

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Sistemi Dinamici Monotoni e loro applicazioni

Relatore:
Prof. Francesco Rossi

Laureando: Alberto Stevanoni
Matricola: 1226230

Anno Accademico 2021/2022

16 dicembre 2022

Indice

1	Relazioni d'ordine e flussi	2
1.1	Relazioni d'ordine	2
1.1.1	Esempi	3
1.2	Flussi e loro proprietà	4
1.2.1	Il Criterio di Convergenza e le sue conseguenze	9
1.2.2	La Dicotomia degli Insiemi Limite	12
1.2.3	Stabilità e Tricotomia degli Intervalli Ordinati	16
2	Sistemi Dinamici Monotoni	20
2.1	La Condizione di Kamke	21
2.2	Insiemi Positivamente Invarianti e Monotonia delle Soluzioni	24
2.3	Struttura delle Orbite e degli Insiemi Limite	25
2.4	Altri Coni Positivi in \mathbb{R}^n	27
3	Caratterizzazione dei Sistemi Dinamici Monotoni in \mathbb{R}^n	30
3.1	Grafi pesati e grafi con segno	30
3.2	Grafi associati e caratterizzazione dei sistemi dinamici monotoni in \mathbb{R}^n	32
3.3	Sistemi Dinamici Multipartiti	39

Capitolo 1

Relazioni d'ordine e flussi

In questo capitolo si introdurranno le nozioni fondamentali per lo studio dei Sistemi Dinamici Monotoni: le relazioni d'ordine, in particolare quelle generate da coni positivi in spazi di Banach, e i flussi, funzioni continue tra spazi metrici dipendenti da un parametro positivo. Se ne approfondiranno poi alcune proprietà, quali la convergenza e la stabilità dei punti di equilibrio, che si applicheranno poi nello studio dei sistemi dinamici.

1.1 Relazioni d'ordine

Richiamiamo, innanzitutto, le definizioni di spazio metrico e di spazio di Banach che ci saranno utili nel seguito.

Definizione 1.1. Sia X un insieme non vuoto e sia $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che:

- $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$;
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$.

La funzione d è detta **distanza** (o *metrica*) e la coppia (X, d) si dirà **spazio metrico** (dove non necessario, si eviterà di indicare la distanza d e si parlerà solo di spazio metrico X).

Definizione 1.2. Una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ si dice **successione di Cauchy** se $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ tale che $\forall n, m > n_\varepsilon$ si ha che $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Definizione 1.3. Uno spazio metrico (X, d) si dice **completo** se ogni successione di Cauchy converge ad un elemento dello spazio X .

Definizione 1.4. Sia X uno spazio vettoriale e sia $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che:

- $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$.

La funzione $\|\cdot\|$ si dirà **norma** e la coppia $(X, \|\cdot\|)$ si dirà **spazio normato**.

Osservazione 1.1. Ogni spazio normato è anche uno spazio metrico, perchè possiamo definire una distanza, detta metrica indotta dalla norma, nel seguente modo: $d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\|$. Lo spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ si dirà **spazio di Banach** se lo spazio metrico $(X, d_{\|\cdot\|})$ è completo.

Introduciamo ora le nozioni di relazione, relazione d'ordine parziale e relazione d'ordine totale in uno spazio metrico.

Definizione 1.5. Sia X uno spazio metrico e sia $\rho \subseteq X \times X$. Dati $x, y \in X$, diremo che x è in relazione con y (e scriveremo $x \rho y$) se e solo se $(x, y) \in \rho$. Chiameremo l'insieme ρ **relazione** sull'insieme X .

Nel seguito dell'elaborato indicheremo la relazione ρ con i simboli \geq_ρ o \leq_ρ (o più semplicemente con \geq o \leq). In tal modo la scrittura $x \rho y$ diventerà $x \geq_\rho y$ o $x \leq_\rho y$.

Definizione 1.6. Sia X uno spazio metrico e sia \leq una relazione su X . Diremo che \leq è una **relazione d'ordine parziale** se, $\forall x, y, z \in X$, valgono le seguenti:

- **riflessività:** $x \leq x$;
- **antisimmetria:** se $x \leq y$ e $y \leq x$, allora $x = y$;
- **transitività:** se $x \leq z$ e $z \leq y$, allora $x \leq y$.

Definizione 1.7. Una relazione d'ordine parziale \leq su uno spazio metrico X si dice **relazione d'ordine totale** se $\forall x, y \in X$ vale che o $x \leq y$ o $y \leq x$, cioè se ogni coppia di elementi in X è **confrontabile**.

Definizione 1.8. Un insieme X dotato di una relazione d'ordine parziale (totale) si dirà insieme parzialmente (totalmente) ordinato.

Scriveremo inoltre che $x < y$ se $x \leq y$ e $x \neq y$. Diremo infine che, dati $A, B \subseteq X$, $A \leq B \Leftrightarrow a \leq b, \forall a \in A, \forall b \in B$

1.1.1 Esempi

Analizziamo ora alcuni esempi di relazioni d'ordine parziali e totali.

Esempio 1.1. Gli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ dotati della classica relazione d'ordine \leq sono degli insiemi totalmente ordinati, poichè ogni elemento è confrontabile con tutti gli altri.

Esempio 1.2. Guardiamo ora ad un esempio di relazione d'ordine parziale ma non totale. Siano dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$. Diremo che $x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i = 1, \dots, n$. Si può facilmente dimostrare che la relazione così definita è un ordine parziale, ma non totale. Infatti gli elementi $x = (0, \dots, 0, 1), y = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ non sono confrontabili, poichè $x_1 < y_1$, ma $x_n > y_n$.

Esempio 1.3. L'esempio seguente sarà di fondamentale importanza nel seguito. Sia Y uno spazio di Banach. Diremo che il sottoinsieme non vuoto $Y_+ \subseteq Y$ è un **cono positivo** se è **chiuso** ed è tale che:

1. $a \cdot y \in Y_+, \forall y \in Y_+, \forall a \in \mathbb{R}^+$;
2. $y_1 + y_2 \in Y_+, \forall y_1, y_2 \in Y_+$;
3. $Y_+ \cap (-Y_+) = \{0_Y\}$.

In tali circostanze, la relazione definita da $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in Y_+$ è un ordine parziale dello spazio Y e si dirà *ordine indotto* dal cono Y_+ . Dimostriamolo:

- *riflessività*: dalla proprietà 3 del cono positivo Y_+ , si deduce che $0_Y \in Y_+$, perciò $\forall y \in Y, y - y = 0_Y \in Y_+$, da cui segue che $y \leq y$;
- *antisimmetria*: se $x \leq y$ e $y \leq x$, allora $y - x \in Y_+$ e $x - y \in Y_+$. Ma $-(y - x) \in (-Y_+)$ e $-(y - x) = x - y \in Y_+$, perciò si ha $-(y - x) \in Y_+ \cap (-Y_+) = \{0_Y\}$. Quindi $-(y - x) = 0_Y$, da cui $y = x$;
- *transitività*: se $x \leq z$ e $z \leq y$, allora $z - x \in Y_+$ e $y - z \in Y_+$. Dalla proprietà 2 del cono positivo si avrà che $(z - x) + (y - z) \in Y_+$, da cui segue che $y - x \in Y_+$, cioè che $x \leq y$.

Esempio 1.4. L'utilità della costruzione nell'esempio precedente si può cogliere quando si prende come spazio di Banach Y lo spazio delle funzioni $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, in cui si considera come cono positivo Y_+ l'insieme delle funzioni f tali che $f(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega$. In questo caso, l'ordine parziale indotto sarà quello definito da $f \leq g \Leftrightarrow g - f \in Y_+ \Leftrightarrow g(\omega) - f(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega \Leftrightarrow f(\omega) \leq g(\omega), \forall \omega \in \Omega$, cioè quello definito puntualmente. Prendendo ora come insieme di partenza $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$, si può definire una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi $\{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}$ e \mathbb{R}^n , che è quella che ad una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ associa il vettore $v = (f(1), \dots, f(n)) \in \mathbb{R}^n$. Ovviamente tale corrispondenza è biettiva e la sua inversa è quella che ad un vettore $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ associa la funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(i) = v_i, \forall i \in \Omega$. Tramite tale mappa, possiamo indurre la relazione d'ordine anche sullo spazio \mathbb{R}^n : dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, prendiamo le funzioni $f(i) = x_i$ e $g(i) = y_i$ e si avrà che $f \leq g \Leftrightarrow f(i) \leq g(i), \forall i = 1, \dots, n \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i = 1, \dots, n$. Perciò diremo che $x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i = 1, \dots, n$, ritrovando quindi l'ordinamento parziale di \mathbb{R}^n visto nell'esempio 2, cioè quello fatto coordinata per coordinata.

Definizione 1.9. Sia Y uno spazio di Banach e Y_+ un cono positivo tale che $\text{Int}(Y_+) \neq \emptyset$, cioè con interno non vuoto. Dati $x, y \in Y$, scriveremo allora che $x \ll y \Leftrightarrow y - x \in \text{Int}(Y_+)$.

Osservazione 1.2. La relazione \ll è più forte della relazione \leq , infatti $x \ll y \Rightarrow x < y$. Questo perchè se $y - x \in \text{Int}(Y_+)$, allora $y - x \in Y_+$ e $y - x \neq 0_Y$, poichè $\text{Int}(Y_+) \subseteq Y_+$ e $0_Y \notin \text{Int}(Y_+)$.

Osservazione 1.3. Poichè l'addizione $(+: Y \times Y \rightarrow Y)$ nello spazio Y è una mappa continua, si ha che se $x \ll y$ allora $\exists U, V$ intorno aperti rispettivamente di x e y tali che $V - U \subset \text{Int}(Y_+)$, cioè tali che $U < V$.

1.2 Flussi e loro proprietà

In questa sezione introdurremo le nozioni di flusso, di orbita, di insieme limite e di concetti a loro connessi, che ci permetteranno poi di enunciare e dimostrare alcune fondamentali proprietà legate ai sistemi dinamici.

Definizione 1.10. Sia X uno spazio metrico. Un **flusso** su X è una funzione *continua* $\Phi: X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ tale che:

- (i) $\Phi(x, 0) = x, \forall x \in X$;
- (ii) $\Phi(x, t) \circ \Phi(x, s) = \Phi(x, t + s), \forall x \in X, \forall t, s \geq 0$.

Usando la notazione $\Phi(x, t) \equiv \Phi_t(x)$ la proprietà (i) diventa $\Phi_0 = id_X$ e la proprietà (ii) $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$.

Elenchiamo ora una serie di definizioni che ci saranno utili nel seguito per lo studio delle proprietà dei flussi.

Definizione 1.11. Dato un flusso Φ su uno spazio metrico X e un punto $x \in X$, definiamo l'**orbita di x** come l'insieme $O(x) = \{\Phi_t(x) \mid t \geq 0\} \subseteq X$. Un punto $x \in X$ si dice **punto di equilibrio** se $O(x) = \{x\}$.

Nel seguito indicheremo con E l'insieme di tutti i punti di equilibrio di Φ .

Definizione 1.12. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice **invariante** rispetto al flusso se $\Phi_t(A) = A, \forall t \geq 0$. Si dirà invece **positivamente invariante** se $\Phi_t(A) \subset A, \forall t \geq 0$.

Definizione 1.13. Sia $x \in X$ e $O(x)$ la sua orbita. Diremo allora che $O(x)$ è un'**orbita T-periodica** se vale che $\Phi_T(x) = x$, per qualche $T > 0$.

Se $O(x)$ è un'orbita T-periodica, allora $\Phi_{t+T}(x) = \Phi_t(x), \forall t \geq 0$, poichè per la proprietà (ii) del flusso abbiamo che $\Phi_{t+T}(x) = \Phi_t(\Phi_T(x)) = \Phi_t(x)$. In tal caso si avrà che $O(x) = \{\Phi_t(x) \mid 0 \leq t \leq T\}$.

Osservazione 1.4. Le orbite sono un esempio di insiemi positivamente invarianti. Infatti, dato $x \in X$, grazie alla proprietà (ii) del flusso Φ , si ha che $\Phi_s(O(x)) = \{\Phi_s(\Phi_t(x)) \mid t \geq 0\} = \{\Phi_{t+s}(x) \mid t \geq 0\} = \{\Phi_u(x) \mid u \geq s\} \subset O(x), \forall s \geq 0$. Perciò $O(x)$ è positivamente invariante.

Osservazione 1.5. Le orbite periodiche, invece, sono un esempio di insiemi invarianti. Infatti, dato $x \in X$ tale che $O(x)$ sia periodica e fissato un $s > 0$, dall'osservazione precedente sappiamo che $\Phi_s(O(x)) \subseteq O(x)$. Dimostriamo ora che vale anche l'inclusione inversa, cioè $O(x) \subseteq \Phi_s(O(x))$. Sia infatti $y \in O(x)$, quindi esiste $t \geq 0$ tale che $y = \Phi_t(x)$. Detto T il periodo dell'orbita di x , grazie al Principio di Archimede sappiamo che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale per cui $s \leq t + nT$. Ma allora, scelto $z = \Phi_{t+nT-s}(x) \in O(x)$ si ha che $\Phi_s(z) = \Phi_s(\Phi_{t+nT-s}(x)) = \Phi_{t+nT}(x) = \Phi_t(x) = y$. Perciò $y \in \Phi_s(O(x))$, da cui segue che $O(x) = \Phi_s(O(x))$.

Definizione 1.14. Dato $x \in X$ definiamo l'**insieme limite di x** come:

$$\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \left(\overline{\bigcup_{s \geq t} \Phi_s(x)} \right)$$

Osservazione 1.6. Dalla definizione di insieme limite segue immediatamente che un punto $z \in X$ soddisfa $z \in \omega(x)$ se e solo se esiste una successione $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $t_n \rightarrow +\infty$ e $\Phi_{t_n}(x) \rightarrow z$, per $n \rightarrow +\infty$.

Osservazione 1.7. Se l'insieme $\overline{O(x)}$ è compatto, allora $\omega(x)$ è non vuoto, compatto, connesso, invariante e attrae $\Phi_t(x)$, nel senso che $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\omega(x), \Phi_t(x)) = 0$, dove $d(A, y) = \inf_{a \in A} (d(a, y))$. Tali proprietà sono classiche, si veda ad esempio [5].

Definizione 1.15. Dato $x \in X$, si dice che x è un *punto convergente* se l'insieme limite $\omega(x)$ consiste di un singolo punto. In tal caso, allora, tale punto è di equilibrio. Indicheremo nel seguito con C l'insieme di tutti i punti convergenti. Diremo invece che $x \in X$ è un punto *quasi-convergente* se $\omega(x) \subset E$, dove E è l'insieme dei punti di equilibrio. Indicheremo con Q l'insieme di tali punti.

Definizione 1.16. Un'orbita periodica O si dice *attrattiva* se esiste un insieme aperto $U \supset O$ tale che $\omega(x) = O$, $\forall x \in U$.

Esempio 1.5. Un esempio di orbita periodica attrattiva si può trovare nel sistema

descritto dalle seguenti equazioni differenziali
$$\begin{cases} x' = x - y - x(x^2 + y^2) \\ y' = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases}.$$

In tale sistema è presente un'orbita periodica, che è la circonferenza di centro $(0, 0)$ e di raggio 1. Tale informazione si può facilmente dedurre cambiando coordinate nel sistema, descrivendolo in coordinate polari. Infatti passando da (x, y)

a (ρ, θ) il sistema diventa
$$\begin{cases} \rho' = \rho(1 - \rho^2) \\ \theta' = 1 \end{cases}$$
 e perciò, imponendo come dato

iniziale $\rho_0 = 1$ e θ_0 qualsiasi, come soluzione si ottiene
$$\begin{cases} \rho(t) = 1 \\ \theta(t) = \theta_0 + t \end{cases},$$
 che

descrive quindi la circonferenza C di centro $(0, 0)$ e di raggio 1. Tale orbita periodica attrae a sé ogni altra orbita, indipendentemente dalle condizioni iniziali (ad esclusione dell'unico equilibrio, che è $(0, 0)$). Si ha perciò che $\omega((x, y)) = C$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Si può osservare l'attrattività di tale orbita nella Figura 1.1.

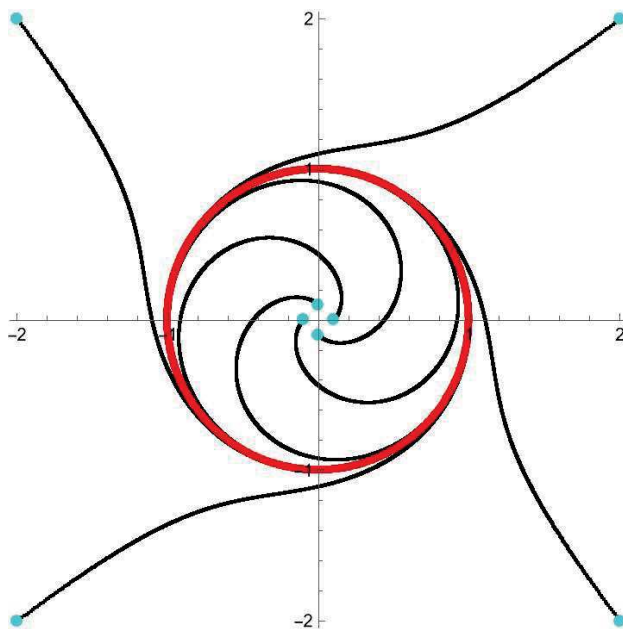


Figura 1.1: il grafico rappresenta l'orbita attrattiva C (in rosso) e otto orbite (in nero) relative alle condizioni iniziali $(\pm 2, \pm 2)$ e $(\pm 0.2, \pm 0.2)$ (in azzurro).

Esempio 1.6. Esempi di orbite periodiche non attrattive si possono trovare in alcuni sistemi dinamici lineari bidimensionali, cioè descritti dall'equazione differenziale $x' = Ax$, con $x \in \mathbb{R}^2$ e $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Un esempio esplicito è dato dal sistema $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$, con $x \in \mathbb{R}^2$. La soluzione di tale sistema, con dato iniziale $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, sarà data da $x(t) = \exp(tA) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, che descrive quindi una circonferenza di centro $(0,0)$ e passante per il punto $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Perciò le orbite di tale sistema sono circonferenze concentriche, quindi ogni orbita è periodica e di conseguenza non possono essere presenti orbite attrattive, come si può vedere nella Figura 1.2.

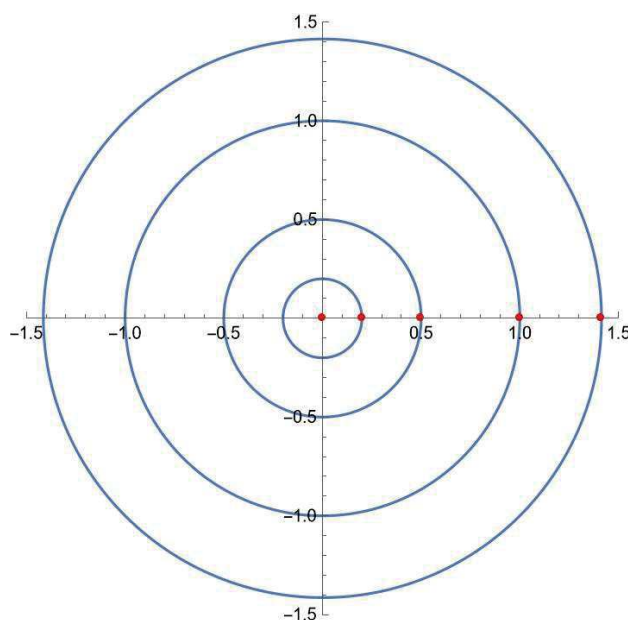


Figura 1.2: il grafico rappresenta cinque orbite (in blu) relative alle condizioni iniziali $x_1 = 0, 0.2, 0.5, 1, \sqrt{2}$ e $x_2 = 0$ (in rosso).

Iniziamo ora a studiare, in spazi metrici dotati di una relazione d'ordine parziale, i flussi che preservano tale relazione. A partire da questo dedurremo poi una serie di utili proprietà che li caratterizzano. Nel seguito, a meno che non sia diversamente specificato, supporremo che lo spazio metrico X sia dotato di una relazione d'ordine parziale, indicata con \leq .

Definizione 1.17. Un flusso Φ si dice *monotono* se soddisfa la condizione seguente:

$$\text{dati } x, y \in X \text{ si ha che } x \leq y \Rightarrow \Phi_t(x) \leq \Phi_t(y), \forall t \geq 0$$

Possiamo perciò dire che un flusso Φ è monotono se preserva la relazione d'ordine parziale (o totale) presente sull'insieme X .

Definizione 1.18. Si dice che un flusso Φ *preserva strettamente l'ordine* se è *monotono* e $\forall x, y \in X$ tali che $x < y, \exists U, V \subseteq X$, con $x \in U$ e $y \in V$, ed $\exists t_0 > 0$ tali che $\Phi_{t_0}(U) \leq \Phi_{t_0}(V)$. Per brevità, nel seguito, i flussi che preservano strettamente l'ordine li chiameremo **flussi SOP** (dall'inglese *Strongly Order-Preserving*).

Osservazione 1.8. La monotonia di Φ implica inoltre che $\Phi_t(U) \leq \Phi_t(V), \forall t \geq t_0$. Questo poichè se $\Phi_{t_0}(U) \leq \Phi_{t_0}(V)$, allora per la monotonia di Φ vale che $\Phi_s(\Phi_{t_0}(U)) \leq \Phi_s(\Phi_{t_0}(V))$, da cui segue che $\Phi_{t_0+s}(U) \leq \Phi_{t_0+s}(V), \forall s \geq 0$.

Definizione 1.19. Sia dato un insieme $X \subseteq Y$ in cui l'ordine parziale è indotto da un cono positivo Y_+ tale che $\text{Int}(Y_+) \neq \emptyset$. Ricordando che $x \ll y \Leftrightarrow y - x \in \text{Int}(Y_+)$, diremo allora che un flusso Φ è **strettamente monotono** su X se Φ è *monotono* e vale che:

$$\text{dati } x, y \in X \text{ si ha che } x < y \Rightarrow \Phi_t(x) \ll \Phi_t(y), \forall t > 0$$

Si dice invece che Φ è **definitivamente strettamente monotono** se è *monotono* e vale che:

$$\forall x, y \in X \text{ tali che } x < y, \exists t_0 > 0 \text{ tale per cui } \Phi_t(x) \ll \Phi_t(y), \forall t \geq t_0$$

Per ovvi motivi si ha che Φ *strettamente monotono* \Rightarrow Φ *definitivamente strettamente monotono*.

Esempio 1.7. Un esempio di flusso strettamente monotono e SOP in \mathbb{R}^2 è dato da $\Phi_t(x_1, x_2) = (x_1 e^t, x_2 e^t)$. Esso infatti soddisfa le proprietà della Definizione 1.10: (i) $\Phi_0(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ e (ii) $\Phi_s(\Phi_t(x_1, x_2)) = \Phi_s(x_1 e^t, x_2 e^t) = (x_1 e^{t+s}, x_2 e^{t+s}) = \Phi_{t+s}(x_1, x_2)$. Inoltre tale Φ è il flusso del campo vettoriale lineare dato da $F(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$. In Figura 1.3 si può osservare l'azione di tale flusso su due punti $x = (0.2, 0.6) < (0.8, 0.8) = y$ e su due loro intorni e si può notare come esso preservi tale relazione anche per gli intorni considerati.

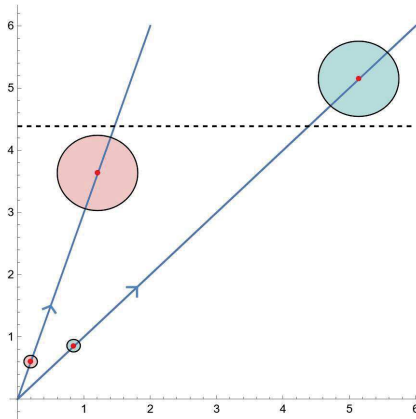


Figura 1.3: il grafico rappresenta l'immagine dei punti x e y e di due loro intorni rispetto alla mappa Φ_t per $t = 1.8$. In blu, invece, le orbite dei punti x e y .

Proposizione 1.1. *Se un flusso Φ è definitivamente strettamente monotono, allora è SOP.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in X$ tali che $x < y$. Allora, poichè Φ è definitivamente strettamente monotono, $\exists t_0 > 0$ tale che $\Phi_{t_0}(x) \ll \Phi_{t_0}(y)$. Grazie all'Osservazione 1.3 sappiamo che $\exists \tilde{U}, \tilde{V}$ intorni aperti rispettivamente di $\Phi_{t_0}(x)$ e di $\Phi_{t_0}(y)$ tali che $\tilde{U} < \tilde{V}$. Visto che Φ_{t_0} è continua, allora per definizione di continuità $\exists U, V$ intorni aperti rispettivamente di x e di y tali che $\Phi_{t_0}(U) \subseteq \tilde{U}$ e $\Phi_{t_0}(V) \subseteq \tilde{V}$. Perciò si ha che $\Phi_{t_0}(U) < \Phi_{t_0}(V)$, che è la condizione cercata. \square

1.2.1 Il Criterio di Convergenza e le sue conseguenze

In questa sezione enunceremo e dimostreremo alcuni fondamentali teoremi e criteri che permettono di studiare i sistemi dinamici monotoni. Il principale è il Criterio di Convergenza, un teorema che ci permetterà poi di poter descrivere la forma e le proprietà degli insiemi limite e delle orbite.

A partire da questo momento, assumeremo sempre che Φ sia *monotono* e che $O(x)$ sia un sottoinsieme *compatto* di X , per ogni $x \in X$.

Teorema 1.1 (Criterio di Convergenza). *Sia dato un flusso Φ monotono e sia $x \in X$ tale che $O(x)$ sia compatto. Valgono allora le seguenti:*

- (i) *se $\exists T > 0$ tale che $\Phi_T(x) \geq x$, allora $\omega(x)$ è un'orbita T -periodica;*
- (ii) *se $\Phi_t(x) \geq x$ per ogni t appartenente a qualche sottoinsieme aperto di $(0, +\infty)$, allora $\Phi_t(x) \rightarrow p \in E$ per $t \rightarrow +\infty$;*
- (iii) *se Φ è SOP ed $\exists T > 0$ tale che $\Phi_T(x) > x$, allora $\Phi_t(x) \rightarrow p \in E$ per $t \rightarrow +\infty$.*

Dimostrazione. (i) Dalla monotonia di Φ si deduce che $\Phi_{(n+1)T}(x) \geq \Phi_{nT}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, poichè $\Phi_{(n+1)T}(x) = \Phi_{nT+T}(x) = \Phi_{nT}(\Phi_T(x)) \geq \Phi_{nT}(x)$, visto che $\Phi_T(x) \geq x$. Quindi la successione $\{\Phi_{nT}(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{O(x)}$ è una successione monotona contenuta in un compatto, perciò converge. Sia allora $p \in \overline{O(x)}$ tale che $\Phi_{nT}(x) \rightarrow p$ per $n \rightarrow +\infty$. Grazie alla continuità di Φ si ha che $\forall t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \Phi_{t+T}(p) &= \Phi_{t+T}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{nT}(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{(n+1)T+t}(x) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_t(\Phi_{(n+1)T}(x)) = \Phi_t\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{(n+1)T}(x)\right) = \Phi_t(p). \end{aligned}$$

Perciò $O(p)$ è un'orbita T -periodica.

Consideriamo ora una sottosuccessione $\{\Phi_{t_j}(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$ tale che $\Phi_{t_j}(x) \rightarrow q \in \overline{O(x)}$ per $j \rightarrow +\infty$ (con $t_j \rightarrow +\infty$). Possiamo allora scrivere $t_j = n_j T + r_j$, dove n_j è un numero naturale e $0 \leq r_j < T$. Poichè la successione $\{r_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è limitata, ammette una sottosuccessione convergente. Quindi, a meno di passare a sottosuccessioni, possiamo assumere che $r_j \rightarrow r$ per $j \rightarrow +\infty$, con $0 \leq r \leq T$. Inoltre $n_j \rightarrow +\infty$ per $j \rightarrow +\infty$, visto che $r_j \rightarrow r$ e $t_j \rightarrow +\infty$. Ma allora:

$$\Phi_{t_j}(x) = \Phi_{n_j T + r_j}(x) = \Phi_{r_j}(\Phi_{n_j T}(x)) \rightarrow \Phi_r(p), \text{ per } j \rightarrow +\infty.$$

Perciò $\Phi_r(p) = q$, da cui si deduce che $\omega(x) = O(p)$. Quindi $\omega(x)$ è un'orbita T -periodica, come si voleva dimostrare.

(ii) Possiamo dimostrare l'affermazione solo per t appartenente ad un intervallo aperto, cioè $t \in (T - \varepsilon, T + \varepsilon)$, con $T > 0$ e $0 < \varepsilon < T$. Questo poichè ogni insieme aperto di \mathbb{R} è unione di intervalli aperti e se l'affermazione vale per ogni t in un aperto, allora vale anche per ogni t in uno qualsiasi degli intervalli di cui l'aperto è unione, dunque si può applicare il teorema su quell'intervallo ed arrivare alla stessa conclusione. Supponiamo quindi che $\Phi_t(x) \geq x$, $\forall t \in (T - \varepsilon, T + \varepsilon)$, e perciò in particolare per $t = T$. Allora dal punto (i) segue che $\omega(x) = O(p) = \{\Phi_t(p) \mid 0 \leq t \leq T\}$ (orbita T -periodica, con $p \in \overline{O(x)}$ tale che $\Phi_{nT}(x) \rightarrow p$ per $n \rightarrow +\infty$). Ma possiamo applicare il punto (i) ad ogni $\tau \in (T - \varepsilon, T + \varepsilon)$, trovando quindi che $\omega(x)$ è un'orbita τ -periodica, $\forall \tau \in (T - \varepsilon, T + \varepsilon)$, e per questo lo è anche $O(p)$. Sia ora G l'insieme di tutti i periodi di $O(p)$. Si ha che $(T - \varepsilon, T + \varepsilon) \subseteq G$ e mostriamo inoltre che G è chiuso sotto l'operazione di addizione: siano infatti $\alpha, \beta \in G$, allora $\Phi_t(p) = \Phi_{t+\alpha}(p) = \Phi_{t+\alpha+\beta}(p)$ e perciò anche $\alpha + \beta \in G$. Presi $0 < s < \varepsilon$ e $t \geq 0$, vale che $\Phi_{t+s}(p) = \Phi_t(\Phi_s(p)) = \Phi_t(\Phi_{s+T}(p))$, perchè $T \in G$. Ma ora $s + T \in (T - \varepsilon, T + \varepsilon)$, dunque $\Phi_{s+T}(p) = p$ e sostituendo sopra si trova che $\Phi_{t+s}(p) = \Phi_t(p)$. Perciò anche $s \in G, \forall s \in (0, \varepsilon) \Rightarrow (0, \varepsilon) \subset G$. Vista la chiusura di G per l'addizione, si deduce che $G = \mathbb{R}_{>0}$ e di conseguenza $O(p) = \{p\}$, cioè $p \in E$. Ma poichè $\omega(x) = O(p)$ e $\Phi_t(x) \rightarrow \omega(x)$, per $t \rightarrow +\infty$, allora $\Phi_t(x) \rightarrow p \in E$, come si voleva dimostrare.

(iii) Dalla definizione di flusso SOP sappiamo che, se $\Phi_T(x) > x$, esistono due intorno U e V rispettivamente di x e $\Phi_T(x)$ e un $t_0 > 0$ tali che $\Phi_{t_0}(U) \subseteq \Phi_{t_0}(V)$. Ma allora $\Phi_{t_0}(x) \leq \Phi_{t_0}(\Phi_T(x))$ e poichè la relazione è soddisfatta per degli intorno si può dire che, per $\varepsilon > 0$ e sufficientemente piccolo, vale anche $\Phi_{t_0}(x) \leq \Phi_{t_0+\varepsilon}(\Phi_T(x)) = \Phi_{t_0+T+\varepsilon}(x)$. Perciò, come visto nel punto (ii), possiamo dire che $\omega(x)$ è un'orbita t -periodica, $\forall t \in (T, T + \varepsilon)$ e quindi concludiamo come sopra: $\omega(x) = p \in E$ e $\Phi_t(x) \rightarrow p \in E$, per $t \rightarrow +\infty$, come si voleva dimostrare. \square

Tale teorema è di fondamentale importanza per capire quale struttura possono avere le orbite e gli insiemi limite. Vedremo ora tre conseguenze, le cui dimostrazioni utilizzano proprio il Criterio di Convergenza appena enunciato.

Teorema 1.2 (Le orbite periodiche attrattive sono ridotte a punti).
Supponiamo che lo spazio X abbia la seguente proprietà: dato $p \in X$ e un suo intorno $U \subseteq X$, allora esiste un altro intorno $V \subset U$ di p e un punto $y \in U$ tali che o $y \leq V$ o $V \leq y$. Sotto tale ipotesi le uniche orbite periodiche attrattive sono i punti di equilibrio.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $O(p) = \{\Phi_t(p) \mid 0 \leq t \leq T\}$ sia un'orbita T -periodica attrattiva non costituita da un solo punto. Dalla Definizione 1.16 di orbita periodica attrattiva, si sa che esiste un intorno U di p tale che $\omega(x) = O(p)$, $\forall x \in U$. Dall'ipotesi del teorema esiste un intorno $V \subset U$ di p e un $y \in U$ tale che o $y \leq V$ o $V \leq y$. Supponiamo che valga $y \leq V$, la dimostrazione per l'altro caso è simile. Poichè $y \in U$, allora $\omega(y) = O$ e quindi esiste una successione $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tale che $t_j \rightarrow +\infty$ e $\Phi_{t_j}(y) \rightarrow p$. Perciò $\Phi_{t_j}(y) \in V$, per ogni j sufficientemente grande, quindi $y \leq \Phi_{t_j}(y)$. Poichè V è aperto e Φ è continua, allora $\Phi_{t_j+s}(y) \in V$ per s sufficientemente piccolo, da cui segue che $y \leq \Phi_{t_j+s}(y)$. Applicando ora il Criterio di Convergenza deduciamo che $\omega(y) = O(p)$ è costituito da un singolo punto di E , il che è assurdo perchè

avevamo supposto $O(p)$ non costituita da un solo punto. Perciò non può esistere un'orbita attrattiva periodica non triviale. \square

Osservazione 1.9. L'ipotesi sullo spazio X del teorema non è particolarmente stringente. Infatti è soddisfatta, ad esempio, negli spazi $X \subset Y$ in cui la relazione d'ordine è generata da un cono positivo con interno non vuoto e in cui ogni intorno U di ogni punto $p \in X$ contiene almeno un punto y tale che $0 < y \ll p$ o $p \ll y$. Come conseguenza diretta si ottiene che l'ipotesi vale per tutti gli X aperti in Y .

Teorema 1.3 (Struttura non ordinata degli insiemi limite). *Un insieme limite non può contenere due punti distinti x e y con la proprietà che esistano due intorni U di x e V di y tali che $U \leq V$. Inoltre, se Φ è SOP, allora un insieme limite non può contenere due punti x e y tali che $x < y$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista $z \in X$ tale che $\omega(z)$ contenga due punti distinti x e y con intorni rispettivamente U e V e tali che $U \leq V$. Per la definizione di insieme limite si ha che $\exists t_2 > t_1 > 0$ tali che $\Phi_{t_1}(z) \in U$ e $\Phi_{t_2}(z) \in V$. Per la continuità di Φ e poichè V è aperto, segue che $\Phi_t(z) \in V$, per tutti i t sufficientemente vicini a t_2 , cioè per ogni $t \in (t_2 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon)$, con ε sufficientemente piccolo. Allora per tali t si ha che: $V \ni \Phi_t(z) = \Phi_{t-t_1}(\Phi_{t_1}(z)) \geq \Phi_{t_1}(z) \in U$. Perciò si ha che $\Phi_{t-t_1}(\Phi_{t_1}(z)) \geq \Phi_{t_1}(z), \forall t \in (t_2 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon) \Rightarrow \forall t - t_1 \in (t_2 - t_1 - \varepsilon, t_2 - t_1 + \varepsilon)$. Possiamo quindi applicare il punto (ii) del Criterio di Convergenza e concludere che $\Phi_{t-t_1}(\Phi_{t_1}(z)) = \Phi_t(z) \rightarrow p \in E$, per $t \rightarrow +\infty$. Ma allora $\omega(z) = \{p\}$, che è assurdo poichè avevamo supposto che contenesse almeno due punti distinti. Perciò non può esistere un insieme limite con tale struttura, come volevamo dimostrare.

Supponiamo ora per assurdo che Φ sia SOP e che esistano due punti distinti $x, y \in \omega(z)$ tali che $x < y$. Allora per definizione di SOP esistono due intorni U di x e V di y e un $t_0 > 0$ tali che $\Phi_{t_0}(U) \leq \Phi_{t_0}(V)$. Per la definizione di insieme limite, esistono $t_2 > t_1 > 0$ tali che $\Phi_{t_1}(z) \in U$ e $\Phi_{t_2}(z) \in V$. Per la continuità di Φ e poichè V è aperto, segue che $\Phi_t(z) \in V$, per tutti i t sufficientemente vicini a t_2 , cioè per ogni $t \in (t_2 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon)$, con ε sufficientemente piccolo. Quindi $\Phi_{t_1}(z) \leq \Phi_t(z)$ e perciò anche $\Phi_{t_1+t_0}(z) \leq \Phi_{t+t_0}(z) = \Phi_{t-t_1}(\Phi_{t_1+t_0}(z))$. Si ha quindi che $\Phi_{t-t_1}(\Phi_{t_1+t_0}(z)) \geq \Phi_{t_1+t_0}(z), \forall t \in (t_2 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon) \Rightarrow \forall t - t_1 \in (t_2 - t_1 - \varepsilon, t_2 - t_1 + \varepsilon)$. Possiamo dunque applicare il punto (ii) del Criterio di Convergenza e concludere che $\Phi_t(z) \rightarrow p \in E$, per $t \rightarrow +\infty$ e cioè che $\omega(z) = \{p\}$. Ma questo è assurdo poichè avevamo supposto che $\omega(z)$ contenesse almeno due punti distinti. Perciò non possono esistere due punti distinti x e y in $\omega(z)$ tali che $x < y$, come si voleva dimostrare. \square

Un'utile ed immediata conseguenza della struttura non ordinata degli insiemi limite è il fatto che, se Φ è SOP, essi non possano contenere elementi minimali o massimali. Dimostriamolo con il seguente corollario.

Corollario 1.1 (del Teorema 1.3). *Sia $x \in X$. Se Φ è SOP, $a \in \omega(x)$ e $\omega(x) \leq a$ (oppure $a \leq \omega(x)$), allora $\omega(x) = \{a\}$. Cioè si ha che se un insieme limite contiene un elemento massimale (o minimale), allora tale insieme limite è formato solo da quell'elemento.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista un elemento $b \in \omega(x)$, con $b \neq a$. Allora per ipotesi, visto che $\omega(x) \leq a$, si ha che $b < a$. Ma sia b che a sono contenuti in $\omega(x)$ e questo viola il teorema precedente. Perciò non esiste nessun elemento di $\omega(x)$ diverso da a , da cui $\omega(x) = \{a\}$, come si voleva dimostrare. \square

1.2.2 La Dicotomia degli Insiemi Limite

In questa sezione si enunceranno e si dimostreranno alcuni risultati riguardanti le relazioni tra gli insiemi limite di diversi punti, la loro struttura e il loro ordine reciproco. Essi verranno poi usati per giungere alla Dicotomia degli Insiemi Limite, un'importante teorema che mostra come i flussi SOP mantengano l'ordinamento dello spazio anche al limite e come i punti di equilibrio svolgano una funzione "separatrice" tra gli insiemi limite di punti tra loro ordinati. Nel seguito lavoreremo sempre nell'ipotesi che il flusso Φ sia un flusso SOP.

Proposizione 1.2 (Principio Colimitante). *Siano dati $x, y \in X$ tali che $x < y$ e sia data una successione $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $t_k \rightarrow +\infty$, $\Phi_{t_k}(x) \rightarrow p$ e $\Phi_{t_k}(y) \rightarrow p$, per $k \rightarrow +\infty$. Allora $p \in E$.*

Dimostrazione. Visto che Φ è SOP esistono intorno U di x e V di y e un $t_0 > 0$ tali che $\Phi_{t_0}(U) \leq \Phi_{t_0}(V)$. Visto che U e V sono aperti e Φ è continua, allora esiste $\delta > 0$ tale che $\{\Phi_h(x) \mid 0 \leq h \leq \delta\} \subset U$ e $\{\Phi_h(y) \mid 0 \leq h \leq \delta\} \subset V$. Siano ora r e s tali che $t_0 \leq r \leq t_0 + \delta$ e $t_0 \leq s \leq t_0 + \delta$. Allora $\Phi_s(x) = \Phi_{t_0}(\Phi_{s-t_0}(x)) \leq \Phi_{t_0}(\Phi_{r-t_0}(y)) = \Phi_r(y)$. Questo poichè $\Phi_{s-t_0}(x) \in U$ (visto che $0 \leq s-t_0 \leq \delta$), $\Phi_{r-t_0}(y) \in V$ (visto che $0 \leq r-t_0 \leq \delta$) e da sopra $\Phi_{t_0}(U) \leq \Phi_{t_0}(V)$. Quindi $\Phi_s(x) \leq \Phi_r(y)$ e da tale relazione studiamo due casi particolari:

- prendendo $r = t_0$ troviamo che $\Phi_s(x) \leq \Phi_{t_0}(y)$. Da ciò segue che per k sufficientemente grande vale: $\Phi_{t_k-t_0}(\Phi_s(x)) \leq \Phi_{t_k-t_0}(\Phi_{t_0}(y)) = \Phi_{t_k}(y)$. Da tale relazione, scegliendo $h = s - t_0 \in [0, \delta]$, si ha che $\Phi_h(\Phi_{t_k}(x)) \leq \Phi_{t_k}(y)$. Passando ora al limite per $k \rightarrow +\infty$, si trova $\Phi_r(p) \leq p$;
- prendendo $s = t_0$ abbiamo $\Phi_{t_0}(x) \leq \Phi_r(y)$. Da ciò segue che per k sufficientemente grande vale: $\Phi_{t_k}(x) = \Phi_{t_k-t_0}(\Phi_{t_0}(x)) \leq \Phi_{t_k-t_0}(\Phi_r(y))$. Da tale relazione, scegliendo $j = r - t_0 \in [0, \delta]$, si ha che $\Phi_{t_k}(x) \leq \Phi_j(\Phi_{t_k}(y))$. Passando ora al limite per $k \rightarrow +\infty$, si trova $p \leq \Phi_j(p)$.

Unendo i due risultati troviamo $\Phi_h(p) = p$, cioè che $O(p)$ è un'orbita h -periodica, $\forall h \in [0, \delta]$. Come visto nella dimostrazione del Criterio di Convergenza da ciò segue che $O(p) = \{p\}$, cioè si ha che $p \in E$, come si voleva dimostrare. \square

Proposizione 1.3 (Principio di Intersezione). *Siano dati $x, y \in X$ tali che $x < y$. Allora $\omega(x) \cap \omega(y) \subset E$.*

Osservazione 1.10. Da tale proposizione si può cominciare a capire, come detto nell'introduzione, che i punti di equilibrio svolgono il ruolo di "separatori" tra gli insiemi limite di punti legati dalla relazione d'ordine. Infatti, se gli insiemi limite di tali punti hanno un'intersezione non banale, allora tale intersezione è fatta solo da punti di equilibrio.

Dimostrazione. Sia dato un punto $p \in \omega(x) \cap \omega(y)$. Allora per definizione di insieme limite si ha che esiste una successione $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $t_k \rightarrow +\infty$ e

$\Phi_{t_k}(x) \rightarrow p$, per $k \rightarrow +\infty$. Eventualmente passando ad una sottosuccessione, possiamo assumere che $\Phi_{t_k}(y) \rightarrow q \in \omega(y)$, per $k \rightarrow +\infty$. La monotonia di Φ , visto che $x < y$, implica che $p \leq q$. Se valesse $p < q$, si contraddirebbe il Teorema 1.3 (struttura non ordinata degli insiemi limite), poichè non possono esistere due punti $p, q \in \omega(y)$ tali che $p < q$. Ma allora deve aversi che $p = q$, cioè che $\Phi_{t_k}(x) \rightarrow p$ e $\Phi_{t_k}(y) \rightarrow p$, per $k \rightarrow +\infty$. Dunque, dal Principio Colimitante, possiamo concludere che $p \in E$, cioè che ogni punto in comune tra $\omega(x)$ e $\omega(y)$ è un punto di equilibrio, come si voleva dimostrare. \square

Esempio 1.8. Un esempio a cui si possono applicare le Proposizioni 1.2 e 1.3 è quello in cui il flusso Φ è definito da $\Phi_t(x_1, x_2) = (x_1 e^{-t}, x_2 e^{-3t})$, cioè Φ è il flusso del campo vettoriale $F(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x$. Tale flusso è monotono: dati due punti $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ allora si ha che $\Phi_t(x_1, x_2) = (x_1 e^{-t}, x_2 e^{-3t}) \leq (y_1 e^{-t}, y_2 e^{-3t}) = \Phi_t(y_1, y_2)$. Inoltre la chiusura dell'orbita positiva di un qualunque punto $x \in \mathbb{R}^2$ è compatta e perciò siamo nelle ipotesi delle Proposizioni 1.2 e 1.3. Nella Figura 1.4 possiamo infatti notare che presi i punti $x = (0.4, 0.2) < (1, 0.5) = y$, allora vale che $\omega(x) \cap \omega(y) = (0, 0) \in E$, poichè $(0, 0)$ è un equilibrio (l'unico) del sistema considerato.

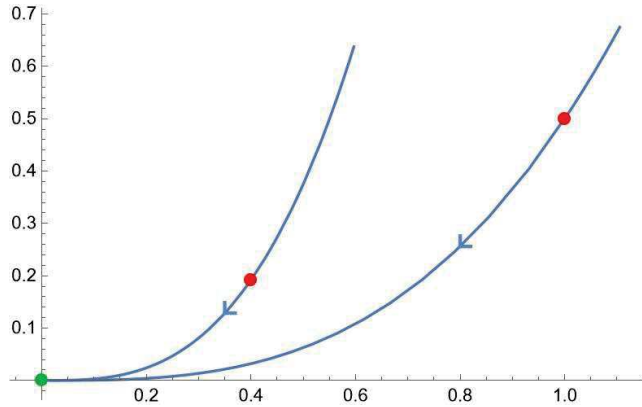


Figura 1.4: nel grafico sono rappresentati i punti x e y (in rosso), le loro orbite (in blu) e l'equilibrio del sistema (in verde).

Il lemma seguente ci servirà per la dimostrazione della prossima proposizione.

Lemma 1.1. *Siano K_1 e K_2 due sottoinsiemi compatti di X tali che $K_1 < K_2$. Allora esistono due insiemi aperti U e V , con $K_1 \subset U$ e $K_2 \subset V$, e due costanti $t_1 \geq 0$ e $\varepsilon > 0$ tali che $\Phi_{t+s}(U) \subset \Phi_t(V)$, per ogni $t \geq t_1$ e per ogni $0 \leq s \leq \varepsilon$.*

Dimostrazione. Fissiamo $x \in K_1$. Per ogni $y \in K_2$ si ha che $x < y$ e quindi, visto che Φ è SOP, esisteranno due interni U_y di x , V_y di y e un $t_y \geq 0$ tali che $\Phi_t(U_y) \subset \Phi_t(V_y)$, $\forall t \geq t_y$. Allora $\{V_y\}_{y \in K_2}$ è un ricoprimento aperto di K_2 e, poichè K_2 è compatto, possiamo estrarne un sottoricoprimento finito. Sia dunque $K_2 \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i} = V$, con $y_i \in K_2$. Definiamo ora $\tilde{U} = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$, perciò \tilde{U} è un intorno di x (perchè intersezione finita di aperti contenenti x è un

aperto contenente x) e sia $\tilde{t} = \max_{1 \leq i \leq n} t_{y_i}$. Allora $\forall i = 1, \dots, n$ e $\forall t \geq \tilde{t}$ si ha che $\Phi_t(\tilde{U}) \subset \Phi_t(U_{y_i}) \leq \Phi_t(V_{y_i}) \subset \Phi_t(\tilde{V})$, cioè $\Phi_t(\tilde{U}) \leq \Phi_t(\tilde{V})$ (l'ultima inclusione la possiamo inserire nella catena di disuguaglianze solo perchè la disuguaglianza centrale vale per ogni $i = 1, \dots, n$). Per il seguito della dimostrazione è necessario mettere in evidenza la dipendenza dal punto $x \in K_1$ fissato in partenza degli insiemi \tilde{U} , \tilde{V} e della costante \tilde{t} e perciò useremo la notazione $\tilde{U} \equiv \tilde{U}_x$, $\tilde{V} \equiv \tilde{V}_x$ e $\tilde{t} \equiv \tilde{t}_x$. Visto che il punto $x \in K_1$ è stato fissato arbitrariamente, ciò detto vale $\forall x \in K_1$, cioè per ogni $x \in K_1$ possiamo trovare un intorno aperto \tilde{U}_x di x , un aperto $\tilde{V}_x \supset K_2$ e una costante $\tilde{t}_x \geq 0$ tali che $\Phi_t(\tilde{U}_x) \leq \Phi_t(\tilde{V}_x), \forall t \geq \tilde{t}_x$. Ma allora $\{\tilde{U}_x\}_{x \in K_1}$ è un ricoprimento aperto di K_1 e, poichè K_1 è compatto, ne possiamo estrarre un sottoricoprimento finito. Sia dunque $K_1 \subset \bigcup_{j=1}^m \tilde{U}_{x_j} \equiv U$ e definiamo l'insieme $V = \bigcap_{j=1}^m \tilde{V}_{x_j} \supset K_2$ (poichè $K_2 \subset \tilde{V}_x, \forall x \in K_1$) e la costante $t_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \tilde{t}_{x_j}$. Ora, poichè $V \subset \tilde{V}_{x_j}$, si ha che $\Phi_t(\tilde{U}_{x_j}) \leq \Phi_t(V), \forall t \geq t_1$. Ma visto che la relazione vale anche per ogni $j = 1, \dots, m$, allora possiamo dedurre che $\Phi_t(U) \leq \Phi_t(V), \forall t \geq t_1$. Ora, poichè Φ è continua e $K_1 \subset U$ (con U aperto), allora per ogni $x \in K_1$ esistono un $\varepsilon_x > 0$ e un intorno W_x di x tali che $\Phi_t(W_x) \subset U$, per ogni $0 \leq t < \varepsilon_x$. Visto che $\{W_x\}_{x \in K_1}$ è un ricoprimento aperto di K_1 , che è compatto, allora possiamo estrarne un sottoricoprimento finito, cioè $K_1 \subset \bigcup_{h=1}^l W_{x_h} = U'$. Sia ora $\varepsilon = \min_{1 \leq h \leq l} \varepsilon_{x_h}$ e prendiamo un $x \in U'$.

Allora esiste un indice h tale per cui $x \in W_{x_h}$ e perciò $\Phi_s(x) \in U, \forall 0 \leq s < \varepsilon$. Poichè ciò detto vale per ogni $x \in U'$, si ha che $\Phi_s(U') \subset U, \forall 0 \leq s < \varepsilon$. Applicando Φ_t ad entrambi i membri si trova che: $\Phi_{t+s}(U') \subset \Phi_t(U) \leq \Phi_t(V)$, cioè $\Phi_{t+s}(U') \leq \Phi_t(V), \forall t \geq t_1, \forall 0 \leq s < \varepsilon$, come si voleva dimostrare. \square

Proposizione 1.4. *Siano dati $x, y \in X$ tali che $x < y$ e sia data una successione $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $t_k \rightarrow +\infty$, per $k \rightarrow +\infty$. Se $\Phi_{t_k}(x) \rightarrow a$, $\Phi_{t_k}(y) \rightarrow b$ per $k \rightarrow +\infty$ e $a < b$, allora vale che $O(a) \leq b$.*

Dimostrazione. Definiamo, per due punti $u \in \overline{O(x)}$ e $v \in \overline{O(y)}$ tali che $u \leq v$, il valore $J(u, v) = \sup\{r \geq 0 \mid \Phi_t(u) \leq v, \text{ per } 0 \leq t \leq r\}$. Il nostro obiettivo è quello di mostrare che $J(a, b) = +\infty$, in tal modo si ha che $\Phi_t(a) \leq b, \forall t \geq 0$ e perciò $O(a) = \{\Phi_t(a) \mid t \geq 0\} \leq b$. Verifichiamo innanzitutto due proprietà di $J(u, v)$ che ci serviranno per concludere:

- (i) la funzione $t \mapsto J(\Phi_t(u), \Phi_t(v))$ è monotona crescente in t (potrebbe però non esserlo strettamente). Per dimostrarlo basta mostrare che vale $J(\Phi_t(u), \Phi_t(v)) \geq J(u, v)$. Questo grazie al fatto che possiamo poi sostituire u, v con $\Phi_s(u), \Phi_s(v)$ (con $s > 0$ fissato) poichè per monotonia di Φ continua a valere $\Phi_s(u) \leq \Phi_s(v)$ ed ottenere $J(\Phi_{t+s}(u), \Phi_{t+s}(v)) \geq J(\Phi_s(u), \Phi_s(v))$, che è la condizione cercata. Sappiamo che per gli $r \leq J(u, v)$ vale che $\Phi_r(u) \leq v$, da cui per monotonia si deduce che $\Phi_t(\Phi_r(u)) = \Phi_r(\Phi_t(u)) \leq \Phi_t(v)$. Perciò $J(\Phi_t(u), \Phi_t(v)) \geq r$, per ogni $r \leq J(u, v)$, da cui si ha la disuguaglianza cercata;
- (ii) se $u_k \leq v_k$, con $u_k \in \overline{O(x)}$ e $v_k \in \overline{O(y)}$, e $u_k \rightarrow u$, $v_k \rightarrow v$, allora vale che $\limsup_{k \rightarrow +\infty} J(u_k, v_k) \leq J(u, v)$. Dimostriamolo nel caso in cui si ha $J(u, v) < +\infty$ (se valesse l'uguale, la disuguaglianza sarebbe banale). Supponiamo ora per assurdo che esista un $\varepsilon > 0$ tale che

$\limsup_{k \rightarrow +\infty} J(u_k, v_k) - \varepsilon > J(u, v)$. Per la definizione di limite superiore sappiamo che esiste una successione di indici $k_i \rightarrow +\infty$ tale che $\lim_{i \rightarrow +\infty} J(u_{k_i}, v_{k_i}) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} J(u_k, v_k) > J(u, v) + \varepsilon$. Allora si ha che, per gli i sufficientemente grandi, $J(u_{k_i}, v_{k_i}) > J(u, v) + \varepsilon$. Dalla definizione di J segue allora che $\Phi_s(u_{k_i}) \leq v_{k_i}$, per ogni $0 \leq s \leq J(u, v) + \varepsilon$. Ma passando ora al limite per $i \rightarrow +\infty$, otteniamo che $\Phi_s(u) \leq v$, per ogni $0 \leq s \leq J(u, v) + \varepsilon$. Ma questo è assurdo per la definizione di $J(u, v)$ e di conseguenza si ha che non esiste $\varepsilon > 0$ tale per cui $\limsup_{k \rightarrow +\infty} J(u_k, v_k) - \varepsilon > J(u, v)$. Si ha quindi la tesi.

Dal punto (i) segue che esiste il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} J(\Phi_t(u), \Phi_t(v)) = \alpha \in [0, +\infty]$, grazie alla monotonia di tale funzione. Dal punto (ii), per come sono definiti a e b , segue che $J \equiv J(a, b) \geq \alpha$. Supponiamo ora per assurdo che $J < +\infty$. Allora, per gli $0 \leq r \leq J$, vale che $\Phi_r(a) < b$. Non può infatti valere $\Phi_r(a) = b$, perchè altrimenti, grazie all'invarianza di $\omega(x)$, si avrebbe $a, b \in \omega(x)$. Ma $a < b$ e si contraddirebbe il Teorema 1.3 sulla struttura non ordinata degli insiemi limite. Definiamo allora $K = \{\Phi_r(a) \mid 0 \leq r \leq J\}$, che sarà quindi compatto e tale che $K < b$. Grazie al Lemma 1.1, esistono due costanti $t_1, \varepsilon > 0$ e due aperti U, V tali che $K \subset U$, $b \in V$ e $\Phi_{t_1+\delta}(U) \leq \Phi_{t_1}(V)$ per ogni $0 \leq \delta \leq \varepsilon$. Per come è stato definito b , segue che esiste un intero k_0 tale che $\Phi_{t_k}(y) \in V$, per $k \geq k_0$. Inoltre, per come è stato definito a , si avrà che $\Phi_r(\Phi_{t_k}(x)) \rightarrow \Phi_r(a)$ per $k \rightarrow +\infty$, uniformemente in $r \in [0, J]$. Di conseguenza esisterà un intero k_1 tale che $\Phi_r(\Phi_{t_k}(x)) \in U$, per $k \geq k_1$ e $0 \leq r \leq J$. Abbiamo perciò ricavato la seguente disuguaglianza: $\Phi_{t_1+\delta}(\Phi_r(\Phi_{t_k}(x))) \leq \Phi_{t_1}(\Phi_{t_k}(y))$, per $k \geq k_2 = \max\{k_0, k_1\}$, $0 \leq r \leq J$ e $0 \leq \delta \leq \varepsilon$. Riordinando i termini e grazie alla monotonia di Φ si ottiene che $\Phi_{r+\delta}(\Phi_{t+t_k}(x)) \leq \Phi_{t+t_k}(y)$, per $t \geq t_1$, $k \geq k_2$, $0 \leq r \leq J$ e $0 \leq \delta \leq \varepsilon$. Scegliendo in particolare $r = J$ e $\delta = \varepsilon$ otteniamo che $J(\Phi_{t+t_k}(x), \Phi_{t+t_k}(y)) \geq J + \varepsilon$, per $k \geq k_2$. Facendo quindi il limite per $k \rightarrow +\infty$ otteniamo che $\alpha \geq J + \varepsilon$. Ma questa è una contraddizione poichè avevamo provato che $J \geq \alpha$. Perciò l'ipotesi $J < +\infty$ è assurda e quindi deve valere $J = +\infty$, come si voleva dimostrare. \square

Proposizione 1.5 (Principio di Assorbimento). *Siano dati $u, v \in X$. Se esiste un punto $x \in \omega(u)$ tale che $x < \omega(v)$, allora $\omega(u) < \omega(v)$. Allo stesso modo se esiste un $x \in \omega(u)$ tale che $\omega(v) < x$, allora $\omega(v) < \omega(u)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo solo la prima affermazione, la seconda è analoga. Visto che gli insiemi $\{x\}$ e $\omega(v)$ sono compatti e vale che $x < \omega(v)$, allora dal lemma precedente sappiamo che esistono due insiemi aperti $U \ni x$, $V \supset \omega(v)$ e una costante $t_0 > 0$ tali che $\Phi_{t_0}(U) \leq \Phi_{t_0}(V)$. Ma allora vale anche che $\Phi_{t_0}(U) \leq \Phi_{t_0}(\omega(v)) = \omega(v)$, perchè gli insiemi limite sono invarianti rispetto al flusso. Ora, visto che $x \in \omega(u)$, per le proprietà dell'insieme limite esiste un $t_1 > 0$ tale che $\Phi_{t_1}(u) \in U$. Quindi grazie alla disuguaglianza trovata sopra vale che $\Phi_{t_0}(\Phi_{t_1}(u)) = \Phi_{t_0+t_1}(u) \leq \omega(v)$. Applicando ora la proprietà di monotonia di Φ e l'invarianza di $\omega(v)$ troviamo che: $\Phi_{t_0+t_1+s}(u) \leq \omega(v)$, per ogni $s \geq 0$. Per la definizione di insieme limite segue quindi che $\omega(u) \leq \omega(v)$. Per dimostrare la disuguaglianza stretta supponiamo per assurdo che esista un punto $z \in \omega(u) \cap \omega(v)$. Visto che $z \in \omega(u)$ allora vale $z \leq \omega(v)$, ma $z \in \omega(v)$ e quindi vale anche $\omega(u) \leq z$. Possiamo allora applicare il Corollario sull'inesistenza di elementi massimali o minimali e concludere che $\omega(u) = z = \omega(v)$. Ma questo è assurdo perchè per ipotesi esisteva un $x \in \omega(u)$ tale che $x < \omega(v)$. Perciò

l'intersezione tra $\omega(u)$ e $\omega(v)$ deve essere vuota, da cui segue che $\omega(u) < \omega(v)$, come si voleva dimostrare. \square

Proposizione 1.6 (Principio di Separazione degli Insiemi Limite). *Siano dati $x, y \in X$ tali che $x < y$ e sia data una successione $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $t_k \rightarrow +\infty$, per $k \rightarrow +\infty$. Se $\Phi_{t_k}(x) \rightarrow a$, $\Phi_{t_k}(y) \rightarrow b$ per $k \rightarrow +\infty$ e $a < b$, allora vale che $\omega(x) < \omega(y)$.*

Dimostrazione. Sotto tali ipotesi, grazie alla Proposizione 1.4, sappiamo che $O(a) \leq b$. Perciò $\Phi_t(a) \leq b, \forall t \geq 0$. Ma allora, per ogni successione $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $t_k \rightarrow +\infty$ per $k \rightarrow +\infty$, vale che $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{t_k}(a) \leq b$. Perciò, per definizione di $\omega(a)$, si avrà di conseguenza che $\omega(a) \leq b$. Supponiamo per assurdo che $b \in \omega(a)$, allora dal Corollario 1.1 segue che $\omega(a) = b \in E$. Applichiamo ora la Proposizione 1.5 (Principio di Assorbimento) con $u = x$, $v = a$ e $x = a$: poichè $a \in \omega(x)$ e $a < b = \omega(a)$, allora $\omega(x) < \omega(a)$. Ma ciò è assurdo perchè, visto che $\Phi_{t_k}(x) \rightarrow a$, allora $\omega(a) \subseteq \omega(x)$. Quindi $b \notin \omega(a)$, da cui $\omega(a) < b$. Applicando nuovamente la Proposizione 1.5 (seconda affermazione) con $u = y$ e $v = a$, visto che $b \in \omega(y)$ e $\omega(a) < b$, si trova che $\omega(a) < \omega(y)$. Infine, poichè ogni $z \in \omega(a)$ appartiene anche a $\omega(x)$, allora applicando la Proposizione 1.5 ad uno z qualsiasi ($u = x$, $v = y$, $x = z$) possiamo concludere che $\omega(x) < \omega(y)$, come si voleva dimostrare. \square

Teorema 1.4 (Dicotomia degli Insiemi Limite). *Siano $x, y \in X$ tali che $x < y$. Allora una e una sola delle due seguenti affermazioni è valida:*

(a) $\omega(x) < \omega(y)$;

(b) $\omega(x) = \omega(y) \subset E$.

Dimostrazione. Se $\omega(x) = \omega(y)$ allora dalla Proposizione 1.3 (Principio d'Intersezione) segue che $\omega(x) \subset E$. Se invece $\omega(x) \neq \omega(y)$, allora possiamo assumere che esista un punto $q \in \omega(y) \setminus \omega(x)$ (il caso in cui esiste $q \in \omega(x) \setminus \omega(y)$ è simile). Per la definizione di insieme limite esiste quindi una successione $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, con $t_k \rightarrow +\infty$ per $k \rightarrow +\infty$, tale che $\Phi_{t_k}(y) \rightarrow q$. Come mostrato più volte nelle precedenti dimostrazioni, a meno di passare a sottosuccessioni, possiamo assumere che $\Phi_{t_k}(x) \rightarrow p \in \omega(x)$. La monotonia di Φ implica che $p \leq q$ e poichè $q \notin \omega(x)$, vale $p < q$. Applicando ora la Proposizione 1.6 (Principio di Separazione degli Insiemi Limite) possiamo concludere che $\omega(x) < \omega(y)$. \square

1.2.3 Stabilità e Tricotomia degli Intervalli Ordinati

In questa sezione daremo le definizioni di stabilità, stabilità asintotica e di intervalli ordinati, che porteranno poi ad importanti risultati di convergenza delle orbite a punti di equilibrio. Chiuderemo infine con un risultato di globale attrattività nel caso in cui nello spazio sia presente un solo punto di equilibrio.

Sia dato uno spazio di Banach Y , un suo sottoinsieme X e un suo cono positivo Y_+ che genera una relazione d'ordine parziale su Y (e di conseguenza anche su X). Denotiamo la norma di $y \in Y$ con $|y|$. Nel seguito lavoreremo nell'ipotesi che Φ sia un flusso SOP e che il cono Y_+ sia *normale*, cioè che se $x, y \in Y$ e $0 \leq x \leq y$ allora esiste una costante $k \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che $|x| \leq k|y|$.

Definizione 1.20. Diremo che un punto $x \in X$ può essere **approssimato da sotto (sopra) in** X se esiste una successione $\{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq X$ tale che:

(i) $x_n < x_{n+1} < x$ ($x < x_{n+1} < x_n$), $\forall n \geq 1$; (ii) $x_n \rightarrow x$, per $n \rightarrow +\infty$.

D'ora in poi lavoriamo con l'aggiunta della seguente ipotesi: $\forall x_0 \in X$, $O(x_0)$ ha chiusura compatta in X e se la successione $\{x_n\}_{n \geq 1}$ approssima x_0 da sopra o da sotto, allora $\bigcup_{n \geq 0} \omega(x_n)$ ha chiusura compatta in X .

Definizione 1.21. Siano dati $u, v \in Y$ tali che $u < v$. Definiamo allora **intervallo ordinato generato da u e v** l'insieme: $[u, v] = \{y \in Y \mid u \leq y \leq v\}$.

Osservazione 1.11. Su \mathbb{R}^2 l'intervallo ordinato generato da due punti $u < v$ è il rettangolo $R = I_1 \times I_2$, dove $I_i = \{a \in \mathbb{R} \mid u_i \leq a \leq v_i\}$, cioè il rettangolo con vertice in basso a sinistra u e vertice in alto a destra v . Si può dire lo stesso anche in dimensioni superiori a due.

Definizione 1.22. Sia $x \in X$. Diremo che x è un **punto stabile** se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tale che se } |x - y| < \delta \text{ allora } |\Phi_t(x) - \Phi_t(y)| < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

Questo significa che x è stabile se il flusso Φ "tiene tutti i punti in un suo intorno arbitrariamente vicini tra loro" e questo implica che gli insiemi limite di tali punti sono "vicini" a quello di x . Definiamo infine S come l'insieme di tutti i punti stabili di X .

Definizione 1.23. Un punto $x \in X$ si dice **asintoticamente stabile** se esiste un intorno V di x tale che $\forall \varepsilon > 0, \exists t_\varepsilon \geq 0$ tale che $|\Phi_t(x) - \Phi_t(y)| < \varepsilon, \forall t \geq t_\varepsilon$ e $\forall y \in V$. Indicheremo con A l'insieme dei punti asintoticamente stabili di X . Diremo invece che un punto x si dice **asintoticamente stabile da sopra (sotto)** se la condizione appena enunciata vale per gli $y \in V$ tali che $y > x$ ($y < x$).

Osservazione 1.12. Se il punto x_0 è asintoticamente stabile, allora il limite $\lim_{t \rightarrow \infty} |\Phi_t(x_0) - \Phi_t(x)| = 0$, uniformemente rispetto agli $x \in V$, grazie alla definizione. Si può quindi immediatamente dedurre che $\omega(x_0) = \omega(x), \forall x \in V$.

Esempio 1.9. Esempi di punti stabili si possono trovare nel sistema lineare in \mathbb{R}^2 dato da $F(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$. Tale sistema corrisponde a quello trattato nell'Esempio 1.7 in cui è stato invertito il tempo. In Figura 1.5 si può notare come gli intorni dei punti $x = (1.2, 3.6)$ e $y = (5.1, 5.1)$ di raggio $r = 0.1 \times e^{1.8}$ vengano mandati negli intorni dei punti $\Phi_{1.8}(x) = (0.2, 0.6)$ e $\Phi_{1.8}(y) = (0.8, 0.8)$ di raggio $r = 0.1$. Infatti il flusso è dato da $\Phi_t(x_1, x_2) = (x_1 e^{-t}, x_2 e^{-t})$. Di conseguenza, fissato un $\varepsilon > 0$, il δ necessario a soddisfare la condizione di stabilità sarà $\delta = \varepsilon e^t$.

Osservazione 1.13. Le definizioni di punto stabile e asintoticamente stabile date sopra sono una generalizzazione di quelle classiche legate ai punti di equilibrio. Infatti consideriamo un punto $\bar{x} \in X$ che sia di equilibrio, quindi tale che $\Phi_t(\bar{x}) = \bar{x}$, per ogni $t \geq 0$. Allora \bar{x} sarà stabile se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tale che se } |\bar{x} - y| < \delta \text{ allora } |\bar{x} - \Phi_t(y)| < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

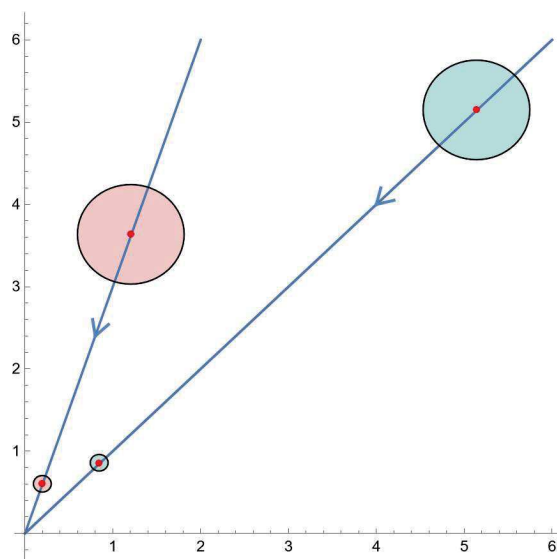


Figura 1.5: il grafico rappresenta l'immagine dei punti x e y e di due loro intorno rispetto alla mappa Φ_t per $t = 1.8$. In blu, invece, le orbite dei punti x e y .

Perciò un punto di equilibrio \bar{x} è stabile se il flusso Φ mantiene i punti in un suo intorno arbitrariamente vicini tra loro. Similmente per la definizione di punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Esempio 1.10. Un punto di equilibrio stabile si può trovare nell'Esempio 1.8. Infatti il punto $(0, 0)$ attrae a sé ogni altro punto del piano. Perciò, visto che in quel caso il flusso era dato da $\Phi_t(x_1, x_2) = (x_1 e^{-t}, x_2 e^{-3t})$, fissato un $\varepsilon > 0$, si ha che il δ necessario a soddisfare la condizione di stabilità dell'equilibrio è $\delta = \varepsilon e^t$. Nella Figura 1.6 è mostrato una parte di intorno del punto di equilibrio e la controimmagine del suo bordo rispetto al flusso Φ_t , per $t = 0.4$.

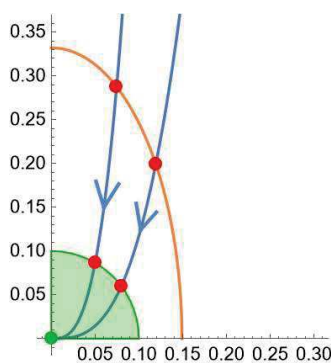


Figura 1.6: il grafico rappresenta una parte di intorno dell'equilibrio e la controimmagine del suo bordo tramite il flusso Φ_t con $t = 0.4$. Sono inoltre presenti due punti x e y , le loro immagini e le loro relative orbite.

Proposizione 1.7. *L'insieme A dei punti asintoticamente stabili è un sottoinsieme aperto di X e $A \subset S$.*

Dimostrazione. Sia $x \in A$. Dimostriamo allora che ogni punto dell'intorno V nella definizione è asintoticamente stabile: prendiamo un $y \in V$, allora poichè V è aperto si sa che esiste un altro aperto $U \subset V$ tale che $y \in U$. Verifichiamo che y è asintoticamente stabile prendendo come intorno della definizione proprio tale aperto U . Infatti dato $z \in U$ possiamo stimare, grazie alla disuguaglianza triangolare, che:

$$\begin{aligned} |\Phi_t(y) - \Phi_t(z)| &= |\Phi_t(y) - \Phi_t(x) + \Phi_t(x) - \Phi_t(z)| \leq \\ &\leq |\Phi_t(y) - \Phi_t(x)| + |\Phi_t(x) - \Phi_t(z)| = |\Phi_t(x) - \Phi_t(y)| + |\Phi_t(x) - \Phi_t(z)|. \end{aligned}$$

Perciò, visto che x è asintoticamente stabile e $y, z \in V$, allora $\forall \varepsilon > 0, \exists t_\varepsilon \geq 0$ tale che $|\Phi_t(y) - \Phi_t(z)| \leq |\Phi_t(x) - \Phi_t(y)| + |\Phi_t(x) - \Phi_t(z)| < 2\varepsilon, \forall t \geq t_\varepsilon$. Possiamo quindi concludere, per l'arbitrarietà di ε , che ogni $y \in V$ è asintoticamente stabile. Ma allora poichè ciò detto si può affermare per ogni punto asintoticamente stabile e l'intorno V è aperto, allora anche A è aperto. L'inclusione $A \subset S$ segue direttamente dalla definizione di continuità di Φ . \square

Enunciamo ora due importanti risultati le cui dimostrazioni saranno omesse.

Teorema 1.5. *Sia $X = [u, v]$, con $u < v$ e $u, v \in E$. Se u e v sono equilibri asintoticamente stabili e $\Phi_t([u, v])$ è compatto per ogni $t > 0$, allora esiste un punto $w \in [u, v] \cap E$ tale che $w \neq u, v$.*

Osservazione 1.14. Questo primo teorema ci fornisce delle condizioni sufficienti per l'esistenza di tre punti di equilibrio *ordinati*, infatti se $w \in [u, v]$ e $w \neq u, v$, vale che $u < w < v$.

Teorema 1.6 (Tricotomia degli Intervalli Ordinati). *Sia $X = [u, v]$, con $u < v$ e $u, v \in E$. Se $\Phi_t([u, v])$ è compatto per ogni $t > 0$, allora vale una e una sola delle tre seguenti affermazioni:*

- (i) *esiste un punto $w \in [u, v] \cap E$, con $w \neq u, v$;*
- (ii) $\Phi_t(x) \rightarrow u, \forall x \in [u, v] \setminus v$;
- (iii) $\Phi_t(x) \rightarrow v, \forall x \in [u, v] \setminus u$.

Osservazione 1.15. Questo teorema ci dice che dati due punti di equilibrio ordinati, allora nel loro intervallo ordinato o c'è un terzo punto di equilibrio, oppure tutti i punti (ad esclusione degli estremi) convergono ad uno o all'altro equilibrio. Da notare infine che il caso (i) accade solamente quando i due equilibri sono asintoticamente stabili, grazie al teorema precedente.

Teorema 1.7 (Stabilità Asintotica Globale). *Se lo spazio X contiene un solo punto di equilibrio $e \in E$ e ogni punto di $X \setminus e$ può essere approssimato da sopra o da sotto, allora $\omega(x) = e, \forall x \in X$.*

Dimostrazione. Per risultati non trattati in questo elaborato (si veda [6]), poichè è presente un solo equilibrio, si può affermare che $x \in Q$, per ogni $x \in X$ (ricordiamo che Q è l'insieme dei punti quasi-convergenti). Ma allora per definizione di punto quasi-convergente si ha che $\omega(x) \subseteq E = \{e\}$. Visto che l'insieme limite è non vuoto, si ha necessariamente $\omega(x) = e$, per ogni $x \in X$, come si voleva dimostrare. \square

Capitolo 2

Sistemi Dinamici Monotoni

In questo capitolo, servendoci delle conoscenze preliminari precedentemente enunciate, definiremo e studieremo i sistemi dinamici monotoni (cooperativi e competitivi). Partendo da un'equazione differenziale ordinaria, utilizzeremo le relazioni d'ordine generate dagli ortanti di \mathbb{R}^n per definire e caratterizzare la cooperatività (o la competitività) del sistema. Daremo poi dei risultati sulla struttura delle orbite e degli insiemi limite di tali sistemi.

Partiamo fissando la notazione e la terminologia. Dati $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, con D aperto, e un campo vettoriale $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ che sia C^1 , consideriamo il sistema di equazioni differenziali autonomo $x' = F(x)$.

Definizione 2.1. Un campo vettoriale $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice **Lipschitziano** se esiste una costante $L > 0$ tale che $\|F(x_2) - F(x_1)\| \leq L \|x_2 - x_1\|$, per ogni $x_1, x_2 \in D$.

Definizione 2.2. Un campo vettoriale $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice **completo** se ogni soluzione $\gamma(t)$ del sistema $x' = F(x)$ è tale che il suo intervallo di esistenza massimale coincide con \mathbb{R} .

Enunciamo ora due classici teoremi sull'esistenza e l'unicità delle soluzioni e sulla completezza del campo vettoriale (per le loro dimostrazioni, si veda [2]).

Teorema 2.1 (Esistenza e Unicità locale delle Soluzioni). *Consideriamo il sistema $x' = F(x)$ con dato iniziale $x(t_0) = x_0$. Se il campo vettoriale F è Lipschitziano allora esistono una costante $\delta > 0$ ed un'unica funzione $\gamma: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\gamma(t_0) = x_0$ e $\gamma'(t) = F(\gamma(t))$.*

Teorema 2.2. *Se il campo vettoriale F è Lipschitziano, allora è completo.*

Definizione 2.3. Definiamo **flusso del campo vettoriale** $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ la funzione $\Phi: D \times I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow D$ tale che $\frac{d}{dt}\Phi_t(x) = F(\Phi_t(x))$. Indicheremo quindi con $\Phi_t(x)$ la soluzione del sistema $x' = F(x)$ con dato iniziale x al tempo $t = 0$.

Osservazione 2.1. Se il campo vettoriale F è completo, allora $\Phi_t(x)$ è ben definita per tutti i $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $x \in D$.

Definizione 2.4. Se Φ è definita per tutti i $t \geq 0$, definiamo **orbita positiva di x** l'insieme $\gamma^+(x) = \{\Phi_t(x) \mid t \geq 0\}$. Allo stesso modo, se Φ è definita per tutti i $t \leq 0$, allora definiamo **orbita negativa di x** l'insieme $\gamma^-(x) = \{\Phi_t(x) \mid t \leq 0\}$.

Definizione 2.5. Similmente a come fatto nel capitolo precedente per l'insieme limite $\omega(x)$, definiamo *l'insieme limite alfa* come $\alpha(x) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\bigcup_{s \leq t} \Phi_s(x)}$.

Infine, scegliamo come ordinamento dello spazio \mathbb{R}^n quello fatto coordinata per coordinata (cioè generato dal cono positivo $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$): diremo che $x \leq y$ se $x_i \leq y_i, \forall i = 1 \dots, n$, che $x < y$ se $x \leq y$ ed esiste almeno un i tale che $x_i < y_i$ e che $x \ll y$ se $x_i < y_i, \forall i = 1 \dots, n$.

2.1 La Condizione di Kamke

In questa sezione il nostro obiettivo è quello di dare una condizione sufficiente per poter affermare che il flusso Φ del campo vettoriale F sia monotono, cioè che preservi l'ordine di \mathbb{R}^n .

Definizione 2.6. Il campo vettoriale $F = (F_1, \dots, F_n)$ è detto di *tipo K in D* se per ogni coppia di punti $a, b \in D$ tali che $a \leq b$ e $a_i = b_i$, allora $F_i(a) \leq F_i(b)$.

Il seguente teorema afferma che la condizione del campo vettoriale di essere di tipo K su D è sufficiente ad assicurare la monotonia del flusso. Si può dimostrare che tale condizione è anche necessaria. Denotiamo con $<_\rho$ una qualsiasi delle relazioni $\leq, < \text{ o } \ll$.

Teorema 2.3. Sia F di tipo K in D e siano $x_0, y_0 \in D$ tali che $x_0 <_\rho y_0$. Se $\Phi_t(x_0)$ e $\Phi_t(y_0)$ sono definiti per $t > 0$, allora vale che $\Phi_t(x_0) <_\rho \Phi_t(y_0)$.

Dimostrazione. Supponiamo che $x_0 \leq y_0$, $t > 0$ e che $\Phi_t(x_0)$ e $\Phi_t(y_0)$ siano definiti. Indichiamo ora con $\Phi_t^m(x)$ il flusso corrispondente al sistema $x' = F(x) + \frac{1}{m}e$, dove $e = (1, \dots, 1)$. Per risultati non riportati in questo elaborato (si veda [4]) che $\Phi_s^m(y_0 + \frac{e}{m})$ è definito per $0 \leq s \leq t$ e per tutti gli $m > M$ (cioè per m sufficientemente grande). Inoltre vale che $\Phi_s^m(y_0 + \frac{e}{m}) \rightarrow \Phi_s(y_0)$, per $m \rightarrow +\infty$, uniformemente in $s \in [0, t]$.

Dimostriamo ora che per $0 \leq s \leq t$ e per $m > M$ vale $\Phi_s(x_0) \ll \Phi_s^m(y_0 + \frac{e}{m})$. Fissiamo un $m > M$: poichè $x_0 = \Phi_0(x_0) \ll y_0 + \frac{e}{m} = \Phi_0^m(y_0 + \frac{e}{m})$, allora la disuguaglianza che vogliamo provare vale, grazie alla continuità del flusso, per gli s sufficientemente piccoli. Supponiamo ora per assurdo che la disuguaglianza sia falsa, allora esistono un t_0 , con $0 < t_0 \leq t$, e un indice i tali per cui $(\Phi_{t_0}(x_0))_i = (\Phi_{t_0}^m(y_0 + \frac{e}{m}))_i$, pur sempre valendo che $\Phi_s(x_0) \ll \Phi_s^m(y_0 + \frac{e}{m})$ per gli $0 \leq s < t_0$. Ma allora, visto che sull'indice i il flusso di x_0 passa da essere minore ad essere uguale a quello di $y_0 + \frac{e}{m}$, vuol dire che il primo cresce più velocemente del secondo in $s = t_0$, cioè vale $\frac{d}{ds}|_{s=t_0}(\Phi_s(x_0))_i \geq \frac{d}{ds}|_{s=t_0}(\Phi_s^m(y_0 + \frac{e}{m}))_i$. Tuttavia, poichè $(\Phi_{t_0}(x_0))_j \leq (\Phi_{t_0}^m(y_0 + \frac{e}{m}))_j$ per $j \neq i$, applicando la condizione che F è di tipo K, troviamo $F_i(\Phi_{t_0}(x_0)) \leq F_i(\Phi_{t_0}^m(y_0 + \frac{e}{m})) < F_i(\Phi_{t_0}^m(y_0 + \frac{e}{m})) + \frac{1}{m}$, cioè $\frac{d}{ds}|_{s=t_0}(\Phi_s(x_0))_i < \frac{d}{ds}|_{s=t_0}(\Phi_s^m(y_0 + \frac{e}{m}))_i$ poichè i flussi soddisfano i sistemi di equazioni differenziali iniziali. Abbiamo quindi trovato una contraddizione, perciò la disuguaglianza $\Phi_s(x_0) \ll \Phi_s^m(y_0 + \frac{e}{m})$ vale per $0 \leq s \leq t$ e per $m > M$. Scegliendo $s = t$ e passando al limite per $m \rightarrow +\infty$ in tale disuguaglianza, otteniamo che $\Phi_t(x_0) \leq \Phi_t(y_0)$. Abbiamo quindi dimostrato il teorema per la relazione \leq .

Ora se $x_0 < y_0$ come sopra vale $\Phi_t(x_0) \leq \Phi_t(y_0)$, ma poichè Φ_t è iniettiva (grazie al teorema di esistenza e unicità delle soluzioni), l'uguaglianza non può

valere e quindi $\Phi_t(x_0) < \Phi_t(y_0)$. Perciò il teorema è dimostrato anche per la relazione $<$.

Supponiamo infine che $x_0 \ll y_0$. Da quanto detto fin'ora si deduce che Φ_t mappa l'insieme $[x_0, y_0] \cap D$ nell'insieme $[\Phi_t(x_0), \Phi_t(y_0)]$, cioè Φ_t manda rettangoli in rettangoli. Ma visto che $[x_0, y_0] \cap D$ ha interno non vuoto e che Φ_t è un omeomorfismo su D , allora anche $[\Phi_t(x_0), \Phi_t(y_0)]$ deve avere interno non vuoto. Ma questo succede se e solo se $\Phi_t(x_0) \ll \Phi_t(y_0)$, come si voleva dimostrare. \square

Mostriamo ora che per identificare se un campo vettoriale è di tipo K è sufficiente guardare i segni delle entrate della matrice Jacobiana di F .

Definizione 2.7. Un insieme D è detto **p-convesso** se dati $x, y \in D$ tali che $x \leq y$, allora il segmento che congiunge x e y è tutto contenuto in D , cioè $tx + (1-t)y \in D, \forall t \in [0, 1]$.

Osservazione 2.2. Se D è un insieme convesso, allora è anche p-convesso, per definizione di convessità (poichè la relazione sopra vale per ogni $x, y \in D$).

Proposizione 2.1. Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ un insieme p-convesso e sia F tale che:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \geq 0, \forall x \in D, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \text{ con } i \neq j$$

Allora il campo vettoriale F è di tipo K su D .

Dimostrazione. Siano dati $a, b \in D$ tali che $a \leq b$ e $a_i = b_i$. Applichiamo allora il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\begin{aligned} F_i(b) - F_i(a) &= \int_0^1 \nabla F_i(a + r(b-a)) \cdot (b-a) dr = \\ &= \int_0^1 \sum_{j \neq i} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a + r(b-a))(b_j - a_j) dr \geq 0 \end{aligned}$$

Questo poichè, visto che D è p-convesso, $a + r(b-a) \in D$, sui punti di D le derivate parziali sono positive, $b_j - a_j \geq 0$ e l'integrale è monotono. \square

Possiamo inoltre enunciare, omettendone la dimostrazione, una proposizione analoga alla precedente che riguarda i sistemi non autonomi.

Proposizione 2.2. Siano $F(t, x)$ e $\frac{\partial F}{\partial x}(t, x)$ funzioni continue da $\mathbb{R}^+ \times D$ in D e supponiamo che la funzione $F(t, -): D \rightarrow D$ sia di tipo K per ogni $t \geq 0$. Se $x(t)$ e $y(t)$ sono due soluzioni del sistema $x' = F(t, x)$ nell'intervallo $[a, b]$ tali da soddisfare $x(a) <_\rho y(a)$, allora vale che $x(b) <_\rho y(b)$, ove $<_\rho$ indica una qualsiasi tra le relazioni $\leq, <, \ll$.

Grazie alla Proposizione 2.1 possiamo allora enunciare le definizioni di sistema cooperativo e di sistema competitivo, ed alcune loro proprietà.

Definizione 2.8. Il sistema $x' = F(x)$ è detto **sistema cooperativo** in D se D è un insieme p-convesso e $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \geq 0, \forall x \in D, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \text{ con } i \neq j$.

Osservazione 2.3. Dalla Proposizione 2.1 e dal Teorema 2.3 sopra deduciamo quindi che un sistema cooperativo ha un flusso del campo vettoriale che è monotono e che quindi mantiene l'ordinamento dello spazio.

Definizione 2.9. Il sistema $x' = F(x)$ è detto *sistema competitivo* in D se D è un insieme p-convesso e $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \leq 0, \forall x \in D, \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$ con $i \neq j$.

Osservazione 2.4. È fondamentale notare che invertendo il tempo i sistemi competitivi diventano cooperativi e viceversa. Infatti se il sistema $x' = F(x)$ è competitivo ed ha come flusso Φ_t , allora il sistema $x' = -F(x)$ è cooperativo (i segni delle derivate si invertono) ed avrà un flusso Ψ_t tale che $\Psi_t(x) = \Phi_{-t}(x)$. Perciò un sistema competitivo ha la proprietà di avere il flusso monotono per tempi negativi, cioè se $x \leq y$ e $t < 0$, allora $\Phi_t(x) \leq \Phi_t(y)$. Da ciò segue anche che un sistema competitivo per tempi positivi mantiene la proprietà di "non essere in relazione", cioè se non vale nè $x \leq y$ nè $y \leq x$, allora per i $t > 0$ anche $\Phi_t(x)$ e $\Phi_t(y)$ non saranno legati da relazioni d'ordine.

Esempio 2.1. Il più semplice esempio di sistema cooperativo in \mathbb{R}^4 , che ne motiva anche il nome, è quello dato da $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$. Infatti la condizione

sulla positività delle derivate parziali del campo vettoriale è banalmente soddisfatta. Nella Figura 2.1 è raffigurata, a sinistra, in ordine dal basso verso l'alto, l'evoluzione nel tempo delle coordinate x_1, \dots, x_4 dell'orbita con dato iniziale $x = (-2, -1, 1, 2)$. In questo caso tale orbita tende al valore limite $(0, 0, 0, 0)$ e le coordinate tendono ad avvicinarsi tra loro.

Se invece consideriamo un dato iniziale diverso, ad esempio $x = (-3, 1, 2, 3)$, vediamo grazie alla Figura 2.1 (a destra) che l'orbita non tende ad un valore limite, ma diverge. In ogni caso le coordinate tendono ad avvicinarsi tra di loro e da questo deriva il nome *sistema cooperativo*.

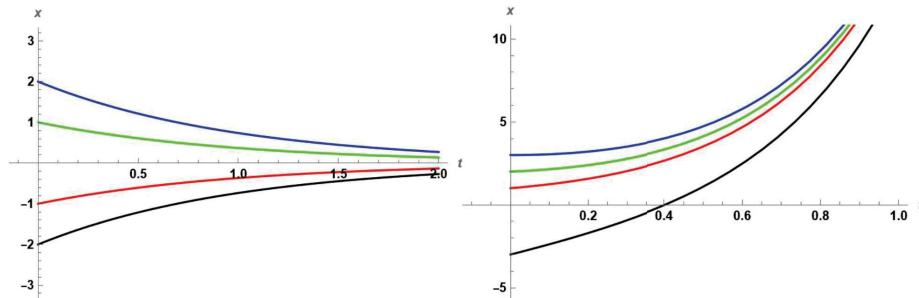


Figura 2.1: nel grafico, in ordine dal basso all'alto, è rappresentata l'evoluzione nel tempo (situato sull'asse orizzontale) dei valori delle coordinate x_1, \dots, x_4 dell'orbita del sistema con dato iniziale $x = (-2, -1, 1, 2)$ (a sinistra) e con dato iniziale $x = (-3, 1, 2, 3)$ (a destra).

2.2 Insiemi Positivamente Invarianti e Monotonia delle Soluzioni

In questa sezione mostreremo che i sistemi dinamici cooperativi e competitivi hanno degli insiemi canonici che sono positivamente invarianti. Da ciò seguirà che alcune particolari soluzioni del sistema saranno monotone e quindi convergeranno ad un equilibrio.

Proposizione 2.3. *Se il sistema $x' = F(x)$ è cooperativo, allora, denotando con $<_\rho$ una qualsiasi delle relazioni $\leq, < o \ll$, si avrà che:*

- (i) *gli insiemi $P_+ = \{x \in D \mid F(x) >_\rho 0\}$ e $P_- = \{x \in D \mid F(x) <_\rho 0\}$ sono positivamente invarianti;*
- (ii) *se $x \in P_+$ ($x \in P_-$), allora la funzione $t \mapsto \Phi_t(x)$ è crescente (decescente) per $t \geq 0$;*
- (iii) *se $\gamma^+(x)$ ha chiusura compatta in D , allora $\omega(x)$ è un equilibrio.*

Dimostrazione. (i) Se il sistema $x' = F(x)$ è cooperativo allora l'invarianza degli insiemi P_+ e P_- si può dedurre dal sistema lineare non autonomo definito da $y' = JF(x(t))y$. Se $x(t)$ è una soluzione di $x' = F(x)$, allora $y(t) = F(x(t))$ è una soluzione del sistema lineare: infatti $(F(x(t)))' = JF(x(t))x'(t) = JF(x(t))F(x(t))$. Inoltre notiamo che anche la funzione $z(t) = 0$ è soluzione del sistema lineare. Infine, se $x(0) \in P_+$, allora $y(0) = F(x(0)) >_\rho 0 = z(0)$. Ma allora, grazie alla Proposizione 2.2, possiamo concludere che $y(t) >_\rho z(t)$ per ogni $t \geq 0$, cioè che $F(x(t)) >_\rho 0$, per ogni $t \geq 0$, da cui l'invarianza positiva di P_+ . Analogamente, invertendo le disuguaglianze, segue anche quella di P_- .

(ii) Supponiamo che $x \in P_+$, cioè che $F(x) >_\rho 0$. Allora, grazie all'invarianza di P_+ , sappiamo che anche $\Phi_t(x) \in P_+$, cioè $F(\Phi_t(x)) >_\rho 0$, per ogni $t \geq 0$. Calcoliamo allora: $\frac{d}{dt}\Phi_t(x) = F(\Phi_t(x)) >_\rho 0$ e di conseguenza la funzione $t \mapsto \Phi_t(x)$ è monotona crescente per $t \geq 0$, se $x \in P_+$. La dimostrazione è analoga nel caso in cui $x \in P_-$.

(iii) Se $\gamma^+(x)$ ha chiusura compatta in D e la funzione $\Phi_t(x)$ è monotona, allora esiste finito $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x)$. Perciò l'insieme $\omega(x)$ è formato da un solo punto e, poichè $\omega(x)$ è invariante, allora tale punto deve essere un punto di equilibrio. \square

Osservazione 2.5. Da tale proposizione si può dedurre un'importante conseguenza: ogni soluzione limitata con dato iniziale in P_+ o in P_- è necessariamente monotona e perciò deve convergere ad un punto di equilibrio.

Proposizione 2.4. *Se il sistema $x' = F(x)$ è competitivo, allora:*

- (i) *gli insiemi $U_+ = \{x \in D \mid F_i(x) > 0 \text{ per qualche } i\}$ e $U_- = \{x \in D \mid F_i(x) < 0 \text{ per qualche } i\}$ sono positivamente invarianti;*
- (ii) *gli insiemi $V_+ = \{x \in D \mid F_i(x) \geq 0 \text{ per qualche } i\}$ e $V_- = \{x \in D \mid F_i(x) \leq 0 \text{ per qualche } i\}$ sono positivamente invarianti;*
- (iii) *l'insieme $V_+ \cap V_-$ è positivamente invariante e contiene ogni insieme compatto e invariante che non contiene punti di equilibrio.*

Dimostrazione. (i) Sia $x_0 \in U_+$ e supponiamo per assurdo che esista un $s > 0$ tale per cui $\Phi_s(x_0) \notin U_+$. Definiamo ora $G = \{z \in D \mid F(z) \leq 0\}$, perciò si avrà che $y_0 = \Phi_s(x_0) \in G$. Ma allora, grazie alla Proposizione 2.3, l'insieme G è positivamente invariante per il sistema cooperativo ottenuto invertendo il tempo, cioè per $x' = -F(x)$. Il flusso di questo sistema, come già osservato in precedenza, è dato da $\Phi_{-s}(x)$. Di conseguenza, se $y_0 \in G$, allora anche $\Phi_{-s}(y_0) \in G$. Ma $\Phi_{-s}(y_0) = \Phi_{-s}(\Phi_s(x_0)) = x_0$, perciò $x_0 \in G$. Ma questo è assurdo, perchè avevamo supposto che $x_0 \in U_+$. Abbiamo perciò mostrato che $\Phi_s(x_0) \in U_+$, per ogni $s \geq 0$ e quindi U_+ è positivamente invariante. L'invarianza positiva dell'insieme U_- si dimostra analogamente, invertendo le disuguaglianze.

(ii) L'invarianza positiva dell'insieme V_+ si mostra come nel punto (i), definendo al posto di G l'insieme $H = \{z \in D \mid F(z) < 0\}$ che, sempre grazie alla Proposizione 2.3, sappiamo essere invariante per il sistema cooperativo ottenuto invertendo il tempo. Si mostra analogamente anche per l'insieme V_- la sua invarianza positiva.

(iii) Grazie al punto (ii) è immediato dedurre che l'insieme $V_+ \cap V_-$ è positivamente invariante. Sia ora $x \notin V_+$. Allora $-F(x) \gg 0$, da cui, sempre grazie alla Proposizione 2.3, si avrà che $-F(\Phi_{-t}(x)) \gg 0$, per ogni $t \geq 0$. Di conseguenza $\frac{d}{dt}\Phi_t(x) = F(\Phi_t(x)) \ll 0$ e perciò $\Phi_t(x)$ è strettamente decrescente per $t < 0$. Sia ora A un insieme compatto e invariante. Se, in aggiunta, supponiamo che $x \in A$, allora anche l'orbita negativa di x è compatta e quindi ammette limite visto che è strettamente decrescente. Perciò $\alpha(x)$ è formato da un solo punto che, di conseguenza, è un equilibrio. Abbiamo quindi dimostrato che ogni insieme A compatto e invariante che contiene un punto $x \notin V_+$ allora contiene anche un equilibrio. Di conseguenza, ogni insieme K compatto e invariante che non contiene equilibri, deve necessariamente essere contenuto in V_+ , altrimenti conterebbe equilibri. Invertendo le disuguaglianze si dimostra che $K \subset V_-$ e, quindi, si ottiene la tesi. \square

Osservazione 2.6. Dalla dimostrazione appena conclusa si può dedurre che ogni soluzione $\Phi_t(x)$ di un sistema competitivo che non interseca mai l'insieme $V_+ \cap V_-$ deve essere strettamente monotona in t . Inoltre, se tale soluzione ha chiusura compatta in D , allora essa converge ad un equilibrio. Di conseguenza ogni orbita periodica di un sistema competitivo deve essere contenuta in $V_+ \cap V_-$, poichè non contiene equilibri ed ha chiusura compatta.

2.3 Struttura delle Orbite e degli Insiemi Limite

In questa sezione enunceremo e dimostreremo tre risultati riguardanti la struttura e l'ordine delle orbite e degli insiemi limite compatti, che saranno generalizzazioni dei teoremi visti nel primo capitolo. Iniziamo con una definizione che sarà utile per il seguito.

Definizione 2.10. Sia $x(t)$ una soluzione del sistema $x' = F(x)$ su un intervallo di tempo I . Un sottointervallo $[a, b]$ di I si dirà **intervallo crescente** se $x(a) < x(b)$, si dirà invece **intervallo decrescente** se $x(a) > x(b)$.

Lemma 2.1. *Se il sistema $x' = F(x)$ è cooperativo e $x(t)$ è una sua soluzione nell'intervallo I , allora $x(t)$ non può avere un intervallo crescente e un intervallo decrescente che siano disgiunti.*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che gli intervalli crescenti e decrescenti rimangono tali anche sotto traslazioni verso destra. Infatti sia $[a, b]$ un intervallo crescente, cioè tale che $x(a) < x(b)$ e sia $s > 0$ tale che $[a+s, b+s] \subset I$. Poiché il sistema è cooperativo, il flusso mantiene l'ordinamento dello spazio e grazie alle sue proprietà vale che: $x(a+s) = \Phi_s(x(a)) < \Phi_s(x(b)) = x(b+s)$. Quindi anche l'intervallo $[a+s, b+s]$ è crescente.

Supponiamo ora per assurdo che I contenga un intervallo decrescente $[a, r]$ e un intervallo crescente $[s, b]$ tali che $a < r < s < b$, cioè disgiunti (il caso in cui il primo sia crescente e il secondo decrescente è analogo). Definiamo $A = \{t \in [s, b] \mid x(t) \leq x(s)\}$ e $s' = \sup(A)$. Allora $s \leq s' < b$ e l'intervallo $[s', b]$ è un intervallo crescente (perché dalla definizione di s' segue che $x(s') \leq x(s) < x(b)$) che non contiene intervalli decrescenti del tipo $[s', \eta]$, con $\eta \in (s', b]$. Ridefiniamo $s = s'$ in modo che l'intervallo $[s, b]$ abbia la proprietà appena enunciata. Separiamo ora due casi e cerchiamo una contraddizione per ciascuno:

- se $r - a \leq b - s$ allora l'intervallo $[s, s+r-a]$ è un traslato a destra di $[a, r]$ che è contenuto in I ($s+r-a \leq b$) e quindi per l'invarianza è un intervallo decrescente. Ma $[s, s+r-a] \subseteq [s, b]$, ma questo è assurdo perché avevamo supposto che $[s, b]$ non contenesse intervalli decrescenti;
- se $r - a > b - s$, allora $a < a+b-r < s < b$ e quindi $[a+b-r, b]$ è un traslato a destra di $[a, r]$, è contenuto in I e perciò per l'invarianza è un intervallo decrescente. Quindi $x(s) < x(b) < x(a+b-r)$. Sia ora $c = \sup\{t \in [a+b-r, s] \mid x(b) \leq x(t)\}$, si ha che $c < s < b$ e che $x(b) \leq x(c)$. Perciò $[c, s]$ è un intervallo decrescente. Dividiamo due ulteriori casi:
 - se $s - c \leq b - s$, allora come sopra $[s, 2s-c]$ è un traslato a destra di $[c, s]$ e quindi è anch'esso decrescente. Ma $2s-c \leq b$ e perciò $[s, 2s-c] \subseteq [s, b]$, che è assurdo perché $[s, b]$ non conteneva intervalli decrescenti di quel tipo;
 - se $s - c > b - s$ allora vale $c < c+b-s < s$. Perciò $[c+b-s, b]$ è un traslato a destra di $[c, s]$ e quindi è anch'esso decrescente. Si ha dunque che $x(b) < x(c+b-s)$, ma questa è una contraddizione per come è definito c , poiché $c < c+b-s$.

La supposizione fatta era perciò assurda e quindi abbiamo mostrato che non possono esistere due intervalli uno crescente e uno decrescente che siano disgiunti, come si voleva dimostrare. \square

Teorema 2.4. *Un insieme limite compatto di un sistema cooperativo o competitivo non può contenere due punti legati dalla relazione \ll .*

Dimostrazione. Dimostriamo l'affermazione per i sistemi cooperativi nel caso in cui l'insieme limite sia un insieme limite alfa, per i sistemi competitivi basta invertire il tempo. Sia dato allora $x_0 \in X$ e supponiamo per assurdo che $\alpha(x_0)$ contenga due punti x_1, x_2 tali che $x_1 \ll x_2$. Sia ora $x(t) = \Phi_t(x_0)$ per $t \leq 0$. Poiché l'insieme $\{x \in X \mid x_1 \ll x\}$ è un intorno aperto di x_2 e poiché $x_2 \in \alpha(x_0)$, allora esiste un $t_1 < 0$ tale che $x_1 \ll x(t_1)$. Ragionando similmente, poiché l'insieme $\{x \in X \mid x \ll x(t_1)\}$ è un intorno aperto di $x_1 \in \alpha(x_0)$, allora esiste $t_2 < t_1$ tale che $x(t_2) \ll x(t_1)$. Continuando in tal modo si possono trovare $t_3 < t_2$ e $t_4 < t_3$ tali che $x(t_3) \ll x_2$ e $x(t_3) \ll x(t_4)$. Perciò l'intervallo $I = [t_4, t_1]$ contiene l'intervallo decrescente $[t_4, t_3]$ e l'intervallo crescente $[t_2, t_1]$

che sono disgiunti, ma questo è assurdo perchè dal lemma precedente sappiamo che non è possibile che esistano tali intervalli. Perciò in $\alpha(x_0)$ non possono esserci punti legati dalla relazione \ll , come si voleva dimostrare. \square

Osservazione 2.7. Possiamo applicare questo teorema alle orbite periodiche, che sono insiemi limite compatti. Esse non potranno quindi contenere punti legati dalla relazione \ll . In particolare, in \mathbb{R}^2 non possono esistere orbite periodiche non costanti: infatti nel piano ogni curva chiusa non costante contiene due punti legati dalla relazione \ll .

Proposizione 2.5. *Sia γ un'orbita periodica non-triviale di un sistema cooperativo o competitivo. Allora γ non può contenere due punti legati dalla relazione $<$.*

Dimostrazione. Dimostriamo la proposizione per un sistema che sia cooperativo (il caso competitivo si deduce tramite inversione del tempo). Supponiamo per assurdo che esistano $y_1, y_2 \in \gamma$ tali che $y_1 < y_2$. Sia $T > 0$ il periodo minimo della soluzione $x(t) = \Phi_t(y_2)$, cioè dell'orbita γ . Allora, visto che anche $y_1 \in \gamma$, esiste un $\tau \in (0, T)$ tale che $x(\tau) = y_1 < y_2 = x(0)$. Perciò $[0, \tau]$ è un intervallo decrescente per $x(t)$. Per la periodicità dell'orbita deve valere che $x(\tau + T) = y_1 < y_2 = x(2T)$ e quindi, visto che $\tau + T < 2T$, l'intervallo $[\tau + T, 2T]$ è crescente ed è disgiunto da $[0, \tau]$ (tranne nel caso in cui $T = 0$, che è però escluso visto che l'orbita è non-triviale). Ma questo, grazie al lemma precedente, è assurdo e perciò non possono esistere $y_1, y_2 \in \gamma$ tali che $y_1 < y_2$, come si voleva dimostrare. \square

2.4 Altri Coni Positivi in \mathbb{R}^n

Questa sezione sarà dedicata allo studio di relazioni d'ordine su \mathbb{R}^n che sono generate da un suo qualsiasi ortante e dei possibili sistemi dinamici monotoni che rispettano queste relazioni.

Definizione 2.11. Sia $m = (m_1, \dots, m_n)$, con $m_i \in \{0, 1\}$. Un *ortante* di \mathbb{R}^n è un insieme del tipo: $K_m = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (-1)^{m_i} x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n\}$.

Per ovvi motivi l'insieme K_m è un cono positivo di \mathbb{R}^n e come tale genera una relazione d'ordine parziale denotata con \leq_m e definita da $x \leq_m y \Leftrightarrow y - x \in K_m$. Esplicitamente si ha che $x \leq_m y$ se $x_i \leq y_i$ per gli i tali che $m_i = 0$ e $x_i \geq y_i$ per gli i tali che $m_i = 1$. Possiamo dunque notare che se definiamo la matrice diagonale:

$$P = \text{diag}[(-1)^{m_1}, \dots, (-1)^{m_n}] \quad (2.1)$$

per la quale vale $P = P^{-1}$, allora si avrà che $x \leq_m y \Leftrightarrow Px \leq Py$. La matrice P definisce infatti un isomorfismo che porta l'ortante K_m ad essere l'ortante \mathbb{R}_+^n .

Definizione 2.12. Un insieme D è detto *p_m -convesso* se, dati $x, y \in D$ tali che $x \leq_m y$, allora vale che $tx + (1 - t)y \in D$ per $t \in [0, 1]$. Ciò significa che se due punti sono legati dalla relazione d'ordine, allora tutto il segmento che li congiunge appartiene all'insieme D .

Definizione 2.13. Diremo che il sistema $x' = F(x)$ è **cooperativo rispetto a K_m** in D se D è un insieme p_m -convesso e per ogni $x \in D$ e $i \neq j$ vale che:

$$(-1)^{m_i+m_j} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \geq 0$$

Il sistema si dirà **competitivo rispetto a K_m** in D se D è p_m -convesso e se vale la disuguaglianza inversa.

Osservazione 2.8. Se $m = (0, \dots, 0)$ ritroviamo la definizione precedente di sistema cooperativo o competitivo.

Enunciamo e dimostriamo ora una proposizione che mostra come anche i flussi di sistemi cooperativi rispetto a K_m siano monotoni e preservino l'ordine.

Proposizione 2.6. *Sia D un insieme p_m -convesso e sia F un campo vettoriale C^1 su D tale che valga la condizione di cooperatività rispetto a K_m . Siano $x, y \in D$ e supponiamo che $\Phi_t(x)$ e $\Phi_t(y)$ siano definiti per $t \geq 0$. Denotiamo con $<_\rho$ una qualsiasi tra le relazioni $\leq_m, <_m, \ll_m$. Se $x <_\rho y$, allora vale che $\Phi_t(x) <_\rho \Phi_t(y), \forall t \geq 0$. Se invece vale la condizione di competitività rispetto a K_m , lo stesso risultato vale per $t \leq 0$.*

Dimostrazione. L'insieme PD , con P definita da (2.1), sarà p -convesso. Infatti, come visto sopra, $x \leq_m y$ se e solo se $Px \leq Py$ e, per tali x, y , si avrà che $P(tx + (1-t)y) = t(Px) + (1-t)(Py) \in PD$, cioè PD è p -convesso. Se il campo vettoriale F soddisfa la condizione di cooperatività su K_m (cioè $(-1)^{m_i+m_j} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \geq 0$), allora il campo vettoriale $g: PD \rightarrow \mathbb{R}^n$, definito da $g(y) = PF(P^{-1}y) = PF(Py)$, poichè la matrice P manda K_m in \mathbb{R}_+^n , genererà un sistema cooperativo. Inoltre a g sarà associato un flusso Ψ_t definito da $\Psi_t(y) = P\Phi_t(Py)$, da cui ricaviamo che vale anche $\Phi_t(y) = P\Psi_t(Py)$ (infatti $\Psi_t(Py) = P\Phi_t(P^2y) = P\Phi_t(y)$ e la relazione segue poichè $P = P^{-1}$). Ora, se $x \leq_m y$, allora $Px \leq Py$ e dalla monotonia dei flussi dei sistemi cooperativi vista in precedenza deduciamo che $\Psi_t(Px) \leq \Psi_t(Py)$. Ma allora si avrà che $P^{-1}\Psi_t(Px) \leq_m P^{-1}\Psi_t(Py) \Rightarrow P\Psi_t(Px) \leq_m P\Psi_t(Py) \Rightarrow \Phi_t(x) \leq_m \Phi_t(y)$, come si voleva dimostrare. In modo analogo si dimostra la proposizione per le relazioni $<_m$ e \ll_m e per i sistemi competitivi. \square

Osservazione 2.9. Possiamo riformulare tale proposizione anche rispetto al cambiamento di coordinate che porta l'ortante K_m ad essere \mathbb{R}_+^n . Infatti sia $y = Px$, allora il sistema diventa $y' = P(x') = P(F(x)) = P(F(P^{-1}y)) = P(F(Py))$, cioè $y' = PF(Py)$, poichè $P^{-1} = P$. Riformuliamo quindi la proposizione nel seguente modo: il sistema $x' = F(x)$ è cooperativo (competitivo) rispetto a K_m se e solo se il sistema $y' = PF(Py)$ è cooperativo (competitivo).

Alla luce di tale osservazione possiamo quindi dedurre che tutti i risultati sui sistemi dinamici cooperativi o competitivi enunciati precedentemente valgono anche per quelli che lo sono rispetto a un ortante K_m con la relativa relazione d'ordine.

Definizione 2.14. Chiameremo **agenti** le coordinate x_1, \dots, x_n di \mathbb{R}^n . Diremo inoltre che due agenti x_i, x_j sono **cooperativi**, con $i \neq j$, se esiste $x \in D$ tale che $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \geq 0$. Gli agenti si diranno **competitivi** se $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \leq 0$.

Esempio 2.2. Mostriamo ora un esempio che spiega la motivazione dei nomi *agenti cooperativi* e *agenti competitivi*. In \mathbb{R}^4 consideriamo il campo vettoriale li-

neare dato da $F(x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} x$. Grazie all'algoritmo presentato

nel Capitolo 3 e all'Esempio 3.3 sappiamo che tale sistema è cooperativo rispetto alla relazione d'ordine generata dall'ortante $K_{(0,0,1,1)}$ di \mathbb{R}^4 , la cui verifica è molto semplice.

Notiamo che in tale sistema gli agenti x_1 e x_2 sono cooperativi, così come lo sono gli agenti x_3 e x_4 . Tutte le altre possibili coppie, invece, sono competitive. Nella Figura 2.2 è rappresentata, in ordine dal basso verso l'alto, l'evoluzione nel tempo delle coordinate x_1, \dots, x_4 dell'orbita con dato iniziale $x = (-2, -1, 1, 2)$. Da essa si può quindi evincere che le coordinate x_1 e x_2 tendono ad avvicinarsi, così come le coordinate x_3 ed x_4 . Si vede, invece, come le due coppie (x_1, x_2) e (x_3, x_4) tendano ad allontanarsi sempre di più nel tempo. Questo comportamento spiega quindi il perchè dei nomi *agenti cooperativi* e *agenti competitivi*.

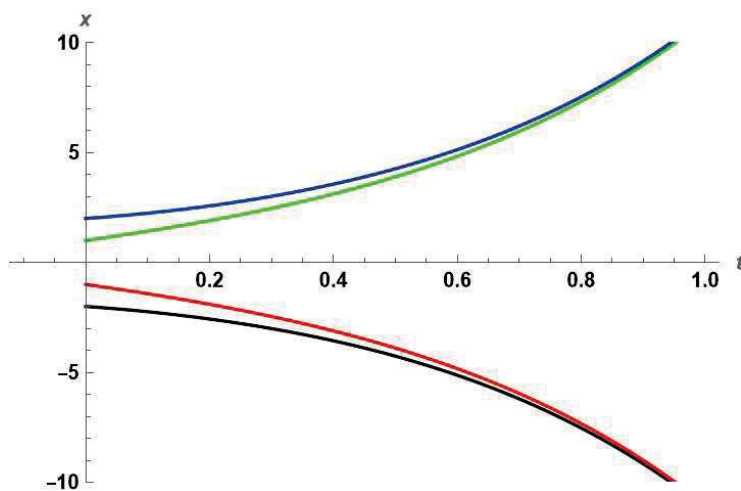


Figura 2.2: nel grafico, in ordine dal basso all'alto, è rappresentata l'evoluzione nel tempo (situato sull'asse orizzontale) dei valori delle coordinate x_1, \dots, x_4 dell'orbita del sistema con dato iniziale $x = (-2, -1, 1, 2)$.

Capitolo 3

Caratterizzazione dei Sistemi Dinamici Monotoni in \mathbb{R}^n

In quest'ultimo capitolo introdurremo i concetti di grafo pesato, di grafo con segno e di grafo associato a un'equazione differenziale, che ci permetteranno di giungere ad una caratterizzazione dei sistemi dinamici monotoni rispetto ad un ortante di \mathbb{R}^n . Analizzeremo solamente il caso in cui ogni entrata della matrice Jacobiana del campo vettoriale non sia costantemente nulla nel dominio considerato. Concluderemo poi dando alcuni spunti ed alcuni esempi nel caso di sistemi dinamici multipartiti, per eventuali studi futuri.

3.1 Grafi pesati e grafi con segno

In questa sezione saranno presentate alcune nozioni di teoria dei grafi, in particolare legate ai grafi pesati e ai grafi con segno. Questo ci permetterà poi, nella sezione successiva, di studiare i grafi associati ai sistemi dinamici.

Definizione 3.1. Un *grafo orientato pesato* è una tripla $G = (V, \Gamma, f)$, dove $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ è un insieme di vertici, $\Gamma = \{(x_i, x_j) \in V \times V \mid i \neq j\}$ è un multi-insieme di coppie ordinate di vertici, detti archi, e $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è una funzione che ad ogni arco associa un peso positivo o negativo.

Nel seguito considereremo solamente il caso in cui Γ sia un insieme, cioè il caso in cui tra due vertici c'è al massimo un arco orientato.

Osservazione 3.1. Se Γ è un insieme, allora al grafo $G = (V, \Gamma, f)$ possiamo associare una matrice $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, detta matrice di adiacenza, contenente i pesi di G . Tale matrice sarà quindi definita da $m_{ij} = f(x_i, x_j)$, se $(x_i, x_j) \in \Gamma$, $m_{ij} = 0$, altrimenti.

Osservazione 3.2. Osserviamo che nella definizione di Γ si ha $i \neq j$, perciò nei grafi che considereremo non sono presenti cappi.

Osservazione 3.3. Notiamo che un grafo orientato pesato, in cui Γ è un insieme, è interamente determinato dalla sua matrice di adiacenza. Questo perchè l'insieme dei vertici è determinato dal numero di righe o colonne di M e l'insieme degli archi è determinato dalle entrate non nulle di M .

Osservazione 3.4. Alla matrice M possiamo associare una matrice dei segni $\widetilde{M} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\{+1, -1, 0\})$, definita come $\widetilde{M} = \text{sgn}(M)$. Perciò le entrate di \widetilde{M} sono rappresentate o da 0, nel caso in cui non sia presente uno degli archi, oppure da +1 e -1, a seconda del fatto che il peso corrispondente nella matrice M sia positivo o negativo. In entrambe le matrici, inoltre, la diagonale avrà tutte entrate nulle, visto che nel grafo G non sono presenti cappi.

Definizione 3.2. Un grafo del tipo $\widetilde{G} = (V, \Gamma, \widetilde{M})$ si chiama **grafo orientato con segno**.

Definizione 3.3. Una matrice $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ si dice di **segno simmetrica** se la matrice dei segni associata $\widetilde{M} = \text{sgn}(M)$ è simmetrica, cioè se per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$, vale che $m_{ij}m_{ji} \geq 0$. Questo significa che se nel grafo è presente l'arco (x_i, x_j) allora, nel caso sia presente anche l'arco (x_j, x_i) , essi devono avere pesi con lo stesso segno.

Nel seguito tratteremo solamente il caso in cui M sia di segno simmetrica.

Osservazione 3.5. Ad ogni grafo orientato pesato in cui la matrice M è di segno simmetrica possiamo associare un grafo con segno (non orientato). Infatti se M è di segno simmetrica, allora la matrice \widetilde{M} associata sarà simmetrica. Quindi nel grafo $\widetilde{G} = (V, \Gamma, \widetilde{M})$, se sono presenti gli archi (x_i, x_j) e (x_j, x_i) , essi avranno lo stesso segno. Perciò in \widetilde{G} possiamo identificare le coppie di archi $(x_i, x_j), (x_j, x_i)$ e considerare Γ come l'insieme delle coppie non ordinate di vertici.

Esempio 3.1. Prendiamo come esempio il grafo a sinistra in Figura 3.1. A tale grafo, poichè Γ è un insieme (cioè non ci sono archi ripetuti), possiamo associare

la matrice di adiacenza $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Come si può evincere

sia dal grafo che dalla matrice M , siamo nel caso della simmetria di segno. Perciò a tale matrice possiamo associare una matrice dei segni $\widetilde{M} = \text{sgn}(M)$ e a tale grafo possiamo associare il grafo con segno non orientato raffigurato sulla destra.

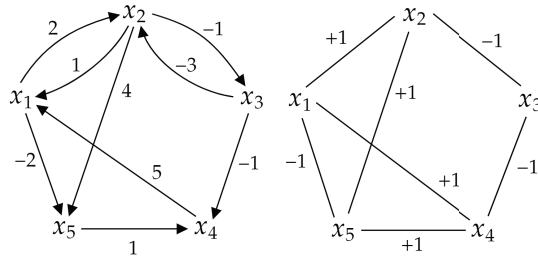


Figura 3.1: grafo orientato pesato di segno simmetrico (a sinistra) e grafo con segno non orientato ad esso associato (a destra)

Definizione 3.4. Si definisce **ciclo** un insieme di vertici distinti e ordinati $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}$, con $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$, a cui è associato un insieme di archi $\{(x_{i_1}, x_{i_2}), (x_{i_2}, x_{i_3}), \dots, (x_{i_{r-1}}, x_{i_r}), (x_{i_r}, x_{i_1})\}$. Un ciclo è quindi un percorso chiuso che parte da un vertice x_{i_1} e ritorna ad esso passando per i vertici intermedi x_{i_2}, \dots, x_{i_r} . Nel seguito sarà denotato con $x_{i_1} \dots x_{i_r}$.

Definizione 3.5. Diremo che un ciclo è **positivo** se il prodotto dei pesi contenuti negli archi del ciclo è positivo. Cioè si ha che il ciclo $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}$ è positivo se $m_{i_1 i_2} m_{i_2 i_3} \dots m_{i_{r-1} i_r} m_{i_r i_1} > 0$. Diremo che il ciclo è **negativo** se vale la disuguaglianza inversa.

Osservazione 3.6. La condizione di positività e negatività di un ciclo dipende solamente dal numero di pesi negativi contenuti nel ciclo. Infatti un ciclo è positivo se contiene un numero pari di archi di peso negativo, mentre è negativo se ne contiene un numero dispari.

Osservazione 3.7. Grazie alla precedente osservazione possiamo definire la positività o la negatività di un ciclo anche nel caso di grafi con segno. Infatti diremo che un ciclo è positivo se contiene un numero pari di archi con segno meno, diremo invece che è negativo se ne contiene un numero dispari.

Definizione 3.6. Dato un grafo $G = (V, \Gamma)$, si definisce **taglio di A** l'insieme $\delta_G(A) = \{(a, b) \in \Gamma \mid a \in A, b \notin A\}$, cioè l'insieme degli archi che escono dall'insieme A .

Enunciamo ora una proposizione, la cui dimostrazione verrà omessa, che utilizzeremo per provare un teorema nella prossima sezione.

Proposizione 3.1. Sia $G = (V, \Gamma)$ un grafo e consideriamo un suo qualunque ciclo $x_{i_1} \dots x_{i_r}$. Sia $A \subseteq V$ un sottoinsieme di vertici di G . Considerato il grafo $G' = (V, \Gamma')$, ove $\Gamma' = \{(x_{i_1}, x_{i_2}), \dots, (x_{i_r}, x_{i_1})\}$, allora si avrà che $|\delta_{G'}(A)| = 2k$, per un qualche $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3.2 Grafi associati e caratterizzazione dei sistemi dinamici monotoni in \mathbb{R}^n

In questa sezione introdurremo il concetto di grafo associato ad un'equazione differenziale, ne studieremo alcune proprietà e daremo una classificazione dei sistemi dinamici monotoni rispetto ad un ortante di \mathbb{R}^n , nel caso in cui tutte le entrate della matrice Jacobiana del campo vettoriale (ad esclusione della diagonale) non siano costantemente nulle.

Consideriamo quindi un sistema dinamico $x' = F(x)$, con $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ e indichiamo con $JF(x)$ la matrice Jacobiana del campo vettoriale F . D'ora in avanti consideriamo quindi il caso in cui, per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$, con $i \neq j$, esiste $x \in D$ tale che $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \neq 0$. Iniziamo dando alcune definizioni e alcuni risultati che ci condurranno alla classificazione voluta.

Definizione 3.7. Una matrice $M(x) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, dipendente da $x \in \mathbb{R}^n$, si dice di **segno stabile** in un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se vale che la matrice $\text{sgn}(M(x))$ è costante in $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Osservazione 3.8. Si ha quindi che $M(x)$ è di segno stabile se ogni sua entrata non diagonale mantiene il suo segno al variare di $x \in D$, cioè se, dato $i \neq j$, $m_{ij}(x) \leq 0$ per ogni $x \in D$, oppure $m_{ij}(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$.

Definizione 3.8. Diremo che una matrice $M(x) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, dipendente da $x \in \mathbb{R}^n$, è di **segno simmetrica** in un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se la matrice $\text{sgn}(M(x))$ è simmetrica per ogni $x \in D$.

Osservazione 3.9. Per una matrice $M(x)$ di segno simmetrica varrà quindi che $m_{ij}(x)m_{ji}(x) \geq 0, \forall x \in D$ e $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Proposizione 3.2. Sia dato un sistema dinamico $x' = F(x)$, con $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$. Se tale sistema è cooperativo o competitivo in D rispetto a un ortante di \mathbb{R}^n , allora la matrice $JF(x)$ è di segno stabile e di segno simmetrica in D .

Dimostrazione. Dimostriamo la proposizione per i sistemi cooperativi, per i competitivi è sufficiente invertire le disuguaglianze. Se il sistema $x' = F(x)$ è cooperativo rispetto a K_m , allora per definizione $(-1)^{m_i+m_j} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \geq 0$, per ogni $x \in D$ e per ogni $i \neq j$. Da ciò segue immediatamente che, per ogni $i \neq j$, o $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \geq 0, \forall x \in D$ oppure $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \leq 0, \forall x \in D$ e perciò la matrice $JF(x)$ è di segno stabile. Calcoliamo ora: $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \cdot \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) = (-1)^{2(m_i+m_j)} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \cdot \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) = (-1)^{m_i+m_j} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \cdot (-1)^{m_j+m_i} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \geq 0, \forall x \in D$, grazie alla definizione di sistema cooperativo rispetto a K_m . Perciò la matrice $JF(x)$ è anche di segno simmetrica in D (poichè $m_{ij}(x) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)$ e abbiamo calcolato che $m_{ij}(x)m_{ji}(x) \geq 0$, per ogni $x \in D$). \square

Osservazione 3.10. Ricordando la Definizione 2.14 sugli agenti cooperativi e competitivi, possiamo ora affermare che, grazie alla necessaria condizione di stabilità del segno di $JF(x)$, la definizione di cooperatività (competitività) tra due agenti varrà indipendentemente da $x \in \mathbb{R}^n$. Inoltre, dalla condizione di simmetria del segno, vale la stessa disuguaglianza con gli indici scambiati, cioè se gli agenti x_i, x_j sono cooperativi, allora si ha anche che $\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \geq 0$. Lo stesso vale per agenti competitivi (con la disuguaglianza inversa).

Da quanto detto finora sulla matrice $JF(x)$ del campo vettoriale di un sistema dinamico monotono rispetto ad un ortante di \mathbb{R}^n , segue che la sua struttura dei segni rimane invariata in tutto il dominio D . Ad essa possiamo allora associare un'altra matrice, che non dipende da $x \in D$, e che ne codifica la sua struttura dei segni.

Definizione 3.9. Chiamiamo **matrice dei segni** di un sistema dinamico monotono la matrice $\widetilde{JF} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\{+1, -1, 0\})$, definita come $\widetilde{JF} = \text{sgn}(JF(x))$.

Osservazione 3.11. Grazie alla necessaria condizione di simmetria del segno della matrice $JF(x)$, segue che la matrice \widetilde{JF} è simmetrica e per questo può generare un grafo con segno (non orientato), come notato nell'Osservazione 3.5, escludendo le entrate sulla diagonale.

Definizione 3.10. Definiamo quindi **grafo associato** ad un sistema dinamico monotono $x' = F(x)$ il grafo con segno (non orientato) $\widetilde{G} = (V, \Gamma, \widetilde{JF})$, ove $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ e l'insieme degli archi Γ è determinato dalla matrice JF , in cui escludiamo le entrate diagonali.

Osservazione 3.12. Nel caso in analisi, cioè quello in cui ogni entrata di $JF(x)$ non è costantemente nulla, si ha che il grafo associato al sistema è un grafo completo (cioè contiene tutti i possibili archi, ad esclusione dei cappi).

Enunciamo ora un teorema che lega il grafo \tilde{G} alla proprietà di monotonia di un sistema dinamico rispetto ad un ortante di \mathbb{R}^n . Grazie a questo risultato potremo poi dimostrare la caratterizzazione dei sistemi dinamici monotoni rispetto a un ortante di \mathbb{R}^n .

Teorema 3.1. *Un sistema dinamico $x' = F(x)$ è cooperativo rispetto ad un ortante di \mathbb{R}^n se e solo se nel grafo associato \tilde{G} ogni ciclo è positivo. Sarà invece competitivo se e solo se ogni ciclo di \tilde{G} è negativo.*

Dimostrazione. Dimostriamo il caso dei sistemi cooperativi in \mathbb{R}^3 . Sia dato un qualsiasi sistema $x' = F(x)$, con $x \in \mathbb{R}^3$. Grazie all'Osservazione 2.9 sappiamo che se un tale sistema è cooperativo rispetto ad una relazione d'ordine generata da un ortante di \mathbb{R}^3 , allora esiste un cambio di coordinate di matrice P tale da rendere il sistema $y' = PF(Py)$ cooperativo rispetto alla classica relazione d'ordine di \mathbb{R}^3 . Ciò significa che $x' = F(x)$ è cooperativo rispetto ad un ortante di \mathbb{R}^3 se e solo se esiste un cambio di coordinate che rende le entrate non diagonali di $JF(x)$ tutte positive. Nel caso di \mathbb{R}^3 , e visto che la matrice $JF(x)$ deve necessariamente essere di segno simmetrica, prendiamo in considerazione le due entrate non diagonali m_{12}, m_{13} e costruiamo la matrice P , che sarà della forma $\text{diag}[1, (-1)^{n_2}, (-1)^{n_3}]$ (e perciò $P = P^{-1}$). Definiamo $n_2 = \text{sgn}(m_{12})$ e $n_3 = \text{sgn}(m_{13})$. In tal modo le entrate (1, 2) e (1, 3) della matrice $PJF(x)P$ saranno positive (e di conseguenza anche le entrate (2, 1) e (3, 1)). Guardiamo ora il segno dell'entrata (2, 3) della matrice $PJF(x)P$:

- se è positivo, allora P è la matrice del cambio di coordinate cercato e il sistema $x' = F(x)$ è cooperativo rispetto ad un ortante;
- se è negativo, allora non c'è modo di renderlo positivo, poichè, se cambiassimo la matrice P , allora cambierebbe di segno almeno una delle due entrate (1, 2) e (1, 3), che erano già positive. Di conseguenza il sistema non è cooperativo rispetto ad un ortante.

Perciò le entrate m_{12}, m_{13} e m_{23} di $JF(x)$ devono essere o tutte e tre positive (in tal caso non si deve cambiare nessun segno) oppure devono essercene due negative e una positiva, altrimenti non si può trovare una matrice P tale da trasformare $JF(x)$ come desiderato. Ciò significa che $x' = F(x)$ è cooperativo rispetto ad un ortante di \mathbb{R}^3 se e solo se nel grafo associato \tilde{G} il ciclo $x_1x_2x_3$ è positivo (da notare che tale ciclo è l'unico contenuto in \tilde{G}). Tale costruzione si generalizza in modo analogo al caso di $x \in \mathbb{R}^n$, mentre per i sistemi competitivi basta cambiare i segni (ottenendo quindi cicli negativi). \square

Esempio 3.2. Consideriamo il campo vettoriale studiato nell'Esempio 2.2, cioè

$$F(x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} x. \text{ Abbiamo visto che il sistema da esso generato}$$

è monotono e di conseguenza gli si può associare il grafo con segno non orientato rappresentato nella Figura 3.2. Si può inoltre notare che ogni ciclo presente in

tale grafo è positivo, infatti il sistema $x' = F(x)$ è un sistema cooperativo rispetto alla relazione generata dall'ortante $K_{(0,0,1,1)}$.

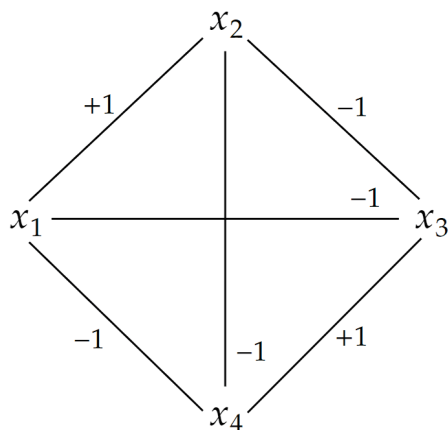


Figura 3.2: grafo con segno non orientato associato al sistema $x' = F(x)$

Teorema 3.2 (Caratterizzazione dei Sistemi Dinamici Monotoni in \mathbb{R}^n).

I sistemi dinamici cooperativi, con Jacobiana a entrate non costantemente nulle, rispetto ad una relazione d'ordine generata da un ortante di \mathbb{R}^n sono tutti e soli i sistemi in cui gli agenti possono essere partizionati in due gruppi, in modo tale che due agenti nello stesso gruppo siano cooperativi e due agenti in gruppi diversi siano competitivi (uno dei due gruppi può essere vuoto).

Osservazione 3.13. Poichè per trasformare un sistema cooperativo in uno competitivo basta invertire il tempo, allora la stessa classificazione vale anche per i sistemi dinamici competitivi, con l'unica differenza che due agenti nello stesso gruppo sono competitivi e due agenti in gruppi diversi sono cooperativi. Questa differenza è causata dal fatto che, invertendo il tempo, tutte le entrate della matrice $JF(x)$ cambiano di segno.

Dimostrazione. \Leftarrow) Dimostriamo innanzitutto che ogni partizione degli agenti in due gruppi con la proprietà nell'enunciato rappresenta un sistema dinamico cooperativo rispetto ad un ortante di \mathbb{R}^n . Sia data una partizione in due gruppi $A = (x_1, \dots, x_r)$ e $B = (x_{r+1}, \dots, x_n)$ con la proprietà voluta. Costruiamo allora il grafo con segno \tilde{G} di tale partizione, cioè il grafo determinato dalla matrice \tilde{M} definita dalle seguenti condizioni:

- l'entrata ij è $+1$ se x_i e x_j appartengono allo stesso gruppo;
- l'entrata ij è -1 se x_i e x_j appartengono a gruppi diversi;
- le entrate diagonali sono tutte nulle.

Affinchè la partizione (A, B) rappresenti un sistema dinamico cooperativo è sufficiente che nel grafo \tilde{G} ogni ciclo sia positivo, come enunciato nel Teorema 3.1. Dividiamo allora due casi:

- se uno dei due insiemi è vuoto, allora ogni arco di \tilde{G} è positivo e perciò la condizione sopra è soddisfatta;
- altrimenti, se $|A|, |B| \geq 1$, in questo caso si avrà che $\delta(A) = \delta(B)$, poichè (A, B) è una partizione degli agenti (e perciò dei vertici di \tilde{G}). Inoltre $\delta(A)$ sarà formato da tutti e soli gli archi negativi contenuti in \tilde{G} . Questo poichè tutti gli archi interni ad A (cioè che collegano elementi di A) sono positivi e lo stesso vale per gli archi interni a B , mentre gli archi che collegano elementi di A ad elementi di B sono negativi. Consideriamo ora un qualsiasi ciclo $x_{i_1} \dots x_{i_s}$, con $i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, n\}$ e dividiamo tre ulteriori casi:
 - se i vertici x_{i_1}, \dots, x_{i_s} sono tutti in A , cioè se $i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, r\}$, allora tale ciclo non contiene archi dell'insieme $\delta(A)$ e perciò è formato solo da archi positivi;
 - se i vertici x_{i_1}, \dots, x_{i_s} sono tutti in B , si ragiona come sopra;
 - altrimenti, se il ciclo $x_{i_1} \dots x_{i_s}$ è formato sia da vertici in A che da vertici in B , allora, grazie alla Proposizione 3.1, gli archi negativi contenuti nel ciclo (che sono esattamente la quantità che nella proposizione è indicata con $\delta_{G'}(A)$) sono in numero pari e il ciclo è quindi positivo.

Perciò in \tilde{G} ogni ciclo è positivo e di conseguenza la partizione (A, B) rappresenta un sistema dinamico cooperativo rispetto ad un ortante di \mathbb{R}^n .

\Rightarrow) Dimostriamo ora che per ogni sistema dinamico cooperativo rispetto ad un ortante di \mathbb{R}^n , con Jacobiana a entrate non costantemente nulle, si può trovare un raggruppamento degli agenti tale da soddisfare le ipotesi del teorema.

Per fare ciò utilizziamo il seguente algoritmo: costruiamo innanzitutto il grafo con segno \tilde{G} di tale sistema. Il caso con due soli agenti è banale. Se invece sono presenti tre o più agenti, consideriamo i vertici x_1, x_2 e x_3 e dividiamo tre casi:

- se gli archi (x_1, x_2) e (x_2, x_3) sono positivi, allora posizioniamo x_2 nel gruppo A ;
- se gli archi (x_1, x_2) e (x_2, x_3) sono negativi, allora posizioniamo x_2 nel gruppo B ;
- se gli archi (x_1, x_2) e (x_2, x_3) sono uno positivo e uno negativo sappiamo che, poichè \tilde{G} rappresenta un sistema dinamico cooperativo, allora ogni ciclo è positivo e quindi l'arco (x_1, x_3) sarà necessariamente negativo. Scegliamo allora il vertice tra x_1 e x_3 tale per cui l'arco con x_2 è negativo e lo posizioniamo nel gruppo B .

Eventualmente cambiando gli indici, assumiamo di aver posizionato il vertice x_2 in uno dei due gruppi. Inseriamo allora in tale gruppo tutti i vertici x_j tali per cui l'arco (x_2, x_j) sia positivo. I vertici rimanenti li inseriamo tutti nell'altro gruppo.

Dimostriamo che tale algoritmo produce due gruppi A e B con la proprietà cercata. Indicando come sopra con x_2 il primo vertice posizionato, dividiamo due casi:

1. se uno dei due gruppi è vuoto, allora la proprietà è banalmente vera, poiché tutti gli archi di \tilde{G} saranno positivi e così anche gli archi nell'unico gruppo presente. Infatti tutti gli archi del tipo (x_2, x_j) saranno positivi per costruzione. Invece gli archi del tipo (x_k, x_j) , con $k, j \neq 2$, saranno positivi perchè il ciclo $x_k x_2 x_j$ è composto da due archi positivi (che saranno (x_k, x_2) e (x_2, x_j)) e perciò per la proprietà di \tilde{G} anche il terzo dovrà essere positivo;
2. se $|A|, |B| \geq 1$, supponiamo, senza perdita di generalità, che $x_2 \in A$. Dividiamo allora altri due casi:
 - se $|A| = 1$, allora la cooperatività all'interno del gruppo A è banale (non ci sono archi). La competitività tra i gruppi A e B si ha per costruzione, perchè tutti gli archi che collegano l'unico elemento di A (che è x_2) agli elementi di B devono essere negativi. Mostriamo infine la cooperatività in B : se $|B| = 1$ è banale. Se $|B| \geq 2$, allora scelti comunque $x_j, x_k \in B$ abbiamo appena mostrato che gli archi (x_j, x_2) e (x_k, x_2) sono negativi. Perciò, visto che il ciclo $x_2 x_j x_k$ non può contenere tre archi negativi, l'arco (x_j, x_k) sarà necessariamente positivo. Si ha quindi la proprietà cercata;
 - se $|A| \geq 2$, dimostriamo la cooperatività di A : gli archi del tipo (x_2, x_j) , con $x_j \in A$, sono positivi per costruzione. Gli archi (x_j, x_k) , con $x_j, x_k \in A$ e $j, k \neq 2$ sono anch'essi positivi, perchè nel ciclo $x_j x_2 x_k$ ci sono due archi positivi ((x_j, x_2) e (x_2, x_k)) e perciò anche il terzo, che è (x_j, x_k) , dovrà essere positivo. Dimostriamo la competitività tra A e B : gli archi del tipo (x_2, x_l) , con $x_l \in B$, sono negativi per costruzione. Scelti allora due vertici $x_j \in A$ e $x_l \in B$, nel ciclo $x_j x_2 x_l$ sono presenti un arco positivo, che è (x_j, x_2) e un arco negativo, che è (x_2, x_l) . Si avrà perciò, per le proprietà di G , che il terzo arco, che è (x_l, x_j) , sarà negativo. Dimostriamo infine la cooperatività in B : scelti comunque due vertici $x_l, x_m \in B$, consideriamo il ciclo $x_l x_2 x_m$. Esso conterrà due archi negativi ((x_l, x_2) e (x_2, x_m)) e perciò il terzo, che è (x_l, x_m) , dovrà essere positivo.

Abbiamo quindi mostrato che la partizione costruita tramite l'algoritmo ha la proprietà richiesta. \square

Osservazione 3.14. La richiesta di avere la matrice Jacobiana con entrate non diagonali costantemente non nulle per un sistema cooperativo (o competitivo) è una forte limitazione. Infatti non è possibile formare più di due gruppi di agenti cooperativi all'interno del gruppo e competitivi con gli agenti esterni, come dimostrato nel seguente corollario.

Corollario 3.1. *Una qualunque partizione costituita da un numero di gruppi maggiore o uguale a tre, con la proprietà che due agenti nello stesso gruppo siano cooperativi e due agenti in gruppi diversi siano competitivi, non può rappresentare un sistema dinamico cooperativo rispetto ad una relazione d'ordine generata da un ortante di \mathbb{R}^n .*

Dimostrazione. Sia data una partizione degli agenti in tre gruppi (x_1, \dots, x_r) , (x_{r+1}, \dots, x_s) , (x_{s+1}, \dots, x_n) , con la proprietà contenuta nell'enunciato. Sup-

poniamo per assurdo che tale partizione rappresenti un sistema dinamico cooperativo rispetto ad un ortante di \mathbb{R}^n e costruiamo il grafo con segno relativo a tale partizione. Grazie alla supposizione fatta, sappiamo che in tale grafo ogni ciclo è positivo. Ma scelti comunque tre indici i, j, k tali che $1 \leq i \leq r$, $r+1 \leq j \leq s$, $s+1 \leq k \leq n$, il ciclo che congiunge x_i, x_j e x_k è formato da tre archi negativi, poichè i tre agenti appartengono a gruppi diversi. Questo è quindi un assurdo e perciò la partizione iniziale non può rappresentare un sistema dinamico cooperativo rispetto ad un ortante di \mathbb{R}^n .

Sia data invece una partizione formata da un numero di gruppi maggiore di tre. Possiamo allora sceglierne tre qualunque e applicare quanto detto sopra, concludendo quindi che nemmeno le partizioni di cardinalità maggiore di tre possono rappresentare sistemi dinamici cooperativi rispetto a ortanti di \mathbb{R}^n . \square

Dato un sistema dinamico $x' = F(x)$, con $x \in \mathbb{R}^n$, dopo aver verificato che è monotono rispetto ad una relazione d'ordine generata da un qualche ortante K_m di \mathbb{R}^n , come possiamo trovare l'ortante adeguato? Descriviamo ora un algoritmo che ci permette, attraverso la risoluzione di un sistema lineare, di individuare l'ortante corretto.

Sviluppiamo ora il caso cooperativo e, in caso il sistema fosse competitivo, si può applicare lo stesso algoritmo cambiando segno alla matrice Jacobiana del campo vettoriale (cambio di segno provocato dall'inversione del tempo per rendere il sistema cooperativo).

Definiamo, per gli $i < j$, la quantità s_{ij} nel modo seguente:

- $s_{ij} = 0$, se $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) > 0$, per qualche $x \in D$;
- $s_{ij} = 1$, se $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) < 0$, per qualche $x \in D$.

Tali quantità sono ben definite, poichè se il sistema $x' = F(x)$ è monotono, allora la matrice $JF(x)$ è di segno stabile e di segno simmetrica nel dominio D .

Consideriamo ora il sistema formato dalle $\frac{n(n-1)}{2}$ equazioni lineari nelle n incognite $m_i \in \{0, 1\}$ dato da: $m_i + m_j = s_{ij} \pmod{2}$. La soluzione di tali equazioni ci fornisce il vettore $m = (m_1, \dots, m_n)$ tale per cui il sistema $x' = F(x)$ risulta essere cooperativo rispetto a K_m .

È immediato osservare che, se m risolve il sistema, allora anche il vettore $m+1 \pmod{2}$ è soluzione, il che è corretto perchè le relazioni d'ordine parziale generate da K_m e da K_{m+1} sono equivalenti.

Esempio 3.3. Sia dato il sistema $x' = F(x)$, con $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, in cui gli agenti ammettono come partizione $(x_1, x_2), (x_3, x_4)$. La matrice dei segni

associata a tale sistema sarà quindi $\widetilde{JF} = \begin{pmatrix} 0 & + & - & - \\ + & 0 & - & - \\ - & - & 0 & + \\ - & - & + & 0 \end{pmatrix}$. Proviamo ora

a determinare, con l'algoritmo fornito sopra, rispetto a quale K_m tale sistema risulta essere cooperativo (o competitivo). Definiamo gli s_{ij} : si avrà $s_{12} = 0$, $s_{13} = 1$, $s_{14} = 1$, $s_{23} = 1$, $s_{24} = 1$ e $s_{34} = 0$. Le equazioni da risolvere saranno allora: $m_1 + m_2 = 0$, $m_1 + m_3 = 1$, $m_1 + m_4 = 1$, $m_2 + m_3 = 1$, $m_2 + m_4 = 1$ e $m_3 + m_4 = 0$. Dalla prima equazione si ricava che $m_1 = -m_2$. Sostituito nella seconda fornisce $-m_2 + m_3 = 1$. Unendo tale uguaglianza con la quarta equazione troviamo che $-m_2 + m_3 = m_2 + m_3 \Rightarrow m_2 = 0$. Ma allora anche

$m_1 = -m_2 = 0$ e di conseguenza deve aversi che $m_3 = m_4 = 1$. Perciò dato $m = (0, 0, 1, 1)$ tutte le equazioni sono soddisfatte (mod 2) e quindi il sistema $x' = F(x)$ è cooperativo rispetto a $K_{(0,0,1,1)}$.

3.3 Sistemi Dinamici Multipartiti

Come enunciato nel Corollario 3.1, le partizioni degli agenti formate da tre o più gruppi non possono rappresentare sistemi dinamici monotoni rispetto ad una relazione d'ordine generata da un ortante di \mathbb{R}^n . Per gli agenti, quindi, il fatto di soddisfare la stessa relazione d'ordine è molto stringente.

In questa sezione si daranno delle idee, degli esempi e degli spunti per eventuali lavori futuri, volti all'approfondimento dei sistemi dinamici multipartiti e delle adeguate relazioni d'ordine che essi possono soddisfare.

Quello che si potrebbe fare per indebolire le condizioni sui sistemi dinamici monotoni è definire due o più relazioni d'ordine, soddisfatte non da tutti gli agenti, ma solamente da una parte di essi. In questo modo si potrebbe quindi dividere il sistema in sotto-sistemi più piccoli, rendere essi monotoni con una adeguata relazione d'ordine, e poi ricostruire il comportamento del sistema iniziale tenendo conto delle restrizioni applicate ai singoli sotto-sistemi.

Esempio 3.4. Un esempio di quanto detto fin'ora è il seguente: consideriamo in \mathbb{R}^6 il sistema associato alla partizione in tre gruppi $(x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6)$. La

matrice dei segni associata a tale sistema sarà $\widetilde{JF} = \begin{pmatrix} 0 & + & - & - & - & - \\ + & 0 & - & - & - & - \\ - & - & 0 & + & - & - \\ - & - & + & 0 & - & - \\ - & - & - & - & 0 & + \\ - & - & - & - & + & 0 \end{pmatrix}$.

Grazie al Corollario 3.1 sappiamo che questo sistema non può essere monotono rispetto alle relazioni d'ordine generate da un ortante di \mathbb{R}^6 . Infatti il grafo \widetilde{G} associato ha al suo interno sia cicli positivi (ad esempio $x_1x_2x_3$) che cicli negativi (ad esempio $x_1x_3x_5$).

Possiamo però considerare i due sotto-sistemi formati dagli agenti (x_1, x_2, x_3, x_4) e (x_3, x_4, x_5, x_6) . In \mathbb{R}^4 questi due sistemi, ciascuno dei quali è partizionabile in soli due gruppi, possono essere resi monotoni con un'adeguata relazione d'ordine generata da un ortante di \mathbb{R}^4 . Tale relazione può essere determinata grazie all'algoritmo descritto nella sezione precedente.

Perciò considerando solamente gli agenti (x_1, x_2, x_3, x_4) , essi interagiranno tra loro rispettando le restrizioni date dal fatto che generano un sistema dinamico monotono. La stessa cosa vale per gli agenti (x_3, x_4, x_5, x_6) .

Il sistema formato dalle tre coppie $(x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6)$ potrebbe quindi venire descritto come unione di due sotto-sistemi monotoni e perciò il suo comportamento potrebbe essere dato dalla composizione dei singoli comportamenti dei due sotto-sistemi.

Consideriamo come esempio esplicito quello in cui il campo vettoriale F è

lineare, cioè dato da $F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$. Nella Figura

3.3 si può notare come la descrizione fatta per i quattro agenti in \mathbb{R}^4 nell'Esempio 2.2 possa essere parzialmente applicata per i due sotto-sistemi presi in considerazione precedentemente. Gli agenti x_1, x_2 tendono infatti a rimanere accoppiati, così come x_3, x_4 e x_5, x_6 , mentre le tre coppie tendono ad allontanarsi tra loro. Nella Figura 3.4 è invece raffigurato, sulla sinistra, il grafo con segno associato al sistema iniziale. Sulla destra, invece, è presente il grafo con segno che si costruisce grazie alle due relazioni d'ordine che rendono monotoni, in \mathbb{R}^4 , i due sotto-sistemi (x_1, x_2, x_3, x_4) e (x_3, x_4, x_5, x_6) . Gli archi tratteggiati sono quelli di cui si perde l'informazione studiando separatamente i due sotto-sistemi. Sono perciò quelli che si vorrebbe riuscire a ricostruire quando si compongono insieme i comportamenti dei due sotto-sistemi. Quindi, quello che si spera di ottenere è che la composizione dei due sotto-sistemi in \mathbb{R}^4 descriva in maniera completa il sistema in \mathbb{R}^6 .

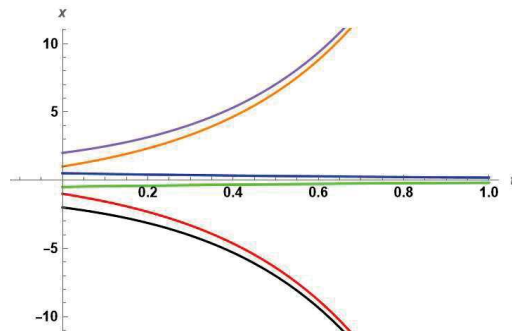


Figura 3.3: nel grafico, in ordine dal basso all'alto, è rappresentata l'evoluzione nel tempo (situato sull'asse orizzontale) dei valori delle coordinate x_1, \dots, x_6 dell'orbita del sistema con dato iniziale $x = (-2, -1, -0.5, 0.5, 1, 2)$.

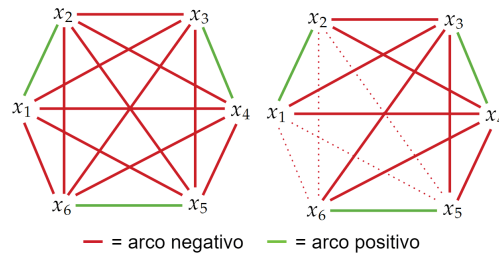


Figura 3.4: a sinistra il grafo completo del sistema in \mathbb{R}^6 . A destra il grafo parziale ricostruito con le relazioni sui sotto-sistemi in \mathbb{R}^4 .

Osservazione 3.15. Bisogna però notare che le relazioni d'ordine generate dagli ortanti di \mathbb{R}^4 , se viste come relazioni in \mathbb{R}^6 , perdono la loro proprietà di antisimmetria. Infatti indichiamo con \leq_m la relazione d'ordine sui primi quattro agenti, che grazie all'Esempio 3.3 sappiamo essere quella generata dall'ortante $K_{(0,0,1,1)}$. Si avrà che $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \leq_m (y_1, y_2, y_3, y_4) = y$ se e solo se $z_1 \leq y_1, z_2 \leq y_2, z_3 \geq y_3, z_4 \geq y_4$. Inoltre sappiamo che in \mathbb{R}^4 la relazione così definita è una relazione d'ordine, cioè è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Se però la immergiamo in \mathbb{R}^6 , tale relazione non lega in alcun modo la quinta e la sesta coordinata di due punti in \mathbb{R}^6 . Perciò potrebbe valere che $z \leq_m y$ e $z \geq_m y$, ma senza che $z = y$. Infatti, ad esempio, i punti $z = (1, 1, 1, 1, 0, 0)$ e $y = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ sono tali che $z \leq_m y$ e $z \geq_m y$, ma non è vero che $z = y$.

Trovando una soluzione al problema esposto nell'Osservazione 3.15 e capendo in che modo unificare tra loro due sotto-sistemi, si potrebbe quindi studiare, con un adeguato numero di relazioni d'ordine, ogni possibile raggruppamento degli agenti in \mathbb{R}^n .

Osservazione 3.16. Per fare in modo di descrivere completamente un sistema con più di due gruppi bisogna fare in modo che ogni gruppo di agenti "comunichi" con ogni altro. Questo significa che non possono esserci insiemi disgiunti di gruppi tali che non ci siano relazioni d'ordine che leghino due gruppi appartenenti a insiemi diversi.

Esempio 3.5. Un esempio di quanto detto nell'Osservazione 3.16 si può fare in \mathbb{R}^8 con il sistema descritto dalla seguente partizione a coppie: $(x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6), (x_7, x_8)$. Considerando i sotto-sistemi $(x_1, x_2, x_3, x_4), (x_5, x_6, x_7, x_8)$ essi possono essere dotati di un'adeguata relazione d'ordine, cioè quella generata dall'ortante $K_{(0,0,1,1)}$. Però, se ci si ferma a questo, non si ottiene una caratterizzazione completa del sistema iniziale, poichè non si sa in che modo interagiscano i due sotto-sistemi considerati e quale relazione essi rispettino. Per ovviare a questo problema si potrebbe aggiungere una terza relazione d'ordine sul terzo sotto-sistema formato da (x_3, x_4, x_5, x_6) in modo da "mettere in comunicazione" i due precedenti sotto-sistemi.

Osservazione 3.17. Si può quindi ipotizzare che per descrivere completamente un sistema in \mathbb{R}^{2n} formato da n coppie $(x_1, x_2), \dots, (x_{2n-1}, x_{2n})$ servano almeno $n - 1$ relazioni d'ordine.

Bibliografia

- [1] C. Altafini. “Consensus Problems on Networks With Antagonistic Interactions”. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 58.4 (2013), pp. 935–946. DOI: 10.1109/TAC.2012.2224251.
- [2] V. I. Arnold. *Ordinary Differential Equation*. Springer-Verlag, 1984.
- [3] F. Cucker e S. Smale. “Emergent Behavior in Flocks”. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 52.5 (2007), pp. 852–862. DOI: 10.1109/TAC.2007.895842.
- [4] J. K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. Krieger, 1980.
- [5] S. H. Saperstone. *Semidynamical systems in infinite dimensional spaces*. Springer-Verlag, 1981.
- [6] Hal L. Smith. *Monotone Dynamical Systems: an introduction to the theory of competitive and cooperative systems*. American Mathematical Society, 1995.