

UNIVERSITÀ DI PADOVA

---

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI" - DFA  
CORSO DI LAUREA IN ASTRONOMIA  
PROVA FINALE

**TECNICHE DI INTERFEROMETRIA  
INFRAROSSA  
A TRASFORMATA DI FOURIER**

*Tesi di laurea triennale*

**RELATORE:** CH.MO PROF. ARMANDO FRANCESCO BORGHESANI

**AUTRICE:** CHIARA DE GUGLIELMO

**NUMERO DI MATRICOLA:** 1220220

**E-MAIL:** CHIARA.DEGUGLIELMO@STUDENTI.UNIPD.IT

**Anno Accademico:**  
2023/24

---

## Abstract

In questo lavoro, rielaboriamo la teoria di base della Spettroscopia a Trasformata di Fourier (FTS) nell'ambito dell'astronomia e dell'astrofisica, focalizzandoci sulla stretta relazione tra la coerenza, l'analisi di Fourier e l'interferometria.

L'obiettivo è presentare, in modo chiaro e organizzato, la FTS come fulcro di tecniche avanzate e di fenomeni complessi, evidenziando le connessioni tra i suoi pilastri, nonché i limiti e le prospettive che attualmente offre alla ricerca.

Si fornisce un'analisi sia teorica, interpretando l'interferogramma come funzione di autocorrelazione del segnale e il suo cruciale rapporto con lo spettro di potenza, sia pratica, esaminando processi critici come l'apodizzazione e il campionamento. Entriamo nei meriti della teoria dell'Elaborazione del Segnale Digitale (DSP) per l'implementazione di algoritmi efficienti come la Trasformata Veloce di Fourier (FFT). Un'enfasi particolare viene posta sulla necessità per i fisici-astronomi di comprendere il funzionamento dei programmi spesso utilizzati in ambito applicativo come "scatole nere" e l'importanza di caratterizzare la coerenza tra campi elettromagnetici a diversi ordini tenendo conto della natura vettoriale della radiazione. Si indaga inoltre il ruolo della FFT alla luce delle tecnologie emergenti discutendo come l'avvento e l'integrazione dell'Intelligenza Artificiale (AI) nel campo dell'astronomia e della fisica abbia fatto emergere l'opportunità di facilitare la gestione e nell'analisi di grandi volumi di dati astronomici, il riconoscimento di pattern e la classificazione degli oggetti astronomici, migliorando l'efficienza delle osservazioni, permettendo una più accurata e sofisticata interpretazione dei fenomeni e, accelerando il processo di scoperta scientifica. Si inferisce infine che l'AI possa potenzialmente svelare le leggi fondamentali che governano l'universo.

Basandoci su un'ampia e ragionata analisi bibliografica della letteratura scientifica esistente, proponiamo una chiave di lettura critica e olistica della tematica. Sebbene i concetti e gli strumenti che tratteremo trovino impiego in una vastità molto maggiore di applicazioni, questa tesi si iscriverà preminentemente nel contesto della radioastronomia moderna, dove la FTS risulta particolarmente vantaggiosa rispetto agli spettrografi tradizionali, spingendo i confini della ricerca oltre gli attuali limiti sperimentali.

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
1.1	Ipotesi di lavoro e convenzioni . . . . .	7
<b>I</b>	<b>Interferometro di Michelson</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Apparato strumentale</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Vantaggi e svantaggi</b>	<b>9</b>
3.1	Vantaggi generali . . . . .	9
3.1.1	Il vantaggio di Fellgett (multiplex advantage) . . . . .	9
3.1.2	Il vantaggio di Jacquinot (throughput/étendue advantage) . . . . .	11
3.2	Vantaggi e svantaggi specifici . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Analisi di Fourier</b>	<b>13</b>
4.1	L'interferogramma come funzione di autocorrelazione del campo elettrico . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Apodizzazione</b>	<b>17</b>
5.1	Interferogramma prodotto da una sorgente monocromatica per $L$ infinito . . . . .	17
5.2	Spettro prodotto da una sorgente monocromatica per $L$ finito	18
5.3	Apodizzazione e risoluzione . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Campionamento</b>	<b>21</b>
<b>II</b>	<b>Tecniche computazionali</b>	<b>24</b>
<b>7</b>	<b>Tecniche computazionali classiche</b>	<b>24</b>
<b>8</b>	<b>Riconduzione alla DFT</b>	<b>25</b>
<b>9</b>	<b>DFT</b>	<b>27</b>
<b>10</b>	<b>FFT</b>	<b>29</b>
10.1	Algoritmo di Cooley-Tukey . . . . .	29
10.1.1	radix-2 DIT . . . . .	30
10.2	FFT e AI per la ricerca . . . . .	32

<b>11 FFT in Python</b>	<b>37</b>
11.1 Comprendere l'algoritmo FFT . . . . .	37
11.2 Programma per il calcolo diretto . . . . .	38
11.3 Programma FFT - versione semplice . . . . .	40
11.4 Programma FFT - versione Numpy Vettorizzata . . . . .	42
<b>III La coerenza</b>	<b>47</b>
<b>12 Coerenza</b>	<b>47</b>
12.1 Diversi tipi di radiazione . . . . .	48
12.2 Grado di coerenza del primo ordine . . . . .	49
12.3 Modelli di radiazione . . . . .	50
12.4 Interpretazione fisica di $ g^{(1)}(\tau) $ . . . . .	51
12.4.1 Visibilità . . . . .	51
12.4.2 Densità spettrale di potenza . . . . .	52
12.5 Grado di coerenza del secondo ordine . . . . .	55
12.6 Generalizzazione . . . . .	59
<b>A Dominio del tempo e della frequenza</b>	<b>60</b>
<b>B Teorema del campionamento</b>	<b>62</b>
B.1 Nyquist frequency & Nyquist rate . . . . .	62
B.2 Aliasing . . . . .	63
<b>C Esempio di applicazione</b>	<b>64</b>
C.1 Spettroscopia del segnale sonoro . . . . .	67
C.2 Filtraggio del segnale . . . . .	70
C.3 FFT inversa del segnale filtrato . . . . .	72
C.4 Effetto della funzione finestra . . . . .	73
C.5 Effetto del teorema del campionamento . . . . .	79
<b>D Intelligenza Artificiale, Machine Learning e Deep Learning</b>	<b>83</b>
<b>E Coerenza spaziale e temporale</b>	<b>88</b>
<b>F Visibilità interferometrica</b>	<b>90</b>
<b>G Limiti dell'interferometria astronomica</b>	<b>93</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>95</b>

SIMBOLO	SIGNIFICATO
$\sigma, \lambda$	numero d'onda, lunghezza d'onda
FTS	Fourier Transform Spectroscopy
FTI	Fourier Transform interferometry
FFT	Fast Fourier Transform
ZPD	Zero optical path difference o Zero path difference
OPD	Optical path difference
DFA	Dipartimento di fisica e Astronomia "Galileo Galilei"
SNR	Signal to Noise ratio
DSP	Digital Signal Processing
ILS	Instrumental line shape
FWHM	full width at half maximum
algoritmo C-T	algoritmo Cooley-Tukey
DFT	Discrete Fourier Transform
DTFT	Discrete Time Fourier Transform
DIT	decimation in time
DIF	decimation in frequency
effetto HB-T	effetto Hanbury-Brown e Twiss
$\sigma_{min/max}$	Minima/Massima lunghezza d'onda dello spettro
AI	Artificial intelligence
$\delta$	Differenza di cammino ottico
$\mathcal{O}$	O-grande
ANI	Artificial Narrow Intelligence
AGI	Artificial General Intelligence
ML	Machine Learning
DL	Deep Learning

Tabella 1: Legenda dei simboli e degli acronimi

# 1 Introduzione

Il nucleo centrale di questo studio è focalizzato sulla coerenza della luce nell'ambito dell'interferometria a Trasformata di Fourier, con particolare attenzione alle sue applicazioni nell'Astronomia e nell'Astrofisica.

La struttura della tesi si articola in tre parti fondamentali, che trattano le basi dell'interferometria:

- I Interferometro di Michelson;
- II DFT (Discrete Fourier Transform) e FFT (Fast Fourier Transform);
- III Il concetto di Coerenza.

**Parte I** Questa sezione si dedica a dimostrare che gli interferometri offrono vantaggi rispetto agli spettrometri dispersivi solo in specifiche condizioni. Verrà presentata una formulazione originale della dimostrazione dell'integrale fondamentale per la spettroscopia a trasformata di Fourier, e dimostreremo che l'interferogramma corrisponde alla funzione di autocorrelazione del campo elettrico. Nel contesto del filtraggio matematico, tratteremo il processo di apodizzazione, mostrando come questo influenzi negativamente la risoluzione spettrale. Inoltre, verrà illustrato come la convoluzione di spettri ideali con la forma strumentale di riga conduca alla formazione di spettri strumentali, dove l'effetto dello strumento si manifesta nell'allargamento delle righe. Sarà inoltre spiegato il vantaggio di campionare l'interferogramma a differenze di cammino ottico equidistanti e gli effetti di tale approccio sullo spettro risultante dalla trasformazione di un interferogramma campionato. Questo comporterà l'identificazione di una restrizione sulla dimensione massima dell'intervallo di campionamento.

**Parte II** Il calcolo della trasformata di Fourier dell'interferogramma per ottenere lo spettro ha rappresentato una delle maggiori sfide per la spettroscopia a trasformata di Fourier. Prima dello sviluppo dei moderni computer, molte applicazioni della FTS erano impraticabili. La Fast Fourier Transform è riconosciuta come uno degli algoritmi più influenti nell'elaborazione dei segnali e nell'analisi dei dati, tanto da essere stata selezionata come uno dei dieci algoritmi più impattanti sullo sviluppo e sulla pratica della scienza e dell'ingegneria nel XX secolo nel numero di gennaio/febbraio 2000 di *Computing in Science and Engineering*. Nonostante la sua ampia diffusione, molti scienziati utilizzano la FFT senza una piena comprensione del suo meccanismo di calcolo rapido della trasformata discreta di Fourier. In questa sezione,

si evidenzierà come il calcolo dello spettro possa essere ricondotto al calcolo di una trasformata di Fourier discreta. Verrà condotta un'analisi dettagliata dell'algoritmo FFT di Cooley-Tukey Decimation-In-Time (DIT) radix-2. Presenteremo diverse implementazioni in Python, con l'enfasi sulla necessità per gli scienziati di comprendere questo algoritmo quando utilizzano la FFT nelle loro ricerche. Presentiamo inoltre una discussione sull'impiego della Fast Fourier Transform e dell'AI nella ricerca scientifica. Questa sezione si propone di esaminare il ruolo fondamentale dell'interferometria a trasformata di Fourier nell'analisi spettrale dei segnali e di discutere come l'introduzione dell'AI sta rivoluzionando il modo in cui interpretiamo questi dati complessi. Approfondiamo l'importanza dell'AI nella facilitazione del riconoscimento di pattern, classificazione degli oggetti astronomici e previsione di fenomeni, tenendo in considerazione le sfide poste dalla qualità dei dati e dalla necessità di evitare bias e overfitting.

**Parte III** La comprensione della coerenza è di fondamentale importanza per i fisici-astronomi, in quanto permette di analizzare e interpretare le informazioni ottenute da fenomeni astronomici complessi. Questa conoscenza trova impiego in tecniche come l'interferometria, che gioca un ruolo cruciale nell'astronomia moderna, permettendo, ad esempio, imaging e spettroscopia ad alta risoluzione.

La ricerca sulla coerenza in fisica e astronomia è ancora in fase di sviluppo, come verrà illustrato nel paragrafo 12.6. Ad esempio, la coerenza spaziale della radiazione è un aspetto rilevante nello studio di oggetti astronomici in rotazione, quali i buchi neri. Tuttavia, gli effetti della ridotta coerenza spaziale delle fonti di radiazione astronomiche, come le stelle, sono ancora in gran parte sconosciuti, come evidenziato nel lavoro [1].

L'applicazione della teoria della coerenza nell'astronomia, in particolare attraverso tecniche come l'interferometria, è un campo in rapida evoluzione che richiede una comprensione sofisticata della coerenza.

L'obiettivo di questa parte della tesi è sviluppare una comprensione di base della coerenza. Ci concentreremo principalmente sulla coerenza temporale e sulle sue applicazioni in ambito astrofisico, sotto l'ipotesi del *teorema di Van Cittert-Zernike* per cui il fronte d'onda di una sorgente incoerente appare per lo più coerente a grandi distanze, distinguendo in appendice E la coerenza temporale dalla coerenza spaziale.

Il primo grado di coerenza,  $g^{(1)}(\tau)$ , fornisce una misura quantitativa della coerenza del campo elettrico ed è correlato alla densità spettrale di potenza normalizzata del campo tramite una trasformata di Fourier. Misurando  $g^{(1)}(\tau)$  a vari ritardi temporali  $\tau$ , è possibile ricostruire lo spettro in frequenza

della sorgente, una tecnica nota come spettroscopia a trasformata di Fourier. La visibilità delle frange del pattern d'interferenza è proporzionale a  $g^{(1)}(\tau)$ . Il secondo grado di coerenza,  $g^{(2)}(\tau)$ , offre una misura quantitativa della coerenza dell'intensità media e può essere collegata al grado di coerenza al primo ordine. Entrambi i gradi di coerenza trovano applicazioni di grande interesse in astrofisica e fisica delle particelle, come dimostrato dall'interferometro di Michelson e dall'interferometro di intensità, i cui principali limiti verranno evidenziati.

## 1.1 Ipotesi di lavoro e convenzioni

Data la complessità e vastità dell'argomento, è impraticabile trattarlo nella sua forma più generica e completa all'interno di una singola tesi. Pertanto, delineiamo le principali ipotesi che, pur non riflettendo esattamente la realtà, sono di utilità per facilitare l'analisi:

- Considereremo solamente situazioni ideali, omettendo le complicazioni sperimentali come la collimazione imperfetta dei raggi o la dispersione cromatica.
- In linea con le convenzioni adottate nella letteratura scientifica, nelle discussioni che seguiranno ometteremo le costanti moltiplicative. Questa pratica è comune in molti contesti analitici per semplificare le espressioni, assumendo che tali costanti siano implicitamente comprese o non rilevanti per l'analisi in corso.
- Adotteremo un insieme standardizzato di simboli e acronimi univocamente definiti in tutto l'elaborato ed elencati in tabella 1. Gli acronimi utilizzati derivano dalle corrispondenti terminologie in lingua inglese, le quali sono specificate nella suddetta tabella. Si raccomanda pertanto la consultazione di tale tabella per un'interpretazione corretta dei simboli e degli acronimi usati nel testo.

Nei casi in cui sia evidente, assumeremo di trovarci in una situazione particolare di un trattamento molto più ampio, mentre le specificazioni meno ovvie saranno esplicitamente dichiarate.



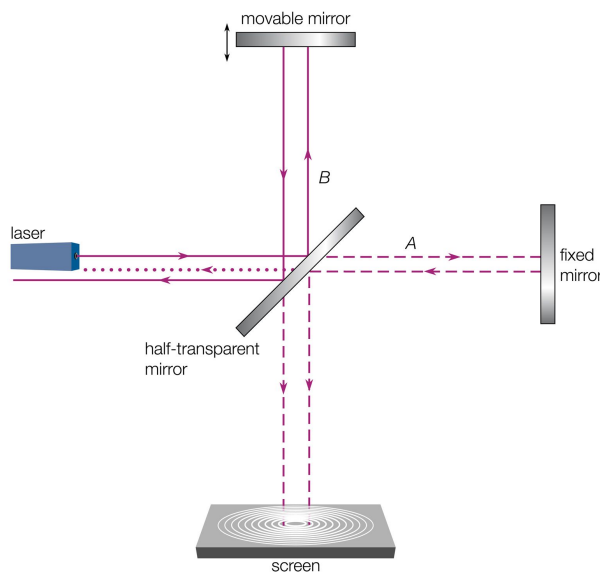
## Parte I

# Interferometro di Michelson

## 2 Apparato strumentale

L'apparato strumentale di riferimento è una versione minimale<sup>1</sup> dell'interferometro di Michelson. Questo è costituito da uno specchio semitrasparente, orientato a  $45^\circ$  rispetto al fascio collimato in ingresso. La radiazione viene divisa, attraverso un processo di divisione in ampiezza, in due parti uguali, indicate come *A* e *B*. Una parte (*A*) viene trasmessa verso uno specchio fisso, mentre l'altra parte (*B*) viene riflessa verso uno specchio mobile. Al ritorno, lo specchio semitrasparente divide nuovamente ciascuno dei fasci in due. Un detector rileva l'interferenza tra i fasci ricombinati al cambiare della posizione dello specchio mobile. Lo schema ottico di riferimento, illustrato nella figura 1, è tratto da Encyclopædia Britannica.

**L'interferogramma** Lo spostamento dello specchio mobile rispetto alla posizione origine (ZPD) introduce un ritardo temporale il quale comporta una determinata interferenza tra fasci. Convertendo il dominio temporale in una coordinata spaziale, l'apparato permette la misura dell'autocorrelazione temporale della radiazione ad ogni ritardo temporale scelto. L'intensità rilevata per una sorgente monocromatica esibisce un pattern cosinusoidale il cui periodo è determinato in maniera univoca dalla lunghezza d'onda della sorgente. L'interferogramma, ovvero l'intensità misurata in funzione della differenza di cammino ottico (OPD), è la somma sui contributi monocromatici. Median-



© 2010 Encyclopædia Britannica, Inc.

Figura 1: Schema ottico di un interferometro di Michelson minimale.

<sup>1</sup>Esistono numerose varianti di un interferometro di Michelson, che possono includere elementi come campioni che emettono in un certo angolo solido, collimatori, compensatori, lenti/specchi convergenti per focalizzare, filtri, e beamsplitter alternativi.

te l'analisi di Fourier dell'interferogramma, è possibile scomporre il segnale interferometrico e determinare l'intensità spettrale della sorgente.

## 3 Vantaggi e svantaggi

Possiamo sintetizzare i principali meriti e applicazioni degli spettrometri a trasformata di Fourier, ovvero spettrometri interferometrici, in termini di vantaggi rispetto agli spettrometri a dispersione<sup>2</sup>. Gli interferometri a Trasformata di Fourier possono offrire vantaggi significativi rispetto agli spettrometri dispersivi in determinate condizioni. Il riferimento principale per questa sezione è stato [2].

### 3.1 Vantaggi generali

#### 3.1.1 Il vantaggio di Fellgett (multiplex advantage)

Un interferometro riceve informazioni dall'intero range spettrale durante ogni istante, mentre un equivalente spettrometro a scansione riceve informazioni monocromatiche durante una frazione dell'intervallo di tempo disponibile per l'osservazione. Il tipo di rumore dominante determina il confronto tra il Rapporto Segnale su Rumore (SNR) dei due spettrometri.

Dato uno spettro broad-band tra i numeri d'onda  $\sigma_{max}$  e  $\sigma_{min}$  da misurare in un tempo  $T$  con una risoluzione  $\delta\sigma$ , il numero di elementi spettrali in questo intervallo  $\Delta\sigma$  è

$$M = \frac{\Delta\sigma}{\delta\sigma}$$

Dunque, uno spettrometro a scansione osserva la banda infinitesima  $\delta\sigma$  per un tempo  $\frac{T}{M}$  mentre un interferometro osserva nell'intervallo infinitesimo durante tutto il tempo  $T$ . Quindi il segnale integrato nel tempo ricevuto in  $\delta\sigma$  è proporzionale a  $\frac{T}{M}$  e a  $T$  rispettivamente.

---

<sup>2</sup>Gli spettrometri a dispersione scompongono la radiazione elettromagnetica in componenti monocromatiche attraverso l'uso di elementi dispersivi quali reticoli di diffrazione o prismi. Una categoria specifica di interferometri a dispersione è rappresentata dagli interferometri a scansione. Questi dispositivi sono progettati per registrare il segnale spettrale una lunghezza d'onda per volta.

**Rumore shot del detector** Se il rumore è detector-shot-noise<sup>3</sup> dominato, come tipicamente si verifica nella regione infrarossa (IR), allora è indipendente dal livello del segnale. Il rumore dello spettro in  $\delta\sigma$  è proporzionale al tempo di posa e quindi un interferometro produce un relativo incremento del SNR in ogni  $\delta\sigma$ , rispetto un interferometro a scansione, dell'ordine della radice di  $M$ :

$$(SNR)_{mono}^{det-noise} \propto \left(\frac{T}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (SNR)_{multiplex}^{det-noise} \propto (T)^{\frac{1}{2}}$$

(con la stessa costante di proporzionalità).

**Rumore shot di sorgente continua** Nel caso in cui rumore è source-shot-noise dominated, tipico del range visibile, essendo il rumore dominato dalle fluttuazioni statistiche del numero di fotoni emessi dalla sorgente, esso è proporzionale alla radice della potenza del segnale. Detta  $I_{\delta\sigma}$  l'intensità in  $\delta\sigma$ , per uno spettrometro a scansione il segnale registrato in  $\delta\sigma$  è proporzionale a  $\frac{T}{M} \cdot I_{\delta\sigma}$  e il rumore è proporzionale a  $\left(\frac{T}{M} \cdot I_{\delta\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Per un interferometro, il segnale nell'intervallo infinitesimo  $\delta\sigma$  dello spettro è proporzionale a  $T \cdot I_{\delta\sigma}$ . In una particolare posizione dello specchio mobile si registra il segnale composto che ha contributi da tutti i numeri d'onda tra  $\sigma_{max}$  e  $\sigma_{min}$ . Supponendo che in tutti gli  $M$  elementi l'intensità sia la stessa, questo segnale nell'interferogramma è dell'ordine di grandezza di  $M \cdot T \cdot I_{\delta\sigma}$ . Quindi, il rumore dell'interferogramma è circa  $(M \cdot T \cdot I_{\delta\sigma})^{\frac{1}{2}}$ . Trasformando il segnale composto in spettro, il rumore in ogni  $\delta\sigma$  rimane approssimativamente lo stesso rumore del segnale composto. La conseguenza è che, per uno spettro continuo broadband, assunto rettangolare per semplicità, il rumore associato allo spettro in  $\delta\sigma$  è proporzionale alla radice di  $M$  e compensa esattamente il guadagno. Al netto, non c'è alcun vantaggio:

$$(SNR)_{mono}^{source-noise} \propto \left(\frac{T}{M} \cdot I_{\delta\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (SNR)_{multiplex}^{source-noise} \propto \left(\frac{T}{M} \cdot I_{\delta\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}$$

---

<sup>3</sup>Un rumore shot è un tipo di rumore che può essere modellato con un processo di Poisson. La distribuzione di Poisson è la distribuzione limite dei risultati di esperimenti in cui si contano le occorrenze di eventi che capitano a caso (stocastici) e in modo indipendente gli uni dagli altri, ma con una media temporale definita. La deviazione standard della distribuzione è la radice del valore medio dei conteggi. Questa variazione nel numero di conteggi non è dovuta a incertezze strumentali/sistematiche per bassa precisione o bassa accuratezza nella misura, ma riflette il carattere intrinsecamente casuale del processo. Cf. [3] per maggiori dettagli. Per esempio, il numero di elettroni della dark current è proporzionale alla durata dell'osservazione, la fluttuazione statistica di tale misura è la radice del numero medio di conteggi.

**Rumore shot della sorgente nel caso di spettro discreto** Nel caso di spettri discreti (e.g., spettri atomici e molecolari), e photon-noise-limited, il confronto dei SNR spettrali può dipendere anche dalla lunghezza d'onda.

Per spettri discreti in emissione, al picco della linea di emissione una misurazione con monocromatore risulterà rumorosa, poiché il rumore è proporzionale alla radice quadrata del segnale. Per lo stesso motivo, la misura risulterà meno rumorosa alla base dello spettro. In una misurazione multiplex, tuttavia, il rumore in una data misurazione dello spettrogramma viene distribuito più o meno uniformemente attraverso lo spettro, indipendentemente dall'intensità del segnale locale. Pertanto, le misurazioni multiplex possono ottenere un SNR più elevato in corrispondenza delle righe in emissione ma risultare svantaggiose nelle regioni dello spettro dove il rumore shot da forti componenti in emissione sovrappone le componenti più deboli.

Per lo stesso principio, la situazione in assorbimento è rovesciata: se i segnali d'interesse sono righe in assorbimento allora un interferometro produrrà un aumento del rumore nelle valli delle righe in assorbimento rispetto al rumore di un monocromatore a scansione. Mentre, se si è interessati alle righe più deboli in assorbimento, l'Interferometria potrebbe risultare vantaggiosa in termini di SNR.

### 3.1.2 Il vantaggio di Jacquinot (throughput/étendue advantage)

Uno spettrometro a dispersione necessita di una slit d'entrata (ed, eventualmente, anche di una slit d'uscita). Sia la risoluzione che la potenza rilevata in una certa lunghezza d'onda dipendono da tale slit: la prima diminuisce, mentre la seconda aumenta, all'aumentare dell'apertura poiché slit più strette producono linee spettrali più fini (fino a un certo punto), ma restringono la quantità di radiazione che passa attraverso lo strumento. Anche se non sono necessarie delle slit, un interferometro ha dei slit-like limiti: un'apertura è necessaria per restringere la convergenza del fascio collimato nell'interferometro, e può essere necessaria anche al fine raggiungere un livello minimo di collimazione dei fasci nei due bracci per una data risoluzione. Conseguentemente, a parità di risoluzione e di lunghezza d'onda, un interferometro è in grado di acquisire una quantità di potenza superiore rispetto a quella raccolta da uno spettrometro a dispersione.

Anche il vantaggio di Jacquinot può essere espresso quantitativamente, ricorrendo al concetto di accettanza<sup>4</sup>. In un sistema ottico ideale la potenza

---

<sup>4</sup>L'accettanza (anche chiamata étendue o throughput) è una proprietà della radiazione in un sistema ottico, che esprime il grado di allargamento del fascio di raggi in termini di area e di angolo. Supponendo, per semplificare la spiegazione, che l'indice di rifrazione sia unitario, l'accettanza può essere definita indifferentemente ragionando dal punto di vista

e l'accettanza sono conservate. Se vige questo principio di conservazione tra ogni coppia di una serie di elementi ottici in successione, la radianza<sup>5</sup> emessa dalla sorgente è uguale a quella incidente sul detector. Ciò si realizza approssimativamente per un interferometro.

### 3.2 Vantaggi e svantaggi specifici

Elenchiamo alcuni vantaggi che seguono dai quelli di Fellgett e Jacquinot (sempre rispetto gli spettrometri tipici a grating):

- elevato potere risolutivo;
- accuratezza nelle lunghezze d'onda;
- riduzione della radiazione non voluta (stray light)<sup>6</sup>;
- brevi tempi di scansione;
- spettrografo potenzialmente in un largo range spettrale;
- costi degli strumenti ottici ridotti<sup>7</sup>;
- dimensione e peso ridotti<sup>8</sup>.

In appendice G approfondiamo alcuni dei principali limiti degli interferometri di Michelson e di intensità nell'ambito delle osservazioni astronomiche i quali, essendo strettamente legati ai primi due ordini di coerenza del campo elettrico, suggeriamo di leggere in seguito alla parte della tesi che concerne il concetto di coerenza.

---

della sorgente o del ricevitore. Dal punto di vista della sorgente ottica, viene definita come il prodotto dell'area della sorgente moltiplicata per l'angolo solido sotteso dalla pupilla di ingresso del sistema. Equivalentemente, dal punto di vista del sistema ottico, può essere ottenuta moltiplicando l'area della pupilla di ingresso per l'angolo solido da cui questa vede la sorgente. Questa definizione vale per elementi infinitesimi di area e di angolo solido. Per ottenere l'accettanza complessiva bisogna integrare sulla sorgente e sul diaframma.

<sup>5</sup>La radianza è la derivata della potenza rispetto all'accettanza.

<sup>6</sup>La radiazione involuta con una certa lunghezza d'onda produce un distinto pattern d'interferenza il quale comporta un contributo allo spettro identificabile.

<sup>7</sup>I costi dei sistemi informatici di gestione ed elaborazione dei dati ad alta velocità possono vanificare questo guadagno.

<sup>8</sup>E' fondamentale sottolineare l'importanza di questo aspetto nel campo dell'astronomia, in particolare, per satelliti, sonde e missioni spaziali che mirino ad effettuare misure interferometriche. In tali scenari, il peso e le dimensioni degli strumenti rappresentano parametri critici, i cui limiti possono influenzare significativamente la fattibilità e il successo delle missioni stesse.

## 4 Analisi di Fourier

Mostriamo una derivazione dell'equazione che permette di estrarre lo spettro dall'interferogramma. Il riferimento per questa sezione è stato [4].

**Definizione di integrale di Fourier** Sotto opportune condizioni di validità, una funzione  $f(x)$  può essere scritta

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-i2\pi yx} dy \equiv \mathcal{F}\{g(y)\}$$

e, nota  $f(x)$ , è possibile ottenere  $g(y)$  in modo univoco da

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i2\pi yx} dx \equiv \mathcal{F}^{-1}\{f(x)\}$$

Dove  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}^{-1}$  indicano rispettivamente la trasformata e l'antitrasformata integrale di Fourier<sup>9</sup>.

**Descrizione dei fasci** Un'onda piana monocromatica con numero d'onda  $\sigma$  e cammino ottico  $z$  può essere scritta come:

$$\epsilon_i(\sigma, z) = \epsilon_0(\sigma) \cos(2\pi\sigma z - \omega t) \quad (1)$$

Indichiamo con il pedice  $i$  le onde prima dell'interazione con il beam splitter (**iniziale**), mentre il pedice  $f$  viene usato per denotare le onde dopo il loro secondo incontro con il beam splitter (**finale**). La sovrapposizione di onde piane di diverse lunghezze d'onda e ampiezze  $\epsilon_0(\sigma)$  in un punto  $z$  risulta nell'onda di ampiezza:

$$E_i(z) = \frac{1}{\bar{\sigma}} \int_0^{+\infty} \epsilon_0(\sigma) \cos(2\pi\sigma z - \omega t) d\sigma$$

dove  $\bar{\sigma}$  è un opportuno numero d'onda e  $\epsilon_0(\sigma)/\bar{\sigma}$  può essere interpretata come una densità di ampiezza. Considerando la funzione integranda reale e pari, l'integrale può essere riformulato nel seguente modo:

$$E_i(z) = \frac{1}{2\bar{\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_0(\sigma) e^{i(2\pi\sigma z - \omega t)} d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{i,0}(\sigma) e^{i(2\pi\sigma z - \omega t)} d\sigma \quad (2)$$

---

<sup>9</sup>Questa formulazione può essere interpretata come un'estensione al continuo della rappresentazione di una funzione tramite una combinazione lineare di esponenziali complessi (serie di Fourier).

Questa formulazione mostra che la densità spettrale di ampiezza (funzione di  $\sigma$ ) è la trasformata di Fourier del campo elettrico totale (funzione di  $z$ ).

Dopo il primo incontro con il beam splitter ogni componente è divisa:

$$\begin{cases} \epsilon_A(\sigma, z_A) = t_b r_s r_b \epsilon_0(\sigma) \cos(2\pi\sigma z_A - \omega t) \\ \epsilon_B(\sigma, z_B) = r_b r_s t_b \epsilon_0(\sigma) \cos(2\pi\sigma z_B - \omega t) \end{cases}$$

dove  $t_b$ ,  $r_s$ ,  $r_b$  rappresentano i coefficienti di trasmissione e riflessione del beam splitter e dello specchio, assumendo che questi siano indipendenti dalla lunghezza d'onda. Attraverso passaggi analoghi, ciascuno dei fasci  $E_A(z)$  e  $E_B(z)$  può essere espresso formalmente come l'equazione 2 moltiplicata per i fattori  $t_b$ ,  $r_s$ ,  $r_b$ .

**Sovrapposizione dei fasci** Al rivelatore si ha la sovrapposizione di due onde coerenti separate da una differenza di fase  $\delta = z_B - z_A$ :

$$\begin{aligned} E_f(z) &= E_A(z) + E_B(z) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} t_b r_s r_b E_{i,0}(\sigma) (e^{i2\pi\sigma z_A} + e^{i2\pi\sigma z_B}) e^{-i\omega t} d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} t_b r_s r_b E_{i,0}(\sigma) (1 + e^{i2\pi\sigma\delta}) e^{i(2\pi\sigma z - \omega t)} d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E_f(\sigma, z) d\sigma \end{aligned}$$

Dove si è supposto  $z_A = z$ . Quindi, le componenti monocromatiche dell'onda finale sono:

$$E_f(\sigma, z) = t_b r_s r_b E_{i,0}(\sigma) (1 + e^{i2\pi\sigma\delta}) e^{i(2\pi\sigma z - \omega t)}$$

e l'intensità del campo elettromagnetico mediata nel periodo è

$$\bar{I}_f(\sigma, \delta) = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_f^*(\sigma, z) E_f(\sigma, z) = c \epsilon_0 |t_b r_s r_b|^2 E_{i,0}^2(\sigma) (1 + \cos(2\pi\sigma\delta))$$

dove  $\epsilon_0$  è la costante dielettrica del vuoto e  $c$  è la velocità della luce.

$$\begin{aligned} \bar{I}_f(\delta) &= \int_0^{+\infty} \bar{I}(\sigma, \delta) d\sigma = c \epsilon_0 |t_b r_s r_b|^2 \int_0^{+\infty} E_{i,0}^2(\sigma) (1 + \cos(2\pi\sigma\delta)) d\sigma \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \bar{I}_f(\sigma) (1 + \cos(2\pi\sigma\delta)) d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \bar{I}_f(\delta = 0) + 2 \int_0^{+\infty} \bar{I}_f(\sigma) \cos(2\pi\sigma\delta) d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \bar{I}_f(\delta = 0) + \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{I}_f(\sigma) e^{i2\pi\sigma\delta} d\sigma \end{aligned}$$

dove abbiamo posto  $\bar{I}_f(\sigma) = |t_b r_s r_b|^2 \bar{I}_i(\sigma) = |t_b r_s r_b|^2 \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_{i,0}^2(\sigma)$  e abbiamo utilizzato il fatto che l'intensità sia una funzione reale positiva.

$$\bar{I}_f(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \bar{I}_f(\delta) - \frac{1}{2} \bar{I}_f(\delta = 0) \right] e^{-i2\pi\sigma\delta} d\delta \quad (3)$$

Il risultato è l'equazione integrale fondamentale alla base della Spettroscopia a Trasformata di Fourier. Per determinare lo spettro completo, è necessario calcolare l'integrale per ogni lunghezza d'onda compresa nell'intervallo di interesse. In aggiunta, nel caso di interferometri simmetricamente configurati, emerge l'opportunità di applicare con pari efficacia sia la trasformata di Fourier complessa che la trasformata-coseno di Fourier.

Questa dimostrazione, formulata attraverso l'integrazione di diverse fonti, espone in modo preciso i risultati attesi dalle misurazioni in un contesto ideale. Risulterebbe pertanto di rilevante interesse procedere con una verifica sperimentale della consistenza di questi passaggi.

**Interferometro e coerenza**  $\frac{1}{2} \bar{I}_f(\delta = 0)$  è l'intensità misurata a  $\delta$  grandi rispetto alla lunghezza di coerenza della radiazione. L'interazione incoerente tra i due fasci produce un'intensità che è la metà dell'intensità per un'interferenza coerente a  $\delta = 0$ <sup>10</sup>. Quindi possiamo riscrivere l'interferogramma

$$\left[ \bar{I}_f(\delta) - \frac{1}{2} \bar{I}_f(0) \right] = [\bar{I}_f(\delta) - \bar{I}_f(\infty)]$$

la quale mostra che l'interferogramma è la fluttuazione del segnale attorno al livello del segnale incoerente che si ottiene a OPD significativamente maggiori della lunghezza di coerenza. Se il segnale rilevato in funzione dello spostamento dello specchio è affetto da una costante<sup>11</sup> additiva  $\Delta \bar{I}$ , il pattern d'interferenza è traslato, e l'interferogramma risulta:

$$[\bar{I}(\delta) - \bar{I}(\infty)] = [\bar{I}(\delta) + \Delta \bar{I}] - [\bar{I}(\infty) + \Delta \bar{I}] \quad (4)$$

La formulazione dell'equazione 4 suggerisce che l'interferogramma effettivo possa essere ridefinito in termini della variazione del segnale,  $[\bar{I}(\delta) + \Delta \bar{I}]$ , intorno all'asintoto  $[\bar{I}(\infty) + \Delta \bar{I}]$  per spostamenti significativi dello specchio. Tale considerazione assume un'importanza rilevante in ambito applicativo.

<sup>10</sup>Perché l'intensità di  $s$  onde identiche con campo  $E$  che interferiscono coerentemente è proporzionale a  $s^2 E^2$ ; mentre è proporzionale a  $s E^2$  se interferiscono incoerentemente.

<sup>11</sup>Possono esserci diverse fonti di errore indipendenti dallo spostamento dello specchio mobile, ad esempio, un allineamento non ottimale dell'interferometro o la presenza di un flusso costante di radiazione sul detector.



**Applicabilità** La fisica e la matematica coinvolta nella derivazione dell'equazione 3 non dipende dalla da come la fase  $2\pi\sigma\delta$  fosse ottenuta. Tale equazione vale sia per interferometria a divisione d'ampiezza che per interferometri che dividono il fronte d'onda. Entrambi i tipi di strumento introducono in maniera controllata una OPD tra due onde. Tuttavia, l'equazione 3 non si applica per interferometri asimmetrici.

## 4.1 L'interferogramma come funzione di autocorrelazione del campo elettrico

La funzione di autocorrelazione del campo elettrico è per definizione

$$\mathcal{ACF}(E(z)) = E(z) \star E(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} E^*(z)E(z + \delta) dz$$

dove  $*$  indica l'operazione di coniugazione. Quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{ACF}(E(z))) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} E^*(z)E(z + \delta) dz \right] e^{-i2\pi\sigma\delta} d\delta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E^*(z) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} E(z + \delta)e^{-i2\pi\sigma\delta} d\delta \right] dz \end{aligned}$$

l'integrale interno è

$$\left[ \int_{-\infty}^{+\infty} E(z + \delta)e^{-i2\pi\sigma\delta} d\delta \right] = e^{i2\pi\sigma z} \mathcal{F}(E(z)) = e^{i2\pi\sigma z} E_0(\sigma)$$

quindi

$$\mathcal{F}(\mathcal{ACF}(E(z))) = E_0(\sigma) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} E(z)e^{-i2\pi\sigma z} dz \right]^* = E_0(\sigma)E_0^*(\sigma)$$

Quindi, a meno di costanti moltiplicative, abbiamo ottenuto

$$\boxed{\mathcal{F}(\mathcal{ACF}(E(z))) = E_0(\sigma)E_0^*(\sigma) = \bar{I}(\sigma)} \quad (5)$$

Questa equazione, che rappresenta un esempio specifico del più generale *teorema di Wiener-Khinchin*, mostra che la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione del campo elettrico corrisponde allo spettro. Siccome anche la trasformata di Fourier dell'interferogramma è lo spettro, ne consegue che l'interferogramma coincide con la funzione di autocorrelazione del campo elettrico.

**Significato fisico** L'equazione 5 rivela il fenomeno fisico sottostante la FTS. Nel campo della teoria dell'elaborazione dei segnali, la correlazione incrociata è una misura della correlazione di due segnali in funzione dello sfasamento di uno rispetto all'altro. In particolare, l'autocorrelazione, ovvero la cross-correlazione di un segnale con se stesso, fornisce una misura quantitativa della coerenza, in questo caso temporale, del segnale in esame. Il concetto di coerenza, come terzo pilastro della FTS, sarà approfondito nella parte III.

## 5 Apodizzazione

Discutiamo la trattazione matematica dell'interferogramma per la modifica dello spettro. Dal momento in cui l'equazione integrale di base per la spettroscopia a Trasformata di Fourier è definita su un intervallo d'integrazione illimitato e i limiti sperimentali per la OPD sono finiti, sono necessarie delle modifiche alla teoria del calcolo dello spettro delineata per l'uso pratico dell'equazione 3. La procedura correttiva per modificare l'integrale è chiamata apodizzazione e consiste tipicamente nel moltiplicare l'interferogramma per una funzione, detta funzione di apodizzazione<sup>12</sup>. La principale funzione di apodizzazione utilizzata a scopo illustrativo è la funzione triangolare. Tuttavia, è imperativo sottolineare l'esistenza di una molteplicità di altre funzioni di apodizzazione, come enfatizzeremo nella sezione 9. Prima di procedere, facciamo presente che dati non sempre sono apodizzati. A volte, le caratteristiche spettrali sono così distinte che i lobi laterali non sono importanti e, come si vedrà, l'apodizzazione allarga le righe, il che rende più difficile osservare caratteristiche spettrali sottili.

Una buona referenza che concerne l'apodizzazione è [5].

### 5.1 Interferogramma prodotto da una sorgente monocromatica per $L$ infinito

Poniamo la seguente questione: "Qual è la forma dell'interferogramma generato da una sorgente monocromatica?" Ricordando che l'interferogramma è

---

<sup>12</sup>L'apodizzazione (dal greco, "togliere il piede"), in generale, è la modifica di una funzione matematica. E' un termine appropriato perché, in questo ambito, è una procedura usata per attenuare o rimuovere i falsi lobi laterali artefatti, i quali possono essere introdotti nello spettro a causa della naturale limitazione dello spostamento massimo dello specchio mobile. In ottica, viene spesso utilizzato per eliminare i lobi dei dischi di Airy causati dalla diffrazione attorno ad un picco di intensità.

l'antitrasformata dello spettro,

$$\left[ \bar{I}(\delta) - \frac{1}{2} \bar{I}(\delta = 0) \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{I}(\sigma) e^{i2\pi\sigma\delta} d\sigma$$

Una sorgente monocromatica, che emetta radiazione con numero d'onda  $\sigma_1$ , produce l'interferogramma

$$\left[ \bar{I}(\delta) - \frac{1}{2} \bar{I}(\delta = 0) \right] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \tilde{\delta}(\sigma - \sigma_1) + \tilde{\delta}(\sigma + \sigma_1) \right] e^{+i2\pi\sigma\delta} d\sigma$$

dove le due funzioni delta di Dirac sono usate per assicurare la conservazione dell'energia convertendo l'interferogramma in spettro. Si ottiene quindi

$$\left[ \bar{I}(\delta) - \frac{1}{2} \bar{I}(\delta = 0) \right] = 2 \cos(2\pi\sigma_1\delta)$$

Il che significa che una singola riga spettrale produce un interferogramma cosinusoidale e viceversa.

## 5.2 Spettro prodotto da una sorgente monocromatica per L finito

Invertendo la domanda precedentemente posta, ci interroghiamo: "Qual è lo spettro di una sorgente monocromatica che risulta dalla trasformata di Fourier di un interferogramma caratterizzato da una differenza di cammino ottico massima finita?" L'effetto di una scansione da  $\delta = -L$  a  $\delta = L$  è ottenuto analiticamente integrando su tale intervallo finito. Sostituendo l'interferogramma di una sorgente monocromatica  $2\cos(2\pi\sigma_1\delta)$  moltiplicato per la funzione finestra rettangolare<sup>13</sup> nell'equazione 3, usando la formula di Eulero e notando che l'integrale di una funzione dispari è nullo, si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{I}(\sigma) &= \int_{-L}^{+L} [\cos(2\pi(\sigma_1 + \sigma)\delta) + \cos(2\pi(\sigma_1 - \sigma)\delta)] d\delta \\ &= 2L \left[ \frac{\sin[2\pi(\sigma_1 + \sigma)L]}{2\pi(\sigma_1 + \sigma)L} + \frac{\sin[2\pi(\sigma_1 - \sigma)L]}{2\pi(\sigma_1 - \sigma)L} \right] \end{aligned}$$

Trascurando il primo termine in quanto piccolo rispetto al secondo intorno a  $\sigma = \sigma_1$  otteniamo lo spettro compiuto attraverso la trasformata su un intervallo largo  $2L$ :

$$\bar{I}(\sigma) \approx 2L \frac{\sin \gamma}{\gamma} = 2L \text{sinc } \gamma \quad (6)$$

<sup>13</sup>Unitaria sull'intervallo, nulla altrove.

dove  $\gamma = 2\pi(\sigma_1 - \sigma)L$ . La funzione  $2L\text{sinc}\gamma$  è detta profilo strumentale (*ILS*) poiché è lo spettro artificioso di una sorgente monocromatica che riflette le conseguenze di una scansione finita.

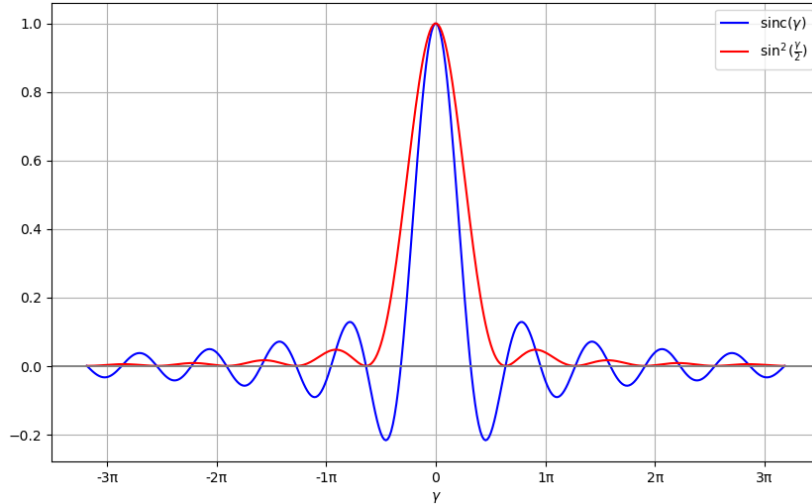


Figura 2: Grafici di  $\text{sinc}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)$  e di  $\text{sinc}\gamma$

Il grafico della funzione seno cardinale è riportato in figura 2. I lobi laterali (o piedi), mostrano un declino del 22% al di sotto dello zero. Sebbene possa essere accettabile considerare il picco di larghezza finita come una approssimazione di una banda infinitamente stretta, i lobi possono generare contributi energetici apparenti in lunghezze d'onda adiacenti. Per mitigare questa fonte di errore, si adotta il processo di apodizzazione che mira a ridurre la dimensione dei lobi.

### 5.3 Apodizzazione e risoluzione

Scegliamo di correggere l'interferogramma moltiplicandolo per la funzione triangolare  $\Lambda = \left(1 - \frac{|\delta|}{L}\right)$ :

$$\bar{I}(\sigma) = 2 \int_{-L}^{+L} \left[1 - \frac{|\delta|}{L}\right] \cos(2\pi\sigma_1\delta) e^{-2\pi\sigma\delta} d\delta$$

attraverso qualche passaggio, e trascurando il termine  $\cos(2\pi(\sigma_1 + \sigma)\delta)$  perché porta a un integrale piccolo, otteniamo

$$\bar{I}(\sigma) \approx L \text{sinc}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad (7)$$

Il grafico in figura 2 mostra che i piedi sono stati ridotti di circa un fattore quattro e le intensità negative sono state eliminate. La larghezza è leggermente cresciuta, ma non esageratamente.

Facciamo alcune osservazioni per evidenziare che l'apodizzazione deve essere effettuata con criterio: scegliendo una funzione finestra massima a  $\delta = 0$  e decrescente all'aumentare di  $|\delta|$ , si assegna un peso maggiore ai dati caratterizzati da SNR più elevati. Inoltre, il processo di apodizzazione ha delle ripercussioni sulla risoluzione dello spettro, come discuteremo in seguito. Infatti, se consideriamo unitaria la larghezza a metà altezza (FWHM) dello spettro non apodizzato, allora la FWHM cresce di un fattore 1.48 se l'interferogramma è apodizzato con la funzione triangolare. Ovvero, la riga risulta il 48% più larga.

In generale, lo spettro apodizzato con una funzione finestra dipendente dal parametro  $L$  è

$$\bar{I}_{apod}(\sigma) = \int_{-L}^{+L} A_L(\delta) \left[ \bar{I}(\delta) - \frac{1}{2}\bar{I}(\delta = 0) \right] e^{-i2\pi\sigma\delta} d\delta$$

Tale spettro apodizzato dovrebbe fornire una rappresentazione più fedele dello spettro effettivo della sorgente, in confronto a quello ottenuto tramite l'impiego di una funzione finestra rettangolare

$$\bar{I}_{rettang}(\sigma) = \int_{-L}^{+L} \left[ \bar{I}(\delta) - \frac{1}{2}\bar{I}(\delta = 0) \right] e^{-i2\pi\sigma\delta} d\delta$$

Per il teorema della convoluzione, lo spettro ottenuto da una scansione su intervallo limitato non è altro che la convoluzione della trasformata di Fourier della funzione rettangolare, ovvero il profilo strumentale, con lo spettro ottenuto dalla scansione su un intervallo illimitato:

$$\bar{I}_{rettang}(\sigma) = \bar{I}_{unapod}(\sigma) * ILS(\sigma)$$

**Risoluzione** La risoluzione di uno spettrografo a trasformata di Fourier dipende dalla massima differenza di cammino ottico usata per ottenere l'interferogramma. La tabella 2 riporta i valori delle larghezze delle righe in spettri ottenuti da interferogrammi su intervalli finiti e trattati con un processo di apodizzazione. La risoluzione è la separazione minima tra due punti distinguibili dal sistema ottico. Secondo il *criterio di Rayleigh*, due righe di uguale intensità sono risolte finché il massimo principale di una non supera il primo minimo dell'altra in vicinanza. Supponendo che il profilo delle righe sia dato dalle equazioni 7 e 6, si ricavano analiticamente la larghezza a metà altezza e la risoluzione lineare parametrizzate da  $L$ . Accenniamo al fatto che

la dimensione della sorgente può, in certe condizioni, essere il fattore limitante alla risoluzione. Inoltre, dal momento in cui l'interferogramma decresce con l'aumentare della differenza di cammino ottico, ci sarà un  $\delta$  in cui il rapporto SNR crolla al di sotto dell'unità. Registrare l'interferogramma per differenze di cammino ottico più grandi comporta solo la crescita del rumore nello spettro compiuto e non aumenta la risoluzione. Ne consegue che anche la coerenza e l'intensità del segnale possono essere fattori determinanti la scelta di  $L$ , e quindi la risoluzione.

	eq. 6 (apodizz. rettangolare)	eq. 7 (apodizz. triangolare)
FWHM	$0.6/L$	$0.9/L$
$R_{Rayleigh}$	$1/(2L)$	$1/L$

Tabella 2: La FWHM e la Risoluzione di Rayleigh della riga nei casi di apodizzazione con la funzione triangolare e rettangolare.

## 6 Campionamento

Se si registra l'interferogramma solo a incrementi di cammino ottico  $\Delta\delta$  uguali, allora può esserci un considerevole guadagno di tempo rispetto campionare in modo continuo. Infatti, se si registra in modo continuo, si può spendere più tempo tra una registrazione e l'altra piuttosto che nell'effettiva raccolta del segnale. Con un campionamento discreto, il tempo guadagnato da rapidi step dello specchio mobile si possono investire nel tempo di raccolta, aumentando quindi il SNR. Assumiamo che uno degli step coincida perfettamente con l'origine e che l'interferogramma sia perfettamente simmetrico.

La relazione matematica che sussiste tra l'interferogramma continuo  $F_c(\delta)$  =  $[\mathcal{I}(\delta) - \mathcal{I}(\infty)]_c$  e l'interferogramma campionato  $F_s(\delta) = [\mathcal{I}(\delta) - \mathcal{I}(\infty)]_s$  è

$$F_s(\delta) = \Psi\left(\frac{\delta}{\Delta\delta}\right) F_c(\delta)$$

dove la funzione di Saha è definita

$$\Psi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\delta}(x - n)$$

con  $\tilde{\delta}$  funzione Delta di Dirac e  $n$  un numero intero. Quindi la funzione  $\Psi\left(\frac{\delta}{\Delta\delta}\right)$  restringe  $F_s(\delta)$  sui valori  $\delta = 0, \pm\Delta\delta, \pm2\Delta\delta, \dots$ . Lo spettro ottenuto

da un campionamento è per definizione

$$\bar{I}_c(\sigma) = \mathcal{F}(F_s(\delta))$$

da cui, si dimostra, risulta

$$\bar{I}(\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{I}_c[\sigma - n(\Delta\sigma)] \quad (8)$$

dove  $\Delta\sigma = 1/\Delta\delta$ . Quindi la trasformata di Fourier dell'interferogramma campionato risulta nello spettro completo ogni volta che  $\sigma$  eguaglia  $n(\Delta\sigma)$  per tutti gli interi  $n$ . Ossia, si ottengono repliche dello spettro che iniziano ai numeri d'onda  $\{n\Delta\sigma\}$ , per  $n \in \mathbb{Z}$ . Se le copie non si sovrappongono allora non c'è alcun problema nell'identificare lo spettro dal suo inizio  $\sigma_{min}$  alla sua fine  $\sigma_{max}$ . L'eventuale sovrapposizione (*aliasing*) dipende dalla dimensione di  $\Delta\sigma$ . Affinché le copie siano separate, è necessario che l'intervallo di campionamento  $\Delta\sigma$  sia sufficientemente piccolo.

Lo spettro ottenuto dall'interferogramma su intervallo illimitato è simmetrico rispetto all'origine. Analogamente, dall'interferogramma campionato si ottiene uno spettro simmetrico rispetto  $\sigma = 0, \pm\Delta\sigma, \pm2\Delta\sigma, \dots$ . Ne consegue che per evitare che la testa di una copia si sovrapponga con l'immagine negativa della copia successiva bisogna imporre un limite superiore all'intervallo di campionamento:

$$\Delta\delta \leq \frac{1}{2(\sigma_{max} - \sigma_{min})} \quad (9)$$

Soddisfatta questa condizione, il campionamento non comporta la perdita di informazioni ma permette di risparmiare tempo.

**Significato analitico** Facendo un passo indietro per inquadrare l'eq. 8 in un contesto più ampio, possiamo tracciare un altro collegamento chiave tra le varie parti di questa tesi. Notare che lo spettro ottenuto attraverso un processo di campionamento dell'interferogramma su intervallo illimitato (eq. 8) è formalmente una Trasformata di Fourier a Tempo Discreto (DTFT) apre le porte all'opportunità di determinare lo spettro attraverso gli efficienti metodi della teoria dell'elaborazione dei segnali digitali stabilendo una corrispondenza tra lo spettro campionato su un intervallo, questa volta finito, e la trasformata Discreta di Fourier (DFT). Tale osservazione, approfondita nella sezione 9, spiega l'emersione naturale di una restrizione sulla lunghezza

massima dell'intervallo di campionamento. Infatti, l'equazione 9 rappresenta una manifestazione del *Teorema di Nyquist-Shannon*, dettagliatamente esposto nell'appendice B, il quale è intrinsecamente implicato nei processi di campionamento.



## Parte II

# Tecniche computazionali

## 7 Tecniche computazionali classiche

Mostriamo due tecniche di calcolo dirette, convenzionali. Per un interferogramma double-side<sup>14</sup> campionato a intervalli equispaziati, lo spettro scritto in una forma adatta per computazioni numeriche è

$$\bar{I}(\sigma) = \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} A(j\Delta\delta) [\bar{I}(j\Delta\delta) - \bar{I}(\infty)] e^{-i2\pi\sigma j\Delta\delta}$$

dove  $\Delta\delta = 2L/N$ ,  $L$  è la massima differenza di cammino ottico dallo ZPD e  $A(j\Delta\delta)$  è la funzione di apodizzazione. Il primo passo consiste nel sottrarre  $\bar{I}(\infty)$  da ogni valore  $\bar{I}(j\Delta\delta)$  misurato<sup>15</sup> e moltiplicare per la funzione di apodizzazione. Si ottiene

$$\mathcal{S}(j) \equiv A(j\Delta\delta) [\bar{I}(j\Delta\delta) - \bar{I}(\infty)]$$

e bisogna calcolare

$$\bar{I}(\sigma) = \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} \mathcal{S}(j) e^{-i2\pi\sigma j\Delta\delta} \quad (10)$$

$\mathcal{S}(j)$  è una funzione reale dal momento in cui l'interferogramma è una funzione reale. Tipicamente, si ha un set di numeri d'onda  $\sigma_k$  per il quale si vuole calcolare  $\bar{I}(\sigma_k)$  dall'equazione 10. Questo può essere fatto in due modi.

Il primo modo consiste nel prendere  $\mathcal{S}(j)$  e calcolare il suo contributo  $\mathcal{S}(j) \exp(-i2\pi\sigma j\Delta\delta)$  ai valori  $\bar{I}(\sigma_k)$  per tutti i  $\sigma_k$ ; Un altro modo è tenere  $\sigma_k$  fissato e calcolare la sommatoria per ogni  $\sigma_k$  uno alla volta.

Il primo metodo è usato per analisi in tempo reale perché in questo caso  $\mathcal{S}(j)$  è disponibile sequenzialmente nel tempo come le misure di  $\bar{I}(j\Delta\delta)$  vengono effettuate. Se il computer è collegato direttamente allo spettrometro allora può calcolare il contributo di ogni  $\mathcal{S}(j)$  a  $\bar{I}(\sigma_k)$  mentre aspetta la misurazione dei valori successivi. Se la trasformazione di Fourier viene compiuta off-line, allora tipicamente l'equazione 10 viene calcolata per ogni  $\sigma_k$

<sup>14</sup>Anche detto bi-directional, significa che i dati sono raccolti per spostamenti dello specchio mobile in entrambi i versi.

<sup>15</sup>Il valore medio dell'interferogramma  $\frac{1}{N} \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} \bar{I}(j\Delta\delta)$  è una buona approssimazione di  $\bar{I}(\infty)$ .

in successione. Per farlo, si separa parte reale ed immaginaria

$$\bar{I}(\sigma) = \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} \mathcal{S}(j) \cos(2\pi\sigma j\Delta\delta) - i \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} \mathcal{S}(j) \sin(2\pi\sigma j\Delta\delta)$$

Sappiamo che  $\bar{I}(\sigma)$  dovrebbe essere reale e, se la sommatoria che fattorizza l'indice immaginario non dovesse annullarsi per tutti i  $\sigma$ , sarebbe dovuto a errori di fase<sup>16</sup>, che non tratteremo. Esistono due alternative per il calcolo dei seni e coseni. Il primo consiste nel tabulare i valori del seno e del coseno per un periodo e sfruttare la periodicità delle funzioni trigonometriche per ridurre tutti gli argomenti al primo periodo nel caso in cui i  $\sigma_k$  siano equispaziati  $\sigma_k = k\Delta\sigma$ . Alternativamente, si possono calcolare le funzioni trigonometriche per ogni argomento. Per ridurre tempo di calcolo, è possibile usare la formula ricorsiva di Chebyshev [2]:

$$\begin{aligned} \sin[(n+1)\Delta x] &= 2\sin(n\Delta x)\cos(\Delta x) - \sin[(n-1)\Delta x] \\ \cos[(n+1)\Delta x] &= 2\cos(n\Delta x)\cos(\Delta x) - \cos[(n-1)\Delta x] \end{aligned}$$

Errori di arrotondamento cumulativi richiedono il calcolo di un nuovo coseno e seno periodicamente.

Il metodo di computazione convenzionale ha il vantaggio che è possibile scegliere il numero d'onda in cui lo spettro deve essere calcolato senza dover accettare un intervallo di numeri d'onda tra i punti fissato. Questo è uno dei motivi per cui questo metodo è raccomandato quando si desiderano solo poche lunghezze d'onda dello spettro.

## 8 Riconduzione alla DFT

Procediamo con un'ulteriore semplificazione della notazione esposta in 10. L'obiettivo è riorganizzare l'equazione in modo tale da facilitare il calcolo della trasformata di Fourier dell'interferogramma, permettendo così un'applicazione diretta della Trasformata Discreta di Fourier.

L'equazione 10, scritta per  $\sigma_k = k\Delta\sigma$ <sup>17</sup>, diventa

$$\bar{I}(k\Delta\sigma) = \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} \mathcal{S}(k\Delta\sigma) e^{-i2\pi k\Delta\sigma j\Delta\delta} \quad (11)$$

<sup>16</sup>Ci si riferisce a tutti quegli errori strumentali, come mal-posizionare l'origine  $\delta = 0$  dell'interferogramma o non allineare correttamente lo strumento, che possono essere espressi come una fase eventualmente dipendente dal  $\sigma$  e/o dalla OPD.

<sup>17</sup>Attraverso un procedimento di interpolazione, si possono stimare i valori dello spettro tra i punti ottenuti. Una procedura d'interpolazione potrebbe essere più veloce del calcolo della trasformata per una spaziatura minore [2].

Il massimo step di OPD per il campionamento (eq. 9) è, con  $\sigma_{min} = 0$ ,

$$\Delta\delta = \frac{1}{(2\sigma_{max})} \quad (12)$$

per  $N/2$  punti nello spettro abbiamo

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_{max}}{N/2} = \frac{1}{2L} \quad (13)$$

la seconda uguaglianza si ottiene sostituendo  $\sigma_{max}$  data dall'equazione 12 e ricordando che  $\Delta\delta = (2L)/N$ .

Siccome la risoluzione è data da (tab. 2),

$$R_{Rayleigh} = \frac{1}{2L}$$

lo step nello spettro è anche la risoluzione. Combinando le equazioni, otteniamo  $(\Delta\delta)(\Delta\sigma) = 1/N$  che sostituiamo nella 11 denotando  $I(k\Delta\sigma)$  con  $I(k)$  e  $\mathcal{S}(j\Delta\delta)$  con  $\mathcal{S}(j)$ :

$$\bar{I}(k) = \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} \mathcal{S}(j)e^{-i2\pi kj/N}$$

Risulta conveniente eliminare gli indici negativi dall'equazione, un'operazione realizzabile sfruttando la proprietà di periodicità della funzione  $e^{-i2\pi kj/N}$ . Definiamo  $q = j + N$  per  $j < 0$  ottenendo

$$\begin{aligned} \bar{I}(k) &= \sum_{j=0}^{(N/2)-1} \mathcal{S}(j)e^{-i2\pi kj/N} \\ &= \sum_{q=(N/2)}^{N-1} \mathcal{S}(q-N)e^{-i2\pi kj/N} \end{aligned}$$

fattorizzando  $\exp(-i2\pi k) = 1$  dalla seconda somma, e combinando le due sommatorie otteniamo

$$\bar{I}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathcal{S}(j)e^{-i2\pi kj/N} \quad (14)$$

dove abbiamo ridefinito  $\mathcal{S}(j)$  aggiungendo  $N$  all'indice per  $j$  negativi. Infine, definiamo *fattori Twiddle*<sup>18</sup>

$$W_l^s = (e^{i2\pi/l})^s$$

L'indagine sulla soluzione dell'equazione presentata in 14 si colloca preminentemente all'interno dello studio del processamento dei segnali. Pertanto, la conversione dell'interferogramma in uno spettro è un'operazione che può essere esaminata attraverso i principi e le metodologie proprie della teoria dell'elaborazione dei segnali.

## 9 DFT

In generale, la trasformata discreta di Fourier (DFT) trasforma una sequenza di  $N$  numeri complessi  $\{x_n\} := x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$  in un'altra sequenza di numeri complessi  $\{X_k\} := X_0, X_1, \dots, X_{N-1}$  definita da

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (15)$$

La trasformazione da  $x_n$  a  $X_k$  rappresenta una conversione dallo spazio di configurazione allo spazio delle frequenze, un processo di notevole utilità sia nell'analisi dello spettro di potenza di un segnale, sia nell'affrontare determinati problemi tramite calcoli più efficienti. La Trasformata Discreta di Fourier trova impiego in un'ampia gamma di applicazioni, che spaziano da quelle strettamente matematiche, prive di una diretta interpretazione fisica, a quelle di natura più pratica. La DFT può essere correlata all'elaborazione del segnale come versione discreta, cioè campioni, della trasformata di Fourier a tempo discreto (DTFT), che è una funzione continua e periodica. La DFT calcola  $N$  campioni equispaziati di un ciclo della DTFT.

L'interpretazione fisica che adotteremo come riferimento postula che la trasformata discreta di Fourier trasforma una sequenza finita di campioni equidistanti di una funzione continua dipendente dalla variabile temporale  $t$ , in una sequenza corrispondente di campioni equidistanti della Trasformata di Fourier a Tempo Discreto, funzione della variabile frequenziale  $\nu$ . L'intervallo di campionamento della DTFT è il reciproco della durata della sequenza di

<sup>18</sup>L'espressione di un fattore twiddle rappresenta una rotazione nel piano complesso.

input:

$$\Delta\nu\Delta t = \frac{1}{N} \quad (16)$$

**Applicazioni** La DFT trova impiego nell'analisi di Fourier in un'ampia gamma di applicazioni pratiche, incluse numerose nell'ambito astronomico. Affermare che essa serva solo per la spettroscopia sarebbe alquanto riduttivo. Il segnale variabile nel tempo può essere la pressione di un'onda sonora, un segnale radio, o le letture della temperatura, campionate periodicamente in un intervallo di tempo finito e definito da una funzione finestra<sup>19</sup>. Nell'ambito dell'elaborazione delle immagini, i campioni possono corrispondere ai valori dei pixel lungo una riga o colonna di un'immagine raster. Oltre a questi impieghi, la DFT è utilizzata efficacemente anche per risolvere equazioni alle derivate parziali e per realizzare altre operazioni, come la convoluzione o la moltiplicazione di grandi numeri interi.

**DFT & IDFT** Essendo la 15 invertibile, la DFT è una rappresentazione nel dominio della frequenza della sequenza data nel dominio del tempo. La trasformazione Discreta di Fourier diretta (DFT) e la Trasformazione Discreta di Fourier inversa (IDFT) sono rispettivamente:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i2\pi kn/N} \quad x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i2\pi kn/N} \quad (17)$$

In appendice A abbiamo indagato la relazione tra  $x_n$  e  $X_k$ , spiegando le simmetrie tra le rappresentazioni del segnale nel dominio del tempo e delle frequenze.

---

<sup>19</sup>Nell'elaborazione numerica dei segnali, una funzione finestra (o funzione di apodizzazione) è una funzione che si annulla al di fuori di un certo intervallo. Quando una funzione è moltiplicata per una funzione finestra, il risultato è zero al di fuori dell'intervallo, lasciando solamente ciò che è visibile attraverso la finestra. Una definizione più generale non richiede necessariamente l'annullamento al di fuori di un intervallo, ma implica che il prodotto per la funzione finestra sia una funzione al quadrato sommabile. Le funzioni finestra rivestono un ruolo cruciale in questo contesto in quanto la limitazione del campionamento a un intervallo finito di tempo altera anche il contenuto in frequenza del segnale, un fenomeno noto come *Spectral Leakage*. Queste permettono una distribuzione spettrale della dispersione in modi diversi a seconda delle necessità della specifica applicazione. In sezione 5 abbiamo già discusso il filtraggio matematico in interferometria e in appendice C ne mostreremo un esempio concreto.

**DFT & FFT** Poiché si tratta di un insieme discreto e finito di numeri complessi, può essere implementato nei computer. Tuttavia, in ambito applicativo, il calcolo della DFT implementato in modo diretto (eq.15), è un'operazione poco pratica a causa dell'elevato carico computazionale. Al suo posto, si ricorre comunemente a metodi più efficienti come la FFT, un algoritmo ottimizzato che riduce significativamente il numero di operazioni.

## 10 FFT

Una trasformata veloce di Fourier (FFT) è un algoritmo che computa la trasformata discreta di Fourier, o la sua inversa, in un modo molto più efficiente rispetto al calcolo diretto. La FFT riesce a ridurre il numero di operazioni, e quindi il tempo di calcolo, da  $\mathcal{O}(N^2)$  a  $\mathcal{O}(N \log N)$ , dove  $N$  è la dimensione dei dati. La differenza di velocità può essere enorme, soprattutto per set di dati lunghi dove  $N$  può essere dell'ordine delle migliaia o dei milioni.

### 10.1 Algoritmo di Cooley-Tukey

Il termine FFT comprende una varietà di algoritmi che si distinguono per la loro gestione degli errori di arrotondamento, l'utilizzo dello spazio di memoria e l'efficienza in termini di velocità. Per via dell'importanza dell'algoritmo, diverse varianti e tipi di implementazione sono diventati noti con dei nomi propri. Sebbene l'idea di base sia ricorsiva, la maggior parte delle implementazioni tradizionali riorganizzano l'algoritmo per evitare la ricorsione esplicita. Tra questi, l'algoritmo di Cooley-Tukey (Algoritmo C-T) rappresenta la variante di FFT più diffusamente impiegata e costituirà l'unico genere di algoritmi FFT oggetto del nostro studio. Poiché l'algoritmo C-T suddivide la DFT in DFTs più piccole, può essere combinato arbitrariamente con qualsiasi altro algoritmo per il calcolo della DFT (radice mista).

**Cenni storici** Questo metodo fu reso popolare da una pubblicazione di Cooley e Tukey del 1965[6], ma in seguito si scoprì [7] che l'idea poteva essere fatta risalire al lavoro inedito di Carl Friedrich Gauss del 1805 [8].

**Descrizione generica** In generale, è un algoritmo divide et impera che scompone una DFT di dimensione composita arbitraria  $N = N_1 N_2$  in  $N_1$  DFTs, ciascuna di dimensione  $N_2$ , ricorsivamente, per ridurre il numero di operazioni, e quindi il tempo di calcolo, da  $\mathcal{O}(N^2)$  a  $\mathcal{O}(N \log N)$ , dove  $N$  è la dimensione dei dati.

L'operazione fondamentale da applicare ricorsivamente consiste nell'elaborare una DFT di dimensione composta  $N = N_1 N_2$  attraverso

1. l'esecuzione di  $N_1$  DFT di dimensione  $N_2$ ;
2. la moltiplicazione per le radici complesse dell'unità (fattori twiddle);
3. l'esecuzione di  $N_2$  DFT di dimensione  $N_1$ .

Tipicamente,  $N_1$  o  $N_2$  è un fattore piccolo, detto radice (che può differire tra le fasi della ricorsione). Se  $N_1$  è la radice, si chiama algoritmo di decimazione in tempo (DIT), mentre se  $N_2$  è la radice, si parla di decimazione in frequenza (DIF). La piccola DFT della radice è nota come *butterfly*, denominazione che deriva dalla forma del diagramma di flusso dei dati nel caso di radice-2.

La versione che presenteremo è un algoritmo DIT radice-2; una FFT radix-2 con decimazione nel tempo scompone una DFT di lunghezza  $N$  in due DFT di lunghezza  $N/2$ , seguite da una fase di combinazione costituita da DFT di dimensione 2. Nell'espressione finale (eq. 19), la fase che moltiplica la trasformazione dispari è il fattore twiddle e la combinazione  $+/-$ , detta *butterfly*, delle trasformazioni pari e dispari è una DFT di dimensione 2. Il diagramma di flusso dei dati per un caso con  $N = 8$  è illustrato nella Figura 3.

### 10.1.1 radix-2 DIT

La FFT DIT radice-2 è la forma più semplice e comune dell'algoritmo C-T, sebbene le implementazioni di Cooley-Tukey altamente ottimizzate utilizzino tipicamente altre forme dell'algoritmo. Radix-2 DIT calcola la DFT dei campioni con indicizzazione pari e la DFT dei campioni con indicizzazione dispari, e combina questi due risultati per produrre la DFT dell'intera sequenza. Questa operazione è eseguita in modo ricorsivo sfruttando le simmetrie della DFT per ridurre il tempo di esecuzione complessivo da  $\mathcal{O}(N^2)$  a  $\mathcal{O}(N \log N)$ , dove  $\mathcal{O}$  denota il concetto di O-grande. Siccome Radix-2 DIT divide in ciascuna fase ricorsiva una DFT di dimensione  $N$  in due DFT di dimensione  $N/2$ , è

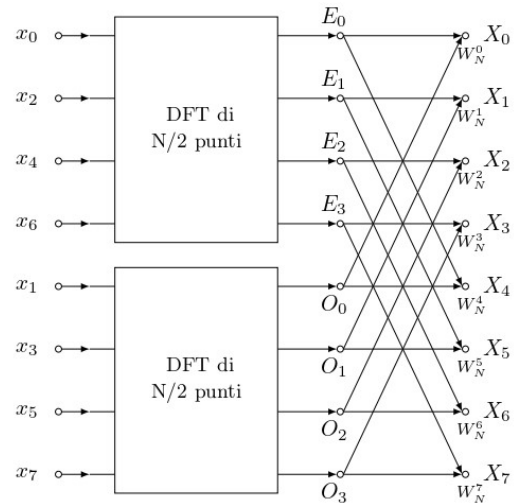


Figura 3: Diagramma di flusso dei dati per  $N = 8$ .

limitato a dimensioni  $N$  potenze di due. Poiché il numero di punti di campionamento  $N$  è generalmente un parametro selezionabile<sup>20</sup>, questo vincolo non rappresenta una restrizione significativa.

L'algoritmo DIT radice-2 riorganizza la DFT degli  $x_n$  in due parti: una somma sugli indici pari  $n = 2m$  e una somma sugli indici dispari  $n = 2m + 1$

$$X_k = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} e^{-\frac{2\pi i}{N}(2m)k} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(2m+1)k}$$

Fattorizzando il moltiplicatore comune  $e^{-2\pi i k/N}$  dalla seconda somma, si delineano la DFT della parte con indici pari  $x_{2m}$  (**E**ven-indexed), che denotiamo con  $E_k$ , e la DFT della parte indicizzata dispari  $x_{2m+1}$  (**O**dd-indexed), che denotiamo con  $O_k$ :

$$X_k = \underbrace{\sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} e^{-\frac{2\pi i}{N/2}mk}}_{\text{DFT della parte pari}} + e^{-\frac{2\pi i}{N}k} \underbrace{\sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} e^{-\frac{2\pi i}{N/2}mk}}_{\text{DFT della parte dispari}} = E_k + e^{-\frac{2\pi i}{N}k} O_k \quad (18)$$

**Simmetrie della DFT** Si noti che le uguaglianze valgono per  $k = 0, \dots, N-1$  ma, grazie alle proprietà di periodicità dell'esponenziale complesso, anche  $X_{k+\frac{N}{2}}$  è ottenibile da  $E_k$  e  $O_k$ :

$$\begin{aligned} X_{k+\frac{N}{2}} &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} e^{-\frac{2\pi i}{N/2}m(k+\frac{N}{2})} + e^{-\frac{2\pi i}{N}(k+\frac{N}{2})} \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} e^{-\frac{2\pi i}{N/2}m(k+\frac{N}{2})} \\ &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} e^{-\frac{2\pi i}{N/2}mk} e^{-2\pi mi} + e^{-\frac{2\pi i}{N}k} e^{-\pi i} \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} e^{-\frac{2\pi i}{N/2}mk} e^{-2\pi mi} \\ &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} e^{-\frac{2\pi i}{N/2}mk} - e^{-\frac{2\pi i}{N}k} \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} e^{-\frac{2\pi i}{N/2}mk} \\ &= E_k - e^{-\frac{2\pi i}{N}k} O_k \end{aligned}$$

Quindi, il sistema diventa

$$\begin{cases} X_k = E_k + e^{-2\pi i k/N} O_k \\ X_{k+\frac{N}{2}} = E_k - e^{-2\pi i k/N} O_k \end{cases} \quad (19)$$

<sup>20</sup>Ad esempio, tramite la modifica della frequenza di campionamento, l'adattamento della finestra temporale di raccolta dei dati o l'impiego di tecniche di riempimento con zeri (zero-padding).



Si noti che i risultati finali sono ottenuti da una combinazione  $+/-$  di  $E_k$  e  $O_k e^{-2\pi ik/N}$ , chiamata *butterfly*, che è una DFT di dimensione 2.

Più in generale, per qualsiasi intero  $j$ , si ha

$$\begin{aligned} X_{k+jN} &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i2\pi(k+jN)n/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i2\pi jn} \cdot e^{-i2\pi kn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i2\pi kn/N} = X_k \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato l'identità  $\exp(2\pi n) = 1$ .

L'algoritmo guadagna velocità esprimendo ricorsivamente una DFT di lunghezza  $N$  in termini di due DFT di dimensione  $N/2$ , e riutilizzando i risultati dei calcoli intermedi per computare più termini.

**Riordinamento** Sebbene la fattorizzazione generica di Cooley-Tukey della DFT, che abbiamo mostrato esplicitamente nel caso radix-2, si applichi in qualche forma a tutte le implementazioni dell'algoritmo, esiste una diversità molto maggiore nelle tecniche per ordinare e accedere ai dati in ciascuna fase della FFT. Di particolare interesse è il problema di ideare un algoritmo sul posto che sovrascriva i dati di input con i dati di output riducendo la memoria ausiliaria. La tecnica di riordino più nota per gli algoritmi radix-2 sul posto<sup>21</sup> prevede l'inversione dei bit<sup>22</sup>.

## 10.2 FFT e AI per la ricerca

L'interferometria a trasformata di Fourier svolge un ruolo fondamentale nell'astronomia moderna e nella fisica, fornendo una tecnica avanzata per l'analisi spettrale dei segnali. L'introduzione dell'Intelligenza Artificiale (AI) nel campo della ricerca scientifica, inclusa l'astronomia, ha portato a nuove opportunità per l'elaborazione e l'analisi di grandi quantità di dati.

<sup>21</sup>La dimostrazione per induzione dell'algoritmo Cooley-Tukey radix-2 fornita, per esempio, da Brigham e Morrow [9], da J. Connes [5] o da R. J. Bell [2], mostra esplicitamente che l'allocazione netta, in base numerica binaria, implicata dalla separazione sistematica del set di dati in due gruppi in base alla parità degli indici, è data dall'inversione dei bit.

<sup>22</sup>L'inversione dei bit è la permutazione in cui i dati in un indice  $n$  scritto in base numerica 2, con cifre  $b_4 b_3 b_2 b_1 b_0$  (es. 5 cifre per  $N = 32$ ), vengono trasferiti all'indice con cifre invertite  $b_0 b_1 b_2 b_3 b_4$ .

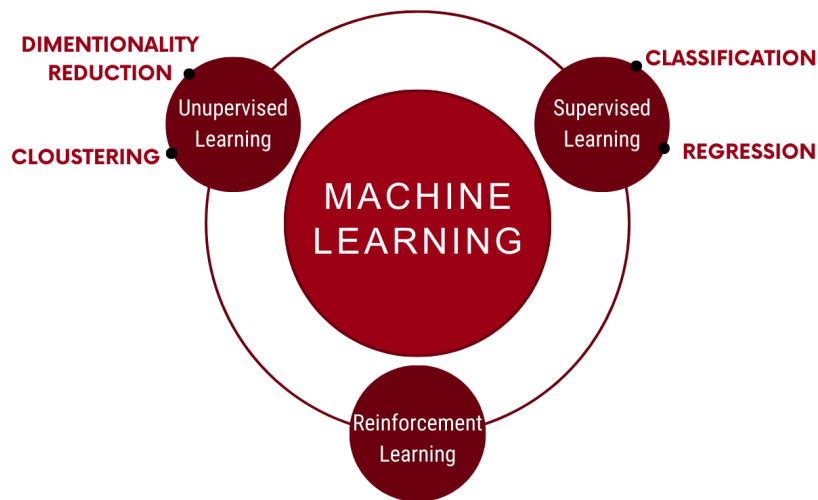


Figura 4: Mappa dei metodi usati in Machine Learning.

In questa sezione, ci siamo appoggiati a riferimenti autorevoli nel campo della Data Science e del Machine Learning. Tra questi, spiccano il [webinar](#) organizzato in collaborazione con l'Università di Modena e Reggio Emilia e tenuto dal Dott. Simone Calderara, laureato in Ingegneria Informatica e Dottorato in ICT; un [articolo](#) sul Machine Learning di Fabio Celli, esperto in Natural Language Processing; nonché le prime [lezioni](#) del Corso di Machine Learning avanzato, tenuto dal Dott. Alessandro De Cecco di School of AI Italia.

Nell'Appendice [D](#), viene fornita un'esposizione dettagliata della relazione esistente tra l'Intelligenza Artificiale, il Machine Learning e il Deep Learning. Inoltre, si delineano le distinzioni fondamentali tra l'Intelligenza Artificiale Generale e l'Intelligenza Artificiale Ristretta. La sezione include altresì una definizione formale del Machine Learning e delle sue varie modalità di apprendimento.

All'interno del Machine Learning, possiamo identificare tre tipologie principali di apprendimento, come illustrato nella figura [4](#):

- ◇ **Apprendimento Supervisionato:** questo tipo di apprendimento include dati di addestramento che comprendono sia gli input che gli output corrispondenti. È utilizzato principalmente in attività di classificazione e regressione.
- ◇ **Apprendimento Non Supervisionato:** in questo approccio, i dati di addestramento non includono l'output. È spesso impiegato in compiti come il clustering dei dati o la riduzione della dimensionalità.

- ◇ **Apprendimento con Rinforzo:** questo metodo modifica l'obiettivo della macchina in base a una serie di ricompense o punizioni date in risposta ad azioni compiute. È particolarmente rilevante in ambiti come la robotica.

**Features e target** In ambito di Machine Learning, le variabili di input sono comunemente denominate 'caratteristiche' (features), mentre l'output o l'obiettivo del modello è definito come 'target' o 'label'. Per esemplificare, un data scientist<sup>23</sup>, con il compito di sviluppare un algoritmo di classificazione morfologica delle galassie dalle loro immagini, potrebbe selezionare caratteristiche quali il rapporto bulge/disco, la dimensione, la presenza della barra, la quantità di gas e la composizione in termini di popolazioni stellari.

**Intelligenza Artificiale e intelligenza umana** È fondamentale riconoscere che il Deep Learning, collocandosi all'interno del Machine Learning e, più ampiamente, nell'ambito delle intelligenze artificiali, si distingue anche per la sua capacità di minimizzare l'intervento umano nell'identificazione delle caratteristiche (o features) dai dati. Questo processo sfida la concezione tradizionale secondo cui un esperto umano possa invariabilmente identificare le features più idonee per un determinato compito. Al contrario, un sistema computazionale, esente da pregiudizi e condizionamenti derivanti da esperienze pregresse, ha la potenzialità di identificare un insieme di features più efficaci per la risoluzione di problemi specifici. Queste features, possono risultare inaccessibili o oscure a un data scientist. Pur potendo essere talvolta individuate mediante tecniche analitiche avanzate, esse spesso sfuggono alla piena comprensione umana. Questa realtà non deve essere sottovalutata. La tendenza a modellare l'Intelligenza Artificiale affinché rispecchi da vicino le capacità umane può oscurare il riconoscimento delle proprietà intrinseche e distintive dei modelli computazionali. Tali proprietà, distinte da quelle dell'intelligenza umana, possono rivelarsi fondamentali nella promozione di nuove scoperte e nell'apertura di orizzonti inesplorati nel campo dell'astronomia.

## **Integrazione del Machine Learning nell'Astronomia**

**Modalità** L'integrazione del Machine Learning nell'ambito astronomico è profondamente connessa alla figura del data scientist. Tuttavia, un'efficace

---

<sup>23</sup>Un data scientist si occupa di sviluppare strategie per l'analisi dei dati, preparare i dati per l'analisi, esplorare, analizzare e visualizzare i dati, creare modelli con i dati utilizzando linguaggi di programmazione, nonché implementare i modelli nelle applicazioni.

implementazione di modelli di ML in questo campo non può prescindere dalla collaborazione e dall'apporto degli astronomi. Pertanto, è essenziale stabilire una sinergia tra queste due discipline, forse anche tramite ruoli intermedi che facilitino, promuovano e intensifichino il dialogo e la collaborazione interdisciplinare, accelerando così il processo di scoperta scientifica. La formazione di un team specializzato, composto da esperti sia in ML sia in Astronomia, è indispensabile per risolvere problemi specifici complessi di natura astronomica. Tale équipe assicura un uso ottimale delle risorse e massimizza l'efficienza dei modelli di ML, promuovendo significativamente il progresso scientifico.

Un data scientist, con la propria expertise e sensibilità, è cruciale per la selezione e l'ottimizzazione adeguata del modello, per una misura di prestazione basata su metriche opportunamente scelte e per l'interpretazione corretta dei risultati. Per meglio comprendere l'importanza di questa figura professionale, è imprescindibile un'analisi di alcune delle decisioni strategiche critiche e delle complesse sfide che questi specialisti affrontano regolarmente nella pratica applicativa del Machine Learning. Si sottolinea l'importanza di iniziare con modelli semplici e aumentare gradualmente la loro complessità. Sebbene i modelli di Deep Learning avanzati possano offrire prestazioni superiori, tendono a essere più sensibili a variazioni minime dei parametri o a condizioni impreviste, che possono generare errori significativi. In aggiunta, modelli più complessi richiedono solitamente maggiori volumi di dati, incrementando significativamente i costi associati all'acquisizione, alla gestione e all'addestramento, nonché l'impiego di maggiori risorse energetiche. Inoltre, è importante riconoscere che non tutti gli algoritmi di ML sono equivalenti, in termini di ambito di applicazione, flessibilità, prestazioni, accuratezza e precisione. La scelta di un particolare algoritmo, nonché la selezione delle features e delle metriche per valutare l'efficacia del modello addestrato, rappresentano decisioni fondamentali che spesso sono affidate alla discrezione del data scientist. Solo un professionista con adeguata esperienza ed expertise è in grado di effettuare tali valutazioni in modo appropriato.

Ad aggiungere, si identificano diverse sfide nell'applicazione del ML, come la presenza di dati inaccurati, che può portare a risultati errati, o la mancanza di valori nei dati, che può compromettere l'efficacia del modello.

Va sottolineato che l'impiego di reti neurali profonde nel Deep Learning richiede ampie basi di dati. Tuttavia, considerando l'ingente volume degli archivi storici, e l'incessante e rapido incremento di dati gene-

rati nell'attuale era digitale, tale requisito non costituisce un ostacolo insormontabile in numerose applicazioni nel campo dell'astronomia.

**Prospettive** L'AI può giocare un ruolo chiave nell'interpretazione dei dati complessi ottenuti tramite tecniche come la FTS, facilitando il riconoscimento di pattern, la classificazione degli oggetti astronomici e la previsione di fenomeni. Ad esempio, algoritmi di Apprendimento Automatico (ML) e di Apprendimento Profondo (DL) possono essere utilizzati per analizzare efficacemente i dati spettrali, identificando caratteristiche sottili o anomalie che potrebbero sfuggire all'analisi umana. Inoltre, l'integrazione dell'AI con tecniche come la FTS potrebbe consentire la realizzazione di osservazioni astronomiche più efficienti e precise, aiutando gli astronomi a formulare ipotesi più accurate e ad acquisire, ridurre e analizzare i dati velocizzando il processo di scoperta scientifica. L'AI può anche contribuire a gestire e ottimizzare l'enorme volume di dati prodotto dai moderni telescopi e strumenti astronomici, migliorando l'efficienza e l'efficacia delle ricerche astronomiche.

Come si evince dall'Appendice D, l'attuale stato di sviluppo dei programmi e delle tecnologie di Intelligenza Artificiale si trova ancora in una fase embrionale, che non prescinde dalla supervisione umana. Tuttavia, si profilano prospettive di rilevante interesse, quali lo sviluppo di AI completamente autonome e proattive, capaci di superare la limitazione ad un singolo compito specifico. Questa evoluzione prefigura il concetto di Intelligenza Artificiale Generale (AGI), un modello avanzato che trascenderebbe i confini dell'Intelligenza Artificiale Ristretta (ANI), come dettagliatamente illustrato nell'appendice menzionata.

In linea teorica, le reti neurali profonde detengono il potenziale per svelare le leggi che governano l'universo. Questa affermazione si basa parzialmente sul *teorema di Approssimazione Universale*, il quale afferma che una rete neurale con almeno un livello nascosto può approssimare, con una precisione predefinita, qualunque funzione continua in un intervallo chiuso e limitato, a patto di avere un numero sufficiente di neuroni artificiali. Tuttavia, la realtà pratica è più complessa. La capacità di una rete neurale di 'scoprire' leggi fisiche non dipende solo dalla sua profondità o complessità, ma anche dalla qualità e quantità dei dati disponibili<sup>24</sup>, dalla corretta architettura della rete, e dall'efficacia degli algoritmi di apprendimento. Inoltre, le leggi fisiche potrebbero

---

<sup>24</sup>Un rischio significativo nel campo del Machine Learning è rappresentato dalla presenza di bias nei dati. Se i dati di addestramento (detti *training data-set*) sono distorti o non rappresentativi, il modello apprenderà e perpetuerà questi bias, portando a risultati inaccurati o ingiusti. Inoltre, anche se i dati di addestramento sono accurati e privi di

comprendere discontinuità o comportamenti che sfuggono alla semplice approssimazione funzionale, rendendo la loro completa cattura tramite reti neurali un obiettivo ambizioso. Attualmente, le reti neurali sono utilizzate più come strumenti complementari per l'analisi dei dati piuttosto che come sostituti autonomi per la scoperta di nuove leggi fisiche.

In sintesi, l'Interferometria a Trasformata di Fourier, combinata con le tecnologie emergenti di Intelligenza Artificiale, rappresenta un potente strumento per l'avanzamento della conoscenza umana in campi come l'astronomia, offrendo nuove prospettive e possibilità alla ricerca.

## 11 FFT in Python

In questa sezione, verrà introdotto come la FFT riduce il tempo di calcolo. Per semplicità, ci occuperemo solo della trasformazione diretta, poiché la trasformazione inversa può essere implementata in maniera molto simile. Il contenuto di questa sezione si basa sul libro di Qingkai Kong, Timmy Siau, Alexandre Bayen [10] sui metodi numerici e i programmi in Python e su un tutorial realizzato da [Jake VanderPlas](#).

### 11.1 Comprendere l'algoritmo FFT

Python, riconoscendo l'importanza della FFT, include diversi strumenti e wrapper per calcolare la FFT. Questo significa che Python, attraverso le sue librerie standard come NumPy e SciPy, fornisce accesso facilitato a librerie esterne specializzate come FFTPACK (tramite i sottomoduli `numpy.fft` e `scipy.fftpack`) e FFTW (tramite il pacchetto `PyFFTW`). Questo permette agli

---

bias, persiste un rischio noto come *overfitting*. L'*overfitting* si verifica quando un modello di Machine Learning si adatta troppo strettamente ai dati di addestramento, tanto da non riuscire a generalizzare bene su nuovi dati, ossia su un *test data-set*. Ciò significa che, sebbene il modello possa preformare eccezionalmente bene sui dati di addestramento, potrebbe avere prestazioni notevolmente inferiori quando applicato a dati non precedentemente studiati. Ulteriormente, come dettagliatamente discusso nell'Appendice D, emerge un rischio significativo, particolarmente rilevante nel contesto dei dati di natura astronomica, associato ad una presupposizione comune nei modelli di Machine Learning (ML). Tale presupposizione riguarda l'assunzione che i dati siano distribuiti in modo identico e indipendente. La consapevolezza di questa ipotesi è cruciale per anticipare e gestire i fenomeni noti come *model shifting* e *data shifting*, che si verificano a seguito di variazioni nella natura degli input o nella dinamica delle leggi che regolano i dati. Per mitigare questi rischi, è fondamentale utilizzare tecniche di validazione incrociata, regolarizzazione e avere una rappresentazione dei dati che sia il più possibile completa e imparziale.

utenti Python di sfruttare algoritmi di trasformazione di Fourier avanzati e veloci senza dover cambiare linguaggio di programmazione o dover scrivere codice complesso da zero<sup>25</sup>. Queste implementazioni sono frequentemente impiegate come 'black box'. Lo scopo di questo paragrafo è fornire un'intuizione sui meccanismi sottostanti. A tal fine, presenteremo tre programmi, ordinati in base alla loro crescente efficienza prestazionale. Per l'analisi dietro le quinte, abbiamo utilizzato strumenti come il comando `%timeit` di Jupyter Notebook per quantificare la velocità di calcolo, e la funzione `allclose()` di Numpy per verificare la correttezza dei risultati ottenuti rispetto alla funzione `fft` di Numpy.

## 11.2 Programma per il calcolo diretto

Uno sguardo attento l'espressione della DFT sopra noterà che non è altro che un'operazione lineare: l'applicazione della matrice dei fattori twiddle al vettore  $\vec{x}$

$$\vec{X} = M \cdot \vec{x}$$

dove la matrice  $M$  è definita dagli elementi

$$M_{kn} = e^{-i2\pi kn/N}$$

Quindi, possiamo calcolare la DFT utilizzando la semplice moltiplicazione matriciale come è mostrato nel programma 1.

### Spiegazione del codice 1

```
3 def DFT_slow(x):
```

---

<sup>25</sup>Per evitare ambiguità o incomprensioni anche su altri termini utilizzati in seguito, esplicitiamo che: Python è un linguaggio di programmazione molto utilizzato in ambiti scientifici, di data analysis e sviluppo software per la sua leggibilità e la vasta gamma di librerie disponibili. I pacchetti e le librerie sono utilizzati per estendere le funzionalità del linguaggio Python, consentendo agli utenti di eseguire compiti complessi senza dover scrivere grandi quantità di codice da zero;

NumPy è una libreria per Python che supporta grandi array e matrici, insieme a una vasta collezione di funzioni matematiche per operare su questi array. SciPy è un'altra libreria che usa NumPy e serve per compiti più specifici e avanzati, come l'ottimizzazione, la statistica, e le trasformazioni come la FFT;

FFTPACK è una libreria scritta in Fortran utilizzata per calcolare trasformazioni di Fourier. FFTW (acronimo di "Fastest Fourier Transform in the West") è un'altra libreria, notoriamente più veloce, anch'essa dedicata alla computazione delle trasformazioni di Fourier.

Un wrapper permette l'uso di codice scritto in un linguaggio in un altro linguaggio. In questo contesto, si parla di wrapper per riferirsi all'utilizzo di librerie come FFTPACK e FFTW in Python.

```

1 import numpy as np
2
3 def DFT_slow(x):
4     x = np.asarray(x, dtype=float)
5     N = x.shape[0]
6     n = np.arange(N)
7     k = n.reshape((N, 1))
8     M = np.exp(-2j * np.pi * k * n / N)
9     return np.dot(M, x)

```

Listing 1: Implementazione in Python della DFT.

Definisce una funzione che accetta in input una lista, una tupla o un array NumPy dei campioni del segnale.

```
4 x = np.asarray(x, dtype=float)
```

Converte `x` in un array NumPy di tipo float se già non lo fosse. Ciò garantisce che le operazioni seguenti siano eseguite con numeri in virgola mobile, necessari per calcoli precisi.

```
5 N = x.shape[0]
```

`shape` è una funzione che restituisce la dimensione di un array in argomento. `[0]` specifica che vogliamo la prima dimensione (il primo asse dell'array). Quindi, in questa riga si determina il numero di campioni del segnale e lo si memorizza nella variabile `N`.

```
6 n = np.arange(N)
```

Crea un array Numpy `n` che contiene una sequenza di numeri da 0 a `N-1`. Questi numeri rappresentano gli indici temporali dei campioni del segnale.

```
7 k = n.reshape((N, 1))
```

Trasforma l'array `n` in un array colonna `k`, ovvero, in un array due-dimensionale con `N` righe e 1 colonna.

```
8 M = np.exp(-2j * np.pi * k * n / N)
```



Genera la matrice  $M$  dei coefficienti della DFT. Ogni elemento di questa matrice è calcolato come  $e^{-2\pi i k n / N}$ .

```
9 return np.dot(M, x)
```

si effettua il prodotto matrice-vettore tra  $M$  e  $x$  il quale è restituito come output della funzione. Il risultato è un array che rappresenta il segnale trasformato nel dominio della frequenza.

Questa implementazione della DFT, sebbene concettualmente semplice, non è ottimizzata per la velocità, specialmente per array di grandi dimensioni, a causa del suo costo computazionale quadratico. Per segnali più lunghi, conviene utilizzare algoritmi più efficienti come la FFT. Il vantaggio nell'utilizzarli è tanto maggiore quanto più grande è  $N$ .

Il confronto dei tempi di esecuzione con `%timeit` per  $N=1024$ , mostra che l'algoritmo 1 è oltre 1000 volte più lento della funzione FFT incorporata di Numpy. Per un vettore di input di lunghezza  $N$ , l'algoritmo FFT scala come  $\mathcal{O}(N \log N)$ , mentre un algoritmo per il calcolo diretto scala come  $\mathcal{O}(N^2)$ . Come fa la FFT a realizzare questa accelerazione? La risposta sta nello sfruttamento delle simmetrie della DFT.

### 11.3 Programma FFT - versione semplice

Dalla definizione della DFT abbiamo già mostrato che è possibile dividere la Trasformazione Discreta di Fourier in due termini che a loro volta sono trasformazioni discrete di Fourier più piccole, sui valori indiziati pari e sui valori indicizzati dispari:

$$X_k = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} \cdot e^{-i2\pi k m / (N/2)} + e^{-i2\pi k / N} \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} \cdot e^{-i2\pi k m / (N/2)}$$

Fin qui, non abbiamo risparmiato cicli computazionali. Ogni termine consiste di  $(N/2) \times N$  calcoli, per un totale di  $N^2$ . l'algoritmo FFT sfrutta la proprietà di simmetria

$$X_{k+jN} = X_k$$

della DFT per calcolare la DFT molto più rapidamente. Infatti, possiamo sfruttare le simmetrie in ciascuna delle due DFTs. Poiché l'intervallo di  $k$  è  $0 \leq k < N$ , mentre l'intervallo di  $n$  è  $0 \leq n < M = N/2$ , vediamo dalla proprietà di simmetria sopra ricordata, per  $j = 1/2$ , che dobbiamo eseguire solo metà dei calcoli per ogni sottoproblema. La nostra computazione  $\mathcal{O}(N^2)$  è diventata  $\mathcal{O}((N/2)^2)$ . Ma non c'è motivo di fermarsi qui: finché

le nostre trasformazioni di Fourier più piccole hanno un  $N$  pari, possiamo riapplicare questo approccio divide-et-impera, dimezzando il costo computazionale ogni volta. Nel limite asintotico, questo approccio ricorsivo scala come  $\mathcal{O}(N \log N)$ .

Il codice 2 ne mostra una realizzazione in Python. Si implementa l'algoritmo ricorsivo, ripiegando sulla funzione `DFT_slow` quando la dimensione dei sottoproblemi si riduce al di sotto di una soglia prefissata. L'iterazione proseguirà fino al raggiungimento di un punto in cui la dimensione delle DFT diventa così piccola che l'implementazione dell'algoritmo di Cooley-Tukey non risulta più efficiente rispetto al calcolo diretto. Ricordiamo che la dimensione dell'input per la FFT radice-2 dovrebbe avere una lunghezza potenza di 2. Altrimenti, di solito è necessario riempire con zeri fino alla dimensione della successiva potenza di 2 (*zero padding*); l'aggiunta di zeri non modifica l'informazione contenuta nel segnale originale.

```

1 def FFT(x):
2     x = np.asarray(x, dtype=float)
3     N = x.shape[0]
4
5     if N % 2 > 0:
6         raise ValueError("la dimensione di x deve essere una potenza di 2")
7     elif N <= 32: # questo cut-off potrebbe essere ottimizzato
8         return DFT_slow(x)
9     else:
10        X_even = FFT(x[::2])
11        X_odd = FFT(x[1::2])
12        factor = np.exp(-2j * np.pi * np.arange(N) / N)
13        return np.concatenate([X_even + factor[:N // 2] * X_odd,
14                               X_even - factor[:N // 2] * X_odd])

```

Listing 2: Un'implementazione ricorsiva in Python della FFT di Cooley-Tukey 1D

## Spiegazione del codice 2

```
5 if N % 2 > 0:
```

Controlla se  $N$  non è divisibile per 2. L'algoritmo di Cooley-Tukey richiede che la dimensione dell'array sia una potenza di 2. Se  $N$  non è una potenza di 2, viene sollevata un'eccezione (`ValueError`).

```
7 elif N <= 32:
```

Questa è una condizione di terminazione per la ricorsione. Se  $N$  è minore o uguale a 32 (un valore soglia che potrebbe essere abbassato ottimizzato il programma), viene chiamata la funzione definita in 1 per calcolare la DFT direttamente. Questo è spesso più efficiente per array molto piccoli. Se l'array 'x' è più lunga di 32, l'algoritmo procede dividendo i campioni in quelli indicizzati pari  $x[:,2]$  e quelli indicizzati dispari  $x[1::2]$ .

```
10 X_even = FFT(x[:,2])
```

Applica ricorsivamente la funzione FFT ai campioni pari del segnale. Analogamente, nella riga successiva, è applicata ricorsivamente la funzione FFT ai campioni dispari del segnale.

```
13
```

Si combinano i risultati delle FFT dei campioni pari e dispari per ottenere il risultato finale usando la funzione `np.concatenate` per unire gli array. Rappresenta essenzialmente l'operazione farfalla.

Cronometrando questo algoritmo rispetto alla funzione `DFT_slow()` per  $N=1024$ , è risultato che il programma 2, che implementa la FFT, è più veloce del programma 1, che calcola direttamente la DFT, di oltre un ordine di grandezza! Tuttavia, il confronto con la funzione `fft()` di Numpy rivela che con questo algoritmo non ci siamo ancora avvicinati alla velocità dell'algoritmo FFT integrato in Numpy, ed è prevedibile. L'algoritmo FFTPACK dietro la funzione `fft` di Numpy è un'implementazione in Fortran che ha ricevuto anni di affinamenti e ottimizzazioni. Inoltre, la nostra soluzione NumPy coinvolge sia ricorsioni che sarebbero implementabili di massa, sia l'allocazione di molti array temporanei; entrambi i quali aggiungono un significativo tempo di calcolo. Una buona strategia per velocizzare l'esecuzione di un programma quando si lavora con NumPy è vettorizzare i calcoli ripetuti dove possibile. In questo processo rimuoviamo le chiamate di funzione ricorsive.

## 11.4 Programma FFT - versione Numpy Vettorizzata

Da notare che nell'implementazione ricorsiva sopra, al livello di ricorsione più basso eseguiamo  $N/32$  prodotti matrice-vettore identici. L'efficienza del nostro algoritmo beneficerebbe calcolando questi prodotti matrice-vettore tutti in una volta come un singolo prodotto matrice-matrice. A ogni successivo livello di ricorsione, eseguiamo anche operazioni duplicate che possono essere

vettorizzate. NumPy eccelle in questo tipo di operazioni. Queste osservazioni chiave aprono le porte alla progettazione di una versione vettorizzata della Trasformazione di Fourier Veloce, della quale mostriamo un'implementazione in 3. In questo algoritmo si riorganizzano le operazioni e si usa una

```

1 def FFT_vectorized(x):
2     x = np.asarray(x, dtype=float) #conversione in un array di tipo float
3     N = x.shape[0] #dimensione dell'array
4
5     # Controllo dimensione di x sia una potenza di 2
6     if np.log2(N) % 1 > 0:
7         raise ValueError("la dimensione di x deve essere una potenza di 2")
8
9     # N_min è equivalente alla condizione di arresto dell'algoritmo precedente
10    N_min = min(N, 32)
11
12    # DFT  $O[N^2]$  su tutti i sottoproblemi di lunghezza N_min contemporaneamente
13    n = np.arange(N_min)
14    k = n[:, None] # conversione di n in vettore colonna
15    M = np.exp(-2j * np.pi * n * k / N_min) # matrice dei twiddle
16    X = np.dot(M, x.reshape((N_min, -1))) # DFT sui blocchi.
17
18    # Costruzione di ogni livello del calcolo ricorsivo tutti insieme
19    while X.shape[0] < N:
20        X_even = X[:, :X.shape[1] // 2] # Parte pari della DFT
21        X_odd = X[:, X.shape[1] // 2:] # Parte dispari della DFT
22        factor = np.exp(-1j * np.pi * np.arange(X.shape[0])
23                       / X.shape[0])[:, None] # fattori twiddle
24        X = np.vstack([X_even + factor * X_odd,
25                      X_even - factor * X_odd])
26    return X.ravel() # Appiattimento dell'array e restituzione

```

Listing 3: Un'implementazione vettorizzata non ricorsiva, in Python, della FFT di Cooley-Tukey.

simmetria nel calcolo del `factor`. La funzione `FFT_vectorized` sfrutta la natura vettorizzata di NumPy per eseguire calcoli su interi array di dati contemporaneamente, evitando molte iterazioni, il che porta a significativi miglioramenti delle prestazioni su grandi set di dati.

### Spiegazione del codice 3

```
10 N_min = min(N, 32)
```

Assegnazione di un valore soglia per  $N$ , che è il minimo tra  $N$  e 32, alla quale si applica la versione di `DFT_slow()` che può effettuare più prodotti matrice-vettore in un unico prodotto matrice-matrice

14-16 Si generano due array di numeri da 0 a  $N_{\text{min}}-1$ : l'array orizzontale `n`, e la sua trasposta `k`. Questi sono usati per calcolare la matrice dei pesi.

```
10 N_min = minX = np.dot(M, x.reshape((N_min, -1)))
```

`x` viene ridimensionato in matrice di  $N_{\text{min}}$  righe e numero di colonne necessarie a conservare la dimensione dei dati, e si effettua la moltiplicazione matriciale di `M` per `x` la quale restituisce la matrice delle DFTs più piccole, con lo stesso numero di righe e colonne di `x.reshape((N_min, -1))`.

19-24 Questo ciclo `while` viene eseguito fino a quando la dimensione del primo asse (quello orizzontale) di `X` non ha raggiunto  $N$ . Il ciclo divide l'array `X` nelle sue componenti pari e dispari. Si calcolano i fattori per la combinazione di `X_{even}` e `X_{odd}` e infine si combinano le componenti pari e dispari per formare il prossimo livello di `X`. Questo viene fatto aggiungendo e sottraendo le versioni ponderate di `X_{even}` a `X_{odd}`. La funzione `vstack` (sta per "vertical stack") prende come argomento una sequenza di `ndarray` e li impila verticalmente (lungo l'asse [0]), uno sopra l'altro, per creare un unico array. Questo significa che gli array in input devono avere la stessa larghezza (cioè, lo stesso numero di colonne) ma possono avere un numero di righe arbitrario (impilerà i blocchi).

```
19-24 return X.ravel()
```

Alla fine della funzione, `X` viene "appiattita" in un array 1D e restituita in output perché la chiamata del metodo `ravel` sul `ndarray` `X` restituisce un array unidimensionale che contiene tutti gli elementi del `ndarray` originale `X`.

Il confronto effettuato mediante il comando `%timeit` indica un miglioramento significativo dell'implementazione, raggiungendo un ordine di grandezza superiore: per  $N = 2^{13}$ , l'implementazione si avvicina al benchmark stabilito

da FFTPACK con un fattore di circa 10. Sebbene dal punto di vista dell'efficienza non sia ancora comparabile, la versione in Python eccelle in termini di leggibilità rispetto alla fonte originale di FFTPACK, consultabile su Netlib<sup>26</sup> al seguente indirizzo: .

Il successo di FFTPACK nell'ottenere tale accelerazione deriva principalmente da una gestione meticolosa delle risorse. FFTPACK ottimizza il riutilizzo di ogni sottocomputazione possibile. La nostra implementazione in NumPy, invece, comporta un eccesso di allocazione e copia di memoria; un linguaggio a basso livello come Fortran permette un controllo più preciso e una minimizzazione dell'uso della memoria. In aggiunta, FFTPACK può essere integrato con altri algoritmi FFT più avanzati, inclusi approcci basati su convoluzioni e la flessibilità di gestire dimensioni  $N$  arbitrarie. La combinazione di tali estensioni e tecniche può risultare in algoritmi FFT estremamente più veloci.

**Conclusioni** Sebbene le funzioni puramente Python probabilmente non siano utili in pratica, speriamo che abbiano fornito un po' di intuizione su cosa stia succedendo dietro le quinte dell'analisi dei dati basata su FFT. Come scienziati dei dati, possiamo affidarci ad implementazioni black-box di strumenti fondamentali ottimizzati finemente. La comprensione dell'algoritmo della FFT è fondamentale per gli scienziati, specialmente per coloro che la utilizzano frequentemente nel proprio lavoro, per diversi motivi:

- **Ottimizzazione delle Prestazioni:** La FFT è cruciale nell'elaborazione dei segnali. La scelta dell'implementazione FFT più adatta può influenzare significativamente la qualità dei risultati in specifici ambiti di ricerca.
- **Comprensione dei Limiti e degli Errori:** Conoscere l'algoritmo FFT permette di valutare l'accuratezza dei risultati e l'impatto degli errori di arrotondamento e approssimazione, come nel caso della tomografia a risonanza magnetica (MRI).
- **Personalizzazione e Adattamento:** La FFT può essere adattata per esigenze specifiche, come l'elaborazione di segnali biologici complessi, migliorando l'analisi dei dati.
- **Diagnostica dei Problemi:** La comprensione dell'algoritmo FFT aiuta a identificare e risolvere problemi come artefatti o distorsioni nei

---

<sup>26</sup>Netlib è un repository che offre software, documenti e database in libero accesso, gestito da AT&T Bell Laboratories, dalla University of Tennessee, dal Oak Ridge National Laboratory e da collaboratori internazionali.

dati, fondamentale in settori come l'ingegneria aerospaziale o la ricerca medica.

- **Scelta degli Algoritmi Alternativi:** La conoscenza delle varie versioni della FFT permette di scegliere l'algoritmo più adatto a specifiche esigenze, ad esempio nelle telecomunicazioni.
- **Contesto Storico e Teorico:** Comprendere lo sviluppo storico e il contesto teorico della FFT aiuta a valutare il suo impatto sullo sviluppo tecnologico e scientifico.
- **Contributi alla Ricerca e Sviluppo:** Gli scienziati con una profonda comprensione della FFT possono contribuire significativamente al suo sviluppo, specialmente in settori emergenti come l'intelligenza artificiale e l'elaborazione del segnale in tempo reale.

In conclusione, la comprensione dell'algoritmo FFT non solo migliora l'efficacia dell'elaborazione dei segnali, ma apre anche la porta a innovazioni e miglioramenti in un'ampia gamma di applicazioni scientifiche e tecnologiche. Questo approccio informato e critico alla FFT distingue gli scienziati capaci di sfruttare pienamente il suo potenziale da coloro che la utilizzano come una semplice "black-box".

## Parte III

# La coerenza

## 12 Coerenza

Il fenomeno di interferenza è dovuto alla differenza relativa delle fasi delle onde sovrapposte. A seconda della fase relativa, due onde possono interferire costruttivamente (differenza di  $2m\pi$ , dove  $m$  è un numero intero) o distruttivamente (differenza di  $2(m+1)\pi$ ). Se le onde hanno la stessa frequenza e una fase relativa costante, si dice che sono coerenti.

La descrizione classica, in generale, del campo elettrico di un'onda elettromagnetica piana ideale è data da

$$E(\mathbf{r}, t) = |E(\mathbf{r}, t)|e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k(t)t+\phi(t))} \quad (20)$$

Per semplicità, assumiamo che il campo sia polarizzato linearmente in una direzione ed è quindi scalare.

Per creare interferenza, potremmo ad esempio dividere l'onda ideale in due parti e far seguire a ciascuna parte due percorsi diversi fino a riunirle nuovamente. Se i percorsi hanno lunghezze diverse, la differenza di percorso  $\Delta d = c\tau$  introdurrà una differenza di fase relativa di  $\Delta\phi = \omega\tau$  tra i due campi quando sono sovrapposti.

L'onda piana ideale è perfettamente coerente, il che significa che se conosciamo l'ampiezza e la fase in un dato momento, possiamo dedurle per tutti gli istanti successivi. Variazioni nella differenza di percorso, cioè in  $\tau$ , si manifestano nelle transizioni tra interferenza costruttiva e distruttiva. Due esempi di sorgenti di onde elettromagnetiche coerenti sono: le pulsar<sup>27</sup>, o i maser<sup>28</sup>.

Se la fase relativa dei campi sovrapposti non è costante per ogni  $\tau$ , ma solo approssimativamente costante entro un intervallo temporale  $\tau_c$ , i campi sono parzialmente coerenti. Ne consegue un limite al massimo ritardo temporale  $\tau$ , quantificato dal tempo di coerenza  $\tau_c$  o, equivalentemente, dalla lunghezza di coerenza  $d_c = c\tau_c$ , che darà luogo a un pattern d'interferenza apprezzabile. Se conosciamo la fase dell'onda in una certa posizione  $z$  al tempo  $t$ , allora conosceremo con bassa incertezza la fase nella stessa posizione a  $t + \tau$  se  $\tau \ll \tau_c$ , o con alta incertezza se  $\tau \gg \tau_c$ .

---

<sup>27</sup>Le pulsar sono stelle che emettono un segnale pulsato dovuto alla loro rotazione inclinata rispetto al loro campo elettromagnetico

<sup>28</sup>I maser sono nubi di molecole che emettono con un meccanismo simile a quello dei laser ma nel dominio delle microonde



**Misura quantitativa della coerenza** Una misura quantitativa della coerenza è definita attraverso le funzioni di correlazione. Ci concentreremo sulla coerenza del campo elettrico ai primi due ordini. La correlazione di un campo scalare in due punti dello spazio separati da una distanza  $d = c\tau$  allo stesso istante è equivalente alla correlazione di un campo nello stesso punto nello spazio misurato in due tempi  $t$  e  $t + \tau$ . In entrambi i casi,  $\tau$  può essere considerato come un ritardo nelle misurazioni. Gran parte di questa discussione seguirà la trattazione in [11].

## 12.1 Diversi tipi di radiazione

Caratterizziamo i tipi di fonti di radiazione ponendo agli estremi quelli che emettono radiazione perfettamente coerente e, sull'altra sponda, radiazione caotica.

Una fonte coerente è approssimata da un laser in quanto emette radiazione quasi-monocromatica con una fase relativa costante (o quasi). Per comprendere appieno il laser, è necessario utilizzare la teoria quantistica. Le fonti caotiche, come ad esempio la lampada a filamento o il Sole, sono cosiddette fonti termiche per cui il campo di radiazione è determinato dalla temperatura (e non solo). Queste sorgenti sono composte da un numero molto grande di atomi che emettono radiazione in modo quasi indipendente l'uno dall'altro, portando al termine "caotico". La frequenza e la fase della radiazione emessa sono determinate dai livelli di energia instabili degli atomi, dalla distribuzione statistica delle velocità atomiche e dalle collisioni casuali tra gli atomi.

Assumiamo che la radiazione caotica sia ergodica. Un processo stocastico<sup>29</sup> si dice ergodico se ogni media calcolata lungo una funzione campione (i.e., una media temporale del campo elettrico emesso da un singolo atomo) è uguale alla stessa media calcolata sull'insieme (i.e., una media simultanea sull'insieme di  $M$  atomi equivalenti). Una richiesta meno restrittiva è che le statistiche che regolano la radiazione caotica siano stazionarie in senso lato, intendendo che sono soddisfatte le seguenti due condizioni:

1.  $E[u(t)]$  è indipendente da  $t$ ;
2.  $E[u(t_1)u(t_2)]$  è indipendente da  $\tau = t_2 - t_1$ .

---

<sup>29</sup>La definizione di un processo casuale prevede l'associazione di una funzione a valori reali  $u(A;t)$ , di una variabile indipendente  $t$ , a un evento  $A$ . Nel nostro caso,  $u(t)$  rappresenta il campo elettrico reale prodotto da una sorgente all'istante  $t$ .

Dove  $E[u(t)]$  denota il valore atteso del processo casuale  $u(t)$  [12]. Quindi, con stazionario in senso lato si intende che le fluttuazioni casuali della radiazione sono governate da influenze che non cambiano nel tempo.

## 12.2 Grado di coerenza del primo ordine

Il grado di coerenza temporale del primo ordine (*degree of first-order temporal coherence*) della radiazione è definito come

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle E^*(t)E(t+\tau) \rangle}{\langle E^*(t)E(t) \rangle} \quad (21)$$

che è una versione normalizzata della funzione di correlazione del primo ordine per il campo elettrico campionato ai tempi  $t$  e  $t + \tau$

$$\langle E^*(t)E(t+\tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} E^*(t')E(t'+\tau) dt' \quad (22)$$

Le parentesi angolate indicano la media temporale. Se la radiazione ha statistiche stazionarie in senso lato, la correlazione dipende solo dal ritardo temporale  $\tau$  tra i due valori del campo. In questo caso, la funzione di correlazione incrociata (eq. 22) è indipendente dal tempo  $t$ , almeno per quanto riguarda intervalli temporali  $T$  molto più lunghi della scala temporale caratteristica delle fluttuazioni  $\tau_c$ . Dalla relazione

$$\langle E^*(t)E(t-\tau) \rangle = \langle E^*(t)E(t+\tau) \rangle^* = \langle E(t)E^*(t+\tau) \rangle$$

segue la proprietà di hermitianità

$$g^{(1)}(-\tau) = g^{(1)}(\tau)^* \quad (23)$$

Dalla definizione in eq. 21 è ovvio che per  $\tau = 0$ ,

$$g^{(1)}(0) = 1 \quad (24)$$

il che significa che per un ritardo nullo  $\tau = 0$ , la radiazione è perfettamente coerente al primo ordine e per ritardi  $\tau \ll \tau_c$  rimarrà approssimativamente coerente.

**Radiazione caotica** Per la radiazione caotica, indipendentemente dalla sua natura specifica, le correlazioni del campo diminuiscono per tempi di ritardo molto più lunghi del suo tempo di coerenza. Questo fenomeno deriva dal fatto che  $\tau_c$  rappresenta la durata media tra cambiamenti random nel

campo, come variazioni di ampiezza o fase, le cui le misure prima e dopo l'alterazione sono indipendenti. Dato che il campo elettrico ha un periodo molto più breve di  $T$ , il suo valore atteso e il suo grado di coerenza spaziale del primo ordine sono approssimativamente nulli:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle E(t) \rangle = 0 \quad ; \quad \lim_{T \rightarrow \infty} g^{(1)}(\tau) = 0 \quad \text{per } \tau \gg \tau_c \quad (25)$$

La caratterizzazione della coerenza della radiazione caotica in termini di  $|g^{(1)}(\tau)|$ :

$$|g^{(1)}(\tau)| \begin{cases} = 1 & \text{coerenza perfetta} \\ \in (0, 1) & \text{coerenza parziale} \\ = 0 & \text{incoerenza} \end{cases} \quad (26)$$

**Onda piana ideale** Per un'onda piana ideale che si propaga lungo la direzione  $z$  con vettore d'onda  $k = \frac{\omega_0}{c}$  e fase costante  $\phi$ , il campo elettrico è dato da:

$$E(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega_0 t + \phi)}$$

La correlazione del campo elettrico per questa onda è:

$$\langle E^*(t) E(t + \tau) \rangle = \langle E_0^2 e^{-i(kz - \omega_0 t + \phi)} e^{i(k(z + c\tau) - \omega_0 t + \phi)} \rangle = E_0^2 e^{i\omega_0 \tau}$$

dove  $\tau = t_2 - t_1 = \frac{(z_2 - z_1)}{c}$ . Di conseguenza, il grado di coerenza del primo ordine è

$$g^{(1)}(\tau) = e^{i\omega_0 \tau} \quad |g^{(1)}(\tau)| = 1$$

Ciò implica che l'onda ideale è coerente al primo ordine in tutte le coppie di punti spazio-temporali.

### 12.3 Modelli di radiazione

Esaminiamo i seguenti tre casi differenti che inducono fluttuazioni nella fase relativa o nella frequenza angolare della radiazione:

- Allargamento naturale
- Allargamento collisionale
- Allargamento Doppler

I primi due sono meccanismi di allargamento omogeneo, mentre il terzo è un meccanismo di allargamento non omogeneo [13].

Per omogeneità si intende che tutti gli atomi della sorgente si comportano allo stesso modo, producono radiazione alla stessa frequenza angolare e solo

la loro fase relativa è diversa (cioè, in eq. 20,  $\omega_k(t) \approx \omega_0$  e  $\phi(t)$  dipende dal tempo); inomogeneità nel senso che gli atomi individuali si comportano in modo diverso e producono radiazione con frequenze angolari leggermente diverse, mentre la loro fase relativa rimane invariata (cioè,  $\phi(t) \approx \phi$  e  $\omega_k(t)$  dipende dal tempo).

La radiazione che sperimenta meccanismi di allargamento non omogeneo avrà una distribuzione lorentziana in frequenza, producendo il grado di coerenza del primo ordine:

$$g^{(1)}(\tau) = e^{-i\omega_0\tau - |\tau|/\tau_c} \quad (27)$$

dove  $\tau_c$  può derivare dalla larghezza naturale delle righe di uno spettro di emissione spontanea o dal libero tempo medio delle collisioni<sup>30</sup> tra atomi della sorgente.

La radiazione con un meccanismo di allargamento omogeneo ha una distribuzione in frequenza gaussiana, la quale produce il grado di coerenza del primo ordine:

$$g^{(1)}(\tau) = e^{-i\omega_0\tau - \frac{\pi}{2}(\tau/\tau_c)^2} \quad (28)$$

Qui  $\tau_c$  può essere legato alla temperatura di un gas di sorgenti atomiche il cui moto termico produce un effetto Doppler osservabile nello spettro.

La Figura 5 mostra  $|g^{(1)}(\tau)|$  per la radiazione coerente e la radiazione caotica con una distribuzione di frequenza lorentziana e gaussiana. Notiamo che vicino a  $\tau = 0$ , la radiazione caotica è coerente al primo ordine.

## 12.4 Interpretazione fisica di $|g^{(1)}(\tau)|$

### 12.4.1 Visibilità

La visibilità del pattern di interferenza che si forma quando due (o più) onde elettromagnetiche vengono sovrapposte è una misura del contrasto tra delle frange nella figura d'interferenza, definita come il rapporto tra l'ampiezza del pattern d'interferenza e la somma delle intensità delle singole onde.

$$V = \frac{\bar{I}_{\max} - \bar{I}_{\min}}{\bar{I}_{\max} + \bar{I}_{\min}} \quad (29)$$

dove  $\bar{I}_{\max}$  e  $\bar{I}_{\min}$  rappresentano rispettivamente l'intensità media massima e minima delle frange. La visibilità è una misura della coerenza tra i due campi (o tra lo stesso campo in due momenti diversi). Si può dimostrare che l'intensità di due campi elettrici sovrapposti può essere scritta in termini

<sup>30</sup>La pressione comporta processi di emissione collisionale.

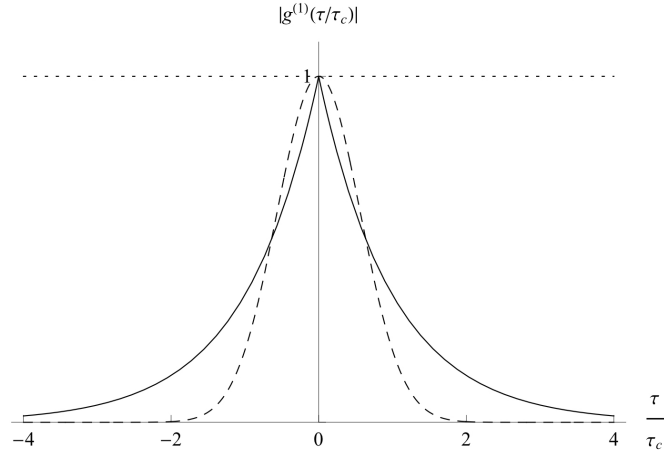


Figura 5: Il modulo del grado di coerenza di primo ordine della luce coerente (linea punteggiata) e della luce caotica con una distribuzione di frequenza Lorentziana (linea continua) e Gaussiana (linea tratteggiata). Adattato da [11].

del grado di coerenza del primo ordine, e che la visibilità è proporzionale al modulo del primo grado di coerenza. Un approfondimento, per radiazione incoerente, è riportato in appendice F.

#### 12.4.2 Densità spettrale di potenza

Un altro aspetto importante di  $g^{(1)}(\tau)$  è la sua relazione con lo spettro in frequenza della radiazione emessa attraverso la trasformata di Fourier del campo elettrico  $E(t)$  nell'intervallo di integrazione  $T$  definita come:

$$E_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_T E(t) e^{i\omega t} dt$$

La densità spettrale di potenza (*power spectral density*, tradotta anche come spettro di potenza), di un'onda elettromagnetica è definita come:

$$f(\omega) = |E_T(\omega)|^2 / T = \frac{1}{2\pi T} \int_T \int_T E^*(t) E(t') e^{-i\omega(t-t')} dt dt'$$

ossia, come la distribuzione in frequenza della potenza media. Come detto in precedenza, la statistica della radiazione stazionaria in senso esteso del termine dipende solo dalla differenza di tempo  $\tau = t' - t$ . Cambiando variabili, riscriviamo la densità spettrale nella forma della funzione di correlazione del

primo ordine:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \int_T \int_T E^*(t)E(t+\tau)e^{i\omega\tau} dt d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle E^*(t), E(t+\tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau$$

dove abbiamo posto l'intervallo d'integrazione illimitato ricordando che  $\tau_c$  è molto più piccolo del tempo  $T$ . Facendo uso della funzione delta di Dirac<sup>31</sup>

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} \langle E^*(t)E(t+\tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\omega d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle E^*(t)E(t+\tau) \rangle \tilde{\delta}(\tau) d\tau = \langle E^*(t)E(t) \rangle \end{aligned}$$

Otteniamo un'espressione per uno spettro normalizzato:

$$S(\omega) = \frac{f(\omega)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) d\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g^{(1)}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (30)$$

Questa relazione è nota come *teorema di Wiener-Khinchin*, e fornisce un collegamento diretto tra le fluttuazioni dipendenti dal tempo della radiazione e la sua densità spettrale di potenza.

È possibile eseguire una trasformata di Fourier inversa per passare dalla densità spettrale di potenza al grado di coerenza del primo ordine.

Usando l'equazione 23, possiamo riscrivere la densità spettrale di potenza normalizzata esplicitando il fatto che è necessario solo il grado di correlazione del primo ordine a  $\tau$  positivi per il suo computo

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \int_0^{\infty} g^{(1)}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

**Righe spettrali** La forma delle righe spettrali può essere prevista dalla relazione tra la densità spettrale di potenza normalizzata e il grado di coerenza del primo ordine.

Se l'allargamento di una riga spettrale è dovuto all'effetto Doppler, la linea avrà una forma approssimativamente gaussiana [14]. Ciò si dimostra inserendo l'eq. 28 nell'eq. 30 e risolvendo l'integrale, si ottiene:

$$S_G(\omega) = \frac{\sqrt{2\tau_c}}{\pi} e^{-\frac{2}{\pi}(\omega-\omega_0)^2\tau_c^2} \quad (31)$$

<sup>31</sup>La funzione Delta di Dirac  $\tilde{\delta}(t_0 - t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t_0-t)} d\omega$

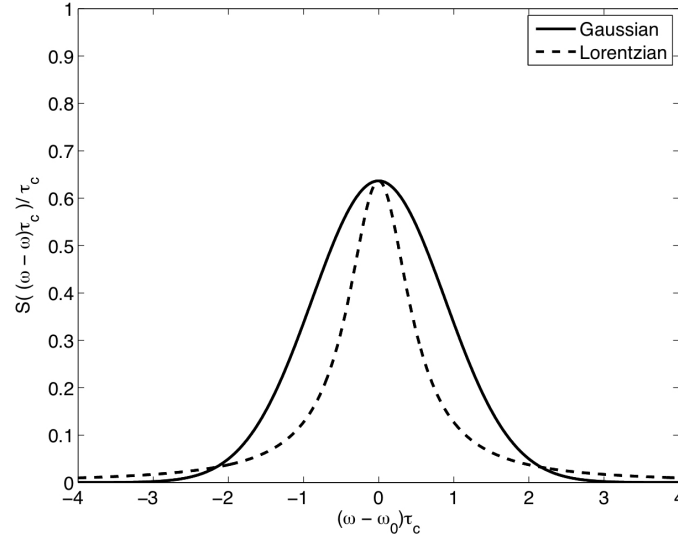


Figura 6: La densità spettrale di potenza normalizzata delle righe di forma Gaussiana e Lorentziana.

Se la radiazione è principalmente dovuta a collisioni tra atomi o molecole, le righe spettrali avranno una forma lorentziana [14]:

$$S_L(\omega) = \frac{2\tau_c}{\pi} \frac{1}{1 + 4(\omega - \omega_0)^2 \tau_c^2} \quad (32)$$

dove  $\omega_0$  è la frequenza media della radiazione emessa.

Entrambe le distribuzioni sono normalizzate<sup>32</sup> e mostrate nella figura 6. Naturalmente, nelle applicazioni reali la radiazione avrà probabilmente una distribuzione combinata di Gaussiana e Lorentziana.

**FWHM** È possibile trovare una relazione<sup>33</sup> tra la larghezza dello spettro e il tempo di coerenza calcolando la larghezza a metà altezza (FWHM) delle righe spettrali.

Per una distribuzione gaussiana in frequenza

$$FWHM_G : \Delta\omega = \omega'_+ - \omega'_- = \frac{\sqrt{2\pi \ln 2}}{\tau_c}$$

<sup>32</sup>Ovvero,  $\int_{-\infty}^{\infty} S_G(\omega) d\omega = 1$

<sup>33</sup>Data la forma analitica della riga, basta calcolare la massima densità spettrale di potenza, sostituire metà di tale massimo nell'espressione per  $S(\omega)$  (gaussiana o lorentziana) della riga e risolvere per le ascisse  $\omega_{\pm}$ .

Mentre, per una distribuzione lorentziana in frequenza

$$FWHM_L : \Delta\omega = \omega'_+ - \omega'_- = \frac{2}{\tau_c}$$

Quindi, in entrambi i casi, la larghezza della banda in frequenza è inversamente proporzionale al tempo di coerenza della radiazione, il che significa che una diminuzione di  $\Delta\omega$  aumenta il tempo di coerenza  $\tau_c$ .

**Coerenza ed osservazioni astronomiche** Il compromesso tra la larghezza della banda di frequenza e il tempo di coerenza è di fondamentale importanza durante la conduzione di esperimenti. Per misurare l'emissione termica proveniente da una stella, è necessario valutare attentamente il trade-off tra larghezza di banda stretta, che fornisce un tempo di coerenza più lungo (almeno entro la risoluzione dell'apparecchiatura sperimentale), e la potenza rilevata (la quale migliora il rapporto SNR, diminuisce il tempo di esposizione, e quindi il costo dell'osservazione, etc.).

## 12.5 Grado di coerenza del secondo ordine

Al fine di dedurre le proprietà delle fluttuazioni di intensità<sup>34</sup> della radiazione caotica in maniera analoga a quanto effettuato per le fluttuazioni di campo elettrico, prendiamo in considerazione due misurazioni in un punto specifico

---

<sup>34</sup>E' opportuno esplicitare cosa intendiamo con i simboli. Il campo elettrico può essere scritto in diverse forme: attraverso l'analisi di Fourier, può essere espresso come somma sulle frequenze negative e positive; tuttavia, in molti casi, non c'è bisogno di una forma così complicata del campo e possiamo limitarci alla sola parte a frequenza positive (per comodità di calcolo). Questa scelta è giustificata dal fatto che  $E(\mathbf{r}, t)$  è reale e che la parte a frequenza negativa non contiene alcuna nuova informazione che non sia già fornita dalla parte a frequenza positiva, poiché sono il complesso coniugato l'una dell'altra (si vede esplicitamente risolvendo le equazioni di Maxwell). L'intensità del campo elettromagnetico complesso è data dal vettore di Poynting

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

Secondo [11], un buon tempo di risoluzione sperimentale è dell'ordine di  $10^{-9}$  s, che è un tempo troppo lungo per rilevare oscillazioni del campo elettrico alle frequenze visibili ( $\omega_k \sim 10^{15}$  Hz). È quindi più significativo trattare l'intensità media  $\bar{I}(t)$  piuttosto che  $I(t)$ , dove la barra rappresenta la media su un periodo dell'onda

$$\bar{I}(t) = |\bar{\mathbf{S}}| = \frac{1}{T} \int_T \frac{1}{2} \varepsilon_0 c |E(\mathbf{r}, t)|^2 dt = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \overline{|E(\mathbf{r}, t)|^2} \quad (33)$$



dello spazio, registrate in due momenti distinti. Si realizza una serie di coppie di rilevazioni dell'intensità in un punto fisso nello spazio, mantenendo un intervallo temporale costante  $\tau$  tra le misurazioni. La media del prodotto di ogni coppia di rilevazioni definisce la funzione di correlazione dell'intensità della radiazione, la quale è paragonabile alla funzione di correlazione dei campi elettrici. La forma normalizzata della funzione di correlazione è chiamata grado di coerenza temporale del secondo ordine

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \bar{I}(t)\bar{I}(t+\tau) \rangle}{\langle \bar{I}(t) \rangle^2} = \frac{\langle E^*(t)E^*(t+\tau)E(t+\tau)E(t) \rangle}{\langle E^*(t)E(t) \rangle^2} \quad (34)$$

Dove  $\bar{I}$  è l'intensità, mediata su un intervallo di tempo sufficientemente lungo, di un fascio collimato di raggi emessi da  $n$  atomi indipendenti ed equivalenti. Il campo elettrico totale è

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) + \dots + E_n(t) = E_0 e^{-i\omega_0 t} (e^{i\phi_1(t)} + e^{i\phi_2(t)} + \dots + e^{i\phi_n(t)})$$

E l'intensità media del fascio è

$$\begin{aligned} \bar{I} &\equiv \langle \bar{I}(t) \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \langle E^*(t)E(t) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 c \langle |E_1 e^{i\phi_1(t)} + E_2 e^{i\phi_2(t)} + \dots + E_n e^{i\phi_n(t)}|^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 c n \langle |E_i|^2 \rangle \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

I termini incrociati relativi a sorgenti diverse danno un contributo medio nullo a  $\bar{I}$ , a causa delle fasi casuali  $\phi_i(t)$ .

I limiti di  $g^{(2)}(0)$  possono essere ricavati considerando la varianza dell'intensità:

$$(\Delta \bar{I}(t))^2 = \langle \bar{I}(t)^2 \rangle - \langle \bar{I}(t) \rangle^2$$

Poiché per definizione la varianza è semidefinita positiva, abbiamo  $\bar{I}^2 \equiv \langle \bar{I}(t)^2 \rangle \leq \langle \bar{I}(t)^2 \rangle$ , il che implica che, per  $\tau = 0$ ,  $g^{(2)}(0) = \frac{\langle \bar{I}(t)^2 \rangle}{\bar{I}^2} \geq 1$ . Non è possibile stabilire un limite superiore. Infatti, il codominio è

$$1 \leq g^{(2)}(0) \leq \infty. \quad (35)$$

Per ritardi temporali diversi da zero, la natura positiva dell'intensità impone solo il vincolo

$$0 \leq g^{(2)}(\tau) \leq \infty$$

Si dimostra anche che

$$g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0) \quad (36)$$

Quindi, il grado di coerenza del secondo ordine non può mai superare il suo valore per un ritardo temporale nullo. Le equazioni 35 e 36 sono valide per tutte i tipi di radiazione classica.

**onda piana ideale** Se un'onda piana monocromatica si propaga lungo la direzione  $z$  con un'ampiezza  $E_0$  e una fase costanti

$$E(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega_0 t)}$$

troviamo che

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle E^*(t)E^*(t+\tau)E(t+\tau)E(t) \rangle}{\langle E^*(t)E(t) \rangle^2} = 1$$

Si può dimostrare che una tale onda ha completa coerenza temporale dell' $n$ -esimo ordine, ovvero  $g^{(n)}(\tau) = 1$ , per cui è stabile nella propagazione.

**Radiazione caotica** Se la sorgente di radiazione caotica consiste di  $n$  atomi radianti, ciascuno dei quali non è correlato con gli altri, allora la funzione di correlazione del secondo ordine può essere riscritta in termini dei contributi dei singoli atomi. Per la radiazione caotica, si dimostra che

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + |g^{(1)}(\tau)|^2 \quad n \gg 1 \quad (37)$$

Questa relazione può essere utilizzata per ottenere  $|g^{(1)}(\tau)|$  dalla misurazione di  $g^{(2)}(\tau)$ .

I limiti di  $g^{(2)}(\tau)$  possono essere ricavati utilizzando i valori limite di  $g^{(1)}(\tau)$  (eq. 24 e 25):

$$g^{(2)}(0) = 2$$

e

$$\lim_{T \rightarrow \infty} g^{(2)}(\tau) = 1 \quad \text{per } \tau \gg \tau_c$$

Questi limiti sono validi solo per la radiazione caotica.

Inserite le distribuzioni statistiche della radiazione, allargata per collisioni (eq. 27) o per effetto Doppler (eq. 28), nell'eq. 37, otteniamo rispettivamente

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + e^{-2|\tau|/\tau_c} \quad (38)$$

e

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + e^{-\pi(\tau/\tau_c)^2} \quad (39)$$

La figura 7 mostra il comportamento di  $g^{(2)}(\tau)$  per le diverse distribuzioni, inclusa quella di un'onda piana monocromatica. Un'onda è detta coerente del secondo ordine se si verifica simultaneamente che  $|g^{(1)}| = 1$  e  $|g^{(2)}| = 1$ . Secondo questo criterio per la coerenza del secondo ordine, la radiazione caotica non è coerente al secondo ordine (nonostante possa essere coerente del primo ordine per  $\tau \ll \tau_c$ ).

Il grado di coerenza di secondo ordine svolge un ruolo nella distinzione tra onde elettromagnetiche che possono essere descritte dalla teoria classica, cosa che il grado di coerenza di primo ordine non è in grado di fare.

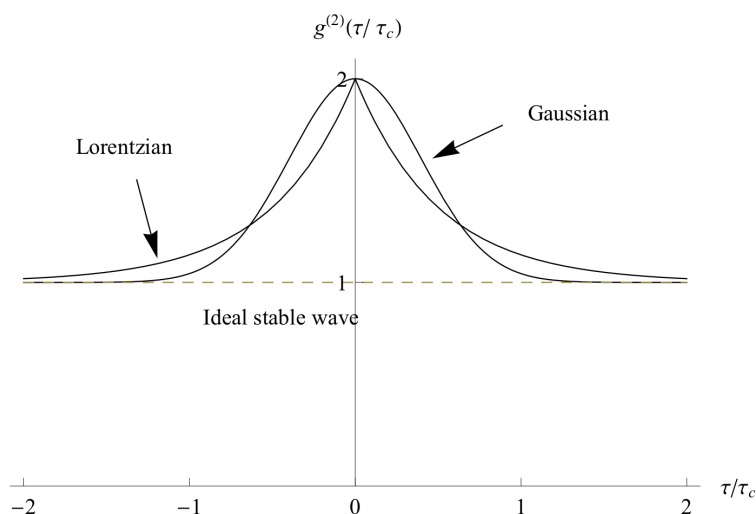


Figura 7: Una rappresentazione dei gradi di coerenza del secondo ordine della luce caotica con distribuzione di frequenza lorentziana e gaussiana e tempo di coerenza  $\tau_c$ . La linea tratteggiata mostra il grafico di  $g^{(2)}(\tau)$  della luce coerente (onda piana ideale). Adattato da [11].

**Interferometria di intensità** L'effetto Hanbury-Brown e Twiss (HB-T) è uno qualsiasi degli effetti di correlazione nelle intensità ricevute da due rivelatori da un fascio di particelle. Gli effetti HB-T possono generalmente essere attribuiti alla dualità onda-particella del fascio. I dispositivi che sfruttano l'effetto sono comunemente chiamati interferometri di intensità. Il fenomeno di correlazione delle intensità è osservato, per esempio, quando due rivelatori sono posti in punti diversi e rilevano simultaneamente particelle (come fotoni) provenienti dalla stessa sorgente. Il principio fondamentale sottostante l'effetto HB-T è che i fotoni possono interferire tra loro. Questo interferenza non dipende dalla fase delle onde elettriche associate alle particelle, ma dalla loro intensità, ovvero il quadrato dell'ampiezza. Questo effetto ha importanti implicazioni e applicazioni, soprattutto nell'astrofisica e nella fisica delle particelle. Per esempio, in astrofisica l'interferometria di intensità è utilizzata per ricavare informazioni usufruibili nello studio di oggetti come le pulsar, i diametri angolari delle stelle, le occultazioni da parte di satelliti, i passaggi di pianeti extrasolari, e si basa sul secondo ordine di coerenza [15]. In appendice G abbiamo riassunto i principali limiti degli interferometri di Michelson e di intensità nel campo delle osservazioni astronomiche.

## 12.6 Generalizzazione

I gradi di coerenza di primo e secondo ordine calcolati sopra assumono un fascio di radiazione stazionario, polarizzato, e piano-parallelo con un punto di osservazione comune. Le loro definizioni, date dalle eq. 21 e 34, possono essere generalizzate per coprire campi ottici non stazionari, con una dipendenza da tre coordinate spaziali, e una polarizzazione qualsiasi.

Nella teoria scalare della coerenza parziale, il comportamento di un campo ottico è descritto come un processo casuale scalare. Le quantità centrali della teoria sono la funzione di coerenza reciproca, che descrive le correlazioni nel dominio spazio-temporale, e il suo analogo nel dominio delle frequenze, la funzione di densità spettrale incrociata. In aggiunta, le loro versioni normalizzate, il grado di coerenza e il grado di coerenza spettrale, sono le misure della forza delle correlazioni e ci forniscono la conoscenza quantitativa della coerenza in un campo scalare casuale.

Anche se la teoria scalare è estremamente utile in molti casi pratici, naturalmente fallisce nel descrivere fenomeni che sorgono dalla natura vettoriale della radiazione, come la polarizzazione. La polarizzazione della radiazione è di particolare importanza, per esempio, in connessione con la fibra ottica, la microscopia a campo vicino e l'interazione tra luce e materia, e quindi la teoria della coerenza scalare non può essere applicata in questi ambiti, e molti altri [16]. Invece, deve essere impiegata la teoria elettromagnetica, che in generale porta a un processo casuale vettoriale a sei componenti. Come è ben noto, le componenti sono globalmente connesse dalle equazioni di Maxwell che governano la propagazione e la polarizzazione del campo elettromagnetico.

L'indagine scientifica sulla coerenza è ancora aperta. Recentemente sono state introdotte due nuove misure per la coerenza e la polarizzazione. La prima di esse, ovvero il grado di polarizzazione per campi che oscillano in tutte e tre le dimensioni [17] [18]. La seconda, chiamata grado di coerenza per campi elettromagnetici [19], combina le correlazioni dei campi elettromagnetici in una singola quantità che caratterizza la coerenza nel dominio spazio-temporale. Infine, nell'articolo [16], si traggono le connessioni fra queste due caratterizzazioni e si discutono le implicazioni.

# Appendici

## A Dominio del tempo e della frequenza

**Spettro** Nella formula 17, si noti che  $X_k$  è un numero complesso che codifica sia l'ampiezza che la fase di una componente sinusoidale della funzione  $x_n$ . L'ampiezza e la fase del segnale possono essere calcolate come:

$$\text{amp} = \frac{|X_k|}{N} = \frac{\sqrt{\text{Re}(X_k)^2 + \text{Im}(X_k)^2}}{N}$$

$$\text{fase} = \text{atan2}(\text{Im}(X_k), \text{Re}(X_k))$$

dove  $\text{atan2}$  è la forma a due argomenti della funzione  $\arctan$ . Le ampiezze restituite dalla DFT sono uguali alle ampiezze dei segnali immessi nella DFT se normalizziamo per il numero di punti campione. Si noti che facendo ciò si dividerà la potenza tra i lati positivi e negativi; se il segnale in ingresso è una sequenza reale, lo spettro sarà simmetrico e, invece di dividere per  $N$ , bisogna dividere per  $\frac{N}{2}$  per ottenere l'ampiezza corrispondente al segnale reale nel dominio del tempo [10].

Se  $N$  è pari, gli elementi  $X_1, X_2, \dots, X_{N/2-1}$  contengono i termini di frequenza positiva in ordine crescente, e gli elementi  $X_{N/2}, \dots, X_{N-1}$  contengono i termini di frequenza negativa, in ordine di frequenza decrescente. Se  $N$  è dispari, gli elementi  $X_1, X_2, \dots, X_{(N-1)/2}$  contengono i termini di frequenza positiva in ordine crescente, e gli elementi  $X_{(N+1)/2}, \dots, X_{N-1}$  contengono i termini di frequenza negativa in ordine decrescente.

Dalla definizione della DFT, la componente  $k = 0$  è

$$X_0 = \sum_{n=0}^{N-1} x_n$$

Questa formula riveste un ruolo nel processo di verifica<sup>35</sup>.

---

<sup>35</sup>Se il calcolo di  $X_0$  ottenuto tramite computer non corrisponde alla sommatoria dei campioni  $x_n$ , ciò indica inequivocabilmente un errore nel calcolo. Tuttavia, è importante notare che anche se i valori calcolati coincidono, ciò non garantisce per sé l'accuratezza dell'intera Trasformata Discreta di Fourier (DFT). Pertanto, la conformità di  $X_0$  con la somma dei campioni  $x_n$  è una condizione necessaria ma non sufficiente per la correttezza del calcolo della DFT.

**Simmetrie tra segnali nel dominio del tempo e della frequenza** Se i campioni  $x_n$  sono valori reali, allora la DFT è hermitiana: la parte reale dello spettro è una funzione pari e la parte immaginaria è dispari. I valori  $X_k$  sulle frequenze positive saranno i complessi coniugati dei corrispondenti valori sulle frequenze negative  $X_{-k} = X_k^*$ . Lo spettro sarà simmetrico; pertanto, di solito in questo caso si grafica lo spettro solo sulle frequenze positive.

Altre simmetrie esistenti tra segnali nel dominio del tempo e della frequenza sono mostrate in tabella 3.

Tabella 3: Simmetrie tra segnali nel dominio del tempo e della frequenza. Tabella tratta da [National Radio Astronomy Observatory - Essential Radio Astronomy](#)

<b>Dominio del tempo</b>	<b>Dominio della frequenza</b>
reale	hermitiano (reale=pari, immaginario=dispari)
immaginario	anti-hermitiano (reale=dispari, immaginario=pari)
pari	pari
dispari	dispari
reale e pari	reale e pari (ad es., trasformata di coseno)
reale e dispari	immaginario e dispari (ad es., trasformata di seno)
immaginario e pari	immaginario e pari
immaginario e dispari	reale e dispari

## B Teorema del campionamento

Il teorema del campionamento di Nyquist-Shannon rappresenta un pilastro fondamentale dell'elaborazione dei segnali digitali (DSP) e ha notevoli implicazioni in campo teorico e pratico. Questo teorema stabilisce che un segnale continuo limitato in banda, cioè con un intervallo di frequenze confinato entro  $\Delta\nu$ , può essere correttamente ricostruito da campioni uniformemente distanziati nel tempo, con un intervallo

$$\Delta t \leq \frac{1}{2\Delta\nu} \equiv \frac{1}{f_{\text{sampling}}} \quad (40)$$

La frequenza di campionamento soglia,  $f_{\text{sampling}}$ , è conosciuta come **tasso di Nyquist**. Ne deriva che la relazione 9 è una conseguenza del Teorema del Campionamento. In seguito, supporremo che l'estremo inferiore dell'intervallo di frequenze del segnale sia zero.

**Esempi** Il teorema ha importanti implicazioni in un'ampia varietà di applicazioni pratiche. Un esempio emblematico si trova nell'ambito dell'audio digitale: per prevenire l'insorgenza di fenomeni di aliasing, i CD sono campionati a una frequenza di 44.1 kHz, leggermente superiore al doppio della soglia massima dell'udito umano, fissata a 20 kHz. Nell'appendice C, viene esposto un esempio pratico che illustra l'effetto dell'aliasing su componenti sonore.

### B.1 Nyquist frequency & Nyquist rate

La relazione tra la Frequenza di Nyquist  $\nu_{\text{Nyquist}}$ , espressa in cicli al secondo, e la frequenza di campionamento  $f_{\text{sampling}}$ , espressa in campioni al secondo, è

$$\nu_{\text{Nyquist}} = \frac{1}{2} f_{\text{sampling}} \quad (41)$$

È importante evidenziare che il tasso di Nyquist è una proprietà di un segnale in tempo continuo, mentre la frequenza di Nyquist è attribuita a un sistema in tempo discreto.

**Frequenza di Nyquist** La frequenza di Nyquist (*Nyquist frequency*), o frequenza di piegamento, è la metà della frequenza di campionamento del campionatore. E' una caratteristica del campionatore, di frequenza  $f_{sampling}$ , che trasforma una funzione o un segnale continui in una sequenza discreta. La frequenza di Nyquist rappresenta la frequenza massima di un segnale analogico affinché possa essere convertito in un segnale digitale esente da aliasing.

**Tasso di Nyquist** Il tasso di Nyquist (*Nyquist rate*) è il doppio della frequenza massima di un segnale. E' una caratteristica di un segnale continuo, composto da frequenze fino a  $\nu_{Nyquist}$ , che deve essere campionato. Il tasso di Nyquist indica il tasso di campionamento sopra il quale la sequenza di campioni discreta in tempo è priva di aliasing.

## B.2 Aliasing

L'aliasing è il fenomeno di sovrapposizione delle componenti relative a frequenze diverse risultante da un tasso di campionamento inferiore a  $f_{sampling}$  del segnale originale, oppure da una frequenza massima presente nel segnale superiore a  $\nu_{Nyquist}$  del dispositivo di campionamento.

Questa sovrapposizione provoca artefatti quando il segnale viene ricostruito a partire dallo spettro campionato, causando una discrepanza tra il segnale ricostruito e il segnale analogico originale. Di conseguenza, in presenza di aliasing, il recupero fedele del segnale analogico originale a partire dal segnale campionato diventa generalmente impraticabile. Gli effetti indesiderati dell'aliasing possono essere mitigati o annullati attraverso l'uso di filtri anti-aliasing specificamente progettati a tale scopo.

Nelle applicazioni pratiche, si sceglie prima la frequenza massima da preservare basandosi sul contenuto atteso (voce, musica, ecc.) e sulla fedeltà desiderata. Successivamente, si inserisce un filtro anti-aliasing per attenuare le frequenze superiori al limite. Infine, si determina un tasso di campionamento  $f_{sampling}$  adeguato, basandosi sulle caratteristiche del filtro, per garantire una quantità di aliasing trascurabile. In applicazioni con un tasso di campionamento predeterminato, come nel caso dei CD, si seleziona il filtro in base a  $\nu_{Nyquist}$ .

In una DFT con  $N$  campioni che coprono un tempo totale  $T = N\Delta t = N/f_{sampling}$ , la risoluzione in frequenza è  $1/T$ , e la frequenza più alta nello spettro corrisponde al bin  $k = N/2$ . Frequenze superiori a  $N/(2T) = f_{sampling}/2 = \nu_{Nyquist}$  verranno erroneamente mappate a frequenze inferiori.



## C Esempio di applicazione

L'appendice in esame si occupa dell'analisi e della manipolazione di onde sinusoidali, con particolare riferimento al campo delle onde sonore.

Un'onda sinusoidale, variabile sia nello spazio che nel tempo, è caratterizzata da una periodicità temporale (frequenza  $\nu$ ) e spaziale (lunghezza d'onda  $\lambda$ ). Il processo di campionamento di tale onda può essere realizzato in punti discreti equidistanti lungo l'asse spaziale (longitudinalmente alla direzione di propagazione) o, equivalentemente, lungo l'asse temporale, in virtù della relazione  $v = \lambda\nu$ , dove  $v$  è la velocità di propagazione dell'onda.

In questa appendice, illustriamo come rappresentare un segnale nel dominio della frequenza, operare una selezione filtrante di una banda di frequenze specifica, e successivamente riconvertire il segnale filtrato nel dominio temporale, evidenziando l'invertibilità della DFT. Per un riscontro più tangibile, scegliamo di concentrarci sulle onde sonore percepibili dall'orecchio umano (20 Hz-20 kHz). In questo modo potremo generare ed ascoltare sia il suono originale, risultante dalla combinazione di diverse componenti sonore<sup>36</sup> (incluse note musicali e deboli suoni acuti), sia il suono filtrato, che in questo esempio si riferisce alla selezione delle frequenze corrispondenti alla nota Do. In aggiunta, viene proposta un'analisi dell'effetto del Teorema del Campionamento, complementare all'appendice B, illustrando come appare uno spettro affetto da *aliasing*. Infine, concluderemo evidenziando il rumore presente nello spettro trattato e usando la funzione finestra *Blackman* per ridistribuire l'ampiezza in modo tale da ottenere uno spettro più fedele a quello della sorgente.

**Notebook e librerie** Questa appendice, concepita per illustrare attraverso un esempio alcuni dei concetti cardine della teoria dell'Elaborazione del Segnale Digitale, è strutturata in seguito come un notebook di Jupyter Notebook<sup>37</sup>. Di conseguenza, è un'appendice ordinata sequenzialmente, che offre lo stesso approccio di questo ambiente interattivo<sup>38</sup> per la codifica, la visualizzazione dei dati, l'elaborazione di testo e di equazioni. Il contenuto del notebook è delimitato da linee puntinate orizzontali che ne segnano l'inizio e la fine. Inoltre, useremo Matplotlib, una libreria di visualizzazione dei dati in Python.

---

<sup>36</sup>Le frequenze sono arrotondate per agevolare l'interpretazione dei grafici.

<sup>37</sup>Jupyter Notebook è un'applicazione web open source che consente di creare e condividere documenti contenenti codice eseguibile, equazioni, visualizzazioni e testo.

<sup>38</sup>Si intende che i blocchi di codice sono seguiti dall'eventuale output, ed entrambi sono distinti dal testo descrittivo.

Per ulteriori informazioni su Python e Numpy si consiglia di consultare la nota in sezione 11 o l'apposita documentazione sul web.

**convenzioni** I simboli utilizzati in questa appendice sono coerenti e conformi alle convenzioni stabilite nella sezione 9. Si rimanda pertanto a detta sezione per un approfondimento e un chiarimento delle definizioni e dei termini impiegati.

## ..... Jupyter Notebook .....

**Creazione del segnale** Ipotizziamo di registrare campioni equidistanti di un segnale, composto da quattro onde sonore: due note musicali, un'onda al limite dell'ultrasuono e un rumore acuto. La durata dell'osservazione è di cinque secondi e la frequenza di campionamento, selezionata con criterio, è di 44100 Hz.

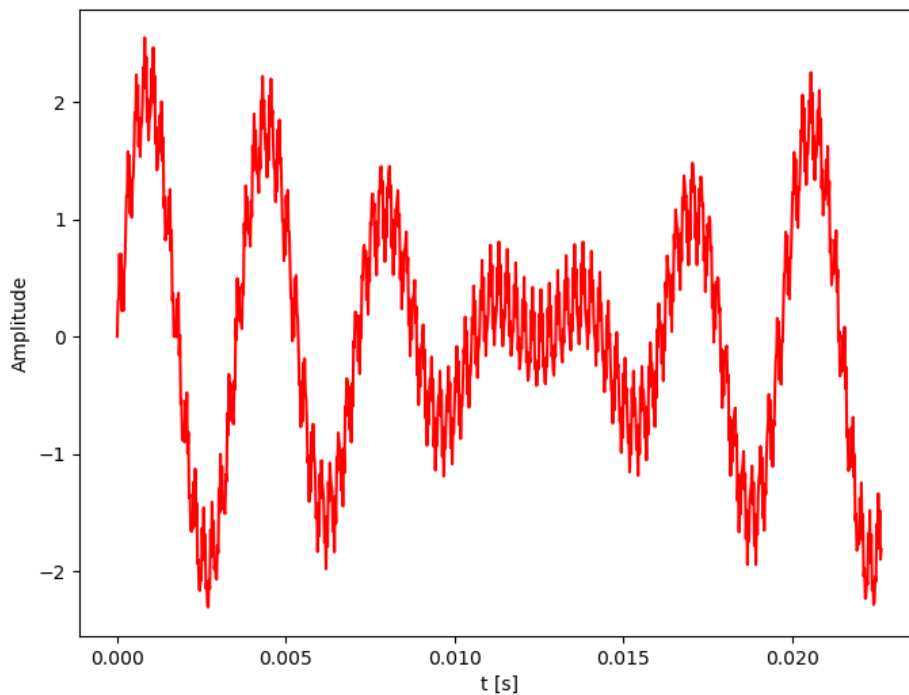
```
In [1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

sample_rate = 44100 # hertz
duration = 5 # seconds
N=sample_rate * duration
sample_timeinterval=5/N # seconds

t = np.linspace(0, duration, N , endpoint=False)

Do = np.sin(2 * np.pi * 260 * t)
Mi = 1.1*np.sin(2 * np.pi * 300 * t)
Noise= 0.3*np.sin(2 * np.pi * 4000* t)
Ultrasound= 0.2*np.sin(2 * np.pi * 20000* t)
mixed_sound = Do + Mi + Noise + Ultrasound

plt.figure(figsize = (8, 6))
plt.plot(t[:1000], mixed_sound[:1000], 'r')
plt.xlabel('t [s]')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.show()
```

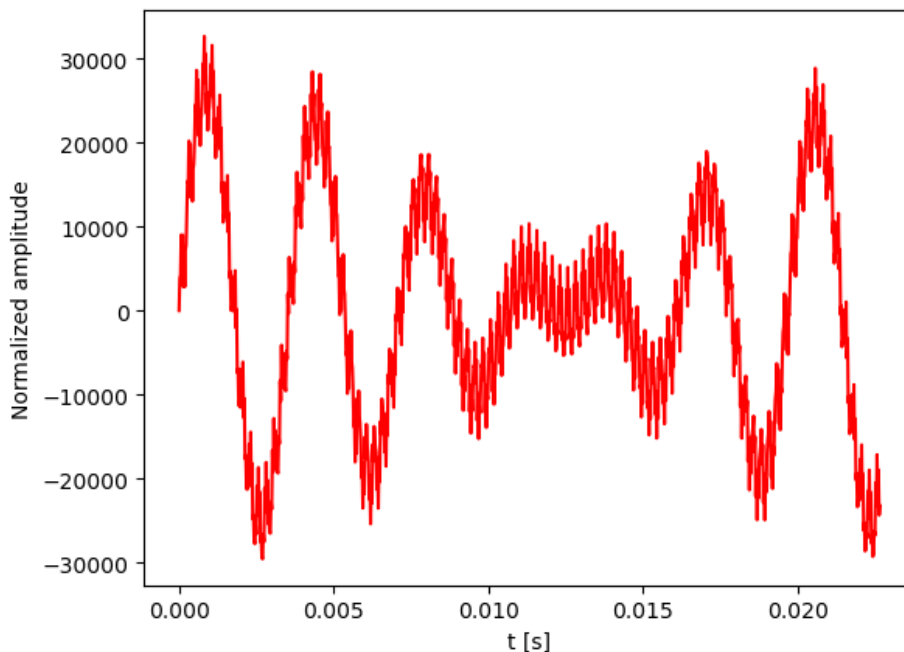


**Ascolto il file audio** La normalizzazione o il ridimensionamento del segnale è un passo essenziale per adattarlo al formato di destinazione. Il formato di destinazione della modalità prevista per la memorizzazione dell'audio è un numero intero a 16 bit. Questo formato presenta un intervallo di valori che varia da  $-32768$  a  $32767$ .

`mixed_sound` viene ridimensionato per adattarlo perfettamente a un numero intero a 16 bit e quindi trasmetterlo a quel tipo di dati utilizzando il metodo `np.int16`. Dividendo `mixed_sound` per il suo valore massimo, lo normalizziamo a variare tra -1 e 1. Quando questo segnale viene moltiplicato per 32767, viene scalato tra -32767 e 32767.

```
In [2]: normalized_mixed_sound= \
        np.int16((mixed_sound/mixed_sound.max())*32767)

plt.plot(t[:1000],normalized_mixed_sound[:1000], 'r')
plt.xlabel('t[s]')
plt.ylabel('Normalized amplitude')
plt.show()
```



Per ascoltare l'audio, è necessario memorizzarlo in un formato leggibile da un lettore audio. Il modo più semplice per farlo è utilizzare il metodo `wavfile.write` di SciPy per memorizzarlo in un file WAV. Gli interi a 16 bit sono un tipo di dati standard per i file WAV.

```
In [3]: from scipy.io.wavfile import write
        write("sound.wav", sample_rate, normalized_mixed_sound)
```

Questo codice salva l'audio in un file `sound.wav` nella cartella in cui è eseguito lo script Python. Possiamo quindi ascoltare questo file utilizzando qualsiasi lettore audio o anche con Python.

## C.1 Spettroscopia del segnale sonoro

Useremo le funzioni nel modulo `scipy.fft`:

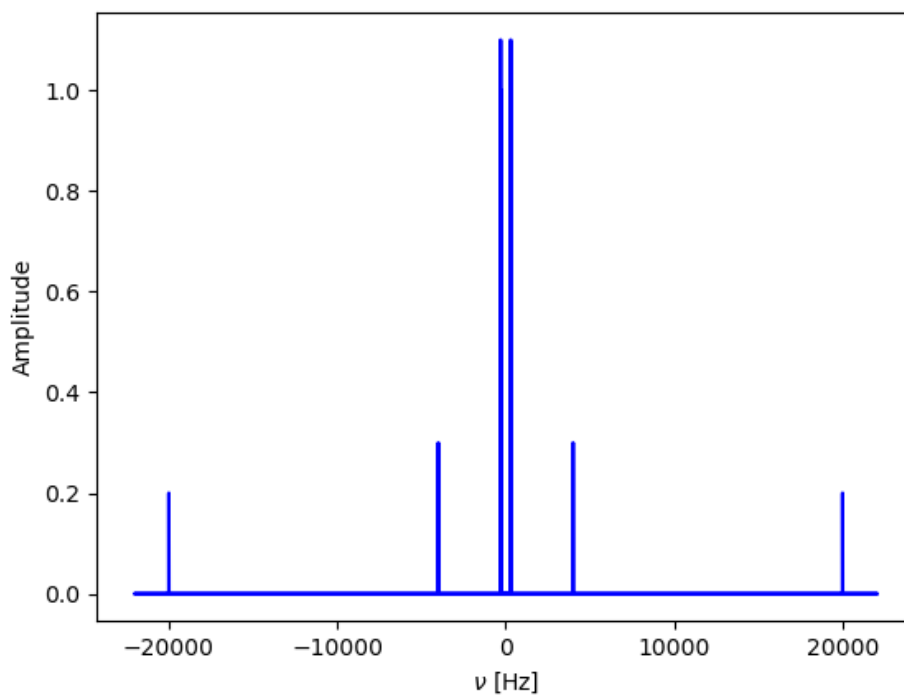
- `fft()` calcola la FFT;
- `fftfreq()` calcola le frequenze corrispondenti all'output di `fft()`.

Siccome il segnale in esame è reale, lo spettro sarà simmetrico. Potremmo utilizzare questa simmetria per rendere la trasformazione di Fourier ancora più veloce calcolandone solo la metà. In SciPy questo è implementato dalla funzione `rfft()` per la FFT e la corrispondente funzione `rfftfreq()` per le coordinate in ascissa. Ai fini di questa appendice la scelta è indifferente.

```
In [4]: from scipy.fft import fft, fftfreq

N = sample_rate * duration
X = fft(mixed_sound)
freq = fftfreq(N, 1 / sample_rate)

plt.plot(freq, np.abs(X)/(N/2), 'b')
plt.xlabel(r'$\nu$ [Hz]')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.show()
freq[(N//2-1)]
```



```
Out[4]: 22049.800000000003
```

Calcolando la DFT abbiamo scomposto il segnale campionato nelle onde monocromatiche che lo compongono convertendo l'informazione sul segnale nel dominio del tempo nell'informazione sulle ampiezze delle onde componenti in funzione della frequenza, chiamato **spettro di ampiezza**. Infatti, nello spettro di ampiezza che abbiamo ottenuto riconosciamo ciascuno dei suoni sovrapposti dalla frequenza in ascissa e la corrispondente ampiezza in ordinata.

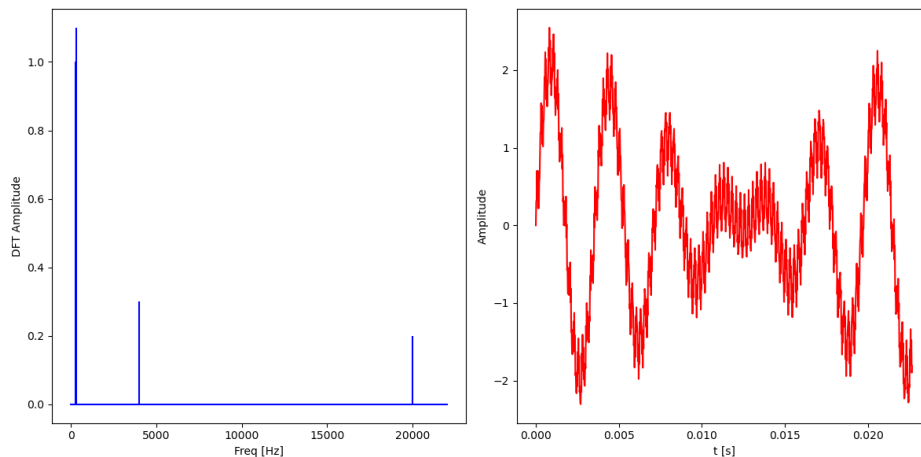
È una prassi comune nel caso di segnali reali rappresentare solamente la parte positiva dello spettro, come illustrato in seguito:

```

In [5]: N_oneside = N//2
        freq_oneside = freq[:N_oneside]
        X_oneside=X[:N_oneside]

        plt.figure(figsize = (12, 6))
        plt.subplot(121)
        plt.stem(freq_oneside, abs(X_oneside)/N_oneside, \
                'b', markerfmt=" ",basefmt="-b")
        plt.xlabel('Freq [Hz]')
        plt.ylabel(r'DFT Amplitude')
        plt.subplot(122)
        plt.plot(t[:1000], mixed_sound[:1000], 'r')
        plt.xlabel('t [s]')
        plt.ylabel('Amplitude')
        plt.tight_layout()
        plt.show()

```



**frequenza di Nyquist** La funzione `fft()` restituisce una frequenza massima leggermente superiore a ventimila hertz, più precisamente 22050 Hz (output [4]), la quale corrisponde alla frequenza di Nyquist di questo campionamento (si veda l'app. B). Questo valore si allinea perfettamente con la metà della frequenza di campionamento designata per l'analisi in questione. Questa circostanza è attribuibile direttamente al Teorema del Campionamento, un principio fondamentale nel campo dell'elaborazione dei segnali. Tale teorema postula che, per garantire che lo spettro estratto sia esente da effetti di sovrapposizione dei contributi relativi a diverse componenti, il tasso di campionamento deve essere almeno il doppio della frequenza massima nel segnale esaminato.

**calcolo delle frequenze** Un'analisi dettagliata del codice sottostante la funzione `fft()` è fornita nella sezione 11. Per arricchire ulteriormente la comprensione, si procede a illustrare l'implementazione di una versione semplificata della funzione `freqfft()`, destinata al calcolo delle frequenze.

```
In [6]: N = duration*sample_rate
        n = np.arange(N)
        duration=5
        freq = n/duration
        freq[:N//2]
```

```
Out [6]: array([0.00000e+00, 2.00000e-01, 4.00000e-01,
                ..., 2.20494e+04, 2.20496e+04, 2.20498e+04])
```

## C.2 Filtraggio del segnale

La tecnica di filtraggio esposta in questa sezione è concepita principalmente per fini didattici, piuttosto che per applicazioni pratiche nel mondo reale. L'applicazione di questo processo a segnali reali, come un brano musicale, potrebbe paradossalmente incrementare il livello di rumore piuttosto che ridurlo. Il filtraggio rappresenta un argomento complesso che necessita di un'approfondita comprensione matematica.

Utilizzando il numero  $N$  di campioni, la frequenza massima dello spettro, e il fatto che le frequenze corrispondenti agli output  $X_k$  siano equamente distanziate, possiamo calcolare l'indice delle frequenze da eliminare e annullare il valore dello spettro in questi punti. La procedura per convertire una frequenza  $\nu$  nel corrispondente indice  $k$  consiste nel dividere la frequenza della componente che si intende annullare per la frequenza massima presente nello spettro, ottenendo una frequenza normalizzata, la quale risulta compresa nell'intervallo tra 0 e 1. Successivamente, moltiplicando tale frequenza normalizzata per il numero totale di data-point presenti sul lato positivo dello spettro, si determina l'indice cercato. A tale scopo, ricordiamo che:

La frequenza massima della DFT è metà della frequenza di campionamento.

Implementiamo un filtro monocromatico:

```

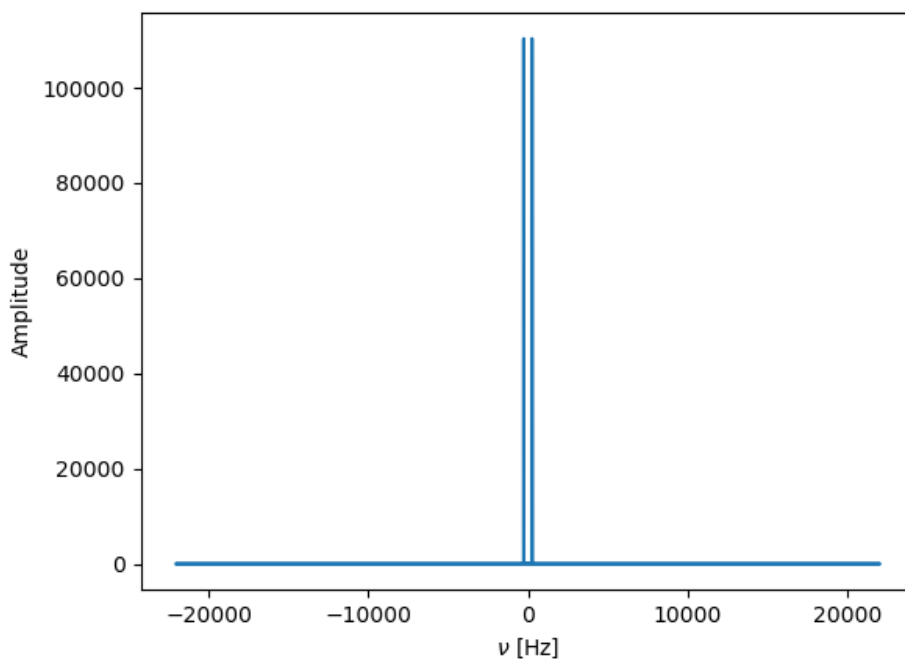
In [7]: N = sample_rate*duration

# indice della frequenza da eliminare
index_noise= int((20000/(sample_rate/2))*(N/2))
index_us= int((4000/(sample_rate/2))*(N/2))
index_Mi= int((300/(sample_rate/2))*(N/2))

X[index_noise - 1 : index_noise + 1] = 0
X[-index_noise - 1 : -index_noise + 1] = 0
X[index_us - 1 : index_us + 1] = 0
X[-index_us - 1 : -index_us + 1] = 0
X[index_Mi - 1 : index_Mi + 1] = 0
X[-index_Mi - 1 : -index_Mi + 1] = 0

plt.plot(freq, np.abs(X))
plt.xlabel(r'\nu$ [Hz]')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.show()

```



Avremmo potuto implementare il filtro in maniera "meno puntuale" optando per la realizzazione di un filtro, più realistico, passa-basso:

```

In [8]: cut_off=300
        X[np.abs(freq) > cut_off] = 0

```



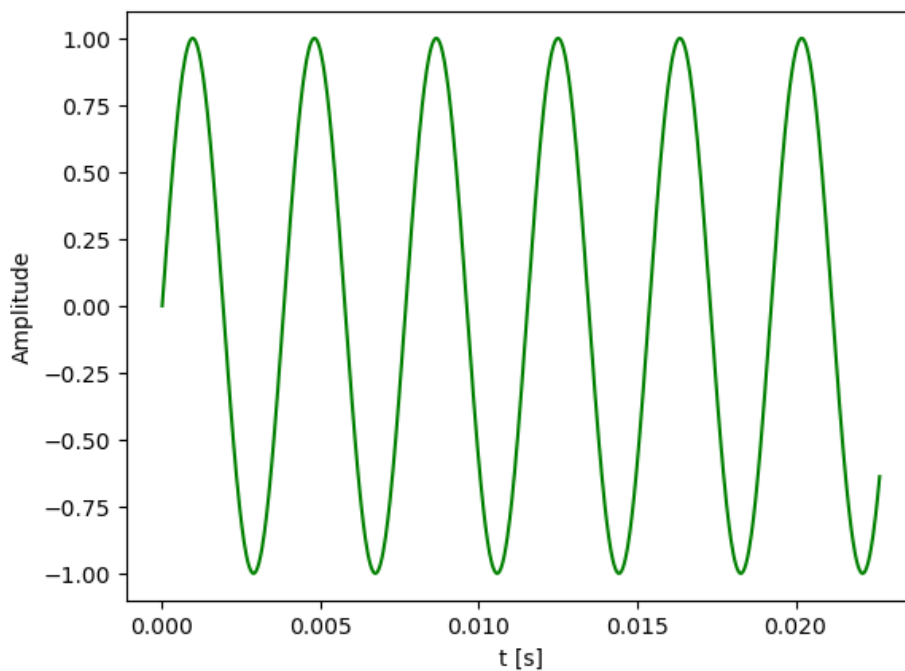
### C.3 FFT inversa del segnale filtrato

Per riconvertire l'informazione nel dominio temporale, bisogna applicare una IDFT. Nel modulo `scipy.fft` questa operazione è implementata dalle funzioni `fft()` e `irfft()`, inverse rispettivamente delle funzioni `ifft()` e `rfft()`. La funzione `ifft()` richiede la lunghezza del segnale come secondo parametro. Procediamo con la determinazione del segnale filtrato in funzione del tempo:

```
In [9]: from scipy.fft import ifft

        Do = ifft(X, len(mixed_sound))

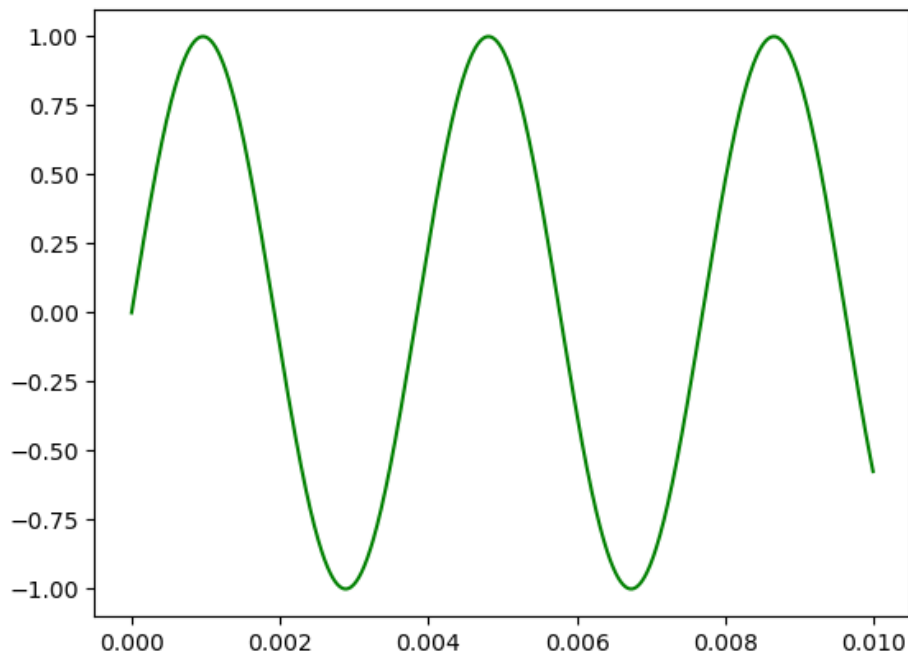
        plt.plot(t[:1000], Do[:1000], 'g')
        plt.xlabel('t [s]')
        plt.ylabel('Amplitude')
        plt.show()
```



**Confronto con il segnale filtrato atteso** Confrontiamo il segnale ottenuto attraverso l'applicazione della IDFT con la nota musicale Do appartenente al segnale composto originariamente. Analizziamo il segnale risultante dall'applicazione della IDFT mettendolo a confronto con la nota musicale Do, che fa parte del segnale composto originale. Questo confronto ci permetterà di valutare la fedeltà della ricostruzione del segnale.

```
In [10]: t = np.linspace(0, 0.01, 1000, endpoint=False)
Do_aspettato = np.sin(2*np.pi*260*t)

plt.plot(t, Do_aspettato, 'g')
plt.show()
```



Come previsto, il confronto evidenzia che il segnale filtrato corrisponde all'onda Do presente nel segnale originale. Questa onda compie 0.26 periodi in 0.001 secondi, equivalente a 1.04 cicli in 0.004 secondi, e si caratterizza per un'ampiezza costante pari a 1.

**Ascolto il file audio filtrato** Ribadendo quanto precedentemente affermato, è necessario normalizzare il segnale per poterlo esportare in un formato WAV. Pertanto, adotteremo un procedimento analogo a quello sopra utilizzato:

```
In [11]: norm_new_sig = np.int16(Do * (32767 / Do.max()))
write("clean_sound.wav", sample_rate, norm_new_sig)
```

## C.4 Effetto della funzione finestra

**Creazione del segnale in una finestra più breve** Ipotizziamo di replicare la raccolta dati precedentemente descritta, apportando una variazione

unicamente nella durata dell'osservazione: un'osservazione della durata di un secondo, mantenendo invariata la frequenza di campionamento a 44100 Hz.

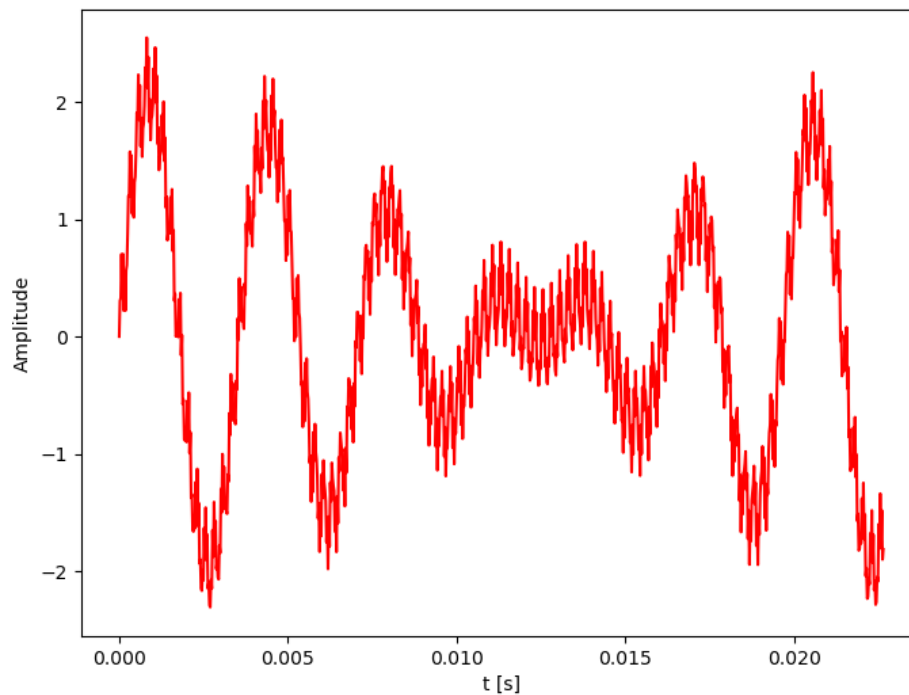
```
In [12]: sample_rate = 44100 # hertz
duration = 1 # seconds
N=sample_rate * duration
sample_timeinterval=duration/N

t = np.linspace(0, duration, N , endpoint=False)

Do = np.sin(2 * np.pi * 260 * t)
Mi = 1.1*np.sin(2 * np.pi * 300 * t)
Noise= 0.3*np.sin(2 * np.pi * 4000* t)
Ultrasound= 0.2*np.sin(2 * np.pi * 20000* t)

mixed_sound = Do + Mi + Noise + Ultrasound

plt.figure(figsize = (8, 6))
plt.plot(t[:1000], mixed_sound[:1000], 'r')
plt.xlabel('t [s]')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.show()
```



```

In [13]: from scipy.fft import fft, fftfreq

N = sample_rate * duration

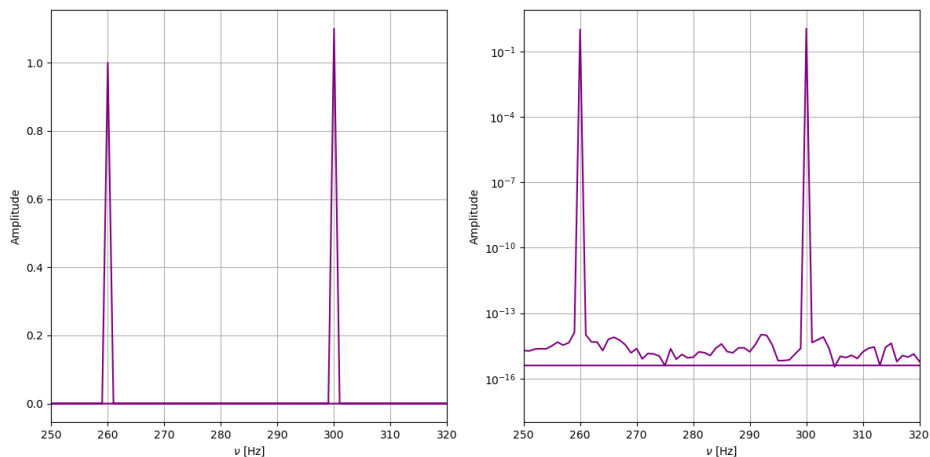
X = fft(mixed_sound)
freq = fftfreq(N, 1 / sample_rate)

plt.figure(figsize = (12, 6))
plt.subplot(121)
plt.plot(freq, np.abs(X)/(N/2), 'purple')
plt.xlabel(r'$\nu$ [Hz]')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.grid()
plt.xlim(250,320)

plt.subplot(122)
plt.semilogy(freq, np.abs(X)/(N/2), 'purple')
plt.xlabel(r'$\nu$ [Hz]')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.grid()
plt.xlim(250,320)

plt.tight_layout()
plt.show()

```



La funzione `plt.semilogy()` di Matplotlib è utilizzata per creare un grafico dove l'asse delle ordinate è in scala logaritmica e l'asse delle ascisse lineare.

**larghezza** La larghezza delle righe righe appare più come l'effetto delle interpolazioni lineari dei punti discreti contigui, piuttosto che un allargamen-

to scaturito dalla durata finita dell'osservazione.

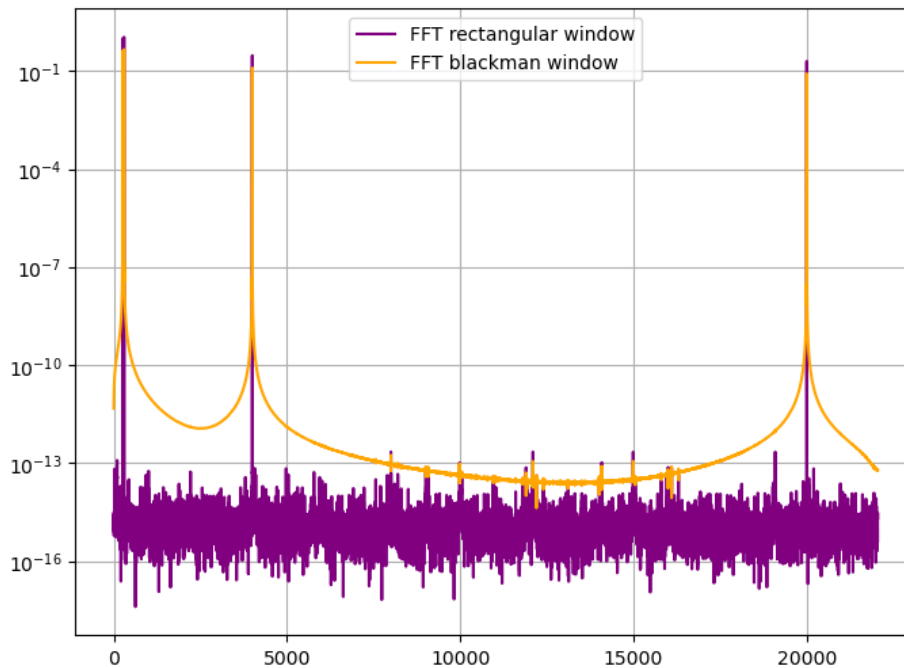
**Rumore** Un'ulteriore considerazione rilevante è che, quando analizzato in scala logaritmica, lo spettro presenta una traccia di rumore. Questo rumore, sebbene sia di entità infinitesimale rispetto all'ampiezza del segnale, non deve passare inosservato.

**Funzione finestra** Il segnale di input della FFT è troncato. Questa troncatura può essere modellata come la moltiplicazione di un segnale infinito con una funzione finestra rettangolare. Come spiegato in sezione 5, nel dominio spettrale questa moltiplicazione diventa la convoluzione dello spettro del segnale infinito con lo spettro della funzione finestra, che ha la forma del seno cardinale  $\sin(x)/x$ . Tale convoluzione ha come effetto una redistribuzione spettrale (vedi [Spectral leakage](#)). Apodizzare il segnale con una funzione finestra apposita permette di distribuire in modo diverso la dispersione a seconda della specifica applicazione. L'esempio seguente usa una finestra di Blackman da `scipy.signal`.

```
In [14]: from scipy.signal.windows import blackman

x=mixed_sound
X=fft(x)
w = blackman(N)
X_window = fft(x*w)

plt.figure(figsize = (8, 6))
plt.semilogy(freq[1:N//2], 2.0/N*np.abs(X[1:N//2]), \
             'purple', label='FFT rectangular window')
plt.semilogy(freq[1:N//2], \
             2.0/N*np.abs(X_window[1:N//2]), \
             'orange', label='FFT blackman window')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



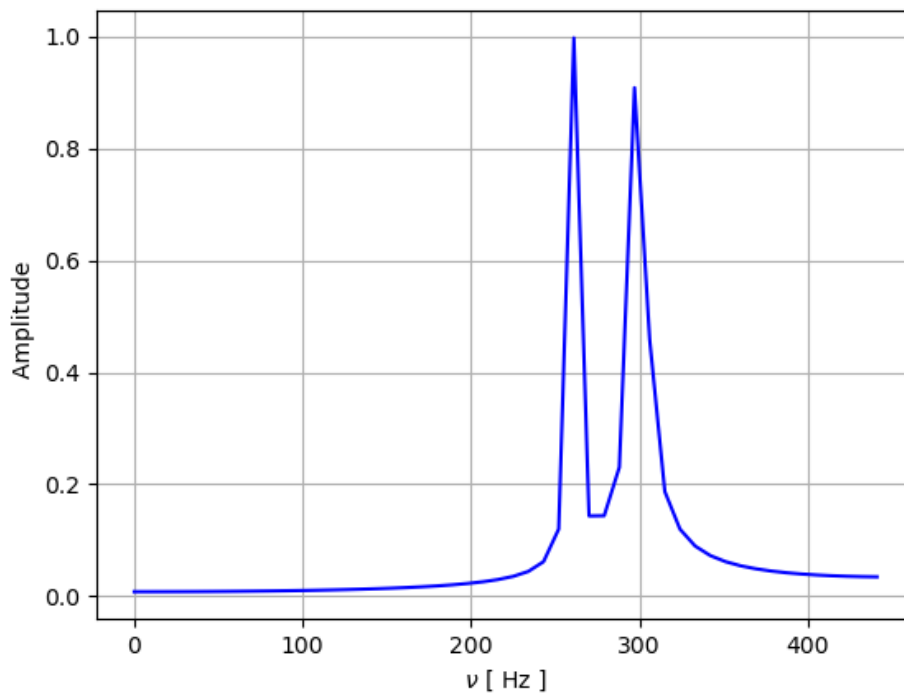
Per comprendere appieno l'importanza delle funzioni di apodizzazione, largamente impiegate nelle applicazioni pratiche per una più efficiente ridistribuzione dell'ampiezza, focalizziamo l'attenzione sulle note Do e Mi. Riduciamo la durata dell'osservazione a circa 0.11 secondi e abbassiamo la frequenza di campionamento a 900 Hz<sup>39</sup>:

```
In      N = 100
[15]:   delta_t = 1.0 / 900.0

        t = np.linspace(0.0, N*delta_t, N, endpoint=False)
        x = np.sin(260.0*2.0*np.pi*t) + \
            1.1*np.sin(300.0*2.0*np.pi*t)
        X = fft(x)
        freq = fftfreq(N, delta_t)[:N//2]

        import matplotlib.pyplot as plt
        plt.plot(freq, 2.0/N * np.abs(X[0:N//2]), 'b')
        plt.xlabel(r'$\nu$ [ Hz ]')
        plt.ylabel('Amplitude ')
        #plt.xlim(10, 100)
        plt.grid()
        plt.show()
```

<sup>39</sup>Se mantenessimo invariata la frequenza di campionamento, lo spettro rimarrebbe nell'intervallo di frequenze dei primi grafici, ma la ridistribuzione dell'ampiezza sarebbe così dispersiva da impedire la distinzione delle singole righe dello spettro.

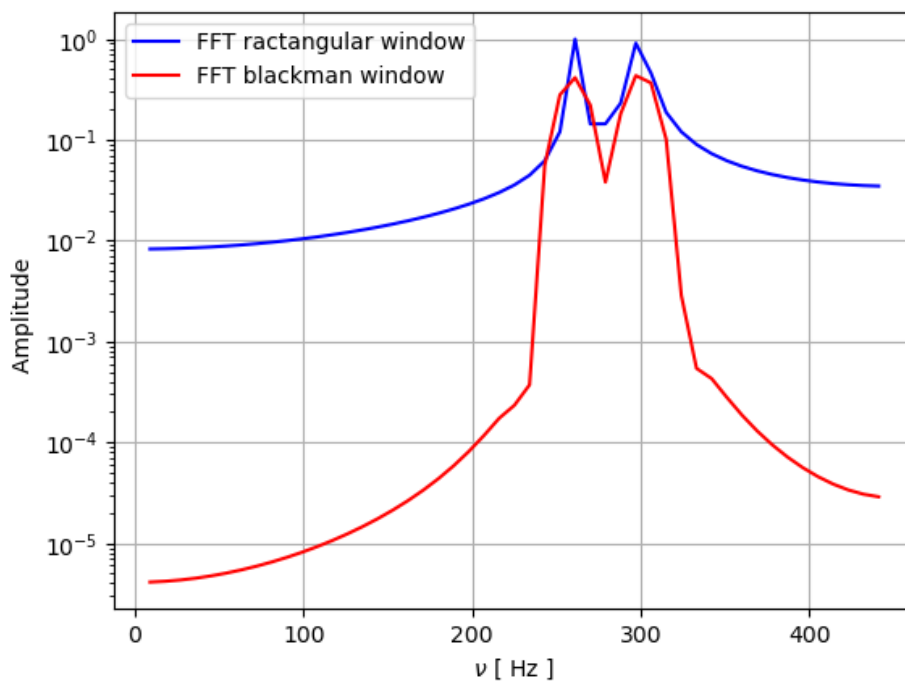


```
In
[16]: N = 100
      delta_t = 1.0 / 900.0

      t = np.linspace(0.0, N*delta_t, N, endpoint=False)
      x = np.sin(260.0 * 2.0*np.pi*t) + \
          1.1*np.sin(300.0 * 2.0*np.pi*t)
      X = fft(x)
      freq = fftfreq(N, delta_t)[:N//2]

      from scipy.signal.windows import blackman
      w = blackman(N)
      XW = fft(x*w)
      freq = fftfreq(N, delta_t)[:N//2]

      import matplotlib.pyplot as plt
      plt.semilogy(freq[1:N//2], 2.0/N*np.abs(X[1:N//2]), \
                  '-b')
      plt.semilogy(freq[1:N//2], 2.0/N*np.abs(XW[1:N//2]), \
                  '-r')
      plt.legend(['FFT ractangular window', \
                  'FFT blackman window'])
      plt.xlabel( r'$ \nu $ [ Hz ] ')
      plt.ylabel( 'Amplitude ' )
      plt.grid()
      plt.show()
```



**Allargamento** Come descritto nella Sezione 5, le funzioni finestra, pur ripristinando una distribuzione dell'ampiezza più fedele allo spettro della sorgente originale, comportano una degradazione della risoluzione. Questo effetto si manifesta attraverso un allargamento delle righe spettrali.

### C.5 Effetto del teorema del campionamento

Riprendiamo l'analisi del segnale completo. In questa occasione, procediamo con la riduzione della frequenza di campionamento al di sotto del tasso di Nyquist, stabilendola a **30000 Hz**.



```

In [17]:
sample_rate = 30000 # hertz
duration = 1 # seconds
N=sample_rate * duration
sample_timeinterval=duration/N

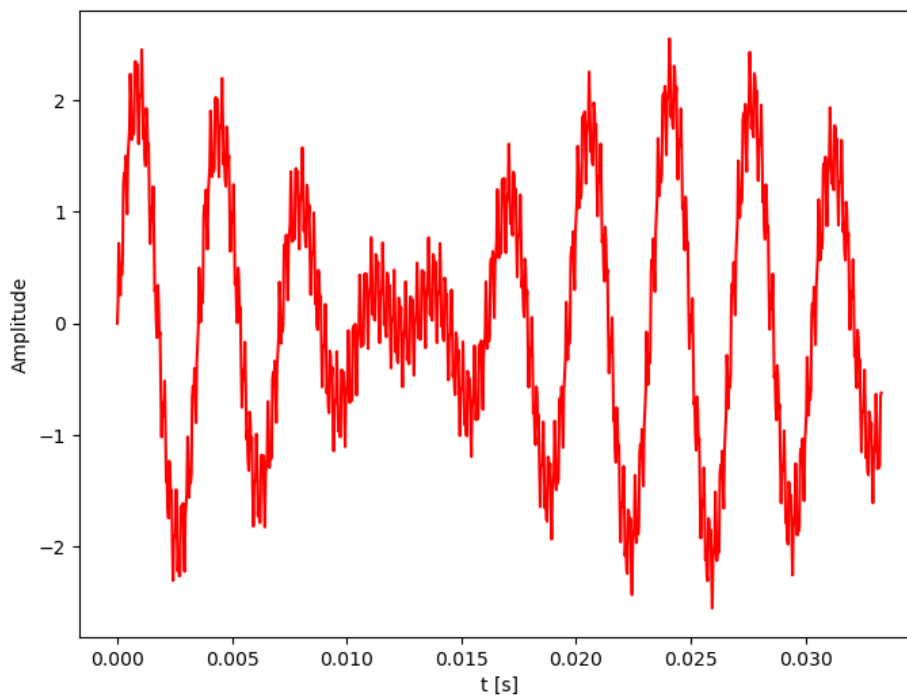
t = np.linspace(0, duration, N , endpoint=False)

Do = np.sin(2 * np.pi * 260 * t)
Mi = 1.1*np.sin(2 * np.pi * 300 * t)
Noise= 0.3*np.sin(2 * np.pi * 4000* t)
Ultrasound= 0.2*np.sin(2 * np.pi * 20000* t)

mixed_sound = Do + Mi + Noise + Ultrasound

plt.figure(figsize = (8, 6))
plt.plot(t[:1000], mixed_sound[:1000], 'r')
plt.xlabel('t [s]')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.show()

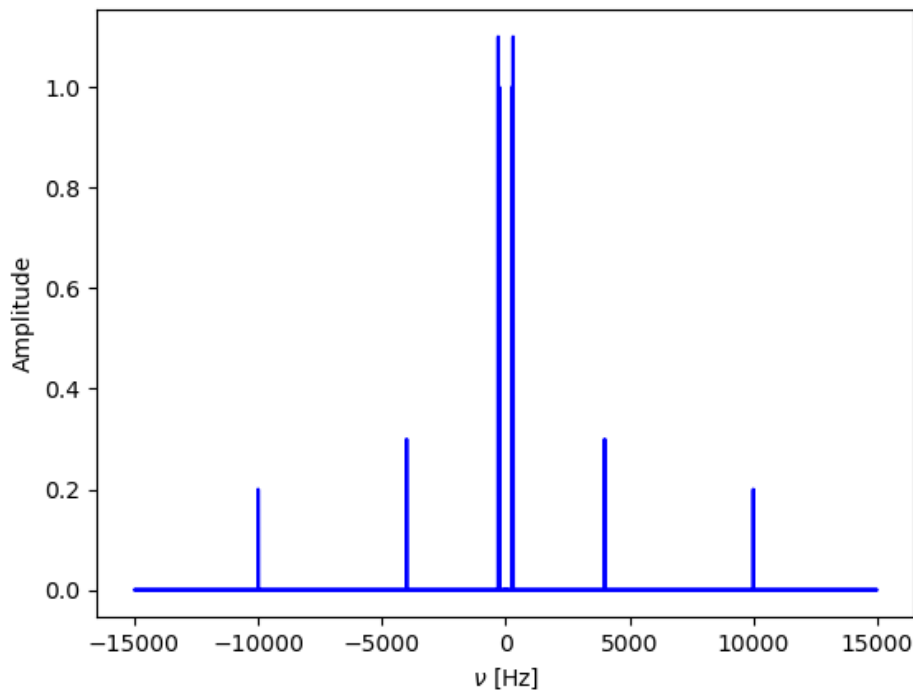
```



**Aliasing** Come approfondito in appendice B, in una DFT, dove ci sono  $N$  campioni che coprono un tempo totale  $T = N\Delta t$ , la risoluzione in frequenza è  $1/T$  e la frequenza più alta nello spettro corrisponde al bin  $k = N/2$ . Se il segnale contiene componenti con frequenze superiori alla frequenza di Ny-

quist, definita come  $\nu_{Nyquist} = N/(2T)$ , si verificherà il fenomeno dell'aliasing nello spettro. Questo implica che tali componenti di alta frequenza verranno erroneamente interpretate come componenti di frequenza inferiore, portando a una rappresentazione distorta del segnale nello spettro, come esemplificato in seguito:

```
In [18]: N = sample_rate * duration
X_aliasing = fft(mixed_sound)
freq = fftfreq(N, 1 / sample_rate)
plt.plot(freq, np.abs(X_aliasing)/(N/2), 'b')
plt.xlabel(r'$\nu$ [Hz]')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.show()
```



Si osserva che una componente di frequenza  $\nu = 20000$  Hz presente nel segnale originale appare nel lato positivo dello spettro a  $\nu' = 10000$  Hz, a causa di una frequenza di campionamento inferiore al tasso di Nyquist. Di conseguenza, se eseguiamo una IDFT sullo spettro campionato, il segnale ricostruito differirebbe inevitabilmente dal segnale sonoro originale a causa di questa sovrapposizione indotta dall'aliasing.

L'orecchio umano (giovane e non danneggiato) può udire suoni composti da componenti di frequenza fino a circa 20 kHz. Pertanto, sistemi di registrazione audio quasi-perfetti devono campionare segnali sonori a un ritmo

$f \geq 40 \text{ kHz} \approx f_{\text{sampling}}$ , dove  $f_{\text{sampling}}$  è il tasso di Nyquist (app. B). I CD audio sono tipicamente campionati a 44.1 kHz in modo da dare ai filtri audio passa-basso imperfetti un buffer di 2 kHz per rimuovere le frequenze più alte che altrimenti comporterebbero un effetto-aliasing nella banda udibile.

.....

## D Intelligenza Artificiale, Machine Learning e Deep Learning

La presente appendice trae fondamento da due corsi ritenuti pilastri nel dominio dell'Intelligenza Artificiale: il Corso del Prof. Andreas Müller, chiamato **Applied Machine Learning**, e del Prof. Andrew Ng, con il nome **Supervised Machine Learning: Regression and Classification**.

### Famiglie di AI

Una delle distinzioni primarie nell'ambito dell'Intelligenza Artificiale si manifesta attraverso la categorizzazione in tre distinti insiemi, i quali sono illustrati chiaramente nel diagramma riportato in figura 8. Questi insiemi sono elencati di seguito, rispettando la loro struttura gerarchica annidata:

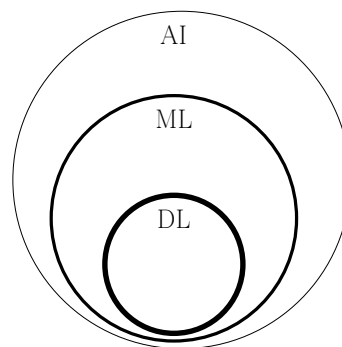


Figura 8: Rappresentazione della relazione tra AI, ML e DL.

**AI Intelligenza Artificiale:** L'Intelligenza Artificiale rappresenta il campo di studio più esteso che si occupa dello sviluppo di sistemi computazionali capaci di eseguire compiti che, tradizionalmente, richiederebbero l'intelligenza umana. Questi compiti includono il ragionamento logico, l'apprendimento, la percezione sensoriale, la comprensione del linguaggio naturale e l'adattamento a situazioni nuove attraverso l'utilizzo di algoritmi, regole logiche condizionali e strutture di decisione complesse come gli alberi decisionali, e l'impiego di sottocampi specializzati come l'apprendimento automatico e l'apprendimento profondo.

**ML Apprendimento Automatico:** L'Apprendimento Automatico è un sottocampo dell'Intelligenza Artificiale che si concentra sullo sviluppo di algoritmi e tecniche statistiche che dotano i computer della capacità di "imparare" a eseguire compiti attraverso la generalizzazione da esempi, piuttosto che attraverso l'implementazione di istruzioni specifiche. L'apprendimento può essere supervisionato, non supervisionato, semi-supervisionato o rinforzato. Il Machine Learning è fondamentale per sviluppare modelli che migliorano progressivamente la loro prestazione su un compito specifico man mano che ricevono più dati, e comprende tecniche avanzate come l'apprendimento profondo.

**DL Apprendimento Profondo:** L'Apprendimento Profondo è una branca avanzata dell'Apprendimento Automatico che si avvale di reti neurali articolate in molteplici strati (da qui il termine "profondo"). Queste reti neurali sono progettate per imitare il funzionamento del cervello umano e sono in grado di apprendere livelli progressivamente più complessi di rappresentazione e astrazione dei dati. Il Deep Learning si è rivelato particolarmente efficace in applicazioni quali il riconoscimento vocale, la visione artificiale e la traduzione automatica, essendo in grado di gestire grandi volumi di dati e identificare pattern che sarebbero troppo complessi per essere scoperti attraverso tecniche più tradizionali.

### Tipi di AI:

Nell'ambito dell'Intelligenza Artificiale, si identificano due categorie principali: l'Intelligenza Artificiale Generale (AGI) e l'Intelligenza Artificiale Ristretta (ANI). Queste due categorie sono rappresentate mediante una mappa concettuale in figura 9 e si definiscono come segue:

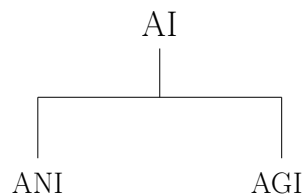


Figura 9: Mappa concettuale dei tipi di AI.

**ANI** L'Intelligenza Artificiale **Stretta** è una AI specializzata in un compito. Esempi di ANI nel campo della fisica, dell'astronomia e della ricerca sono:

**Fisica** Rilevamento di Particelle: ANI viene utilizzata negli acceleratori di particelle come il Large Hadron Collider (LHC) per analizzare enormi set di dati alla ricerca di segnali di nuove particelle. Queste reti neurali sono addestrate per riconoscere modelli specifici che potrebbero indicare la presenza di particelle subatomiche rare.

**Astronomia** Classificazione di Galassie: Tecniche di machine learning sono applicate per classificare galassie basandosi sulle loro forme e dimensioni da immagini telescopiche. Questi sistemi ANI possono rapidamente elaborare immagini del cielo notturno per identificare e catalogare nuove galassie.

**Ricerca** Screening di Materiali: Nella ricerca sui materiali, l'ANI viene usata per prevedere le proprietà di nuovi materiali e composti. Algoritmi predittivi analizzano le strutture chimiche per prevedere caratteristiche come la conduttività o la stabilità termica.

**AGI** L'Intelligenza Artificiale **Generale** è una AI con l'abilità di fare qualsiasi cosa un umano possa fare. Esempi di AGI nel campo della fisica, dell'astronomia e della ricerca sono:

**Fisica** Teoria del Tutto: Un'AGI in fisica potrebbe teoricamente integrare diverse teorie e dati sperimentali per formulare una 'Teoria del Tutto', unificando meccanica quantistica e relatività generale, qualcosa che finora ha eluso i fisici umani.

**Astronomia** Esplorazione Spaziale: Un'AGI potrebbe gestire missioni spaziali autonomamente, adattandosi a scenari imprevisti durante l'esplorazione interplanetaria o la ricerca di vita extraterrestre, prendendo decisioni indipendenti basate su dati emergenti.

**Ricerca** Ricerca Autonoma: In un laboratorio, un'AGI potrebbe teoricamente condurre ricerche scientifiche in modo indipendente, formulando ipotesi, eseguendo esperimenti, analizzando risultati e decidendo i successivi passi della ricerca senza input umano.

Al momento, l'AGI rimane un obiettivo teorico e non esiste ancora una vera intelligenza artificiale che possa comprendere o apprendere qualsiasi compito intellettuale che un essere umano sia in grado di svolgere. L'AGI richiederebbe non solo la capacità di eseguire compiti specifici, ma anche la comprensione contestuale, il ragionamento astratto e l'apprendimento generale, aspetti che vanno oltre le attuali capacità dell'ANI.

**Definizioni di Machine Learning** Nel Corso di Andrew Ng vengono fornite due definizioni di Apprendimento Automatico:

- Arthur Samuel (1959): "Campo di studio che dà ai computer la capacità di imparare senza essere esplicitamente programmati".
- Tom Mitchell (1998): "Si dice che un programma apprende da un'esperienza  $E$  rispetto ad un compito  $T$  e una misura di performance  $P$ , se la sua performance in  $T$ , misurata da  $P$ , migliora con l'esperienza  $E$ ".<sup>40</sup>

---

<sup>40</sup>Si noti che, in base a questa definizione, un programma impara rispetto a una specifica tripletta.

**DL e AI tradizionali** In ambito computazionale, si osserva che una Intelligenza Artificiale Non-Generale (ANI), impegnata in un compito  $T$  specifico, tende asintoticamente verso un limite di performance  $P$ . Analizzando la performance in relazione alla quantità di dati disponibili, si constata che le AI tradizionali<sup>41</sup> raggiungono rapidamente il loro limite asintotico di performance. Al contrario, gli algoritmi basati sul Deep Learning mostrano un approccio asintotico più graduale al limite di performance, in funzione dell'incremento della quantità di dati. Questa caratteristica, benché metta in luce alcune sfide intrinseche al Deep Learning, non ne diminuisce l'interesse. Infatti, la superiorità prestazionale di quest'ultima categoria di Machine Learning, quando addestrata con volumi di dati considerevoli, è indiscutibile. L'avvento di computer ad alte prestazioni e la disponibilità di grandi quantità di dati nell'era contemporanea hanno reso queste sfide superabili.

## Tipi di Machine Learning

1. **Apprendimento Supervisionato** (Supervised Learning): Questa categoria si basa sull'utilizzo di dati etichettati. Esempi tipici includono la regressione e la classificazione. L'assunto fondamentale è che le coppie feature-target siano distribuite in modo identico e indipendente (i.i.d.) secondo una stessa distribuzione di probabilità  $p$ , ossia

$$(\vec{x}_i, y_i) \sim p(\vec{x}, y) \quad \text{i.i.d.}$$

dove  $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^p$  è il vettore, le cui componenti sono i valori delle features, che rappresenta l' $i$ -esimo dato di addestramento (data-training) e  $y_i \in \mathbb{R}$  rappresenta il corrispondente target. Il compito del modello è determinare una funzione  $f$  tale che:

$$f(\vec{x}_i) \approx y_i$$

Questo approccio presuppone una relazione statica e univoca tra il vettore delle features  $\vec{x}$  e i target  $y$ , nonostante nella pratica questa ipotesi possa essere violata. Per ovviare a questi ostacoli, si possono adottare tecniche quali l'aggiunta di nuove features o la separazione dei campioni per modelli distinti. Un altro caso di violazione dell'ipotesi i.i.d. si verifica in presenza di campioni o leggi che cambiano nel tempo, fenomeno

---

<sup>41</sup>Con "AI tradizionali" si fa riferimento a quelle tecnologie di Intelligenza Artificiale che erano prevalenti prima dell'ascesa e della diffusione del Deep Learning. Queste tecnologie, meno avanzate rispetto ai moderni algoritmi di DL, erano le soluzioni standard in molteplici applicazioni computazionali fino a quando il DL non ha iniziato a offrire vantaggi significativi in termini di complessità e accuratezza nell'analisi di grandi set di dati.

noto come *model shift* o *data shift*. L'obiettivo dell'apprendimento supervisionato è generalizzare la funzione  $f$ , permettendo la predizione di nuovi dati:

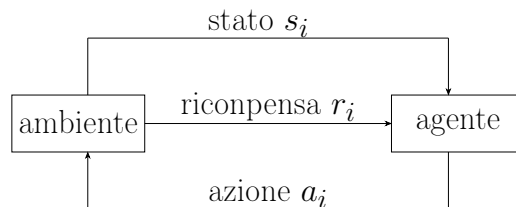
$$f(\vec{x}) \approx y$$

2. **Apprendimento Non Supervisionato** (Unsupervised Learning): Questo approccio non si avvale di dati etichettati. Tecniche comuni includono il clustering e la riduzione della dimensionalità. Si assume che i campioni siano i.i.d. secondo la distribuzione  $p$ :

$$\vec{x}_i \sim p(\vec{x}) \quad \text{i.i.d.}$$

L'obiettivo è apprendere sulla distribuzione dei dati  $p$ . Questo tipo di ML ha applicazioni pratiche in aree come il clustering, la riduzione della dimensionalità, la rilevazione di anomalie o novità, e la modellazione degli argomenti.

3. **Apprendimento per Rinforzo** (Reinforcement Learning): Questo modello si basa sull'interazione con un ambiente tramite un sistema di ricompense. L'agente, guidato dall'algoritmo, compie azioni nell'ambiente ricevendo ricompense e modificando il proprio stato in base agli effetti delle azioni. Questo modello apprende attraverso l'esplorazione e l'adattamento, migliorando la propria strategia in base al successo delle azioni intraprese.



Nella grande maggioranza delle applicazioni, l'IA è un modello di ML, cioè un modello che apprende da esempi, il cui apprendimento è svolto in modo supervisionato. E' importante sottolineare che la distinzione classica tra i vari tipi di apprendimento sta diventando sempre più labile. Emergono modalità quali l'apprendimento semi-supervisionato, dove non tutti gli esempi sono etichettati, i quali rappresentano sfumature tra le tre tipologie classiche. Inoltre, esistono tipi di ML che esulano da questa classificazione.



## E Coerenza spaziale e temporale

La coerenza in ottica è legata all'abilità della radiazione di esibire effetti di interferenza. Un campo elettromagnetico è definito coerente se esiste una relazione fissa tra i valori della fase del campo elettrico in diversi punti dello spazio o in diversi istanti di tempo. Una coerenza parziale significa che c'è qualche (anche se non perfetta) correlazione tra i valori delle fasi.

Si distinguono due tipi di coerenza:

**TEMPORALE** La coerenza temporale è detta anche *coerenza longitudinale* perché quantifica la correlazione tra due misure di una grandezza fisica lungo la direzione di propagazione dell'onda. Quantificando la predicibilità della grandezza fisica, rappresenta una stima dell'incertezza associata alla misura della fase e dell'ampiezza del campo ad un tempo  $t + \tau$  noti i valori al tempo  $t$ . La precisione associata alla misura è da considerare piccola fintanto che il ritardo  $\tau$  è entro il tempo di coerenza temporale  $\tau_c$  della radiazione. Se  $\phi(t)$  è costante (in eq. 20), tanto più un'onda è coerente temporalmente, tanto più il tempo di coerenza è lungo e il range di lunghezze d'onda è piccolo. Al limite di banda infidamente stretta il tempo di coerenza è infinito.

**SPAZIALE** La coerenza spaziale è anche detta *coerenza trasversale* perché è una misura quantitativa della correlazione tra le fasi in punti diversi del piano perpendicolare alla direzione di propagazione. Più la radiazione è coerente spazialmente, più il fronte d'onda è uniforme. Tanto meno estesa è una sorgente, tanto più uniforme è il suo fronte d'onda. Al limite di dimensione della sorgente infinitamente piccola (sorgente puntiforme), il fronte d'onda è uniforme.

Il tempo di coerenza,  $\tau_c$ , quantifica la coerenza temporale di un fascio di radiazione attraverso la durata di tempo oltre cui la radiazione che interferisca con se stessa con questo ritardo temporale non produrrà frange d'interferenza. L'Area di Coerenza,  $A_c$ , quantifica la coerenza spaziale di un fascio di radiazione, pari alla più grande area della sezione trasversale tale che la radiazione che passa attraverso due fori stenopeici qualsiasi posti in quest'area produrrà frange di interferenza.

In termini pratici, affinché si apprezzi un pattern d'interferenza in un esperimento a doppia fenditura di Young, è essenziale che l'Area di Coerenza  $A_c$  sia sufficientemente grande, o che i fori siano sufficientemente vicini; Analogamente, affinché l'interferenza sia osservabile in un interferometro di Michelson, serve che il tempo di coerenza  $\tau_c$  sia sufficientemente lungo, o che il ritardo temporale sia sufficientemente breve.

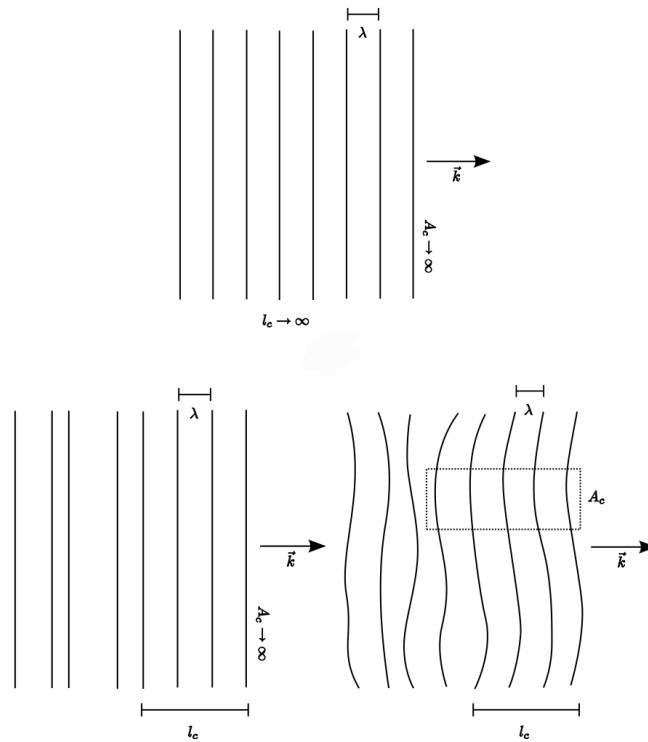


Figura 10: Visualizzazione dei diversi tipi di coerenza. (a) Onda con lunghezza di coerenza ed area di coerenza infinite. (b) Onda con coerenza spaziale, ovvero con un'area di coerenza infinita, ma solo parzialmente coerente temporalmente, come si vede dalla lunghezza di coerenza finita. (c) Onda con coerenza spaziale e temporale parziale, e quindi con un'area e una lunghezza di coerenza finite.

Le funzioni di correlazione specificano il grado di correlazione in funzione di una distanza spaziale o temporale. Esistono funzioni di correlazione di diversi ordini. La funzione di correlazione del primo ordine è legata allo spettro ottico. La funzione di correlazione del secondo ordine descrive le correlazioni di intensità. Le funzioni di ordine superiore descrivono dettagli ancora più sottili.

La coerenza della radiazione può manifestarsi sia temporalmente che spazialmente, concetti che non sono mutuamente escludenti né implicanti l'uno sull'altro. In Figura 10 è una rappresentazione dei vari tipi di coerenza.

## F Visibilità interferometrica

L'intensità totale della somma di due campi elettrici la cui differenza di fase è una costante nel tempo:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta) \quad (42)$$

Se la fase relativa, l'ampiezza o la direzione sono delle variabili, allora è più significativa una misura dell'interferenza mediando nel tempo:

$$I = \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^* \rangle = \langle |\vec{E}_1|^2 \rangle + \langle |\vec{E}_2|^2 \rangle + 2\langle \text{Re}(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^*) \rangle$$

Dove le parentesi denotano medie temporali:

$$\langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) dt \quad (43)$$

Assumiamo che i campi elettrici abbiano la stessa polarizzazione e ampiezza costante:

$$I = I_1 + I_2 + 2\langle \text{Re}(E_1 E_2^*) \rangle \quad (44)$$

dove  $I_1 = \langle |\vec{E}_1|^2 \rangle$  e  $I_2 = \langle |\vec{E}_2|^2 \rangle$ . Consideriamo esperimenti d'interferenza in cui due campi  $E_1$  e  $E_2$  originano da una sorgente  $S$  comune ma hanno un diverso cammino ottico. Chiamiamo  $t$  il tempo impiegato dalla prima onda per viaggiare da  $S$  a  $P$  lungo il percorso 1, e  $t + \tau$  il tempo impiegato dalla seconda onda viaggiando lungo il percorso 2. Il termine d'interferenza può essere scritto come

$$2\text{Re}(\Gamma_{12}(\tau)) \quad (45)$$

dove

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E_1(t) E_2^*(t + \tau) \rangle \quad (46)$$

La funzione  $\Gamma_{12}(\tau)$  è detta funzione di coerenza reciproca (*mutual coherence function*) o funzione di correlazione incrociata o cross-correlazione (*correlation function*) dei campi  $E_1$  e  $E_2$ . Se i campi  $E_1$  e  $E_2$  sono lo stesso campo ma con  $E_2$  ritardato nel tempo di  $\tau$  allora

$$\Gamma_{11}(\tau) = \langle E_1(t) E_1^*(t + \tau) \rangle \quad (47)$$

è detta funzione di auto-correlazione (*auto-correlation function*) o funzione di coerenza propria (*self-coherence function*). Da cui vediamo che  $\Gamma_{11}(0) = I_1$  e  $\Gamma_{22}(0) = I_2$ . Le funzioni di correlazione possono essere scritte in forma

normalizzata e si ottiene la funzione grado di coerenza parziale (*degree of partial coherence function*)

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} \quad (48)$$

L'intensità totale delle due onde è quindi espressa come

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{Re}[\gamma_{12}(\tau)] \quad (49)$$

La funzione  $\Gamma_{12}$  è misura quantitativa della correlazione delle due fasi nel tempo. In generale, è una funzione complessa di  $\tau$  e  $0 < |\gamma_{12}| < 1$ . Possiamo quantificare la coerenza tra onde:

$$\begin{aligned} |\Gamma_{12}| = 1 & \quad \text{coerenza completa} \\ 0 < |\Gamma_{12}| < 1 & \quad \text{coerenza parziale} \\ |\Gamma_{12}| = 0 & \quad \text{coerenza incompleta} \end{aligned} \quad (50)$$

Nel pattern delle frange d'interferenza, l'intensità varia tra due limiti  $I_{max}$  e  $I_{min}$ :

$$\begin{aligned} I_{max}(\tau) &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)| \\ I_{min}(\tau) &= I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)| \end{aligned} \quad (51)$$

La visibilità delle frange, in generale, è definita come il rapporto tra l'involuppo  $A = (I_{max}(\tau) - I_{min}(\tau))/2$  dell'intensità oscillante e dell'intensità media  $\bar{I} = (I_{max}(\tau) + I_{min}(\tau))/2$ :

$$V(\tau) = \frac{I_{max}(\tau) - I_{min}(\tau)}{I_{max}(\tau) + I_{min}(\tau)} = \frac{A(\tau)}{\bar{I}(\tau)}$$

Quindi, nel nostro caso

$$V(\tau) = \frac{2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)|}{I_1 + I_2} \quad (52)$$

In particolare, se  $I_1 = I_2$ , allora

$$V(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)| \quad (53)$$

Ovvero, la visibilità delle frange coincide con il modulo del grado di coerenza parziale. Nel caso di coerenza completa ( $|\gamma_{12}| = 1$ ) le frange d'interferenza

manifestano un contrasto massimo, pari all'unità. Invece, in condizioni di completa incoerenza ( $|\gamma_{12}| = 0$ ), il contrasto si annulla, risultando nell'assenza di frange d'interferenza. Pertanto, una riduzione del grado di coerenza comporta una diminuzione della visibilità delle frange.

In strumenti quali l'interferometro di Michelson e l'interferometro di Mach-Zehnder, un campo elettrico viene suddiviso in due componenti, con l'introduzione di un ritardo temporale in uno dei fasci prima della loro ricombinazione. L'intensità del campo risultante viene misurata in funzione del ritardo temporale. In situazioni specifiche dove le intensità di ingresso sono uguali, la visibilità della figura di interferenza risultante dipende direttamente dal grado di coerenza temporale del primo ordine. L'aspetto praticamente rilevante di queste osservazioni risiede nel fatto che un elevato contrasto delle frange è essenziale per la misurazione accurata dei segnali interferometrici. Un contrasto insufficiente conduce a una riduzione del rapporto segnale-rumore (SNR).

## G Limiti dell'interferometria astronomica

In questa appendice riassumiamo alcuni dei principali limiti degli interferometri di Michelson e di intensità nell'ambito delle osservazioni astronomiche:

### Radiointerferometri e interferometri ottici

**RADIO** Nel dominio delle onde radio, i radiotelescopi (antenne) dispongono di rilevatori capaci di acquisire l'intensità di un fascio di fotoni, preservandone la fase per analisi successive. Questo approccio consente un accurato studio delle proprietà ondulatorie dei fotoni ricevuti.

**VISIBILE** I telescopi ottici, equipaggiati per osservazioni nella banda visibile dello spettro, si limitano a misurare l'intensità della radiazione, perdendo informazioni sulla fase dell'onda. Ciò implica la necessità di eseguire interferometria ottica prima che i fotoni vengano rilevati.

Il secondo caso presenta maggiori complessità. La distanza relativa tra i telescopi, che determina l'angolo sotto cui viene osservata la sorgente, varia continuamente durante l'osservazione. Questo aspetto è particolarmente critico nell'interferometro di Michelson, dove è essenziale allineare con precisione l'intero apparato entro una frazione della lunghezza di coerenza della radiazione. Un disallineamento, anche minimo, modifica la figura di interferenza sul piano focale [15].

Questa problematica rende l'interferometria in banda radio preferibile, nonostante ciò implichi una limitazione della banda di frequenze utilizzabili e, conseguentemente, delle sorgenti osservabili. Inoltre, anche il grado di coerenza della radiazione può essere un fattore limitante.

I limiti principali di questi strumenti includono:

- Variazioni casuali e temporali nell'atmosfera, come miscele turbolente di aria a diverse temperature e densità, che influenzano la radiazione e generano differenze di fase variabili, causando oscillazioni rapide nell'intensità rilevata. L'interferometro di Michelson è particolarmente sensibile a tali variazioni.
- L'interferometro di intensità presenta una prestazione limitata in termini di rapporto segnale-rumore. Le onde luminose convertite in segnali elettrici dai fotorilevatori includono vari tipi di rumore (di fondo, elettronico e d'onda), compromettendo la qualità del segnale.
- La necessità di collettori di luce di grandi dimensioni per l'interferometro di intensità, significativamente maggiori rispetto a quelli richiesti

dall'interferometro stellare di Michelson, in particolare per l'osservazione di stelle luminose.

- L'uso di una banda di frequenze ampie ( $\Delta\omega$ ) per massimizzare la raccolta di radiazione riduce la lunghezza di coerenza ( $l_c$ ), in quanto

$$\tau_c \Delta\nu = 1 \tag{54}$$

Rimangono quindi significative sfide legate alla lunghezza della baseline, alla sensibilità atmosferica e al rapporto SNR .

---

## Riferimenti bibliografici

- [1] Hetharia, D. and van Exter, M. P. and Löffler, W.,  
*Spatial coherence and the orbital angular momentum of light in astronomy*,  
Phys. Rev. A, Vol 90, Issue 6, pp. 5, year 2014  
Publisher: American Physical Society
  
- [2] Robert John Bell  
*Introductory Fourier Transform Spectroscopy*  
Ac. pr., New York and London, 1972
  
- [3] Taylor, J.R.,  
Titolo originale: *An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements - Second Edition*  
©1997 University of Science Books  
First edition: 1982  
trad. it. *Introduzione all'Analisi degli Errori: Lo Studio delle Incertezze nelle Misure Fisiche - Seconda edizione italiana*  
©2000 Zanichelli editore S.p.A., via Irnerio 34, Bologna
  
- [4] R. Brecewell,  
*The Fourier Transform and Its Applications*  
McGraw-Hill, New York, 1963
  
- [5] J. Connes,  
*Computing problems in Fourier Spectroscopy*  
Elsevier, New York, 1966
  
- [6] J. W. Cooley e J. W. Tukey,  
*An Algorithm for Machine Calculation and Complex Fourier Series*  
Mat. of Comp., Vol. 19, No. 90 , pp. 297-301, 1965  
Publisher: American Mathematical Society
  
- [7] Michael T. Heideman, Don H. Johnson, C. Sidney Burrus,  
*Gauss and the History of the Fast Fourier Transform*  
Arc. for H. of Exact Sc., Vol. 34, Num. 3, pp. 265-277, 1985  
Publisher: Springer
  
- [8] Carl Friedrich Gauss  
Titolo originale: *Theoria interpolationis methodo nova tractata*



- trad. ing. *Theory regarding a new method of interpolation*  
(manoscritto non pubblicato)
- [9] E. O. Brigham e R. E. Morrow,  
*The Fast Fourier Transform Spectrum*  
IEEE Spectrum, Vol. 4, Issue 12, pp. 63-70, 1967  
Publisher: IEEE
- [10] Qingkai Kong, Timmy Siau, Alexandre Bayen  
*Python Programming and Numerical Methods - A Guide for Engineers  
and Scientists*  
Elsevier, 2020  
Il codice è rilasciato sotto licenza MIT
- [11] Loudon R.  
*The quantum theory of light*  
Oxford Univ. Press, 3rd ed. 2003
- [12] Goodman J.W.  
*Statistical optics*  
Wiley, New York, 1985
- [13] Fox M.  
*Quantum Optics: An Introduction*  
Oxford Univ. Press, USA, 2006
- [14] Mitchell ACG, Zemansky MW.  
*Resonance Radiation and Excited Atoms*  
Cambridge Univ. Press, London, 1934
- [15] Favazza Paolo  
Titolo tesi di laurea triennale in Astronomia: *Studio di un primo esperimento di interferometria di intensità su base chilometrica* Department of Physics and Astronomy, University of Padua, 2014-2015
- [16] CohJani Tervo  
*Coerence and polarization in stationary random electromagnetic fields*  
Opt. Pur. y Apl., Vol. 38, Num. 3, pp. 27-36, 2005
- [17] T. Setälä, M. Kaivola, and A. T. Friberg  
*Degree of polarization in near fields of thermal sources: Effects of surface waves*  
Phys. Rev. Lett., Vol. 88, 123902, 2002

- [18] T. Setälä, A. Shevchenko, M. Kaivola, and A. T. Friberg  
*Degree of polarization for optical near fields*  
Phys. Rev. E, Vol. 66, 016615, 2002
- [19] J. Tervo, T. Setälä, and A. T. Friberg  
*Degree of coherence for electromagnetic fields*  
Opt. Express, Vol. 11, 11371143, 2003
-