Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Scienze Statistiche

Corso di Laurea Triennale in
Statistica per l'Economia e l'Impresa

Relazione Finale

Teorema del Limite Centrale per Martingale

Relatore Prof. David Barbato
Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

Laureando Marco Plazzogna
Matricola 2003012

Anno Accademico 2022/2023

Indice

Introduzione **1**

1 Spazi di misura e σ-algebra **3**

1.1 Algebra e σ-algebra 3

1.1.1 Algebra 3

1.1.2 σ-algebra 4

1.1.3 σ-algebra generata da una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{C}$ 4

1.2 Spazi misurabili e spazi di misura 5

1.2.1 Spazio misurabile 5

1.2.2 Funzione misurabile 5

1.2.3 Criterio di misurabilità di Doob 6

1.2.4 Funzioni definite su insiemi 6

1.2.5 Spazio di misura 6

1.2.6 Definizioni riguardanti uno spazio di misura 6

1.2.7 Spazio di probabilità 7

1.2.8 σ-algebra generata da una variabile aleatoria 7

1.3 Spazi L^p (o di Lebesgue) 7

1.3.1 Spazi L^p con p finito 8

1.3.2 Spazi di Hilbert 8

1.3.3 Completezza di L^p e proiezione ortogonale 9

1.4 Lemmi di Borel-Cantelli e legge $0-1$ di Kolmogorov 10

1.4.1 Lemmi di Borel-Cantelli 10

1.4.2 Legge $0-1$ di Kolmogorov 10

2 Filtrazioni e processi stocastici a tempo discreto **13**

2.1 Processi stocastici a tempo discreto 13

2.1.1 Alcune definizioni preliminari 14

2.2 Filtrazioni e spazio di probabilità filtrato 14

2.2.1 Filtrazioni 14

2.3 Moto browniano e processo di Markov 15

2.3.1 Moto browniano 15

2.3.2 Moto browniano standard 15

2.3.3 Moto browniano rispetto a fitrazioni 16

2.3.4 Processo di Markov 16

3 Speranza condizionale **17**
3.1 Alcuni risultati importanti 17
3.2 Teorema fondamentale e implicazioni 18
3.2.1 Teorema fondamentale sulla speranza condizionale (Kolmogorov) . 18
3.2.2 Alcune proprietà della speranza condizionale 20

4 Martingale e tempi d'arresto **23**
4.1 Martingale 23
4.1.1 Martingale 23
4.1.2 Submartingale e supermartingale 24
4.1.3 Processo prevedibile 26
4.2 Tempi di arresto 26
4.2.1 Tempi di arresto e martingale 27

5 Teorema del limite centrale per Martingale **29**
5.1 Funzione caratteristica e convergenza di variabili aleatorie 29
5.2 Teoremi di convergenza deboli 31
5.2.1 Teorema del limite centrale (Lindeberg-Lévy) 32
5.2.2 Teorema del limite centrale per Martingale con incrementi limitati 33
5.2.3 Teorema del limite centrale per Martingale 34

Bibliografia **39**

Introduzione

La preparazione di questa tesi è iniziata dalla volontà di approfondire alcune tematiche di tipo probabilistico riguardanti i mercati finanziari, concentrandosi sugli aspetti di tipo matematico piuttosto che economico. Pertanto, il lavoro che viene presentato si focalizza principalmente su elementi di probabilità con un approfondimento sulle Martingale e su una generalizzazione del Teorema del Limite Centrale per queste ultime. Tuttavia, per poter approfondire questi temi, la parte più corposa della tesi si concentrerà innanzitutto sull'esposizione di nozioni introduttive e necessarie per poi passare al Teorema del Limite Centrale per Martingale.
Si comincia dando un'infarinatura sulla teoria della misura che comprende σ-algebre, spazi misurabili e di Lebesgue con il fine di fornire al lettore gli elementi essenziali da utilizzare per comprendere al meglio gli argomenti successivi. In seguito, verranno affrontati i processi stocastici e le filtrazioni con un piccolo approfondimento sul moto browniano e i processi di Markov. L'ultima tessera del mosaico per arrivare ai temi centrali di questa tesi, riguarda la speranza condizionale con le relative proprietà, propedeutica per sviluppare successivamente le Martingale e i tempi d'arresto. Infine, verranno trattati i teoremi di convergenza e il Teorema del Limite Centrale per Martingale che rappresentano il fulcro di questo lavoro.

The preparation of this thesis has started with the will of deepening some probabilistic topics about financial markets, with a major focus on mathematical aspects rather than economical ones. So the work concentrates on probabilistic notions, especially on Martingales and on a generalisation of the Central Limit Theorem for Martingales. However, the most substantial part revolves around the necessary and introductory chapters which are the basis for the latest topics of this thesis.
We start by exploring measure theory with a particular interest in σ-algebras, measure spaces and Lebesgue spaces in order to prepare the reader for the next topics. Then, we continue with stochastic processes and filtrations with a particular insight in Brownian

motion and Markov process. The third chapter is about conditional expectation and its properties which is the last piece of information we need to start reviewing Martingales and stopping times. Lastly, the last chapter focuses on convergence theorems and the Martingale Central Limit Theorem which is the main topic of this thesis.

Capitolo 1

Spazi di misura e σ-algebra

In questo primo capitolo si forniranno alcune definizioni ed esempi sulla teoria della misura, la base necessaria per sviluppare il resto dei temi trattati. Definiamo innanzitutto un'algebra e una σ-algebra. Passeremo in seguito a definire gli spazi misurabili ed alcuni complementi di misurabilità tra cui il criterio di Doob. Inoltre, verrà esplorato il concetto di spazio di misura e, in modo particolare, lo spazio di probabilità il quale, nei prossimi capitoli, rivestirà un ruolo centrale. In seguito, verranno esaminati gli spazi di Lebesgue ed alcune nozioni e proprietà collegate. Infine, enunceremo i lemmi di Borel-Cantelli e la legge $0-1$ di Kolmogorov.
La trattazione proposta è solo parzialmente completa. Infatti, l'obiettivo di questo capitolo è di elencare una serie di risultati importanti, per fornire al lettore tutti gli strumenti necessari alla comprensione del resto della tesi (per approfondire queste tematiche si rimanda a "Analisi Reale e Complessa" di Walter Rudin Rudin (1974) e ai primi capitoli di "Probability with Martingales" di David Williams Williams (1991)).

1.1 Algebra e σ-algebra

1.1.1 Algebra

Definizione 1.1. Sia S un insieme, definiamo un'algebra su S una famiglia Σ_0 di sottoinsiemi di S tali che

1. $S \in \Sigma_0$
2. $F \in \Sigma_0 \quad \Rightarrow \quad F^c := S \setminus F \in \Sigma_0$ (Σ_0 è chiusa per complemento)
3. $F, G \in \Sigma_0 \quad \Rightarrow \quad F \cup G \in \Sigma_0$ (Σ_0 è chiusa per unione finita)

Da notare che:

- $\emptyset = S^c \in \Sigma_0$
- $F, G \in \Sigma_0 \quad \Rightarrow \quad F \cap G = (\ F^c \cup G^c\ )^c \in \Sigma_0$ (Σ_0 è chiusa per intersezione finita)

Dunque, un'algebra su S è una famiglia di sottoinsiemi di S che è stabile rispetto ad unione, intersezione finite.

1.1.2 σ-algebra

Definizione 1.2. Una famiglia Σ di sottoinsiemi di S è detta una σ-algebra su S, se Σ è un'algebra su S tale che $\{F_n \in \Sigma\}_{n\in\mathbb{N}}$, vale $\bigcup_n F_n \in \Sigma$.

Dunque, una σ-algebra su S è una famiglia di sottoinsiemi di S che è stabile rispetto ad unione, intersezione finite.

La nozione di σ-algebra ci fornisce una base necessaria per la costruzione di strutture matematiche più complesse come misure di probabilità. Le utilizzeremo nel resto del capitolo ed oltre, per esempio, quando vedremo i processi stocastici e le Martingale.

Alcune implicazioni della definizione di σ-algebra:

1. $\emptyset \in \Sigma$, in quanto $S^c = \emptyset$;
2. chiusura rispetto all'intersezione numerabile: se $F_n \in \Sigma$ con $n \in \mathbb{N}$, allora $\bigcap_n F_n = (\bigcup_n F_n^c\ )^c \in \Sigma$

A questo punto, vedremo due σ-algebre molto importanti, rispettivamente la σ-algebra generata da una famiglia di sottoinsiemi e la σ-algebra Boreliana (o di Borel).

1.1.3 σ-algebra generata da una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{C}$

Definizione 1.3. Sia $\mathcal{C}$ una famiglia di sottoinsiemi di S. Allora $\sigma(\mathcal{C})$, la σ-algebra generata da $\mathcal{C}$, è la più piccola σ-algebra Σ su S tale che $\mathcal{C} \subseteq \Sigma$.

Dimostrazione:
Vogliamo dimostrare che $\sigma(\mathcal{C})$ è la più piccola σ-algebra contenente $\mathcal{C}$.
Poichè la collezione di tutti i sottoinsiemi di S è una σ-algebra, allora $\exists$ almeno una σ-algebra che contiene $\mathcal{C}$. Sia $\sigma(\mathcal{C})$ l'intersezione di tutte le σ-algebre di Σ; per costruzione

$\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$ e $\sigma(\mathcal{C})$ appartiene ad ogni σ-algebra in S contenente $\mathcal{C}$. Si può verificare che $\sigma(\mathcal{C})$ è una σ-algebra; quindi, $\sigma(\mathcal{C})$ è la più piccola σ-algebra contenente $\mathcal{C}$.

$\square$

Esempio: σ-algebra di Borel
Sia S uno spazio topologico. La σ-algebra di Borel $\mathcal{B}(S)$ su S è la σ-algebra generata dalla famiglia di sottoinsiemi aperti di S.
$\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbb{R})$
La σ-algebra di Borel è considerata la più importante fra le σ-algebra. Tutti i più comuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono elementi di $\mathcal{B}$.

Dopo aver introdotto algebre e σ-algebre, passiamo ad esplorare strutture più complesse come spazi misurabili e spazi di misura.

1.2 Spazi misurabili e spazi di misura

Gli spazi misurabili e gli spazi di misura sono strumenti essenziali per definire e studiare concetti fondamentali nella teoria della misura e nella teoria della probabilità. Consentono di sviluppare un quadro teorico solido per l'analisi delle proprietà delle misure, con numerose applicazioni in diverse aree della matematica.

1.2.1 Spazio misurabile

Di seguito verranno elencate definizioni e risultati riguardanti la teoria della misura.

Definizione 1.4. La coppia (S, Σ), dove S è un insieme non vuoto e Σ è una σ-algebra su S, è detto spazio misurabile. Un elemento di Σ è detto sottoinsieme Σ-misurabile di S.

1.2.2 Funzione misurabile

Definizione 1.5. Siano $(F, \mathcal{F})$ e (S, Σ) due spazi misurabili. Una funzione $X : F \to S$ è detta misurabile se $\forall A \in \Sigma$, $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. Questa condizione può essere scritta nel modo seguente:

$$X^{-1}(\mathcal{F}) = \{X^{-1}(A) | A \in \mathcal{F}\}$$

Notiamo che $X^{-1}(\mathcal{F})$ è una σ-algebra.
Inoltre, data la funzione $X : F \to S$, si indica con $\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{F})$ la più piccola σ-algebra di F che rende misurabile X.

Notazione: lo spazio delle funzioni Σ-misurabili verrà indicata con $m\Sigma$. Gli elementi non negativi di $m\Sigma$ verranno indicati con $(m\Sigma)^+$. Infine, verrà indicato con $b\Sigma$ lo spazio delle funzioni Σ-misurabili limitate.

1.2.3 Criterio di misurabilità di Doob

Lemma 1.6. *Siano $(\Omega, \sigma(X))$ e (S, Σ) due spazi misurabili con $X : \Omega \to S$. Ogni variabile aleatoria $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ (che è $\sigma(X)$-misurabile) si può fattorizzare nella forma $Y = f \circ X$ con $f : S \to \mathbb{R}$ ed è una funzione misurabile.*

1.2.4 Funzioni definite su insiemi

Per arrivare alla definizione di uno spazio di misura, dobbiamo introdurre anche i concetti di funzione additiva e funzione numerabilmente additiva definite su dei sottoinsiemi di un insieme.

Definizione 1.7. Sia S un insieme, Σ_0 un'algebra su S e $\mu_0 : \Sigma_0 \to [0, \infty]$ una funzione non negativa

- allora μ_0 è detta additiva se $\mu_0(\emptyset) = 0$ e per F, $G \in \Sigma_0$,

$$F \cap G = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mu_0(F \cup G) = \mu_0(F) + \mu_0(G)$$

- la funzione μ_0 è detta numerabilmente additiva (o σ-additiva) se $\mu_0(\emptyset) = 0$ e ogni qual volta $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di insiemi disgiunti in Σ_0 con $F = \bigcup F_n$ in Σ_0 (in questo caso non è necessario che Σ_0 sia una σ-algebra), allora $\mu_0(F) = \sum_n \mu_0(F_n)$

Naturalmente, una funzione numerabilmente additiva è anche additiva.

1.2.5 Spazio di misura

Definizione 1.8. Sia (S, Σ) uno spazio misurabile. Una funzione $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ è detta misura su (S, Σ) se μ è numerabilmente additiva. (S, Σ, μ) è detto spazio di misura.

1.2.6 Definizioni riguardanti uno spazio di misura

Definizione 1.9. Sia (S, Σ, μ) uno spazio di misura. Allora μ o lo spazio di misura (S, Σ, μ) è detto:

- finito se $\mu(S) < \infty$;
- σ-finito se $\exists$ una successione $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di Σ tali che $\mu(S_n) < \infty$ e $\bigcup_n S_n = S$

Dopo aver dato alcune definizioni generali, proseguiamo con la definizione dello spazio di misura che, nello specifico, sarà più utile al fine di questa tesi: lo spazio di probabilità.

1.2.7 Spazio di probabilità

Definizione 1.10. Sia (S, Σ, μ) uno spazio di misura, μ è detta misura di probabilità se $\mu(S) = 1$. Allora (S, Σ, μ) è detto spazio di probabilità.

Per comodità e per distinguerli dal caso generale, μ verrà indicato con P e S viene detto spazio campionario e verrà indicato con Ω. Dunque, da questo punto in poi, lo spazio di probabilità verrà identificato con (Ω, Σ, P).
In chiusura di questa sezione, riportiamo anche un'applicazione di funzione misurabile nel caso dello spazio di probabilità.

1.2.8 σ-algebra generata da una variabile aleatoria

Definizione 1.11. Sia (Ω, Σ, P) uno spazio di probabilità. Se $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ è misurabile rispetto alla σ-algebra di Borel su $\mathbb{R}$, allora Y è una variabile aleatoria e la σ-algebra da essa generata è

$$\sigma(Y) = \{Y^{-1}(A) | A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

$\sigma(Y)$ è la più piccola σ-algebra di Ω che rende misurabile Y.

1.3 Spazi L^p (o di Lebesgue)

In questo paragrafo ci occuperemo di descrivere gli spazi di Lebesgue. Vedremo solamente i casi con p finito, in modo particolare con $p = 2$. Trattare gli spazi di Lebesgue è necessario per alcune dimostrazioni nei capitoli successivi, tra cui il teorema fondamentale sulla speranza condizionale.

1.3.1 Spazi L^p con p finito

Definizione 1.12. Sia (S, Ω, μ) uno spazio di misura e sia $1 \leq p < \infty$. Consideriamo inoltre una funzione misurabile $f : S \to \mathbb{R}$. Definiamo norma p-esima o norma L^p di f

$$|| f ||_p = \left(\int | f |^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Lo spazio $L^p(S, \Omega, \mu) = \{f : S \to \mathbb{R} \text{ misurabili} : || f ||_p \leq \infty\}$ delle funzioni misurabili con norma $\mathcal{L}^p$ finita risulta essere, per le seguenti proprietà della norma $|| \cdot ||$ uno spazio vettoriale reale.

Proprietà:

- $|| \lambda f ||_p = | \lambda | \, || f ||_p$ (omogeneità rispetto al prodotto scalare)
- $|| f + g ||_p \leq || f ||_p + || g ||_p$ (disuguaglianza triangolare)

Notazione: $|| \cdot || = || \cdot ||_2$ (Quando non è presente un pedice p per la norma, si fa riferimento al caso in cui $p = 2$).

1.3.2 Spazi di Hilbert

In questo paragrafo, vedremo gli spazi di Hilbert che sono gli spazi vettoriali di maggiore interesse per questo lavoro.

Definizione 1.13. Uno spazio di Hilbert $\mathcal{H} = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è uno spazio vettoriale H reale o complesso (anche se questo caso non verrà esaminato) sul quale è definito un prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tale che, detta d la distanza indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su H, lo spazio metrico (H, d) sia spazio metrico completo.

Consideriamo uno spazio vettoriale $\mathcal{H}$ sul quale è definito il prodotto scalare $(x, y) \to \langle x, y \rangle$ definito su $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ che gode delle seguenti proprietà:

- $\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ per $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x, y, z \in \mathbb{R}$
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$ (in $\mathcal{H}$)

Inoltre, vale la disuguaglianza di Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} = || x || \cdot || y ||$$

e come conseguenza la disuguaglianza tringolare

$$||\, x + y \,|| \leq ||\, x \,|| + ||\, y \,||$$

Sia $d(x, y) = ||\, x - y \,||$ una distanza. Uno spazio vettoriale è detto spazio di Hilbert se è completo rispetto alla topologia indotta dalla distanza $d(x, y)$, cioè se ogni successione di Cauchy converge.

1.3.3 Completezza di L^p e proiezione ortogonale

Questo paragrafo ha lo scopo di illustrare in maniera più generale (con $1 \leq p < \infty$) il concetto di completezza e di proiezione ortogonale. Il caso più rilevante per questa tesi rimane quello per $p = 2$. Successivamente utilizzeremo la completezza e la proiezione ortogonale per la dimostrazione del **Teorema 3.6**.

Definizione 1.14 (Completezza)**.** Sia $1 \leq p < \infty$. Se (X_n) è una successione di Cauchy in L^p tale che

$$\sup_{r,\, s \geq k} ||X_r - X_s||_p \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

allora esiste X in L^p tale che $X_r \to X$ in L^p:

$$||X_r - X||_p \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Notazione: Quando il prodotto scalare tra X e Y è uguale a 0, allora scriviamo $X \perp Y$ e si dice che X è ortogonale a Y.

Teorema 1.15 (Proiezione ortogonale)**.** *Sia $\mathcal{K}$ un sottospazio vettoriale di L^2 completo. Allora, dato $X \in L^2$, esiste Y su $\mathcal{K}$ tale che*

1. $||X - Y||_2 := inf\, \{||X - W||_2 : W \in \mathcal{K}\}$

2. $X - Y \perp Z \quad \forall Z \in \mathcal{K}$

Definizione 1.16. La variabile alaeatoria Y del teorema precedente (**Teorema 1.15**) è detta una versione della proiezione ortogonale di X su $\mathcal{K}$.

1.4 Lemmi di Borel-Cantelli e legge $0-1$ di Kolmogorov

In questa sezione enunciamo il primo ed il secondo lemma di Borel-Cantelli e la legge $0-1$ di Kolmogorov. Si danno per già note le nozioni di indipendenza tra eventi o variabili aleatorie.

1.4.1 Lemmi di Borel-Cantelli

Prima di enunciare i lemmi di Borel-Cantelli, vanno definiti $\liminf$ e $\limsup$.

Definizione 1.17 ($\limsup$ e $\liminf$)**.** Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di eventi. Definiamo

$$\limsup E_n := \bigcap_m \left(\bigcup_{n\geq m} E_n \right)$$

e

$$\liminf E_n := \bigcup_m \left(\bigcap_{n\geq m} E_n \right)$$

Lemma 1.18 (Primo lemma)**.** *Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di eventi tali che $\sum_n P(E_n) < \infty$. Allora*

$$P(\limsup E_n) = 0$$

Lemma 1.19 (Secondo lemma)**.** *Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di eventi indipendenti, allora*

$$\sum_n P(E_n) = \infty \longrightarrow P(\limsup E_n) = 1$$

Il secondo lemma è valido anche se consideriamo l'indipendenza a due a due invece dell'independenza.

1.4.2 Legge $0-1$ di Kolmogorov

Prima di enunciare il teorema di Kolmogorov, definiamo la σ-algebra coda.

Definizione 1.20 (σ-algebra coda)**.** Siano $X_1, X_2, ...$ variabili aleatorie. Definiamo

$$\mathcal{T}_n := \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, ...), \qquad \mathcal{T} := \bigcap_n \mathcal{T}_n$$

La σ-algebra $\mathcal{T}$ è detta σ-algebra coda della successione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Teorema 1.21. *Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti. Se $\mathcal{T}$ è la σ-algebra coda associata a $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, allora:*

1. $F \in \mathcal{T} \quad \Rightarrow \quad P(F) = 0$ *oppure* $P(F) = 1$

2. $\forall\, \xi$ *variabile aleatoria* $\mathcal{T}$*-misurabile, allora,* $P(\xi = c) = 1$ *per qualche* $c \in [-\infty, \infty]$

Intuitivamente, il teorema di Kolmogorov esprime un concetto abbastanza interessante: in certi casi limite, un evento quasi sicuramente si verifica o non si verifica. Quindi, la probabilità di un certo evento può solo essere uguale a 0 o ad 1.

Esempio: se $X_1, X_2, \ldots$ è una successione di variabili aleatorie indipendenti, allora

$$\text{o} \;\; P\left(\sum_n X_n \text{ converge }\right) = 0$$
$$\text{oppure} \;\; P\left(\sum_n X_n \text{ converge }\right) = 1$$

Capitolo 2

Filtrazioni e processi stocastici a tempo discreto

In questo capitolo introduciamo le filtrazioni e i processi stocastici a tempo discreto a cui seguiranno alcuni esempi. Trattare in senso più ampio questi argomenti, servirà per comprendere meglio le Martingale, che saranno il fulcro della tesi. Per semplicità, verranno introdotti solamente i processi stocastici a tempo discreto, tralasciando invece quelli a tempo continuo, i quali presentano ulteriori complessità che vanno oltre gli obiettivi di questo lavoro. Tuttavia, per quanto riguarda alcune proprietà, all'interno del capitolo saranno presenti alcuni cenni di generalizzazione al caso continuo. Negli ultimi paragrafi, tratteremo brevemente il moto browniano e il processo di Markov aggiungendo anche alcuni cenni alle loro applicazioni. Questo capitolo è stato scritto con l'appoggio del libro "Probability with Martingales" di David Williams Williams (1991). La parte finale del capitolo legata al moto browniano e ai processi di Markow rimanda ad "Elementi di Probabilità e Statistica" di F. Biagnini e M. Campanino Biagini & Campanino (2006).

2.1 Processi stocastici a tempo discreto

In questa tesi, l'insieme $\mathcal{T}$ sarà sempre $\mathbb{N}$ o un sottoinsieme di $\mathbb{N}$.
In maniera informale, ma intuitiva, si potrebbe definire un processo stocastico come un fenomeno che evolve seguendo delle leggi probabilistiche.

Definizione 2.1. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità e $\mathcal{T}$ un insieme dei tempi: chiamiamo processo stocastico una famiglia di variabili aleatorie reali $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ definite su Ω. Un processo stocastico si può identificare con una funzione $X : \Omega \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, tale che, fissato $t \in \mathcal{T}$, la funzione $\omega \to X(\omega, t)$ sia una variabile aleatoria.

2.1.1 Alcune definizioni preliminari

In questo paragrafo elencheremo delle definizioni di base per i processi stocastici. Alcune di queste sono identiche tranne per la loro applicazione al caso discreto o al caso continuo.

Definizione 2.2 (Traiettoria)**.** Si chiama traiettoria nel punto ω una funzione misurabile $t \to X(\omega, t)$.

Come per le variabili aleatorie, possiamo definire la legge di probabilità di un processo stocastico.

Definizione 2.3 (Legge di un processo stocastico)**.** Si chiama legge del processo stocastico $X = (X_t)_{t \in [0,\mathcal{T}]}$ l'immagine della probabilità P definita mediante l'applicazione X.

Definizione 2.4 (Processi stocastici equivalenti)**.** Se due processi stocastici hanno la stessa legge, allora vengono detti equivalenti.

Definizione 2.5. Dati due processi stocastici X e Y, si dice che X è una modificazione di Y se, per ogni $t \in \mathcal{T}$ fissato, $X_t = Y_t$ *q.c.*

Definizione 2.6. Si dice che X e Y sono indistinguibili se esiste un sottoinsieme trascurabile $N \subseteq \Omega$ tale che, se $\omega \notin N$, $X(\omega, t) = Y(\omega, t)$, $\forall t \in \mathcal{T}$. Più precisamente, tutte le traiettorie sono eguali eccetto che su un insieme trascurabile.

Osservazione: le definizioni **2.4**, **2.5** e **2.6** coincidono nel caso di processi stocastici a tempo continuo.

2.2 Filtrazioni e spazio di probabilità filtrato

2.2.1 Filtrazioni

Le filtrazioni svolgono un ruolo cruciale nello studio dell'evoluzione temporale delle variabili aleatorie e dei processi stocastici. Consentono di modellare e comprendere l'accumulo di informazione nel tempo, analizzare eventi passati, predire il futuro e studiare i processi adattivi.

Definizione 2.7. Sia (Ω, Σ, P) uno spazio di probabilità e sia I un insieme con cardinalità $\leq \mathbb{N}$ (o $\mathbb{R}^+$). Per ogni $t \in I$, sia $\mathcal{F}_t$ una sotto σ-algebra di Σ. Allora

$$\mathcal{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$$

è detta filtrazione se $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_l$ per ogni $k \leq l$

Intuitivamente, le filtrazioni sono famiglie di σ-algebra che sono ordinate in maniera non decrescente che modellano l'informazione in un certo momento. Ora che il concetto di filtrazione è stato introdotto, procediamo a definire uno spazio di probabilità filtrato.

Definizione 2.8 (Spazio di probabilità filtrato)**.** Definiamo uno spazio di probabilità filtrato (o spazio filtrato) uno spazio di probabilità (Ω, Σ, P) munito di una filtrazione $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$. Viene identificato tramite $(\Omega, \Sigma, (\mathcal{F}_t)_{t \in I}, P)$.

Definizione 2.9 (Processi stocastici adattati ad una filtrazione)**.** Un processo stocastico $(X_t)_{t \in I}$ si dice adattato alla filtrazione $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ se $\forall t \in I$, X_t è misurabile rispetto a $\mathcal{F}_t$.

2.3 Moto browniano e processo di Markov

In questa sezione, introdurremo brevemente due importanti esempi di processi stocastici: si tratta del moto browniano e il processo di Markov. Lo scopo è anche quello di illustrare alcune possibili applicazioni dei processi stocastici.

2.3.1 Moto browniano

Definizione 2.10. Chiamiamo moto browniano un processo stocastico $(B_t)_{0 \leq t \leq \mathcal{T}}$ che gode delle seguenti proprietà:

1. $P(B_0 = 0) = 1$
2. dati $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$, $\forall n$, le variabili aleatorie $(B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ sono indipendenti
3. per ogni s, t tali che $0 \leq s < t$, la variabile $(B_t - B_s)$ ha legge gaussiana $\mathcal{N}(0, t-s)$

2.3.2 Moto browniano standard

Definizione 2.11. Chiamiamo moto browniano standard un processo stocastico $(W_t)_{0 \leq t \leq \mathcal{T}}$ che soddisfa le proprietà (1.), (2.) e (3.) della **Definizione 2.10** ed inoltre è tale che le traiettorie del processo $(W_t)_{0 \leq t \leq \mathcal{T}}$ sono continue.

Il moto browniano standard è una generalizzazione al caso continuo del moto browniano.

2.3.3 Moto browniano rispetto a fitrazioni

Definizione 2.12. Un moto browniano, rispetto ad una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, è un processo stocastico $B = (B_t)_{t\geq 0}$ tale che:

1. $P(B_0 = 0) = 1$
2. è adattato
3. per ogni s, t tali che $0 \leq s < t$, $(B_t - B_s)$ ha legge gaussiana $\mathcal{N}(0, t-s)$ indipendente da $\mathcal{F}_s$

Il moto browniano, conosciuto anche come processo di Wiener, è stato identificato per la prima volta nel campo della fisica in un esperimento tenuto da Robert Brown nel 1827. In seguito, è stato utilizzato per modellare fenomeni in finanza grazie alle sue assunzioni legate alla distribuzioni gaussiane. Tuttavia, negli ultimi anni, le ipotesi di indipendenza e di normalità dei rendimenti degli strumenti finanziari hanno causato una rivalutazione dell'efficacia del processo di Wiener in questo ambito (per una trattazione più approfondita si rimanda ai lavori di Mandelbrot e Taleb).

2.3.4 Processo di Markov

Definizione 2.13. Diciamo che il processo X è un processo di Markov se $\forall\ 0 \leq s < t$ e φ un'applicazione borelliana limitata si ha

$$E(\varphi(X_t)|\mathcal{F}_s) = E(\varphi(X_t)|X_s)$$

Per la proprietà di Markov o di "assenza di memoria" vale:

$$P(X_t = x_t \,|\, X_{t-1} = x_{t-1}, ..., X_0 = x_0) = P(X_t = x_t \,|\, X_{t-1} = x_{t-1})$$

I processi di Markov vengono utilizzati ampiamente in statistica per modellare svariati tipi di fenomeni. Inoltre, sono la base per simulazioni stocastiche come i metodi Monte Carlo basati su catena di Markov usati per simulare campioni di distribuzioni complesse. Questi ultimi vengono usati in numerosi ambiti come in fisica, in economia, in finanza, in chimica, in statistica bayesiana e in molti altri.

Capitolo 3

Speranza condizionale

In questo capitolo, proseguiremo con la trattazione di alcune nozioni riguardanti la speranza condizionale. Innanzitutto, elencheremo una serie di teoremi, lemmi e proprietà utili per la dimostrazione del Teorema fondamentale. Infine, concluderemo elencando una serie di proprietà della speranza condizionale in modo che vengano sfruttate in seguito nel capitolo sulle Martingale. I seguenti risultati sono il frutto di ricerca con l'ausilio principalmente di "Probability with Martingales" di David Williams Williams (1991).

3.1 Alcuni risultati importanti

Il fine di questo primo paragrafo è quello di introdurre dei teoremi, definizioni e proprietà che ci serviranno per alcune dimostrazioni nel seguito del capitolo.

Proprietà 3.1.1 (Parte positiva e parte negativa di una funzione)**.** *Per* $f \in m\Sigma$, *diciamo che* $f = f^+ - f^-$, *con*

$$f^+(s) := \max(f(s), 0) \qquad f^-(s) := \max(-f(s), 0)$$

Allora f^+, $f^- \in (m\Sigma)^+$ *e* $|f| = f^+ + f^-$

Proprietà 3.1.2 (Linearità)**.** *Per* α, $\beta \in \mathbb{R}$ *e* f, $g \in L^1(S, \Sigma, \mu)$

$$\alpha f + \beta g \in L^1(S, \Sigma, \mu)$$

e

$$\mu(\alpha f + \beta g) = \alpha\mu(f) + \beta\mu(g)$$

Teorema 3.1 (Teorema di convergenza monotona). *Se (f_n) è una successione di elementi di $(m\Sigma)^+$ tale che $f_n \uparrow f$ q.c., allora*

$$\mu(f_n) \uparrow \mu(f) \leq \infty$$

o equivalentemente

$$\int_S f_n \, d\mu \uparrow \int_S f \, d\mu$$

Notazione: in questo caso si dice anche che una funzione converge puntualmente.

Lemma 3.2 (Lemma di Fatou). *Per una successione f_n in $(m\Sigma)^+$, vale che*

$$\mu(\liminf f_n) \leq \liminf \mu(f_n)$$

Teorema 3.3 (Teorema della convergenza dominata). *Supponiamo che $f_n, f \in m\Sigma$, che $f_n(s) \longrightarrow f(s)$ $\forall s \in S$ e che esista una funzione $g \in L^1(S, \Sigma, \mu)^+$ tale che:*

$$|f_n(s)| \leq g(s), \quad \forall s \in S, \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{in } L^1(S, \Sigma, \mu)$$

da cui

$$\mu(f_n) \longrightarrow \mu(f)$$

Teorema 3.4 (Disuguaglianza di Jensen). *Supponiamo che $c : G \to \mathbb{R}$ sia una funzione convessa, che G sia un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e che X sia una variabile aleatoria tali che*

$$E(|X|) < \infty, \qquad P(X \in G) = 1, \qquad E(|c(X)|) < \infty$$

Allora

$$E(c(X)) \geq c(E(X))$$

3.2 Teorema fondamentale e implicazioni

3.2.1 Teorema fondamentale sulla speranza condizionale (Kolmogorov)

Definizione 3.5. Sia (Ω, Σ, P) uno spazio di probabilità e sia X una variabile aleatoria con $E(|X|) < \infty$. Sia $\mathcal{G}$ una sotto σ-algebra di Σ. Una variabile aleatoria Y si dice speranza condizionale di X data $\mathcal{G}$ e si scrive $Y = E(X|\mathcal{G})$ se soddisfa le seguenti proprietà:

1. Y è $\mathcal{G}$-misurabile
2. $E(|Y|) < \infty$
3. Per ogni insieme G in $\mathcal{G}$ si ha che:

$$\int_G Y\,dP = \int_G X\,dP \qquad \forall G \in \mathcal{G}$$

Teorema 3.6. *Nell'ipotesi della* ***Definizione 3.5****, esiste una variabile aleatoria Y che soddisfa le proprietà (1.), (2.) e (3.) ed è unica in senso quasi certo.*

Dimostrazione:
Prima di tutto dimostriamo l'unicità di una versione di $E(X|\mathcal{G})$. Successivamente, dimostriamo l'esistenza di $E(X|\mathcal{G})$ quando $X \in L^2$. Infine, dimostreremo l'esistenza di $E(X|\mathcal{G})$ in generale.

Unicità quasi certa di $E(X|\mathcal{G})$
Supponiamo che $X \in L^1$ e che Y e $\tilde{Y}$ siano versioni di $E(X|\mathcal{G})$. Allora $Y, \tilde{Y} \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ e

$$E(Y - \tilde{Y}|\mathcal{G}) = 0 \qquad \forall G \in \mathcal{G}$$

Ora supponiamo per assurdo che Y e $\tilde{Y}$ non siano quasi certamente uguali. Allora, si può assumere che $P(Y > \tilde{Y}) > 0$. Dal momento che vale

$$\{Y > \tilde{Y} + n^{-1}\} \uparrow \{Y > \tilde{Y}\} \tag{3.1}$$

possiamo osservare che $P(Y - \tilde{Y} > n^{-1}) > 0$ per un qualche n. Ma l'insieme $\{Y - \tilde{Y} > n^{-1}\} \in \mathcal{G}$ perchè Y e $\tilde{Y}$ sono $\mathcal{G}$-misurabili. Quindi

$$0 = E\left((Y - \tilde{Y})\, \mathbb{1}_{\{Y - \tilde{Y} > n^{-1}\}}\right) \geq n^{-1} P(Y - \tilde{Y} > n^{-1}) > 0$$

è ovviamente assurdo, perchè contraddice (3.1)

Esistenza di $E(X|\mathcal{G})$ per $X \in L^2$
Supponiamo che $X \in L^2(\Omega, \Sigma, P)$. Sia $\mathcal{G}$ una sotto σ-algebra di Ω e sia $\mathcal{K} := L^2(\mathcal{G}) := L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Dal **Paragrafo 1.3.3** applicato su $\mathcal{G}$ invece che su $\mathcal{F}$, sappiamo che $\mathcal{K}$ è

completa per la norma di L^2. Dal **Teorema 1.15** sulla proiezione ortogonale sappiamo che esiste Y in $\mathcal{K} = L^2(\mathcal{G})$ tale che

1. $E[(X-Y)^2] = \inf\{E[(X-W)^2] : W \in L^2(\mathcal{G})\}$
2. $\langle X-Y, Z\rangle = 0 \qquad \forall Z$ in $L^2(\mathcal{G})$

Ora, se $G \in \mathcal{G}$, allora $Z := I_G \in L^2(\mathcal{G})$ e (2.) afferma che

$$E(Y|G) = E(X|G)$$

Quindi Y è una versione di $E(X|\mathcal{G})$

Esistenza di $E(X|\mathcal{G})$ per $X \in L^1$
Scomponiamo la variabile aleatoria X in $X = X^+ - X_-$. In questo modo notiamo che si può trattare solo il caso in cui $X \in (L^1)^+$. Si assume quindi che $X \in (L^1)^+$, scegliamo una successione di variabili aleatorie limitate con $0 \le X_n \uparrow X$. Dal momento che X_n sta in L^2, si può scegliere una versione Y_n di $E(X_n|\mathcal{G})$. Ora va mostrato che

1. É quasi certamente vero che $0 \le Y_n \uparrow$

Dato (1.) per vero, poniamo

$$Y(\omega) := \limsup Y_n(\omega)$$

Allora Y è $\mathcal{G}$-misurabile e $Y_n \uparrow Y$. Infine, grazie al teorema di convergenza monotona (**Teorema 3.1**) deduciamo che

$$E(Y|G) = E(X|G) \qquad G \in \mathcal{G}$$

dal corrispondente risultato per X_n e Y_n.

$\square$

3.2.2 Alcune proprietà della speranza condizionale

Ora elencheremo una serie di proprietà della speranza condizionale. Per ogni punto vale che $E(|X|) < \infty$. $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ sono sotto σ-algebre di Σ e $X, Y \in L^1$.

1. Se Y è una versione di $E(X|\mathcal{G})$, allora $E(Y) = E(X)$
2. Se X è $\mathcal{G}$-misurabile, allora $E(X|\mathcal{G}) = X \quad q.c.$

3. **(Linearità)** $E(a_1X_1+a_2X_2|\mathcal{G}) = a_1E(X_1|\mathcal{G})+a_2E(X_2|\mathcal{G})$ $q.c.$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$
4. **(Positività)** se $X \geq 0$, allora $E(X|\mathcal{G}) \geq 0$ $q.c.$
5. **(Indipendenza)** se X è independente da $\mathcal{H}$, allora $E[X|\mathcal{H}] = E[X]$
6. se Z è $\mathcal{G}$-misurabile e limitato, allora
$$E[ZX|\mathcal{G}] = ZE[X|\mathcal{G}] \quad q.c.$$
7. **(Proprietà torre)** se $\mathcal{H}$ è una sotto σ-algebra di $\mathcal{G}$, allora
$$E[E[X|\mathcal{G}]|H] = E[X|\mathcal{G}]$$
8. **(Teorema di convergenza monotona condizionale)** se $0 \geq X_n \uparrow X$, allora
$$E(X_n|\mathcal{G}) \uparrow E(X|\mathcal{G}) \quad q.c.$$
9. **(Lemma di Fatou condizionale)** se $X_n \geq 0$, allora
$$E(\liminf X_n|\mathcal{G}) \leq \liminf E(X_n|\mathcal{G}) \quad q.c.$$
10. **(Teorema della convergenza dominata condizionale)** se
$$|X_n(\omega)| \leq V(\omega)\ \forall n, \quad E(V) < \infty, \quad X_n \longrightarrow X\ q.c.$$
allora
$$E(X_n|\mathcal{G}) \longrightarrow E(X|\mathcal{G}) \quad q.c.$$
11. **(Disuguaglianza di Jensen condizionale)** se $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa e $E(|c(X)|) < \infty$, allora
$$E(c\,(X)|\mathcal{G}) \geq c\,(E(X|\mathcal{G})) \quad q.c.$$

Capitolo 4

Martingale e tempi d'arresto

In questo capitolo verranno introdotte le Martingale, ovvero dei processi stocastici la cui speranza condizionale del successivo valore ad un certo tempo della sequenza è uguale al valore presente. Verranno definite anche le submartingale e le supermartingale. Chiaramente, verranno affrontate solamente le Martingale a tempo discreto, visto che nel Capitolo 2 abbiamo definito solo i processi stocastici a tempo discreto. Inoltre, descriveremo i tempi d'arresto con le relative regole d'arresto e il teorema di arresto opzionale di Doob. Il riferimento principale per questo capitolo è "Probability with Martingales" di David Williams Williams (1991).

4.1 Martingale

4.1.1 Martingale

Prima di introdurre in maniera formale le Martingale, cerchiamo di dare un contesto più intuitivo sulla loro natura. Le Martingale sono concetti molto importanti nella teoria delle probabilità e nella teoria dei processi stocastici perché hanno numerose proprietà e applicazioni significative tra cui la modellazione e l'analisi di fenomeni casuali, per lo studio di strategie di scommessa e giochi d'azzardo equi o per la valutazione di opzioni finanziarie.

Definizione 4.1. Un processo stocastico adattato X è detto martingala relativa a $(\Omega, \{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}, P)$ se

1. $E(|X_n|) < \infty$

2. $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n \quad q.c.$

Le Martingale sono processi stocastici che sono state al centro del dibattito del mondo della matematica pura ed applicata negli anni 70. Questo concetto è stato introdotto inizialmente da Paul Lévy, per poi essere sviluppato da altri matematici tra cui Joseph Doob e Kiyoshi Itō. L'interesse personale di sviluppare l'argomento deriva dalla loro applicazione alla finanza matematica. Ovviamente, la trattazione delle Martingale in questo capitolo non è esaustiva, ma è soprattutto finalizzata a dare solide basi per risultati successivi.

4.1.2 Submartingale e supermartingale

Oltre alle Martingale, esistono delle varianti altrettanto importanti tra cui le seguenti.

Definizione 4.2. Una submartingala è definita allo stesso modo della martingala tranne per la condizione 2 della **Definizione 4.1** che cambia in:

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n \quad q.c.$$

Definizione 4.3. Una supermartingala è definita allo stesso modo della martingala tranne per la condizione 2 della **Definizione 4.1** che cambia in:

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n \quad q.c.$$

Possiamo verificare ricorsivamente che $E(X_n|\mathcal{F}_m) = X_m$, $\forall n > m$, tramite la proprietà torre:

$$\begin{aligned} E(X_n|\mathcal{F}_m) &= E[E(X_n|\mathcal{F}_{n-1})|\mathcal{F}_m] = E(X_{n-1}|\mathcal{F}_m) = \\ &= ... = E(X_{m+1}|\mathcal{F}_m) = X_m \qquad (\textit{vale anche per } \leq \textit{ e } \geq) \end{aligned}$$

Intuitivamente, una supermartingala tende a "decrescere in media", mentre una submartingala tende a "crescere in media".

Da notare che:

- X è una supermartingala se e solo se $(-X)$ è una submartingala
- X è una martingala se e solo se è sia una supermartingala, sia una submartingala

Alcuni esempi di Martingale: (i numeri sopra i segni di uguaglianza si riferiscono alle proprietà sulla speranza condizionale del **Paragrafo 3.2.2**)
a) Somma di variabili aleatorie indipendenti con media zero:

Sia $X_1, X_2, ...$ una successione di variabili aleatorie indipendenti con $E[|X_k|] < \infty$, $\forall k$, e

$$E[X_k] = 0 \quad \forall k$$

Definiamo nel seguente modo $S_0 := 0$, $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ e

$$S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$$

Allora, per $n \geq 1$, si ha quasi certamente:

$$\begin{aligned} E[S_n|\mathcal{F}_{n-1}] &\overset{(3)}{=} E[S_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] + E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \\ &\overset{(2,5)}{=} S_{n-1} + E[X_n] = S_{n-1} \end{aligned}$$

Quindi S è una martingala.
b) Prodotto di variabili aleatorie indipendenti non negative di media 1:
Sia $X_1, X_2, ...$ una successione di variabili aleatorie indipendenti con

$$E[X_k] = 1 \quad \forall k$$

Definiamo nel seguente modo $M_0 := 1$, $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ e

$$M_n := X_1 X_2 ... X_n$$

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$$

Allora, per $n \geq 1$ si ha quasi certamente:

$$\begin{aligned} E[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] = E[M_{n-1}X_n|\mathcal{F}_{n-1}] &\overset{(6)}{=} M_{n-1}E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \\ &\overset{(5)}{=} M_{n-1}E[X_n] = M_{n-1} \end{aligned}$$

Quindi M è una martingala.
c) Accumulare informazione riguardo una variabile aleatoria:
Sia $\{\mathcal{F}_n\}$ una filtrazione e sia $\xi \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Definiamo $M_n := E[\xi|\mathcal{F}_n]$, allora

$$\begin{aligned} E[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= E[E[\xi|\mathcal{F}_n]|\mathcal{F}_{n-1}] = \\ &\overset{(7)}{=} E[\xi|\mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1} \end{aligned}$$

Quindi M è una martingala.

4.1.3 Processo prevedibile

Definizione 4.4. Il processo $C = (C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice prevedibile se C_n è $\mathcal{F}_{n-1}$ misurabile.

In maniera intuitiva, nel mondo del gioco d'azzardo, possiamo pensare a C_n come alla scommessa dell' n-esima giocata, il cui valore è basato sulla serie storica (forse meglio risultati ottenuti) fino al tempo $n-1$. Ciò che si vince al tempo n è identificato con $C_n(X_n - X_{n-1})$ e quello che si vince fino al tempo n con

$$Y_n = \sum_{1\le k\le n} C_k(X_k - X_{k-1}) =: (C\cdot X)_n$$

Da notare che

$$Y_n - Y_{n-1} = C_n(X_n - X_{n-1})$$

L'espressione $C\cdot X$, chiamata martingala trasformata, è l'analogo discreto di un integrale stocastico. Questi ultimi non verranno trattati in questa tesi che, per semplicità, si focalizza solo sui tempi discreti.

4.2 Tempi di arresto

Definizione 4.5. Una funzione $T : \Omega \to \{0, 1, 2, ..., \infty\}$ definita sullo spazio probabilizzato filtrato $(\Omega, \Sigma, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, P)$, è detta un tempo di arresto se:

$$\{T \le n\} = \{\omega : T(\omega) \le n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \le \infty \tag{4.1}$$

o equivalentemente

$$\{T = n\} = \{\omega : T(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \le \infty \tag{4.2}$$

Da notare che T può assumere valore ∞.

Dimostrazione:
Dimostriamo che (4.1) e (4.2) si equivalgono.
Se $\mathcal{T}$ rispetta la (4.1), allora:

$$\{T = n\} = \{T \le n\} \setminus \{T \le n-1\} \in \mathcal{F}_n$$

Se T rispetta la (4.2), allora per $k \leq n$:

$$\{T = k\} \in F_k \subseteq \mathcal{F}_n$$

e

$$\{T \leq n\} = \bigcup_{0 \leq k \leq n} \{T = k\} \in \mathcal{F}_n$$

□

Intuitivamente, T rappresenta il tempo in cui si decide di stoppare un processo stocastico. Solitamente il tempo di arresto è definito da una regola di arresto.

Esempio di regola di arresto:
Un ottimo esempio può essere fornito da un classico gioco basato su delle scommesse: si immagini di lanciare un dado ripetutamente; a seconda della faccia che esce, il giocatore A darà 1€ al giocatore B (se esce un numero da 1 a 3) o riceverà lo stesso ammontare (se esce un numero da 4 a 6). Ora una regola di arresto può essere definita secondo diversi criteri:

- il gioco prosegue finchè uno dei giocatori perde il suo patrimonio;
- dopo un certo numero di giocate, si decide di interrompere il gioco;
- dopo che il giocatore A (o B) ha vinto un certo numero di giocate, si decide di interrompere il gioco.

Il numero di criteri per il quale interrompere il gioco ovviamente può essere di vario tipo e quelli elencati sopra sono solo alcuni esempi.

4.2.1 Tempi di arresto e martingale

Notazione: useremo la notazione X^T quando vogliamo scrivere un processo arrestato X al tempo T.

Teorema 4.6. *Se X è una martingala e T è un tempo di arresto, allora il processo arrestato $X^T = (X_n^T : n \in \mathbb{Z}^+)$ è una martingala tale che*

$$E(X_n^T) = E(X_0) \quad \forall n$$

In maniera equivalente vale per supermartingale e submartingale. Rispettivamente

$$E(X_n^T) \leq E(X_0), \quad E(X_n^T) \geq E(X_0) \quad \forall n$$

Ora presentiamo uno dei teoremi più importanti sui tempi di arresto, ovvero il teorema di arresto opzionale di Doob che, intuitivamente, dice che arrestando una Martingala ad un certo tempo, il suo valore atteso equivale a quello inziale.

Teorema 4.7 (Teorema di arresto opzionale di Doob). *Sia T un tempo di arresto e sia X una martingala. Se vale una delle seguenti condizioni:*

1. *T è limitato quasi certamente, per un certo $N \in \mathbb{N}$, $T(\omega) \leq N$, $\forall \omega$;*
2. *X è limitato, per un certo $K \in \mathbb{R}^+$, $|X_n(\omega)| \leq K$, $\forall \omega, n$ e T è finito quasi sicuramente;*
3. *$E(T) < \infty$ e, per un certo $K \in \mathbb{R}^+$,*

$$|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)| \leq K \quad \forall \omega, n$$

Allora, $E(X_T) = E(X_0)$.

Allo stesso modo vale rispettivamente per le supermartingale

$$E(X_T) \leq E(X_0)$$

e per le submartingale

$$E(X_T) \geq E(X_0)$$

Capitolo 5

Teorema del limite centrale per Martingale

In questo capitolo, vediamo alcuni risultati importanti tra cui la funzione caratteristica e i tipi di convergenza di una variabile aleatoria. Infine, affronteremo e dimostreremo il Teorema del Limite Centrale per poi passare alla sua estensione al caso delle Martingale. Gran parte del lavoro di questo capitolo è stato svolto tramite la consultazione di "Probability and measure" di Patrick Billingsley Billingsley (1995) a cui si rimanda per una trattazione più estesa ed esaustiva. Per le dimostrazioni e per una visione complessiva degli argomenti indichiamo anche questi riferimenti: "Martingale Limit Theory and its application" di C. C. Heyde e P. Hall Hall et al. (2014) e "Calcolo delle Probabilità" di P. Baldi Baldi (2007).

5.1 Funzione caratteristica e convergenza di variabili aleatorie

Adesso vedremo alcune definizioni e risultati che precedono i teoremi limite. Infatti, tutto ciò che elencheremo in questa sezione sarà fondamentale per le dimostrazioni dei teoremi **5.8**, **5.9** e **5.10**.

Definizione 5.1 (Funzione caratteristica)**.** Si chiama funzione caratteristica della variabile aleatoria X, con funzione di densità $f(x)$ la funzione $\varphi_X(\cdot)$ definita da

$$\varphi_X(t) = E\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\right) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tX} f(x)\, dP_X(x)$$

Notiamo che la funzione caratteristica dipende solo dalla distribuzione di probabilità delle variabile aleatoria X.

Proprietà:

- **(Esistenza)** $\varphi_X(t)$ esiste sempre, per qualsiasi variabile aleatoria
- **(Unicità)** $\varphi_X(t)$ è unica $\Rightarrow$ due variabili aleatoria con la stessa funzione caratteristica hanno la stessa distribuzione
- $\forall t$, $|\varphi_X(t)| \leq 1$ e $\varphi_X(0) = 1$; inoltre, $t \to \varphi_X(t)$ è una funzione uniformemente continua
- se a e b sono costanti, $\varphi_{aX+b}(t) = \varphi_X(at)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tb}$
- **(Fattorizzazione)** se X e Y sono indipendenti, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t)$
- **(Inversione)** dalla funzione caratteristica di una variabile aleatoria si può sempre ottenere la sua densità (ammesso che esista)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\varphi_X(t)\,dt$$

- **(Derivabilità e momenti)** se la variabile aleatoria X ha momenti fino al k-esimo ordine, allora la funzione caratteristica φ_X è derivabile k volte e

$$E(X^{(k)}) = \mathrm{i}^k\varphi_X^{(k)}(0)$$

Nota: la funzione caratteristica di una distribuzione Normale di media μ e varianza σ^2 è

$$\varphi(t) = \exp\left(\mathrm{i}\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Questo risultato ci servirà più avanti nella dimostrazione del Teorema del Limite Centrale.

Definizione 5.2 (Convergenza in distribuzione)**.** Si dice che la successione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di variabili aleatorie converge in distribuzione alla variabile aleatoria X e si scrive $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$, se le relative leggi di probabilità $P_{X_n} = X_n(P)$ convergono alla legge $P_X = X(P)$. Ovvero, per ogni applicazione f continua e limitata

$$E[f(X_n)] = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dP_{X_n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dP_X(x) = E[f(X)]$$

Definizione 5.3 (Convergenza in probabilità)**.** Si dice che la successione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a X in probabilità e si scrive $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, se

$$\forall\epsilon > 0, \quad \lim P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

Definizione 5.4 (Convergenza quasi certa)**.** Si dice che la successione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a X quasi certamente e si scrive $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} X$, se per quasi ogni $\omega \in \Omega$, la successione $X_n(\omega)$ converge a $X(\omega)$

Proposizione 5.5. *Si può dimostrare che, per le convergenze sopra elencate, valgono le seguenti implicazioni:*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$$

Teorema 5.6 (Corollario sul Teorema 3.1.2)**.** *Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie e sia X una variabile aleatoria tale che $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$. Se X_n è uniformemente limitata, ovvero che, per qualche $K \in [0,\infty)$, abbiamo che $|X_n(\omega)| \leq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega$. Allora*

$$E(|X_n - X|) \to 0$$

Infine, dopo aver elencato alcune importanti convergenze di variabili aleatorie, enunciamo il Teorema di continuità di Paul Lévy. In modo informale, esso spiega come la convergenza in distribuzione di una successione di variabili aleatorie sia legata alla convergenza puntuale delle loro funzioni caratteristiche. Questo teorema è fondamentale per la successiva dimostrazione del Teorema del Limite Centrale.

Teorema 5.7 (Teroema di continuità di Lévy)**.** *Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie, siano $\varphi_n(\cdot)$ le relative funzioni caratteristiche e sia X una variabile aleatoria. Allora vale che*

1. *se $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$, allora $\varphi_n(t)$ converge puntualmente a $\varphi_X(t)$*
2. *supponiamo che la successione di funzioni caratteristiche converga puntualmente ad una funzione continua φ nel punto 0, allora φ è la funzione caratteristica di una variabile aleatoria X e $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$*

5.2 Teoremi di convergenza deboli

Notazione: spesso useremo la sigla "TLC" per abbreviare il nome del Teorema del Limite Centrale.

In questo paragrafo presentiamo il Teorema del Limite Centrale e la sua dimostrazione che rappresenta una delle scoperte più importanti nel campo della probabilità moderna. Tuttavia, come sappiamo, questo è solo il primo tassello del mosaico; con il passare degli anni sono state formulate estensioni del TLC dove si vanno a perdere alcune assunzioni di base delle variabili aleatorie prese in considerazione. Per esempio, si può indebolire l'ipotesi di indipendenza delle variabili come nel caso del TLC per Martingale; oppure si può assumere che le variabili non siano più identicamente distribuite come per il TLC di Lyapunov, che però non verrà trattato in questa sede.

5.2.1 Teorema del limite centrale (Lindeberg-Lévy)

Teorema 5.8. *Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite (i.i.d.), di media $\mu = E(X_i)$ e varianza $\sigma^2 = V(X_i) > 0$. Allora*

$$S_n = \frac{X_1 + ... + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$$

Dimostrazione:
Ora dimostreremo la validità del teorema del limite centrale. Per farlo, dobbiamo mostrare che la funzione caratteristica di S_n converge a quella di una Normale Standard, ovvero a $\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.
Per prima cosa, definiamo $Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$. Notiamo che le variabili $\{Y_i\}_{i\in 1,\dots,n}$ sono $i.i.d.$ ed hanno media nulla e varianza uguale a 1. Siccome

$$S_n = \frac{Y_1 + ... + Y_n}{\sqrt{n}}$$

allora

$$\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \cdots \varphi_{Y_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[\varphi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

Ora dobbiamo provare che $\lim_{n\to\infty} \varphi_{S_n}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.
Siccome $\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, per lo sviluppo del polinomio di Taylor intorno a $t = 0$, abbiamo che si può derivare la funzione caratteristica due volte. Infatti, $\varphi'_{Y_i}(0) = \mathrm{i}E(Y_i) = 0$ e $\varphi''_{Y_i}(0) = \mathrm{i}^2 E({Y_i}^2) = -V(Y_i) = -1$. Quindi, possiamo porre $\varphi_{Y_i}(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$.

$$\varphi_{Y_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \quad \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Infine, sfruttiamo il limite notevole $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$ e otteniamo il seguente risultato

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{S_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

□

Di seguito, presentiamo gli ultimi due risultati che hanno dato il nome a questa tesi; rispettivamente sono il TLC per Martingale ad incrementi limitati e, successivamente il TLC per Martingale. Forniremo anche una dimostrazione di questi due importanti teoremi.

5.2.2 Teorema del limite centrale per Martingale con incrementi limitati

Il limite centrale per le Martingale è un risultato teorico fondamentale, ha numerose applicazioni pratiche ed è uno strumento chiave per comprendere il comportamento asintotico delle somme di Martingale e per la loro applicazione in diversi contesti.

Teorema 5.9. *Sia $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una Martingala con incrementi limitati con*

$$Z_t = X_t - X_{t-1}$$

e

$$|Z_t| \leq k \quad q.c.$$

per qualche $k > 0$ e $\forall t$. Inoltre, assumiamo che $|X_1| \leq k$ q.c.. Definiamo

$$\sigma_t^2 = E[Z_t^2|\mathcal{F}_{t-1}]$$

e sia

$$\tau_n = \min\left\{t : \sum_{i=1}^{t} \sigma_i^2 \geq n\right\}$$

con la somma delle varianze che diverge a $+\infty$ con probabilità 1, ovvero

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = +\infty$$

da cui

$$\tau_n < \infty\,, \forall n \geq 0 \quad q.c.$$

Allora, $\frac{X_{\tau_n}}{\sqrt{n}}$ *converge in distribuzione ad una Normale standard (media* 0 *e varianza* 1*) quando* $n \to +\infty$*. Ovvero*

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_{\tau_n}}{\sqrt{n}} < x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

Prima di dimostrare il **Teorema 5.9**, enunciamo una versione del TLC per Martingale con incrementi non limitati. Ci serviremo della dimostrazione del **Teorema 5.10** anche per il **Teorema 5.9**.

5.2.3 Teorema del limite centrale per Martingale

Teorema 5.10. *Sia* $\{X_{n,m}\}_{m\geq 0}$ *una Martingala in* L^2 *rispetto ad una filtrazione* $\{\mathcal{F}_{n,m}\}_{m\geq 0}$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*. Inoltre, siano rispettivamente* $Z_{n.m} = X_{n,m} - X_{n,m-1}$ *e* $\sigma^2_{n,m} = E[Z^2_{n,m}|\mathcal{F}_{n,m-1}]$ *la differenza di Martingala e la varianza condizionale. Assumiamo che,* $\forall n$*,* $X_{n,m}$ *e* $\Gamma_{n,m} \equiv \sum_{i=1}^{m} \sigma^2_{n,i}$ *convergono quasi certamente ad un limite finito quando* $m \to +\infty$*. Se valgono le seguenti condizioni*

1. $\Gamma_{n,\infty} \equiv \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma^2_{n,i} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 1$
2. $\forall \epsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} E[Z^2_{n,m}]\mathbb{1}_{\{|Z_{n,m}|>\epsilon\}} = 0$

Allora

$$X_{n,\infty} \equiv \sum_{m=1}^{+\infty} Z_{n,m} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} N(0,1)$$

Ora dimostriamo che l'estensione del TLC per Martingale con incrementi limitati è valido (**Teorema 5.9**). Per farlo, ci riconduciamo alle due ipotesi fatte dal **Teorema 5.10**.

Dimostrazione:

Innanzitutto, costruiamo una successione di Martingale. Sia $\mathcal{F}_{n,m} = \mathcal{F}_m$ e

$$X_{n,m} = \frac{X_{m\wedge\tau_n}}{\sqrt{n}}$$

Quest'ultima è una Martingala $\{X_{n,m}\}_{m\geq 0}$ in L^2. $\forall n \in \mathbb{N}$ in modo che

$$Z_{n,m} = \frac{Z_m}{\sqrt{n}}\mathbb{1}_{\{\tau_n \geq m\}}$$

Inoltre

$$\sigma^2_{n.m} := E\left[\left(\frac{Z_m}{\sqrt{n}}\mathbb{1}_{\{\tau_n\geq m\}}\right)^2 \middle| \mathcal{F}_{n,m-1}\right] = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{\{\tau_n\geq m\}} E(Z^2_m|\mathcal{F}_{m-1}) = \frac{\sigma^2_m}{n}\mathbb{1}_{\{\tau_n\geq m\}}$$

con $\{\tau_n \geq m\} \in \mathcal{F}_{m-1}$. Poi, dalla definizione di τ_n, sommando si ottiene

$$1 \leq \Gamma_{n,\infty} := \sum_{m=1}^{\tau_n} \frac{\sigma_m^2}{n} \leq 1 + \frac{k^2}{n}$$

Con $n \to \infty$, abbiamo che $\Gamma_{n,\infty} \to 1$. In questo modo abbiamo verificato la prima delle due assunzioni del **Teorema 5.10**. Ora, passiamo alla seconda ipotesi. Per ogni $\epsilon > 0$ e per ogni n abbastanza grande si ha che

$$|Z_{n,m}| = \left| \frac{Z_m}{\sqrt{n}} \mathbb{1}_{\{\tau_n \geq m\}} \right| \leq \frac{k}{\sqrt{n}} < \epsilon \ , \forall m$$

in modo che

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E[|Z_{n,m}|^2] \mathbb{1}_{\{|Z_{n,m}|> \epsilon\}} = 0$$

Quindi, ci siamo ricondotti alle ipotesi del TLC per Martingale. Infatti, notiamo che

$$X_{n,\infty} = \frac{X_{\tau_n}}{\sqrt{n}}$$

con $\tau_n < +\infty$ *q.c.* dall'ipotesi $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = +\infty$.

$\square$

A questo punto dimostriamo il **Teorema 5.10**.

Dimostrazione:

Per ora, assumiamo che esista una costante c tale che $\Gamma_{n,\infty} \leq c$, $\forall n$ *q.c.*. Vogliamo dimostare, tramite il teorema di Lévy, che il primo membro della disuguaglianza **(5.1)** tende a 0 se $n \to +\infty$

$$\begin{aligned} \left| E\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_{n,\infty}}\right] - \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \right| &\leq \left| E\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_{n,\infty}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_{n,\infty}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2\Gamma_{n,\infty}}\right] + E\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_{n,\infty}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2\Gamma_{n,\infty}} - \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right] \right| \\ &\leq E\left[\left|1 - \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2\Gamma_{n,\infty}}\right|\right] + \left| E\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_{n,\infty}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2\Gamma_{n,\infty}} - 1\right] \right| \end{aligned} \tag{5.1}$$

Il primo termine tende a 0 per il **Teorema 5.8** e per l'assunzione che $\Gamma_{n,\infty} \leq c$.
Per limitare il secondo termine sfruttiamo una serie telescopica. Infatti

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_{n,\infty}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2\Gamma_{n,\infty}} - 1 &= \sum_{m\geq 1} \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_{n,m}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2\Gamma_{n,m}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_{n,m-1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2\Gamma_{n,m-1}} \right\} \\ &= \sum_{m\geq 1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_{n,m-1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2\Gamma_{n,m}} \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}tZ_{n,m}} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2\sigma_{n,m}^2} \right\} \end{aligned}$$

Quindi, sfruttando la proprietà torre del **Paragrafo 3.2.2**, si ha che

$$
\begin{aligned}
\left| E\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_{n,\infty}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2\Gamma_{n,\infty}} - 1 \right] \right| &\leq \sum_{m\geq 1} \left| E\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_{n,m-1}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2\Gamma_{n,m}} \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}tZ_{n,m}} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2_{n,m}} \right\} \right] \right| \\
&\leq \sum_{m\geq 1} \left| E\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_{n,m-1}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2\Gamma_{n,m}} E\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tZ_{n,m}} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2_{n,m}} | \mathcal{F}_{n,m-1} \right] \right] \right| \\
&\leq \mathrm{e}^{ct^2} \sum_{m\geq 1} E\left[\left| E\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tZ_{n,m}} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2_{n,m}} | \mathcal{F}_{n,m-1} \right] \right| \right]
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

dove abbiamo usato il fatto che $X_{n,m-1}, \Gamma_{n,m} \in \mathcal{F}_{n,m-1}$ e l'assunzione che $\Gamma_{n,\infty} \leq c$. Ora dobbiamo sfruttare due lemmi che enunciamo di seguito per continuare con la dimostrazione

Lemma 5.11.

$$\left| E\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\right] - \left(1 + \mathrm{i}tE(X) - \frac{t^2}{2}E(X^2)\right) \right| \leq E\left[\min\left\{|tX|^2, |tX|^3\right\}\right]$$

Lemma 5.12. *Se z è un numero complesso allora*

$$|\mathrm{e}^z - (1+z)| \leq |z^2|\mathrm{e}^{|z|}$$

Dal **Lemma 5.11** e dalle proprietà delle Martingale possiamo dire che

$$
\begin{aligned}
\left| E\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tZ_{n,m}} | \mathcal{F}_{n,m-1}\right] - \left(1 - \frac{1}{2}t^2\sigma^2_{n,m}\right) \right| &\leq E\left[|tZ_{n,m}|^2 \wedge |tZ_{n,m}|^3 | \mathcal{F}_{n,m-1} \right] \\
&\leq E\left[|tZ_{n,m}|^3 \,|\, \mathcal{F}_{n,m-1} \right] \mathbb{1}_{\{|Z_{n,m}|\leq\epsilon\}} + E\left[|tZ_{n,m}|^2 \,|\, \mathcal{F}_{n,m-1} \right] \mathbb{1}_{\{|Z_{n,m}|>\epsilon\}} \\
&\leq \epsilon|t|^3 E\left[Z^2_{n.m} \,|\, \mathcal{F}_{n,m-1} \right] \mathbb{1}_{\{|Z_{n,m}|\leq\epsilon\}} + t^2 E\left[Z^2_{n.m} \,|\, \mathcal{F}_{n,m-1} \right] \mathbb{1}_{\{|Z_{n,m}|>\epsilon\}} \\
&\leq \epsilon|t|^3\sigma^2_{n,m} + t^2 E\left[Z^2_{n.m} \,|\, \mathcal{F}_{n,m-1} \right] \mathbb{1}_{\{|Z_{n,m}|>\epsilon\}}
\end{aligned}
$$

Dal **Lemma 5.12**

$$\left| \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2_{n,m}} - \left(1 - \frac{1}{2}t^2\sigma^2_{n,m}\right) \right| \leq \left(\frac{1}{2}t^2\sigma^2_{n,m}\right)^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2\sigma^2_{n,m}} \leq t^4\sigma^2_{n,m}\mathrm{e}^{ct^2}\left(\sup_{m\geq 1}\sigma^2_{n,m}\right)$$

Riprendiamo ora l'equazione **5.2** e sviluppiamo secondo i risultati appena ottenuti

$$\begin{aligned}\left| E\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_{n,\infty}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2\Gamma_{n,\infty}} - 1\right] \right| &\leq \mathrm{e}^{c\,t^2} \sum_{m\geq 1} E\left[\left| E\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tZ_{n,m}} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2_{n,m}} | \mathcal{F}_{n,m-1}\right] \right| \right] \\ &\leq \mathrm{e}^{c\,t^2} \left\{ \epsilon |t|^3 c + t^2 \sum_{m=1}^{+\infty} E\left[Z^2_{n.m} \,|\, \mathcal{F}_{n,m-1}\right] \mathbb{1}_{\{|Z_{n,m}|>\epsilon\}} + t^4 c\, \mathrm{e}^{ct^2} E\left(\sup_{m\geq 1} \sigma^2_{n,m}\right)\right\}\end{aligned}$$

Per limitare $E\left(\sup_{m\geq 1}\sigma^2_{n,m}\right)$ notiamo che

$$\begin{aligned}\sigma^2_{n,m} &\leq \epsilon^2 + E\left[Z^2_{n,m} \,|\, \mathcal{F}_{n,m-1}\right] \mathbb{1}_{\{|Z_{n,m}|>\epsilon\}} \\ &\leq \epsilon^2 + \sum_{i=1}^{+\infty} E\left[Z^2_{n,i} \,|\, \mathcal{F}_{n,i-1}\right] \mathbb{1}_{\{|Z_{n,i}|>\epsilon\}}\end{aligned}$$

da cui

$$E\left(\sup_{m\geq 1} \sigma^2_{n,m}\right) \leq \epsilon^2 + \sum_{i=1}^{+\infty} E\left[Z^2_{n,i}\right] \mathbb{1}_{\{|Z_{n,i}|>\epsilon\}}$$

Quindi, prendendo $n \to \infty$ e $\epsilon > 0$ e sfruttando il punto **2.** del **Teorema 5.10**, abbiamo che

$$\left| E\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_{n,\infty}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2\Gamma_{n,\infty}} - 1\right] \right| \longrightarrow 0 \quad \forall t$$

In questo modo abbiamo concluso la dimostrazione per $\Gamma_{n,\infty} \leq c$.
Per rimuovere quest'ultima assunzione, prendiamo $c > 1$ e definiamo $A_{n,m} = \{\sum_{i=1}^{m} \sigma^2_{n,i} \leq c\}$, $A_{n,\infty} = \{\sum_{i=1}^{+\infty} \sigma^2_{n,i} \leq c\}$ e $Y_{n,m} = Z_{n,m}\mathbb{1}_{\{A_{n,m}\}}$. Da $A_{n,m} \in \mathcal{F}_{n,m-1}$ segue che $E(Y_{n,m}|\mathcal{F}_{n,m-1}) = 0$ e $\kappa^2_{n,m} = E(Y^2_{n,m}|\mathcal{F}_{n,m-1}) = \sigma^2_{n,m}\mathbb{1}_{A_{n,m}}$. Dato che $\sum_{i=1}^{\infty}\kappa^2_{n,i}$ equivale a $\sum_{i=1}^{m}\sigma^2_{n,i}$ su $A_{n,m} - A_{n,m+1}$ e a $\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^2_{n,i}$ su $A_{n,\infty}$, $Y_{n,m}$ soddisfa $\Gamma_{n,m} \leq c$.
Ora, $A_{n,\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 1$ dall'assunzione **(1.)** del **Teorema 5.10** e $\kappa^2_{n,m} = \sigma^2_{n,m}$ su $A_{n,\infty}$, $\forall m$ in modo che $Y_{n,m}$ soddisfi $\Gamma_{n,m} \leq c$. Inoltre, soddisfa anche l'assunzione **(2.)** del **Teorema 5.10** perchè $Y_{n,m} \leq Z_{n,m}$. Possiamo concludere che $\sum_{i=1}^{\infty} Y_{n,i} \xrightarrow[n\to\infty]{P} N(0,1)$ e, dato che $\sum_{i=1}^{\infty} Z_{n,i}$ coincide con $\sum_{i=1}^{\infty} Y_{n,i}$ su $A_{n,\infty}$, segue che

$$\sum_{i=1}^{\infty} Z_{n,i} \xrightarrow[n\to\infty]{P} N(0,1)$$

$\square$

Bibliografia

Baldi, P. (2007). *Calcolo delle probabilità*. McGraw-Hill Companies.

Biagini, F. & Campanino, M. (2006). *Elementi di Probabilità e Statistica*. Springer Milan.

Billingsley, P. (1995). *Probability and measure*. Wiley.

Hall, P., Heyde, C., Birnbaum, Z. & Lukacs, E. (2014). *Martingale Limit Theory and Its Application*. Elsevier Science.

Rudin, W. (1974). *Analisi reale e complessa*. Bollati Boringhieri.

Williams, D. (1991). *Probability with Martingales*. Cambridge University Press.