu} - S{*F^{\mu\nu}})}{\sqrt{1+2P-S^2}}\end{aligned}$$

e definiamo un nuovo campo tensoriale antisimmetrico $G^{\mu\nu}$ tale che

$${*G^{\mu\nu}} = -\frac{F^{\mu\nu} - S{*F^{\mu\nu}}}{\sqrt{1+2P-S^2}} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \tag{1.12}$$

grazie al quale la legge del moto risulta essere

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\,{*G^{\mu\nu}}) = 0 \tag{1.13}$$

La (1.11) e la (1.13) sono allora un insieme completo di equazioni del campo.

Verifichiamo ora la validità delle leggi di conservazione che derivano dall'invarianza della Lagrangiana rispetto a trasformazioni di Poincaré nel caso della metrica di Minkowski.

Per una generica trasformazione di Poincaré infinitesima

$$x'^\mu = (\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu)x^\nu + a^\mu$$

la variazione della Lagrangiana $\delta\mathcal{L}$ dovrà essere nulla per ogni $\omega^\mu{}_\nu$ e a^μ.

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \delta\left(1 - \sqrt{1+2P-S^2}\right) = \\ &= \mathcal{L}(\partial' A'(x')) - \mathcal{L}(\partial A'(x)) + \mathcal{L}(\partial A'(x)) - \mathcal{L}(\partial A(x)) = \\ &= \delta x^\mu\partial_\mu\mathcal{L} + \partial_\mu(\delta A_\nu){*G^{\mu\nu}} = \partial_\mu\left[\delta x^\mu\mathcal{L} + {*G^{\mu\nu}}\delta A_\nu\right] - \delta A_\nu(\partial_\mu{*G^{\mu\nu}})\end{aligned} \tag{1.14}$$

la variazione in forma del campo A_ν si può svilluppare come

$$\delta A_\nu = A'_\nu(x) - A'_\nu(x') + A'_\nu(x') - A_\nu(x) = -\delta x_\rho \partial^\rho A_\nu + \omega_\nu{}^\rho A_\rho$$

dunque il termine tra parentesi quadre nella (1.14) può essere scritto

$$\delta x^\mu \mathcal{L} + *G^{\mu\nu}\delta A_\nu = \delta x_\nu(\eta^{\mu\nu}\mathcal{L} - *G^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho) + *G^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}A^\rho$$

definiamo allora il tensore energia-impulso canonico come

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = *G^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{1.15}$$

e il tensore densità di momento angolare canonico come

$$\tilde{M}^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha \tilde{T}^{\mu\beta} - x^\beta \tilde{T}^{\mu\alpha} - *G^{\mu\alpha}A^\beta + *G^{\mu\beta}A^\alpha \tag{1.16}$$

quindi risulta

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \partial_\mu\left[\delta x_\nu(\eta^{\mu\nu}\mathcal{L} - *G^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho) + *G^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}A^\rho\right] - \delta A_\nu(\partial_\mu *G^{\mu\nu}) = \\ &= \partial_\mu\left[-(a_\nu + \omega_{\nu\rho}x^\rho)\tilde{T}^{\mu\nu} + *G^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}A^\rho\right] - \delta A_\nu(\partial_\mu *G^{\mu\nu}) = \\ &= -a_\nu\partial_\mu\tilde{T}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\partial_\mu\tilde{M}^{\mu\alpha\beta} - \delta A_\nu(\partial_\mu *G^{\mu\nu}) = 0\end{aligned}$$

dove l'ultimo termine è nullo per la (1.13) e dunque le condizioni per l'invarianza della Lagrangiana per trasformazioni di Poincarè sono

$$\partial_\mu\tilde{T}^{\mu\nu} = 0 \qquad \partial_\mu\tilde{M}^{\mu\alpha\beta} = 0$$

Il tensore energia-impulso appena ricavato non è simmetrico, ma può essere simmetrizzato sommando un termine $\partial_\rho\Lambda^{\rho\mu\nu}$ con $\Lambda^{\rho\mu\nu}$ antisimmetrico nei primi due termini in modo che

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu\tilde{T}^{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\rho\Lambda^{\rho\mu\nu} = 0$$

nel nostro caso risulta

$$\Lambda^{\rho\mu\nu} = *G^{\rho\mu}A^\nu$$

dunque la (1.15) diventa

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu} &= \tilde{T}^{\mu\nu} + \partial_\rho(*G^{\rho\mu}A^\nu) = *G^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} - *G^{\mu\rho}\partial_\rho A^\nu = \\ &= -*G^{\mu\rho}F_\rho{}^\nu - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}\end{aligned} \tag{1.17}$$

Per quanto riguarda il tensore densità di momento angolare si può fare un'operazione analoga sommando la divergenza del tensore

$$\Omega^{\rho\mu\alpha\beta} = x^\alpha\Lambda^{\rho\mu\beta} - x^\beta\Lambda^{\rho\mu\alpha}$$

per cui

$$M^{\mu\alpha\beta} = \tilde{M}^{\mu\alpha\beta} + \partial_\rho \Omega^{\rho\mu\alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha} \tag{1.18}$$

In conclusione le leggi di conservazione dovute all'invarianza per trasformazioni di Poincaré sono

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \qquad \partial_\mu M^{\mu\alpha\beta} = 0 \tag{1.19}$$

Capitolo 2

Interpretazione classica

2.1 Equazioni di Maxwell e campi D e H

Abbiamo introdotto il campo tensoriale $*G^{\mu\nu}$ che ha caratteristiche simili al tensore elettromagnetico. A quest'ultimo vengono associati i campi vettoriali elettrico $\mathbf{E}$ e magnetico $\mathbf{B}$ come

$$E^i = F^{i0} \qquad B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{jk}$$

Analogamente, al primo possiamo associare due campi vettoriali nello stesso modo a meno del segno.

$$D^i = -*G^{i0} \qquad H^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}*G^{jk}$$

Usando la definizione del campo tensoriale (1.12) possiamo anche scrivere $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$ in termini di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E} - S\mathbf{B}}{\sqrt{1 + 2P - S^2}} \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B} + S\mathbf{E}}{\sqrt{1 + 2P - S^2}}$$

Grazie alle equazioni di campo (1.11) e (1.13) è anche immediato ricavare le equazioni del campo in forma vettoriale[1]

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \end{aligned}$$

che sono formalmente identiche alle equazioni di Maxwell in una sostanza che ha costante dielettrica e suscettibilità magnetica come funzioni del campo, ma in

[1] Verranno usate le unità di Lorenz-Heaviside.

assenza di distribuzione di cariche e correnti. Identifichiamo allora **D** e **H** con i campi elettrico e magnetico in presenza di materia.

Possiamo calcolare anche le quantità che compaiono nel tensore energia-impulso

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= T^{00} = -{*G}^{0\rho}F_\rho{}^0 - \eta^{00}\mathcal{L} = D^iE^i - \mathcal{L} \\
\mathcal{S}^i &= T^{i0} = T^{0i} = -{*G}^{i\rho}F_\rho{}^0 - \eta^{i0}\mathcal{L} = -{*G}^{ij}F_j{}^0 = (E\times H)^i = (D\times B)^i \\
\mathcal{X}^{ij} &= T^{ij} = T^{ji} = -{*G}^{i\rho}F_\rho{}^j - \eta^{ij}\mathcal{L} = -{*G}^{i0}F_0{}^j - {*G}^{ik}F_k{}^j + \delta^{ij}\mathcal{L} = \\
&= -D^iE^j - B^iH^j + \delta^{ij}\left(\mathcal{L} + H^kB^k\right)
\end{aligned}$$

Come nel caso classico possiamo interpretare queste quantità rispettivamente come la densità di energia, il vettore di Poynting e il tensore degli sforzi di Maxwell.

La prima delle leggi di conservazione (1.19) si riscrive

$$\partial_t\mathcal{U} = -\partial_i\mathcal{S}^i \qquad \partial_t\mathcal{S}^j = -\partial_i\mathcal{X}^{ij}$$

Vediamo quindi che tali relazioni hanno la stessa forma che nel caso dell'elettromagnetismo classico solo che ai campi **E** e **B** vengono affiancati i nuovi campi **D** e **H** nelle definizioni delle entrate del tensore energia-impulso.

2.2 Interazione con la materia

Come abbiamo detto uno degli scopi principali della teoria di Born e Infeld è dare una descrizione unificata di campi e dell'interazione con la materia carica.

Poiché il campo ${*G}^{\mu\nu}$ è esprimibile in funzione del campo $F^{\mu\nu}$ possiamo riscrivere l'equazione (1.13) e definire una quadricorrente come divergenza di $F^{\mu\nu}$, chiamando allora $L = \mathcal{L}/\sqrt{-g}$ si ha

$$\begin{aligned}
\partial_\mu(\sqrt{-g}{*G}^{\mu\nu}) = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial P}F^{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial S}{*F}^{\mu\nu}\right) &= \\
= \partial_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})\frac{\partial L}{\partial P} + \partial_\mu\frac{\partial L}{\partial P}\sqrt{-g}F^{\mu\nu} &+ \\
+ \partial_\mu\frac{\partial L}{\partial S}\sqrt{-g}{*F}^{\mu\nu} + \partial_\mu(\sqrt{-g}{*F}^{\mu\nu})\frac{\partial L}{\partial S} &= 0
\end{aligned}$$

e poiché l'ultimo termine è nullo per la (1.11) otteniamo

$$\begin{aligned}
\partial_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) &= -\sqrt{-g}\left(\frac{\partial L}{\partial P}\right)^{-1}\left(\partial_\mu\frac{\partial L}{\partial P}F^{\mu\nu} + \partial_\mu\frac{\partial L}{\partial S}{*F}^{\mu\nu}\right) = \\
&= \sqrt{-g}j^\nu
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Vediamo che in tal modo questa quadricorrente non risulta come una data funzione delle coordinate spaziotemporali ma è funzione del campo, ed è immediato verificare che vale la legge di conservazione

$$\partial_\mu(\sqrt{-g} j^\mu) = 0 \tag{2.2}$$

Possiamo quindi interpretare questa quadricorrente come il quadrivettore

$$j^\mu = (\rho_p, \mathbf{j}_m)$$

le cui componenti sono la densità di carica di polarizzazione e la densità di corrente di magnetizzazione.

Nella teoria di Maxwell il tensore energia-impulso del campo elettromagnetico in presenza di materia non si conserva e necessita quindi di un altro tensore che sommato ad esso renda valida la legge di conservazione. Vediamo allora che sfruttando la definizione della quadricorrente che abbiamo dato si può riscrivere la divergenza del tensore energia-impulso classico

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{e.m.} = \partial_\mu \left(F^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) = \partial_\mu F^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu = j^\rho F_\rho{}^\nu \tag{2.3}$$

Dalla prima delle (1.19) si ha[2]

$$\begin{aligned} 0 = \partial_\mu T^{\mu\nu} &= \partial_\mu(-{*G}^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}) = -\partial_\mu {*G}^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu - {*G}^{\mu\rho}\partial_\mu F_\rho{}^\nu - \partial^\nu \mathcal{L} = \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P}(\partial_\mu F^{\mu\rho} - j^\rho) F_\rho{}^\nu - {*G}^{\mu\rho}\partial_\mu F_\rho{}^\nu - \partial^\nu \mathcal{L} \end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned} \partial^\nu \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} \partial^\nu(\partial_\alpha A_\beta) = \\ &= \frac{1}{2} {*G}^{\alpha\beta} \partial^\nu F_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} {*G}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha F_\beta{}^\nu + \partial_\beta F^\nu{}_\alpha) = -{*G}^{\alpha\beta}\partial_\alpha F_\beta{}^\nu \end{aligned}$$

dunque otteniamo l'espressione

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} \left(\partial_\mu F^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu - j^\rho F_\rho{}^\nu\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} \left(\partial_\mu T^{\mu\nu}_{e.m.} - j^\rho F_\rho{}^\nu\right) = 0$$

che implica la (2.3).

Si vede allora che la conservazione del tensore energia-impulso trovato contiene in se le informazioni su come varia il tensore energia-impulso della teoria di Maxwell in presenza di materia.

---

[2] Usiamo $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

Capitolo 3

Dualità

Vogliamo ora studiare un'importante proprietà di dualità della teoria di Born-Infeld [6, 7, 8, 10].

3.1 S-dualità

Cerchiamo di costruire una teoria equivalente in cui vengono scambiati i campi $F^{\mu\nu}$ e $G^{\mu\nu} = -*^2 G^{\mu\nu}$ mantenendo invariata la forma della Lagrangiana.

La trasformazione che eseguiremo sarà quindi della forma

$$\begin{pmatrix} \tilde{G} \\ \tilde{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Consideriamo ora una Lagrangiana più generale della (1.8), in cui includiamo un termine invariante che non contribuisce alle equazioni del moto poiché riconducibile ad una derivata totale. Tale termine avrà però effetto sulla definizione delle cariche che generano i campi.

Introduciamo anche due costanti: la costante di accoppiamento g, che sarà proporzionale alla carica e l'angolo $\theta = 2\pi\chi$, del quale vedremo l'utilità nel paragrafo successivo.

$$\mathcal{L}(F) = \beta^2 \left(1 - \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + (g\beta)^{-1} F_{\mu\nu})} \right) + \frac{1}{4}\chi F_{\mu\nu} {*F^{\mu\nu}} \tag{3.2}$$

Per ottenere una dualità della forma (3.1), rinunciamo alla condizione $\partial_\mu {*F^{\mu\nu}} = 0$ e aggiungiamo un termine che agirà come moltiplicatore di Lagrange

$$\mathcal{L}'(F, G) = \mathcal{L}(F) - \frac{1}{2} G^{\mu\nu} {*F_{\mu\nu}} \tag{3.3}$$

dove $\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0$ che implica $G_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}\tilde{A}_{\nu]}$. Variando rispetto a $\tilde{A}$ si ottiene di nuovo l'equazione

$$\partial_\mu {*F}^{\mu\nu} = 0$$

quindi si può definire nuovamente il potenziale A e sostituendo in (3.3) riotteniamo l'azione originale.

Invece, variando $\mathcal{L}'$ rispetto a F otteniamo

$$\delta_F \mathcal{L}' = \delta_F \mathcal{L} - \frac{1}{2} {*G}^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}$$

con

$$\begin{aligned} \delta_F \mathcal{L} &= \left(\frac{1}{2} \chi {*F}^{\mu\nu} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial F_{\mu\nu}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial F_{\mu\nu}} \right) \right) \delta F_{\mu\nu} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\chi {*F}^{\mu\nu} - g^{-2} \frac{F^{\mu\nu} - (g\beta)^{-2} S {*F}^{\mu\nu}}{\sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + (g\beta)^{-1} F_{\mu\nu})}} \right) \delta F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

dove P e S sono definiti in (1.8). Vediamo allora che se imponiamo $\delta_F \mathcal{L}' = 0$ otteniamo per ${*G}$

$$ {*G}^{\mu\nu} = \chi {*F}^{\mu\nu} - g^{-2} \frac{F^{\mu\nu} - (g\beta)^{-2} S {*F}^{\mu\nu}}{\sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + (g\beta)^{-1} F_{\mu\nu})}} \tag{3.4}$$

che generalizza la (1.12).

Per invertire quest'equazione conviene porsi in un sistema di riferimento locale in cui F abbia una struttura a blocchi[1]

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & 0 & 0 \\ -f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & -f_2 & 0 \end{pmatrix}$$

il che implica che anche ${*G}$ abbia la stessa struttura

$${*G}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & h_1 & 0 & 0 \\ -h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & -h_2 & 0 \end{pmatrix}$$

e in tal modo si ottiene che

$$\begin{aligned} h_1 &= \chi f_2 - g^{-2} \frac{f_1 + (g\beta)^{-2} f_1 f_2^2}{\sqrt{(1 - (g\beta)^{-2} f_1^2)(1 + (g\beta)^{-2} f_2^2)}} = \\ &= \chi f_2 - g^{-2} f_1 \sqrt{\frac{1 + (g\beta)^{-2} f_2^2}{1 - (g\beta)^{-2} f_1^2}} \end{aligned}$$

[1]Esiste sempre localmente una trasformazione di questo tipo.

e

$$h_2 = -\chi f_1 - g^{-2}\frac{f_2 - (g\beta)^{-2} f_1^2 f_2}{\sqrt{(1-(g\beta)^{-2}f_1^2)(1+(g\beta)^{-2}f_2^2)}} =$$
$$= -\chi f_1 - g^{-2} f_2 \sqrt{\frac{1-(g\beta)^{-2}f_1^2}{1+(g\beta)^{-2}f_2^2}}$$

Invertendo queste equazioni e sostituendo f_1 e f_2 in (3.3) otteniamo una Lagrangina duale

$$\tilde{\mathcal{L}}(G) = \beta^2\left(1 - \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + (\tilde{g}\beta)^{-1}G_{\mu\nu})}\right) + \frac{1}{4}\tilde{\chi} G_{\mu\nu} {*G^{\mu\nu}} \tag{3.5}$$

con

$$\tilde{\chi} = -\frac{\chi g^2}{g^{-2} + g^2\chi^2} \qquad \tilde{g}^{-2} = \frac{1}{g^{-2} + g^2\chi^2} \tag{3.6}$$

scrivendo però tali costanti come

$$\lambda = \chi + i g^{-2}$$

le relazioni tra le vecchie e le nuove costanti si può scrivere come

$$\tilde{\lambda} = -\frac{1}{\lambda}$$

Notiamo che le equazioni di campo per (3.2) e (3.5) sono le stesse

$$\partial_\mu {*F^{\mu\nu}} = 0 \qquad \partial_\mu {*G^{\mu\nu}} = 0$$

ma mentre per la prima Lagrangiana le equazioni per G sono quelle del moto e quelle per F sono l'identità di Bianchi, per la seconda il loro significato è invertito.

3.2 T-dualità

Si vede subito dalla (3.3) che se cambiamo il valore di θ le equazioni del moto non cambiano. Il caso $\tilde{\chi} = \chi + 1$ ($\tilde{\theta} = \theta + 2\pi$) corrisponde alla trasformazione

$$\begin{pmatrix} \tilde{G} \\ \tilde{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

e applicandola a (3.3) otteniamo

$$\tilde{\mathcal{L}}'(F,G) = \beta^2\left(1 - \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + (g\beta)^{-1}F_{\mu\nu})}\right) + \frac{1}{4}(\chi+1)F_{\mu\nu}{*F^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}G^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

Vediamo quindi che questo tipo di trasformazioni porta ad una teoria equivalente in cui varia il modo in cui G ed F sono definiti uno rispetto all'altro (3.4) , mantenendo comunque le equazioni del campo invariate.

Le trasformazioni (3.1) e (3.7) sono un insieme di generatori per il gruppo $SL(2,\mathbb{Z})$ quindi la teoria è duale sotto tale gruppo[2].

[2] In realtà risulta esserlo anche per il gruppo continuo $SL(2,\mathbb{R})$ ma l'equivalenza vale solo a livello classico (non quantistico) e non ci occupiamo di questo in questa sede.

Capitolo 4

Esempi di soluzioni

Ci proponiamo ora di descrivere due semplici casi per illustrare in modo pratico i risultati di questa teoria.

4.1 Soluzione nel caso elettrostatico

Consideriamo il caso di una particella statica di carica e in cui quindi $\mathbf{B} = \mathbf{H} = 0$ e le componenti dei campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{D}$ sono indipendenti dal tempo. Le equazioni di Maxwell sono allora

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = e\delta(x) \qquad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Data la simmetria del problema lavoriamo in coordinate sferiche e la prima diventa

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2 D_r) = e\delta(r)$$

con soluzione

$$D_r = \frac{e}{r^2}$$

la seconda invece dà

$$E_r = -\phi'(r)$$

e, grazie alla definizione di $\mathbf{D}$, possiamo scrivere anche

$$D_r = \frac{E_r}{\sqrt{1 - \beta^{-2} E_r^2}} = -\frac{\phi'(r)}{\sqrt{1 - \beta^{-2} \phi'^2(r)}}$$

quindi otteniamo un'equazione differenziale per il potenziale $\phi(r)$

$$\phi'(r) = -\frac{e}{r^2}\sqrt{1 - \beta^{-2}\phi'^2(r)}$$

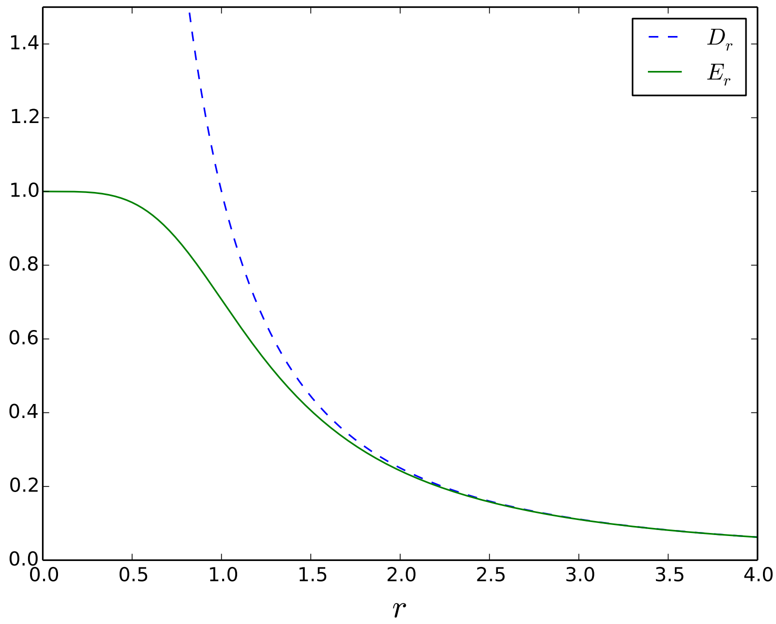

Figura 4.1: Campi E_r e D_r al variare della distanza dalla carica. Il valore della carica e e di r_0 sono stati presi unitari.

con soluzione

$$\phi(r) = \frac{e}{r_0} \int_{\frac{r}{r_0}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^4}}$$

dove $r_0 = \sqrt{e\beta^{-1}}$.

Vediamo allora che il potenziale ha un massimo per $r = 0$ in cui ha il valore di $\phi(0) \approx 1.8541 e r_0^{-1}$. Quindi anche se in $r = 0$ il campo $\mathbf{D}$ ha una singolarità, il potenziale ϕ e il campo $\mathbf{E}$ hanno valori finiti. Per confronto scriviamo le espressioni dei due campi

$$D_r = \frac{e}{r^2} \qquad E_r = \frac{e}{r_0^2\sqrt{1+(r/r_0)^4}} \tag{4.1}$$

e ne mostriamo l'andamento in figura 4.1.

Possiamo allora cosiderare la particella carica sia come sorgente puntiforme del campo $\mathbf{D}$ sia come una distribuzione spaziale di carica che genera il campo $\mathbf{E}$ e vediamo che in entrambi i casi la carica totale risulta la stessa

$$\int \nabla \cdot \mathbf{D} \, \mathrm{d}^3x = \int \nabla \cdot \mathbf{E} \, \mathrm{d}^3x = 4\pi e$$

Nel primo caso è ovvio, per $\mathbf{E}$ invece vediamo che per la (2.1) dev'essere

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2 E_r) = \rho$$

dove E_r come in (4.1) e dunque

$$\rho = \frac{2e}{r_0^2 r}\left(1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^4\right)^{-\frac{3}{2}}$$

vediamo allora che la densità di carica per $r \gg r_0$ è proporzionale a r^{-7}, invece per $r < r_0$ si ha $\rho \propto r^{-1}$ per cui integrando risulta

$$\int \rho \,\mathrm{d}^3x = 8\pi e \int_0^\infty \frac{y^2}{y(1+y^4)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}y = 4\pi e \qquad y = \frac{r}{r_0}$$

Sfruttando la semplicità del caso di un elettrone statico cerchiamo ora di determinare il valore della costante β compatibile con la teoria dell'elettrodinamica.

In questa situazione è facile verificare che l'unica componente del tensore energia impulso a non avere integrale di volume nullo è $\mathcal{U} = T^{00}$, vediamo allora che

$$\mathcal{U} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} - \mathcal{L} = \beta^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^{-2}\mathbf{E}^2}} - 1\right)$$

dunque integrando e usando la seconda delle (4.1) otteniamo l'energia totale

$$U = \int \mathcal{U} \,\mathrm{d}^3x = \frac{4\pi e^2}{r_0}\int_0^\infty \left(\sqrt{1+y^4} - y^2\right)\,\mathrm{d}y \approx 1.2361\frac{4\pi e^2}{r_0}$$

che però dev'essere anche uguale all'energia a riposo dell'elettrone, quindi tornando alle unità SI

$$U = mc^2 = 1.2361\frac{4\pi e^2}{\varepsilon_0 r_0}$$

dunque, ricordando che $r_0 = \sqrt{e/c\varepsilon_0\beta}$, troviamo

$$r_0 = 1.2361\frac{4\pi e^2}{\varepsilon_0 mc^2} = 5.48 \times 10^{-13}\ \mathrm{m}$$

$$\beta = \frac{e}{c\varepsilon_0 r_0^2} = 2 \times 10^8\ \mathrm{T}$$

L'enorme valore del parametro β sarebbe compatibile con il fatto che nella maggior parte dei casi si può usare la teoria di Maxwell. La teoria di Born-Infeld infatti devia da quest'ultima solo per distanze inferiori a r_0 o per campi dell'ordine di β.

Quindi, dati questi valori, una verifica sperimentale dei comportamenti non lineari predetti da questa teoria è proibitiva, infatti per distanze $r < r_0$ siamo già nel regime quantistico e campi dell'ordine di β non sono riproducibili in laboratorio.

4.2 Soluzione di monopolo magnetico

Vediamo ora come si presenta la precedente soluzione nella teoria S-duale. Ponendo $\tilde{\theta} = 0$ e riscalando il campo in modo da riassorbire $\tilde{g}$ otteniamo la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \beta^2 \left(1 - \sqrt{- \det(\eta_{\mu\nu} + \beta^{-1} G_{\mu\nu})} \right)$$

quindi la trasformazione ha l'effetto di scambiare

$$\mathbf{D} \longleftrightarrow \mathbf{B}$$
$$\mathbf{E} \longleftrightarrow \mathbf{H}$$

le equazioni (4.1) diventano dunque

$$B_r = \frac{b}{r^2} \qquad H_r = \frac{b}{r_m^2 \sqrt{1 + (r/r_m)^4}}$$

con $D = E = 0$ e $r_m = \sqrt{b\beta^{-1}}$, e descrivono un monopolo magnetico.

Seguendo lo stesso procedimento otteremo la carica del monopolo come

$$q_m = \int \rho_m \, \mathrm{d}^3 x = 4\pi b$$

dove ρ_m è definito in modo simile al caso elettrico come

$$\rho_m = \frac{2b}{r_m^2 r} \left(1 + \left(\frac{r}{r_m} \right)^4 \right)^{-\frac{3}{2}}$$

Come abbiamo detto nel capitolo 3 la costante g può essere vista come la carica. Vediamo allora che se nel caso elettrico $g = e$ allora per le relazioni (3.6) si ha

$$b = \tilde{g} = \frac{1}{g} = \frac{1}{e}$$

dunque un accoppiamento forte nella teoria "elettrica" equivale ad un accoppiamento debole in quella "magnetica" e viceversa.

4.3 Dione

Applicando ora la trasformazione di T-dualità (3.7) alla soluzione puramente magnetica si ottengono le equazioni

$$\nabla \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{D} = b\delta(x) - e\delta(x) \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = e\delta(x)$$
$$\nabla \times \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

che in coordinate sferiche hanno soluzione

$$D_r = \frac{e}{r^2} \qquad E_r = -\phi'_e(x)$$
$$B_r = \frac{b}{r^2} \qquad H_r = -\phi'_h(x)$$

Come per il caso elettrostatico calcoliamo ora l'espressione del campo E_r usando l'espressione di $\mathbf{D}$ in termini di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, otteniamo allora l'equazione

$$\frac{e}{r^2} = \frac{\phi'_e(x) + \beta^{-2}(b^2/r^4)\phi'_e(x)}{\sqrt{1 + \beta^{-2}(b^2/r^4 - \phi'_e(x)) - \beta^{-4}((b^2/r^4)\phi'_e(x))}}$$

che si risolve facilmente in

$$\phi'_e(x) = \frac{e}{\sqrt{r^4 + \beta^{-2}(e^2 + b^2)}}$$

allora, allo stesso modo delle (4.1), scriviamo

$$D_r = \frac{e}{r^2} \qquad E_r = \frac{e}{r_d^2\sqrt{1 + (r/r_d)^4}}$$

con $r_d = ((e^2 + b^2)/\beta^2)^{\frac{1}{4}}$. La soluzione per H_r si ottiene con lo stesso procedimento esprimendo $\mathbf{B}$ in termini di $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$.

Vediamo allora che abbiamo ottenuto che la soluzione di carica elettrica, che era diventata di monopolo magnetico nella teoria S-daule, nella teoria T-duale descrive una particella che possiede contemporaneamente sia carica elettrica che carica magnetica, chiamata dione.

Capitolo 5

Campi di Born-Infeld su D-brane

Con l'avvento della meccanica quantistica e in particolare dell'elettrodinamica quantistica e l'equazione di Dirac ci fu una perdita di interesse verso modelli classici per le particelle cariche, tra cui la teoria di Born-Infeld. Quest'ultima è stata però riconsiderata all'interno dell'ambito della teoria delle stringhe per lo studio dei campi elettromagnetici sulle D-brane. Le motivazione che ha portato alla scelta dei campi di Born-Infeld è stata la necessità di una teoria che ponesse un limite superiore ai campi, dunque una teoria non lineare, e l'assenza di alcuni problemi comuni ad altre teorie non lineari, come effetti di birifrangenza o onde d'urto.

In questa tesi non ci proponiamo di studiare esaustivamente la teoria di Born-Infeld sulle D-brane, ma di studiarne solo un particolare aspetto, cioè l'identificazione del punto di contatto di una stringa su di una D-brana con la sorgente di un campo di Born-Infeld su quest'ultima [13, 14, 15, 16].

Nella seguente discussione indicheremo con lettere greche gli indici che variano da 0 a p, con lettere latine minuscole quelli che variano da $p+1$ a d e con lettere latine maiuscole quelli da 0 a d.

5.1 Sorgente di campo di Born-Infeld su una D-brana

Una Dp-brana[1] in uno spazio-tempo di Minkowski $d+1$-dimensionale è descrivibile tramite un embedding

$$x^\mu \mapsto X^M(x^\mu)$$

e se essa è libera la sua dinamica può essere ricavata dall'azione di Nabu-Goto.

[1]La lettera p indica la dimensione spaziale della D-brana ed è soggetta a $0 \leq p \leq d$ dove d indica il numero delle dimensioni spaziali dello spazio-tempo. Il valore di d è 9 in tutte le teorie supersimmetriche e 25 nella teoria delle stringhe bosoniche.

Introduciamo ora sulla D-brana un campo di Born-Infeld definito da un potenziale vettore $A_\nu(x^\mu)$, le cui componenti sono funzioni delle $p+1$ coordinate del volume di universo.

Le equazioni del moto possono essere ottenute allora dall'azione[2]

$$I = -T_p \int \mathrm{d}^{p+1}x \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + \beta^{-1}F_{\mu\nu})} \tag{5.1}$$

dove $g_{\mu\nu}$ è il pullback della metrica di Minkowski[3] sul volume di universo della Dp-brana.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{MN}\partial_\mu X^M \partial_\nu X^N$$

Quest'azione è invariante sotto diffeomorfismi sul volume di universo. Per fissare questa libertà adottiamo il gauge statico per cui le coordinate del volume di universo sono identificate con le prime $p+1$ coordinate dello spazio-tempo

$$X^M = x^\mu \quad \text{per} \quad M = 0, \ldots, p$$

e indichiamo con

$$X^M = y^m \quad \text{per} \quad M = p+1, \ldots, d$$

le coordinate trasverse.

Possiamo allora riscrivere il tensore metrico come

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\gamma\delta}\partial_\mu X^\gamma \partial_\nu X^\delta + \eta_{mn}\partial_\mu X^m \partial_\nu X^n = \eta_{\mu\nu} + \eta_{mn}\partial_\mu y^m \partial_\nu y^n$$

e otteniamo che la (5.1) diventa

$$I = -T_p \int \mathrm{d}^{p+1}x \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + \eta_{mn}\partial_\mu y^m \partial_\nu y^n + \beta^{-1}F_{\mu\nu})} \tag{5.2}$$

Notiamo che rispetto alla Lagrangiana tipica del campo di Born-Infeld, qui abbiamo usato la costante moltiplicativa T_p, che rappresenta la tensione della Dp-brana, ed eliminato il termine additivo costante. Originariamente quest'ultimo serviva ad eliminare i termini costanti che provenivano dallo sviluppo della radice, ma nel nostro caso essi serviranno a rappresentare il contributo all'azione dovuto all'energia a riposo della Dp-brana

$$I_b = -T_p \int \mathrm{d}^{p+1}x$$

[2]Useremo unità di misura naturali per cui porremo $c = \hbar = 1$.

[3]In questo capitolo per comodità porremo $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$.

Consideriamo ora il caso in cui il campo magnetico sia nullo e ci sia solo una coordinata trasversa eccitata. In questo modo l'azione sul volume di universo (5.2) si riduce a

$$
\begin{aligned}
I &= -T_p \int \mathrm{d}^{p+1}x \sqrt{(1-\beta^{-2}F^{i0}F_{i0})(1+\partial_i y \partial^i y) + (\beta^{-1}F^{i0}\partial_i y)^2 - \partial_0 y} = \\
&= -T_p \int \mathrm{d}^{p+1}x \sqrt{(1-\beta^{-2}E^2)(1+|\nabla y|^2) + (\beta^{-1}\mathbf{E}\cdot\nabla y)^2 - \dot{y}^2}
\end{aligned}
$$

Notiamo quindi che l'equazione del moto che segue dalla variazione delle componenti spaziali del potenziale vettore A^i è soddisfatta se i campi sono indipendenti dal tempo. Assumiamo dunque che i campi siano indipendenti dal tempo e poniamo $A^i = 0$, il che è consistente con il fatto che non ci siano campi magnetici.

Essendo allora $A^\mu = (\phi, 0, \ldots, 0)$ possiamo riscrivere il campo elettrico come

$$
E^i = \partial^i A^0 = (\nabla\phi)^i
$$

e otteniamo l'azione

$$
I = -T_p \int \mathrm{d}^{p+1}x \sqrt{(1-\beta^{-2}|\nabla\phi|^2)(1+|\nabla y|^2) + (\beta^{-1}\nabla\phi\cdot\nabla y)^2}
$$

Deriviamo ora le equazioni del moto che provegono dalle variazioni $\delta\phi$ e δy. Rispettivamente otteniamo

$$
\nabla \cdot \frac{-\nabla\tilde{\phi}(1+|\nabla y|^2) + (\nabla\tilde{\phi}\cdot\nabla y)\nabla y}{\sqrt{(1-|\nabla\tilde{\phi}|^2)(1+|\nabla y|^2) + (\nabla\tilde{\phi}\cdot\nabla y)^2}} = 0 \tag{5.3}
$$

e

$$
\nabla \cdot \frac{\nabla y(1-|\nabla\tilde{\phi}|^2) + (\nabla\tilde{\phi}\cdot\nabla y)\nabla\tilde{\phi}}{\sqrt{(1-|\nabla\tilde{\phi}|^2)(1+|\nabla y|^2) + (\nabla\tilde{\phi}\cdot\nabla y)^2}} = 0 \tag{5.4}
$$

dove per comodità abbiamo posto $\tilde{\phi} = \beta^{-1}\phi = \beta^{-1}A^0$.

Entrambe le equazioni (5.3) e (5.4) sono soddisfatte se

$$
\beta^{-1}\mathbf{E} = \nabla\tilde{\phi} = \pm\nabla y \qquad \nabla^2\tilde{\phi} = \nabla^2 y = 0 \tag{5.5}
$$

e in questo caso, dato che

$$
D^i = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i A_0)} = T_p\beta^{-1}\frac{\partial^i\tilde{\phi}(1+|\nabla y|^2) - (\nabla\tilde{\phi}\cdot\nabla y)\partial^i y}{\sqrt{(1-|\nabla\tilde{\phi}|^2)(1+|\nabla y|^2) + (\nabla\tilde{\phi}\cdot\nabla y)^2}}
$$

abbiamo

$$
\mathbf{D} = T_p\beta^{-2}\mathbf{E}
$$

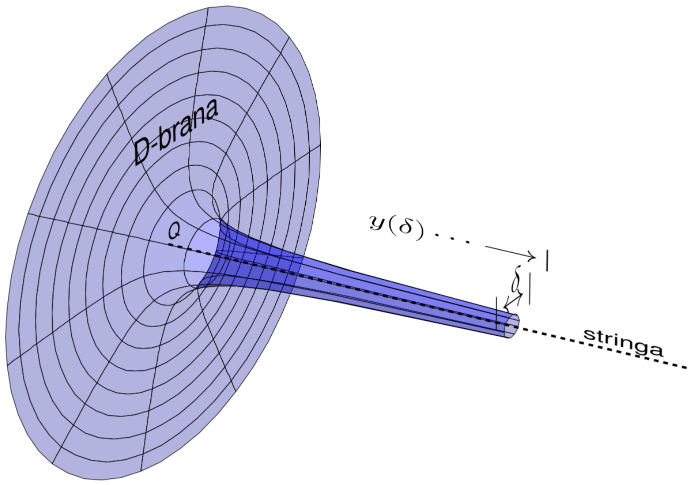

Figura 5.1: stringa vincolata ad una brana

e l'energia del sistema è data allora da

$$U = \int \mathrm{d}^p x (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} - \mathcal{L}) = T_p \int \mathrm{d}^p x (1 + \beta^{-2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \tag{5.6}$$

Poiché T_p è la tensione vediamo che il primo termine della (5.6) è l'energia a riposo della Dp-brana. Il secondo termine invece rappresenta, come vedremo, l'energia associata con una stringa vincolata alla brana.

La soluzione per una sorgente puntiforme per $\mathbf{D}$ (e per $\mathbf{E}$) avrà simmetria sferica, dunque per le (5.5) sarà così anche per y, che quindi avrà la forma $y(r)$, dove r è la distanza radiale dalla carica. Assumiamo anche che $p \geq 3$ in modo che $y(r)$ vada a zero all'infinito.

Vediamo che, poichè $E(r) \sim 1/r^{p-1}$, il secondo termine nella (5.6) diverge, infatti

$$\begin{aligned} U_s &= T_p \int \mathrm{d}^p x \beta^{-2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \\ &= T_p \int \mathrm{d}r \mathrm{d}\Omega_{p-1} r^{p-1} \beta^{-2} E_r^2 \sim T_p \beta^{-2} \int \mathrm{d}\Omega_{p-1} \int_0^\infty \mathrm{d}r \frac{1}{r^{p-1}} = \infty \end{aligned}$$

Cerchiamo allora di interpretare questa divergenza. Consideriamo quindi una palla centrata sulla carica di raggio δ, $B^p(\delta)$, e valutiamo l'integrale sul suo complementare

$$U_s(\delta) = T_p \int_{r>\delta} \mathrm{d}^p x \nabla y \cdot \nabla y = T_p \int_{r>\delta} \mathrm{d}^p x \nabla \cdot (y \nabla y) = -T_p |y(\delta)| \Phi_{S^{p-1}(\delta)}(\beta^{-1}\mathbf{E})$$

dove $\Phi_{S^{p-1}(\delta)}(\beta^{-1}\mathbf{E})$ è il flusso di $\beta^{-1}\mathbf{E}$ attraverso la sfera $(p-1)$-dimensionale di raggio δ, ed è indipendente da δ.

Vediamo allora che scegliendo un valore per il flusso elettrico tale che

$$-T_p \Phi_{S^{p-1}(\delta)}(\beta^{-1}\mathbf{E}) = (2\pi\alpha')^{-1}$$

otteniamo

$$U_s(\delta) = (2\pi\alpha')^{-1} |y(\delta)| = T_s |y(\delta)|$$

dove abbiamo definito $T_s = (2\pi\alpha')^{-1}$, con α' costante delle dimensioni di una lunghezza al quadrato.

Vediamo allora che, poiché $y(\delta)$ è la posizione della brana lungo la direzione trasversa y, la brana si è deformata dando luogo ad uno spike di lunghezza infinita sulla cui base troviamo la carica.

Si può quindi interpretare questo spike (detto BIone) come una stringa semi-infinita di tensione T_s, che termina sulla Dp-brana producendo una carica elettrica. Tale "stringa" risulta identificabile con la così detta stringa fondamentale, la cui dinamica (quantistica) fornisce la descrizione perturbativa della teoria delle stringhe.

Vediamo quindi che, in un certo senso, la teoria di Born-Infeld sulla Dp-brana "conosce" il fatto che essa è parte della teoria delle stringhe.

Bibliografia

[1] M. Born, *Modified field equations with a finite radius of the electron.* Nature 132, 282, (1933).

[2] M. Born, L. Infeld, *Electromagnetic mass.* Nature 132, 970, (1933).

[3] M. Born, L.Infeld, *Foundation of the new field theory.* Nature 132, 1004, (1933).

[4] M. Born, L. Infeld, *Foundation of the new field theory.* Proc. Roy. Soc. A144, 425, (1934).

[5] C. Bunster, M. Henneaux, $Sp(2n, \mathbb{R})$ *electric-magnetic duality as off-shell symmetry of interacting electromagnetic and scalar fields.* arXiv:1101.6064v2, (2011).

[6] M. Agangagic, J. Park, C. Popescu, J.H. Schwarz, *Dual D-brane Actions.* Nucl. Phys. B496, 215-230, (1997).

[7] A.A. Tseytlin, *Self-duality of Born-Infeld action and Dirichlet 3-brane of type IIB superstring theory.* Nucl. Phys. B469, 51-67, (1996).

[8] D. Berman, $SL(2, \mathbb{Z})$ *duality of Born-Infeld theory from non-linear self-dual electrodynamics in 6 dimensions.* Phys. Lett. B409, 153-159, (1997).

[9] G.W. Gibbons, D.A. Rasheed, *Electric-magnetic duality rotations in non-linear electrodynamics.* Nucl. Phys. B454, 185-206, (1995).

[10] G.W. Gibbons, D.A. Rasheed, $SL(2, \mathbb{R})$ *invariance of non-linear electrodynamics coupled to an axion and a dilaton.* Phys. Lett. B365, 46-50, (1996).

[11] M.K. Gaillard, B. Zumino, *Nonlinear electromagnetic self-duality and legendre transformations.* arXiv:hep-th/9712103v1, (1997).

[12] H. Kim, *Genuine dyons in Born-Infeld electrodynamics*. Phys. Rev. D61, (2000).

[13] G.W. Gibbons, *Born-Infeld particles and Dirichlet p-branes*. Nucl. Phys. B514, 603-639, (1998).

[14] C.G. Callan Jr., J.M. Maldacena, *Brane dynamics from the Born-Infeld action*. Nucl. Phys. B513, 198-212, (1998).

[15] B. Zwiebach, *A first course in string theory*. Cambridge University Press, Cambridge, (2004).

[16] C.V. Johnson, *D-brane primer*. arXiv:hep-th/0007170v3, (2000).