



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

**Studio dei modelli di inflazione con campo scalare  
per mezzo del metodo delle funzioni generatrici**

**Relatore**

**Prof. Sabino Matarrese**

**Laureando**

**Martino Michelotti**

**Anno Accademico 2017/2018**



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Horizon problem . . . . .	2
1.1.1	Durata dell'inflazione . . . . .	3
1.2	Flatness problem . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Inflazione con campo scalare</b>	<b>7</b>
2.1	Inflatone . . . . .	7
2.2	Principio cosmologico . . . . .	7
2.3	Equazioni cosmologiche . . . . .	8
2.3.1	Equazioni cosmologiche a partire dal fluido perfetto . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Funzione generatrice</b>	<b>11</b>
3.1	Potenziale polinomiale . . . . .	12
3.2	Potenziale trigonometrico . . . . .	14
3.3	Potenziale esponenziale . . . . .	14
3.4	Potenziale inverso . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Inflazione con slow-roll</b>	<b>17</b>
4.1	Soluzioni in slow-roll . . . . .	19
4.2	Quanta inflazione? . . . . .	19
4.3	Esempi . . . . .	20
4.3.1	$V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2$ . . . . .	20
4.3.2	$V(\varphi) = \lambda\varphi^n$ . . . . .	20
4.3.3	$V(\varphi) = Ae^{B\varphi}$ . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Osservabili</b>	<b>23</b>
5.0.1	Potenziale monomiale . . . . .	24
5.0.2	Potenziale esponenziale . . . . .	25
5.0.3	Confronto con l'esperimento . . . . .	25
5.1	Conclusioni . . . . .	26



# Capitolo 1

## Introduzione

La teoria inflazionaria viene proposta all'inizio degli anni '80 [1, 2, 3], descrivendo un periodo di espansione accelerata subita dall'universo nei primi istanti successivi al Big Bang. La teoria del Big Bang infatti, l'idea che lo spaziotempo abbia avuto origine da una singolarità con densità e curvatura infinite, rispondeva sì ad alcune delle domande che seguono l'osservazione diretta, ma apriva a diversi altri problemi. Prima di introdurre e spiegare la natura di queste problematiche, definiamo rigorosamente il concetto di inflazione. La condizione matematica che caratterizza l'inflazione è la seguente:

$$\ddot{a} > 0; \tag{1.1}$$

dove  $a(t)$  è il fattore di scala dell'universo. Dalla definizione si evince quindi che il presupposto per ottenere un periodo di inflazione è, come abbiamo accennato poco sopra, che durante questo periodo l'universo si espanda in modo accelerato: il fattore di scala quantifica proprio l'entità di questa espansione. La richiesta di espansione accelerata, ad un'analisi più attenta, non risulta affatto banale; per capire questo punto introduciamo la seconda equazione di Friedmann:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P); \tag{1.2}$$

dove  $G$  è la costante di gravitazione universale e abbiamo posto, come faremo d'ora in poi,  $c = 1$ . Tale equazione descrive l'evoluzione del fattore di scala, assumendo il contenuto dell'universo come un fluido perfetto:  $\rho$  rappresenta la densità di energia,  $P$  la pressione isotropa. Le due grandezze appena definite sono legate tra loro da un'equazione di stato: nel caso di un fluido barotropico questa risulta essere del tipo  $P = w\rho$ , dove  $w$  è una costante di proporzionalità. Si ricava da (1.2) che, per ottenere un valore positivo di  $\ddot{a}$ , deve essere soddisfatta la seguente relazione:

$$w = \frac{P}{\rho} < -\frac{1}{3}; \tag{1.3}$$

e, poiché l'energia  $\rho$  ha valore positivo, la pressione deve allora assumere un valore (sufficientemente) negativo. Ci si chiede dunque quale sia l'origine di una tale pressione negativa durante i primi istanti dell'universo. In realtà anche tutt'ora l'universo si trova in una fase di espansione accelerata; in questo caso, però, ciò si crede sia dovuto alla presenza di quella che viene detta "energia oscura", che oggi domina sulle altre fonti di energia presenti nell'universo. Ai tempi dell'inflazione il contributo dell'energia oscura era però trascurabile, e risulta quindi necessario individuare una differente sorgente di espansione accelerata. Ad oggi non si hanno evidenze sperimentali a questo proposito e si formula pertanto un'ipotesi: durante il periodo di inflazione il contenuto energetico dell'universo è dominato dall'energia potenziale di un campo scalare, detto "inflatone", la cui natura resta comunque sconosciuta. Tale idea viene riportata ed applicata originariamente in [4, 5, 6]. Vedremo in seguito che, grazie a quest'ipotesi, si può ottenere un effettivo periodo di inflazione e, assumendo a priori alcune semplici espressioni per il potenziale, saremo in grado di ricavare l'evoluzione temporale del fattore di scala.

Prima di passare allo studio della (ipotetica) dinamica di un periodo di inflazione, vediamo quali sono le principali evidenze che hanno portato ad avvalorare questa teoria. Come abbiamo accennato all'inizio di questo paragrafo, infatti, l'inflazione nasce per risolvere alcuni problemi cui la teoria del Big Bang non riusciva a dare risposta; solo in seguito si capisce che, grazie a tale fenomeno, si riescono a spiegare le piccole anisotropie presenti nello spettro della radiazione cosmica di fondo, oggi individuate come gli antenati di tutte le strutture presenti nell'attuale universo. Nel trattare l'inflazione guidata da un campo scalare, però, non tratteremo il fenomeno delle perturbazioni ad essa associate: ci limitiamo soltanto a riconoscere questo ulteriore e importantissimo traguardo ottenuto dalla teoria. Ci occupiamo, invece, dei due problemi di cui storicamente soffriva l'idea del Big Bang, ma che trovano un'agevole spiegazione se si ipotizza una primordiale espansione accelerata dell'universo. Questi sono chiamati comunemente "horizon problem" e "flatness problem": descriviamoli sinteticamente e cerchiamo di capire come un periodo di inflazione riesca a risolverli.

## 1.1 Horizon problem

La radiazione cosmica di fondo (CMB) restituisce in qualche modo una "fotografia" dell'universo al tempo della propria emissione, ovvero circa 380'000 anni dopo il Big Bang, detta epoca dell'ultimo scattering: in quell'istante la radiazione si disaccoppiò dalla materia e fu libera di viaggiare per lo spazio. Il fatto sorprendente dello spettro della CMB è la pressoché perfetta isotropia che presenta (alle cui lievi anisotropie abbiamo accennato poco sopra). Secondo la teoria standard del Big Bang, la cosa risulta alquanto paradossale, se si considera che, durante l'era dell'ultimo scattering, l'universo (a quel tempo) "osservabile" si trovava suddiviso in migliaia di porzioni causalmente sconnesse l'una dall'altra. Sembra quindi impossibile spiegare l'isotropia della CMB, dovuta per forza di cose ad un equilibrio termico dell'intero universo osservabile. La teoria del Big Bang prevede infatti un'espansione decelerata: a causa di questo, porzioni di universo che entrano ora in contatto causale non hanno potuto esserlo in passato. Vediamo di spiegare meglio questo fatto. Introduciamo a tal proposito il raggio comoviente di Hubble, definito come  $r_H(t) = (aH)^{-1}$ , dove  $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$  è l'omonimo parametro di Hubble. Per il significato di coordinata comoviente rimandiamo al paragrafo 2.2. Il significato fisico del raggio di Hubble è il seguente: due punti dell'universo in connessione causale, ad un certo istante, si trovano ad una distanza reciproca inferiore ad  $r_H$ , calcolato allo stesso istante. Derivando tale espressione si ottiene:

$$\frac{d}{dt}r_H(t) = \frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{d}{dt}(\dot{a}^{-1}) = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \quad (1.4)$$

Si vede pertanto che, in caso di espansione decelerata, come ipotizzato dalla teoria del Big Bang, il raggio di Hubble è destinato ad aumentare: porzioni di spazio che non sono causalmente connesse in un dato istante non potranno esserlo mai state neanche in passato, un punto che attraversa il raggio di Hubble lo sta facendo per la prima volta. È immediato riconoscere invece che, ipotizzando un periodo di espansione accelerata, e quindi di inflazione, si otterrebbe contemporaneamente un periodo di raggio comoviente di Hubble decrescente. È proprio questa la chiave che porta alla soluzione dell'horizon problem: se, all'inizio dell'inflazione, l'universo osservabile (oggi) fosse stato tutto contenuto all'interno del raggio di Hubble, si otterrebbe la connessione causale che permette di spiegare l'uniformità della CMB. La figura 1.1 mostra l'horizon problem secondo la teoria standard del Big Bang. La figura 1.2 indica invece la soluzione al problema se si ipotizza un periodo di inflazione sufficientemente lungo. Nelle due immagini la coordinata temporale è sostituita dal tempo conforme  $\tau$ , così definito:

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)}; \quad (1.5)$$

dove  $t$  è il tempo cosmico (paragrafo 2.2). Dalla definizione di  $\tau$  si vede infatti che, poiché in prossimità della singolarità a  $t = 0$  il fattore di scala è molto piccolo, ad un  $dt$  infinitesimo può corrispondere un  $d\tau$  molto grande. È possibile mostrare infatti, come riportato in [7], che, se  $t \rightarrow 0$  e in caso di espansione accelerata, allora  $\tau \rightarrow -\infty$ : per valori negativi di  $\tau$  ci si trova in una fase inflazionaria. Dalle immagini si vede che, grazie all'estensione a  $\tau < 0$  dovuta all'inflazione, le porzioni di universo osservabile hanno

avuto il tempo di entrare in contatto causale. Lo stesso non accade nel caso del Big Bang standard, dove la presenza di una singolarità iniziale impedisce il contatto tra punti reciprocamente troppo distanti. È bene fare attenzione alla non fisicità del tempo comoviente: la situazione in cui  $\tau < 0$  non corrisponde ad un effettivo tempo  $t$  negativo, che non avrebbe infatti fisicamente alcun senso.

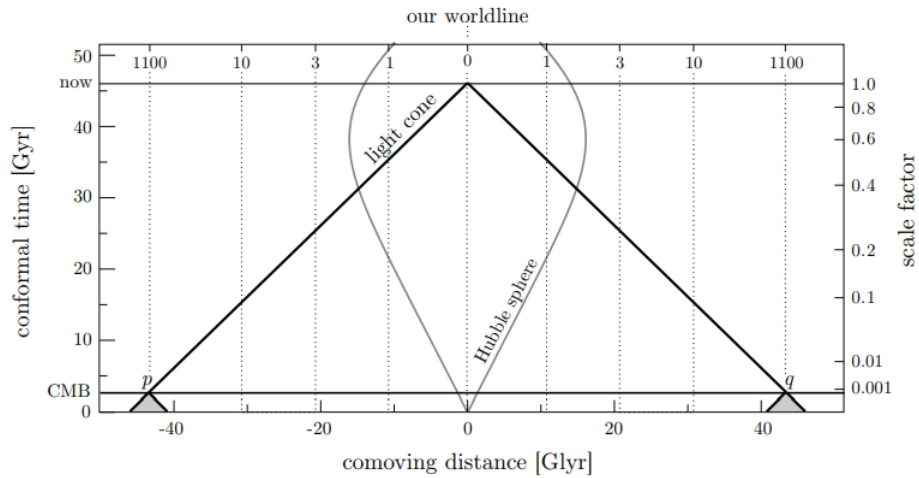


Figura 1.1: Immagine tratta da [7]. L’horizon problem nel modello del big bang standard. La radiazione cosmica di fondo che ci raggiunge ora proviene dai punti  $p$  e  $q$ . Al momento dell’emissione questi due punti non avevano avuto abbastanza tempo per entrare in contatto causale.

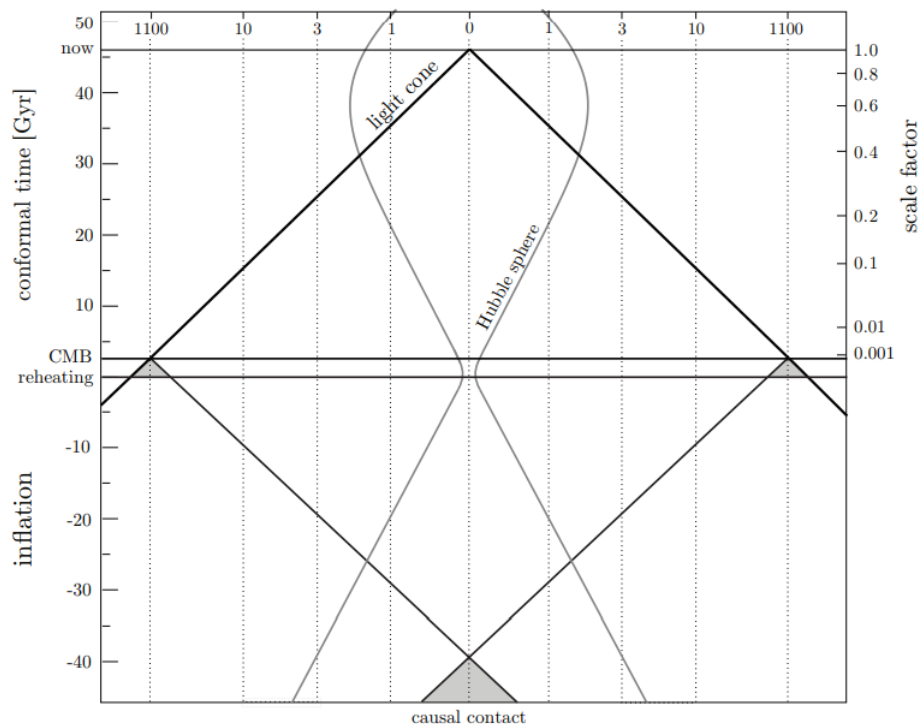


Figura 1.2: Immagine tratta da [7]. Soluzione dell’horizon problem secondo l’ipotesi inflazionaria. I punti  $p$  e  $q$  hanno il tempo di entrare in contatto causale ad un tempo conforme negativo. La superficie della singolarità è ora sostituita dalla separazione tra inflazione e espansione standard. Il raggio comoviente di Hubble diminuisce durante l’inflazione.

### 1.1.1 Durata dell’inflazione

Il periodo di inflazione deve prolungarsi sufficientemente, al fine di risolvere l’horizon problem: è quindi possibile stimarne una durata minima, senza il bisogno di conoscere l’evoluzione del fattore di scala.

La richiesta da soddisfare è che il raggio dell'universo osservabile nel presente sia minore del raggio comoviente di Hubble all'inizio dell'inflazione (figura 1.3):

$$r_H(t_0) < r_H(t_i) \rightarrow (a_0 H_0)^{-1} < (a_i H_i)^{-1}. \quad (1.6)$$

Tale idea è tratta da [7].

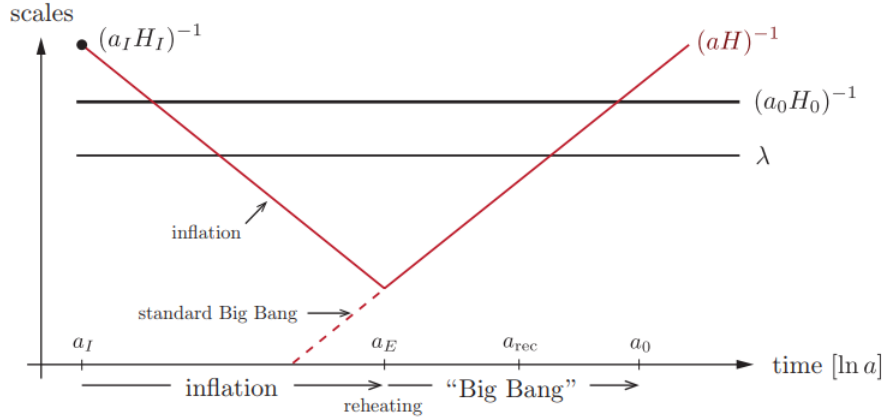


Figura 1.3: Immagine tratta da [7]. Andamento del raggio comoviente di Hubble in funzione di  $\ln(a)$ . L'horizon problem viene risolto se  $r_H$  all'inizio dell'inflazione è maggiore del valore attuale. Il minimo corrisponde alla fine dell'inflazione.

Vogliamo ora calcolare il rapporto tra  $r_H(t_0)$  e il raggio di Hubble alla fine dell'inflazione  $r_H(t_f)$ . Assumiamo (trascurando le recenti epoche dominate da materia ed energia oscura) che, dalla fine dell'inflazione ad oggi, l'universo, dominato dalla radiazione, abbia subito un'espansione decelerata: sotto questa ipotesi si ha che  $H \propto a^{-2}$ . Sotto la stessa ipotesi il fattore di scala risulta inversamente proporzionale alla temperatura  $T$ , di cui sono noti i valori  $T_f$  e  $T_0$ . Sfruttando queste considerazioni si ottiene:

$$\frac{r_H(t_0)}{r_H(t_f)} = \frac{(a_0 H_0)^{-1}}{(a_f H_f)^{-1}} \approx \frac{a_f a_0^2}{a_0 a_f^2} = \frac{a_0}{a_f} \approx \frac{T_f}{T_0} \approx 10^{28}. \quad (1.7)$$

Combinando le due espressioni (1.6) e (1.7) si ha:

$$(a_i H_i)^{-1} > (a_0 H_0)^{-1} \approx 10^{28} (a_f H_f)^{-1}. \quad (1.8)$$

L'ultima assunzione necessaria è quella secondo la quale, durante l'inflazione,  $H$  risulta pressoché costante: è il caso analogo ad un universo dominato dalla costante cosmologica, tale che  $w = -1$  (universo di de Sitter). Vedremo in seguito che durante l'inflazione è ragionevole assumere una tale equazione di stato. Applicando questo risultato a (1.8) si ha infine:

$$\ln\left(\frac{a_f}{a_i}\right) \gtrsim 60. \quad (1.9)$$

Abbiamo così ottenuto una stima del minimo di inflazione necessario a risolvere l'horizon problem: utilizzando un termine diffuso in letteratura, si richiedono almeno 60 e-foldings.

## 1.2 Flatness problem

Per spiegare l'origine di questo problema conviene innanzitutto, come in [8], introdurre la prima equazione di Friedmann per un fluido perfetto:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}; \quad (1.10)$$



dove  $k$  rappresenta il parametro di curvatura spaziale dell'universo: assume i valori  $+1$ ,  $0$  o  $-1$  nel caso di universo chiuso, piatto o aperto rispettivamente. Ponendo  $k = 0$  nella (1.10) e invertendo l'equazione si ottiene la cosiddetta densità critica:

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G}; \quad (1.11)$$

la densità di energia, cioè, che avrebbe l'universo se fosse perfettamente piatto. Definiamo il rapporto  $\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}$ : misurandone sperimentalmente il valore attuale, si trova che esso è molto vicino all'unità. Questo indica che la densità del nostro universo è molto simile alla densità critica. In altre parole, l'attuale universo si avvicina molto all'essere piatto. Sostituendo la (1.11) nella (1.10), e ricordando la definizione di  $\Omega$ , si ottiene:

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{(aH)^2}; \quad (1.12)$$

dove si è preso il valore assoluto ad entrambi i membri. Calcolando la derivata temporale di tale espressione si trova:

$$\frac{d}{dt}(|\Omega - 1|) = \frac{d}{dt} \frac{|k|}{(aH)^2} = |k| \frac{d}{dt} \dot{a}^{-2} = -|k| \frac{2\ddot{a}}{\dot{a}^3}. \quad (1.13)$$

Si ha quindi che  $|\Omega - 1|$  è crescente per un'espansione decelerata. Oggi tale valore si discosta da 0 per valori dell'ordine dei millesimi: per ottenere tale risultato, secondo la teoria standard del Big Bang, si dovrebbe partire da un valore iniziale estremamente piccolo, ma non nullo. Questo richiederebbe un "fine-tuning" delle condizioni iniziali, non giustificabile in altro modo: sembrerebbe quindi che le caratteristiche dell'universo come lo conosciamo siano frutto di un caso. Un caso, tra l'altro, estremamente improbabile. L'inflazione è invece in grado di spiegare l'attuale vicinanza dell'universo all'essere piatto. Si vede dalla (1.13) che, durante un periodo di accelerazione,  $|\Omega - 1|$  è funzione decrescente del tempo: partendo quindi da una situazione generica, entro la fine dell'inflazione si può ottenere un valore sufficientemente piccolo, tale che ancora oggi non si discosti troppo da 0 (figura 1.4).

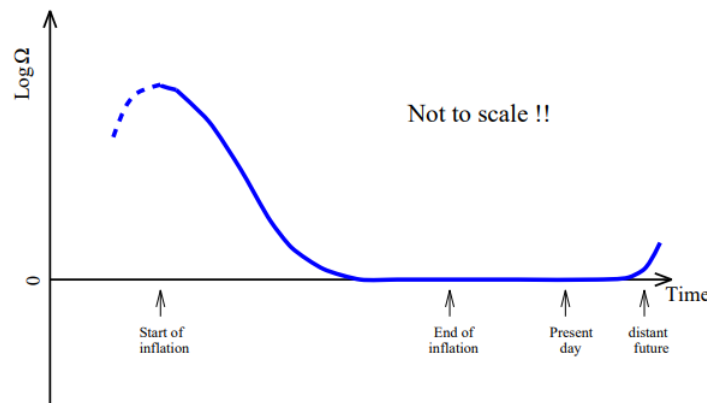


Figura 1.4: Immagine tratta da [9]. Andamento di  $\ln(\Omega)$  nel corso del tempo. All'inizio dell'inflazione il valore è generico, dopo è praticamente nullo, e così è rimasto fino ad oggi. In futuro potrà aumentare di nuovo.



## Capitolo 2

# Inflazione con campo scalare

### 2.1 Inflatone

Dopo aver definito le caratteristiche di un periodo di inflazione, e capito quali sono i problemi che esso riesce a risolvere, ci occupiamo ora di approfondire la dinamica di questo fenomeno. L'espansione accelerata richiede un'equazione di stato tale che  $w < -\frac{1}{3}$ : bisogna quindi individuare la sorgente di una tale pressione negativa. Materia e radiazione, infatti, corrispondono rispettivamente a  $w = 0$  e  $w = \frac{1}{3}$ , e non possono essere quindi i responsabili di un periodo di inflazione. Anche quella che oggi viene detta energia oscura, associata alla costante cosmologica  $\Lambda$ , era, nei primi istanti dopo il Big Bang, trascurabile nel computo totale delle componenti energetiche e non può essere quindi ciò di cui siamo alla ricerca. L'energia oscura si ritiene che sia invece responsabile dell'attuale espansione accelerata, poiché è tutt'ora la componente dominante di energia. L'ipotesi cui allora ci si appoggia, come abbiamo accennato in precedenza, è che la dinamica dell'inflazione sia governata dalla presenza di un campo scalare  $\varphi$  detto "inflatone", fonte dell'espansione accelerata cui noi siamo interessati, ma la cui natura fisica è tutt'ora sconosciuta. Vedremo in seguito che, affinché sia valida la condizione  $w < -\frac{1}{3}$ , l'energia potenziale di tale campo deve dominare non solo su tutte le altre fonti di energia, ma anche sulla stessa energia cinetica  $\dot{\varphi}^2$ . Per provare a capire la dinamica dell'inflazione è dunque necessario studiare la dinamica di questo campo scalare.

### 2.2 Principio cosmologico

Prima di iniziare la trattazione della dinamica dell'inflatone attraverso l'approccio lagrangiano, vediamo brevemente l'idea che sta alla base della descrizione geometrica dell'universo che andremo a studiare, il cosiddetto "principio cosmologico". Tale principio afferma che, prendendo l'universo nel suo insieme (o, perlomeno, l'universo osservabile), e osservandolo su distanze sufficientemente ampie, il risultato è qualcosa di omogeneo ed isotropo nelle coordinate spaziali. Questa idea potrebbe sembrare controintuitiva (basta guardarsi intorno per capire che la realtà non è omogenea né isotropa), ed infatti è fondamentale sottolineare che il principio vale solo su larghe scale, talmente ampie che, assumendo una tale prospettiva, le dimensioni delle galassie e dei loro ammassi risultano trascurabili. Solo in questo caso si può ritenere valido il principio cosmologico. Sfruttando l'omogeneità e l'isotropia delle componenti spaziali, è possibile derivare la metrica che descrive un tale spaziotempo, detta metrica di Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right). \quad (2.1)$$

Le coordinate spaziali  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$  sono dette coordinate comoventi, cioè di un osservatore che si muove insieme all'universo in espansione, avente quindi velocità peculiare nulla. Il tempo cosmico  $t$  è il tempo misurato da un tale osservatore comovente. La componente spaziale della metrica FLRW è costituita

da una parte costante (assomiglia ad uno spazio di Minkowski in coordinate sferiche) moltiplicata per un termine  $a(t)$ , detto fattore di scala, il principale oggetto di interesse della nostra trattazione. Tale fattore è legato alle dimensioni dell'universo in un dato istante: utilizzando coordinate comoventi, che rimangono fisse durante l'espansione, è sufficiente descrivere la dinamica di  $a(t)$  per comprendere come si evolve la metrica FLRW con l'avanzare del tempo. Per convenzione si pone il valore attuale  $a_0 = 1$ : dunque, poiché l'universo si espande, in passato si ha  $a < 1$  e in futuro  $a > 1$ . È importante sottolineare il ruolo del termine di curvatura spaziale  $k$ : esso assume i valori  $0, +1, -1$  per un universo rispettivamente piatto, chiuso, aperto. Le osservazioni sperimentali indicano che l'universo in cui viviamo si discosta di molto poco dall'essere piatto e non è pertanto possibile esplicitare il valore di  $k$  in modo univoco. La segnatura utilizzata è evidentemente  $(-, +, +, +)$ .

A priori il campo scalare  $\varphi$  definito in precedenza è funzione delle coordinate spaziotemporali. Sfruttando però il principio cosmologico è possibile fare un'assunzione fondamentale: il valore medio di  $\varphi$  è funzione unicamente del tempo  $t$  ed è quindi costante in tutto lo spazio, ad un istante fissato. Utilizzeremo quest'ipotesi per scrivere le equazioni cosmologiche per l'inflatone.

## 2.3 Equazioni cosmologiche

Il punto di partenza per studiare la dinamica dell'inflatone  $\varphi$  è rappresentato dall'azione del suddetto campo, riportata in [10]. Per un campo scalare, minimamente accoppiato con la gravità, si ha:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right); \quad (2.2)$$

dove  $g_{\mu\nu}$  è la generica metrica che descrive lo spazio-tempo e  $g$  il suo determinante.  $V(\varphi)$  rappresenta il generico potenziale di interazione dipendente da  $\varphi$ . Le equazioni di Eulero-Lagrange si ottengono minimizzando l'azione (2.2) rispetto al campo stesso, trovando così l'equazione della dinamica per  $\varphi$ :

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \varphi = V'(\varphi); \quad (2.3)$$

dove l'apice indica la derivata prima rispetto a  $\varphi$ ;  $\nabla_\mu$  indica la derivata covariante. Variando l'azione (2.2) rispetto all'inversa della metrica  $g^{\mu\nu}$  si ottiene l'espressione del tensore energia-impulso per il campo scalare in questione:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi + V(\varphi) \right). \quad (2.4)$$

Introduciamo ora l'equazione che descrive la curvatura dello spaziotempo in funzione del contenuto energetico dell'universo, l'equazione di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}; \quad (2.5)$$

dove  $G$  è la costante di gravitazione universale. Il membro di destra è proporzionale al tensore energia-impulso, che rappresenta la densità di energia/materia. A sinistra troviamo invece  $R_{\mu\nu}$ , tensore di Ricci, ed  $R$ , la sua contrazione con la metrica, che descrivono la curvatura dello spaziotempo. L'equazione (2.5) può essere riscritta nella seguente forma, a noi più pratica:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right); \quad (2.6)$$

con  $T$  la traccia del tensore energia-impulso  $T_{\mu\nu}$ . Il nostro obiettivo è ora quello di riscrivere tale equazione (2.6) utilizzando la metrica FLRW e l'espressione (2.4) del tensore energia-impulso per il campo scalare  $\varphi$ . È necessario, a questo proposito, esplicitare il tensore di Ricci  $R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda$ , dove  $R_{\nu\rho\sigma}^\mu$  è il tensore di Riemann, definito nel modo seguente:

$$R_{\nu\rho\sigma}^\mu = \partial_\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\mu - \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\mu + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda. \quad (2.7)$$

$\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}$  è detto simbolo di Christoffel e, essendo funzione unicamente della metrica e delle sue derivate, rappresenta il legame tra la curvatura e la metrica stessa. La sua espressione è la seguente:

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\partial_{\rho}g_{\sigma\nu} + \partial_{\sigma}g_{\nu\rho} - \partial_{\nu}g_{\rho\sigma}\right). \quad (2.8)$$

Partendo dalla metrica FLRW è allora possibile, utilizzando l'espressione (2.8) e sostituendola in (2.7), ricavare esplicitamente il tensore di Ricci. Ci limitiamo a fornire il risultato di tale procedimento, riportato integralmente in [11], indicando unicamente le componenti non nulle:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}; \quad (2.9)$$

$$R_{ij} = \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2}\right]g_{ij}. \quad (2.10)$$

Gli indici latini  $i$  e  $j$  variano da 1 a 3 e si riferiscono dunque alle componenti spaziali di un tensore. Siamo riusciti ad esplicitare il tensore di Ricci e, quindi, il membro di sinistra dell'equazione di Einstein (2.6), in funzione del fattore di scala  $a(t)$ . Troviamo ora un modo per scrivere il membro di destra di tale equazione. Assumiamo che, durante l'inflazione, il contenuto energetico dell'universo sia dominato dalla presenza dell'inflatone  $\varphi$ : utilizziamo quindi l'espressione (2.4) per il tensore energia-impulso. Ricordiamo ora l'importante assunzione, fatta in precedenza, per la quale consideriamo  $\varphi(t)$  come funzione del solo tempo cosmico  $t$ . Tenendo ciò a mente, dopo qualche passaggio si ottiene la seguente uguaglianza:

$$T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T = \partial_{\mu}\varphi\partial_{\nu}\varphi + g_{\mu\nu}V(\varphi). \quad (2.11)$$

Siamo ora in possesso di tutto il necessario per riscrivere l'equazione di Einstein (2.6) nel caso della metrica FLRW, con la dinamica governata dall'inflatone  $\varphi$ . Eguagliando la (2.9) con la componente (0, 0) della (2.11), opportunamente moltiplicata per  $8\pi G$ , si ottiene:

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G\left(\dot{\varphi}^2 - V(\varphi)\right). \quad (2.12)$$

Procedendo allo stesso modo per l'espressione (2.10) e la componente  $(i, j)$  della (2.11) si trova, fattorizzando  $g_{ij}$  da entrambe le parti:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2} = 8\pi GV(\varphi). \quad (2.13)$$

Riconsideriamo ora l'equazione (2.3), descrivente il moto dell'inflatone  $\varphi$ . Esplicitando la derivata covariante si ottiene:

$$\left(\partial_{\mu}\partial^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\nu}\partial^{\rho}\right)\varphi = V'(\varphi). \quad (2.14)$$

Applicando l'espressione (2.8) per il simbolo di Christoffel e assumendo nulle le derivate spaziali di  $\varphi(t)$ , si ottiene infine:

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0. \quad (2.15)$$

L'appena ricavata (2.15) e le precedenti (2.12) e (2.13) costituiscono un sistema di equazioni, dette "Scalar Cosmology Equations" (SCE), le cui due incognite sono rappresentate dall'evoluzione del fattore di scala  $a(t)$  e dalla dinamica dell'inflatone  $\varphi(t)$ . Si può infatti dimostrare che le tre equazioni non sono indipendenti ed è possibile, per esempio, ricavare la terza a partire dalle prime due. Abbiamo comunque preferito ricavarle in modo autonomo per mostrare chiaramente quale sia l'origine di ciascuna equazione. Rimaneggiamo il sistema SCE (come verrà chiamato d'ora in poi) in una forma più comoda da risolvere, come viene presentato in [10]. Ricordiamo anche la definizione del parametro di Hubble  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ . Sostituiamo la (2.12) e la (2.13) con la loro somma e con la combinazione (2.12) + 3(2.13). Si ottiene il sistema SCE nella forma desiderata:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right); \quad (2.16)$$

$$\dot{H} - \frac{k}{a^2} = -4\pi G\dot{\varphi}^2; \quad (2.17)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0. \quad (2.18)$$

È interessante notare il termine  $3H\dot{\varphi}$  della (2.18), che può essere interpretato come un contributo di smorzamento alla dinamica dell'inflatone.

L'obiettivo che ci poniamo, nel seguito della trattazione, è quello di cercare delle soluzioni per il sistema (2.16)-(2.18), in particolare per  $a(t)$ , in modo da ricavare una possibile descrizione della dinamica del fenomeno di inflazione.

### 2.3.1 Equazioni cosmologiche a partire dal fluido perfetto

Un metodo alternativo per ricavare il sistema SCE è quello di partire, come si è soliti fare in cosmologia, dall'assumere il contenuto di materia/energia dell'universo come un fluido perfetto. Le equazioni (2.16) e (2.17), infatti, non sono altro che le equazioni di Friedmann formulate per il campo scalare  $\varphi$ . Per mostrare ciò, partiamo, assumendole note, dalle equazioni di Friedmann per il fluido perfetto, con densità di energia  $\rho$  e pressione isotropa  $P$ :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}; \quad (2.19)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P). \quad (2.20)$$

Un campo scalare  $\varphi(t)$  si comporta come un fluido perfetto le cui densità di energia e pressione sono le seguenti, tratte da [7]:

$$\rho_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi); \quad (2.21)$$

$$P_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi). \quad (2.22)$$

Inserendo l'espressione (2.21) nella (2.19) si ottiene immediatamente la prima equazione (2.16) del sistema SCE. Prendendo in considerazione l'equazione (2.20), ed effettuando le sostituzioni (2.21) e (2.22), si ottiene la (2.12) che, come abbiamo già mostrato, può essere riscritta sotto forma di una combinazione lineare con la (2.16), fornendo la seconda equazione (2.17) del sistema SCE, di cui eravamo alla ricerca. Ci rimane da trattare solamente l'equazione del moto di  $\varphi(t)$  (2.18): questa non è altro che l'equazione di continuità del fluido perfetto, riportata per esempio in [7], riscritta per un campo scalare. Partiamo quindi da:

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P). \quad (2.23)$$

È immediato verificare che, effettuando le consuete sostituzioni e assumendo (ragionevolmente)  $\dot{\varphi} \neq 0$ , si ottiene il risultato cercato.

## Capitolo 3

# Funzione generatrice

Ci occupiamo ora di capire come risolvere il sistema (2.16)-(2.18). Non è possibile derivare direttamente soluzioni analitiche esatte, se non nel caso dell'inflazione "power-law" [12, 13], caratterizzata da un potenziale esponenziale e da un fattore di scala che si evolve come una qualche potenza del tempo. Il metodo che useremo per cercare le soluzioni è detto "metodo della funzione generatrice", grazie al quale saremo in grado di costruire soluzioni esatte che soddisfano il sopracitato sistema SCE. Il procedimento che utilizzeremo è tratto da [10], cui dunque si fa implicito riferimento nel corso di tutto questo capitolo. I risultati che si trovano utilizzando questo metodo erano già stati ottenuti in precedenza in [14, 15, 16].

Consideriamo innanzitutto il coefficiente di curvatura spaziale  $k$ : esso può assumere i valori 0, +1 e -1 rispettivamente in caso di universo piatto, chiuso o aperto. Sperimentalmente si vede che l'universo osservato si avvicina molto ad essere piatto, come abbiamo visto in precedenza definendo il flatness problem. Anche se così non fosse, la dipendenza delle precedenti equazioni dal valore di  $k$  può essere ragionevolmente trascurata, in quanto i termini in cui vi compare riportano un  $a^2$  al denominatore, che, per la natura stessa dell'inflazione, li porta ad annullarsi in un tempo brevissimo. Sulla base di queste assunzioni, trascuriamo quindi i termini contenenti  $k$ . Le due equazioni di Friedmann si semplificano, diventando:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \right); \quad (3.1)$$

$$\dot{H} = -4\pi G \dot{\varphi}^2. \quad (3.2)$$

Considerando l'equazione (3.2), in particolare, possiamo pensare il parametro di Hubble come funzione del campo  $H(\varphi)$ : in questo modo si ha  $\dot{H}(\varphi) = H'(\varphi)\dot{\varphi}$ , e pertanto, la (3.2) diventa:

$$H' = -4\pi G \dot{\varphi}. \quad (3.3)$$

È ora possibile esplicitare  $\dot{\varphi}$  dalla (3.3), inserire il risultato in (3.1) e, riarrangiando i termini, ottenere:

$$\frac{1}{12\pi G} H'^2 - H^2 = -\frac{8\pi G}{3} V(\varphi). \quad (3.4)$$

Spostiamo quindi la nostra attenzione dal sistema SCE all'equazione (3.4). Notiamo in particolare che tale equazione lega il parametro di Hubble al potenziale  $V(\varphi)$ : noto uno dei due, è possibile (teoricamente) ricavare l'altro, e viceversa. In realtà ciò è possibile solo se si cerca  $V(\varphi)$  conoscendo  $H(\varphi)$ : se si vuole seguire la strada opposta, che è proprio quello cui noi siamo interessati, è necessario imporre che il potenziale assuma un'espressione ben definita, tale che sia possibile ricavare una soluzione esatta della (3.4) per  $H(\varphi)$ . L'espressione riportata in [10] è la seguente:

$$V(\varphi) = -\frac{1}{12\pi G} F'^2 + \left( F(\varphi) + F_* \right)^2; \quad (3.5)$$

dove  $F(\varphi)$ , continua e derivabile, è detta funzione generatrice.  $F_*$  è un'arbitraria costante. Fissando quindi una qualche espressione per  $F(\varphi)$ , la forma del potenziale è immediatamente determinata.

Mostriamo ora che, scrivendo  $V(\varphi)$  come in (3.5), è possibile risolvere l'equazione (3.4). Comparando le due, si vede facilmente che la soluzione per il parametro di Hubble è:

$$H(\varphi) = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} (F(\varphi) + F_*). \quad (3.6)$$

Inserendo questo risultato in (3.4) si trova per il potenziale proprio l'espressione (3.5), e abbiamo così verificato la validità della nostra soluzione. L'approccio da seguire sarà quindi il seguente:

1. innanzitutto, si sceglie un'arbitraria espressione per  $F(\varphi)$ , determinando di conseguenza, grazie a (3.5) e (3.6),  $V(\varphi)$  e  $H(\varphi)$ ;
2. inserendo l'espressione di  $H(\varphi)$  in (3.3) è possibile, integrando, ricavare  $\varphi(t)$ ;
3. si sostituisce il risultato così trovato in (3.6), per trovare infine l'espressione di  $a(t)$ .

Notiamo quindi come l'aver introdotto un'espressione per  $H(\varphi)$  in funzione di  $F(\varphi)$  abbia ridotto i gradi di libertà del sistema SCE, portandoli ad 1 (resta infatti da risolvere la sola equazione (3.3)): in particolare è possibile verificare che l'equazione del moto per il campo (2.18) è risolta identicamente utilizzando le espressioni che abbiamo mostrato per  $H(\varphi)$  e  $V(\varphi)$ .

Nel prosieguo vedremo quindi come ottenere le soluzioni applicando il metodo appena illustrato, a partire da differenti tipologie di funzione generatrice.

### 3.1 Potenziale polinomiale

Come primo esempio, consideriamo la funzione generatrice avente la seguente forma polinomiale:

$$F(\varphi) = \sum_{k=0}^p \lambda_k \varphi^k + F_*; \quad (3.7)$$

con  $k$  e  $p$  indici naturali ed  $F_*$  costante. Utilizzando la (3.5) si trova la seguente espressione per il potenziale:

$$V(\varphi) = -\frac{1}{12\pi G} \left[ \sum_{k=0}^{p-1} (k+1) \lambda_{k+1} \varphi^k \right]^2 + \left[ \sum_{k=0}^p \lambda_k \varphi^k + F_* \right]^2. \quad (3.8)$$

Il parametro di Hubble è definito dalla (3.6), che in questo caso restituisce:

$$H(\varphi) = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \left( \sum_{k=0}^p \lambda_k \varphi^k + F_* \right). \quad (3.9)$$

Per il calcolo esplicito della soluzione, partiamo dal semplice caso in cui  $F_* = 0$  e  $p = 1$ . Per questa scelta dei parametri, le grandezze sopra definite diventano:

$$F(\varphi) = \lambda_0 + \lambda_1 \varphi; \quad (3.10)$$

$$V(\varphi) = -\frac{\lambda_1^2}{12\pi G} + \lambda_0^2 + 2\lambda_0 \lambda_1 \varphi + \lambda_1^2 \varphi^2; \quad (3.11)$$

$$H(\varphi) = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} (\lambda_0 + \lambda_1 \varphi). \quad (3.12)$$

Seguendo il metodo sopra esposto si considera ora l'equazione (3.3). Sostituendovi l'espressione (3.12) per  $H(\varphi)$  e svolgendo i conti si giunge alla seguente equazione differenziale per  $\varphi(t)$ :

$$\dot{\varphi} = -\frac{\lambda_1}{\sqrt{6\pi G}}. \quad (3.13)$$



Possiamo integrare l'equazione, assumendo la condizione iniziale  $\varphi_* = \varphi(t_*)$ , con  $t_*$  istante generico:

$$\varphi(t) = \varphi_* - \frac{\lambda_1}{\sqrt{6\pi G}}(t - t_*). \quad (3.14)$$

L'ultimo passaggio consiste nel risostituire questo risultato in (3.12) e successivamente integrare, ricordando la definizione  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ , per ottenere il risultato cercato:

$$a(t) = a_* \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi G}{3}}(\lambda_0 + \lambda_1 \varphi_*)(t - t_*) - \frac{\lambda_1^2}{3}(t - t_*)^2\right). \quad (3.15)$$

Abbiamo così ottenuto l'evoluzione nel tempo del fattore di scala, associabile alla dinamica dell'universo durante il periodo di inflazione.

A partire da questo caso generico, è particolarmente interessante considerare l'eventualità in cui  $\lambda_0 = 0$  e  $\lambda_1 = \frac{m}{\sqrt{2}}$ . Il potenziale che ne risulta è il seguente:

$$V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{m^2}{24\pi G}. \quad (3.16)$$

Il risultato appena scritto è il potenziale di un campo scalare di massa  $m$ ,  $V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2$ , cui è stato sommato un termine di traslazione. La soluzione per  $a(t)$  ad esso associata è:

$$a(t) = a_* \exp\left(\sqrt{\frac{4\pi G}{3}}m\varphi_*(t - t_*) - \frac{m^2}{6}(t - t_*)^2\right). \quad (3.17)$$

Vedremo in seguito, trattando l'approssimazione slow-roll, come sarà possibile ottenere questa soluzione a partire dallo stesso potenziale (3.16), privato però del termine aggiuntivo di traslazione.

Vediamo adesso un secondo esempio, ponendo nella (3.7) tutti i  $\lambda_k = 0$  tranne che per l' $n$ -esimo. La funzione generatrice e il potenziale risultano pertanto:

$$F(\varphi) = \lambda_n \varphi^n; \quad (3.18)$$

$$V(\varphi) = -\frac{1}{12\pi G}n^2\lambda_n^2\varphi^{2(n-1)} + \lambda_n^2\varphi^{2n}. \quad (3.19)$$

Ripercorrendo gli stessi passaggi del caso precedente si ottengono le espressioni per il campo e per il fattore di scala in funzione del tempo (valide per  $n \neq 2$ ):

$$\varphi(t) = \left(\varphi_*^{2-n} + \frac{n(n-2)\lambda_n}{\sqrt{6\pi G}}(t - t_*)\right)^{\frac{1}{2-n}}; \quad (3.20)$$

$$a(t) = a_* \exp\left[-\frac{2\pi G}{n}\left(\varphi_*^{2-n} + \frac{\lambda_n n(n-2)}{\sqrt{6\pi G}}(t - t_*)\right)^{\frac{2}{2-n}}\right]. \quad (3.21)$$

Si può verificare che, ponendo  $n = 1$  nelle espressioni appena trovate, si ottengono risultati in accordo con i precedenti, a meno di costanti moltiplicative, che possono essere riassorbite nel termine  $a_*$ .

Le soluzioni (3.20) e (3.21) non coprono l'eventualità in cui  $n = 2$ , che è invece necessario trattare singolarmente. Riportiamo dunque per completezza i relativi risultati, ottenuti ponendo  $n = 2$  in (3.18) e (3.19):

$$\varphi(t) = \varphi_* \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3\pi G}}\lambda_2(t - t_*)\right); \quad (3.22)$$

$$a(t) = a_* \exp\left[-\pi G \varphi_*^2 \exp\left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi G}}\lambda_2(t - t_*)\right)\right]. \quad (3.23)$$

Nel caso invece sia  $F_* \neq 0$ , è evidente che l'espressione del campo  $\varphi(t)$  non viene modificata, mentre il fattore di scala assume la seguente forma:

$$\tilde{a}(t) = a_* \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi G}{3}}F_* t\right) \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \int F(\varphi(t)) dt\right) = a_* \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi G}{3}}F_* t\right) a(t); \quad (3.24)$$

e pertanto si vede che l'effetto è un fattore moltiplicativo posto davanti ai risultati già discussi.

### 3.2 Potenziale trigonometrico

Vogliamo ora risolvere le equazioni cosmologiche per il campo scalare nel caso in cui il potenziale assuma una semplice espressione trigonometrica. Partiamo da una funzione generatrice così definita:

$$F(\varphi) = A \sin(\lambda\varphi); \quad (3.25)$$

con  $A$  e  $\lambda$  costanti reali. Ne consegue, per la (3.5), il seguente potenziale:

$$V(\varphi) = -\frac{1}{12\pi G} A^2 \lambda^2 \cos^2(\lambda\varphi) + A^2 \sin^2(\lambda\varphi). \quad (3.26)$$

Tale espressione può essere ricondotta ad una forma più semplice scegliendo  $\lambda$  tale che  $\lambda^2 = 12\pi G$ . Così facendo il potenziale diventa:

$$V(\varphi) = -A^2 \cos(4\sqrt{3\pi G}\varphi). \quad (3.27)$$

Per non perdere di generalità, però, manteniamo  $\lambda$  un parametro generico. Sfruttando il metodo della funzione generatrice, infatti, l'espressione del potenziale non appare direttamente all'interno delle equazioni da risolvere e pertanto la "scomoda" (3.26) non rappresenta in alcun modo una complicazione per i passaggi a venire. Il parametro di Hubble è dato dalla (3.6):

$$H(\varphi) = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} A \sin(\lambda\varphi). \quad (3.28)$$

Procedendo ora con il metodo generale, lo stesso utilizzato per il potenziale polinomiale, si giunge alla seguente equazione:

$$\dot{\varphi} = -\frac{A\lambda}{\sqrt{6\pi G}} \cos(\lambda\varphi). \quad (3.29)$$

A causa della particolare forma di questa equazione, non risolviamo esplicitamente il problema per  $\varphi(t)$  ma risulta più pratico calcolare  $\sin(\lambda\varphi)$ : infatti, siamo interessati principalmente all'espressione di  $a(t)$ , per ottenere la quale ci basta trovare la dipendenza temporale di  $H(\varphi(t))$ . Questo giustifica il nostro approccio. Ricordando che  $\int \frac{du}{\cos u} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin u}{1-\sin u} + c$ , si ottiene:

$$\sin(\lambda\varphi) = \tanh\left(\frac{A\lambda^2}{\sqrt{6\pi G}}(t - t_*)\right). \quad (3.30)$$

Sfruttando tale risultato, deriviamo infine l'espressione per il fattore di scala:

$$a(t) = a_* \left[ \cosh\left(\frac{A\lambda^2}{\sqrt{6\pi G}}(t - t_*)\right) \right]^{\frac{4\pi G}{\lambda^2}}. \quad (3.31)$$

### 3.3 Potenziale esponenziale

Un'espressione per il potenziale ricorrente in letteratura è quella di tipo esponenziale, che assumiamo avere la seguente forma:

$$V(\varphi) = \alpha e^{\beta\varphi}; \quad (3.32)$$

con  $\alpha$  e  $\beta$  costanti reali. Ipotizziamo allora una funzione generatrice del tipo:

$$F(\varphi) = A e^{\mu\varphi}; \quad (3.33)$$

con  $A$  e  $\mu$  costanti reali. Ne consegue, per la (3.5), il potenziale:

$$V(\varphi) = A^2 \left(1 - \frac{\mu^2}{12\pi G}\right) e^{2\mu\varphi}. \quad (3.34)$$

È possibile ricondurre questo risultato all'espressione (3.32) effettuando le seguenti sostituzioni:

$$\alpha = A^2 \left( 1 - \frac{\mu^2}{12\pi G} \right); \quad (3.35)$$

$$\beta = 2\mu. \quad (3.36)$$

Ciò dimostra quindi la corretta scelta della funzione generatrice ipotizzata. È comodo, per semplificare i conti, utilizzare l'espressione (3.33) di  $F(\varphi)$ , mantenendo le costanti  $A$  e  $\mu$ , ed eventualmente inserire nel risultato finale le sostituzioni appena mostrate. Seguendo i consueti passaggi, si giunge all'equazione:

$$\dot{\varphi} = -\frac{A\mu}{\sqrt{6\pi G}} e^{\mu\varphi}; \quad (3.37)$$

che porge la soluzione per il campo:

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\mu} \ln \left( e^{-\mu\varphi_*} + \frac{A\mu^2}{\sqrt{6\pi G}} (t - t_*) \right). \quad (3.38)$$

Il risultato cercato per il fattore di scala è:

$$a(t) = a_* \left( e^{-\mu\varphi_*} + \frac{A\mu^2}{\sqrt{6\pi G}} (t - t_*) \right)^{\frac{4\pi G}{\mu^2}}. \quad (3.39)$$

L'espressione (3.39) viene comunemente chiamata inflazione “power-law”, la cui caratteristica è quella di essere l'unica soluzione analitica esatta derivabile in modo diretto dal sistema SCE, scritto nella forma (2.16)-(2.18). Ricaveremo in seguito lo stesso risultato utilizzando l'approccio dell'approssimazione slow-roll.

Occupiamoci ora di generalizzare il risultato (3.39), nel caso in cui  $F_* \neq 0$ . Si tratta allo stesso modo del caso a potenziale polinomiale: svolgendo i passaggi si ottiene un risultato del tutto identico al precedente, per il quale l'effetto di  $F_*$  è quello di moltiplicare il valore di  $a(t)$  per l'opportuno termine  $\exp\left(\sqrt{\frac{8\pi G}{3}} F_* t\right)$ .

### 3.4 Potenziale inverso

L'ultimo esempio che vediamo, per quanto riguarda il metodo della funzione generatrice, è il caso di un potenziale di forma che chiamiamo “inversa”, ovvero una opportuna combinazione lineare di potenze negative di  $\varphi$ . Consideriamo, come semplice esempio, il potenziale corrispondente alla seguente funzione generatrice:

$$F(\varphi) = m\varphi^{-\beta}; \quad (3.40)$$

con  $m$  costante reale e  $\beta \neq 2$  reale positiva. Per la (3.5) si ricava:

$$V(\varphi) = m^2 \varphi^{-2\beta} \left( 1 - \frac{\beta^2}{12\pi G} \varphi^{-2} \right). \quad (3.41)$$

In realtà abbiamo già trattato un potenziale di questo tipo, ottenuto a partire da  $F(\varphi) = \lambda_n \varphi^n$ . In quel caso avevamo assunto  $n$  come intero positivo, ma nulla impedisce di considerare anche esponenti negativi, ricadendo in questo caso di potenziale inverso. Effettuando in (3.41) le sostituzioni  $\beta \rightarrow -n$  e  $m \rightarrow \lambda_n$  si recupera infatti l'espressione (3.19). Rivediamo comunque i passaggi in modo più completo e utilizzando le costanti per il potenziale sopra definite. Procedendo come nei casi precedenti, si giunge all'equazione:

$$\dot{\varphi} = \frac{m\beta}{\sqrt{6\pi G}} \varphi^{-\beta-1}; \quad (3.42)$$

che porge la soluzione:

$$\varphi(t) = \left( \varphi_*^{\beta+2} + \frac{m\beta(\beta+2)}{\sqrt{6\pi G}}(t - t_*) \right)^{\frac{1}{\beta+2}}. \quad (3.43)$$

Sfruttando questo risultato si può derivare la dipendenza del fattore di scala in funzione del tempo:

$$a(t) = a_* \exp \left[ \frac{2\pi G}{\beta} \left( \varphi_*^{\beta+2} + \frac{m\beta(\beta+2)}{\sqrt{6\pi G}}(t - t_*) \right)^{\frac{2}{\beta+2}} \right]. \quad (3.44)$$

## Capitolo 4

# Inflazione con slow-roll

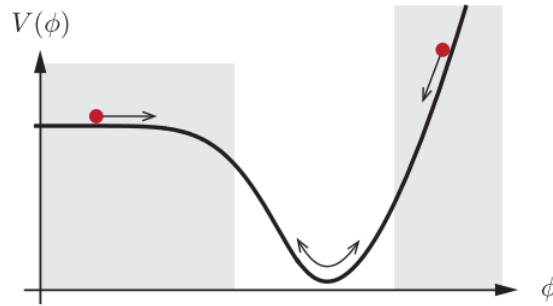


Figura 4.1: Immagine tratta da [7]. Esempio di potenziale slow-roll. L'approssimazione è soddisfatta nelle zone di colore grigio, caratterizzate da una bassa pendenza e/o grandi valori di  $V(\varphi)$ . (Nell'immagine il campo scalare è indicato con  $\phi$ ).

Nel capitolo precedente abbiamo derivato alcune semplici soluzioni per il fattore di scala  $a(t)$ , durante un periodo di inflazione, applicando il metodo della funzione generatrice. Vogliamo ora mostrare che è possibile risolvere il sistema (2.16)-(2.18) sulla base di una particolare assunzione, detta approssimazione “slow-roll”. Tale approssimazione è valida, per definizione, quando l'energia cinetica del campo è trascurabile rispetto al suo potenziale  $\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$  (figura 4.1), ovvero quando l'inflatone  $\varphi(t)$  “rotola lentamente lungo il potenziale”, da cui il nome. Vedremo che, in condizione di slow-roll, il sistema SCE assume una forma più semplice e diventa possibile calcolare, supponendo una qualche espressione del potenziale  $V(\varphi)$ , una soluzione esplicita per  $\varphi(t)$  ed  $a(t)$ .

Ricordiamo che la richiesta per ottenere un'espansione accelerata, e quindi l'inflazione, è, banalmente,  $\ddot{a} > 0$ ; sfruttando la seconda equazione di Friedmann per il fluido perfetto (1.2), tale condizione si può esprimere attraverso l'equazione di stato (1.3),  $w < -\frac{1}{3}$ . Quest'ultima espressione può essere riscritta ricordando le sostituzioni (2.21) e (2.22), utilizzate per ricavare le equazioni di Friedmann per il campo scalare, a partire da quelle per il fluido perfetto. La condizione per l'equazione di stato diventa allora:

$$w = \frac{P_\varphi}{\rho_\varphi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi)}{\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)} < -\frac{1}{3}; \quad (4.1)$$

ed è subito evidente che viene soddisfatta nel caso in cui  $\dot{\varphi}^2 < V(\varphi)$ . Applicando l'approssimazione slow-roll ( $\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$ ), si ha  $w \approx -1$ . Il caso  $w = -1$  corrisponde ad un universo governato dalla costante cosmologica, detto universo di de Sitter. In un caso del genere, la soluzione per il fattore di scala è del tipo  $a(t) \propto e^{Ht}$ , dove  $H$  resta costante nel tempo. Si vede quindi che, in caso di slow-roll, è ragionevole assumere approssimativamente la costanza del fattore di Hubble durante il periodo di inflazione.

Occupiamoci ora di definire i cosiddetti parametri slow-roll, seguendo il procedimento presentato in

[8]. La condizione  $\ddot{a} > 0$  può essere riscritta anche nel modo seguente (ricordando la (1.4)):

$$0 > \frac{d}{dt} r_H = \frac{d}{dt} (aH)^{-1} = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{(aH)^2} = -\frac{1}{a} \left( 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right) = -\frac{1}{a} (1 - \epsilon_H); \quad (4.2)$$

dove quindi  $\epsilon_H$ , primo parametro slow-roll, è stato definito come  $\epsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2}$  (il pedice indica che il parametro è scritto in funzione di  $H$ ). Si vede che la (4.2) è soddisfatta quando  $\epsilon_H < 1$ , che consiste appunto nella condizione per ottenere l'inflazione. Questo significa che l'espansione accelerata termina non appena questa condizione viene meno: è possibile quindi identificare la fine dell'inflazione con l'istante in cui si ha  $\epsilon_H = 1$ . Vediamo ora che valore assume  $\epsilon_H$  nel limite di approssimazione slow-roll. Riscriviamo innanzitutto le equazioni di Friedmann (2.16) e (2.17), sfruttando il fatto che  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ . Si ottiene:

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} V(\phi); \quad (4.3)$$

$$\dot{H} = -4\pi G \dot{\phi}^2. \quad (4.4)$$

La seconda equazione rimane invariata, rispetto alla trattazione esatta, ma ci permette di sottolineare nuovamente un argomento già visto in precedenza: la derivata temporale di  $H$  assume un valore piccolo, e pertanto il parametro di Hubble può essere considerato praticamente costante durante l'inflazione in slow-roll; dalla prima equazione si ricava poi l'evoluzione quasi-esponenziale del fattore di scala. Facciamo un'ulteriore assunzione: la condizione di slow-roll  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$  deve restare valida abbastanza a lungo ed è quindi necessario che l'accelerazione del campo sia trascurabile rispetto al termine di smorzamento. Si assume pertanto che  $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$ . La (2.18), equazione della dinamica per  $\phi(t)$ , può essere allora approssimata:

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi). \quad (4.5)$$

Inserendo le (4.3) e (4.4) nella definizione di  $\epsilon_H$  si ottiene:

$$\epsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq \frac{3}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{V(\phi)} \ll 1. \quad (4.6)$$

In questo modo la condizione di slow-roll  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$  è stata resa come una condizione sul parametro  $\epsilon_H \ll 1$ . Esplicitando  $\dot{\phi}$  dalla (4.5) ed inserendolo nella (4.6) si trova:

$$\epsilon_H \simeq \frac{1}{16\pi G} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 = \epsilon_V. \quad (4.7)$$

Sfruttando la forma approssimata delle SCE siamo riusciti a definire un parametro slow-roll in funzione del potenziale, anziché di  $H$ . Il significato di  $\epsilon_V$  è semplice: affinché il campo rotoli lentamente lungo il potenziale è necessario che quest'ultimo sia piatto abbastanza; questo si traduce in una situazione in cui la derivata prima di  $V(\phi)$  è sufficientemente trascurabile. Definiamo ora un secondo parametro slow-roll, partendo dalla (4.5) e prendendone la derivata temporale:

$$3\dot{H}\dot{\phi} + 3H\ddot{\phi} \simeq -V''(\phi)\dot{\phi}; \quad (4.8)$$

dividiamo entrambi i membri per  $\dot{\phi}H^2$  e riarrangiamo i termini:

$$\frac{3\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \simeq -\frac{V''}{H^2} - \frac{3\dot{H}}{H^2}. \quad (4.9)$$

Il nuovo parametro slow-roll, proporzionale al primo membro dell'equazione appena trovata, è definito come:

$$\eta_H = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \left( = -\frac{1}{2} \frac{\ddot{H}}{H\dot{H}} \right). \quad (4.10)$$

Poiché abbiamo assunto l'accelerazione dell'inflatone trascurabile rispetto ad  $H\dot{\phi}$ , si ha anche che  $|\eta_H| \ll 1$ . Sostituendo  $\eta_H$  nell'equazione (4.9), e sfruttando la definizione di  $\epsilon_H$ , è possibile definire il secondo parametro slow-roll in funzione del potenziale:

$$\epsilon_H + \eta_H \simeq \frac{V''}{3H^2} \simeq \frac{1}{8\pi G} \frac{V''}{V} = \eta_V; \quad (4.11)$$

dove al secondo passaggio è stata utilizzata la prima equazione di Friedmann (4.3). Il secondo parametro slow-roll agisce quindi come una condizione sulla derivata seconda del potenziale. È possibile definire ulteriori parametri, che includono derivate di  $V(\varphi)$  di ordine superiore, ma, affinché l'approssimazione slow-roll sia valida e persistente, è sufficiente che si abbia  $\epsilon_H \ll 1$  e  $|\eta_H| \ll 1$ . In tal caso sono valide le relazioni  $\epsilon_V \simeq \epsilon_H$  e  $\eta_V \simeq \epsilon_H + \eta_H$ . Pertanto, le condizioni di slow-roll diventano allora  $\epsilon_V \ll 1$  e  $|\eta_V| \ll 1$ : queste possono essere interpretate come limitazioni sulla forma che può assumere il potenziale.

## 4.1 Soluzioni in slow-roll

Vogliamo ora trovare le soluzioni per il sistema SCE in approssimazione slow-roll. Le equazioni approssimate (4.3)-(4.5) sono risolvibili analiticamente per un generico potenziale  $V(\varphi)$ : vediamo allora in che modo è possibile ottenere soluzioni analoghe a quelle trovate utilizzando il metodo della funzione generatrice. In generale, le espressioni del potenziale differiranno da quelle utilizzate nella trattazione precedente; mostriamo infatti che, per mettere in relazione i due differenti approcci, è sufficiente definire il nuovo potenziale in funzione della funzione generatrice  $F(\varphi)$ :

$$V(\varphi) = F^2(\varphi). \quad (4.12)$$

Effettuando questa sostituzione, e ricordando  $V'(\varphi) = (F^2(\varphi))' = 2F(\varphi)F'(\varphi)$ , riscriviamo la (4.3) e la (4.5) nel seguente modo (il simbolo  $\simeq$  è stato sostituito per praticità da  $=$ , ma si tratta sempre di equazioni approssimate, valide solo quando sono soddisfatte le condizioni di slow-roll):

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} F^2(\varphi); \quad (4.13)$$

$$3H\dot{\varphi} = -2F(\varphi)F'(\varphi). \quad (4.14)$$

Prendendo la radice quadrata della (4.13) si ottiene (a meno della costante  $F_*$ ) l'espressione (3.6) di  $H$  in funzione di  $F(\varphi)$ . Combinando tale risultato con la (4.14) si ricava infine l'equazione (3.3):

$$H' = -4\pi G\dot{\varphi}. \quad (4.15)$$

Utilizzando la sostituzione (4.12), si ottengono quindi le stesse equazioni che abbiamo già derivato e discusso in precedenza. In questo modo possiamo, a partire dalle soluzioni trovate nel capitolo 3, risalire ai potenziali che le generano, posto che ci si trovi in condizioni di slow-roll.

## 4.2 Quanta inflazione?

Sfruttando l'approssimazione slow-roll è possibile quantificare l'estensione dell'inflazione, come discusso in [8]. Definiamo  $N$ , il numero di e-foldings, attraverso il rapporto tra il fattore di scala alla fine dell'inflazione ( $t = t_f$ ) e quello all'inizio ( $t = t_i$ ):

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = e^N; \quad (4.16)$$

da cui è possibile esplicitare  $N = \ln \frac{a(t_f)}{a(t_i)}$ . Differenziando entrambi i membri e ricordando la definizione di  $H$  si ottiene:

$$dN = \frac{da}{a} = \frac{\dot{a}}{a} dt = H dt. \quad (4.17)$$

Possiamo riarrangiare questo risultato utilizzando le equazioni (4.3) e (4.5), si ha:

$$dN = H dt = \frac{H}{\dot{\varphi}} d\varphi = -\frac{3H^2}{V'} d\varphi = -8\pi G \frac{V}{V'} d\varphi. \quad (4.18)$$

Integrando la relazione precedente, tra gli istanti iniziali e finali, si ottiene il numero totale  $N$  di e-foldings. Il risultato finale dipende unicamente dalla scelta del potenziale  $V(\varphi)$  e dal valore iniziale del campo  $\varphi_i = \varphi(t_i)$ . Mostriamo infatti che  $\varphi_f = \varphi(t_f)$  è noto una volta noto il potenziale. Ricordiamo che l'inflazione termina quando viene meno la condizione  $\epsilon_H < 1$ : all'istante finale si avrà allora  $\epsilon_V \approx \epsilon_H = 1$ . Ora, il parametro  $\epsilon_V$  dipende unicamente dal potenziale e quindi da  $\varphi(t)$ . È pertanto evidente che  $\varphi_f$  può essere univocamente esplicitato a partire dalla relazione  $\epsilon_V = 1$ , una volta scelta l'espressione per  $V(\varphi)$ . La forma integrale della (4.18) è allora la seguente:

$$N(\varphi_i) = -8\pi G \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{V}{V'} d\varphi; \quad (4.19)$$

dove è stata resa esplicita la dipendenza da  $\varphi_i$  per quanto appena discusso. Il significato della (4.19) è il seguente: al variare del valore iniziale di  $\varphi_i$  si calcola il numero di e-foldings  $N$  che separano dalla fine dell'inflazione. Si parte quindi dall'istante finale, ponendo  $N(\varphi_f) = 0$ , e si contano gli e-foldings andando indietro nel tempo.

### 4.3 Esempi

Vediamo ora alcune forme del potenziale per cui si è soliti applicare l'approssimazione slow-roll, e sotto quali condizioni essa è valida. Grazie alla (4.12) sarà poi possibile confrontare i risultati già ottenuti con il metodo della funzione generatrice. Sfruttando i parametri slow-roll calcoliamo infine il numero  $N$  di e-foldings previsti.

#### 4.3.1 $V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2$

Trattiamo singolarmente questo caso (di cui poi vedremo la naturale generalizzazione) a causa della sua semplicità e della presenza ricorrente in letteratura. La funzione generatrice associata è  $F(\varphi) = \frac{m}{\sqrt{2}}\varphi$ : è proprio il caso particolare di potenziale polinomiale che abbiamo già trattato, la cui soluzione per  $a(t)$  è la (3.17). I parametri slow-roll si calcolano direttamente a partire dal potenziale  $V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2$  e le sue derivate:

$$\epsilon_V = \frac{1}{16\pi G} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 = \frac{1}{4\pi G \varphi^2}; \quad (4.20)$$

$$\eta_V = \frac{1}{8\pi G} \frac{V''}{V} = \frac{1}{4\pi G \varphi^2}; \quad (4.21)$$

e pertanto si ha, eccezionalmente,  $\epsilon_V = \eta_V$ . Le condizioni di slow-roll risultano soddisfatte finché  $\varphi^2 \gg \frac{1}{4\pi G}$ . Grazie all'espressione di  $\epsilon_V$ , è possibile calcolare il valore dell'inflatone alla fine dell'inflazione. Ponendo  $\epsilon_V = 1$ , valore per il quale l'inflazione ha termine, e utilizzando la (4.20), si ottiene  $\varphi_f = \frac{1}{\sqrt{4\pi G}}$ . Integriamo ora la relazione (4.18) tra l'istante iniziale  $t_i$  e quello finale  $t_f$ :

$$N(\varphi_i) = -8\pi G \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{V}{V'} d\varphi = -4\pi G \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \varphi d\varphi = 2\pi G \varphi_i^2 - \frac{1}{2}. \quad (4.22)$$

Nel caso si abbia una stima per  $N$ , ottenuta in un modo differente da quello appena mostrato (si veda per esempio il paragrafo 1.1.1), è possibile invertire il risultato (4.22) ed esplicitare così il valore di  $\varphi_i$ :

$$\varphi_i = \sqrt{\frac{2N+1}{4\pi G}}. \quad (4.23)$$

#### 4.3.2 $V(\varphi) = \lambda\varphi^n$

Generalizziamo il caso precedente, introducendo un potenziale della forma  $V(\varphi) = \lambda\varphi^n$  con esponente  $n$  generico. La funzione generatrice associata è  $F(\varphi) = \sqrt{\lambda}\varphi^{\frac{n}{2}}$  e risulta quindi un caso particolare della



trattazione con potenziale polinomiale. Ci si può ricondurre alla (3.18) effettuando (a meno di segni) le sostituzioni  $\sqrt{\lambda} \rightarrow \lambda_n$  e  $\frac{n}{2} \rightarrow n$ . In caso  $n$  assuma valore negativo, questo esempio ricade anche nel caso di potenziale inverso già affrontato. L'espressione del fattore di scala in funzione del tempo, per il potenziale di forma  $V(\varphi) = \lambda\varphi^n$ , si ottiene dalla (3.21) effettuando le inverse delle sostituzioni sopra indicate. I parametri slow-roll sono i seguenti:

$$\epsilon_V = \frac{1}{16\pi G} \frac{n^2}{\varphi^2}; \quad (4.24)$$

$$\eta_V = \frac{1}{8\pi G} \frac{n(n-1)}{\varphi^2}. \quad (4.25)$$

Le condizioni di slow-roll risultano soddisfatte quando si ha  $\varphi^2 \gg \frac{n(n-1)}{8\pi G} > \frac{n^2}{16\pi G}$ . Il valore finale dell'inflatone è  $\varphi_f = \frac{n}{\sqrt{16\pi G}}$ . Ripetendo gli stessi passaggi della sezione precedente è possibile calcolare  $N$  in funzione di  $\varphi_i$ :

$$N(\varphi_i) = \frac{4\pi G}{n} \varphi_i^2 - \frac{n}{4}. \quad (4.26)$$

Invertendo il risultato precedente si ottiene:

$$\varphi_i = \sqrt{\frac{n(4N+n)}{16\pi G}}. \quad (4.27)$$

### 4.3.3 $V(\varphi) = Ae^{B\varphi}$

Un potenziale della forma  $V(\varphi) = Ae^{B\varphi}$ , con  $A$  e  $B$  reali, genera, in approssimazione slow-roll, soluzioni analoghe al caso di una funzione generatrice  $F(\varphi) = \sqrt{A}e^{\frac{B}{2}\varphi}$ . Le sostituzioni  $\sqrt{A} \rightarrow A$  e  $\frac{B}{2} \rightarrow \mu$  permettono di risalire alla (3.33), cui abbiamo applicato in precedenza il metodo della funzione generatrice. Effettuando le stesse sostituzioni (inverse) in (3.39) si trova l'espressione per  $a(t)$ . I parametri slow-roll sono:

$$\epsilon_V = \frac{B^2}{16\pi G}; \quad (4.28)$$

$$\eta_V = \frac{B^2}{8\pi G}; \quad (4.29)$$

e quindi  $\eta_V = 2\epsilon_V$ . I due parametri sono univocamente determinati dalla scelta di  $B$ . È evidente che l'approssimazione slow-roll è valida per  $|B| \ll \sqrt{8\pi G} < \sqrt{16\pi G}$ . Il caso di potenziale esponenziale è l'unico per il quale tali parametri risultano costanti ed indipendenti da  $\varphi$ . La conseguenza di questo è che non si arriva mai ad avere  $\epsilon_V = 1$ : non è quindi possibile stimare un valore per  $\varphi_f$  a partire da un potenziale di forma esponenziale.



## Capitolo 5

# Osservabili

Arrivati a questo punto abbiamo mostrato diverse forme di evoluzione del fattore di scala durante un periodo di inflazione. Tali risultati costituiscono alcune delle possibili modalità con le quali può essersi effettivamente verificato tale fenomeno. Il passo successivo è quello di confrontare l'ipotesi teorica con le evidenze sperimentali, in modo da considerare potenzialmente accettabili solo i risultati in accordo con i dati. Questo confronto è possibile se si definiscono dei parametri osservabili, e il modo in cui calcolarli a partire da ciascun differente risultato che abbiamo fin qui ottenuto. In questa trattazione ci concentriamo in particolare su due osservabili,  $n_s$ , detto indice spettrale scalare, e  $r$ , detto rapporto tensore-scalare. Tale nomenclatura, e il relativo significato, diventano comprensibili nell'ottica dello studio delle fluttuazioni generate durante l'inflazione, argomento di cui però noi non trattiamo. Ci basti dunque sapere che queste due osservabili permettono di confrontare le ipotesi teoriche con le evidenze sperimentali. Non spiegheremo pertanto il motivo di tali nomi, che ci siamo limitati a riportare per completezza.

Le due osservabili appena introdotte si legano alla teoria tramite i parametri slow-roll, definiti trattando dell'omonima approssimazione. Con argomenti che non riportiamo è possibile, in riferimento a [8], scrivere le seguenti relazioni:

$$n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon_V; \quad (5.1)$$

$$r = 16\epsilon_V. \quad (5.2)$$

Naturalmente le due equazioni sono valide in approssimazione slow-roll: in questo caso, quindi, calcoliamo  $n_s$  e  $r$  a partire dai risultati ottenuti in tale approssimazione, cui possiamo successivamente associare alcuni dei casi affrontati attraverso il metodo della funzione generatrice. È chiaro quindi che uno dei principali motivi per cui abbiamo introdotto l'approssimazione slow-roll, oltre che per riottenere i risultati precedenti utilizzando un differente approccio, è proprio perché ci permette di confrontare facilmente le ipotesi con le osservazioni, cosa che non sarebbe stata altrettanto immediata se ci fossimo limitati a discutere il solo metodo della funzione generatrice. I valori sperimentali di  $n_s$  e  $r$  cui facciamo riferimento provengono dai risultati di quest'anno (2018) ottenuti dall'esperimento Planck, riportati in [17]. Ci sono diversi metodi per stimare sperimentalmente i valori delle osservabili, noi prendiamo in considerazione i seguenti risultati:

$$n_s = 0.9649 \pm 0.0042 \text{ (68\% confidence level)}; \quad (5.3)$$

$$r < 0.10 \text{ (95\% confidence level)}. \quad (5.4)$$

Mostriamo ora il modo di ottenere delle stime teoriche a partire dai nostri risultati. Riportiamo per comodità le espressioni di  $\epsilon_V$  e  $\eta_V$ :

$$\epsilon_V = \frac{1}{16\pi G} \left( \frac{V'}{V} \right)^2; \quad (5.5)$$

$$\eta_V = \frac{1}{8\pi G} \frac{V''}{V}. \quad (5.6)$$

In generale, tali valori non sono costanti, tanto che, come abbiamo visto, la condizione  $\epsilon_V \approx 1$  corrisponde alla fine dell'inflazione. L'istante passato in cui vanno calcolate (5.5) e (5.6), pertanto, al fine di poterle confrontare con i valori sperimentali, è quello in cui il raggio comovente di Hubble  $r_H$  ha assunto lo stesso valore che assume tutt'oggi. In questo modo individuiamo il momento in cui hanno lasciato l'orizzonte le strutture che oggi sono al limite del nostro universo osservabile. Le stime, come quella che abbiamo effettuato noi trattando dell'horizon problem (paragrafo 1.1.1), suggeriscono che ciò sia avvenuto tra i 50 e 60 e-foldings prima della fine dell'inflazione: in modo simmetrico, infatti, ora ci troviamo allo stesso numero di e-foldings dopo la fine (si veda a questo proposito la figura 1.3). È quindi possibile, esplicitando la (4.19) per un qualche potenziale e valutandola per un generico  $\varphi(t)$  anziché  $\varphi_i$ , trovare il valore assunto dall'inflatone, in funzione di  $N$ , ad un generico istante  $t$ :

$$N(\varphi(t)) = -8\pi G \int_{\varphi(t)}^{\varphi_f} \frac{V(\tilde{\varphi})}{V'(\tilde{\varphi})} d\tilde{\varphi}. \quad (5.7)$$

Chiamiamo  $\bar{t}$  l'istante in cui ci interessa calcolare il valore del campo, ovvero l'istante in cui il raggio comovente di Hubble assume lo stesso valore di quello attuale.

Vediamo ora come applicare questo procedimento nei semplici casi di un potenziale monomiale ed esponenziale, trovando infine quale accordo hanno tali modelli con i dati sperimentali.

### 5.0.1 Potenziale monomiale

Consideriamo ancora una volta un potenziale del tipo  $V = \lambda\varphi^n$ . L'obiettivo è calcolare il valore dei parametri slow-roll tra i 50 e 60 e-foldings prima della fine dell'inflazione. La relazione (5.7) valutata all'istante  $\bar{t}$  è, in analogia con la (4.26):

$$N(\varphi(\bar{t})) = \frac{4\pi G}{n} \varphi^2(\bar{t}) - \frac{n}{4}. \quad (5.8)$$

Invertiamo tale risultato per esplicitare  $\varphi(\bar{t})$ :

$$\varphi(\bar{t}) = \sqrt{\frac{n}{4\pi G} \left( N + \frac{n}{4} \right)}. \quad (5.9)$$

I parametri slow-roll per il potenziale in esame sono stati calcolati in precedenza:

$$\epsilon_V = \frac{1}{16\pi G} \frac{n^2}{\varphi^2}; \quad (5.10)$$

$$\eta_V = \frac{1}{8\pi G} \frac{n(n-1)}{\varphi^2}. \quad (5.11)$$

Sostituire la (5.9) nelle espressioni di  $\epsilon_V$  e  $\eta_V$  ci permette di valutarle all'istante  $\bar{t}$ ; si ottiene:

$$\epsilon_V = \frac{n}{4N + n}; \quad (5.12)$$

$$\eta_V = \frac{2(n-1)}{4N + n}. \quad (5.13)$$

È possibile allora, ricordando (5.1) e (5.2), calcolare  $n_s$  e  $r$ :

$$n_s = 1 - \frac{2(n+2)}{4N + n}; \quad (5.14)$$

$$r = \frac{16n}{4N + n}; \quad (5.15)$$

che non dipendono dal parametro  $\lambda$ . Fissato l'esponente  $n$  nell'espressione del potenziale, le osservabili dipendono unicamente dalla stima di  $N$  effettuata. Si può notare in particolare che, disponendo i

risultati su un grafico  $n_s - r$ , i punti, al variare di  $N$ , si dispongono su una retta descritta dalla seguente equazione:

$$8n_s + r = 8 - \frac{32}{4N + n}. \quad (5.16)$$

Riportiamo in tabella 5.1 i valori numerici ottenuti al variare di  $n$ , nel caso in cui si abbia  $N = 50$  o  $N = 60$ .

	$n$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	2
$N = 50$	$n_s$	0.9734	0.9701	0.9669	0.9604
	$r$	0.053	0.080	0.11	0.16
$N = 60$	$n_s$	0.9778	0.9751	0.9724	0.9669
	$r$	0.044	0.066	0.088	0.13

Tabella 5.1: Valori di  $n_s$  ed  $r$  calcolati a partire da risultati teorici per un potenziale del tipo  $V = \lambda\varphi^n$  in corrispondenza di  $N = 50$  ed  $N = 60$ . I valori possono essere individuati con buona precisione in figura 5.1, facendo riferimento alla relativa legenda.

### 5.0.2 Potenziale esponenziale

Abbiamo visto in precedenza che, in caso di potenziale esponenziale del tipo  $V(\varphi) = Ae^{B\varphi}$ , i parametri slow-roll risultano costanti (indipendenti da  $\varphi$ ) e determinati unicamente dal valore di  $B$ :

$$\epsilon_V = \frac{B^2}{16\pi G}; \quad (5.17)$$

$$\eta_V = \frac{B^2}{8\pi G}. \quad (5.18)$$

Inserendo questi risultati in (5.1) e (5.2) si ricavano le stime teoriche per le osservabili:

$$n_s = 1 - \frac{B^2}{8\pi G}; \quad (5.19)$$

$$r = \frac{B^2}{\pi G}. \quad (5.20)$$

Anche in questo caso i risultati si dispongono su di una retta, che ha però la particolarità di non dipendere da  $B$ :

$$8n_s + r = 8. \quad (5.21)$$

È quindi evidente che in questo caso la retta di coordinate  $n_s$  e  $r$  non dipende dai valori delle costanti  $A$  e  $B$ , ma è univocamente determinata dalla scelta di avere un potenziale di forma esponenziale.

### 5.0.3 Confronto con l'esperimento

Facendo riferimento alla figura 5.1 possiamo valutare l'accordo dei nostri risultati con i dati sperimentali.

Iniziamo dal potenziale esponenziale, il più evidente. La retta (5.21) è riportata in figura 5.1 con una linea tratteggiata (inflazione power-law): si vede immediatamente che un potenziale di questo tipo genera osservabili altamente incompatibili con le evidenze sperimentali. Non calcoliamo esplicitamente i valori di tali osservabili, poiché è evidente fin da subito che non rientrerebbero nei limiti di accettabilità. Il potenziale esponenziale, pertanto, restituisce valori delle osservabili che non sono compatibili con i dati sperimentali.

Per quanto riguarda il potenziale monomiale, consideriamo i valori riportati in tabella 5.1. È possibile visualizzare tali risultati in figura 5.1: sono evidenti i segmenti di retta corrispondenti ad un determinato esponente; gli estremi di tali segmenti corrispondono ai valori 50 e 60 per  $N$  (fare riferimento alla

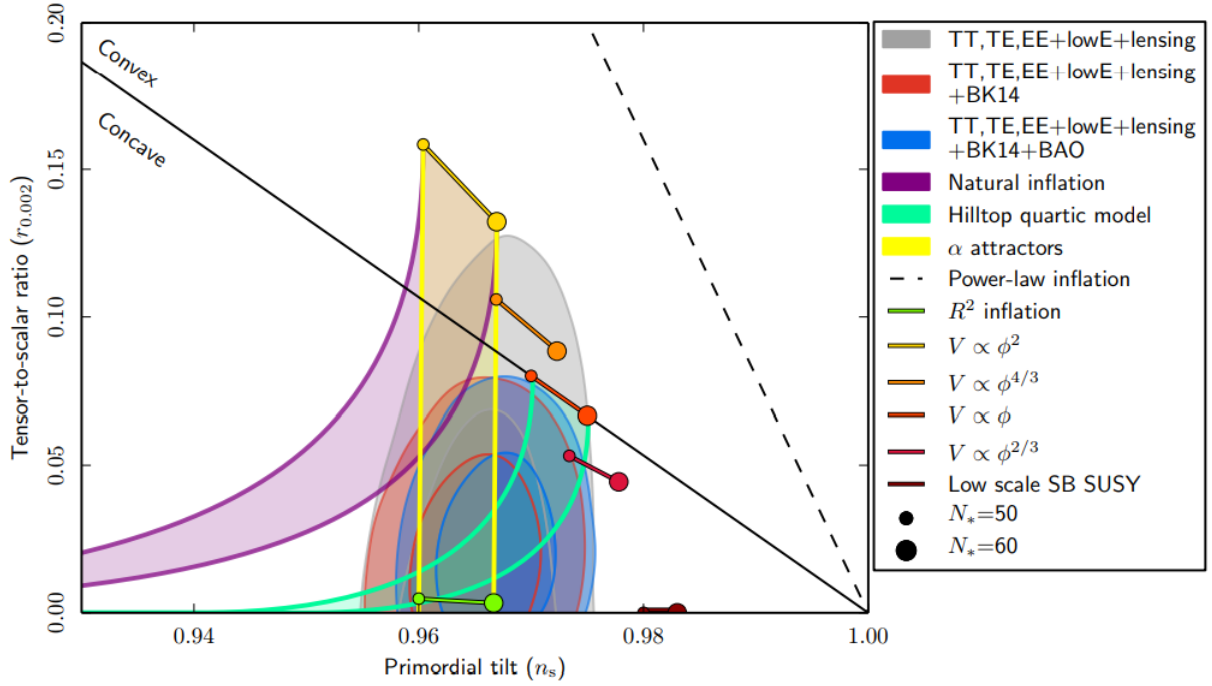


Figura 5.1: Risultati ottenuti dall'esperimento Planck (2018) per le osservabili  $n_s$  e  $r$  al 68% e 95% di confidence level, comparati con le attese teoriche di alcuni modelli di inflazione. Noi siamo interessati ai potenziali proporzionali a potenze di  $\varphi$  e all'inflazione power-law. Tra i risultati sperimentali consideriamo quello in grigio, corrispondente al primo elemento della legenda.

legenda). Prendendo in considerazione il risultato sperimentale (5.3), possiamo stabilire l'intervallo dei valori accettabili per  $n_s$  con un livello di confidenza del 68%:  $0.9607 < n_s < 0.9691$ . In realtà quasi nessuno dei nostri risultati cade all'interno di questo intervallo, ed è quindi preferibile effettuare il confronto estendendo il livello di confidenza al 95%. Il nuovo intervallo considerato è visualizzabile in figura 5.1, colorato in grigio chiaro (il primo nella legenda). Facendo così si può direttamente verificare come risultino accettabili quasi tutti i valori di  $n$ , tranne  $n = 2$ , che non rispetta la condizione (5.4). In particolare, le osservabili per  $N$  vicino a 50 rispecchiano maggiormente le misure sperimentali. Analizzando il grafico nell'insieme si vede invece come siano nettamente favoriti i potenziali con profilo concavo, i valori delle cui osservabili sono separati da un'apposita linea di demarcazione rispetto a quelli dei potenziali convessi. Questo è anche in accordo con l'incompatibilità del potenziale esponenziale. In generale, comunque, nessuno dei risultati da noi proposti può essere considerato pienamente accettabile e si dovrebbe pertanto ripetere la ricerca di soluzioni partendo da altre espressioni per il potenziale, o utilizzando altri metodi risolutivi. Possiamo senz'altro dedurre, però, che potenziali polinomiali di grado maggiore al secondo e potenziali esponenziali risulterebbero alquanto incompatibili con i valori attesi. In realtà, teorie più avanzate di inflazione si basano sulla presenza di molteplici campi scalari e sono dunque caratterizzate da periodi dominati da differenti forme di potenziale. In questo senso, infatti, i casi studiati da noi non sono da scartare, ma possono essere integrati in una teoria più elaborata e completa.

## 5.1 Conclusioni

Obiettivo della trattazione è stato, quindi, quello di esporre il metodo della funzione generatrice e di verificare la validità delle soluzioni così trovate. Dapprima abbiamo introdotto il concetto di inflazione, concentrandoci in particolare sulle motivazioni originarie per cui è stata storicamente proposta. Abbiamo quindi approfondito i cosiddetti horizon e flatness problem, mostrando come un periodo di inflazione riesca a risolverli. Al fine di confrontare la teoria con l'esperimento è stato poi introdotto un approccio più tradizionale, basato sull'approssimazione slow-roll, che abbiamo successivamente messo

in relazione con il metodo della funzione generatrice. Attraverso i parametri slow-roll è stato possibile, infine, valutare l'attendibilità delle soluzioni teoriche rapportate con i dati sperimentali. Nello specifico, come è già stato fatto notare, i potenziali da noi analizzati portano a risultati non soddisfacenti sotto questo punto di vista. Questo però non inficia la rilevanza del lavoro fin qui svolto: innanzitutto abbiamo esposto un metodo peculiare e del tutto generale per la ricerca di soluzioni, valido anche per situazioni da noi non esplicitamente trattate; in secondo luogo, i potenziali presi in considerazione possiedono una certa rilevanza storica, in quanto sono già stati studiati in precedenza con altri approcci, ed è quindi degno di nota che il metodo della funzione generatrice conduca agli stessi risultati.





# Bibliografia

- [1] A.A. Starobinsky. “On a nonsingular isotropic cosmological model.” In: *Sov. Astron. Lett.* 4 (1978), p. 82.
- [2] A.A. Starobinsky. “A new type of isotropic cosmological models without singularity.” In: *Phys. Lett. B* 91 (1980), pp. 99–102.
- [3] A.H. Guth. “The inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems.” In: *Phys. Rev. D* 23 (1981), pp. 347–356.
- [4] A.D. Linde. “Chaotic inflation.” In: *Phys. Lett. B* 129 (1983), pp. 177–181.
- [5] V.A. Belinsky et al. “Inflationary stages in cosmological models with a scalar field.” In: *Phys. Lett. B* 155 (1985), pp. 232–236.
- [6] T. Piran, Tsvi e W.M. Ruth. “Inflation in universes with a massive scalar field.” In: *Phys. Lett. B* 163 (1985), pp. 331–335.
- [7] D. Baumann. *TASI Lectures on Inflation*. 2009. URL: <http://arxiv.org/abs/0907.5424v2>.
- [8] R. de Ruitter. *Numerical analysis and analytical approximations of slow-roll inflation models*. 2014.
- [9] A.R. Liddle. *The Early Universe*. 1997. URL: <https://arxiv.org/abs/astro-ph/9612093v2>.
- [10] S.V. Chervon, I.V. Fomin e A. Beesham. “The method of generating functions in exact scalar field inflationary cosmology”. In: *Eur. Phys. J. C* 78:301 (2018).
- [11] M.P. Hobson, G.P. Efstathiou e A.N. Lasenby. “General Relativity. An Introduction for Physicists”. In: Cambridge University Press, 2006. Cap. 14.
- [12] F. Lucchin e S. Matarrese. “Power law inflation.” In: *Phys. Rev. D* 32 (1985), p. 1316.
- [13] J.J. Halliwell. “Scalar fields in cosmology with an exponential potential.” In: *Phys. Lett. B* 185 (1987), p. 341.
- [14] G.G. Ivanov. “Gravitation and theory of relativity”. In: *Kazan Univ. Publ. House* 18 (1981), p. 54.
- [15] A.G. Muslimov. “On the scalar field dynamics in a spatially flat Friedman universe.” In: *Class. Quant. Grav.* 7 (1990), pp. 231–237.
- [16] D.S. Salopek e J.R. Bond. “Stochastic inflation and nonlinear gravity.” In: *Phys. Rev. D* 43 (1991), pp. 1005–1031.
- [17] Planck Collaboration. *Planck 2018 results. X. Constraints on inflation*. 2018. URL: <https://arxiv.org/abs/1807.06211v1>.