Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"
(Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DEI))

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Gruppi senza torsione con tutti i sottogruppi subnormali

Candidato:
Benedetta Turato
Matricola 1203098

Relatore:
Prof.ssa Eloisa Michela Detomi

Padova, 26 Febbraio 2021

Indice

Introduzione

Il concetto di subnormalità di un gruppo deriva da quello di normalità, dato che la normalità non è una relazione transitiva nell'insieme dei sottogruppi di un gruppo. Dunque la subnormalità è stata definita come la chiusura transitiva della relazione di normalità. Come ricorderemo anche in seguito, un sottogruppo H di un gruppo G è subnormale in G se esiste una catena finita di sottogruppi

$$H = H_0 \leq H_1 \leq ... \leq H_{d-1} \leq H_d = G$$

tale che H_i è normale in H_{i+1}, per ogni $0 \leq i \leq d-1$. Come si riporta in [2], per Philip Hall e Karl Gruenberg, l'interesse per l'argomento è dovuto al fatto che "i sottogruppi subnormali sono considerati lo "scheletro" di un gruppo, ovvero forniscono la cornice per tutte le altre strutture del gruppo". L'influenza sulla struttura di un gruppo data dalla presenza o meno di sottogruppi subnormali è particolarmente evidente nei gruppi finiti. Infatti in questo caso i sottogruppi subnormali sono esattamente i sottogruppi che si trovano come termini della serie di composizione del gruppo. Inoltre dai Teoremi di Sylow si deriva che se un gruppo G è finito allora esso possiede tutti i sottogruppi subnormali (ovvero è un $\mathcal{N}_1$-gruppo) se, e solo se, esso è nilpotente; dove ricordiamo che il gruppo G è nilpotente se esiste una serie finita di sottogruppi

$$\{1_G\} = H_0 \leq H_1 \leq ... \leq H_{c-1} \leq H_c = G$$

tale che H_i è normale in H_{i+1} e $H_{i+1}/H_i \leq Z(G/H_i)$, per ogni $0 \leq i \leq c-1$. Nel caso di gruppi infiniti la situazione è più complicata; basti pensare che il teorema che afferma che in un gruppo finito il sottogruppo generato da due sottogruppi subnormali è anch'esso subnormale, non vale nel caso infinito, come dimostrò H. Zassenhaus. Nel caso infinito, anche la caratterizzazione dei gruppi $\mathcal{N}_1$ sopra citata non vale, come mostrano i gruppi di Heineken-Mohamed ($\mathcal{N}_1$-gruppi non nilpotenti).
Tra i maggiori esperti in materia di $\mathcal{N}_1$-gruppi dell'ultimo secolo vi sono J. E. Roseblede, W. Möhres, C. Casolo e H. Smith. Infatti, a Roseblade è dovuto

il primo risultato di carattere generale sugli $\mathcal{N}_1$-gruppi, ovvero in [6] provò che se un $\mathcal{N}_1$-gruppo ha difetto di subnormalità limitato allora è nilpotente. Come vedremo più in dettaglio nel terzo capitolo, anche Möhres contribuì notevolmente alla ricerca sulla Teoria degli $\mathcal{N}_1$-gruppi, provandone la risolubilità.

Tuttavia il risultato che fu forse un punto di svolta per la ricerca sugli $\mathcal{N}_1$-gruppi, va attribuito a Carlo Casolo e Howard Smith; infatti, nel 2000, entrambi, indipendentemente l'uno dall'altro, riuscirono a dare una dimostrazione del fatto che *i gruppi senza torsione con tutti i sottogruppi subnormali sono nilpotenti*. Smith anticipò Casolo di qualche mese, per tale motivo fu dato a questo risultato il nome di Teorema di Smith. Tuttavia la dimostrazione proposta da Casolo risulta essere piuttosto elegante e meno complicata rispetto a quella data da Smith. Infatti nel dimostrare il teorema, Casolo ricorse alle tecniche e alle competenze che aveva acquisito nei precedenti anni di ricera, risultati che furono tra l'altro essenziali a Möhres per dimostrare l'omonimo teorema sopra enunciato. Questo risultato è stato un grande passo in avanti nella Teoria dei gruppi con tutti i sottogruppi subnormali poichè permise a Casolo stesso di giungere ad importanti caratterizzazioni di questi gruppi in breve tempo.

Data l'importanza di questo risultato, abbiamo dedicato questa tesi a riportarne la dimostrazione data da Casolo. Abbiamo preferito la dimostrazione proposta da Casolo per la raffinatezza degli argomenti utilizzati; infatti tratto decisivo della sua dimostrazione è l'utilizzo della Teoria degli isolatori di P. Hall.

Per avere una trattazione il più completa possibile, nel primo capitolo inseriremo brevemente tutti i risultati di teoria dei gruppi necessari per comprendere l'argomento e che non si è soliti affrontare nei corsi universitari base di algebra. Successivamente esporremo le proprietà principali della classe di gruppi $\mathcal{N}_1$, soffermandoci brevemente sul Teorema di Möhres.

Nel terzo capitolo, proveremo alcuni risultati fondamentali per i gruppi privi di torsione. Infatti, supponendone la nilpotenza o presupponendo che siano gruppi di Engel, riusciremo a dimostrare che le loro serie centrali ascendenti godono di particolari proprietà. In seguito si studierà lo strumento più utilizzato nelle dimostrazioni di Casolo e di Möhres, ovvero gli isolatori. É proprio nell'uso degli isolatori che risiede la svolta decisiva della dimostrazione di Casolo rispetto a quella di Smith, infatti, come vedremo, gli isolatori conservano svariate proprietà, tra cui quella di nilpotenza e subnormalità (Teorema di P. Hall), dei sottogruppi di gruppi localmente nilpotenti; oltre a permetterci di costruire gruppi senza torsione e partire da un qualsiasi gruppo nilpotente. In particolare, proveremo che, nel caso di gruppi senza torsione, valgono risultati molto più forti rispetto al caso generale.

Nell'ultimo capitolo convoglierà tutto quanto trovato in precedenza al fine di provare il Teorema di Smith. Seguendo sempre il percorso tracciato da Casolo, dapprima dimostreremo il teorema nel caso in cui tutti i sottogruppi subnormali hanno difetto limitato (Teorema di Roseblade nel caso di gruppi senza torsione) e successivamente proveremo la risolubilità dei gruppi senza torsione in $\mathcal{N}_1$. Solamente alla fine saremo in possesso di tutti gli strumenti necessari per dimostrare la nilpotenza dei gruppi senza torsione e con tutti i sottogruppi subnormali.

Capitolo 1

Prerequisiti

In questo primo capitolo tratteremo le basi della Teoria dei gruppi localmente nilpotenti; daremo tutte le definizioni ed i risultati necessari per rendere la trattazione il più autoconsistente possibile. Non essendo strettamente necessarie, in questa prima parte non includeremo le dimostrazioni di quanto enunciato. Partiremo col ridefinire i commutatori, sottolineeremo la necessità di questo strumento per poter lavorare con facilità con i gruppi nilpotenti e risolubili, nonché con i sottogruppi subnormali, evidenziando i legami che intercorrono tra questi concetti.
Successivamente ricorderemo la definizione generale di serie di sottogruppi col fine di trovare una sorta di generalizzazione del concetto di nilpotenza di un gruppo, a partire dalle serie centrali ascendente e discendente estese. Tratteremo brevemente anche della definizione di classe di gruppi, soffermandoci sul concetto di generalizzazione di una classe, soprattutto per quanto riguarda la classe dei gruppi nilpotenti.
Infine dedicheremo un paragrafo proprio ai gruppi nilpotenti e alle loro generalizzazioni, per riportare le proprietà ed i risultati più importanti che li vedono protagonisti.

1.1 Commutatori

A partire dal concetto di commutatore, possiamo costruire ricorsivamente il cosiddetto *commutatore semplice di peso n*.

Definizione 1.1.1. *Dato un gruppo G e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ suoi elementi, si definisce il commutatore (semplice) di peso n come*

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n].$$

Ricordando che il gruppo commutatore di due sottoinsiemi X, Y di G si definisce come

$$[X, Y] = \langle\, [x, y] \mid x \in X, y \in Y \rangle,$$

si può costruire in modo analogo il *gruppo commutatore (semplice)* di peso n di $X_1, \ldots, X_n$ sottoinsiemi di G. In particolare, nel testo indicheremo con $[x,_n y]$ e con $[X,_n Y]$ il commutatore ed il gruppo commutatore di peso n cosiffatti $[x, \underbrace{y, y, \ldots, y}_{n-volte}]$ e $[X, \underbrace{Y, Y, \ldots, Y}_{n-volte}]$.

1.1.1 Commutatori e risolubilità

I commutatori si legano strettamente al concetto di subnormalità, di risolubilità e di nilpotenza. Infatti tramite i commutatori, per ogni gruppo G è possibile costruirne differenti serie, le cui proprietà riflettono il fatto che il gruppo in questione sia subnormale, nilpotente o risolubile.
Cominciamo trattando il legame tra i commutatori e la risolubilità di un qualsiasi gruppo.

Definizione 1.1.2. *Un gruppo G si dice risolubile se esiste una serie finita di sottogruppi*

$$\{1_G\} = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_{c-1} \leq H_c = G$$

tale che $H_i \trianglelefteq H_{i+1}$ *, per ogni* $0 \leq i \leq c-1$*, e che abbia tutti i fattori* H_{i+1}/H_i *abeliani.*

Notiamo che tramite i commutatori è sempre possibile costruire per ogni gruppo G la *serie derivata*, i cui termini sono i $(G^{(d)})_{d\in\mathbb{N}}$, dove $G^{(d)}$ è detto il derivato d-esimo di G. I derivati si definiscono induttivamente, per ogni $1 \leq n \in \mathbb{N}$, come

$$G^{(n+1)} = (G^{(n)})' = [G^{(n)}, G^{(n)}].$$

É dunque possibile dimostrare che il gruppo G è risolubile se, e solo se, questa serie è finita; ovvero se esiste un n tale che $G^{(n)} = 1$. Ricordiamo anche che il più piccolo intero positivo per cui ciò accade è detto la *lunghezza derivata* di G.

1.1.2 Commutatori e nilpotenza

Definizione 1.1.3. *Un gruppo G si dice nilpotente se esiste una serie finita di sottogruppi*

$$\{1_G\} = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_{c-1} \leq H_c = G$$

tale che $H_i \trianglelefteq H_{i+1}$ *e* $H_{i+1}/H_i \leq Z(G/H_i)$, *per ogni* $0 \leq i \leq c-1$.

Come è ben noto, le serie che soddisfano le condizioni di questa definizione (senza necessariamente essere finite) sono dette *serie centrali*. Si possono identificare le serie centrali anche tramite i commutatori, infatti vale

$$[G, H_{i+1}] \leq H_i \qquad \Leftrightarrow \qquad H_{i+1}/H_i \leq Z(G/H_i). \tag{1.1}$$

Per un gruppo qualsiasi G è sempre possibile costruire due particolari serie centrali $(\zeta_j(G))_{j\in\mathbb{N}}$ e $(\gamma_i(G))_{i\in\mathbb{N}}$, la prima detta ascendente e l'altra discendente.
La serie ascendente ha come fattori i sottogruppi $\zeta_j(G)$ di G, detto j-esimo centralizzante di G, ed è definita ricorsivamente, per ogni $j \geq 2$, come

$$\zeta_0(G) = 1, \quad \zeta_1(G) = Z(G), \quad \zeta_j(G)/\zeta_{j-1}(G) = Z(G/\zeta_{j-1}(G)). \tag{1.2}$$

La serie discendente invece si definisce sempre induttivamente ma tramite i commutatori, in questo modo

$$\gamma_1(G) = G, \qquad \gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G] \quad \forall i \geq 1. \tag{1.3}$$

Osserviamo che quanto affermato in (1.1), nel caso della serie discendente di G, coincide con la sua definizione. D'altro canto se viene applicato alla serie centrale ascendente, si trova che $[G, \zeta_j(G)] \leq \zeta_{j-1}(G)$.
Il commutatore permette anche di creare un legame tra le due serie appena costruite.

Lemma 1.1.4. *Dato un gruppo* G*, allora per ogni* $1 \leq n \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$[\gamma_n(G), \zeta_n(G)] = 1.$$

I gruppi nilpotenti si caratterizzano per il fatto di avere queste due serie centrali finite; in altre parole il gruppo G è nilpotente se, e solo se, esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $\gamma_{n+1}(G) = [G,_n G] = 1$ e $\zeta_n(G) = 1$. Ricordiamo che il più piccolo n per cui accade questo fatto è detto la *classe di nilpotenza* di G.

1.1.3 Commutatori e subnormalità

Innanzitutto ricordiamo la definizione di sottogruppo subnormale.

Definizione 1.1.5. *Dato un gruppo* G *e un suo sottogruppo* H*, si dice che* H *è subnormale in* G *se esiste una catena di sottogruppi*

$$H = H_0 \leq H_1 \leq ... \leq H_{d-1} \leq H_d = G$$

tale che $H_i \trianglelefteq H_{i+1}$, *per ogni* $0 \leq i \leq d-1$.

Inoltre, la lunghezza minima d di una tale serie è detta *difetto di subnormalità* di H in G e si scrive $H \lhd\lhd^d G$. Ricordiamo che per ogni $H \leq G$ esiste la serie delle chiusure normali $\left(H^{G,n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ di H in G definita ricorsivamente da

$$H^{G,0} = G, \qquad H^{G,1} = H^G \quad \text{e} \quad H^{G,n+1} = H^{H^{G,n}}.$$

In particolare si può dimostrare che $H \lhd\lhd^d G$ se, e solo se, $H^{G,d} \leq H$.
In generale, per ogni gruppo G e per ogni suo sottogruppo H, vale per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'uguaglianza

$$H^{G,n} = H[G,_n H]. \tag{1.4}$$

Come accennato, i commutatori permettono di caratterizzare anche i gruppi subnormali, ora vediamo in che modo.

Lemma 1.1.6. *Sia G un gruppo e sia $H \leq G$, allora*

$$H \lhd\lhd^d G \qquad \Leftrightarrow \qquad [G,_d H] \leq H.$$

Fatto interessante è che ne esiste una versione con ipotesi più deboli.

Lemma 1.1.7. *Sia H un sottogruppo del gruppo G. Allora H è subnormale di difetto al più d se, e solo se, $[G,_d U] \leq H$ per ogni sottogruppo finitamente generato U di H.*

Concludiamo questa prima parte con alcuni risultati sui commutatori che ci torneranno utili nei prossimi capitoli.

Lemma 1.1.8. *Dato un gruppo G e due elementi a, b per cui $[a, b, b] = 1$, allora $[a, b^n] = [a, b]^n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Lemma 1.1.9. *Sia A un sottogruppo normale p-elementare ed abeliano del gruppo G. Allora, per ogni $x \in G$, $[A,_{p^m} x] = [A, x^{p^m}]$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.*

Lemma 1.1.10. *Sia A un gruppo abelaino e sia x un automorfismo di A tale che $[A,_n x] = 1$, per $n \geq 1$. Allora valgono i seguenti fatti:*

(i) *se x ha ordine finito q, allora $[A^{q^n}, x] = 1$;*

(ii) *se A ha esponente finito $e \geq 2$, allora $[A, x^{e^{n-1}}] = 1$;*

(iii) *sia H il gruppo che agisce su A con $[A,_n H] = 1$, con $n \geq 1$; allora $\gamma_n(H) \leq C_H(A)$.*

L'ultimo punto del lemma appena enunciato può essere esteso al caso in cui A è nilpotente nel seguente modo.

Lemma 1.1.11. *Sia G un gruppo nilpotente di classe c e sia x un automorfismo di G tale che $|x| = q$ e $[G,_n x] = 1$, per $n \geq 1$. Allora $[G^{q^{cn-1}}, x] = 1$.*

Lemma 1.1.12. *Sia G un gruppo nilpotente di classe c e siano $x_1, x_2, \ldots, x_d$ automorfismi di G tali che $[G,_n \langle x_i \rangle] = 1$, per ogni $i = 1, \ldots, d$ e con $n \geq 1$. Siano $q_1, q_2, \ldots, q_d$ interi positivi e indichiamo con $q = q_1 q_2 \ldots q_d$. Allora*

$$[G^{q^{nc^d}}, \langle x_1 \rangle, \ldots, \langle x_d \rangle] \leq [G, \langle x_1^{q_1} \rangle, \ldots, \langle x_d^{q_d} \rangle].$$

1.2 Serie di sottogruppi

Sebbene le generalizzazioni della proprietà di subnormalità dei gruppi non saranno al centro di questa tesi, ci soffermeremo brevemente quando si presenterà l'occasione di estendere facilmente i risultati trovati ad esse. In particolare, sottolineeremo quando i risultati trovati valgono per serie ascendenti, in modo da poter acquisire una più ampia conoscenza sull'argomento. Tuttavia per poter parlare di ascendenza è bene prima introdurre il concetto generale di serie di sottogruppi in un gruppo. Di seguito proponiamo la definizione data da P. Hall e ne forniamo le principali caratteristiche.

Definizione 1.2.1. *Dato Γ un qualsiasi insieme totalmente ordinato e un gruppo G, una serie di tipo Γ di G è data da un insieme*

$$\{(V_\gamma, \Lambda_\gamma) | \gamma \in \Gamma\} \tag{1.5}$$

di coppie di sottogruppi V_γ, Λ_γ di G, che soddisfano le seguenti proprietà:

i. $V_\gamma \trianglelefteq \Lambda_\gamma$ *per ogni* $\gamma \in \Gamma$;

ii. $\Lambda_\alpha \leq V_\beta$ *per ogni* $\alpha < \beta$, *con* $\alpha, \beta \in \Gamma$;

iii. $G \setminus \{1_G\} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (\Lambda_\gamma \setminus V_\gamma)$.

Dalla definizione segue immediatamente che ciascun elemento di G non triviale appartiene ad uno e un solo insieme del tipo $\Lambda_\gamma \setminus V_\gamma$. Inoltre possiamo osservare che per ogni γ si ha

$$V_\gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} \Lambda_\beta \quad \text{e} \quad \Lambda_\gamma = \bigcap_{\beta > \gamma} V_\beta.$$

Quest'ultimi sottogruppi di G sono detti *termini* della serie ed i gruppi quozienti $\Lambda_\gamma / V_\gamma$ sono i *fattori* della serie.
Al variare delle proprietà dell'insieme Γ, dei termini e dei fattori, le serie di tipo Γ assumono diversi nomi:

Definizione 1.2.2. *Una serie di tipo* Γ *si dice*

1. *finita se l'insieme* Γ *è finito;*

2. *crescente se l'insieme* Γ *è ben ordinato;*

3. *normale se ogni termine della serie è normale in* G*;*

4. *centrale se ogni fattore è un fattore centrale di* G*.*

Per quanto riguarda le serie crescenti, è doveroso fare alcune osservazioni che ci conducono ad una semplificazione della scrittura.

OSSERVAZIONE 1.2.3. *Un insieme ben ordinato* Γ *è isomorfo all'insieme degli ordinali (come insieme ordinato)* $\{\gamma|\gamma < \alpha\}$ *per un dato ordinale* α*. Possiamo pertanto dire che una tale serie crescente di* G *di tipo* Γ *è di tipo* α*. Inoltre, dato che per ogni* $\gamma < \alpha$ *esiste un ordinale minimale* β *per la proprietà* $\beta > \gamma$*, ovvero* $\beta = \gamma + 1$*, e dalla definizione di* $\Lambda_\gamma = \bigcap_{\beta>\gamma} V_\beta$*, si ha che* $\Lambda_\gamma = V_{\gamma+1}$*. Pertanto possiamo concludere che i termini della serie del tipo* Λ_γ *non sono indispensabili per determinare una serie di sottogruppi ascendente. Infine, per una serie crescente, si è soliti aggiungere il termine* $V_\alpha = G$ *se* α *è un ordinale limite.*

Riassumendo quanto appena visto, dato un ordinale α, una serie crescente di tipo α di G è data da un insieme del tipo

$$\{V_\gamma \leq G \,|\, \gamma \leq \alpha\}$$

tale che $\quad V_0 = 1, \quad V_\gamma \trianglelefteq V_{\gamma+1}$ per ogni $\gamma < \alpha, \quad V_\alpha = G$ e

$$V_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} V_\beta$$

per ogni ordinale limite $\gamma \leq \alpha$. Analoghe osservazioni si possono fare per le serie decrescenti, ovvero le serie dove il tipo di ordine è l'opposto di Γ, dove Γ è un insieme ben ordinato.
Ricordiamo che un sottogruppo $H \leq G$ è detto *seriale* se è un termine di una qualche serie di G; inoltre H è detto *crescente* (o *decrescente*) se è termine di una serie crescente (o decrescente) di G.

Abbiamo introdotto questi concetti col fine ultimo di dare delle estensioni naturali del concetto di serie ascendente e di serie discendente introdotte nel paragrafo precedente; ovvero di dare una sorta di "generalizzazione" del concetto di nilpotenza.

Dato un gruppo G, *la serie centrale ascendente estesa* di G ha la medesima definizione di quella data in (1.2) indicizzata sui numeri ordinali:

$$\zeta_0(G) = 1, \quad \zeta_{\alpha+1}(G)/\zeta_\alpha(G) = Z\left(G/\zeta_\alpha(G)\right), \tag{1.6}$$

per ogni ordinale α, e imponendo che, se α è un ordinale limite,

$$\zeta_\alpha(G) = \bigcup_{\lambda<\alpha} \zeta_\lambda(G).$$

L'unione dei termini di questa serie è un sottogruppo completamente invariante di G, detto l'*ipercentro* di G. L'ipercentro di G è di fondamentale importanza in quanto corrisponde al termine $\zeta_\alpha(G)$ della serie ascendente estesa di G, che corrisponde a sua volta al più piccolo ordinale α tale che $\zeta_\alpha(G) = \zeta_{\alpha+1}(G)$. Pertanto il gruppo G è detto *ipercentrale* se G è un termine della serie centrale ascendente.
Analogamente si definisce la s*erie centrale discendente estesa* di un gruppo G; infatti i termini della serie $\gamma_\alpha(G)$ si definiscono induttivamente come in (1.3):

$$\gamma_1(G) = G, \qquad \gamma_{\alpha+1}(G) = [\gamma_\alpha(G), G]$$

per ogni ordinale α, e imponendo che, se α è un ordinale limite

$$\gamma_\alpha(G) = \bigcap_{\lambda<\alpha} \gamma_\gamma(G).$$

Per ogni gruppo G esiste almeno un ordinale α tale che $\gamma_\alpha(G) = \gamma_{\alpha+1}(G)$; il più piccolo con tale proprietà è detto l'*ipocentro* di G.

Osservazione 1.2.4. *Per ogni gruppo G, se S è un sottogruppo seriale di G, allora per ogni $H \leq G$, il sottogruppo che si ottiene dall'intersezione di S ed H è ancora seriale. In particolare, se S è discendete, ascendente o subnormale, allora anche la sua intersezione con H è rispettivamente discendete, ascendente o subnormale. Inoltre, l'ascendeza e la subnormalità si comportano bene anche rispetto alle immagini omomorfe: se S è ascendente o subnormale in G, allora anche SN/N è ascendente o subnormale in G/N, per ogni $N \trianglelefteq G$. Nel corso della trattazione sfrutteremo spesso queste proprietà delle serie ascendenti, discendenti e subnormali.*

1.3 Classi di gruppi

Definizione 1.3.1. *Con il termine classe di gruppi si intende una famiglia di gruppi che è chiusa per gli isomorfismi e contiene il gruppo triviale.*

Le classi più note sono quelle dei gruppi finiti $\mathfrak{F}$, dei gruppi abeliani $\mathfrak{A}$ e dei gruppi nilpotenti $\mathfrak{N}$.
Questo scritto si concentra principalmente sulle classi $\mathfrak{N}$, $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{U}_d$. Con $\mathcal{N}_1$ si intende la classe farmata dai gruppi che hanno tutti i loro sottogruppi subnormali, mentre, per ogni $1 \leq d \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_d$ identifica la classe dei gruppi aventi tutti i sottogruppi subnormali di difetto al più d.
Data la classe dei gruppi gruppi $\mathfrak{N}$, si dice che

Definizione 1.3.2. *Una classe di gruppi è detta una generalizzazione della classe dei gruppi nilpotenti se contiene interamente la classe $\mathfrak{N}$ e se ongi suo membro finito è nilpotente.*

Una delle più ovvie generalizzazioni della classe dei gruppi nilpotenti è la classe dei gruppi localmente nilpotenti.

Definizione 1.3.3. *Un gruppo G è localmente $\mathfrak{N}$, ovvero localmente nilpotente, se ogni suo sottogruppo finitamente generato è un elemento di $\mathfrak{N}$.*

Molto spesso è conveniente lavorare con gruppi numerabili di una certa classe. A tal proposito ci sono delle classi di gruppi che soddisfano una proprietà che permette di trattare solamente i gruppi numerabi e, per tale motivo, sono dette *numerabilmente riconoscibili*. Più precisamente,

Definizione 1.3.4. *Una classe di gruppi $\mathfrak{X}$ è numerabilmente riconoscibile se il fatto che ogni sottogruppo numerabile di un gruppo G sia in $\mathfrak{X}$ implica che anche il gruppo G vi appartiene.*

In particolare, per ogni $1 \leq n \in \mathbb{N}$, le classi dei gruppi nilpotenti, dei gruppi nilpotenti di classe al più n, dei gruppi risolubili e di quelli risolubili di lunghezza derivata al più n sono tutte numerabilmente riconoscibili.

1.4 Condizione di massimalità e gruppi policiclici

Di seguito ricordiamo alcune proprietà che un gruppo può avere; con più precisione tratteremo della condizione di massimalità e dei gruppi policiclici. Vedremo anche che se un gruppo nilpotente soddisfa una di queste due proprietà, allora esso soddisfa necessariamente anche l'altra.

Definizione 1.4.1. *Dato un gruppo G e data una famiglia di sottogruppi di G, $\mathfrak{X}$, allora si dice che G soddisfa la condizione di massimalità sui $\mathfrak{X}$-sottogruppi se ogni catena crescente di sottogruppi di G che appartiene a $\mathfrak{X}$ è finita.*

Ricordiamo anche la definizione di gruppo policiclico.

Definizione 1.4.2. *Un gruppo G risolubile è detto policiclico se possiede una catena subnormale in cui tutti i fattori sono gruppi ciclici.*

Un gruppo policiclico ha una particolare struttura interna che si può dedurre dal teorema che segue.

Teorema 1.4.3. *Sia G un gruppo policiclico. Allora*

(1) Ogni sottogruppo di G è intersezione di sottogruppi di indice finito in G;

(2) G è nilpotente se, e solo se, ogni quoziente finito di G è finito.

L'essere policiclico ed il fatto di soddisfare la condizione di massimalità sono proprietà strettamente legate quando si tratta di gruppi risolubili; infatti si può dimostrare che

Teorema 1.4.4. *Un gruppo è risolubile e soddisfa la condizione di massimalità se, e solo se, è un gruppo policiclico.*

Il legame è ancora più forte quando si tratta di gruppi nilpotenti. In questo caso vale la proposizione sottostante.

Proposizione 1.4.5. *Sia G un gruppo nilpotente, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) G è finitamente generato;

(ii) G/G' è finitamente generato;

(iii) G è policiclico;

(iv) G soddisfa la condizione di massimalità.

1.5 Gruppi nilpotenti e generalizzazioni

Nel primo paragrafo non ci siamo soffermati a sufficienza sull'importanza che posseggono le serie centrali ascendenti e discendenti; infatti la natura dei loro fattori è strettamente legata a quelle dei primi termini delle serie, e queste ultime danno importanti informazioni sulla struttura del gruppo stesso, come si evince dal seguente teorema.

Teorema 1.5.1. *Sia G un gruppo e indichiamo con $G_{ab} = G/G'$ l'abelianizzazione di G. Allora, per ogni $c \geq 1$, esiste un epimorfismo*

$$\underbrace{G_{ab} \otimes G_{ab} \otimes \cdots \otimes G_{ab}}_{c \text{ volte}} \quad \longrightarrow \quad \gamma_c(G)/\gamma_{c+1}(G).$$

Questo risultato permette di trovare moltri altri legami tra le proprietà di un gruppo nilpotente ed il suo abelianizzato. Ne presentiamo alcuni.

Lemma 1.5.2. *Sia G un gruppo nilpotente di classe $c \geq 1$; allora la mappa*

$$\begin{array}{ccc} G \times \cdots \times G & \longrightarrow & \gamma_c(G) \\ (x_1, \ldots, x_c) & \longmapsto & [x_1, \ldots, x_c] \end{array}$$

è un omomorfismo in ogni variabile.

Corollario 1.5.3. *Sia X un insieme di generatori per il gruppo G. Allora G è nilpotente di classe al più c se, e solo se, $[x_1, \ldots, x_{c+1}] = 1$ per tutti gli elementi $\{x_1, \ldots, x_c\} \in X$.*

I risultati sopra enunciati riguardano la serie centrale discnedente, tuttavia anche la struttura del primo termine della serie centrale ascendente, che coincide con il centro del gruppo in esame, influenza notevolmente la struttura dell'intero gruppo.

Proposizione 1.5.4. *Sia G un gruppo nilpotente di classe c e si supponga che il centro di G, $Z(G)$, abbia esponente finito e. Allora G ha esponente (finito) che divide e^c.*

1.5.1 Teorema di Fitting

Una delle proprietà più interessanti ed un risultato fondamentale della Teoria dei gruppi nilpotenti è il Teorema di Fitting.

Teorema 1.5.5. *Siano H e K due sottogruppi nilpotenti e normali di un gruppo G, di classe di nilptenza c e d, rispettivamente. Allora il loro prodotto HK è un sottogruppo normale e nilpotente di classe di nilpotenza al più $c+d$.*

Ne esiste anche una importante generalizzazione data dal lemma che segue.

Lemma 1.5.6. *Siano N e H sottogruppi nilpotenti del gruppo G, con classe di nilpotenza rispleттivamente c e d. Se $N \trianglelefteq G$ e H è subnormale in G di difetto n, allora il sottogruppo NH è nilpotente di classe al più $nc + d$.*

Una versione simile del Teorema di Fitting ma per i gruppi localmente nilpotenti è dato dal Teorema di Hirsch-Plotkin.

Teorema 1.5.7. *Per ogni gruppo G, il prodotto di due sottogruppi localmente nilpotenti e normali è localmente nilpotente. In particolare, G possiede un unico sottogruppo massimale per la proprietà di essere localmente nilpotente e normale. Questo sottogruppo è detto radicale di Hirsch-Plotkin di G e contiene tutti i sottogruppi ascendenti localmente nilpotenti di G.*

1.5.2 Gruppi di Engel

Dopo i gruppi localmente nilpotenti, l'altra classe di gruppi che generalizza la classe dei gruppi nilpotenti a cui è stata data maggiore attenzione è quella dei gruppi di Engel.

Definizione 1.5.8. *Dati un gruppo G ed un suo elemento g, si dice che g è Engel a sinistra se, per ogni $x \in G$, esiste un $1 \leq n \in \mathbb{N}$ tale che $[x,_n g] = 1$. Se l'intero n non dipende da x, ma solamente da g, allora diremo che quest'ultimo è un elemento n-Engel a sinistra.*
Un gruppo G è detto un gruppo di Engel se tutti i suoi elementi sono di Engel a sinistra; G è detto di n-Engel se tutti i suoi elementi sono n-Engel a sinistra, per un fissato $n \in \mathbb{N}$.

Dalla definizione segue che tutti i gruppi localmente nilpotenti sono gruppi di Engel. Inoltre ricordiamo un risultato fondamentale di Zorn: un gruppo di Engel finito è nilpotente. Riportiamo solo alcuni risultati sui gruppi di Engel, che ci torneranno utili successivamente.

Teorema 1.5.9. *Un gruppo localmente nilpotente, senza torsione e di n-Engel è nilpotente di classe di nilpotenza che dipende unicamente da n.*

Corollario 1.5.10. *Un gruppo senza torsione, risolubile e di n-Engel di lunghezza derivata d è nilpotente di classe limitata da n^{d-1}.*

1.6 Rango e torsione

Concludiamo il capitolo con le ultime definizioni necessarie per poter comprendere quanto si affronterà nei capitoli successivi.

Definizione 1.6.1. *Un gruppo G si dice di rango finito se è un gruppo di rango di Prüfer finito; i.e. un gruppo G per il quale esiste $d \in \mathbb{N}$ tale che ogni gruppo finitamente generato di G può essere generato da al più d elementi. Se ciò accade, il più piccolo d che soddisfa tale condizione è detto rango di G.*

Ad esempio, i gruppi additivi $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e C_{p^∞} sono tutti gruppi abeliani di rango 1. Ultima nozione che diamo, ma di fondamentale importanza nella tesi, è quella di *torsione* di un gruppo.

Definizione 1.6.2. *Dato un gruppo G, l'insieme di tutti i suoi elementi di ordine finito è detto il sottogruppo torsione di G e si indica con $T(G)$.*

Il gruppo torsione di un gruppo localmente nilpotente ha una certa struttura, come ci indica il teorema che segue.

Teorema 1.6.3. *Dato un gruppo G localmente nilpotente, allora il suo sottogruppo torsione $T(G)$ è un sottogruppo completamente invariante di G. Inoltre, $T(G)$ è il prodotto diretto di p-gruppi localmente finiti.*

Infine, ricordiamo che vale anche il viceversa del Teorema 1.6.3, ovvero si ha che se un gruppo è prodotto diretto di p-gruppi localmente finiti, allora è localmente nilpotente.

Capitolo 2

Sui gruppi $\mathcal{N}_1$

Questo capitolo sarà dedicato interamente allo studio della generalizzazione della classe dei gruppi nilpotenti forse più vicina al concetto di nilpotenza; ovvero $\mathcal{N}_1$, la classe dei gruppi con tutti i sottogruppi subnormali. Essendo l'argomento principale della tesi, è necessario vederne le caratteristiche più importanti. In particolare vedremo il Teorema di Brookes, che evidenzia una struttura intrinseca ai gruppi in $\mathcal{N}_1$ e alcune condizioni che rendono un gruppo con tutti i sottogruppi subnormali nilpotente.
Infine, parleremo di uno dei risultati fondamentali della teoria dei gruppi in $\mathcal{N}_1$, ovvero del Teorema di Möhres.

Innanzitutto, cominciamo sottolineando il motivo per cui i gruppi con tutti i sottogruppi subnormali sono un argomento così importante. La risposta a questa domanda risiede nella proposizione che segue.

Proposizione 2.0.1. *(1) In un gruppo nilpotente di classe di nilpotenza c ogni sottogruppo è subnormale di difetto al più n.*

(2) Un gruppo finitamente generato in cui tutti i sottogruppi sono subnormali è nilpotente.

Dalla proposizione si evince che il legame tra i gruppi nilpotenti e i gruppi in $\mathcal{N}_1$ è particolarmente stretto. Tuttavia, vi sono delle differenza tra le due classi: sono ambedue chiuse per sottogruppi e quozienti, ma la classe $\mathcal{N}_1$ non è chiusa per i prodotti diretti, mentre $\mathfrak{N}$ lo è, come afferma il Teorema di Fitting 1.5.5. Possiamo infatti costruire un controesempio.

Esempio 2.1. *Sia H un gruppo in $\mathcal{N}_1$ con centro triviale, il sottogruppo diagonale $D = \{(x,x) \mid x \in H\}$ del gruppo prodotto diretto $H \times H$ si autonormalizza (i.e. $D = N_{H\times H}(D)$). Pertanto, D non è subnormale in $H \times H$ e dunque $H \times H \notin \mathcal{N}_1$.*

Il fatto che il sottogruppo diagonale D si autonormalizza deriva dal seguente lemma.

Lemma 2.0.2. *Dati un gruppo H e D il sottogruppo diagonale di $H \times H$. Allora: $D \neq N_{H\times H}(D)$ se, e solo se, $Z(H) \neq 1$.*

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\begin{aligned} N_{H\times H}(D) &= \{(h,k) \mid h,k \in H \text{ e } D^{(h,k)} = D\} \\ &= \{(h,k) \in H \times H \mid (x^h, x^k) \in D \quad \forall x \in H\} \\ &= \{(h,k) \in H \times H \mid x^h = x^k \quad \forall x \in H\} \\ &= \{(h,k) \in H \times H \mid x = x^{kh^{-1}} \quad \forall x \in H\} \\ &= \{(h,k) \in H \times H \mid kh^{-1} \in Z(H)\}. \end{aligned}$$

Pertanto se $D = N_{H\times H}(D)$, ciò è equivalente a dire che $D = \{(h,k) \in H \times H \mid kh^{-1} \in Z(H)\}$ e ciò implica che $Z(H) = 1$.
Per dimostrare l'altra implicazione, assumiamo che $D \neq N_{H\times H}(D)$, ovvero che $\exists (h,k) \in H \times H$ con $h \neq k$ (ovvero $1 \neq kh^{-1}$), tale che $kh^{-1} \in Z(H)$. Pertanto $Z(H) \neq 1$. □

Il prossimo risultato è uno dei più utili strumenti per lo studio dei gruppi $\mathcal{N}_1$; in seguito si ricorrerà spesso a strutture simili per studiare gruppi nilpotenti e non, con particolari proprietà. Fu osservato per la prima volta da C. Brookes e perciò ne prende il nome.

Teorema 2.0.3 (Brookes)**.** *Sia G un gruppo in $\mathcal{N}_1$ e sia Θ una famiglia di sottogruppi di G contenente G. Allora esistono*

i. un sottogruppo $H \in \Theta$;

ii. un sottogruppo F di H finitamente generato;

iii. un intero positivo d,

tali che per ogni $K \in \Theta$

$$F \leq K \leq H \qquad e \qquad K \textit{ ha difetto al più } d \textit{ in } H.$$

Dimostrazione. Supponiamo che G non soddisfi il Teorema di Brookes. Mostreremo che si possono costruire due catene subnormali

$$\begin{aligned} \{1\} = F_0 \leq F_1 \leq ... \leq F_i \leq F_{i+1} \leq ... \\ G = H_0 \geq H_1 \geq ... \geq H_i \geq H_{i+1} \geq ... \end{aligned}$$

tali che, per ogni $i, j \in \mathbb{N}$, F_i è finitamente generato, $H_i \in \Theta$, $F_i \leq H_j$ e $[H_i\ ,_i F_{i+1}] \nleq H_{i+1}$.
Per costruire siffatte catene procediamo induttivamente. Fissiamo $F_0 = \{1\}$ e $G = H_0$. Supponiamo di aver già definito $F_0, ..., F_i$ e $H_0, ..., H_i$. Dato che $F_i \leq H_j \in \Theta$ e che G è un controesempio, allora esiste un sottogruppo $H_{i+1} \leq H_i$ in Θ con $F_i \leq H_{i+1}$ e con il difetto di H_{i+1} in H_i uguale a $i+1$. Ciò implica che esiste un sottogruppo di H_{i+1} finitamente generato K, tale che $[H_{i,i} K] \nleq H_{i+1}$. Allora poniamo porre $F_{i+1} := \langle F_i, K\rangle$; infatti F_{i+1} così definito è finitamente generato, essendo F_i e K finitamente generati. Inoltre, dalla definizione segue che $F_i \leq F_{i+1} \leq H_{i+1}$ e $[H_{i,i} F_{i+1}] \nleq H_{i+1}$.
Ora definiamo
$$F := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i.$$
Avendo imposto che $F_i \leq H_j$, si ha che $F \leq H_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ e di conseguenza $F \leq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} H_i$. Dunque F è un sottogruppo subnormale di G.
Ricordando adesso la caratterizzazione 1.1.6 dei sottogruppi subnormali, ciò significa che $[G,_k F] \leq F$ con $1 \leq k \in \mathbb{N}$ il difetto di F in G.
In particolare, otteniamo che
$$[G,_k F_{k+1}] \leq [G,_k F] \leq F \leq H_{k+1} \tag{2.1}$$
che contraddice la scelta di F_{k+1}, in quanto avevamo imposto che $[G,_k F_{k+1}] \nleq H_{k+1}$. □

La prossima proposizione è una generalizzazione di un risultato che troveremo più avanti.

Proposizione 2.0.4. *Sia $G \in \mathcal{N}_1$ e sia A un sottogruppo di G normale, nilpotente e periodico. Sia $A^\omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A^n$. Allora esiste un intero positivo d tale che*
$$A^\omega \leq \zeta_d(G).$$

Dimostrazione. Per alleggerire la notazione, nel corso della dimostrazione utilizzeremo $D := A^\omega$. Senza perdita di generalità, possiamo supporre che G/D sia numerabile. Possiamo allora "ordinare" gli elementi di G/D in questo modo: $G/D = \{a_1D, a_2D, a_3D, ...\}$. Per induzione, dimostriamo che esiste una sequenza di interi $\{m_n\}_{n \geq 1}$ tali che, per ogni n, $A \cap \langle a_1^{m_1}, a_2^{m_2}, ..., a_n^{m_n}\rangle = 1$.
Assumiamo che, per un certo $1 \leq n \in \mathbb{N}$, esistano degli interi $m_1, m_2, ..., m_n$ tali che se $U_n := \langle a_1^{m_1}, a_2^{m_2}, ..., a_n^{m_n}\rangle$, allora $A \cap U_n = 1$.
Per come è definito, U_n è un sottogruppo del gruppo nilpotente e finitamente generato $\langle U_n, a_{n+1}\rangle$. Inoltre, dato che A è periodico, $A \cap \langle U_n, a_{n+1}\rangle$ è un sottogruppo finito.

Osserviamo che il gruppo $\langle U_n, a_{n+1}\rangle$, essendo finitamente generato e nilpotente, è policiclico. Dunque, per il Teorema 1.4.3 , esiste un sottogruppo di indice finito di $\langle U_n, a_{n+1}\rangle$ che contiene U_n ed ha intersezione triviale con A. Infatti, per il teorema appena citato esistono $\{H_l\}_{l\geq 1} \subseteq U_n$ con indice finito tali che

$$U_n = \bigcap_l H_l \qquad \Rightarrow \qquad 1 = U_n \cap A = \bigcap_l H_l \cap A \qquad \Leftrightarrow \qquad H_{\bar{l}} \cap A = 1, \quad \exists\, \bar{l}.$$

In particolare, esiste un intero $m_{n+1} \geq 1$ tale che $U_{n+1} = \langle U_n, a_{n+1}^{m_{n+1}}\rangle$ ha intersezione triviale con A. In questo modo abbiamo concluso la dimostrazione induttiva.
Definiamo ora $U := \langle a_n^{m_n} \mid 1 \leq n \in \mathbb{N}\rangle$. Allora $A \cap U = 1$ e per ongi $x \in G$ esiste un $1 \leq k \in \mathbb{N}$ tale che $x^k \in U$.
Ora, dato che $G \in \mathcal{N}_1$, U è un sottogruppo subnormale di G di difetto d. Ciò implica che $[A,_d U] \leq A \cap U = 1$. Dati $x_1, ..., x_d \in G$ e $m_1, ..., m_d \in \mathbb{N}$ tali che $x_i^{m_i} \in U$, possiamo ora applicare il Lemma 1.1.12, ottenendo la prima delle seguenti due inclusioni:

$$[D, x_1, \ldots, x_d] \leq [A, \langle x_1^{m_1}\rangle, \ldots, \langle x_d^{m_d}\rangle] \leq [A,_d U] = 1. \tag{2.2}$$

La seconda inclusione è dovuta invece alla definizione di $\{x_i\}_{1\leq i\leq d}$.
Ciò conclude la dimostrazione in quanto, dall'uguaglianza $[D, x_1, \ldots, x_d] = 1$, segue che $d \leq \zeta_d(G)$. □

Possiamo infine enunciare un corollario immediato di questa proposizione.

Corollario 2.0.5. *Siano $G \in \mathcal{N}_1$ e D un suo sottogruppo normale, abeliano, divisibile e periodico. Se G/D è nilpotente (ipercentrale), allora G è nilpotente (ipercentrale).*

2.1 Sul Teorema di Möhres

Al centro di questa tesi vi è lo studio dei gruppi con tutti i sottogruppi subnormali e senza torsione; il quale è solamente un ramo della più ampia Teoria dei gruppi con tutti i sottogruppi subnormali. É dunque doveroso spendere qualche parola in più a riguardo, in particolare rispetto al lavoro di Walter Möhres. Infatti è dovuto a Möhres uno dei più grandi trionfi della Teoria dei gruppi infiniti del secolo scorso; ossia l'omonimo teorema che dimostrò nel 1990 in [7] e che afferma che *ogni gruppo con tutti i sottogruppi subnormali è risolubile.* Notiamo che faremo uso di un caso particolare di questo teorema per dimostrare il Teorema di Smith, ovvero assumeremo che il gruppo sia senza torsione.

Prima di trattare di come sia possibile dimostrare il Teorema di Möhres, andiamo a vedere cosa storicamente ha condotto ad esso.
Innanzitutto ricordiamo che già a fine '800 era nota conseguenza del Teorema di Sylow che un gruppo *finito* con tutti i sottogruppi subnormali è nilpotente; in realtà, attorno al 1955, Bear riuscì a generalizzare tale risultato dimostrando che *un gruppo che si può generare dai suoi sottogruppi subnormali e abeliani è localmente nilpotente*. Quest'ultimo teorema dava una grande quantità di informazioni sulla classe di gruppi $\mathcal{N}_1$: infatti, essendo i gruppi con tutti i sottogruppi subnormali localmente nilpotenti, gli elementi di ordine finito costituiscono un sottogruppo del gruppo in questione.
Ulteriore sviluppo della teoria fu il Teorema di Roseblade nel 1965, che afferma che *se un gruppo è membro di $\mathcal{U}_d$, allora è nilpotente di difetto limitato da una funzione di d.* Il passo successivo sarebbe stato provare che tutti i gruppi di $\mathcal{N}_1$ sono nilpotenti, ma nel 1968 Heineken e Mohamed trovarono un controesempio: trovarono un p-gruppo metabeliano con tutti i sottogruppi subnormali e nilpotenti e con centro triviale. Altri controesempi furono trovati successivamente, tra i quali spicca quello di H. Smith del 1983 che provò l'esistenza di un gruppo non nilpotente e ipercentrale in $\mathcal{N}_1$, in particolare gli elementi di questo gruppo hanno tutti ordine infinito. Era noto inoltre che un gruppo in $\mathcal{N}_1$ godeva della proprietà dell'intersezione subnormale (i.e. l'intersezione di gruppi subnormali è subnormale), ma si dimostrò che non poteva avere difetto di subnormalità limitato a meno che non fosse nilpotente. Perciò tutti i controesempi trovati non sono altro che esempi di gruppi con la proprietà dell'intersezione subnormale, ma privi di difetto limitato.
Avendo dimostrato che la nilpotenza non è una conseguenza del fatto di avere tutti i sottogruppi subnormali, rimase tuttavia aperta la questione sulla risolubilità, che fu chiusa appunto da Möhres.

Per quanto riguarda la dimostrazione del Teorema di Möhres vi sono alcune osservazioni da fare. Essa è suddivisa in tre parti: innanzitutto, Möhres dimostò la veridicità dell'enunciato nel caso di un p-gruppo (ed è anche la parte più complicata della dimostazione); poi la dimostrò nel caso in cui il gruppo è privo di torsione ed infine nel caso generale.
Per dimostrare il Teorema di Smith ci sarà necessaria la dimostrazione del Teorema di Möhres nel caso di un gruppo senza torsione 4.2.2, essendo questi i gruppi in esame. Concludiamo sottolinenando il fatto che nella dimostrazione useremo il Teorema di Roseblade, anch'esso nel caso di gruppi senza torsione 4.1.2.

Capitolo 3

Gruppi senza torsione

Fine ultimo di questo capitolo è quello di approfondire le proprietà dei gruppi senza torsione. In particoalre, affronteremo il caso in cui il gruppo in esame è localmente nilpotente (o anche di Engel), riuscendo a dedurre importanti proprietà della serie centrale ascendente del gruppo di partenza. Tra i vari risultati che troveremo spiccano per importanza il Lemma di Čarin e il suo corollario.
Nella seconda parte vedremo come costruire gruppi senza torsione a partire da un generico gruppo localmente nilpotente, seguendo la brillante intuizione di Casolo di utilizzare gli isolatori. Di questo strumento daremo innanzitutto la definizione e le principali proprietà; mostreremo che si "comporta bene" rispetto al commutatore, alla derivazione e rispetto ai termini della serie discendente. Mediante il Teorema di P.Hall vedremo anche che, oltre alla normalità, l'isolatore di un sottogruppo preserva la subnormalità. Concluderemo questa parte provando che per i gruppi senza torsione e localmente nilpotenti gli isolatori si comportano bene anche rispetto alle serie ascendenti. Inoltre, proveremo che esistono condizioni sufficienti a dimostrare la nilpotenza di un gruppo senza torsione e localmente nilpotente.

3.1 Gruppi senza torsione localmente nilpotenti

Come anticipato, cominciamo la trattazione col dare alcune proprietà delle serie ascendenti centrali di un gruppo senza torsione.

Lemma 3.1.1. *Sia G un gruppo di Engel e siano $a, b \in G$, con $\langle a \rangle^G$ sottogruppo senza torsione. Assumiamo che esista $1 \leq n \in \mathbb{N}$ tale che $[a, b^n] = 1$. Allora, $[a, b] = 1$.*

Dimostrazione. Poiché G è un gruppo di Engel, esiste un $1 \leq k \in \mathbb{N}$ tale che $[a,_k b] = 1$. Procediamo ora per induzione su tale k.
Nel caso $k = 1$, non è necessario dimostrare nulla, in quanto $1 = [a,_1 b] = [a, b]$. Nel caso $k > 1$, è bene innanzitutto osservare che l'assunzione $[a, b^n] = 1$ implica che $b^n \in C_G(a)$ e dunque che b appartiene al centro di $\langle a, b\rangle$. Da quasta osservazione e dal fatto che $[a, b] \in \langle a, b\rangle$ deduciamo:

$$[[a, b], b^n] = 1. \tag{3.1}$$

Siamo ora nella situazione seguente:

- $[[a, b],_{k-1} b] = [a,_k b] = 1$;
- $\langle[a, b]\rangle^{\bar{G}}$ è privo di torsione poiché $\langle[a, b]\rangle^{\bar{G}} \leq \langle a\rangle^G$;
- esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $[[a, b], b^n] = 1$.

Applicando l'ipotesi indutiva ad $[a, b]$ e b in G, abbiamo che $[[a, b], b] = 1$. Quest'ultimo risultato ci permette di applicare il Lemma 1.1.8 e di ottenere che $[a, b]^n = [a, b^n] = 1$. Avendo supposto $\langle a\rangle^G$ senza torsione ed essendone $[a, b]$ un elemento, si conclude che $[a, b] = 1$. □

Proseguiamo con due applicazioni di questo lemma.

Corollario 3.1.2. *Sia G un gruppo localmente nilpotente e siano $a, b \in G$. Se $[a^n, b^m]$ ha ordine finito per qualche $n, m \geq 1$, allora $[a, b]$ ha ordine finito.*

Dimostrazione. Consideriamo il gruppo quoziente G/T dove $T = T(G)$ è il sottogruppo torsione di G. Per costruzione, G/T è un gruppo localmente nilpotente e senza torsione. Inoltre, essendo localmente nilpotente, G/T è anche di Engel. Consideriamo infine il sottogruppo senza torsione $\langle a^n\rangle^G T/T$. Il fatto che $[a^n, b^m]$ ha ordine finito, è equivalente a dire $[a^n, b^m] \in T$, ovvero che $[a^n, b^m] = 1_{G/T}$. Possiamo dunque applicare il Lemma 3.1.1 e ottenere che $[a^n, b] = 1_{G/T}$. Ripetendo lo stesso procedimento con il sottogruppo senza torsione $\langle b\rangle^G T/T$ di G/T, possiamo concludere:

$$[a, b] = [b, a] = 1_{G/T} \quad \Leftrightarrow \quad [a, b] \in T(G).$$

□

Altra diretta conseguenza del Lemma 3.1.1 è data dalla seguente proposizione.

Proposizione 3.1.3. *Sia G un gruppo localmente nilpotente.*

1. *Se N è un sottogruppo normale e privo di torsione di G, allora $G/C_G(N)$ è un sottogruppo privo di torsione.*

2. *Se G è senza torsione, allora $G/\zeta_\alpha(G)$ è senza torsione, per ogni ordinale α.*

Dimostrazione. 1. Sia $b \in G$ e sia $1 \leq n \in \mathbb{N}$ tale che $b^n \in C_G(N)$. Ora possiamo applicare il Lemma 3.1.1 a G ed N, in quanto G, essendo localmente nilpotente, è di Engel, $N = N^G$ è senza torsione e $[N, b^n] = 1$ dato che $b^n \in C_G(N)$. Allora abbiamo che $[N, b] = 1$, i.e. $b \in C_G(N)$. Ciò permette di concludere che $G/C_G(N)$ è senza torsione.
2. Per induzione su α.
Caso α=1. Essendo G banalmente normale in se stesso e ricordando che $C_G(G) = Z(G) = \zeta_1(G)$, possiamo applicare il punto precedente a G ottenendo $G/\zeta_1(G)$ è senza torsione.
Caso $\alpha \geq$1. Si procede analogamente se assumiamo che $G/\zeta_\alpha(G)$ sia senza torsione. E' infatti suficiente applicare il punto 1. a $\bar{G} := G/\zeta_\alpha(G) =: \bar{N}$ per ottenere che

$$\frac{G/\zeta_\alpha(G)}{Z(G/\zeta_\alpha(G))} = \frac{G/\zeta_\alpha(G)}{\zeta_{\alpha+1}(G)/\zeta_\alpha(G)} \cong \frac{G}{\zeta_{\alpha+1}(G)}$$

è senza torsione.
Per completare la dimostrazione per induzione su α, rimane da considerare il caso in cui l'ordinale β è limite. In questo caso si ha

$$\zeta_\beta(G) = \bigcup_{\alpha<\beta} \zeta_\alpha(G),$$

pertanto se $g^n \in \zeta_\beta(G)$ per qualche $1 \leq n \in \mathbb{N}$, allora $g^n \in \zeta_\alpha(G)$ per qualche $\alpha < \beta$. Per ipotesi induttiva abbiamo che $g \in \zeta_\alpha(G)$ ed essendo $\zeta_\alpha(G) \leq \zeta_\beta(G)$, allora $g \in \zeta_\beta(G)$. Abbiamo così concluso che $G/\zeta_\beta(G)$ è privo di torsione. □

Possiamo ora dimostrare due risultati riguardanti i sottogruppi normali, abeliani e senza torsione di un gruppo localmente nilpotente.

Lemma 3.1.4. *Sia G un gruppo localmente nilpotente e A un suo sottogruppo normale, abeliano e senza torsione. Siano $a \in A$ e $x_1, ..., x_n \in G$, tali che $[a, x_1, ..., x_n] \neq 1$. Allora gli elementi di A: $a, [a, x_1], [a, x_1, x_2], ..., [a, x_1, ..., x_n]$ sono indipendenti.*

Dimostrazione. Assumiamo il contrario; allora esistono $s \in \mathbb{N}$ tale che $0 \leq s \leq n$ e $d_s, ..., d_n \in \mathbb{Z}$ con $d_s \neq 0$, tali che

$$[a, x_1, ..., x_s]^{d_s}[a, x_1, ..., x_{s+1}]^{d_{s+1}}....[a, x_1, ..., x_n]^{d_n} = 1. \qquad (3.2)$$

Ora, essendo il gruppo $X := \langle a, x_1, ..., x_n \rangle$ finitamente generato, esso è nilpotente. Pertanto esiste un intero $k \geq 1$ tale che $b := [a, x_1, ..., x_s] \in \zeta_k(X) \setminus \zeta_{k-1}(X)$. Allora

$$b^{-d_s} = [b, x_{s+1}]^{d_{s+1}} .... [b, x_{s+1}, ..., x_n]^{d_n} \in \zeta_{k-1}(X). \tag{3.3}$$

Perciò $1 = [b^{-d_s},_{k-1} X] = [b,_{k-1} X]^{-d_s}$, dove la prima uguaglianza è dovuta a (3.3) mentre la seconda al fatto che A è sottogruppo normale e abeliano. Infine, poiché A è privo di torsione, si ha che $[b,_{k-1} X] = 1$. Ma ciò significa che $b \in \zeta_{k-1}(X)$ ed è una contraddizione. □

Lemma 3.1.5 (Čarin). *Sia G un gruppo localmente nilpotente e sia A un suo sottogruppo normale e abeliano. Se A è senza torsione di rango finito d, allora*

i. $A \leq \zeta_d(G)$;

ii. $G/C_G(A)$ *è un sottogruppo senza torsione e nilpotente.*

Dimostrazione. Il punto i. segue dal Lemma 3.1.4 e dalla definizione di rango finito di un insieme abeliano.
Per quanto riguarda il punto ii., si deduce immediatamente dalla Proposizione 3.1.3 punto 2. che $G/C_G(A)$ è un sottogruppo senza torsione. Per provarne la nilpotenza è sufficiente provare che $C_G(A) \geq \gamma_d(G)$, infatti ciò significa che $G/C_G(A)$ è nilpotente. Proviamo dunque $C_G(A) \geq \gamma_d(G)$. Dal punto precedente sappiamo che $A \leq \zeta_d(G)$ e ciò implica che $C_G(A) \geq C_G(\zeta_d(G))$. Ricordiamo che per il Lemma 1.1.4 vale $[\zeta_d(G), \gamma_d(G)] = 1$, da cui deduciamo che $\gamma_d(G) \leq C_G(\zeta_d(G)) \leq C_G(A)$. □

Per proseguire con un corollario del Lemma di Čarin è necessario introdurre una nuova notazione per quanto riguarda i gruppi policiclici.

Definizione 3.1.6. *Dato un gruppo H policiclico, il numero di fattori ciclici infiniti in una serie policiclica di H è un invariante di H ed è detto la lunghezza di Hirsch di H. Si denota con $h(H)$.*

Corollario 3.1.7. *Sia G un gruppo localmente nilpotente e senza torsione. Sia H un sottogruppo di G finitamente generato e normale. Allora $H \leq \zeta_h(G)$, con h la lunghezza di Hirsch di H.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che H è un sottogruppo finitamente generato di G e dunque è nilpotente. Perciò, applicando la Proposizione 1.5.4, H è policiclico e ha pertanto senso considerare la lunghezza di Hirsch di H. La dimostrazione si svolge per induzione sulla lunghezza di Hirsch $h(H)$.

Essendo H nilpotente, allora $Z(H) \neq 1$. Inoltre $Z(H)$ è finitamente generato, dato che H è finitamente generato e nilpotente. Chiamiamo $A := Z(H)$ e ricordiamo che un gruppo abeliano finitamente generato e senza torsione è somma diretta di gruppi ciclici infiniti; dunque

$$h(A) = rank(A). \tag{3.4}$$

Ora siano $h_1 = h(H/A)$ e $h_2 = h(A)$, allora sappiamo che $h_1 + h_2 = h(H) = h$ ed, essendo $h_2 \neq 1$, certamente abbiamo $h_1 < h$. Per il primo punto del Lemma di Čarin 3.1.5 applicato ad A e ricordando (3.4), otteniamo che $A \leq \zeta_{h_2}(G)$. Se quozientiamo modulo $\zeta_{h_2}(G)$ e indichiamo con "$^-$" le immagini dei sottogruppi di G tramite la proiezione canonica sul gruppo $G/\zeta_{h_2}(G)$, allora $\bar{H} = H/\zeta_{h_2}(G) \leq H/A$ ha lunghezza di Hirsch

$$h(\bar{H}) \leq h(H/A) = h_1. \tag{3.5}$$

Essendo immagini omomorfe di G e H rispettivamente, $\bar{G}$ è senza torsione ed $\bar{H}$ è finitamente generato, allora, per ipotesi induttiva,

$$\bar{H} \leq \zeta_{h(\bar{H})}(\bar{G}) \leq \zeta_{h_1}(\bar{G}). \tag{3.6}$$

Possiamo allora concludere che $H \leq \zeta_{h_1+h_2}(G) = \zeta_h(G)$; infatti si può provare facilmente che $\dfrac{\zeta_{h_1+h_2}(G)}{\zeta_{h_2}(G)} = \zeta_{h_1}\left(\dfrac{G}{\zeta_{h_2}(G)}\right)$.

□

3.2 Isolatori

Come anticipato, stumento chiave per dimostrare il Teorema di Smith, seguendo le indicazioni di Casolo, è la teoria degli isolatori di P. Hall. Infatti essa racchiude in sé, in modo molto elegante, il problema dell'estrazione di radici nei gruppi localmente nilpotenti; con ciò, in pratica, si intende che per ogni gruppo localmente nilpotente G e per ogni suo sottogruppo H, il gruppo quoziente $G/I_G(H)$ è privo di torsione, dove con $I_G(H)$ si indica l'isolatore di H in G. Ricorreremo spesso agli isolatori principalmente per questa loro proprietà.

Prima di dare la definizione di isolatore, ricordiamo che se π è un insieme di primi, un intero $n \neq 0$ è detto *π-numero* se, e solo se, tutti i suoi divisori primi sono elementi di π.

Definizione 3.2.1. *Sia π un insieme di primi e sia H un sottogruppo del gruppo G. Il π-isolatore di H in G è l'insieme*

$$I_G^\pi(H) = \{\, x \in G \mid x^n \in H \text{ per qualche } \pi\text{-numero } 1 \leq n \in \mathbb{N}\}.$$

Nel caso in cui l'insieme π è l'insieme di tutti i primi, solitamente si omette nella notazione e si parla semplicemente di *isolatore* $I_G(H)$ di $H \leq G$:

$$I_G(H) = \{\, x \in G \mid x^n \in H \text{ per qualche } 1 \leq n \in \mathbb{N}\}.$$

Vediamo ora alcuni semplici risultati necessari per lavorare con gli isolatori. Li enunceremo nel caso in cui l'insieme π coincide con tutti i numeri naturali primi, ma con qualche semplice accortezza si possono dimostrare anche per un qualsiasi insieme di primi.

Lemma 3.2.2. *Sia G un gruppo localmente nilpotente; allora, per ogni $H \leq G$,*

$$I_G(H) \leq G.$$

Dimostrazione. Sia $H \leq G$ e siano x, y due qualsiasi elementi di $I_G(H)$, allora se dimostriamo che $\langle x, y\rangle \subseteq I_G(H)$ possiamo concludere.
Essendo $x, y \in I_G(H)$, esistono $n_x, n_y \in \mathbb{N}$ tali che x^{n_x} , $y^{n_y} \in H$. Chiamiamo $m = m.c.m.(n_x, n_y)$, allora

$$V := \langle x^m, y^m\rangle \leq H.$$

Sia ora $U := \langle x, y\rangle$. Essendo $U \leq G$ finitamente generato, esso è nilpotente di classe c. Di seguito proveremo, per induzione su c, che $|U : V|$ è finito; infatti ciò implica che $\langle x, y\rangle = U \subseteq I_G(H)$.
Supporre che $c = 1$ è equivalente ad ipotizzare che U sia abeliano e, in questo caso, il fatto che l'indice di V in U è finito, è chiaro.
Consideriamo il caso $c \geq 2$; allora $\gamma_c(U) \triangleleft U$. Dunque possiamo considerare il gruppo quoziente $U/\gamma_c(U)$ e tutti i suoi sottogruppi. In particolare, osserviamo che $U/\gamma_c(U)$ è un gruppo nilpotente di classe di nilpotenza $c-1$ e, applicando l'ipotesi induttiva, otteniamo che $\gamma_c(U)V/\gamma_c(U)$ è un suo sottogruppo di indice finito. Ricorrendo poi al Terzo Teorema di Isomorfismo, abbiamo

$$\left|\frac{U}{\gamma_c(U)} : \frac{\gamma_c(U)V}{\gamma_c(U)}\right| \cong |U : \gamma_c(U)V| < +\infty. \tag{3.7}$$

Ricordiamo la definizione di $\gamma_c(U) = [U,_{c-1} U] = \langle [u_1, \ldots, u_c] \mid u_i \in \{x, y\}$, con $i = 1, .., c\rangle$ e consideriamo uno di siffatti generatori di $\gamma_c(U)$, $\omega = [u_1, \ldots, u_c]$; allora per il Lemma 1.5.2

$$\omega^{m^c} = [u_1^m, \ldots, u_c^m] \in \gamma_c(U) \cap \langle x^m, y^m\rangle = \gamma_c(U) \cap V.$$

Ciò implica che il gruppo quoziente $\gamma_c(U)/\gamma_c(U) \cap V$ è abeliano e finitamente generato da elementi di indice finito; dunque è finito. Allora, per il Secondo

Teorema di Isomorfismo, abbiamo $\gamma_c(U)/\gamma_c(U) \cap V \cong \gamma_c(U)V/V$ e pertanto anche $\gamma_c(U)V/V$ è finito. Da quest'ultimo risultato e da (3.7) possiamo concludere che

$$|U : V| = \underbrace{|U : \gamma_c(U)V|}_{<\infty} \underbrace{|\gamma_c(U)V : V|}_{<\infty} < \infty.$$

□

Vi sono due osservazioni importanti che seguono direttamente da questo risultato e le troviamo nella seguente proposizione:

Proposizione 3.2.3. *Sia $H \leq G$ con G gruppo localmente nilpotente. Allora*

1. $I_G(I_G(H)) = I_G(H)$;
2. *se* $H \trianglelefteq G$, *allora* $I_G(H) \trianglelefteq G$.

Dimostrazione. (1) Dalla definizione di isolatore segue immadiatamente che $H \subseteq I_G(H)$ per ogni $H \leq G$; dunque $I_G(H) \subseteq I_G(I_G(H))$. Anche l'altra inclusione è una semplice applicazione della definizione: sia $x \in I_G(I_G(H))$, ciò significa che esiste un $1 \leq n \in \mathbb{N}$ tale che $x^n \in I_G(H)$. Ovvero esiste $1 \leq m \in \mathbb{N}$ tale che $(x^n)^m \in H$, ma ciò equivale a dire che $x \in I_G(H)$.
(2) Segue da un semplice conto: supponiamo $H \trianglelefteq G$ e sia $x \in I_G(H)$, allora esiste $1 \leq n \in \mathbb{N}$ tale che $x^n \in H$. Osserviamo che per ogni $g \in G$, $(x^g)^n = g^{-1}x^n g \in H$ e dunque $(x^g) \in I_G(H)$. □

Dalla definizione di isolatore e dal Lemma 3.2.2 si deduce immediatamente che $H \leq I_G(H)$ per ogni $H \leq G$; mentre dalla Proposizione 3.2.3 segue che se $H \leq G$ è nilpotente di classe n, allora anche $I_G(H)$ è nilpotente, ma di classe al più n.

Definizione 3.2.4. *Sia H un sottogruppo del gruppo G; diremo che H è un sottogruppo isolato (o π-isolato) se $H = I_G(H)$ (o $H = I_G^\pi(H)$).*

Proseguendo con le proprietà utili per lavorare con gli isolatori; di seguito infatti vedremo che gli isolatori si comportano bene rispetto alla derivazione e conservano le proprietà dei fattori centrali.

Lemma 3.2.5. *Sia G un gruppo localmente nilpotente e siano H, K due suoi sottogruppi. Allora, per ogni $1 \leq n \in \mathbb{N}$,*

(i) $[G, I_G(H)] \leq I_G([G, H])$; *da cui segue che se U/V è un fattore centrale di G, allora anche $I_G(U)/I_G(V)$ è un fattore centrale;*

(ii) $\gamma_n(I_G(H)) \leq I_G(\gamma_n(H))$;

(iii) $I_G(H)^{(n)} \leq I_G(H^{(n)})$.

Dimostrazione. Siano G, H, K come nelle ipotesi.
(i) Indichiamo con $M = I_G([G, H])$. Con un semplice calcolo di commutatori si dimostra che $[G, H] \trianglelefteq G$, allora, per il secondo punto della Proposizione 3.2.3 abbiamo che $M \trianglelefteq G$. Inoltre, dalla definizione di isolatore e dal fatto che $1_G \in [G, H]$, segue immediatamente che G/M è un gruppo senza torsione. Consideriamo ora un elemento $b \in I_G(H)$ e sia $1 \leq n \in \mathbb{N}$ tale che $b^n \in H$. Allora, per ogni $g \in G$, abbiamo che $[g, b^n] \in [G, H] \leq M$. Ora, dato che G/M è senza torsione ed Engel, $\langle g \rangle^G$ è senza torsione e $[g, b^n] = 1_{G/M}$, possiamo applicarvi il Lemma 3.1.1, ottenendo che $[g, b] = 1_{G/M}$, ovvero che $[g, b] \in M$. In questo modo abbiamo provato che $[G, I_G(H)] \leq M$.
(ii) Procediamo per induzione su $1 \leq n \in \mathbb{N}$.
(Caso $n = 1$) Per definizione di serie discendente centrale abbiamo $\gamma_1(I_G(H)) = I_G(H)$ e $I_G(\gamma_1(H)) = I_G(H)$, che dunque soddisfano banalmente l'inclusione.
(Caso $n \geq 2$) Per alleggerire la notazione rinominiamo il sottogruppo $\gamma_n(H) =: K$. Siano $x_1, ..., x_n$ n-elementi di $I_G(H)$, allora esiste un $1 \leq m \in \mathbb{N}$ tale che $\{x_i^m, ..., x_n^m\} \subset H$. É ora possibile ricorrere all'ipotesi induttiva e ottenere $y := [x_1, .., x_{n-1}] \in \gamma_{n-1}(I_G(H)) \leq I_G(\gamma_{n-1}(H))$. Ciò implica che esiste un $1 \leq t \in \mathbb{N}$ tale che $y^t \in \gamma_{n-1}(H)$. Dunque, se consideriamo $[y^t, x_n^m]$ esso è un elemento di K che è sottogruppo di $I_G(K)$; ovvero $[y^t, x_n^m] \in I_G(K)$. Con un ragionamento analogo a quello fatto nel punto precedente, possiamo applicare il Lemma 3.1.1 al gruppo localmente nilpotente e senza torsione $I_G(H)/I_G(K)$ ed ai suoi sottgruppi $\langle y^t \rangle I_G(K)/I_G(K)$ e $\langle x_n \rangle I_G(K)/I_G(K)$, ottenendo che

$$[y, x_n] \in I_G(K).$$

Abbiamo così provato che ogni elemento $[y, x_n] = [x_1, .., x_{n-1}, x_n] \in \gamma_n(K)$ è un elemento di $I_G(K)$.
(iii) Procediamo nuovamente per induzione su $1 \leq n \in \mathbb{N}$.
Se $n = 1$, abbiamo che

$$I_G(H)^{(1)} =_{(*)} \gamma_2(I_G(H)) \leq_{(**)} I_G(\gamma_2(H)) =_{(*)} I_G(H^{(1)}),$$

dove in $(**)$ siamno ricorsi al punto precedente del lemma, mentre in $(*)$ abbaimo semplicemente utilizzato la definizione del secondo termine della serie centrale discendente.
Se $n \geq 2$, il termine n-esimo della serie centrale è per definizione $I_G(H)^{(n)} = [I_G(H)^{(n-1)}, I_G(H)^{(n-1)}] = \gamma_2(I_G(H)^{(n-1)})$. Per l'ipotesi induttiva si ha poi $\gamma_2(I_G(H)^{(n-1)}) \leq \gamma_2(I_G(H^{(n-1)}))$ e dunque ,applicando il punto precedente

del lemma, possiamo concludere che

$$I_G(H)^{(n)} \leq \gamma_2(I_G(H^{(n-1)})) \leq I_G(\gamma_2(H^{(n-1)})) = I_G(H^{(n)}).$$

□

É doveroso osservare che quest'ultimo lemma è un caso particolare di un risultato generale di P. Hall che vedremoi nel paragrafo successivo.

3.2.1 Teorema di P. Hall

Innanzitutto introduciamo alcune notazioni.
Siano $H_1, H_2, ..., H_n$ sottogruppi di G e sia θ una qualsiasi parola in n variabili, allora indichiamo con $\theta(H_1, ..., H_n)$ il sottogruppo di G generato da tutti gli elementi della forma $\theta(h_1, ..h_n)$ con $h_i \in H_i$, per ogni $1 \leq i \leq n$.
Come da consuetudine, dato un insieme di primi, π, indichiamo con π' l'insieme dei primi naturali che non appartengono a π. Inoltre, diciamo che un gruppo G è un π-*gruppo* (o un π'-*gruppo*) se tutti i divisori primi del suo ordine sono elementi di π (o π').
Il Teorema di P. Hall si simostra ricorrendo essenzialmente al lemma seguente.

Lemma 3.2.6. *Siano $A_1, \ldots, A_n$ sottogruppi del gruppo finitamente generato e nilpotente G e, per ogni $1 \leq i \leq n$, sia $B_i \leq A_i$ con $|A_i : B_i|$ finito. Sia π l'insieme di tutti i primi che dividono gli indici di $|A_i : B_i|$ e sia $\theta(x_1, \ldots, x_n)$ una parola. Allora*

$$|\theta(A_1, \ldots, A_n) : \theta(B_1, \ldots, B_n)| \text{ è finito ed è un } \pi\text{-numero.}$$

Dimostrazione. Per alleggerire la notazione chiamiamo $H = \theta(A_1, ..A_n)$ e $K = \theta(B_1, ..B_n)$ e notiamo che $K \leq H$. Supponiamo, per contraddizione, che l'indice di K in H non sia un π-numero, ovvero

$$|H : K| \ \in \pi' \quad \text{oppure} \quad \text{sia } \infty. \tag{3.8}$$

Innanzitutto, essendo G nilpotente e finitamente generato, esso soddisfa la condizione di massimalità come enunciato nella Proposizione 1.4.5; pertanto esiste un sottogruppo $N \trianglelefteq G$ massimale tra i sottogruppi $M \trianglelefteq G$ tali che

$$|HM : KM| \ \underline{\textbf{non}} \ \pi\text{-numero.} \tag{3.9}$$

Possiamo assumere che $N = 1$; infatti è sempre possibile ricondursi a questo caso sostituendo G e i suoi sottogruppi con la rispettiva proiezione sul gruppo

quoziente G/N.
Con le assunzioni fatte sinora andiamo a studiare Z, il centro di G.
Per la massimalità di N, si ha che $Z \cap K = 1$; infatti $Z \cap K \trianglelefteq G$ e soddisfa la condizione (3.9) dato che

$$\begin{aligned} |H(Z \cap K) : K(Z \cap K)| = |H(Z \cap K) : K| &= \frac{|H||(Z \cap K)|}{|H \cap (Z \cap K)||K|} \\ &= \frac{|H||(Z \cap K)|}{|(Z \cap K)||K|} = |H : K|. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Supponiamo che Z contenga un sottogruppo ciclico infinito, detto Y. Allora, per la massimalità di N, $|HY : KY|$ deve essere un π-numero, ovvero

$$|HY : KY| = \frac{|H||Y|}{|H \cap Y|}\frac{|K \cap Y|}{|K||Y|} = \frac{|H : K|}{|H \cap Y|}\ \pi\text{-numero}, \tag{3.11}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $K \cap Y \leq K \cap Z = 1$. Ricordando che per ipotesi (3.8) $|H : K|$ non è un π-numero, l'equivalenza appena trovata implica che $H \cap Y \neq 1$. Chiamiamo $C = H \cap Y$ e osserviamo che C è un gruppo ciclico infinito, essendo $C \leq Y$. Ora consideriamo un primo $q \in \pi'$ e il gruppo C^q generato dalle potenze q-esime degli elementi di C. Dalla definizione di C, segue che $C^q \leq C \leq Z$ e dunque C e C^q sono entrambi normali in G. Nuovamente per la massimalità di N, abbiamo che $|HC : KC|$ e $|HC^q : KC^q|$ sono π-numeri; in particolare

$$\begin{aligned} \underbrace{|HC^q : KC^q|}_{\pi\text{-numero}} =_{(a)} |H : KC^q| = |H : KC||KC : KC^q| &=_{(b)} |H : KC|q \\ &= \underbrace{|HC : KC|}_{\pi\text{-numero}}\underbrace{q}_{\in \pi'}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

dove in (a) e in (b) abbiamo ricordato rispettivamente che C^q e C sono sottogruppi di H. L'uguaglianza in (3.12) è una contraddizione e pertanto Z non possiede sottogruppi ciclici infiniti; ovvero tutti gli elementi di Z hanno ordine finito. Sia dunque R un sottgruppo ciclico di ordine primo r, allora, per lo stesso ragionamento fatto per Y in (3.11), $|HR : KR|$ deve essere un π-numero, $R \cap K = 1$ e $R \cap H \neq 1$. In particolare, quest'ultimo risultato ed il fatto che R è ciclico di ordine primo, implica che $R \leq H$. Riassumendo, $|HR : KR| = |H : KR|$ deve essere un π-numero e ciò implica che $r \in \pi'$, in quanto vale l'uguaglianza

$$\underbrace{|H : K|}_{\text{non } \pi\text{-numero}} = |H : KR||KR : K| = \underbrace{|H : KR|}_{\pi\text{-numero}} r.$$

Poiché quanto appena provato vale per ogni primo r che divide l'ordine di Z, si ha che Z è un π'-gruppo finito. Allora, ricordando che se un gruppo nilpotente ha centro di esponente finito allora esso ha come ordine una potenza dell'esponente del centro, concludiamo che anche G deve essere un π'-gruppo finito e ciò è in contraddizione con le ipotesi del lemma. $\square$

Procediamo con la dimostrazione del Teorema di P. Hall.

Teorema 3.2.7 (P. Hall). *Sia $\theta(x_1, \ldots, x_n)$ una parola, sia π un insieme di primi e siano $H_1, \ldots, H_n$ sottogruppi di un gruppo localmente nilpotente G, allora*

$$\theta(I_G^\pi(H_1), \ldots, I_G^\pi(H_n)) \leq I_G^\pi(\theta(H_1, \ldots, H_n)).$$

Dimostrazione. Per comodità chiamiamo $U = \theta(I_G^\pi(H_1), \ldots, I_G^\pi(H_n))$ e $V = \theta(H_1, \ldots, H_n)$, allora dobbiamo provare che $U \leq I_G^\pi(V)$. Sia $\theta(g_1, \ldots, g_n)$ un elemento di U, con $g_i \in I_G^\pi(H_i)$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Definiamo ora i sottogruppi $A_i = \langle g_i \rangle$ e $B_i = \langle g_i^{m_i} \rangle$, dove, per ogni i, $1 \leq m_i \in \mathbb{N}$ è tale che $g_i^{m_i} \in H_i$. Sia $A := \langle A_1, \ldots, A_n \rangle$, esso è un gruppo finitamente generato e pertanto nilpotente. Per come abbiamo costruito A e i suoi sottogruppi, A_i e B_i, è possibile applicarvi il Lemma 3.2.6 deducendo che $|\theta(A_1, \ldots, A_n) : \theta(B_1, \ldots, B_n)|$ è un π-numero. Infatti, per costruzione, $|A_i : B_i| = m_i$ per ogni $i \in \pi$. Dato che A é nilpotente, allora ogni suo sottogruppo è subnormale e dunque $\theta(B_1, \ldots, B_n) \lhd\lhd \theta(A_1, \ldots, A_n)$. In particolare, essendo $g \in \theta(A_1, \ldots, A_n)$, si ha $g^m \in \theta(B_1, \ldots, B_n) \leq V$ per un quelche $m \in \pi$, che è equivalente ad affermare che $g \in I_G^\pi(V)$. Dato che sono elementi del tipo di g che generano U, possiamo concludere che $U \leq I_G^\pi(V)$. $\square$

Il teorema di P. Hall ha una diretta conseguenza che è molto utile quando si lavora con gli isolatori:

Corollario 3.2.8. *Siano H, K sottogruppi del gruppo localmente nilpotente G, allora*

$$[I_G(H), I_G(K)] \leq I_G([H, K]).$$

Dimostrazione. La dimostrazione consiste nell'applicazione del Teorema di P. Hall a G, H, K dove la parola θ che si utilizza è il commutatore di due elementi. Infatti, dati $H, K \leq G$, la parola θ genera il sottogruppo $[H, K]$ di G e dal Teorema 3.2.7 segue che

$$[I_G(H), I_G(K)] = \theta(I_G(H), I_G(K)) \leq I_G(\theta(H, K)) = I_G([H, K]).$$

$\square$

Osservazione 3.2.9. *Se applichiamo il Corollario 3.2.8 ad un qualsiasi sottogruppo H ed al suo normalizzante in G, $N_G(H)$, otteniamo che*

$$I_G(N_G(H)) \leq N_G(I_G(H)). \tag{3.13}$$

In particolare, abbiamo che il normalizzante in G di un sottogruppo isolato H è anch'esso isolato; ovvero se $H = I_G(H)$ allora

$$N_G(H) = I_G(N_G(H)).$$

Osservazione 3.2.10. *Altra immediata conseguenza di questo corollario è che se H è subnormale di difetto d in G, allora $I_G(H)$ è subnormale di difetto al più d:*

$$H \lhd\lhd^d G \qquad \Rightarrow \qquad I_G(H) \lhd\lhd^d G. \tag{3.14}$$

Infatti, con un semplice calcolo, si può provare che se $H = H_d \lhd H_{d-1}$ allora anche $I_G(H) \trianglelefteq H_{d-1}$.

Passiamo ora allo studio degli isolatori di gruppi senza torsione; in questo caso è possibile ottenere dei risultati molto più forti di quelli ottenuti sinora. Prima di enunciare e provare i risultati più interessanti per questo elaborato, è bene osservare che se un gruppo G è senza torsione, in termini di isolatori, ciò è equivalente ad affermare che $I_G(1) = T(G) = 1$.

Lemma 3.2.11. *Sia G un gruppo localmente nilpotente e privo di torsione, e sia H un sottogruppo di G. Allora, per ogni ordinale α, si ha*

$$\zeta_\alpha(I_G(H)) = I_G(\zeta_\alpha(H)).$$

Dimostrazione. Per induzione sull'ordinale α.

Se $\alpha = 0$, innanzitutto ricordiamo che per definizione della serie centrale ascendente $\zeta_0(H) = 1$ per ogni $H \leq G$ e l'uguaglianza si verifica semplicemente, in quanto

$$\zeta_0(I_G(H)) = 1 = T(G) = I_G(1) = I_G(\zeta_0(H))$$

avendo assunto G senza torsione.

Se $\alpha \geq 1$ allora possiamo assumere $\alpha = \beta + 1$ per un quelche ordinale β. Sia $K := \zeta_\beta(H)$ e siano $x \in I_G(\zeta_\alpha(H))$ e $g \in I_G(H)$. Allora esistono $1 \leq m \in \mathbb{N}$ tale che $x^m \in \zeta_\alpha(H)$ e $g^m \in H$, ovvero, ricordando anche la definizione di serie centrale ascendente,

$$[g^m, x^m] \in [H, \zeta_\alpha(H)] \leq \zeta_\beta(H) = K.$$

Ora, per il Lemma 3.1.1 applicato a G/K ed a $\langle g\rangle^G K/K$, $\langle x^m\rangle^G K/K$, si ha che $[g,x] \in K \leq I_G(K)$ e ciò è vero per ogni $x \in I_G(\zeta_\alpha(H))$ e per ogni $g \in I_G(H)$. Dato che siffatti $[g,x]$ generano $[I_G(H), I_G(\zeta_\alpha(H))] \leq I_G(K)$ e che, per ipotesi induttiva, $I_G(\zeta_\beta(H)) = \zeta_\beta(I_G(H))$ otteniamo che

$$[I_G(H), I_G(\zeta_\alpha(H))] \leq \zeta_\beta(I_G(H)).$$

Ciò prova che $I_G(\zeta_\alpha(H)) \leq \zeta_\alpha(I_G(H))$. Viceversa, sia $y \in \zeta_\alpha(I_G(H))$ e osserviamo che, essendo $\zeta_\alpha(I_G(H)) \leq I_G(H)$, esiste un $1 \leq n \in \mathbb{N}$ tale che $y^n \in I_G(H)$. Dunque si ha la seguente catena di inclusioni:

$$[H, y^n] \leq [I_G(H), y^n] \cap H \leq \zeta_\beta(I_G(H)) \cap H.$$

Per ipotesi induttiva si ha $\zeta_\beta(I_G(H)) = I_G(\zeta_\beta(H))$ e dunque $I_G(\zeta_\beta(H)) \cap H = I_G(K) \cap H = I_H(K)$. Quest'ultimo fatto ci permette di concludere che

$$[H, y^n] \leq I_H(K). \tag{3.15}$$

Osserviamo ora che $I_H(K) = T(H/K)$, allora, per il secondo punto della Proposizione 3.1.3, applicato al gruppo senza torsione e localmente nilpotente H, possiamo affermare che $T(H/K) = 1_{H/K}$, in altri termini $I_H(K) = K$. Unendo quanto appena provato a (3.15), troviamo che $[H, y^n] \leq K = \zeta_\beta(H)$ e ciò implica che $y^n \in \zeta_{\beta+1}(H) = \zeta_\alpha(H)$. Dunque $y \in I_G(\zeta_\alpha(H))$ per ogni $y \in \zeta_\alpha(I_G(H))$ e ci permette di concludere che $\zeta_\alpha(I_G(H)) \leq I_G(\zeta_\alpha(H))$.

Procediamo con l'ultimo caso da considerare, ossia quando α è un ordinale limite. Per definizione possiamo scrivere $\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$ e che

$$\begin{aligned} \zeta_\alpha(I_G(H)) &= \bigcup_{\beta<\alpha} \zeta_\beta(I_G(H)) =_{(*)} \bigcup_{\beta<\alpha} I_G(\zeta_\beta(H)) \\ &= I_G(\bigcup_{\beta<\alpha} \zeta_\beta(H)) = I_G(\zeta_\alpha(H)), \end{aligned}$$

dove in $(*)$ abbiamo utilizzato il fatto che la veridicità dell'enunciato per un qualsiasi ordinale β non limite è stata provata nel punto precedente. $\square$

Corollario 3.2.12. *Sia G un gruppo localmente nilpotente e senza torsione. Se G possiede un sottogruppo H con $I_G(H) = G$ e che sia nilpotente (risolubile, ipercentrale) di classe c (di lunghezza derivata d, lunghezza α), allora G è nilpotente di classe c (risolubile di lunghezza derivata d, ipercentrale di lunghezza α).*

Dimostrazione. Procediamo con la dimostrazione tenendo a mente quanto osservato in precedenza: G è senza torsione se, e solo se, $I_G(1) = 1$.

Se $H \leq G$ è nilpotente di classe c allora $\gamma_{c+1}(H) = 1$; inoltre per il punto *(ii)* del Lemma 3.2.5 e per l'ipotesi $I_G(H) = G$ si ha:

$$1 = I_G(\underbrace{\gamma_{c+1}(H)}_{=1}) = \gamma_{c+1}(I_G(H)) = \gamma_{c+1}(G).$$

Dunque $\gamma_{c+1}(G) = 1$ e ciò implica che G è nilpotente di classe c.

Ricordiamo che H è un sottogruppo risolubile di lunghezza derivata d se, e solo se, $H^{(d)} = 1$ e $H^{(d-1)} \neq 1$. Tramite il punto *(iii)* del Lemma 3.2.5 otteniamo

$$G^{(d)} = (I_G(H))^{(d)} = I_G(H^{(d)}) = I_G(1) = 1,$$

ovvero che $G^{(d)} = 1$ e significa che G è risolubile di lunghezza derivata d.

Infine, supponiamo che $H \leq G$ sia ipercentrale di lunghezza α e con $I_G(H) = G$, allora $\zeta_\beta(H) = \zeta_{\beta+1}(H)$ per ogni ordinale $\beta \geq \alpha$. Per il Lemma 3.2.11 possiamo scrivere

$$\zeta_\beta(G) = \zeta_\beta(I_G(H)) = I_G(\zeta_\beta(H)) = I_G(\zeta_{\beta+1}(H)) = \zeta_{\beta+1}(G)$$

ossia $\zeta_\beta(G) = \zeta_{\beta+1}(G)$ e ciò vale per ogni $\beta \geq \alpha$. Pertanto G è ipercentrale di lunghezza α. $\square$

Lemma 3.2.13. *Sia G un gruppo localmente nilpotente che ammette un sottogruppo nilpotente H di indice finito. Se $T(H)$ ha esponente finito, allora G è nilpotente.*

Dimostrazione. A patto di considerare il cuore normale $H_G = \bigcap_{g \in G} H^g$ di H in G al posto di H, possiamo assumere che $H \triangleleft G$. Infatti, essendo $H_G \leq H$, esso ha indice finito in G ed è nilpotente. $T(H)$ è nilpotente ed ammette una serie caratteristica finita i cui fattori sono tutti centrali e gruppi elementari abeliani per un numero finito di primi. Sia U/V un fattore di siffatta serie e sia un p-gruppo elementare e abeliano, allora $H \geq C_G(U/V)$, quindi $G/C_G(U/V)$ è finito e pertanto è un p-gruppo. Si può dimostrare che se un gruppo $\bar{G}$ ha un p-sottogruppo $\bar{A}$ abeliano, elementare e normale non banale tale che $\bar{G}/C_{\bar{G}}(\bar{A})$ è un p-gruppo finito, allora esiste un $1 \leq n \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{A} \leq \zeta_n(\bar{G})$; quindi esiste un $1 \leq m \in \mathbb{N}$ tale che $U/V \leq \zeta_m(G/V)$, con $\zeta_m(G/V)$ termine della serie centrale ascendente di G/V. Ripetendo questo ragionamento per ogni fattore della serie centrale di $T(H)$, proviamo che $T(H) \leq \zeta_n(G)$ per un quelche $n \in \mathbb{N}$. Ora, osserviamo che $T(G)/T(H)$ è isomorfo a $T(G)H/H$ ed è una sezione normale finita di G; per tale motivo $T(G) \leq \zeta_k(G)$ per un qulache $k \in \mathbb{N}$. Infine, il Corollario precedente 3.2.12 applicato al gruppo $G/T(G)$ ne assicura la nilpotenza e ciò implica a sua volta la nilpotenza di G. $\square$

3.2.2 Lemma di Möhres

Il Lemma di Möhres è una semplice, ma molto utile, applicazione della Teoria degli isolatori ai gruppi senza torsione.

Lemma 3.2.14. *Siano G un gruppo localmente nilpotente e numerabile, F un sottogruppo finitamente generato di G e M un sottoinsieme finito di G con $F \cap M = \emptyset$. Allora esiste un sottogruppo H di G tale che $I_G(H) = G$, $F \leq H$ e $H \cap M = \emptyset$.*

Dimostrazione. Essendo G numerabile, possiamo scriverlo come $G = \{x_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$. Mostreremo che è possiblile costruire ricorsivamente una serie di sottogruppi

$$F = H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq ... \leq H_{n-1} \leq H_n \leq ... \tag{3.16}$$

di G finitamente generati e con la proprietà di avere intersezione triviale con l'insieme M.
Supponiamo allora che per ogni $n \in \mathbb{N}$ ci siano $n+1$ interi positivi $m_0, m_1, ..., m_n$, tali che

$$\langle F, x_0^{m_0}, ..., x_n^{m_n} \rangle \cap M = \emptyset. \tag{3.17}$$

Sia $H_n = \langle F, x_0^{m_0}, ..., x_n^{m_n} \rangle$ e definiamo $K = \langle H_n, x_{n+1} \rangle$. Dunque, essendo K finitamente generato, esso è nilpotente e policiclico. Per il Teorema di Mal'cev 1.4.3, H_n è l'intersezione di tutti i sottogruppi di K con indice finito che lo contengono.
Dato che M è finito, esiste sicuramente un sottogruppo W di K tale che

$$H_n \subseteq W \qquad \text{e} \qquad W \cap M = \emptyset.$$

Perciò esiste $0 \neq m_{n+1} \in \mathbb{N}$ tale che $x_{N+1}^{m_{n+1}} \in W$.
Ora, se chiamiamo $H_{n+1} := \langle H_n, {x_{n+1}}^{m_{n+1}} \rangle$, abbiamo che $F \leq H_{n+1}$ e $H_{n+1} \cap M = \emptyset$. In questo modo abbiamo costruito la serie di sottogruppi (3.16) cercata, che ci permette di trovare un sottogruppo di G con le proprietà richieste. Infatti, se definiamo

$$H := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i = \langle F, x_i^{m_i} \mid i \in \mathbb{N} \rangle,$$

segue immediatamente dalla costruzione che

$$F \leq H \quad , \quad H \cap M = \emptyset \quad \text{e} \quad I_G(H) = G.$$

$\square$

Capitolo 4

Gruppi $\mathcal{N}_1$ senza torsione

In quest'ultimo capitolo ripercorreremo pari passo il ragionamento di Casolo per provare che tutti i sottogruppi di $\mathcal{N}_1$ senza torsione sono nilpotenti. Egli trasse ispirazione dal lavoro di Möhres per dimostrarne la risolubilità e applicò quanto trovato con gli isolatori, dapprima ai gruppi $\mathcal{U}_n$ e, successivamente, alla classe $\mathcal{N}_1$ senza torsione.

Cominciamo con qualche osservazione generale.

Lemma 4.0.1. *Sia H un gruppo senza torsione e nilpotente di classe c. Assumiamo che H/H' possa essere generato da r elementi. Allora la lunghezza di Hirsch di H al più $r + r^2 + ... + r^c$.*

Dimostrazione. Sia $A = H/H'$, allora, per ogni $1 \leq i \leq c$, esiste un epimorfismo

$$\underbrace{A \otimes A \otimes .... \otimes A}_{i \text{ volte}} \longrightarrow \gamma_i(H)/\gamma_{i+1}(H) \tag{4.1}$$

per il Teorema 1.5.1. Ora, essendo un gruppo r-generato e abeliano, A ha lunghezza di *Hirsch* al più r. Similarmente , per ogni $i \geq 1$, l'i-esima potenza tensoriale $A \otimes A \otimes .... \otimes A$ ha lunghezza al più r^i. Perciò, per ogni $1 \leq i \leq c$, $\gamma_i(H)/\gamma_{i+1}(H)$ ha lunghezza di Hirsch al più r^i. Quindi, dato che $\gamma_{c+1}(H) = 1$, H ha lunghezza di Hirsch al più $r + r^2 + ... + r^c$. □

4.1 Gruppi in $\mathcal{U}_n$

Prima di affrontare la dimostrazione nel caso generale, Casolo provò alcuni risultati per i gruppi con tutti i sottogruppi subnormali di difetto al più n. Utilizziamo la stessa notazione utilizzata nel paragrafo 1.3 ongi $1 \leq n \in \mathbb{N}$, utilizzertemo il simbolo $\mathcal{U}_n$ per indicare la classe formata da questi gruppi.

Osservazione 4.1.1. *Dalla definizione di $\mathcal{U}_n$ si deducono immediatamente i seguenti fatti.*

1. *Ogni gruppo in $\mathcal{U}_n$ è localmente nilpotente e $(n+1)$-Engel.*
2. *Se il gruppo $G \in \mathcal{U}_n$ è privo di torsione, allora è n-Engel. Infatti, se consideriamo $x \in G$ e $Y := \langle x \rangle^{G,n-1}$, dove, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\langle x \rangle^{G,n}$ è il fattore n-esimo della serie delle successive chiusure normali di $\langle x \rangle$; allora $\langle x \rangle \trianglelefteq Y$. Possiamo inoltre osservare che Y è senza torsione, avendo supposto G senza torsione, ed è localmente nilpotente per quanto notato al punto (1). Applicando il lemma di Carin 3.1.5 a Y e $\langle x \rangle$, possiamo affermare che $\langle x \rangle \leq Z(Y)$; in particolare $x \in Z(Y)$. Da ciò segue che $[Y, x] = 1$ ed implica che, per ogni $g \in G$, $[g,_n x] = 1$; in quanto $[g,_n x] = [g_{n-1}, x, x] \in [Y, x]$.*

La proposizione che affronteremo ora è un caso particolare del noto teorema di Roseblade, (si veda il paragrafo 2.1).

Proposizione 4.1.2. *Esiste una funzione $\rho_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che un gruppo in $\mathcal{U}_n$ senza torsione è nilpotente di classe di nilpotenza al più $\rho_0(n)$.*

Dimostrazione. Definiremo ricorsivamente su n un valore $\rho_0(n)$ tale che, se G è un gruppo in $\mathcal{U}_n$ senza torsione, allora $\gamma_{\rho_0(n)+1}(G) = 1$.
Cominciamo dal caso $n = 1$; in questo caso ogni sottogruppo di G è normale, ovvero è un gruppo di Dedekind. Sappiamo che un gruppo di Dedekind privo di torsione è abeliano; perciò $\rho_0(1) = 1$.
Supponiamo ora di aver già definito un valore $\rho_0(i)$ per ogni $1 \leq i \leq n-1$ e consideriamo un gruppo G in $\mathcal{U}_n$ senza torsione. Allora, per ogni $H \leq G$, abbiamo la serie delle successive chiusure normali siffatta:

$$H = H^{G,n} \trianglelefteq H^{G,n-1} \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H^{G,1} = H^G \trianglelefteq G.$$

Ora, se considero un sottogruppo di G tale che $H \leq K \leq H^G$, allora $H^G = K^G$. Da cui segue che $H^{G,1}/H^{G,2}$ appartiene a $\mathcal{U}_{n-1}$. Similarmente, per ogni per ogni $1 \leq i \leq n-1$, abbiamo che

$$\frac{H^{G,i}}{H^{G,i+1}} \in \mathcal{U}_{n-i}. \tag{4.2}$$

Se poniamo $H_{i+1} = I_{H^{G,i}}(H^{G,i+1})$, per ogni $1 \leq i \leq n-1$, abbiamo che $H_{i+1} \trianglelefteq H^{G,i}$. Quest'ultimo fatto segue dall'Osservazione 3.2.10. Inoltre, abbiamo che $H^{G,i}/H_{i+1}$, essendo sottogruppo di un gruppo senza torsione, è privo di torsione e appartiene a $\mathcal{U}_{n-i}$, in quanto $H^{G,i}/H_{i+1} \leq H^{G,i}/H^{G,i+1}$. Per ipotesi induttiva, $H^{G,i}/H_{i+1}$ è nilpotente di classe di nilpotenza al più

$\rho_0(n-i)$ e dunque ha lunghezza derivata $[log_2(\rho_0(n-i))]+1$. Sia ora $c(n) = \sum_{i=1}^{n-1}([log_2(\rho_0(n-i))]+1)$, allora

$$(H^G)^{(c(n))} \leq I_G(H) \tag{4.3}$$

e ciò vale per ogni $H \leq G$. Se indichiamo con $M = (H^G)^{(c(n))}$, allora $M \leq I_G(H)$, che implica $I_{H^G}(M) \leq I_G(H)$. Ora il gruppo quoziente $H^G/I_{H^G}(M)$ è risolubile, senza torsione e $n-$Engel. Possiamo quindi applicare il Corollario 1.5.10, che afferma che un gruppo senza torsione, risolubile e $n-$Engel di lunghezza derivata d è nilpotente di classe limitata da n^{d-1}; ottenendo così che $H^G/I_{H^G}(M)$ è nilpotente di classe al più $\alpha(n) := n^{c(n)}$.
Ciò significa che $\gamma_{\alpha(n)+1}(H^G/I_{H^G}(M)) = 1_{H^G/I_{H^G}(M)}$, il quale implica

$$\gamma_{\alpha(n)+1}(H^G) \leq I_{H^G}(M).$$

Ricordando poi (4.3) si ottiene che, per ogni $H \leq G$, vale

$$\gamma_{\alpha(n)+1}(H^G) \leq I_{H^G}(M);$$

in particolare, per ogni $x \in G$, $\langle x \rangle^G$ è nilpotente di classe al più $\alpha(n)$.
Ora siano $x_1, x_2, .., x_{\alpha(n)}$ elementi di G e consideriamo il sottogruppo da essi generato $H = \langle x_1, x_2, .., x_{\alpha(n)} \rangle$. Allora, per il Teorema di Fitting, H^G è nilpotente di classe di nilpotenza $\alpha(n)^2$. In particolare, dato che H è generato da $\alpha(n)$ elementi, per il Lemma 4.0.1 segue che la lunghezza di Hirsch di H è

$$g(n) = \alpha(n) + \alpha(n)^2 + ... + \alpha(n)^{\alpha(n)^2} \leq \alpha(n)^{\alpha(n)^2+1}.$$

Possiamo quindi affermare che $\gamma_{\alpha(n)+1}(H^G)$ ha lunghezza di Hirsch al più

$$\alpha(n)^{\alpha(n)^2+1}$$

e dunque per il corollario del Lemma di Carin 3.1.7 applicato al sottogruppo $\gamma_{\alpha(n)+1}(H^G)$, abbiamo:

$$\gamma_{\alpha(n)+1}(H^G) \leq \zeta_{\alpha(n)^{\alpha(n)^2+1}}(G). \tag{4.4}$$

Ciò prova che G è nilpotente di classe di nilpotenza al più $\alpha(n)+\alpha(n)^{\alpha(n)^2+1}$.
$\square$

Il valore $\rho_0(n)$, nel caso di gruppi senza torsione, è noto solamente per $n \leq 4$, dove vale $\rho_0(n) = n$.

4.2 Gruppi in $\mathcal{N}_1$

Continuando a seguire il ragionamento di Casolo, passiamo allo studio dei gruppi $\mathcal{N}_1$ abbandonando l'ipotesi che tutti i sottogruppi subnormali abbiano difetto limitato. I primi due risultati che vedremo sono dovuti a Möhres.

Proposizione 4.2.1. *Sia G un gruppo non nilpotente, senza torsione e in $\mathcal{N}_1$. Allora esistono un $n \in \mathbb{N}$, un sottogruppo H di G non nilpotente e un sottogruppo di H finitamente generato F, tale che tutti i sottogruppi U con $F \leq U \leq H$ hanno difetto al più n in H.*
Inoltre, se G è numerabile, allora H può essere preso tale che $I_G(H) = G$.

Dimostrazione. Supponiamo che la proposiazione sia falsa; allora esiste un gruppo G che non soddisfa l'enunciato e che possiamo supporre, senza perdità di generalità, che sia numerabile. Mostreremo che in queste ipotesi non è possibile costruire induttivamente una serie ascendente di sottogruppi di G finitamente generati e che soddisfino tutte le condizioni richieste nell'enunciato ad U, ma che abbiano difetto almeno $n+1$.
Dunque, fissiamo $H_0 = 1$ e supponiamo di avere trovato, per ogni $n \geq 1$ in $\mathbb{N}$, un sottogruppo di G finitamente generato H_{n-1} e $x_1, ..., x_{n-1}$ elementi di G, tali che $\{x_1, ..., x_{n-1}\} \cap H_{n-1} = \emptyset$. Possiamo allora applicare il lemma di Möhres all'insieme finitamene generato H_{n-1} ed all'insieme finito $\{x_1, ..., x_{n-1}\}$. In tal modo otteniamo l'esistenza di un sottogruppo K_n di G, con $I_G(K_n) = G$ e tale che $\{x_1, ..., x_{n-1}\} \cap K_n = \emptyset$.
Poichè abbiamo supposto che la proposizione non valga per G, deve esistere un $H_n \leq K_n$ finitamente generato, con difetto di subnormalità almeno $n+1$ in G e tale che $H_{n-1} \leq H_n$. Pertanto esiste almeno un elemento $x_n \in [G,_n H_n] \setminus H_n$ e ciò implica che

$$\{x_1, ..., x_{n-1}, x_n\} \; \cap \; H_n \; = \; \emptyset. \tag{4.5}$$

Definiamo $H := \cup_{n \in \mathbb{N}} H_n$, allora H è subnormale in G, in quanto $G \in \mathcal{N}_1$, con un certo difetto di subnormalità d. Perciò

$$\exists \quad x_d \; \in \; [G,_d H_d] \; \leq \; [G,_d H] \; \leq \; H \tag{4.6}$$

da ci si deduce che $x_d \in H_j$, dove $j > d$. Tuttavia ciò contraddice la scelta di H_j che abbiamo costruito in modo tale che soddisfi (4.5). $\square$

Osserviamo che se si richiede che il gruppo A non sia nilpotente, allora la Proposizione 4.2.1 è una applicazione del Teorema di Brookes 2.0.3 dove la famiglia di gruppi che si considera è quella dei gruppi non nilpotenti e senza torsione.

Lemma 4.2.2. *(W. Möhres) Un gruppo senza torsione in cui tutti i sottogruppi sono subnormali è* ***risolubile****.*

Dimostrazione. Sia G un gruppo senza torsione in $\mathcal{N}_1$. Ricordimo che la risolubilità di un gruppo è una proprietà numerabilmente riconoscibile; ovvero G è risolubile se, e solo se, tutti i suoi sottogruppi numerabili lo sono. Pertanto possiamo assumere che G sia numerabile e non sia nilpotente. Allora, dalla Proposizione precedente 4.2.1, segue che esiste un $n \in \mathbb{N}$, un sottogruppo non nilpotente H di G e un sottogruppo finitamente generato F di H, tale che $I_G(H) = G$ e tutti i sottogruppi U con $F \leq U \leq H$ hanno difetto al più n in H. Procediamo per induzione su n per provare che H è risolubile.
Se $n = 1$, allora $F \trianglelefteq G$ e H/F è un gruppo Hamiltoniano, ovvero è un gruppo di Dedekind non abeliano. Perciò $|(G/F)'| \leq 2$. Inoltre, se ricordiamo che per la Proposizione 2.0.1 F è nilpotente, otteniamo che H è risolubile.
Consideriamo ora $n \geq 1$ e osserviamo che se $F \leq U \leq F^H$, allora $U^H = F^H$. Pertanto tutti i sottogruppi di F^H che contendono F hanno difetto al più $n - 1$. Per ipotesi induttiva, F^H è risolubile e, per il Lemma 3.2.5, $N = I_H(F^H)$ è un sottogruppo normale e risolubile di H. Infine, per la Proposizione 4.1.2, il gruppo quoziente H/N è risolubile e dunque possiamo concludere che H è risolubile. $\square$

Prima di proseguire con il prossimo lemma che è un passo chiave verso la dimostrazione del Teorema di Smith, è bene ricordare la definizione di *$p-$gruppo elementare.* Un $p-$gruppo elementare abeliano è un p-gruppo abeliano i cui elementi hanno tutti ordine una potenza di p. Notiamo che un siffatto gruppo è nilpotente. Definitamo anche una funzione che utilizzeremo d'ora in poi: dato un primo p e due interi positivi k, n, indichiamo

$$f_p(k, n) = (n + 2)p^{[log_p k(n+2)]+1} \tag{4.7}$$

Lemma 4.2.3. *Sia $G = A\langle x \rangle$ un gruppo nilpotente , dove $A \trianglelefteq G$ è un $p-$gruppo elementare e abeliano. Assumiamo anche che esistano un sottogruppo F di A e un numero naturale n, tale che $|F| = p^k$, e che ogni sottogruppo $H \leq G$ con $F \leq H$ sia subnormale di difetto al più n in G. Allora*

$$[A,_{f_p(k,n)-1}\, x] = 1. \tag{4.8}$$

Dimostrazione. Per alleggerire la notazione, scriveremo

$$s := f_p(k, n) \qquad \text{e} \qquad m := [log_p k(n + 2)] + 1.$$

Possiamo allora riscrivere l'uguaglianza (4.7) come $s = (n + 2)p^m$; inoltre dalla definizione del logaritmo in base p, segue direttamente che

$$p^m > k(n + 2). \tag{4.9}$$

Supponiamo, per contraddizione, che $[A,_{s-1} x] \neq 1$. Quindi possiamo assumere che $[A,_s x] = 1$. Da queste supposizioni otteniamo che tutti i sottogruppi

$$A, [A, x], [A,_2 x], ..., [A,_{s-1} x], [A,_s x] = 1$$

devono essere distinti tra loro; altrimenti avremmo che $[A,_{s-1} x] = [A,_s x] = 1$. In particolare, abbiamo che

$$\begin{aligned} |[A,_{(n+1)p^m} x]| &\geq p^{s-(n+1)p^m} = p^{(n+2)p^m-(n+1)p^m} \\ &= p^{p^m} \geq p^{k(n+2)} = |F|^{n+2}; \end{aligned} \tag{4.10}$$

dove l'ultima disequazione deriva da (4.9). Ora, essendo A un p-sottogruppo elementare, abeliano e normale, possiamo scrivere per il Lemma 1.1.9

$$[A,_{n+2} x^{p^m}] = [A,_{(n+2)p^m} x] = [A,_s x] = 1. \tag{4.11}$$

In particolare, essendo $F \leq A$, abbiamo $[F,_{n+2} x^{p^m}] = 1$. Da cui seque che se consideriamo il sottogruppo $F^{\langle x^{p^m} \rangle}$, essendo generato da tutti i sottogruppi del tipo $[F,_i x^{p^m}]$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, ha ordine al più $|F|^{n+2}$.
Definiamo ora $H = \langle A, x^{p^m} \rangle$. Abbiamo supposto $A \trianglelefteq G$ e abeliano, ciò implica che $F^{\langle x^{p^m} \rangle} \leq A$ e $F^H = F^{\langle x^{p^m} \rangle}$. Allora possiamo costruire il gruppo quoziente $H/F^H = (A/F^H)(\langle x^{p^m} \rangle F^H/F^H)$, dove A/F^H è un sottogruppo normale e abeliano, e ciò è dovuto al fatto che $A \trianglelefteq G$ ed abeliano; mentre $\langle x^{p^m} \rangle F^H/F^H$ è un sottogruppo ciclico di difetto al più n, infatti $F \leq \langle x^{p^m} \rangle F^H \leq G$. Possiamo ora applicare la generalizzazione del Teorema di Fitting 1.5.6, ottenendo che H/F^H è un sottogruppo nilpotente di classe al più $n+1$. In particolare abbimo

$$[A,_{n+1} x^{p^m}] \leq F^H = F^{\langle x^{p^m} \rangle}. \tag{4.12}$$

Come osservato in precedenza, dato che A è un p-sottogruppo elementare abeliano e normale, possiamo affermare $[A,_{(n+1)p^m} x] = [A,_{n+1} x^{p^m}]$. Sostituendo con questa uguaglianza il primo termine di (4.12) e ricordando la maggiorazione (4.9), troviamo che

$$|[A,_{(n+1)p^m} x]| \leq |F^{\langle x^{p^m} \rangle}| \leq |F|^{n+2} \tag{4.13}$$

che contraddice quanto trovato in (4.10). $\square$

Lemma 4.2.4. *Sia G un gruppo senza torsione e localmente nilpotente. Sia A un sottogruppo normale e abeliano di G, tale che G/A sia abeliano. Supponiamo che esista un sottogruppo finitamente generato $F \leq A$ e un $n \in \mathbb{N}$, tale che tutti i sottogruppi di G contenenti F siano subnormali in G di difetto al più n. Allora G è* ***nilpotente*** *e la sua classe di nilpotenza è limitata da una funzione in $(n, rk(F))$.*

Dimostrazione. Essendo finitamente generato ed abeliano, F ha rango finito $k = rk(F)$. Sia $x \in G$ e sia $X = F^{\langle x \rangle}$ il gruppo generato dai coniugati di F tramite $\langle x \rangle$. Allora $X \leq A$ ed è abeliano in quanto $F \leq A$ e A è un sottogruppo normale e abeliano di G. Inoltre, $X \leq G$ dove G per ipotesi è senza torsione, dunque anche X è privo di torsione. Consideriamo il sottogruppo finitamente generato $\langle F, x \rangle$ di G; poiché quest'ultimo è localmente nilpotente, $\langle F, x \rangle$ è nilpotente. Sia r il rango di X e sia $Y = X^2 = \langle x^2 \mid x \in X \rangle$, allora, per costruzione, $Y \trianglelefteq \langle F, x \rangle$ e X/Y è un gruppo elementare abeliano di ordina 2^r. Infatti, per come abbiamo definito il gruppo quoziente X/Y, esso ha esponente 2 e dunque è abeliano; inoltre X/Y è r generato, pertanto $X/Y \simeq C_2^r$ che ha ordine 2^r. Se definiamo ora $\bar{F} = FY/Y \leq X/Y$, per un analogo ragionamento, $\bar{F}$ è un 2-gruppo elementare e abeliano k generato, ovvero $\bar{F}$ ha ordine 2^k. L'aver supposto che tutti i sottogruppi di G che contengono F sono subnormali di difetto al più n, implica che tutti i sottogruppi di $\langle F, x \rangle$ che contengono F sono subnormali in $\langle F, x \rangle$ di difetto al più n e che lo rimangano anche se si quozienta in Y. In altre parole, tutti i sottogruppi di $\langle F, x \rangle / Y$ che contengono $\bar{F}$ sono subnormali in di difetto al più n in $\langle F, x \rangle / Y$; ciò vale in particolare per $\bar{X} = X/Y = \bar{F}^{\langle x \rangle}$. Per il Lemma 4.2.3 applicato alla sezione $\bar{X}\langle x \rangle / Y$ del gruppo $\langle F, x \rangle$, si ha

$$[\bar{X},_s x] = 1, \tag{4.14}$$

dove $s = f_2(k, n) - 1$. Sia 2^h la più piccola potenza di due più grande di s , allora $[\bar{X},_{2^h} x] = [\bar{X}, x^{2^h}] = 1$ e ciò implica che $\bar{F}$ ha al più 2^h coniugati in $\langle F, x \rangle / Y$. Dato che $\bar{X} = \bar{F}^{\langle x \rangle}$ è un gruppo generato, per definizione, dai coniugati di $\bar{F}$ tramite $\langle x \rangle$, abbiamo che

$$2^r = |X/Y| \leq |\bar{F}|^{2^h} = (2^k)^{2^h} \qquad \Rightarrow \qquad r \leq k2^h.$$

é doveroso osservare a questo punto che h non dipende dal particolare x utilizzato, ma, derivando da $f_2(k, n) - 1$, dipende anch'essa unicamente da k ed n.

Riassumendo, sinora abbiamo dimostrato che per ogni $x \in G$, $X = F^{\langle x \rangle}$ è un sottogruppo abeliano senza torsione di rango r al più $u := k2^h$. Ora, dato che $\langle F, x \rangle$ è senza torsione e nilpotente, essendo sottogruppo di G, segue che

$$[\langle F, x \rangle,_u x] = 1 \qquad \forall x \in G.$$

Per provare ciò, è sufficiente osservare che

$$\langle F, x \rangle = \langle F^{\langle x \rangle}, x \rangle \quad \Rightarrow \quad [\langle F, x \rangle,_u x] = \langle [F^{\langle x \rangle},_u x], \underbrace{[x,_u x]}_{=1} \rangle$$

e ricordare che, per il Lemma di Čarin 3.1.5, $F^{\langle x\rangle} \leq \zeta_u(G)$. Infatti, da quest'ultima inclusione e dalla caratterizzazione della serie centrale (1.1), segue che

$$[F^{\langle x\rangle}, x] \leq [F^{\langle x\rangle}, G] \leq [G, \zeta_u(G)] \leq \zeta_{u-1}(G)$$

e, iterando il ragionamento, si conclude che $[F^{\langle x\rangle},_u x] \leq [F^{\langle x\rangle},_u G] = 1$.

Ora, $F \leq \langle F, x\rangle$, allora per ipotesi $\langle F, x\rangle$ è subnormale in G di difetto al più n. Perciò, per ogni $g, x \in G$, vale

$$[g,_{n+u} x] = [[g,_n x],_u x \in [\langle F, x\rangle,_u x] = 1. \tag{4.15}$$

e dunque G è un gruppo $(n + u)$-Engel. Inoltre, dato che G per ipotesi è anche metabeliano e senza torsione, possiamo dedurre dal Corollario 1.5.10 che G è nilpotente di classe al più $n + u$. □

Vediamo ora l'ultimo tassello che ci servirà nella dimostrazione del Teorema di Smith, che consiste nel provare la nilpotenza di un gruppo localmente nilpotente e senza torsione avente un sottogruppo normale con particolari proprietà.

Lemma 4.2.5. *Sia G un gruppo localmente nilpotente e senza torsione e sia N un sottogruppo normale di G nilpotente. Se $G/I_G(N')$ è nilpotente, allora G è nilpotente.*

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo cha dalla definizione di isolatore si ha in generale che se $A, B \trianglelefteq G$ con $A \leq B$ allora $I_G(A) \leq I_G(B)$ e $A \leq I_G(A)$, $B \leq I_G(B)$. Ricordando inoltre che per il terzo punto del Lemma 3.2.5 $I_G(N') \geq I_G(N)'$, otteniamo la seguente catena di inclusioni

$$I_G(I_G(N)') \geq I_G(N') = I_G(I_G(N')) \geq I_G(I_G(N)')$$

ovvero $I_G(I_G(N)') = I_G(N')$. Da questa uguaglianza e dal punto *2.* della Proposizione 3.2.3 segue che se $N \trianglelefteq G$ ed è tale che $G/I_G(N')$ sia nilpotente, allora anche $I_G(N)$ soddisfa le medesime condizioni. Inoltre, dato che N è nilpotente, per il Lemma 3.2.11 è possibile dimostrare che anche $I_G(N)$ lo è. Infatti, dire che N è nilpotente di classe c è equivalente a dire che il termine della serie centrale ascendente $\zeta_c(N) = N$ e applicando il lemma precedentemente citato si ha

$$\zeta_c(I_G(N)) = I_G(\zeta_c(N)) = I_G(N)$$

che significa che $I_G(N)$ è nilpotente di classe c. Pertanto, se si ha un sottogruppo normale N di G che soddisfa alle ipotesi del lemma, è possibile sostituirlo nella trattazione con il suo isolatore in G, possedendone le medesime

proprietà. Pertanto, da questo punto in poi della dimostrazione, assumeremo che $N = I_G(N)$. Procediamo per induzione sulla classe di nilpotenza di N.
(Caso $c = 1$) In questo caso $N' = 1$ e ciò implica che $I_G(N') = 1$, essendo G senza torsione. Pertanto si ha che $G/I_G(N') = G$ è nilpotente.
(Caso $c \geq 2$) Sia $K = I_N(\gamma_c(N))$, allora $K \trianglelefteq$ e $K \leq Z(N)\ \gamma_c(N) \trianglelefteq N$. Infatti si ha che

$$\begin{aligned}[N, I_G(\gamma_c(N))] &= [I_G(N), I_G(\gamma_c(N))] \leq I_G([N, \gamma_c(N)]) \\ &\leq I_G(\underbrace{\gamma_{c+1}(N)}_{=1}) = 1,\end{aligned}$$

dove abbiano utilizzato prima l'assunzione che $N = I_G(N)$, successivamente il Lemma 3.2.8, infine la definizione della serie centrale discendente e il fatto che G è un gruppo privo di torsione. Dunque N/K è nilpotente di classe al più $n-1$. Inoltre, essendo $N = I_G(N)$, si ha $I_G(K) = I_N(K) = K$ che, unito al fatto che $\frac{G/K}{I_G((N/K)')}$ è nilpotente e G/K è senza torsione, permette di applicare l'ipotesi induttiva e dunque di mostrare che G/K è nilpotente. Sia

$$K/K = K_0/K \leq K_1/K \leq \cdots \leq K_d/K = N/K$$

l'intersezione della serie centrale ascendente di G/K con N/K e, per ogni $s = 0, 1, \ldots, 2d$, sia $T_s = \langle [K_i, K_j] \mid 0 \leq i, j \leq d, i + j = s \rangle$. Ora, per ogni $i, j \in \{1, \ldots, d\}$, valgono le seguenti inclusioni ottenute applicando il Lemma dei Tre Sottogruppi e il fatto che la serie dei K_i sia centrale:

$$[K_i, K_j, G] \leq [K_j, G, K_i][G, K_i, K_j] \leq [K_{j-1}, K_i][K_{i-1}, K_j] \leq T_{i+j-1}.$$

Dunque $[K_i, K_j, G] = [T_s, G] \leq T_{s-1}$ per ogni $s \geq 1$. In altre parole G centralizza la serie

$$1 = [K, K] = T_0 \leq T_1 \leq \cdots \leq T_{2d} = N'.$$

Ne consegue, come osservato nel primo punto del Lemma 3.2.5, che G centralizza anche la serie degli isolatori

$$1 = I_G(1) \leq I_G(T_1) \leq \cdots \leq I_G(T_{2d-1}) \leq I_G(T_{2d}) = I_G(N').$$

Poiché, per ipotesi, $G/I_G(N')$ è nilpotente e G centralizza la serie di $I_G(N')$, possiamo concludere che G è nilpotente. $\square$

Ora siamo in possesso di tutti gli strumenti necessari a provare il risultato principale, nonché fulcro di questa tesi, ossia il Teorema di Smith.

Teorema 4.2.6. *(H. Smith) Se G è un gruppo in $\mathcal{N}_1$ senza torsione, allora G è* ***nilpotente****.*

Dimostrazione. Sia G un gruppo senza torsione e con tutti i sottogruppi subnormali, allora G è risolubile, come provato nel Lemma 4.2.2. Procediamo dunque per induzione sulla lunghezza derivata d di G.
Se $d = 1$, allora $[G, G] = 1$ ovvero G è abeliano e dunque nilpotente.
Se $d = 2$, allora si è nel caso in cui G è metabeliano, ovvero G' è abeliano. Per contraddizione supponiamo che G non sia nilpotente; allora per la Proposizione 4.2.1, dove il sottogruppo di G che si considera è proprio G, abbiamo che esistono un sottogruppo F di G finitamente generato ed un $1 \leq n \in \mathbb{N}$ tali che ogni sottogruppo di G che contiene F è subnormale in quest'ultimo di difetto al più n. Siano $H = FG'$ e $L = I_G(H')$; allora $H \trianglelefteq G$ e dunque anche $L \trianglelefteq G$. Osserviamo anche che per costruzione G/L è senza torsione. Ora, F è finitamente generato e subnormale, dunque, per il punto (2) della Proposizione 2.0.1, F è nilpotente. Inoltre G' è abeliano e normale in G, quindi possiamo applicare il Teorema di Fitting 1.5.5 a F e G', trovando che H è nilpotente. Dal Lemma 4.2.5 deduciamo poi che G/L non può essere nilpotente e quindi possiamo assumere che H è abeliano. Dal Lemma 4.2.4 possiamo allora concludere che G è nilpotente.
Se $d > 2$, la dimostrazione è una semplica applicazione del lemma precedente. Infatti, se consideriamo $N = G'$ in 4.2.5, esso ha lunghezza derivata $d-1$ e dunque, per ipotesi induttiva, è nilpotente. Inoltre per il caso metabeliano $G/I_G(N')$ è nilpotente. Questi ultimi due fatti ci garantiscono di poter applicare il Lemma 4.2.5 e dunque di concludere che G è nilpotente. $\square$

Ringraziamenti

Un sentito ringraziamento va alla mia relatrice, la Professoressa Eloisa Michela Detomi, per la grande disponibilità, la pazienza e la gentilezza che ha avuto nei miei confronti. La ringrazio in particolare per avermi proposto il Teorema di Smith come argomento di tesi; attraverso il quale mi ha permesso di approcciarmi ed appassionarmi al meraviglioso mondo della Teoria dei gruppi infiniti e al lavoro del Professor Carlo Casolo.

Ringrazio di cuore tutta la mia famiglia: i miei genitori, mio fratello, mia cognata e i miei nipotini. In primis mia madre, senza la quale non avrei mai pensato di intraprendere questo percorso accademico e che, a modo suo, è sempre riuscita a spronarmi e a sostenermi fino al raggiungimento di questo traguardo.

Un particolare ringraziamento va a tutti i colleghi, divenuti poi grandi amici, con cui ho condiviso gioie e difficoltà di questi anni di studi universitari. Ringrazio infinitamente per il sostegno costante e per la compagnia Emma Bissoli, Luca Buoso, Nidia Favaretto e Luca Mastella.
Infine, ringrazio le mie più care amiche, Ilaria Aghi e Beatrice Liberi, per essermi sempre state accanto, tra risate, pianti e tisane, dal primo giorno di liceo.

Bibliografia

[1] Carlo Casolo, (I-FRNZ) *Groups with all Subgroups Subnormal*, Note Mat. 28 (2008), suppl. 2, 1–153 (2009).

[2] John C. Lennox and Stewart E. Stonehewer, *Subnormal Subgroups of Groups*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, (1987).

[3] D. J. S. Robinson, *The Theory of Infinite Soluble Groups*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, (2004).

[4] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Graduated Texts in Mathematics 80, Springer (1993).

[5] N. Jacobson, *Basic Algebra II: Second Edition*, Courier Corporation (2012).

[6] J. E. Roseblade, *On groups in which every subgroup is subnormal*, J. Algebra 2 (1965), 402-412

[7] W. Möhres, *Auflosbarkeit von Gruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind*, Arch. Math. 54 (1990), 232–235.