

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**Equivalenza tra politopi razionali e
politopi di trasporto tridimensionali**

Relatore:
Professore Marco Di Summa

Candidato:
Francesca Zuccolotto
Numero di matricola:
2027796

24 Febbraio 2023 - Anno Accademico 2022/2023

Indice

1	I politopi di trasporto	5
1.1	Il problema del trasporto classico	5
1.2	I politopi di trasporto tridimensionali	10
1.3	Alcune proprietà generali	12
2	Condizioni necessarie per l'ammissibilità di politopi di trasporto tridimensionali planari	17
2.1	Le condizioni di Shell	19
2.2	Le condizioni di Haley	21
2.3	Le condizioni di Moràvek-Vlach I	23
2.4	Condizioni di Smith II	27
3	Politopi razionali e politopi di trasporto	30
3.1	Dimostrazione del teorema 3.1	32
3.1.1	Step 1 della dimostrazione	32
3.1.2	Esempio di riduzione dei coefficienti	34
3.1.3	Step 2 della dimostrazione	36
3.1.4	Step 3 della dimostrazione	40
3.1.5	Stime di complessità	47
4	Politopi razionali e politopi di bitrasporto	49
4.1	Dimostrazione teorema 4.1	50
5	Conseguenze del teorema	61
5.1	Non sufficienza delle condizioni di Smith II	61
5.2	Universalità delle approssimazioni	62
5.3	Esistenza di un politopo di trasporto tridimensionale razionalmente non vuoto con nessun punto intero	64
5.4	Cenni di Teoria della complessità computazionale	66
5.4.1	Esempio 1	68
5.4.2	Esempio 2	68
5.5	É possibile decidere in tempo polinomiale se un politopo di trasporto tridimensionale contiene un punto intero?	69

6	Riflessioni sull'equivalenza tra politopi razionali e politopi di trasporto tridimensionali	71
6.1	Il caso intero misto	71
6.2	Il ruolo della razionalità nel caso continuo	72
6.2.1	Esempio 1	72
6.3	Il ruolo della razionalità nel caso intero	77
6.3.1	Esempio 2	78
	Bibliografia	82

Introduzione

In questa tesi ci proponiamo come obiettivo principale quello di analizzare e dimostrare il risultato secondo il quale “Ogni politopo razionale è rappresentabile in tempo polinomiale come un politopo di trasporto tridimensionale sottile”, riportato nell’articolo *All linear and integer programs are slim 3-way transportation programs*[1].

Tale teorema universale, apparentemente sorprendente in quanto ci permette di ricondurre moltissimi problemi di ottimizzazione a programmi lineari con politopi di trasporto come regioni ammissibili, presenta importanti conseguenze, non solo per la programmazione lineare e intera ma anche per la comunicazione e divulgazione dei dati statistici. Per comprendere la sua notevole importanza sottolineiamo il fatto che alcune sue implicazioni includono anche la soluzione di alcune domande aperte poste da Vlach nel 1986 [2]: tra queste noi ci soffermeremo a rispondere alla domanda relativa alla sufficienza di un gruppo di condizioni necessarie per l’ammissibilità di un politopo di trasporto tridimensionale, ovvero le *condizioni di Smith II*.

Modificando la dimostrazione di tale risultato è possibile giungere ad un secondo teorema universale secondo cui ogni politopo razionale è rappresentabile in tempo polinomiale come un politopo di bitrasporto.

In questa trattazione, prima di inoltrarci nella discussione di tali risultati, riserveremo un primo capitolo introduttivo nel quale riporteremo la descrizione della struttura dei politopi di trasporto bidimensionali e tridimensionali, che risulta di fondamentale importanza per la comprensione del seguito, ed un secondo capitolo dove elencheremo alcune tra le principali tipologie di condizioni necessarie affinché politopi di questo tipo risultino non vuoti. Infine, nel capitolo conclusivo di questa tesi, cercheremo di rispondere ad alcune domande che possono nascere spontaneamente da riflessioni relative al teorema principale sopra menzionato.

Capitolo 1

I politopi di trasporto

1.1 Il problema del trasporto classico

Uno dei principali problemi studiati in programmazione lineare è il problema del trasporto che sorge ogni qualvolta si debba movimentare della merce da una o più sorgenti verso una o più destinazioni finali. Nella sua definizione classica si suppone di avere r depositi (che indicizziamo con $i = 1, \dots, r$), nei quali è immagazzinato un prodotto, e c negozi (indicizzati da $j = 1, \dots, c$), nei quali è richiesto tale prodotto. Sappiamo che in ogni deposito i la quantità di merce disponibile è a_i , che ogni negozio j ha una domanda del prodotto pari a b_j e che il costo per trasportare un'unità di merce dal magazzino i al negozio j è n_{ij} . L'obiettivo consiste nel decidere come soddisfare la domanda di tutti i negozi al costo minimo, rispettando i vincoli sulle quantità di prodotto presenti nei vari magazzini. A tal proposito, dopo aver introdotto per ogni coppia (i, j) la variabile x_{ij} , rappresentante della quantità di merce che verrà spedita dal deposito i al negozio j , si impongono le seguenti famiglie di vincoli che definiscono il cosiddetto *politopo di trasporto bidimensionale*:

$$\sum_{j=1}^c x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, r \quad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^r x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, c \quad (1.2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, c \quad (1.3)$$

I vincoli (1.1) indicano che la quantità totale di merce che viene inviata dal magazzino i deve essere uguale alla disponibilità di merce associata al magazzino i ; richiedere invece che i vincoli (1.2) siano soddisfatti significa che la quantità di prodotto totale che giunge al negozio j deve corrispondere alla domanda di merce associata a quel negozio. I vincoli (1.3) sono ovvi in quanto non può verificarsi che da un magazzino parta una quantità di

prodotto negativa.

In alcune situazioni, in aggiunta ai precedenti, è possibile trovare altri vincoli della seguente tipologia:

$$x_{ij} \leq u_{ij} \quad i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, c \quad (1.4)$$

che forniscono, seguendo l'interpretazione del politopo di trasporto sopra descritta, dei limiti superiori alle quantità di merce che viaggiano dai magazzini ai negozi.

Pertanto il problema del trasporto può essere formalizzato mediante il seguente modello matematico:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c n_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a} \quad & \sum_{j=1}^c x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, r \\ & \sum_{i=1}^r x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, c \\ & x_{ij} \leq u_{ij} \quad i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, c \\ & x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, c \end{aligned}$$

Si può notare che, affinché il problema del trasporto precedentemente descritto ammetta una soluzione ammissibile, è necessario che la somma delle disponibilità di merce nei magazzini coincida con la somma delle domande di tale prodotto nei negozi: se supponiamo che esista una soluzione ammissibile $x \in \mathbb{R}^{r \times c}$, x deve soddisfare i vincoli (1.1) e (1.2), quindi si ha

$$\sum_{i=1}^r a_i = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c x_{ij} = \sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^r x_{ij} = \sum_{j=1}^c b_j$$

Assumere che valga la condizione

$$\sum_{i=1}^r a_i = \sum_{j=1}^c b_j \quad (1.5)$$

non costituisce un'ipotesi restrittiva dal momento che, in molte situazioni, per non dover ipotizzare la sua validità si preferisce scrivere disuguaglianze del tipo *minore o uguale* nei vincoli (1.1) o disequazioni *maggiore o uguale* nei vincoli (1.2). Tuttavia in entrambi i casi ci si può sempre ricondurre a supporre vera (1.5), mostriamo ora come.

Se al posto dei vincoli (1.1) abbiamo

$$\sum_{j=1}^c x_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \dots, r$$

allora si ha:

$$\sum_{j=1}^c b_j = \sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^r x_{ij} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c x_{ij} \leq \sum_{i=1}^r a_i$$

ovvero nei depositi è presente più prodotto di quanto effettivamente richiesto dai negozi. In questa situazione per soddisfare (1.5) possiamo aggiungere un negozio fittizio indicizzato da $j = c + 1$ e porre

$$b_{c+1} := \sum_{i=1}^r a_i - \sum_{j=1}^c b_j \text{ e } n_{i,c+1} := 0 \quad i = 1, \dots, r$$

In questo modo possiamo affermare che il costo del trasporto verso il negozio fittizio è pari a 0 e possiamo immaginare che la quantità di prodotto $x_{i,c+1}$ che un deposito invia al negozio fittizio rimanga in realtà immagazzinata nel deposito.

Analogamente, se in sostituzione dei vincoli (1.2) abbiamo

$$\sum_{i=1}^r x_{ij} \geq b_j \quad j = 1, \dots, c$$

allora si ha

$$\sum_{j=1}^c b_j \leq \sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^r x_{ij} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c x_{ij} = \sum_{i=1}^r a_i$$

ovvero nei depositi c'è più prodotto di quanto effettivamente richiesto dai negozi e non c'è mai richiesta non soddisfatta. In questo caso si procede in modo analogo al precedente, ovvero per soddisfare l'ipotesi (1.5) è sufficiente aggiungere un negozio fittizio indicizzato da $j = c + 1$ e porre

$$b_{c+1} := \sum_{i=1}^r a_i - \sum_{j=1}^c b_j \text{ e } n_{i,c+1} := 0 \quad i = 1, \dots, r$$

Si può affermare in generale che un problema di trasporto è risolubile solo se la quantità di merce presente in tutti i magazzini è non inferiore a quella richiesta da tutti i negozi, ovvero quando si ha che:

$$\sum_{i=1}^r a_i \geq \sum_{j=1}^c b_j$$

In caso contrario, ovvero quando si ha:

$$\sum_{i=1}^r a_i \leq \sum_{j=1}^c b_j$$

si ottiene un politopo vuoto e possiamo immaginare di aggiungere un deposito fittizio indicizzato da $i = r + 1$ e porre

$$a_{r+1} = \sum_{j=1}^c b_j - \sum_{i=1}^r a_i \quad \text{e } n_{r+1,j} = 0 \quad j = 1, \dots, c$$

In tal modo abbiamo posto nullo il costo del trasporto dal deposito nullo a qualsiasi negozio e la quantità $x_{r+1,j}$ di prodotto che un negozio riceve dal deposito fittizio equivale, se non nulla, ad una richiesta non soddisfatta per quel negozio.

In questa trattazione abbiamo preferito utilizzare la notazione con le equazioni semplicemente per avere una maggior analogia con la descrizione dei politopi di trasporto tridimensionali che verrà presentata in seguito in questo capitolo. A seguito di quanto visto, possiamo quindi affermare che il problema del trasporto costituisce un caso particolare di programma lineare, ovvero un problema di ottimizzazione vincolata in cui la funzione da massimizzare (o minimizzare) è lineare e i vincoli sono descritti da equazioni e/o disequazioni lineari. È possibile dimostrare che tale problema, nel caso in cui si ha $\sum_{i=1}^r a_i \geq \sum_{j=1}^c b_j$, ammette sempre una soluzione ottima finita, trovabile in tempo polinomiale. Indaghiamo ora alcune proprietà relative alla struttura matematica con la quale tale problema viene formalizzato.

Il problema del trasporto, definito tramite i vincoli di uguaglianza, può essere scritto in forma matriciale nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \min \quad & n \cdot x \\ \text{s.a } & M \cdot x = d \\ & x \leq u \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

nel quale x , n e u sono vettori di dimensione $r \cdot c$ con componenti rispettivamente le variabili incognite x_{ij} , i costi n_{ij} e i limiti superiori u_{ij} per ogni possibile coppia "deposito i - negozio j ", ordinati in questo modo:

$$\begin{aligned} x &= (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1c}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2c}, \dots, x_{rc})^T \\ n^T &= (n_{11}, n_{12}, \dots, n_{1c}, n_{21}, \dots, n_{2c}, \dots, n_{rc}) \\ u &= (u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1c}, u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2c}, \dots, u_{rc})^T \end{aligned}$$

Il vettore d di dimensione $r + c$ è tale per cui la componente i -esima è pari ad a_i , mentre la componente $(r + j)$ -esima vale b_j (con $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, c$), ovvero

$$d = (a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_c)^T$$

M è una matrice di ordine $(r + c) \times (r \cdot c)$ che corrisponde alla matrice di incidenza del grafo bipartito completo che possiamo associare al problema, dove su un lato della bipartizione abbiamo i nodi corrispondenti ai depositi, numerati da 1 a r , mentre dall'altro lato ci sono i nodi corrispondenti ai negozi, numerati da $r + 1$ a $r + c$, ovvero M ha la seguente forma:

$$M = \begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{0} & \cdot & \cdot & \cdot & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{1} & \cdot & \cdot & \cdot & \underline{0} \\ \cdot & & & & & \\ \underline{0} & \underline{0} & \cdot & \cdot & \cdot & \underline{1} \\ \mathbb{I}_c & \mathbb{I}_c & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbb{I}_c \end{bmatrix}$$

dove i vettori $\underline{1}$ e $\underline{0}$ sono vettori riga di dimensione c e le r matrici \mathbb{I}_c che ci sono nella rappresentazione di M corrispondono a matrici identità di dimensione $c \times c$.

Dato che la matrice M , come già detto, può essere interpretata come la matrice di incidenza nodo-arco di un grafo bipartito, essa risulta totalmente unimodulare, ovvero il determinante di ogni sua sottomatrice quadrata assume valori nell'insieme $\{-1, 0, 1\}$. Possiamo quindi affermare, grazie al teorema di A.J. Hoffman e J.B. Kruskal [3], che, nel caso in cui il vettore d presenta tutte componenti intere, cioè $a_i, b_j \in \mathbb{Z}$ con $i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, c$, il problema del trasporto presenta come regione ammissibile un politopo intero, ovvero un poliedro che coincide con l'involuppo convesso dei suoi punti interi.

Questa osservazione, in aggiunta al teorema di caratterizzazione dei poliedri interi [3], implica che, nel caso in cui il vettore d sia intero e si richieda che la merce non sia frazionabile, ovvero alla formulazione si aggiungono i vincoli:

$$x_{ij} \in \mathbb{Z} \quad i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, c \quad (1.6)$$

il problema di programmazione lineare intera che si ottiene può essere risolto in tempo polinomiale omettendo i vincoli (1.6), in quanto se esiste una soluzione ottima necessariamente esiste anche una soluzione ottima intera dello stesso costo.

Infine osserviamo che il vettore x delle incognite x_{ij} del problema del trasporto si può rappresentare come una matrice di dimensione $r \times c$, ovvero le soluzioni ammissibili \bar{x} si possono visualizzare come matrici in $\mathbb{R}^{r \times c}$ tali

che l'entrata (i, j) vale esattamente \bar{x}_{ij} . Questa particolare struttura matematica risulta importante perchè, se generalizzata, ci permette di definire modelli di programmazione più complessi, come ad esempio i "politopi di trasporto tridimensionali", i cui punti ammissibili sono delle tabelle/matrici di dimensione $r \times c \times d$ che soddisfano specifiche condizioni di somma.

Prima però di inoltrarci nella loro descrizione, introduciamo un altro tipo di poliedro presente nella programmazione lineare, ovvero il *politopo di bitrasporto*, che costituisce una variante del precedente e che in modo sintetico può essere definito nel seguente modo:

$$(x^1, x^2) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times c} \times \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times c} \quad (1.7)$$

$$x_{ij}^1 + x_{ij}^2 \leq u_{ij} \quad i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, c \quad (1.8)$$

$$\sum_{j=1}^c x_{ij}^k = s_i^k \quad i = 1, \dots, r \quad k = 1, 2 \quad (1.9)$$

$$\sum_{i=1}^r x_{ij}^k = d_j^k \quad j = 1, \dots, c \quad k = 1, 2 \quad (1.10)$$

Si può notare che è possibile associare quest'ultimo alla pianificazione del trasporto di due merci, ognuna delle quali corrisponde ad un diverso valore dell'indice k . Anche in questo caso, supponendo di avere r magazzini (indicizzati da i), c negozi (indicizzati da j) e fissando l'indice k , si trovano i vincoli già introdotti in precedenza relativi alle disponibilità dei magazzini e alle domande dei negozi.

1.2 I politopi di trasporto tridimensionali

Come già accennato, a partire dalle formulazioni precedenti, si possono introdurre i politopi di trasporto tridimensionali, la cui descrizione risulta di fondamentale importanza per la comprensione del teorema principale di questa trattazione. Tali politopi si classificano in due principali categorie: planari e assiali.

Per descrivere i primi, supponiamo che r, c, d siano tre numeri naturali e introduciamo le matrici: $A = [a_{jk}] \in \mathbb{R}^{c \times d}$, $B = [b_{ik}] \in \mathbb{R}^{r \times d}$, $F = [f_{ij}] \in \mathbb{R}^{r \times c}$. Un politopo di trasporto tridimensionale planare, definito dalle matrici A, B e F e denotato con $T(A, B, F)$, è costituito da tutte le matrici reali $X = [x_{ijk}] \in \mathbb{R}^{r \times c \times d}$ che soddisfano i seguenti vincoli:

$$\sum_{i=1}^r x_{ijk} = a_{jk} \quad j = 1, \dots, c \quad k = 1, \dots, d \quad (1.11)$$

$$\sum_{j=1}^c x_{ijk} = b_{ik} \quad i = 1, \dots, r \quad k = 1, \dots, d \quad (1.12)$$

$$\sum_{k=1}^d x_{ijk} = f_{ij} \quad i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, c \quad (1.13)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, c \quad k = 1, \dots, d \quad (1.14)$$

Per il secondo gruppo di politopi tridimensionali, consideriamo r , c e d già introdotti e i seguenti vettori: $u \in \mathbb{R}^r$, $v \in \mathbb{R}^c$ e $w \in \mathbb{R}^d$; un politopo di trasporto assiale tridimensionale, definito dai vettori u , v , w e denotato con $T(u, v, w)$, è costituito dalle matrici tridimensionali reali $X = [x_{ijk}] \in \mathbb{R}^{r \times c \times d}$ che soddisfano i seguenti vincoli:

$$\sum_{j,k} x_{ijk} = u_i \quad i = 1, \dots, r \quad (1.15)$$

$$\sum_{i,k} x_{ijk} = v_j \quad j = 1, \dots, c \quad (1.16)$$

$$\sum_{i,j} x_{ijk} = w_k \quad k = 1, \dots, d \quad (1.17)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, c \quad k = 1, \dots, d \quad (1.18)$$

In generale, i politopi di trasporto tridimensionali si dicono *con entrate vietate* se ai precedenti vincoli si aggiungono equazioni del tipo:

$$x_{ijk} = 0 \quad \text{per } (i, j, k) \notin E \subset \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, c\} \times \{1, \dots, d\} \quad (1.19)$$

In tal caso il sottoinsieme $E \subset \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, c\} \times \{1, \dots, d\}$ è detto *insieme delle entrate concesse*. Si dicono, invece, *con entrate limitate* se per ogni componente delle matrici tridimensionali che li costituiscono viene specificato un limite superiore tramite le seguenti disequazioni:

$$x_{ijk} \leq e_{ijk} \quad i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, c \quad k = 1, \dots, d \quad (1.20)$$

Infine si definisce *sottile* un politopo di trasporto tridimensionale dove almeno una tra le dimensioni definite da r , c e d risulta essere uguale a 3, generalmente si è soliti porre $d = 3$.

Per facilitare la visualizzazione e la comprensione della struttura di tali

oggetti matematici, forniamo ora un esempio di politopo di trasporto tridimensionale T in cui i parametri r , c e d valgono rispettivamente 4, 3, 5. Si può supporre idealmente che i suoi punti ammissibili $x = [x_{ijk}] \in \mathbb{R}^{r \times c \times d}$ siano rappresentabili come reticoli ottenuti ponendo l'una davanti all'altra r matrici di dimensione $d \times c$, indicizzate dall'indice $i = 1, \dots, r$. Nell'esempio abbiamo quindi le seguenti matrici:

$$\begin{bmatrix} x_{115} & x_{125} & x_{135} \\ x_{114} & x_{124} & x_{134} \\ x_{113} & x_{123} & x_{133} \\ x_{112} & x_{122} & x_{132} \\ x_{111} & x_{121} & x_{131} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{215} & x_{225} & x_{235} \\ x_{214} & x_{224} & x_{234} \\ x_{213} & x_{223} & x_{233} \\ x_{212} & x_{222} & x_{232} \\ x_{211} & x_{221} & x_{231} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{315} & x_{325} & x_{335} \\ x_{314} & x_{324} & x_{334} \\ x_{313} & x_{323} & x_{333} \\ x_{312} & x_{322} & x_{332} \\ x_{311} & x_{321} & x_{331} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{415} & x_{425} & x_{435} \\ x_{414} & x_{424} & x_{434} \\ x_{413} & x_{423} & x_{433} \\ x_{412} & x_{422} & x_{432} \\ x_{411} & x_{421} & x_{431} \end{bmatrix}$$

Per convenzione in questa trattazione,¹ ogni componente di $X \in T$ è indicizzata, oltre che dall'indice i , dagli indici j e k che rispettivamente indicano la colonna e la riga dell'entrata, associata a quella componente specifica, dell' i -esima matrice in $\mathbb{R}^{d \times c}$ di X . Immaginando i punti di T come reticoli è facile intuire che i vincoli (1.11)-(1.14) forniscono le somme delle componenti dei punti ammissibili che compongono i vari segmenti che si individuano nel reticolo, mentre i vincoli (1.15)-(1.17) descrivono le somme delle entrate localizzate in uno stesso piano del reticolo.

1.3 Alcune proprietà generali

Vogliamo concludere questa parte introduttiva con due proprietà che si possono riscontrare tra i politopi ai quali siamo interessati in questa trattazione, ma prima di entrare nei dettagli diamo la seguente definizione chiave:

Definizione 1.1. Due poliedri $P \subset \mathbb{R}^p$ e $Q \subset \mathbb{R}^q$ si dicono *equivalenti* se esiste una mappa iniettiva $\sigma : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, q\}$ tale che la proiezione $\pi : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p : x = (x_1, \dots, x_q) \rightarrow \pi(x) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$, se opportunamente ristretta alla sua immagine, fornisce una biezione tra Q e P e di conseguenza tra gli insiemi dei loro punti interi. In tal caso si usa dire che P è *rappresentabile* come Q .

Il primo risultato che vogliamo dimostrare afferma che i politopi di trasporto tridimensionali planari, precedentemente descritti dai vincoli (1.11)-(1.14), nel caso in cui una dimensione tra r , c e d valga 2 (sia d ad esempio

¹Decidiamo di assegnare agli indici i , j e k i significati sopra riportati soltanto per lo scopo di facilitare la comprensione della dimostrazione di un teorema che verrà enunciato in seguito.

tale dimensione) risultano equivalenti ai politopi di trasporto bidimensionali descritti dai vincoli (1.1)-(1.3). Supponiamo $d \leq 2$, per facilitare la comprensione della dimostrazione di tale risultato riportiamo i vincoli già precedentemente elencati; lo scopo consiste nel dimostrare che un poliedro T descritto dalla seguente formulazione:

$$\sum_{i=1}^r x_{ijk} = a_{jk} \quad j = 1, \dots, c \quad k = 1, \dots, d \quad (1.21)$$

$$\sum_{j=1}^c x_{ijk} = b_{ik} \quad i = 1, \dots, r \quad k = 1, \dots, d \quad (1.22)$$

$$\sum_{k=1}^d x_{ijk} = f_{ij} \quad i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, c \quad (1.23)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, c, \quad k = 1, \dots, d \quad (1.24)$$

risulta equivalente ad un poliedro T' descritto dai vincoli:

$$\sum_{i=1}^r x_{ij} = s_j \quad j = 1, \dots, c \quad (1.25)$$

$$\sum_{j=1}^c x_{ij} = p_i \quad i = 1, \dots, r \quad (1.26)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, c \quad (1.27)$$

Definiamo la mappa iniettiva $\sigma : (i, j) \rightarrow (i, j, k)$ che permette di identificare la variabile incognita x_{ij} di T' con x_{ijk} di T . Se $d = 1$ si ha che le matrici $A = [a_{jk}] \in \mathbb{R}^{c \times d}$ e $B = [b_{ik}] \in \mathbb{R}^{r \times d}$ si riducono rispettivamente ai vettori $a \in \mathbb{R}^c$ e $b \in \mathbb{R}^r$, che possiamo supporre coincidenti con i vettori $s \in \mathbb{R}^c$ e $p \in \mathbb{R}^r$ presenti nella formulazione di T' . Si noti che in questo caso i vincoli (1.23) impongono il valore di tutte le variabili incognite x_{ijk} e se sono tali che $\sum_{i,j} x_{ij} = \sum_{i=1}^r a_i = \sum_{j=1}^c b_j$ allora T contiene un unico punto ammissibile determinato dai vincoli (1.23), altrimenti T è vuoto.

Studiamo ora il caso $d = 2$: utilizzando i vincoli (1.23) possiamo ricondurci a considerare come variabili incognite solo quelle caratterizzate dall'indice k uguale a 1 e sostituire le altre in questo modo:

$$x_{ij2} = f_{ij} - x_{ij1} \quad (1.28)$$

Dai vincoli (1.22) si deduce che:

$$\sum_{j=1}^c x_{ij2} = b_{i2} \quad (1.29)$$

applicando a (1.22) la sostituzione in (1.28) si ottiene

$$\sum_{j=1}^c x_{ij1} = \sum_{j=1}^c f_{ij} - b_{i2} \quad (1.30)$$

Poichè dai vincoli (1.22) vale $\sum_{j=1}^c x_{ij1} = b_{i1}$, se l'uguaglianza

$$b_{i1} = \sum_{j=1}^c f_{ij} - b_{i2} \quad (1.31)$$

vale per ogni $i \in \{1, \dots, r\}$ allora è possibile che T abbia un punto ammissibile altrimenti se esiste anche un solo indice i per il quale (1.31) non è verificata si può direttamente concludere che T sia vuoto.

Ora dai vincoli (1.21) si deduce che:

$$\sum_{i=1}^r x_{ij2} = a_{j2} \quad (1.32)$$

utilizzando i vincoli (1.28) in (1.32) si ottiene

$$\sum_{i=1}^r x_{ij1} = \sum_{i=1}^r f_{ij} - a_{j2} \quad (1.33)$$

Poichè dai vincoli (1.21) vale $\sum_{i=1}^r x_{ij1} = a_{j1}$, se l'uguaglianza

$$a_{j1} = \sum_{i=1}^r f_{ij} - a_{j2} \quad (1.34)$$

vale per ogni $j \in \{1, \dots, c\}$ allora T può contenere un punto ammissibile altrimenti se esiste anche una sola scelta dell'indice j per la quale (1.34) non sia soddisfatta, allora T è vuoto.

Se (1.31) e (1.34) valgono rispettivamente per ogni scelta di i e j , allora possiamo considerare solo i vincoli che riguardano le variabili incognite corrispondenti all'indice $k = 1$ e dimenticarci delle variabili che giacciono nel piano $k = 2$: in questo modo risulta evidente che il poliedro T è equivalente ad un politopo di trasporto bidimensionale.

L'ultimo risultato sul quale si vuole focalizzare l'attenzione consiste nell'osservare che i punti ammissibili di problemi di bitrasporto definiti in modo sintetico da:

$$\tilde{F} = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times c} \oplus \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times c} : x_{ij}^1 + x_{ij}^2 \leq u_{ij}, \sum_i x_{ij}^k = d_j^k, \sum_j x_{ij}^k = s_i^k, k = 1, 2\}$$

corrispondono ai flussi di costo massimo associati a due merci nella rete seguente. Si consideri un grafo bipartito con vertici $R \uplus C$, dove $|R| = r$ e $|C| = c$, e con archi orientati nell'insieme $R \times C$. Si aggiungano al grafo due vertici (che fungono da sorgenti) a_1, a_2 , due vertici b_1 e b_2 (da considerare come pozzi) e gli archi orientati (a_k, i) e (j, b_k) con $k = 1, 2, i \in R$ e $j \in C$. Agli archi si associano le seguenti capacità:

$$u(a_k, i) := s_i^k, \quad u(j, b_k) := d_j^k, \quad u(i, j) := u_{ij}$$

Per la dimostrazione è utile osservare che se si considera una sola merce, ad esempio il caso in cui l'indice k vale soltanto 1, il poliedro \tilde{F} si riduce a

$$F' = \{x^1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times c} : x_{ij}^1 \leq u_{ij}; \sum_i x_{ij}^1 = d_j^1; \sum_j x_{ij}^1 = s_i^1\}$$

Dato che $\sum_j \sum_i x_{ij}^1 = \sum_i \sum_j x_{ij}^1$, utilizzando i vincoli di F' si deduce che affinché quest'ultimo abbia un punto ammissibile è necessario che $\sum_j d_j^1 = \sum_i s_i^1$. Ripetendo lo stesso procedimento nel caso $k = 2$ si deduce che una condizione necessaria affinché \tilde{F} sia non vuoto è data da:

$$\sum_{i=1, j=1}^{r, c} x_{ij}^k = \sum_{j=1}^c d_j^k = \sum_{i=1}^r s_i^k \quad k = 1, 2 \quad (1.35)$$

Considerando (1.35) si comprende che un bitrasporto ammissibile deve corrispondere necessariamente ad un flusso nella rete sopra descritta che satura tutti gli archi (a_k, i) e (j, b_k) per $\forall i \in R$, per $\forall j \in C$ e per $k = 1, 2$. Tale situazione si manifesta solo in corrispondenza di un flusso di valore massimo.

Capitolo 2

Condizioni necessarie per l'ammissibilità di politopi di trasporto tridimensionali planari

I politopi di trasporto tridimensionali, i loro punti interi e le loro proiezioni vengono utilizzati e studiati intensivamente nella letteratura matematica della programmazione lineare ed intera e nella gestione dei dati statistici da parte di molte aziende. In particolare, molti problemi pratici,¹ possono essere formulati come problemi di ottimizzazione su politopi di trasporto tridimensionali planari $T(A, B, F)$ per opportune scelte delle matrici A , B , F ; risulta quindi rilevante elencare alcuni dei più importanti contributi relativi allo studio delle condizioni necessarie affinché un generico $T(A, B, F)$ sia non vuoto.

Riconsideriamo la formulazione di un generico politopo di trasporto tridimensionale planare, denotato con $T(A, B, F)$, definito dalle matrici $A \in \mathbb{R}^{c \times d}$, $B \in \mathbb{R}^{r \times d}$ e $F \in \mathbb{R}^{r \times c}$:

$$\sum_{i=1}^r x_{ijk} = a_{jk} \quad j = 1, \dots, c \quad k = 1, \dots, d \quad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^c x_{ijk} = b_{ik} \quad i = 1, \dots, r \quad k = 1, \dots, d \quad (2.2)$$

$$\sum_{k=1}^d x_{ijk} = f_{ij} \quad i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, c \quad (2.3)$$

¹Si vedano per esempio le formulazioni di Shell [4], Haley [5], Schmid [6], Junginger [7] e Raskin-Kiričenko [8].

$$x_{ijk} \geq 0 \quad i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, c \quad k = 1, \dots, d \quad (2.4)$$

Si definiscono gli insiemi $R = \{1, \dots, r\}$, $C = \{1, \dots, c\}$ e $D = \{1, \dots, d\}$. Un primo gruppo di condizioni necessarie per la non vuotezza di $T(A, B, F)$ è il seguente:

$$a_{jk} \geq 0 \quad \forall j \in C, \forall k \in D \quad (2.5)$$

$$b_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in R \quad \forall k \in D \quad (2.6)$$

$$f_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in R \quad \forall j \in C \quad (2.7)$$

$$\sum_{j \in C} a_{jk} = \sum_{i \in R} b_{ik} \quad \forall k \in D \quad (2.8)$$

$$\sum_{k \in D} b_{ik} = \sum_{j \in C} f_{ij} \quad \forall i \in R \quad (2.9)$$

$$\sum_{i \in R} f_{ij} = \sum_{k \in D} a_{jk} \quad \forall j \in C \quad (2.10)$$

La necessità dei vincoli (2.5), (2.6), (2.7) deriva dai vincoli (2.4), mentre i vincoli (2.8), (2.9), (2.10) sono necessari perchè il primo e secondo membro di ogni equazione costituiscono due modi alternativi di scrivere le somme delle entrate appartenenti ad uno stesso piano tra quelli che si individuano nei reticoli dei punti ammissibili di $T(A, B, F)$.

Le condizioni (2.5)-(2.10) non risultano sufficienti affinchè $T(A, B, F)$ sia ammissibile in quanto nel 1955 il matematico Shell [4] riuscì a trovare una particolare scelta delle matrici A , B e F per la quale $T(A, B, F)$ risulta vuoto, nonostante siano soddisfatte tutte le condizioni necessarie sopra elencate. Infatti, le matrici

$$\mathbb{R}^{2 \times 2} \ni A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^{2 \times 2} \ni B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^{2 \times 2} \ni F = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

soddisfano le condizioni (2.5)-(2.10) ma il corrispondente politopo $T(A, B, F)$ è vuoto: supponiamo che esista $X = [x_{ijk}] \in T(A, B, F)$, allora necessariamente si ha:

$$x_{111} \leq a_{11} = 1$$

$$x_{112} \leq b_{12} = 1$$

e allo stesso tempo deve valere

$$x_{111} + x_{112} = f_{11} = 4$$

ottenendo così una contraddizione con l'ipotesi di ammissibilità di $T(A, B, F)$.

2.1 Le condizioni di Shell

Considerando i vincoli (2.1)-(2.4) è facile notare che per $\forall X \in T(A, B, C)$ la disequazione $x_{ijk} \leq \min\{a_{jk}, b_{ik}, f_{ij}\}$ deve valere per ogni $(i, j, k) \in R \times C \times D$. Definendo $m_{ijk} := \min\{a_{jk}, b_{ik}, f_{ij}\}$, si ottiene

$$x_{ijk} \leq m_{ijk} \quad \forall i \in R, \forall j \in C, \forall k \in D \quad (2.11)$$

Facendo la somma sull'indice i (rispettivamente sull'indice j e sull'indice k) delle disuguaglianze (2.11) ed utilizzando i vincoli (2.1) (rispettivamente (2.2) e (2.3)) si ottengono rispettivamente:

$$a_{jk} \leq \sum_{i \in R} m_{ijk} \quad \forall j \in C \quad \forall k \in D \quad (2.12)$$

$$b_{ik} \leq \sum_{j \in C} m_{ijk} \quad \forall i \in R \quad \forall k \in D \quad (2.13)$$

$$f_{ij} \leq \sum_{k \in D} m_{ijk} \quad \forall i \in R \quad \forall j \in C \quad (2.14)$$

Ora si fissino gli indici $i \in R, j \in C$ e $k \in D$, il vincolo

$$\sum_{\alpha=1}^r x_{\alpha j k} = a_{jk} \quad j = 1, \dots, c \quad k = 1, \dots, d$$

implica assieme a (2.11) che

$$x_{ijk} = a_{jk} - \sum_{\alpha \in R \setminus \{i\}} x_{\alpha j k} \geq a_{jk} - \sum_{\alpha \in R \setminus \{i\}} m_{\alpha j k} \quad (2.15)$$

Similmente partendo dai vincoli

$$\sum_{\alpha=1}^c x_{i \alpha k} = b_{ik} \quad i = 1, \dots, r \quad k = 1, \dots, d$$

e

$$\sum_{\alpha=1}^d x_{ij \alpha} = f_{ij} \quad i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, c$$

si ottengono rispettivamente

$$x_{ijk} = b_{ik} - \sum_{\alpha \in C \setminus \{j\}} x_{i \alpha k} \geq b_{ik} - \sum_{\alpha \in C \setminus \{j\}} m_{i \alpha k} \quad (2.16)$$

e

$$x_{ijk} = f_{ij} - \sum_{\alpha \in D \setminus \{k\}} x_{ij \alpha} \geq f_{ij} - \sum_{\alpha \in D \setminus \{k\}} m_{ij \alpha} \quad (2.17)$$

Si definisce

$$M_{ijk} := \max\{0, a_{jk} - \sum_{\alpha \in R \setminus \{i\}} m_{i\alpha jk}, b_{ik} - \sum_{\alpha \in C \setminus \{j\}} m_{i\alpha k}, f_{ij} - \sum_{\alpha \in D \setminus \{k\}} m_{ij\alpha}\},$$

considerando (2.15),(2.16),(2.17) si ottiene

$$x_{ijk} \geq M_{ijk} \quad \forall i \in R, \quad \forall j \in C, \quad \forall k \in D \quad (2.18)$$

Facendo la somma sull'indice i (rispettivamente sull'indice j e sull'indice k) delle disequazioni (2.18) ed utilizzando i vincoli (2.1) (rispettivamente (2.2) e (2.3)) si ottengono rispettivamente:

$$\sum_{\alpha \in R} M_{\alpha jk} \leq a_{jk} \quad j \in C, \quad k \in D \quad (2.19)$$

$$\sum_{\alpha \in C} M_{i\alpha k} \leq b_{ik} \quad i \in R, \quad k \in D \quad (2.20)$$

$$\sum_{\alpha \in D} M_{ij\alpha} \leq f_{ij} \quad i \in R, \quad j \in C \quad (2.21)$$

Le disequazioni (2.12)-(2.14) unite alle disequazioni (2.19)-(2.21) vengono dette *condizioni di Shell*, necessariamente devono valere affinché $T(A, B, F)$ contenga almeno un punto ammissibile e si riassumono nel seguente modo:

$$\sum_{\alpha \in R} M_{\alpha jk} \leq a_{jk} \leq \sum_{\alpha \in R} m_{\alpha jk} \quad j \in C, \quad k \in D \quad (2.22)$$

$$\sum_{\alpha \in C} M_{i\alpha k} \leq b_{ik} \leq \sum_{\alpha \in C} m_{i\alpha k} \quad i \in R, \quad k \in D \quad (2.23)$$

$$\sum_{\alpha \in D} M_{ij\alpha} \leq f_{ij} \leq \sum_{\alpha \in D} m_{ij\alpha} \quad i \in R, \quad j \in C \quad (2.24)$$

Anche tali condizioni non risultano sufficienti per l'ammissibilità di $T(A, B, F)$ in quanto nel 1967 i matematici Moravèk e Vlack hanno trovato un contro-esempio alla loro sufficienza [10]. Si considerano infatti le matrici:

$$\mathbb{R}^{8 \times 2} \ni A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^{5 \times 2} \ni B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \\ 7 & 1 \\ 6 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^{5 \times 8} \ni F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Con tale scelta di valori per le matrici A , B e F , si hanno

$$M_{ijk} = 0 \quad i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, c \quad k = 1, \dots, d$$

$$m_{ijk} = 1 \quad i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, c \quad k = 1, \dots, d$$

Pertanto risulta facile verificare che le condizioni di Shell sono soddisfatte da $T(A, B, F)$. Nonostante ciò se supponiamo che esista $X = [x_{ijk}] \in T(A, B, F)$, allora le seguenti equazioni devono essere soddisfatte:

$$x_{1j2} + x_{2j2} \leq f_{1j} + f_{2j} = 1 + 1 = 2 \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 8\}$$

$$x_{1j2} + x_{2j2} \leq a_{j2} = 1 \quad \forall j \in \{4, 5, 6, 7\}$$

Pertanto abbiamo che

$$\sum_{j=1}^8 x_{1j2} + \sum_{j=1}^8 x_{2j2} \leq 12$$

D'altra parte per i vincoli originari che definiscono un politopo di trasporto planare, ovvero (2.2), si ha

$$\sum_{j=1}^8 x_{1j2} + \sum_{j=1}^8 x_{2j2} = b_{12} + b_{22} = 13$$

Si ottiene così una contraddizione dalla quale si deduce l'inammissibilità di $T(A, B, F)$.

2.2 Le condizioni di Haley

L'idea di Shell è stata sviluppata più tardi nel 1963 dal matematico Haley [5], il quale notò che i limiti inferiori M_{ijk} inducono un insieme più stretto di limiti superiori tramite una procedura simile a quella con cui i limiti superiori m_{ijk} inducono limiti inferiori più stretti rispetto agli M_{ijk} .

Formalmente si descrive questa procedura come segue:

siano $M_{ijk}^0 = 0$, $m_{ijk}^0 = \infty \quad \forall (i, j, k) \in R \times C \times D$,

si definisce per induzione

$$m_{ijk}^{r+1} = \min\{m_{ijk}^r, a_{jk} - \sum_{\alpha \in R \setminus \{i\}} M_{\alpha jk}^r, b_{ik} - \sum_{\alpha \in C \setminus \{j\}} M_{i\alpha k}^r, f_{ij} - \sum_{\alpha \in D \setminus \{k\}} M_{ij\alpha}^r\}$$

$$M_{ijk}^{r+1} = \max\{M_{ijk}^r, a_{jk} - \sum_{\alpha \in R \setminus \{i\}} m_{\alpha jk}^r, b_{ik} - \sum_{\alpha \in C \setminus \{j\}} m_{i\alpha k}^r, f_{ij} - \sum_{\alpha \in D \setminus \{k\}} m_{ij\alpha}^r\}$$

Si può osservare facilmente che $\{M_{ijk}^r\}_r$, $\{m_{ijk}^r\}_r$ sono rispettivamente sequenze di numeri crescente e decrescente e che se $X \in T(A, B, F)$ allora

$$M_{ijk}^0 \leq M_{ijk}^1 \leq \dots \leq M_{ijk}^r \leq \dots \leq x_{ijk} \leq \dots \leq m_{ijk}^r \leq \dots \leq m_{ijk}^1 \leq m_{ijk}^0$$

pertanto i limiti $H_{ijk} := \lim_{r \rightarrow \infty} M_{ijk}^r$ e $h_{ijk} := \lim_{r \rightarrow \infty} m_{ijk}^r$ esistono, sono finiti e si ha

$$H_{ijk} \leq x_{ijk} \leq h_{ijk} \quad \forall (i, j, k) \in R \times C \times D \quad (2.25)$$

Ora sommando sull'indice i (rispettivamente sull'indice j e k) e utilizzando (2.1) (rispettivamente (2.2) e (2.3)) si ottengono le seguenti condizioni, dette *condizioni di Haley*, necessarie affinché $T(A, B, F)$ sia non vuoto:

$$\sum_{i \in R} H_{ijk} \leq a_{jk} \leq \sum_{i \in R} h_{ijk} \quad j \in C, \quad k \in D \quad (2.26)$$

$$\sum_{j \in C} H_{ijk} \leq b_{ik} \leq \sum_{j \in C} h_{ijk} \quad i \in R, \quad k \in D \quad (2.27)$$

$$\sum_{k \in D} H_{ijk} \leq f_{ij} \leq \sum_{k \in D} h_{ijk} \quad i \in R, \quad j \in C \quad (2.28)$$

Il controesempio, sopra menzionato, alla sufficienza delle condizioni di Shell ci permette di dimostrare che anche la valenza delle condizioni di Haley, necessaria affinché un politopo di trasporto tridimensionale planare sia non vuoto, non risulta sufficiente a garantirci l'esistenza di un punto ammissibile al suo interno. Calcolando la sequenza $\{M_{ijk}^r\}_r$ e $\{m_{ijk}^r\}_r$ che caratterizzano tale esempio si ha

$$H_{ijk} = 0 \quad \forall (i, j, k) \in R \times C \times D$$

$$h_{ijk} = 1 \quad \forall (i, j, k) \in R \times C \times D$$

Dato che in questo caso $|R| = 5$, $|C| = 8$ e $|D| = 2$, le condizioni di Haley risultano soddisfatte: le matrici A , B e F sono a valori non negativi, tutte le componenti di A sono minori di 5 e tutte le entrate delle matrici B e F sono rispettivamente minori o uguali di 8 e 2.

Riportiamo infine altre due tipologie di condizioni necessarie per l'ammissibilità di $T(A, B, F)$: le *condizioni di Moràvek-Vlach I* e le *condizioni di Smith II*. L'esempio precedente alla non sufficienza delle condizioni di Shell e di Haley, ci suggerisce che i limiti sulle diverse possibili somme di variabili che si possono ottenere potrebbero risultare più forti dei limiti ottenuti tramite la somma dei limiti delle singole variabili. A partire da tale intuizione, i matematici Moràvek e Vlach [10] elaborarono due gruppi di condizioni necessarie: le *condizioni di Moràvek-Vlach I* e le *condizioni di Moràvek-Vlach II*. Noi analizziamo solo il primo,² in quanto da questo ultimo il matematico Smith [11] ha preso spunto per elaborare le cosiddette *condizioni di Smith II*.³ Queste ultime condizioni sono particolarmente importanti per i nostri scopi in quanto la possibilità di dimostrare la loro sufficienza ha costituito per molto tempo un problema aperto, al quale è stata attribuita una risposta negativa grazie all'applicazione del teorema principale di questa trattazione, risultato che verrà enunciato nel capitolo successivo.

2.3 Le condizioni di Moràvek-Vlach I

Riconsideriamo gli insiemi $R = \{1, \dots, r\}$, $C = \{1, \dots, c\}$ e $D = \{1, \dots, d\}$, all'interno dei quali variano rispettivamente gli indici i , j e k . Siano $I \subset R$, $J \subset C$ e $K \subset D$, definiamo:

$$\begin{aligned} A(J, K) &:= \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} a_{jk} \\ B(I, K) &:= \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} b_{ik} \\ F(I, J) &:= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} f_{ij} \\ X(I, J, K) &:= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijk} \end{aligned}$$

Dai vincoli (2.1)-(2.3) segue direttamente che

$$X(I, J, K) \leq \min\{A(J, K), B(I, K), F(I, J)\} \quad \forall X \in T(A, B, F) \quad \forall I, J, K \quad (2.29)$$

²Non analizzeremo le condizioni di *Moràvek-Vlach II* in questa trattazione ma possono essere ritrovate dal lettore in [2]; esse mescolano assieme le idee sottostanti alle condizioni di Haley e alle condizioni di *Moràvek-Vlach I*, elaborando una procedura interattiva molto simile a quella sviluppata da Haley per la somma delle variabili.

³Smith elaborò due gruppi di condizioni ma in questa trattazione ne discutiamo solo il secondo. Il primo gruppo di condizioni necessarie elaborate dal matematico e dette *condizioni di Smith I* sono discusse approfonditamente in [2].

Dato che $X(R, J, K) = A(J, K)$, $X(I, C, K) = B(I, K)$ e $X(I, J, D) = F(I, J) \quad \forall X \in T(A, B, F)$, risulta necessario che siano verificate le seguenti disequazioni affinché $T(A, B, F)$ sia non vuoto:

$$A(J, K) \leq \sum_{i \in R} \min\{A(J, K), B(\{i\}, K), F(\{i\}, J)\} \quad (2.30)$$

,

$$B(I, K) \leq \sum_{j \in C} \min\{A(\{j\}, K), B(I, K), F(I, \{j\})\} \quad (2.31)$$

$$F(I, J) \leq \sum_{k \in D} \min\{A(J, \{k\}), B(I, \{k\}), F(I, J)\} \quad (2.32)$$

per ogni $I \subset R$, $J \subset C$ e $K \subset D$.

Infatti, se poniamo $I = \{i\} \subset \mathbb{R}$, la disuguaglianza (2.29) diventa:

$$X(\{i\}, J, K) \leq \min\{A(J, K), B(\{i\}, K), F(\{i\}, J)\} \quad \forall X \in T(A, B, F) \quad \forall J, K \quad (2.33)$$

Ora applicando a (2.33) la sommatoria sull'indice i si ottiene la disequazione (2.30):

$$\sum_{i \in R} X(\{i\}, J, K) = A(J, K) = \sum_{i \in R} \min\{A(J, K), B(\{i\}, K), F(\{i\}, J)\}$$

Si può procedere in modo analogo per dimostrare la necessità delle altre due condizioni.⁴

Definiamo $\tilde{I} := R \setminus I$, $\tilde{J} := C \setminus J$ e $\tilde{K} = D \setminus K$, ovvero i complementari di I, J, K rispettivamente agli insiemi R, C e D .

La condizione (2.30) può essere riscritta in forma più debole in questo modo:

$$\begin{aligned} A(J, K) &\leq \sum_{i \in I} \min\{A(J, K), B(\{i\}, K), F(\{i\}, J)\} + \sum_{i \in \tilde{I}} \min\{A(J, K), B(\{i\}, K), F(\{i\}, J)\} \\ &\leq \sum_{i \in I} B(\{i\}, K) + \sum_{i \in \tilde{I}} F(\{i\}, J) = B(I, K) + F(\tilde{I}, J) \end{aligned}$$

Procediamo analogamente con la disequazione (2.31):

$$\begin{aligned} B(I, K) &\leq \sum_{j \in J} \min\{A(\{j\}, K), B(I, K), F(I, \{j\})\} + \sum_{j \in \tilde{J}} \min\{A(\{j\}, K), B(I, K), F(I, \{j\})\} \\ &\leq \sum_{j \in J} A(\{j\}, K) + \sum_{j \in \tilde{J}} F(I, \{j\}) = A(J, K) + F(I, \tilde{J}) \end{aligned}$$

⁴Osserviamo che se in (2.30) non ci fosse il termine $A(J, K)$ a secondo membro la disuguaglianza rimane corretta. Analogamente (2.31) e (2.32) mantengono la loro correttezza se rispettivamente nel loro secondo membro si omettono i termini $B(I, K)$ e $F(I, J)$.

Infine a partire da (2.32), ragionando allo stesso modo si ottiene:

$$\begin{aligned} F(I, J) &\leq \sum_{k \in K} \min\{A(J, \{k\}), B(I, \{k\}), F(I, J)\} + \sum_{k \in \tilde{K}} \min\{A(J, \{k\}), B(I, \{k\}), F(I, J)\} \\ &\leq \sum_{k \in K} A(J, \{k\}) + \sum_{k \in \tilde{K}} B(I, \{k\}) = A(J, K) + B(I, \tilde{K}) \end{aligned}$$

Pertanto dalle condizioni (2.30)-(2.32), dette *condizioni di Moravek-Vlack* I , si possono ottenere le seguenti disequazioni:

$$A(J, K) \leq B(I, K) + F(\tilde{I}, J) \quad (2.34)$$

$$B(I, K) \leq A(J, K) + F(I, \tilde{J}) \quad (2.35)$$

$$F(I, J) \leq A(J, K) + B(I, \tilde{K}) \quad (2.36)$$

le quali devono valere $\forall I \subset R$, $\forall J \subset C$ e $\forall K \subset D$ affinché $T(A, B, F)$ contenga almeno un punto.

Ora discutiamo la sufficienza delle condizioni (2.34)-(2.36): riportiamo le matrici A , B e F dell'esempio fornito alla non sufficienza delle condizioni di Shell:

$$\mathbb{R}^{8 \times 2} \ni A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^{5 \times 2} \ni B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \\ 7 & 1 \\ 6 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^{5 \times 8} \ni F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che tali matrici soddisfano le condizioni di Shell e di Haley, dimostriamo ora che non verificano le condizioni di Moràvek-Vlach I: definiamo gli insiemi I , J e K in questo modo

$$I = \{1, 2\} \quad J = \{4, 5, 6, 7\} \quad K = \{1\}$$

Allora si ha:

$$A(J, K) = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} a_{jk} = 16$$

$$B(I, K) = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} b_{ik} = 3$$

$$F(\tilde{I}, J) = \sum_{i \in \tilde{I}} \sum_{j \in J} f_{ij} = 12$$

Dato che $B(I, K) + F(\tilde{I}, J) = 15$, la condizione (2.34) non è soddisfatta e pertanto non risulta soddisfatta neppure la prima condizione di Moràvek-Vlach.

Consideriamo ora:

$$\mathbb{R}^{3 \times 3} \ni A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^{3 \times 3} \ni B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^{3 \times 3} \ni F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si può dimostrare che tali matrici, costruite nel 1975 dal matematico Smith [12] soddisfano tutte le condizioni (2.34)-(2.36) ma non le condizioni di Haley e pertanto definiscono un poliedro di trasporto tridimensionale vuoto. Grazie a questi ultimi due esempi si deduce che le condizioni di Moràvek-Vlach I non sono in generale sufficienti a garantire che un poliedro $T(A, B, F)$ sia non vuoto, tuttavia si può dimostrare che lo risultano nel caso in cui si abbia $\min(r, c, d) \leq 2$, affermazione che ora dimostreremo.

Nel caso in cui $\min(r, c, d) = 1$ il poliedro $T(A, B, F)$ si riduce ad un poliedro di trasporto bidimensionale per il quale le condizioni (2.5)-(2.10) sono sufficienti a garantirne l'ammissibilità, pertanto anche le condizioni di Moràvek-Vlach I lo sono.

Analizziamo il caso in cui $\min(r, c, d) = 2$ e supponiamo per semplicità $d = 2$. Sia $T(A, B, F)$ un poliedro di trasporto tridimensionale definito dalle matrici $A \in \mathbb{R}^{c \times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{r \times 2}$ e $F \in \mathbb{R}^{r \times c}$, che soddisfano la prima condizione di Moràvek-Vlach I, ovvero:

$$A(J, K) \leq \sum_{i \in R} \min\{A(J, K), B(\{i\}, K), F(\{i\}, J)\} \quad (2.37)$$

Inoltre dai vincoli (2.1) e (2.2) che definiscono $T(A, B, F)$ si ha

$$\sum_{j=1}^c a_{j1} = \sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^r x_{ij1} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c x_{ij1} = \sum_{i=1}^r b_{i1} \quad (2.38)$$

Consideriamo il seguente sistema:

$$\sum_{i=1}^r y_{ij} = a_{j1} \quad j = 1, \dots, c$$

$$\sum_{j=1}^c y_{ij} = b_{i1} \quad i = 1, \dots, r$$

$$0 \leq y_{ij} \leq f_{ij} \quad i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, c$$

Facendo riferimento alla notazione precedentemente introdotta, definiamo il sottoinsieme $K = \{1\} \subset D$, allora in corrispondenza di tale scelta si ha:

$$B(\{i\}, K) = B(\{i\}, 1) = b_{i1}$$

$$A(J, K) = A(J, \{1\}) = \sum_{j \in J} a_{j1} \quad \forall J \subset C$$

$$F(\{i\}, J) = \sum_{j \in J} f_{ij} \quad \forall J \subset C$$

Pertanto la condizione (2.37) diventa

$$\sum_{j \in J} a_{j1} \leq \sum_{i=1}^r \min\{b_{i1}, \sum_{j \in J} f_{ij}\} \quad \forall J \subset C \quad (2.39)$$

Poichè $\sum_{j=1}^c a_{j1} = \sum_{i=1}^r b_{i1}$, la condizione (2.39) è sufficiente per l'esistenza di una soluzione $y = [y_{ij}] \in \mathbb{R}^{r \times c}$ del sistema sopra riportato, si veda [9], e ponendo

$$x_{ij1} := y_{ij} \quad x_{ij2} := f_{ij} - y_{ij} \quad i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, c$$

si ottiene una soluzione ammissibile $X = [x_{ijk}] \in T(A, B, F)$.

2.4 Condizioni di Smith II

Le condizioni di Smith II che abbiamo menzionato precedentemente sono state ottenute, come già detto, a partire da osservazioni relative a (2.34)-(2.35). Nel 1973 Smith [12], notando che i membri destri delle equazioni che costituiscono i vincoli di $T(A, B, F)$, ovvero (2.1)-(2.3), sono definiti su insiemi nella forma di prodotto cartesiano, decise di estendere le condizioni (2.34)-(2.36) ad insiemi più generali nel modo che ora spieghiamo.

Siano $U \subset C \times D$, $V \subset R \times D$ e $W \subset R \times C$, definiamo:

$$Q_1(U) := \{(i, j, k) \mid (j, k) \in U\}$$

$$Q_2(V) := \{(i, j, k) \mid (i, k) \in V\}$$

$$Q_3(W) := \{(i, j, k) \mid (i, j) \in W\}$$

Il secondo gruppo di condizioni di Smith, necessarie affinché $T(A, B, F)$ sia non vuoto, è costituito dalle seguenti disequazioni:

$$A(U) \leq B(V) + F(W) \quad \text{ogni volta che } Q_1(U) \subset Q_2(V) \cup Q_3(W) \quad (2.40)$$

$$B(V) \leq A(U) + F(W) \text{ ogni volta che } Q_2(V) \subset Q_1(U) \cup Q_3(W) \quad (2.41)$$

$$F(W) \leq A(U) + B(V) \text{ ogni volta che } Q_3(W) \subset Q_1(U) \cup Q_2(V) \quad (2.42)$$

nelle quali si hanno:

- $A(U) = \sum_{(j,k) \in U} a_{jk} = \sum_{(i,j,k) \in Q_1(U)} x_{ijk} = X(Q_1(U));$
- $B(V) = \sum_{(i,k) \in V} b_{ik} = \sum_{(i,j,k) \in Q_2(V)} x_{ijk} = X(Q_2(V));$
- $C(W) = \sum_{(i,j) \in W} c_{ij} = \sum_{(i,j,k) \in Q_3(W)} x_{ijk} = X(Q_3(W))$

Per dimostrare che le condizioni (2.40)-(2.42) sono necessarie per l'ammissibilità di $T(A, B, F)$ è sufficiente utilizzare le definizioni date per i termini $A(U)$, $B(V)$ e $C(W)$ e le seguenti implicazioni che derivano dalla non negatività di tutte le componenti di ogni punto ammissibile di $T(A, B, F)$:

- $Q_1(U) \subset Q_2(V) \cup Q_3(W) \rightarrow X(Q_1(U)) \leq X(Q_2(V)) + X(Q_3(W));$
- $Q_2(V) \subset Q_1(U) \cup Q_3(W) \rightarrow X(Q_2(V)) \leq X(Q_1(U)) + X(Q_3(W));$
- $Q_3(W) \subset Q_1(U) \cup Q_2(V) \rightarrow X(Q_3(W)) \leq X(Q_1(U)) + X(Q_2(V))$

Si può osservare che le condizioni (2.40)-(2.42) includono le disequazioni (2.34)-(2.36) che abbiamo ottenuto applicando delle maggiorazioni alle prime condizioni di Moràvek-Vlack. Per ottenere (2.34) è sufficiente considerare gli insiemi $U = J \times K$, $V = I \times K$ e $W = \tilde{I} \times J$ e notare che $Q_1(U) = R \times J \times K$, $Q_2(V) = I \times C \times K$ e $Q_3(W) = \tilde{I} \times J \times D$, mentre per ricavare (2.35) si possono considerare gli insiemi $U = J \times K$, $V = I \times K$ e $W = I \times \tilde{J}$, per i quali si ha $Q_1(U) = R \times J \times K$, $Q_2(V) = I \times C \times K$ e $Q_3(W) = I \times \tilde{J} \times D$. Infine, per quanto riguarda (2.36), possiamo considerare $U = J \times K$, $V = I \times \tilde{K}$ e $W = I \times J$ da cui abbiamo che $Q_1(U) = R \times J \times K$, $Q_2(V) = I \times C \times \tilde{K}$ e $Q_3(W) = I \times J \times D$.

Capitolo 3

Politopi razionali e politopi di trasporto

In questo capitolo, riconsideriamo gli insiemi R , C e D già precedentemente definiti¹ e introduciamo il seguente teorema, dovuto ai matematici Jesús A. De Loera e Shmuel Onn [1], che costituisce il focus principale di questa tesi:

Teorema 3.1 (J. A. De Loera, S. Onn [1]). *Ogni politopo razionale $P = \{y \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : Ay = b\}$ è rappresentabile in tempo polinomiale come un politopo di trasporto tridimensionale planare sottile*

$$T = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times c \times 3} : \sum_{i \in R} x_{ijk} = a_{jk}, \sum_{j \in C} x_{ijk} = b_{ik}, \sum_{k=1}^3 x_{ijk} = f_{ij}\}$$

Affermando che un politopo $P \subset \mathbb{R}^n$ è *rappresentabile* come un politopo $T \subset \mathbb{R}^{r \times c \times 3}$, stiamo supponendo che esista una mappa iniettiva tra gli insiemi delle coordinate dei due poliedri

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, r \cdot c \cdot 3\}$$

che induce la proiezione $\pi : \mathbb{R}^{r \times c \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^n$, tale che $\pi(x_1, \dots, x_{r \cdot c \cdot 3}) := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$, la quale, se ristretta alla propria immagine, costituisce una trasformazione lineare biettiva tra P e T e gli insiemi dei loro punti interi, $P \cap \mathbb{Z}^n$ e $T \cap \mathbb{Z}^{r \times c \times 3}$.

Il teorema non solo afferma che il politopo P è rappresentabile come T , ma anche che ciò è possibile in tempo polinomiale, ovvero, sia che il sistema di T è polinomiale rispetto a quello di P , sia che il tempo di esecuzione della procedura che permette di trasformare il primo poliedro nel secondo è polinomiale rispetto al sistema che definisce il primo.

Prima di inoltrarci nella discussione del teorema, riflettiamo sulla forma del

¹Si ricorda che $R = \{1, \dots, r\}$, $C = \{1, \dots, c\}$ e $D = \{1, \dots, d\}$.

sistema che definisce P , costituita da sole equazioni e da vincoli di non negatività per tutte le variabili, la quale non è restrittiva in quanto costituisce la cosiddetta *forma standard* a cui ci si può sempre ricondurre. A partire da un qualunque sistema di disequazioni per passare alla forma standard si effettuano essenzialmente due operazioni: la prima consiste nell'introduzione di variabili scarto che permettono di trasformare le disuguaglianze in equazioni, la seconda invece sdoppia ogni variabile libera x_i , ovvero non vincolata ad essere non-negativa, introducendo due variabili che devono essere positive o nulle x_i^+ , x_i^- e sostituendo x_i nei vincoli con $x_i^+ - x_i^-$.

Se il politopo razionale P originariamente era descritto da un sistema lineare del tipo $\{x \in \mathbb{R}^m : Ax \leq b\}$ nelle variabili $\{x_1, \dots, x_m\}$ e sono state introdotte le variabili scarto $\{s_1, \dots, s_l\}$ per riscriverlo nel sistema in forma standard $P = \{(x, s) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}^l : Gx + Hs = 0\}$, possiamo affermare che tale operazione non inficia la definizione di rappresentabilità sopra riportata: è sufficiente comporre la mappa π , presente nella definizione, con la proiezione $\tilde{\pi}$ che elimina le variabili scarto e mantiene le variabili originarie invariate, ovvero la seguente mappa che ci permette di ricondurci al sistema originario di P :

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} : P = \{(x, s) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}^l : Gx + Hs = 0\} &\rightarrow P = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \leq b\} \\ (x_1, \dots, x_m, s_1, \dots, s_l) &\rightarrow (x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

Tuttavia l'operazione di sdoppiamento che si compie in presenza di variabili libere comporta delle complicanze con la definizione di rappresentabilità: non possiamo più considerare la mappa $\tilde{\pi}$, dato che eliminando le nuove variabili ausiliarie si ottiene un sistema diverso da quello di partenza. In realtà questa apparente contraddizione può essere risolta osservando che il poliedro P al quale siamo interessati è un politopo e quindi ogni sua variabile è limitata inferiormente e superiormente. Se x_i è una variabile libera esisterà $l_i \in \mathbb{R}$ tale che $x_i \geq l_i$, quindi semplicemente traslando il poliedro P , ovvero applicando la sostituzione $x_i' = x_i - l_i$, possiamo assumere che anche quella variabile sia non negativa. Procedendo in questo modo per ogni variabile libera si elimina la necessità di applicare l'operazione di sdoppiamento, la quale serve solo in presenza di variabili non vincolate ad essere non negative. Possiamo pertanto concludere questa osservazione dicendo che ogni politopo razionale, indipendentemente da come è scritto il sistema di vincoli che lo definisce, è rappresentabile come un politopo di trasporto tridimensionale planare sottile. al *piccolissimo* prezzo di accettare nella definizione di rappresentabilità anche la traslazione di variabili.

Ritorniamo a focalizzarci sul teorema, se affermiamo che P è rappresentabile in tempo polinomiale come T , possiamo dire che P e T sono isomorfi sotto ogni ragionevole senso: sono linearmente e interamente equivalenti

grazie all'esistenza della biezione π , pertanto tutti i problemi di programmazione lineare ed intera che presentano come regioni ammissibili i due poliedri risultano essere equivalenti in tempo polinomiale; d'altra parte, come conseguenza dell'equivalenza lineare tra P e T , si deduce che quest'ultimi sono anche combinatoriamente equivalenti, ovvero presentano la stessa struttura facciale.

Dato che i primi membri dei vincoli che definiscono un politopo di trasporto tridimensionale hanno una struttura fissa e sono caratterizzati da coefficienti in $\{0, 1\}$, una volta che si conoscono le matrici A , B e F è possibile ricostruire l'intero sistema che definisce il politopo, pertanto dal teorema 3.1 si può dedurre un'importante proprietà: ogni politopo razionale ammette una rappresentazione tramite un sistema lineare in cui tutte le informazioni sono contenute nel membro di destra, in questo specifico caso nelle matrici A , B e F .

3.1 Dimostrazione del teorema 3.1

Riportiamo ora la dimostrazione del teorema 3.1, la quale può essere suddivisa in tre step distinti. Nello specifico il primo passo della dimostrazione, anche detto *riduzione dei coefficienti*, consiste nella descrizione della procedura con la quale un generico politopo razionale può essere rappresentato in tempo polinomiale come un politopo la cui matrice dei vincoli presenta coefficienti che variano nell'insieme $\{-1, 0, 1, 2\}$. Il secondo step consiste nel rappresentare il politopo razionale, ottenuto in qualità di output dallo step precedente, come un politopo di trasporto tridimensionale assiale con entrate vietate. Vedendo quest'ultimo come caso particolare di politopo di trasporto tridimensionale assiale con entrate limitate \underline{T} , la parte finale della dimostrazione ci permette di trasformare \underline{T} in un politopo di trasporto tridimensionale planare sottile.

3.1.1 Step 1 della dimostrazione

Sia $P = \{y \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : Ay = b\}$ un politopo razionale, se supponiamo di moltiplicare ogni riga i -esima del sistema $Ax = b$ per il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni che appaiono come coefficienti nell'equazione considerata, possiamo supporre che il sistema $Ay = b$ abbia matrice e termine noto interi. D'ora in poi supponiamo che $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ sia matrice intera e che $b \in \mathbb{Z}^m$ sia un vettore intero. Per ogni variabile y_j definiamo

$$k_j := \max\{\lfloor \log_2 |a_{ij}| \rfloor : i = 1, \dots, m\}$$

e ricordiamo che $\lfloor \log_2 |a_{ij}| \rfloor + 1$ corrisponde al numero di bit nella rappresentazione binaria del valore assoluto del coefficiente con cui la variabile y_j

appare nell' i -esima equazione che definisce P . Notiamo che per definire k_j dobbiamo assicurarci che almeno uno tra i coefficienti a_{ij} per $i = 1, \dots, m$ sia non nullo, a causa della presenza del logaritmo nella sua definizione: possiamo sempre assumere vera tale condizione, perchè, in caso contrario, la variabile y_j appare nel sistema di P con coefficiente sempre nullo e può essere dunque ignorata.

Per ogni $j = 1, \dots, n$ introduciamo le variabili $x_{j,0}, \dots, x_{j,k_j}$ legate tra loro dalle equazioni:

$$2x_{j,s} - x_{j,s+1} = 0 \quad \forall s = 0, \dots, k_j - 1$$

Consideriamo ora la mappa iniettiva:

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{(1, 0), \dots, (1, k_1), \dots, (n, 0), \dots, (n, k_n)\} \text{ tale che } \sigma(j) := (j, 0)$$

Questa funzione ci permette di identificare la variabile y_j del politopo P con la variabile $x_{j,0}$ del poliedro P' che vogliamo ottenere come prodotto finale di questo primo step.

Se riscriviamo ogni coefficiente a_{ij} presente nei vincoli di P mediante la propria rappresentazione binaria abbiamo che $|a_{ij}| = \sum_{s=0}^{k_j} t_s 2^s$ con $t_s \in \{0, 1\}$. Pertanto si ha

$$a_{ij}y_j = \pm \sum_{s=0}^{k_j} t_s 2^s x_{j,0} = \pm \sum_{s=0}^{k_j} t_s 2^{s-1} 2x_{j,0} = \pm \sum_{s=0}^{k_j} t_s 2^{s-1} x_{j,1} = \dots = \pm \sum_{s=0}^{k_j} t_s x_{j,s}$$

Riscrivendo ogni vincolo di P utilizzando i passaggi precedenti otteniamo un politopo $P' = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^q : Gx = h\}$ con G e h rispettivamente matrice a coefficienti in $\{-1, 0, 1, 2\}$ e termine noto intero.

3.1.2 Esempio di riduzione dei coefficienti

Riportiamo ora un esempio per illustrare la procedura descritta nel primo step della dimostrazione: consideriamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{aligned} 4y_1 - 3y_2 + 5y_3 &= 1 \\ 3y_1 + 4y_2 - 6y_3 &= 2 \end{aligned}$$

che ammette come soluzione generale il vettore:

$$y = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} - \frac{2}{25} \cdot y_3 \\ \frac{1}{5} + \frac{39}{25} \cdot y_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

ottenuta mediante l'applicazione del metodo di eliminazione di Gauss-Jordan.

Ora consideriamo la soluzione ammissibile particolare $\tilde{y} = (0, 8, 5)^T$, riscriviamo il sistema lineare nella nuova forma e mostriamo che è possibile completare \tilde{y} a una soluzione ammissibile del nuovo sistema.

Si hanno:

$$k_1 = \max\{\lfloor \log_2 4 \rfloor, \lfloor \log_2 3 \rfloor\} = \max\{2, 1\} = 2,$$

$$k_2 = \max\{\lfloor \log_2 3 \rfloor, \lfloor \log_2 4 \rfloor\} = \max\{1, 2\} = 2,$$

$$k_3 = \max\{\lfloor \log_2 5 \rfloor, \lfloor \log_2 6 \rfloor\} = \max\{2, 2\} = 2$$

Pertanto le variabili nella rappresentazione cercata sono:

$$x_{1,0}, x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,0}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{3,0}, x_{3,1}, x_{3,2}$$

Riscriviamo ogni termine dei vincoli nelle nuove variabili:

$$4y_1 = 2^2 x_{1,0} = 2 \cdot 2x_{1,0} = 2 \cdot x_{1,1} = x_{1,2}$$

$$-3y_2 = -(2+1)x_{2,0} = -2x_{2,0} - x_{2,0} = -x_{2,1} - x_{2,0}$$

$$5y_3 = (2^2 + 1)x_{3,0} = 2^2 x_{3,0} + x_{3,0} = x_{3,2} + x_{3,0}$$

$$3y_1 = (2+1)x_{1,0} = 2x_{1,0} + x_{1,0} = x_{1,1} + x_{1,0}$$

$$4y_2 = 2^2 x_{2,0} = x_{2,2}$$

$$-6y_3 = -(2^2 + 2)x_{3,0} = -2^2 x_{3,0} - 2x_{3,0} = -x_{3,2} - x_{3,1}$$

Il nuovo sistema è:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & x_{1,2} & -x_{2,0} & -x_{2,1} & & x_{3,0} & & +x_{3,2} & = & 1 \\
 x_{1,0} & x_{1,1} & & & & & x_{2,2} & & -x_{3,1} & -x_{3,2} & = & 2 \\
 2x_{1,0} & -x_{1,1} & & & & & & & & & = & 0 \\
 & 2x_{1,1} & -x_{1,2} & & & & & & & & = & 0 \\
 & & & 2x_{2,0} & -x_{2,1} & & & & & & = & 0 \\
 & & & & 2x_{2,1} & -x_{2,2} & & & & & = & 0 \\
 & & & & & & 2x_{3,0} & -x_{3,1} & & & = & 0 \\
 & & & & & & & 2x_{3,1} & -x_{3,2} & & = & 0
 \end{array}$$

che presenta come soluzione generale:

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{1}{50} \cdot x_{3,2} \\ \frac{4}{5} - \frac{1}{25} \cdot x_{3,2} \\ \frac{8}{5} - \frac{2}{25} \cdot x_{3,2} \\ \frac{1}{5} + \frac{39}{100} \cdot x_{3,2} \\ \frac{2}{5} + \frac{39}{50} \cdot x_{3,2} \\ \frac{4}{5} + \frac{39}{25} \cdot x_{3,2} \\ \frac{1}{4} \cdot x_{3,2} \\ \frac{1}{2} \cdot x_{3,2} \\ x_{3,2} \end{pmatrix}$$

la quale per $x_{3,2} = 20$ ci permette di ottenere la soluzione \tilde{x} del nuovo sistema corrispondente a \tilde{y} :

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 16 \\ 32 \\ 5 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

3.1.3 Step 2 della dimostrazione

In questo step supponiamo di considerare un politopo $P = \{y \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : Ay = b\}$, con $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, che presenta $U \in \mathbb{R}$ come limite superiore per le componenti di ogni punto ammissibile.²

Definiamo per ogni $j = 1, \dots, n$ il massimo tra la somma dei coefficienti positivi e la somma dei valori assoluti dei coefficienti negativi con cui la variabile y_j è presente nel sistema che definisce P , ovvero

$$r_j := \max\left(\sum_{k=1}^m \{a_{kj} : a_{kj} > 0\}, \sum_{k=1}^m \{|a_{kj}| : a_{kj} < 0\}\right)$$

Si definiscono i numeri $r := \sum_{j=1}^n r_j$, $h := m + 1$ e gli insiemi $R = \{1, \dots, r\}$ e $H := \{1, \dots, h\}$. La definizione di r induce una partizione naturale di R , il quale può essere visto come unione di n sottoinsiemi disgiunti con cardinalità rispettivamente r_j , cioè $R = R_1 \cup \dots \cup R_n$ tali che $|R_j| = r_j \forall j$ e $R_i \cap R_j = \emptyset$ per $i \neq j$.

L'obiettivo che ci poniamo consiste nel rappresentare P come il politopo di trasporto tridimensionale assiale $T' \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times r \times h}$ con entrate vietate, descritto dai vincoli:

$$x_{ijk} = 0 \quad \forall (i, j, k) \notin E \subset R \times R \times H \quad (3.1)$$

$$\sum_{(j,k) \in R \times H} x_{ijk} = u_i \quad \forall i \in R \quad (3.2)$$

$$\sum_{(i,k) \in R \times H} x_{ijk} = v_j \quad \forall j \in R \quad (3.3)$$

$$\sum_{(i,j) \in R \times R} x_{ijk} = w_k \quad \forall k \in H \quad (3.4)$$

Denotiamo con σ la mappa iniettiva, con dominio e codominio rispettivamente gli insiemi $\{1, \dots, n\}$ e $\{1, \dots, r \cdot r \cdot h\}$, che permette di codificare la variabile y_j di P in una coordinata x_{ijk} di T' fornendo così la conseguente rappresentazione di P come T' . Prima di definire tale mappa, per la nostra finalità risulta necessario descrivere l'insieme $E \subset R \times R \times H$ delle entrate concesse e i vettori $u, v \in \mathbb{R}^r$ e $w \in \mathbb{R}^h$. Tenendo conto dell'interpretazione dei punti ammissibili di un politopo di trasporto tridimensionale fornita nel primo capitolo, si intuisce che le componenti di w forniscono le somme delle entrate dei piani orizzontali mentre le componenti di u e v le somme delle entrate delle due tipologie di piani verticali che si possono individuare nel reticolo associato a $X = [x_{ijk}] \in T'$. Imponiamo che le somme di tutti i piani

² P è un politopo, ovvero un poliedro limitato tale che ogni componente di ogni suo punto è limitata sia inferiormente e superiormente, pertanto possiamo scegliere U nell'insieme $\{s \in \mathbb{R} \mid s \geq y_i, \forall y \in P, i = 1, \dots, n\}$.

verticali, indipendentemente dalla loro disposizione, sia U , ovvero $u_i := U$, $v_j := U$ per ogni $i, j \in R$.

Per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$ considero la scatola verticale $R_j \times R_j \times H \subset R \times R \times H$ e suppongo che $E \subseteq \bigcup_{j=1}^n R_j \times R_j \times H$: in questo modo stabilisco che tutte le entrate dei punti ammissibili di T' che non appartengono all'unione delle scatole verticali siano nulle.

Per descrivere le entrate concesse nelle scatole verticali consideriamo per semplicità la prima scatola, corrispondente alla variabile y_1 , e distinguiamo il caso $r_1 = 1$ dal caso $r_1 \geq 2$.

Se $r_1 = 1$ allora la scatola verticale si riduce al segmento $\{1\} \times \{1\} \times H$; in questo caso come posizioni concesse all'interno del segmento consideriamo soltanto $(1, 1, k^+(1))$ e $(1, 1, k^-(1))$; i valori $k^+(1)$ e $k^-(1)$ verranno descritti in seguito quando cercheremo di codificare le equazioni di P nel sistema che definisce T' . Consideriamo la mappa σ già introdotta, ponendo $\sigma(1) := (1, 1, k^+(1))$, identifichiamo la variabile y_1 di P con la variabile $x_{1,1,k^+(1)}$ di T' .³ Definiamo il *complementare* di y_1 con $\bar{y}_1 := U - y_1$; poichè $v_1 = u_1 = U$, per i vincoli (3.2) o (3.3) si deduce che:

$$\bar{y}_1 = U - y_1 = U - x_{1,1,k^+(1)} = x_{1,1,k^-(1)}$$

Studiamo ora il caso $r_1 \geq 2$: per ogni $s = 1, \dots, r_1$ consideriamo i segmenti $\{s\} \times \{s\} \times H$ e $\{s\} \times \{1 + s \bmod r_1\} \times H$ e supponiamo che contengano rispettivamente $(s, s, k^+(s))$ e $(s, 1 + s \bmod r_1, k^-(s))$ come uniche posizioni ammesse. Tutte le rimanenti posizioni disponibili nella prima scatola verticale sono vietate.

Come in precedenza, ponendo $\sigma(1) := (1, 1, k^+(1))$ identifichiamo y_1 con $x_{1,1,k^+(1)}$; in seguito utilizzando i vincoli (3.2) e (3.3), si deduce che le variabili y_1 e \bar{y}_1 sono entrambe incluse in r_1 variabili distinte di T' , nello specifico si ha:

$$y_1 = x_{s,s,k^+(s)}, \quad \bar{y}_1 = x_{s,(1+s \bmod r_1),k^-(s)} \quad \forall s = 1, \dots, r_1$$

Per le scatole verticali associate alle rimanenti variabili si procede in modo analogo. Prima di proseguire con la dimostrazione, riportiamo un esempio per facilitare la comprensione.

Esempio

Supponiamo che i punti ammissibili di $P \subset \mathbb{R}^3$ siano descritti da 3 variabili y_1, y_2, y_3 alle quali sono associati $r_1 = 3$, $r_2 = 1$ e $r_3 = 2$. Si ha $r = 6$, $R = \{1, \dots, 6\} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ con $R_1 = \{1, 2, 3\}$, $R_2 = \{4\}$ e $R_3 = \{5, 6\}$.

³Per una maggior chiarezza nella notazione, in alcune situazioni scriveremo $x_{i,j,k}$ al posto di x_{ijk} .

Il sottoinsieme $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \times H \subset R \times R \times H$ costituisce la prima scatola verticale, considerando $s \in \{1, 2, 3\}$ si hanno le variabili concesse:

$$x_{1,1,k^+(1)} \text{ e } x_{1,2,k^-(1)} \quad \text{per } s = 1$$

$$x_{2,2,k^+(2)} \text{ e } x_{2,3,k^-(2)} \quad \text{per } s = 2$$

$$x_{3,3,k^+(3)} \text{ e } x_{3,1,k^-(3)} \quad \text{per } s = 3$$

La seconda scatola verticale associata alla variabile y_2 è $\{4\} \times \{4\} \times H \subset R \times R \times H$ con le seguenti variabili ammesse:

$$x_{4,4,k^+(4)} \text{ e } x_{4,4,k^-(4)} \quad \text{per } s = 4$$

Infine la terza scatola verticale è $\{5, 6\} \times \{5, 6\} \times H \subset R \times R \times H$ con entrate concesse:

$$x_{5,5,k^+(5)} \text{ e } x_{5,6,k^-(5)} \quad \text{per } s = 5$$

$$x_{6,6,k^+(6)} \text{ e } x_{6,5,k^-(6)} \quad \text{per } s = 6$$

Se indichiamo con $y_{i,j,+} := \sum_{k=1}^{m+1} x_{ijk}$, la matrice $S \in \mathbb{R}^{r \times r}$, il cui elemento s_{ij} mi dà la somma degli elementi contenuti nel segmento $\{i\} \times \{j\} \times H$ nel reticolo con cui può essere rappresentato un punto $X \in T'$, diventa:

$$S = \begin{pmatrix} x_{1,1,+} & x_{1,2,+} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{2,2,+} & x_{2,3,+} & 0 & 0 & 0 \\ x_{3,1,+} & 0 & x_{3,3,+} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{4,4,+} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{5,5,+} & x_{5,6,+} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{6,5,+} & x_{6,6,+} \end{pmatrix}$$

Tenendo conto delle identificazioni che si ottengono tramite la funzione iniettiva σ , la matrice S può essere riscritta in questo modo:

$$S = \begin{pmatrix} y_1 & \bar{y}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & \bar{y}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{y}_1 & 0 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U = (y_2 + \bar{y}_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_3 & \bar{y}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{y}_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

Il passo successivo della dimostrazione, lasciata in sospeso per l'introduzione dell'esempio sopra riportato, consiste nel codificare i vincoli del sistema che definisce P nelle equazioni di T' , in particolare cerchiamo di codificare tali vincoli nei piani orizzontali dei reticoli che costituiscono i punti ammissibili

del poliedro T' .

Per ogni $k = 1, \dots, m$ ⁴ definiamo $J^+ := \{j : a_{kj} > 0\}$ e $J^- := \{j : a_{kj} < 0\}$ rispettivamente gli insiemi degli indici delle variabili moltiplicate per coefficienti positivi e negativi nell'equazione k -esima del sistema $Ay = b$.

Dalla definizione del vettore $w \in \mathbb{R}^h$, la componente w_l fornisce la somma delle componenti di un punto ammissibile $X = [x_{ijk}]$ di T' che giacciono nel piano orizzontale determinato dall'equazione $k = l$; poichè $h = m + 1$ deduciamo che i reticoli dei punti di T hanno tanti piani orizzontali quante le equazioni di P più un ulteriore piano, per il quale, per consistenza, possiamo porre:

$$w_h = w_{m+1} := r \cdot U - \sum_{k=1}^m w_k$$

Imponiamo che $w_k := b_k + U \cdot \sum_{j \in J^-} |a_{kj}|$ per ogni $k = 1, \dots, m$.

Avendo definito $\bar{y}_j = U - y_j$, possiamo riscrivere la k -esima equazione di P e codificarla nel k -esimo piano orizzontale di $X \in T'$ in questo modo:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J^+} a_{kj} y_j + \sum_{j \in J^-} |a_{kj}| \bar{y}_j &= \sum_{j \in J^+} a_{kj} y_j + U \cdot \sum_{j \in J^-} |a_{kj}| - \sum_{j \in J^-} |a_{kj}| y_j = \\ \sum_{j \in J^+} a_{kj} y_j + \sum_{j \in J^-} a_{kj} y_j + U \cdot \sum_{j \in J^-} |a_{kj}| &= \sum_{j=1}^n a_{kj} y_j + U \cdot \sum_{j \in J^-} |a_{kj}| = \\ b_k + U \cdot \sum_{j \in J^-} |a_{kj}| &= w_k \end{aligned}$$

Per ogni $j \in J^+$ si effettuano a_{kj} scelte dell'indice $s \in \{\sum_{l < j} r_l + 1, \dots, \sum_{l \leq j} r_l\}$ in corrispondenza delle quali si pone $k^+(s) = k$: in questo modo si riescono a portare a_{kj} copie di y_j nel k -esimo piano orizzontale di $X \in T'$.

Similmente per ogni $j \in J^-$ si effettuano $|a_{kj}|$ scelte dell'indice $s \in \{\sum_{l < j} r_l + 1, \dots, \sum_{l \leq j} r_l\}$ in corrispondenza delle quali si pone $k^-(s) = k$: si ottengono così $|a_{kj}|$ copie di \bar{y}_j nel k -esimo piano orizzontale di $X \in T'$. Grazie alla definizione di r_j abbiamo sufficienti scelte per l'indice s che ci permettono di portare a termine questa costruzione per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$.

⁴Ricordiamo che $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ per cui m è il numero di equazioni del sistema di equazioni che definisce P .

3.1.4 Step 3 della dimostrazione

Si può osservare che il politopo di trasporto tridimensionale assiale T' con entrate vietate che si ottiene dallo step precedente costituisce un caso particolare di politopo di trasporto tridimensionale assiale con entrate limitate: è sufficiente sostituire i vincoli

$$x_{ijk} = 0 \text{ per } (i, j, k) \notin E \subset R \times R \times H$$

con i seguenti

$$x_{ijk} \leq e_{ijk} \text{ per } (i, j, k) \in R \times R \times H$$

dove

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se } (i, j, k) \notin E \\ U & \text{se } (i, j, k) \in E \end{cases}$$

Lo step 3 della dimostrazione ci fornisce il modo con cui un politopo di trasporto tridimensionale assiale con entrate limitate

$$\underline{T} : \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{l \times m \times n} : \sum_{j,k} x_{ijk} = u_i, \sum_{i,k} x_{ijk} = v_j, \sum_{i,j} x_{ijk} = w_k, x_{ijk} \leq e_{ijk}\}$$

può essere rappresentato come un politopo di trasporto tridimensionale planare sottile

$$T = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times c \times 3} : \sum_I x_{IJK} = a_{JK}, \sum_J x_{IJK} = b_{IK}, \sum_K x_{IJK} = f_{IJ}\}$$

con $A = [a_{JK}] \in \mathbb{R}^{c \times 3}$, $B = [b_{IK}] \in \mathbb{R}^{r \times 3}$ e $F = [f_{IJ}] \in \mathbb{R}^{r \times c}$.

Notiamo che i punti di \underline{T} e T hanno dimensioni diverse e sono indicizzati rispettivamente dai gruppi di indici $\{i, j, k\}$ e $\{I, J, K\}$.

Poniamo $r := l \cdot m$ e $c := n + l + m$.

L'indice I è formato da una coppia di indici che varia nel prodotto cartesiano $\tilde{R} = \{1, \dots, l\} \times \{1, \dots, m\}$ di cardinalità $|\tilde{R}| = r$, ovvero

$$I = (i, j) \in \{(1, 1), \dots, (1, m), (2, 1), \dots, (2, m), \dots, (l, 1), \dots, (l, m)\}.$$

L'indice J è costituito da una coppia di indici che varia nell'insieme $\tilde{C} = \{1\} \times \{1, \dots, n\} \cup \{2\} \times \{1, \dots, l\} \cup \{3\} \times \{1, \dots, m\}$, ovvero

$$J = (s, t) \in \{(1, 1), \dots, (1, n), (2, 1), \dots, (2, l), (3, 1), \dots, (3, m)\}.$$

Infine l'indice K assume valori nell'insieme $\tilde{K} = \{1, 2, 3\}$.

Supponiamo ora che U denoti il minimo tra i valori $\max\{u_1, \dots, u_l\}$ e $\max\{v_1, \dots, v_m\}$, considerando formule esplicite dipendenti dai vincoli di

\underline{T} per assegnare i valori delle componenti delle matrici A , B e F , i vincoli di T diventano i seguenti:

$$\sum_{k=1}^3 x_{(i,j),(1,t),k} = f_{(i,j),(1,t)} = e_{ijt} \quad (3.5)$$

$$\sum_{k=1}^3 x_{(i,j),(2,t),k} = f_{(i,j),(2,t)} = \begin{cases} U & \text{se } t = i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\sum_{k=1}^3 x_{(i,j),(3,t),k} = f_{(i,j),(3,t)} = \begin{cases} U & \text{se } t = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\sum_J x_{(i,j),J,t} = b_{(i,j),t} = \begin{cases} U & \text{se } t = 1 \\ e_{i,j,+} & \text{se } t = 2 \\ U & \text{se } t = 3 \end{cases} \quad (3.8)$$

con $e_{i,j,+} := \sum_{k=1}^n e_{ijk}$

$$\sum_I x_{I,(s,t),1} = a_{(s,t),1} = \begin{cases} w_t & \text{se } s = 1 \\ m \cdot U - u_t & \text{se } s = 2 \\ 0 & \text{se } s = 3 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\sum_I x_{I,(s,t),2} = a_{(s,t),2} = \begin{cases} e_{+,+,t} - w_t & \text{se } s = 1 \\ 0 & \text{se } s = 2 \\ v_t & \text{se } s = 3 \end{cases} \quad (3.10)$$

con $e_{+,+,k} := \sum_{i,j} e_{ijk}$

$$\sum_I x_{I,(s,t),3} = a_{(s,t),3} = \begin{cases} 0 & \text{se } s = 1 \\ u_t & \text{se } s = 2 \\ l \cdot U - v_t & \text{se } s = 3 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$x_{I,J,K} \geq 0 \quad \forall I, J, K \quad (3.12)$$

Ora cerchiamo di dimostrare che un punto $y = [y_{ijk}] \in \underline{T}$ corrisponde ad un punto $x = [x_{IJK}] \in T$. Sia $\sigma : \{1, \dots, l \cdot m \cdot n\} \rightarrow \{1, \dots, r \cdot c \cdot 3\}$ la mappa iniettiva che identifica la variabile y_{ijk} di \underline{T} con la variabile $x_{(i,j),(1,k),1}$ di T e che fornisce la rappresentazione di \underline{T} come T .

Suppongo che $x \in T$ corrisponda a $y \in \underline{T}$, allora si ha

$$x_{(i,j),(1,k),1} = y_{ijk} \quad \text{per } i = 1, \dots, l \quad j = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, n \quad (3.13)$$

Cerchiamo di determinare i valori delle altre componenti di x in modo che i vincoli di T siano soddisfatti dal punto x .

Dai vincoli (3.9) abbiamo che:

$$\sum_{I \in \tilde{R}} x_{I,(3,t),1} = a_{(3,t),1} = 0 \quad (3.14)$$

Sapendo che vale (3.12), da (3.14) si ha

$$x_{I,(3,t),1} = 0 \quad \forall I \quad \forall t = 1, \dots, m$$

Dai vincoli (3.10) si ha $\sum_I x_{I,(2,t),2} = a_{(2,t),2} = 0$, usando (3.12) si ottiene

$$x_{I,(2,t),2} = 0 \quad \forall I \quad t = 1, \dots, l$$

Consideriamo i vincoli (3.11) si ha $\sum_I x_{I,(1,t),3} = a_{(1,t),3} = 0$, usando (3.12) si ottiene

$$x_{I,(1,t),3} = 0 \quad \forall I \quad \forall t = 1, \dots, n$$

Dai vincoli (3.6) si ha

$$x_{(i,j),(2,t),1} + x_{(i,j),(2,t),2} + x_{(i,j),(2,t),3} = 0 \text{ se } t \neq i$$

Poichè abbiamo dimostrato che $x_{(i,j),(2,t),2} = 0$ si ottiene tramite (3.12):

$$x_{(i,j),(2,t),1} = x_{(i,j),(2,t),3} = 0 \text{ se } t \neq i$$

Considerando i vincoli (3.8) si ha $\sum_J x_{I,J,1} = b_{I,1} = U$, ovvero

$$\sum_{t=1}^n x_{(i,j),(1,t),1} + \sum_{t=1}^l x_{(i,j),(2,t),1} + \sum_{t=1}^m x_{(i,j),(3,t),1} = U$$

Pertanto, denotando con $y_{i,j,+} := \sum_{k=1}^n y_{ijk}$, sapendo che $x_{(i,j),(2,t),1} = 0$ se $t \neq i$ e $x_{I,(3,t),1} = 0 \forall I \forall t = 1, \dots, m$, si ha

$$x_{(i,j),(2,i),1} = U - \sum_{t=1}^n x_{(i,j),(1,t),1} = U - \sum_{k=1}^n y_{ijk} = U - y_{i,j,+} \geq 0$$

Dai vincoli (3.6) si ha

$$x_{(i,j),(2,i),1} + x_{(i,j),(2,i),2} + x_{(i,j),(2,i),3} = U$$

e poichè $x_{(i,j),(2,i),2} = 0$ si ottiene

$$x_{(i,j),(2,i),3} = U - x_{(i,j),(2,i),1} = U - U + y_{i,j,+} = y_{i,j,+} \quad \forall i = 1, \dots, l \quad \forall j = 1, \dots, m$$

Dai vincoli (3.5) si ha che

$$x_{(i,j),(1,t),1} + x_{(i,j),(1,t),2} + x_{(i,j),(1,t),3} = e_{ijt}$$

e dato che $x_{(i,j),(1,t),1} = y_{ijt}$ e $x_{(i,j),(1,t),3} = 0$ otteniamo

$$x_{(i,j),(1,t),2} = e_{ijt} - y_{ijt} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, l \quad \forall j = 1, \dots, m \quad \forall t = 1, \dots, n$$

Dai vincoli (3.7) si ha

$$x_{(i,j),(3,t),1} + x_{(i,j),(3,t),2} + x_{(i,j),(3,t),3} = 0 \text{ se } t \neq j$$

Sappiamo che $x_{I,(3,t),1} = 0$, tramite (3.12) si ottiene

$$x_{(i,j),(3,t),2} = x_{(i,j),(3,t),3} = 0 \quad \forall i, j, t \text{ con } t \neq j$$

Dai vincoli (3.8) abbiamo che $\sum_J x_{(i,j),J,2} = b_{(i,j),2} = e_{i,j,+}$, ovvero

$$\sum_{t=1}^n x_{(i,j),(1,t),2} + \sum_{t=1}^l x_{(i,j),(2,t),2} + \sum_{t=1}^m x_{(i,j),(3,t),2} = e_{i,j,+}$$

Sapendo che $x_{I,(2,t),2} = 0 \quad \forall I, \forall t$ e $x_{(i,j),(3,t),2} = 0$ se $t \neq j$ otteniamo

$$x_{(i,j),(3,j),2} = e_{i,j,+} - \sum_{t=1}^n x_{(i,j),(1,t),2} = \sum_{t=1}^n y_{ijt} = y_{i,j,+}$$

Infine dai vincoli (3.7) si deduce che

$$x_{(i,j),(3,j),1} + x_{(i,j),(3,j),2} + x_{(i,j),(3,j),3} = U$$

Tenendo conto che $x_{(i,j),(3,j),1} = 0$ e $x_{(i,j),(3,j),2} = y_{i,j,+}$ deduciamo che

$$x_{(i,j),(3,j),3} = U - y_{i,j,+} \quad i = \dots, l \quad j = 1, \dots, m$$

Riportiamo ora il calcolo diretto che ci permette di verificare che il punto $x = [x_{IJK}] \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times c \times 3}$ con le componenti sopra riportate soddisfa i vincoli che definiscono il poliedro T ; prima però riassumiamo brevemente le formule trovate per le componenti di x :

$$x_{(i,j),(1,t),1} = y_{ijt} \tag{3.15}$$

$$x_{(i,j),(2,t),1} = \begin{cases} U - y_{i,j,+} & \text{se } t = i \\ 0 & \text{se } t \neq i \end{cases} \quad (3.16)$$

$$x_{(i,j),(3,t),1} = 0 \quad (3.17)$$

$$x_{(i,j),(1,t),2} = e_{ijt} - y_{ijt} \quad (3.18)$$

$$x_{(i,j),(2,t),2} = 0 \quad (3.19)$$

$$x_{(i,j),(3,t),2} = \begin{cases} y_{i,j,+} & \text{se } t = j \\ 0 & \text{se } t \neq j \end{cases} \quad (3.20)$$

$$x_{(i,j),(1,t),3} = 0 \quad (3.21)$$

$$x_{(i,j),(2,t),3} = \begin{cases} y_{i,j,+} & \text{se } t = i \\ 0 & \text{se } t \neq i \end{cases} \quad (3.22)$$

$$x_{(i,j),(3,t),3} = \begin{cases} U - y_{i,j,+} & \text{se } t = j \\ 0 & \text{se } t \neq j \end{cases} \quad (3.23)$$

Supponiamo che il punto $y \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$ soddisfa i vincoli di \underline{T} ovvero

$$\sum_{j,k} y_{ijk} = u_i \quad (3.24)$$

$$\sum_{i,k} y_{ijk} = v_j \quad (3.25)$$

$$\sum_{i,j} y_{ijk} = w_k \quad (3.26)$$

$$y_{ijk} \leq e_{ijk} \quad (3.27)$$

$$y_{ijk} \geq 0 \quad (3.28)$$

Vogliamo dimostrare i vincoli (3.9):

$$\text{se } s = 1 \quad \sum_{(i,j)} x_{(i,j),(1,t),1} = \sum_{i,j} y_{ijt} = w_t$$

$$\text{se } s = 2 \quad \sum_{(i,j)} x_{(i,j),(2,t),1} = \sum_j x_{(t,j),(2,t),1} = \sum_{j=1}^m U - \sum_{j=1}^m y_{t,j,+} = m \cdot U - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n y_{tjk} = m \cdot U - u_t$$

$$\text{se } s = 3 \quad \sum_{(i,j)} x_{(i,j),(3,t),1} = 0$$

Dimostriamo ora i vincoli (3.10):

$$\text{se } s = 1 \quad \sum_{(i,j)} x_{(i,j),(1,t),2} = \sum_{i,j} e_{ijt} - \sum_{i,j} y_{ijt} = e_{+,+,t} - w_t$$

$$\text{se } s = 2 \quad \sum_{(i,j)} x_{(i,j),(2,t),2} = 0$$

$$\text{se } s = 3 \quad \sum_{(i,j)} x_{(i,j),(3,t),2} = \sum_i x_{(i,t),(3,t),2} = \sum_i y_{i,t,+} = \sum_i \sum_k y_{itk} = v_t$$

Verifichiamo che i vincoli (3.11) siano soddisfatti:

$$\text{se } s = 1 \quad \sum_{(i,j)} x_{(i,j),(1,t),3} = 0$$

$$\text{se } s = 2 \quad \sum_{(i,j)} x_{(i,j),(2,t),3} = \sum_j x_{(t,j),(2,t),3} = \sum_j y_{t,j,+} = \sum_j \sum_k y_{tjk} = u_t$$

$$\text{se } s = 3 \quad \sum_{(i,j)} x_{(i,j),(3,t),3} = \sum_i x_{(i,t),(3,t),3} = \sum_{i=1}^l U - \sum_{i=1}^l y_{i,t,+} = l \cdot U - \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^n y_{itk} = l \cdot U - v_t$$

Dimostriamo i vincoli (3.8):

$$\text{se } k = 1 \quad \sum_{(s,t)} x_{(i,j),(s,t),1} = \sum_{t=1}^n x_{(i,j),(1,t),1} + \sum_{t=1}^l x_{(i,j),(2,t),1} + \sum_{t=1}^m x_{(i,j),(3,t),1} = \sum_{t=1}^n y_{ijt} + x_{(i,j),(2,i),1} = y_{i,j,+} + U - y_{i,j,+} = U$$

$$\text{se } k = 2 \quad \sum_{(s,t)} x_{(i,j),(s,t),2} = \sum_{t=1}^n x_{(i,j),(1,t),2} + \sum_{t=1}^l x_{(i,j),(2,t),2} + \sum_{t=1}^m x_{(i,j),(3,t),2} = \sum_{t=1}^n (e_{i,j,t} - y_{ijt}) + x_{(i,j),(3,j),2} = \sum_{t=1}^n e_{ijt} - \sum_{t=1}^n y_{ijt} + y_{i,j,+} = e_{i,j,+}$$

$$\text{se } k = 3 \quad \sum_{(s,t)} x_{(i,j),(s,t),3} = \sum_{t=1}^n x_{(i,j),(1,t),3} + \sum_{t=1}^l x_{(i,j),(2,t),3} + \sum_{t=1}^m x_{(i,j),(3,t),3} = x_{(i,j),(2,i),3} + x_{(i,j),(3,j),3} = y_{i,j,+} + U - y_{i,j,+} = U$$

Verifichiamo i vincoli (3.5):

$$\sum_{k=1}^3 x_{(i,j),(1,t),k} = x_{(i,j),(1,t),1} + x_{(i,j),(1,t),2} + x_{(i,j),(1,t),3} = y_{ijt} + e_{ijt} - y_{ijt} = e_{ijt}$$

Ora effettuiamo la verifica di (3.6), abbiamo che:

$$\text{se } t = i \quad x_{(i,j),(2,i),1} + x_{(i,j),(2,i),2} + x_{(i,j),(2,i),3} = x_{(i,j),(2,i),1} + x_{(i,j),(2,i),3} = U - y_{i,j,+} + y_{i,j,+} = U$$

$$\text{se } t \neq i \quad x_{(i,j),(2,t),1} + x_{(i,j),(2,t),2} + x_{(i,j),(2,t),3} = 0$$

Infine per i vincoli (3.7) abbiamo:

$$\text{se } t = j \quad x_{(i,j),(3,j),1} + x_{(i,j),(3,j),2} + x_{(i,j),(3,j),3} = y_{i,j,+} + U - y_{i,j,+} = U$$

$$\text{se } t \neq j \quad x_{(i,j),(3,t),1} + x_{(i,j),(3,t),2} + x_{(i,j),(3,t),3} = 0$$

Ora riportiamo la procedura che permette di costruire il punto $y \in \underline{T}$ cor-

rispondente a un punto $x \in T$. A partire da $x = [x_{I,J,K}] \in T \subset \mathbb{R}^{r \times c \times 3}$ definiamo le componenti di y

$$y_{ijk} := x_{(i,j),(1,t),1} \quad i = 1, \dots, l, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n$$

Verifichiamo che il punto così ottenuto verifichi i vincoli (3.24)-(3.28):

Dato che $x \in T \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times c \times 3}$, si ha:

$$y_{ijk} = x_{(i,j),(1,k),1} \geq 0 \quad \forall i, j, k$$

Pertanto i vincoli (3.28) sono verificati.

Ricordiamoci che dai calcoli precedenti sappiamo che ogni punto $x \in T$ è tale che $x_{(i,j),(3,t),2} = 0$ per $t \neq j$, $x_{(i,j),(2,t),3} = 0$ per $t \neq i$ e $x_{(i,j),(3,j),2} = x_{(i,j),(2,i),3} = y_{ij+}$.

Dai vincoli (3.5) si ha

$$\sum_{k=1}^3 x_{(i,j),(1,t),k} = e_{ijt} \rightarrow x_{(i,j),(1,t),1} + x_{(i,j),(1,t),2} + x_{(i,j),(1,t),3} = e_{ijt}$$

Poichè abbiamo $x_{(i,j),(1,t),3} = 0$ per ogni $x \in T \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times c \times 3}$, si deduce $\forall i, j, t$:

$$x_{(i,j),(1,t),1} + x_{(i,j),(1,t),2} = e_{ijt} \rightarrow e_{ijt} - y_{ijt} = e_{ijt} - x_{(i,j),(1,t),1} = x_{(i,j),(1,t),2} \geq 0$$

Pertanto i vincoli (3.27) risultano soddisfatti.

Utilizzando i vincoli (3.9) si ha

$$\sum_{i,j} y_{ijt} = \sum_{(i,j)} x_{(i,j),(1,t),1} = a_{(1,t),1} = w_t$$

quindi i vincoli (3.26) sono verificati.

Mediante i vincoli (3.10) si deduce che:

$$\sum_{i,k} y_{ijk} = \sum_i \left(\sum_k y_{ijk} \right) = \sum_i y_{i,j,+} = \sum_i x_{(i,j),(3,j),2} = a_{(3,j),2} = v_j$$

ottenendo così la verifica dei vincoli (3.25).

Infine per dimostrare la validità dei vincoli (3.24) si utilizzano (3.11) procedendo in questo modo

$$\sum_{j,k} y_{ijk} = \sum_j \left(\sum_k y_{ijk} \right) = \sum_j y_{i,j,+} = \sum_j x_{(i,j),(2,i),3} = a_{(2,i),3} = u_i$$

Questo calcolo dimostra che $y \in \underline{T}$.

Poichè l'interrezza dei punti è preservata in entrambe le direzioni, tale costruzione completa la dimostrazione del teorema.

3.1.5 Stime di complessità

Prima di concludere questo capitolo riportiamo un enunciato del teorema principale precedentemente dimostrato, dovuto ai matematici Jesús A. De Loera e Shmuel Onn [1] e contenente una stima di complessità generale:

Teorema 3.2 (J. A. De Loera, S. Onn [1]). *Un politopo razionale $P = \{y \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : Ay = b\}$, con $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{Z}^m$, può essere rappresentato in tempo polinomiale come un politopo di trasporto tridimensionale planare sottile T i cui punti hanno dimensione $r \cdot c \cdot 3$, dove*

$$r = O(m^2(n + L)^2) \text{ e } c = O(m(n + L))$$

con $L := \sum_{j=1}^n \max_{i=1}^m \lfloor \log_2 |a_{ij}| \rfloor$.

Capitolo 4

Politopi razionali e politopi di bitrasporto

In questo capitolo presentiamo e dimostriamo un teorema universale relativo ai politopi di bitrasporto, sempre dovuto ai matematici Jesús De Loera e Shmuel Onn [1]. Prima di enunciare il risultato riassumiamo brevemente in che cosa consistono i problemi di bitrasporto. Consideriamo r magazzini (indicizzati da $i = 1, \dots, r$) e c negozi (indicizzati da $j = 1, \dots, c$), l'obiettivo consiste nel pianificare il trasporto di due merci (indicizzate da $k = 1, 2$) dai primi verso i secondi. Supponiamo di conoscere i vettori *disponibilità* $s^1, s^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}^r$ e i vettori *domanda* $d^1, d^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}^c$, tali che le componenti s_i^k e d_j^k indicano rispettivamente la quantità di merce k presente nel deposito i e la quantità di prodotto k richiesta nel negozio j . Infine si ha la matrice $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times c}$ la cui componente u_{ij} fornisce un limite superiore alla quantità totale di merce che può viaggiare dal magazzino i al negozio j .

Si vogliono trovare $x^1, x^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times c}$ che soddisfano i vincoli di disponibilità e domanda, ovvero

$$\sum_{j=1}^c x_{ij}^k = s_i^k \quad i = 1, \dots, r \quad k = 1, 2$$

$$\sum_{i=1}^r x_{ij}^k = d_j^k \quad j = 1, \dots, c \quad k = 1, 2$$

e i vincoli di capacità

$$x_{ij}^1 + x_{ij}^2 \leq u_{ij} \quad i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, c$$

Risulta evidente che stiamo utilizzando x_{ij}^k come variabile il cui valore corrisponde alla quantità di merce che viene trasportata dal magazzino i al negozio j .

Teorema 4.1 (J. A. De Loera, S. Onn [1]). *Ogni politopo razionale $P = \{y \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : Ay = b\}$ è rappresentabile in tempo polinomiale come un politopo di bitrasporto*

$$F = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times c} \times \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times c} : \sum_{j=1}^c x_{ij}^k = s_i^k, \sum_{i=1}^r x_{i,j}^k = d_j^k, x_{i,j}^1 + x_{i,j}^2 \leq u_{i,j} \forall i, j, k\}$$

Ricordiamo che nel primo capitolo di questa tesi, tra le osservazioni generali sui politopi di trasporto, abbiamo dimostrato la corrispondenza tra i punti ammissibili di problemi di bitrasporto e i flussi di costo massimo, relativi a due merci, che si possono individuare nella rete seguente: consideriamo un grafo con vertici $\{a_1, a_2\} \cup R \cup C \cup \{b_1, b_2\}$ con $|R| = r$ e $|C| = c$ e con archi orientati del tipo (a_k, i) , (j, b_k) e (i, j) con $k \in \{1, 2\}$, $i \in R$ e $j \in C$. Agli archi associamo le seguenti capacità:

$$u(a_k, i) := s_i^k \quad u(j, b_k) := d_j^k \quad u(i, j) := u_{ij}$$

Questa osservazione in aggiunta al teorema 4.1 ci permette di dedurre che ogni programma lineare con regione ammissibile un politopo razionale è equivalente in tempo polinomiale a un problema di flusso a due merci.

4.1 Dimostrazione teorema 4.1

La dimostrazione del teorema 4.1 si ottiene apportando una modificazione del terzo step della dimostrazione del teorema 3.1, descritta nel secondo capitolo di questa tesi: dopo aver dimostrato che ogni politopo razionale è rappresentabile in tempo polinomiale come un politopo di trasporto tridimensionale assiale con entrate vietate, il quale può essere ricondotto ad un politopo di trasporto tridimensionale assiale con entrate limitate \underline{T} , anziché dimostrare che \underline{T} si rappresenta in tempo polinomiale come un politopo di trasporto tridimensionale planare sottile, si mostra che \underline{T} può essere rappresentato come un politopo di bitrasporto. Riportiamo in seguito i vincoli che definiscono $\underline{T} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$:

$$\sum_{j,k} y_{ijk} = u_i \quad i = 1, \dots, l \quad (4.1)$$

$$\sum_{i,k} y_{ijk} = v_j \quad j = 1, \dots, m \quad (4.2)$$

$$\sum_{i,j} y_{ijk} = w_k \quad k = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

$$y_{ijk} \leq e_{ijk} \quad i = 1, \dots, l \quad j = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, n \quad (4.4)$$

$$y_{ijk} \geq 0 \quad i = 1, \dots, l \quad j = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, n \quad (4.5)$$

Vogliamo dimostrare l'equivalenza tra \underline{T} e un poliedro di bitrasporto $F \subset \mathbb{R}^{r \times c} \times \mathbb{R}^{r \times c}$, i cui punti ammissibili sono rappresentati da coppie di vettori, ovvero $F \ni x = (x_{IJ}^1, x_{IJ}^2)$ dove $x^k = [x_{IJ}^k] \in \mathbb{R}^{r \times c}$ con $k = 1, 2$.

L'indice I può essere visualizzato come una coppia di indici che assumono valore in un insieme \tilde{R} di cardinalità $r := l \cdot m$, cioè

$$I = (i, j) \in \{(1, 1), \dots, (1, m), (2, 1), \dots, (2, m), \dots, (l, 1), \dots, (l, m)\}$$

L'indice J corrisponde ad una coppia di indici che variano in un insieme \tilde{C} di cardinalità $c := n + l + m$, ovvero

$$J = (s, t) \in \{(1, 1), \dots, (1, n), (2, 1), \dots, (2, l), (3, 1), \dots, (3, m)\}$$

Utilizzando delle formule specifiche per assegnare i valori delle componenti dei vettori $s^1, s^2 \in \mathbb{R}^r$, $d^1, d^2 \in \mathbb{R}^c$ e $u \in \mathbb{R}^{r \times c}$ che caratterizzano F , quest'ultimo risulta descritto dai vincoli:

$$x_{(i,j),(1,t)}^1 + x_{(i,j),(1,t)}^2 \leq u_{(i,j),(1,t)} := e_{ijt} \quad (4.6)$$

$$x_{(i,j),(2,t)}^1 + x_{(i,j),(2,t)}^2 \leq u_{(i,j),(2,t)} := \begin{cases} U & \text{se } t = i \\ 0 & \text{se } t \neq i \end{cases} \quad (4.7)$$

$$x_{(i,j),(3,t)}^1 + x_{(i,j),(3,t)}^2 \leq u_{(i,j),(3,t)} := \begin{cases} U & \text{se } t = j \\ 0 & \text{se } t \neq j \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\sum_{J \in \tilde{C}} x_{I,J}^1 = s_I^1 := U \quad \forall I \in \tilde{R} \quad (4.9)$$

$$\sum_{J \in \tilde{C}} x_{I,J}^2 = s_I^2 := U \quad \forall I \in \tilde{R} \quad (4.10)$$

$$\sum_{I \in \tilde{R}} x_{I,J}^1 = \sum_{(i,j) \in \tilde{R}} x_{(i,j),(s,t)}^1 = d_{(s,t)}^1 := \begin{cases} w_t & \text{se } s = 1 \\ m \cdot U - u_t & \text{se } s = 2 \\ 0 & \text{se } s = 3 \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\sum_{I \in \tilde{R}} x_{I,J}^2 = \sum_{(i,j) \in \tilde{R}} x_{(i,j),(s,t)}^2 = d_{(s,t)}^2 := \begin{cases} 0 & \text{se } s = 1 \\ u_t & \text{se } s = 2 \\ l \cdot U - v_t & \text{se } s = 3 \end{cases} \quad (4.12)$$

$$x_{I,J}^1 \geq 0 \quad \forall I \in \tilde{R} \quad \forall J \in \tilde{C} \quad (4.13)$$

$$x_{I,J}^2 \geq 0 \quad \forall I \in \tilde{R} \quad \forall J \in \tilde{C} \quad (4.14)$$

Dato che \underline{T} costituisce un politopo, le componenti di ogni suo punto ammissibile sono limitate inferiormente e superiormente: scegliamo il numero reale U nell'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n y_{ijk} : y = [y_{ijk}] \in \underline{T} \right\}$$

L'equivalenza tra \underline{T} e F è dimostrabile anche nel caso in cui

$$s_I^2 = s_{(i,j)}^2 := \sum_{k=1}^n e_{ijk}$$

$$d_J^2 = d_{(s,t)}^2 := \begin{cases} (\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m e_{ijt}) - w_t & \text{se } s = 1 \\ 0 & \text{se } s = 2 \\ v_t & \text{se } s = 3 \end{cases}$$

La nostra scelta di utilizzare (4.10) è determinata dal fatto che essa ci garantisce che tutti i valori s_I^k per $k = 1, 2$ e $\forall I \in \tilde{R}$ assumano lo stesso valore U .

Prima di inoltrarci nella dimostrazione, per facilitare la comprensione, riportiamo la visualizzazione dei dati in forma matriciale:

$$\mathbb{R}^{r \times c} \ni U = [u_{IJ}] = \begin{pmatrix} e_{111} & e_{112} & \cdots & e_{11n} & U & 0 & \cdots & 0 & U & 0 & \cdots & 0 \\ e_{121} & e_{122} & \cdots & e_{12n} & U & 0 & \cdots & 0 & 0 & U & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{1m1} & e_{1m2} & \cdots & e_{1mn} & U & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & U \\ e_{211} & e_{212} & \cdots & e_{21n} & 0 & U & \cdots & 0 & U & 0 & \cdots & 0 \\ e_{221} & e_{222} & \cdots & e_{22n} & 0 & U & \cdots & 0 & 0 & U & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{2m1} & e_{2m2} & \cdots & e_{2mn} & 0 & U & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & U \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{l11} & e_{l12} & \cdots & e_{l1n} & 0 & 0 & \cdots & U & U & 0 & \cdots & 0 \\ e_{l21} & e_{l22} & \cdots & e_{l2n} & 0 & 0 & \cdots & U & 0 & U & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{lm1} & e_{lm2} & \cdots & e_{lmn} & 0 & 0 & \cdots & U & 0 & 0 & \cdots & U \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^r \ni s^1 = s^2 = \begin{pmatrix} U \\ U \\ \vdots \\ U \\ U \\ U \\ \vdots \\ U \\ U \\ \vdots \\ U \end{pmatrix}$$

$$d^1 = (w_1, w_2, \dots, w_n, m \cdot U - u_1, m \cdot U - u_2, \dots, m \cdot U - u_l, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^c$$

$$d^2 = (0, 0, \dots, 0, u_1, u_2, \dots, u_l, l \cdot U - v_1, l \cdot U - v_2, \dots, l \cdot U - v_m) \in \mathbb{R}^c$$

Dimostriamo ora l'equivalenza tra i politopi \underline{T} e F : mostriamo che ad un punto $y = [y_{ijk}] \in \underline{T} \subset \mathbb{R}^{l \times m \times n}$ possiamo associare un punto $x = (x^1, x^2) \in F \subset \mathbb{R}^{r \times c} \times \mathbb{R}^{r \times c}$ ponendo

$$x_{(i,j),(1,k)}^1 := y_{ijk} \quad i = 1, \dots, l \quad j = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, n$$

e determinando le altre componenti del punto x affinchè quest'ultimo sia un punto di F .

Dai vincoli (4.11) abbiamo che $\sum_{I \in \tilde{R}} x_{I,(3,t)}^1 = 0$, utilizzando i vincoli (4.13) si ottiene

$$x_{I,(3,t)}^1 = 0 \quad \forall I \in \tilde{R} \quad t = 1, \dots, m$$

Dai vincoli (4.12) si ha $\sum_{I \in \tilde{R}} x_{I,(1,t)}^2 = 0$, usando (4.14) si ottiene

$$x_{I,(1,t)}^2 = 0 \quad \forall I \in \tilde{R} \quad t = 1, \dots, n$$

Usando i vincoli (4.7) si deduce che

$$x_{(i,j),(2,t)}^1 + x_{(i,j),(2,t)}^2 \leq 0 \quad \text{se } t \neq i$$

pertanto, tramite i vincoli (4.13) e (4.14) si ottiene

$$x_{(i,j),(2,t)}^1 = x_{(i,j),(2,t)}^2 = 0 \quad \text{se } t \neq i \quad i = 1, \dots, l \quad j = 1, \dots, m$$

Con i vincoli (4.8) si ha $x_{(i,j),(3,t)}^1 + x_{(i,j),(3,t)}^2 \leq 0$ se $t \neq j$ per cui con (4.14) e sapendo che $x_{I,(3,t)}^1 = 0 \quad \forall I \quad \forall t$, deduciamo che

$$x_{(i,j),(3,t)}^2 = 0 \quad \text{se } t \neq j \quad i = 1, \dots, l \quad j = 1, \dots, m$$

Per quanto riguarda i vincoli (4.9) possiamo scrivere

$$\sum_{J \in \tilde{C}} x_{(i,j),J}^1 = \sum_{t=1}^n x_{(i,j),(1,t)}^1 + \sum_{t=1}^l x_{(i,j),(2,t)}^1 + \sum_{t=1}^m x_{(i,j),(3,t)}^1 = U$$

ma sapendo che $x_{(i,j),(1,t)}^1 = y_{ijt}$, $x_{I,(3,t)}^1 = 0 \quad \forall I \quad \forall t$ e che $x_{(i,j),(2,t)}^1 = 0$ se $t \neq i$ si ottiene

$$\sum_{t=1}^n y_{ijt} + x_{(i,j),(2,i)}^1 = U \rightarrow x_{(i,j),(2,i)}^1 = U - \sum_{t=1}^n y_{ijt} \quad i = 1, \dots, l \quad j = 1, \dots, m$$

Dai vincoli (4.12) si ha

$$\sum_{(i,j) \in \tilde{I}} x_{(i,j),(2,t)}^2 = u_t \quad t = 1, \dots, l$$

Poichè $x_{(i,j),(2,t)}^2 = 0$ se $t \neq i$ si ottiene

$$\sum_{j=1}^m x_{(t,j),(2,t)}^2 = u_t$$

Dato che $u_t = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n y_{tjk}$ da (4.1), siamo indotti a porre

$$x_{(t,j),(2,t)}^2 = \sum_{k=1}^n y_{tjk} \quad t = 1, \dots, l \quad j = 1, \dots, m$$

Usando i vincoli (4.12) si ha

$$\sum_{(i,j) \in \tilde{R}} x_{(i,j),(3,t)}^2 = l \cdot U - v_t \quad t = 1, \dots, m$$

Poichè $x_{(i,j),(3,t)}^2 = 0$ se $t \neq j$ si ottiene

$$\sum_{i=1}^l x_{(i,t),(3,t)}^2 = l \cdot U - v_t \quad t = 1, \dots, m$$

Il vincolo (4.2), per il quale $v_j = \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^n y_{ijk}$, ci induce a porre

$$x_{(i,t),(3,t)}^2 = U - \sum_{k=1}^n y_{itk} \quad t = 1, \dots, m$$

Riassumiamo ora le componenti del punto $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^{r \times c} \times \mathbb{R}^{r \times c}$ che abbiamo associato a $y \in \underline{T}$ e in seguito riportiamo la verifica del fatto che x costituisca realmente un punto di F :

$$x_{(i,j),(1,t)}^1 = y_{ijt} \quad \forall I = (i,j) \in \tilde{R} \quad t = 1, \dots, n \quad (4.15)$$

$$x_{(i,j),(2,t)}^1 = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq i \\ U - \sum_{k=1}^n y_{ijk} & \text{se } t = i \end{cases} \quad \forall (i,j) \in \tilde{R}, \quad t = 1, \dots, l \quad (4.16)$$

$$x_{I,(3,t)}^1 = 0 \quad \forall I \in \tilde{R} \quad t = 1, \dots, m \quad (4.17)$$

$$x_{I,(1,t)}^2 = 0 \quad \forall I \in \tilde{R} \quad t = 1, \dots, n \quad (4.18)$$

$$x_{(i,j),(2,t)}^2 = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq i \\ \sum_{k=1}^n y_{ijk} & \text{se } t = i \end{cases} \quad \forall (i,j) \in \tilde{R}, \quad t = 1, \dots, l \quad (4.19)$$

$$x_{(i,j),(3,t)}^2 = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq j \\ U - \sum_{k=1}^n y_{ijk} & \text{se } t = j \end{cases} \quad \forall I \in \tilde{R} \quad t = 1, \dots, m \quad (4.20)$$

Da queste formule per le componenti di x è facile verificare che i vincoli (4.13) e (4.14), ovvero $x_{I,J}^1, x_{I,J}^2 \geq 0 \quad \forall I, J$, risultino soddisfatti dal punto x , dato che abbiamo scelto U affinché si abbia

$$U \geq \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n y_{ijk} \quad \forall y = [y_{ijk}] \in \underline{T}$$

Dimostriamo che i vincoli (4.6) sono verificati usando (4.4):

$$x_{(i,j),(1,t)}^1 + x_{(i,j),(1,t)}^2 = y_{ijt} + 0 \leq e_{ijt} \quad \forall i, j, t$$

Verifichiamo i vincoli (4.7):

$$\text{se } t \neq i, \quad x_{(i,j),(2,t)}^1 + x_{(i,j),(2,t)}^2 = 0 + 0 \leq 0 \quad \forall i, j$$

$$\text{se } t = i, \quad x_{(i,j),(2,i)}^1 + x_{(i,j),(2,i)}^2 = U - \sum_{k=1}^n y_{ijk} + \sum_{k=1}^n y_{ijk} = U \leq U \quad \forall i, j$$

Dimostriamo che x soddisfa i vincoli (4.8):

$$\text{se } t \neq j, \quad x_{(i,j),(3,t)}^1 + x_{(i,j),(3,t)}^2 = 0 + 0 \leq 0 \quad \forall i, j, t$$

$$\text{se } t = j, \quad x_{(i,j),(3,j)}^1 + x_{(i,j),(3,j)}^2 = 0 + U - \sum_{k=1}^n y_{ijk} \leq U \quad \forall i, j$$

Verifichiamo i vincoli (4.9):

$$\sum_{J \in \tilde{C}} x_{(i,j),J}^1 = \sum_{t=1}^n x_{(i,j),(1,t)}^1 + \sum_{t=1}^l x_{(i,j),(2,t)}^1 + \sum_{t=1}^m x_{(i,j),(3,t)}^1 = \sum_{t=1}^n y_{ijt} + x_{(i,j),(2,i)}^1 + 0 = \sum_{t=1}^n y_{ijt} + U - \sum_{t=1}^n y_{ijt} = U$$

Dimostriamo che i vincoli (4.10) sono soddisfatti da x :

$$\sum_{J \in \tilde{C}} x_{(i,j),J}^2 = \sum_{t=1}^n x_{(i,j),(1,t)}^2 + \sum_{t=1}^l x_{(i,j),(2,t)}^2 + \sum_{t=1}^m x_{(i,j),(3,t)}^2 = 0 + x_{(i,j),(2,i)}^2 + x_{(i,j),(3,j)}^2 = 0 + \sum_{k=1}^n y_{ijk} + U - \sum_{k=1}^n y_{ijk} = U$$

Effettuiamo la verifica dei vincoli (4.11), usando (4.1) e (4.3):

$$\text{se } s = 1 \text{ abbiamo } \sum_{(i,j) \in \tilde{R}} x_{(i,j),(1,t)}^1 = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m y_{ijt} = w_t \quad \forall t$$

$$\text{se } s = 2 \text{ abbiamo } \sum_{(i,j) \in \tilde{R}} x_{(i,j),(2,t)}^1 = \sum_{j=1}^m x_{(t,j),(2,t)}^1 = \sum_{j=1}^m (U - \sum_{k=1}^n y_{tjk}) =$$

$$m \cdot U - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n y_{tjk} = m \cdot U - u_t \quad \forall t$$

$$\text{se } s = 3 \text{ si ha } \sum_{I \in \tilde{R}} x_{I,(3,t)}^1 = 0$$

Verifichiamo i vincoli (4.12), usando (4.1) e (4.2):

$$\text{se } s = 1 \text{ abbiamo } \sum_{(i,j) \in \tilde{R}} x_{(i,j),(1,t)}^2 = 0$$

$$\text{se } s = 2 \text{ si ha } \sum_{(i,j) \in \tilde{R}} x_{(i,j),(2,t)}^2 = \sum_{j=1}^m x_{(t,j),(2,t)}^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n y_{tjk} = u_t \quad \forall t$$

$$\text{se } s = 3 \text{ si ha } \sum_{(i,j) \in \tilde{R}} x_{(i,j),(3,t)}^2 = \sum_{i=1}^l x_{(i,t),(3,t)}^2 = \sum_{i=1}^l (U - \sum_{k=1}^n y_{itk}) = l \cdot U - \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^n y_{itk} = l \cdot U - v_t \quad \forall t$$

Ora effettuiamo la costruzione inversa: sia $x = (x^1, x^2) \in F \subset \mathbb{R}^{r \times c} \times \mathbb{R}^{r \times c}$; ad x associamo un punto $y \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$ ponendo

$$y_{ijk} := x_{(i,j),(1,k)}^1 \quad i = 1, \dots, l \quad j = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, n$$

Dimostriamo che il punto y soddisfa i vincoli (4.1)-(4.5).

Poichè $x_{I,J}^1 \geq 0 \quad \forall I, J$ per i vincoli (4.13), possiamo dedurre che

$$y_{ijk} \geq 0 \quad i = 1, \dots, l \quad j = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, n$$

Pertanto i vincoli (4.5) risultano soddisfatti dal punto y .

Consideriamo la seguente somma

$$A := \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n y_{ijk}$$

Da (4.19) abbiamo che $x_{(i,j),(2,i)}^2 = \sum_{k=1}^n y_{ijk}$, pertanto si ha

$$A = \sum_{j=1}^m x_{(i,j),(2,i)}^2$$

Dato che per (4.19) si ha $x_{(i,j),(2,t)}^2 = 0$ se $t \neq i$, dal vincolo (4.12) si ottiene che

$$\sum_{(i,j) \in \tilde{R}} x_{(i,j),(2,t)}^2 = \sum_{j=1}^m x_{(t,j),(2,t)}^2 = u_t$$

per cui deduciamo che i vincoli (4.1) sono soddisfatti, ovvero

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n y_{ijk} = A = u_i \quad i = 1, \dots, l$$

Consideriamo ora

$$B := \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^n y_{ijk}$$

Da (4.20) abbiamo che $\sum_{k=1}^n y_{ijk} = U - x_{(i,j),(3,j)}^2$ per cui otteniamo

$$B = \sum_{i=1}^l (U - x_{(i,j),(3,j)}^2) = l \cdot U - \sum_{i=1}^l x_{(i,j),(3,j)}^2$$

Sapendo da (4.20) che $x_{(i,j),(3,t)}^2 = 0$ se $t \neq j$, dal vincolo (4.12) ricaviamo che

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m x_{(i,j),(3,t)}^2 = \sum_{i=1}^l x_{(i,t),(3,t)}^2 = l \cdot U - v_t$$

per cui

$$B = l \cdot U - \sum_{i=1}^l x_{(i,j),(3,j)}^2 = l \cdot U - l \cdot U + v_j = v_j \quad j = 1, \dots, m$$

In questo modo abbiamo verificato che i vincoli (4.2) sono soddisfatti da y .

Calcoliamo la somma

$$C := \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m y_{ijk}$$

Utilizzando i vincoli (4.11) si deduce immediatamente che

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m y_{ijk} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m x_{(i,j),(1,k)}^1 = w_k \quad k = 1, \dots, n$$

Pertanto i vincoli (4.3) sono soddisfatti dal punto y .

Dai vincoli (4.6), soddisfatti da x , si ha

$$x_{(i,j),(1,t)}^1 + x_{(i,j),(1,t)}^2 \leq e_{ijt}$$

Poichè $y_{ijt} = x_{(i,j),(1,t)}^1$ e $x_{(i,j),(1,t)}^2 = 0$ da (4.18), si deduce che

$$y_{ijt} \leq e_{ijt} \quad i = 1, \dots, l \quad j = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, n$$

Abbiamo quindi verificato che y soddisfa anche i vincoli (4.4).

La procedura alla quale fa riferimento il teorema 4.1, che permette di trasformare un qualsiasi politopo razionale in un politopo di bitrasporto, ci garantisce anche la possibilità di generare automaticamente politopi di bitrasporto caratterizzati da vettori *disponibilità* s^1, s^2 , vettori *capacità* d^1, d^2 e matrice *capacità* $u = [u_{ij}]$ interi, nei quali qualunque bitrasporto ammissibile può avere un denominatore prescritto arbitrariamente grande. Riportiamo ora un esempio [1] di tale osservazione.

Fissiamo arbitrariamente un intero positivo q , consideriamo il politopo razionale $P = \{y \in \mathbb{R}_{\geq 0} : qy = 1\}$ contenente un unico punto $y = \frac{1}{q}$. Il teorema (4.1) e la procedura da esso implicata, ci permette di rappresentare P come un politopo di bitrasporto $F \subset \mathbb{R}^{r \times c} \times \mathbb{R}^{r \times c}$ caratterizzato dai vettori interi $s^1, s^2 \in \mathbb{Z}^r$, $d^1, d^2 \in \mathbb{Z}^c$ e da una matrice intera $u \in \mathbb{Z}^{r \times c}$. Come già osservato in precedenza, possiamo immaginare che i punti di F siano in corrispondenza con i flussi a due merci di costo massimo in una rete bipartita, dove da un lato della bipartizione si hanno vertici appartenenti all'insieme $\{1, \dots, r\}$, rappresentanti dei magazzini, e dall'altro lato vertici che appartengono all'insieme $\{1, \dots, c\}$ che rappresentano i negozi. Per l'equivalenza tra P e F , possiamo identificare la variabile y di P con la variabile $x_{1,1}^1$ di F , indicatrice del flusso della prima merce che viaggia dal vertice-*magazzino* $1 \in \{1, \dots, r\}$ al vertice-*negozio* $1 \in \{1, \dots, c\}$. Dato che P contiene un unico punto ammissibile, anche F conterrà un solo bitrasporto x tale che $x_{1,1}^1 = y = \frac{1}{q}$.

Ad esempio, se $q = 3$, $P = \{y \in \mathbb{R}_{\geq 0} : 3y = 1\}$ è equivalente al politopo di bitrasporto $F \subset \mathbb{R}^{6 \times 8} \times \mathbb{R}^{6 \times 8}$ con i seguenti dati:

$$\mathbb{R}^{6 \times 8} \ni u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^6 \ni s^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^6 \ni s^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^8 \ni d^1 = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0)^T \quad \mathbb{R}^8 \ni d^2 = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1)^T$$

Tale politopo di bitrasporto contiene come unico punto ammissibile il se-

guente bitrasporto a valori in $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$:

$$x^1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x^2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Capitolo 5

Conseguenze del teorema

Ci proponiamo ora di discutere alcune tra le principali conseguenze del teorema principale di questa trattazione:

Teorema 5.1 (J. A. De Loera, S. Onn, [1]). *Ogni politopo razionale $P = \{y \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : Ay = b\}$ è rappresentabile in tempo polinomiale come un politopo di trasporto tridimensionale planare sottile*

$$T = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times c \times 3} : \sum_{i \in R} x_{ijk} = a_{jk}, \sum_{j \in C} x_{ijk} = b_{ik}, \sum_{k=1}^3 x_{ijk} = f_{ij}\}$$

5.1 Non sufficienza delle condizioni di Smith II

Come già accennato nell'introduzione, tale teorema, dal quale si deduce che i politopi di trasporto, i cui punti ammissibili sono matrici di dimensione $r \times c \times 3$, sono universali e includono tutti i politopi razionali, ci permette di attribuire una risposta negativa al quesito posto da Vlach [2] relativo alla sufficienza del secondo gruppo di condizioni di Smith [11] per l'ammissibilità di un politopo di trasporto planare $T(A, B, F)$. Si può dimostrare infatti che queste ultime non sono sufficienti a garantire che $T(A, B, F)$ sia non vuoto tramite un esempio, dovuto ai matematici Jesús A. De Loera e Shmuel Onn [1], che ora riportiamo.

Consideriamo il poliedro inammissibile $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} : x + y = 1, x + y = 2\}$, l'applicazione a P dell'algoritmo al quale fa riferimento il teorema ci permette di ottenere un politopo di trasporto tridimensionale planare $T(A, B, F) \in \mathbb{R}^{12 \times 11 \times 3}$ descritto dalle seguenti matrici:

$$\mathbb{R}^{11 \times 3} \ni A = [a_{jk}] = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^{12 \times 3} \ni B = [b_{ik}] = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^{12 \times 11} \ni F = [f_{ij}] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Considerando il fatto che il poliedro $T(A, B, F)$ è vuoto, in quanto polinomialmente equivalente ad un politopo inammissibile, e che è possibile dimostrare che le matrici $A \in \mathbb{R}^{11 \times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{12 \times 3}$ e $F \in \mathbb{R}^{12 \times 11}$ sono tali da soddisfare il secondo gruppo di condizioni di Smith, possiamo affermare di aver esibito un controesempio alla sufficienza di quest'ultime.

5.2 Universalità delle approssimazioni

La seconda conseguenza che riportiamo del teorema sopracitato è anche detta *universalità delle approssimazioni* [1]. Prendiamo in considerazione un arbitrario politopo razionale $P = \{y \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : Ay = b\}$, grazie al nostro risultato sappiamo che P è equivalente in tempo polinomiale al politopo

$$T = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times c \times 3} : \sum_{i=1}^r x_{ijk} = a_{jk}, \sum_{j=1}^c x_{ijk} = b_{ik}, \sum_{k=1}^d x_{ijk} = c_{ij}\}$$

Sia $c \in \mathbb{R}^n$, il teorema ci permette di rappresentare un arbitrario programma di programmazione lineare intera che presenta P come regione ammissibile:

$$\min c \cdot y$$

$$\text{s.a } y \in P$$

$$y \in \mathbb{N}^n$$

in un problema che consiste nel trovare il trasporto¹ di costo minimo tra i punti di T , ovvero

$$\min \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \sum_{k=1}^d p_{ijk} x_{ijk}$$

$$\text{s.a } X = [x_{ijk}] \in T$$

$$X \in \mathbb{N}^{r \times c \times 3}$$

La matrice $P = [p_{ijk}] \in \mathbb{R}^{r \times c \times 3}$ rappresenta la matrice *dei costi* e si ottiene semplicemente estendendo il vettore c mediante l'aggiunta di componenti nulle nel modo che ora descriveremo.

Dato che P è equivalente a T esiste una mappa iniettiva tra gli insiemi di variabili dei due politopi, $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, r \cdot c \cdot 3\}$, tale da identificare ogni variabile di P in una di T . Sia x_{ijk} una variabile di T , se esiste $\tilde{l} \in \{1, \dots, n\}$ tale che x_{ijk} corrisponde alla variabile $y_{\tilde{l}}$ di P , allora poniamo $p_{ijk} := c_{\tilde{l}}$, altrimenti si pone $p_{ijk} = 0$.

Possiamo affermare che ogni soluzione ammissibile (intera) del problema originario si trova in biezione con ogni soluzione ammissibile (intera) x del secondo problema. Si dice che tale mappa biettiva conserva i costi in quanto se $y \in P$ è in biezione con $x \in T$ necessariamente si ha $c \cdot y = p \cdot x$.

Tale osservazione ci permette di concludere che la rappresentazione appena descritta del problema originario preserva le *approssimazioni* di esso e che i problemi che consistono nel trovare i trasporti interi di costo minimo tra le soluzioni ammissibili di dimensioni $(r, c, 3)$ sono universali perchè includono tutti i programmi interi con regione ammissibile politopi razionali.

Si ricorda, come è riportato in [3], che i problemi di programmazione lineare intera sono spesso molto più complessi da risolvere rispetto a quelli di programmazione lineare, pertanto sono state sviluppate varie tecniche risolutive, nessuna delle quali può essere considerata superiore rispetto alle altre, ma a seconda delle caratteristiche specifiche del problema che si vuole

¹Le soluzioni ammissibili di programmi lineari caratterizzati da politopi di trasporto come regioni ammissibili vengono dette *trasporti*.

risolvere, una strategia può risultare migliore delle altre. Alcuni di questi metodi di risoluzione, come ad esempio l'algoritmo di *branch and bound* o algoritmi di tipo poliedrale che utilizzano piani di taglio, prevedono durante la loro applicazione la risoluzione del rilassamento lineare di problemi interi. Il rilassamento lineare si ottiene semplicemente tralasciando i vincoli di interezza delle variabili e costituisce così un programma lineare che può essere risolto in modo più efficace e veloce: pertanto esso fornisce un'approssimazione di un problema intero, anche se in molti casi "non buona", dato che il valore ottimo del rilassamento lineare può essere arbitrariamente distante dal valore ottimo del programma intero di partenza. Ritornando alla discussione della seconda conseguenza del teorema principale di questa tesi, dato che esiste una biezione tra le soluzioni ammissibili del politopo razionale P e il politopo di trasporto tridimensionale planare sottile T e che tale corrispondenza biunivoca sussiste anche tra i punti interi dei due poliedri, possiamo affermare che per risolvere il problema originario si possono applicare i diversi metodi risolutivi di programmazione lineare intera, anche quelli che fanno uso ripetuto del rilassamento lineare, direttamente al problema di trasporto di costo minimo ad esso associato.

5.3 Esistenza di un politopo di trasporto tridimensionale razionalmente non vuoto con nessun punto intero

La terza conseguenza del teorema considerato è la costruzione di un esempio, trovato dal matematico Vlach [1], di un politopo di trasporto tridimensionale razionalmente non vuoto che al suo interno non contiene nessun punto intero.

Consideriamo il politopo razionale $P = \{y \in R_{\geq 0} : 2y = 1\}$, poliedro che contiene un unico punto ammissibile razionale $y = \frac{1}{2}$ e nessun punto intero. Tramite la costruzione implementata dal teorema, P è rappresentabile come un politopo di trasporto tridimensionale planare sottile $T = T(A, B, F) \in \mathbb{R}^{6 \times 4 \times 3}$, definito dalle seguenti matrici:

$$\mathbb{R}^{4 \times 3} \ni A = [a_{jk}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^{6 \times 3} \ni B = [b_{ik}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^{6 \times 4} \ni F = [f_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dato che T è equivalente al politopo P , possiamo concludere che esso è costituito da un unico punto ammissibile $X = [x_{ijk}] \in \mathbb{Q}^{6 \times 4 \times 3}$ e che l'insieme di punti $T \cap \mathbb{Z}^{6 \times 4 \times 3}$ è uguale all'insieme vuoto. Calcolando il valore delle componenti del punto $X = [x_{ijk}] \in T$ si ottiene:

$$\mathbb{Q}^{6 \times 4} \ni x_{ij1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbb{Q}^{6 \times 4} \ni x_{ij2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{Q}^{6 \times 4} \ni x_{ij3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Riportiamo ora i vincoli che devono essere soddisfatti da un punto $X = [x_{ijk}] \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times c \times d}$ per appartenere ad un politopo di trasporto planare $T(A, B, F)$:

$$\sum_{i=1}^r x_{ijk} = a_{jk} \quad j = 1, \dots, c \quad k = 1, \dots, d$$

$$\sum_{j=1}^c x_{ijk} = b_{ik} \quad i = 1, \dots, r \quad k = 1, \dots, d$$

$$\sum_{k=1}^d x_{ijk} = f_{ij} \quad i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, c$$

Tale sistema può essere scritto in forma matriciale nel seguente modo:

$$M \cdot x = d$$

con $M \in \mathbb{R}^{(c \cdot d + r \cdot d + r \cdot c) \times (r \times c \times d)}$, il vettore $d \in \mathbb{R}^{(cd+r \cdot d+r \cdot c)}$ e $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times c \times d}$. Ad esempio possiamo supporre che le componenti di X siano ordinate nel

vettore x in questo modo:

$$x = (x_{111}, \dots, x_{11d}, x_{121}, \dots, x_{12d}, \dots, x_{1cd}, x_{211}, \dots, x_{21d}, x_{221}, \dots, x_{2cd}, \dots, x_{rcd})$$

e che il vettore d presenti come prime $c \cdot d$ componenti le entrate della matrice $A \in \mathbb{R}^{c \times d}$ e che le rimanenti possano essere divise sequenzialmente in due gruppi di cardinalità $r \cdot d$ e $r \cdot c$, che rispettivamente corrispondono alle entrate delle matrici $B \in \mathbb{R}^{r \times d}$ e $F \in \mathbb{R}^{r \times c}$:

$$d = (a_{11}, \dots, a_{13}, a_{21}, \dots, a_{cd}, b_{11}, b_{12}, \dots, b_{21}, \dots, b_{rd}, f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1c}, f_{21}, \dots, f_{rc})$$

L'esistenza di un politopo di trasporto tridimensionale planare razionalmente non vuoto ma con nessun punto ammissibile intero, definito da matrici A , B e F intere, poteva essere dedotta dal fatto che, come si afferma in [2], ogni volta che $\min(r, c, d) \geq 2$ la matrice M non è totalmente modulare e quindi per possibili scelte intere delle matrici A , B e F è possibile costruire un esempio di tale poliedro: sappiamo infatti che vale in seguente teorema [13]:

Teorema 5.2. *Siano $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matrice totalmente unimodulare e $h \in \mathbb{R}^m$ un vettore intero. Allora tutte le soluzioni di base del sistema*

$$\begin{aligned} G \cdot x &= h \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

sono intere.

Da questo teorema deduciamo che se la matrice M fosse totalmente unimodulare per ogni r , c e d e per ogni scelta delle matrici intere A , B e F allora si avrebbero due possibilità: o $T(A, B, F)$ contiene almeno un punto intero oppure $T(A, B, F)$ è l'insieme vuoto.

5.4 Cenni di Teoria della complessità computazionale

La quarta conseguenza del teorema principale che vogliamo analizzare è strettamente legata al tredicesimo problema di Vlack in [2], nel quale si richiede di caratterizzare le matrici A , B e F affinché il politopo di trasporto tridimensionale planare $T(A, B, F)$ contenga un punto intero. Prima di entrare nei dettagli, riportiamo brevemente alcuni cenni relativi alla teoria della complessità computazionale di algoritmi e alle classi di problemi decisionali P , NP e NP -completi che possono essere approfonditi dal lettore in [13].

Il primo passo che si compie quando si parla di complessità computazionale è quello di assumere di considerare problemi i cui dati sono numeri razionali, in quanto non è possibile in un calcolatore rappresentare numeri reali arbitrari.

In secondo luogo si introduce la distinzione tra problemi e istanze: i primi, in generale, sono espressi come quesiti in cui possibilmente e comunemente appaiono parametri. Quando a tali parametri vengono assegnati valori specifici si ottiene un'istanza del problema: possiamo dunque affermare che un problema è un insieme di istanze, una per ogni possibile scelta dei dati.

Introduciamo ora la definizione di algoritmo per un problema: esso è una sequenza di operazioni che, eseguite su una qualunque istanza del problema, portano alla corretta soluzione.

Dati un problema X e un algoritmo A per X , per ogni istanza $I \in X$, indichiamo con $\text{time}(A, I)$ il numero di operazioni necessarie alla completa esecuzione dell'algoritmo A sull'istanza I . Formalmente, definiamo la grandezza di un'istanza I , e la indichiamo con $\text{size}(I)$, il numero di bit necessario per codificare e rappresentare I in un calcolatore.

Si dice che A è un algoritmo *polinomiale* per X se esiste un polinomio p in una variabile tale che per ogni istanza $I \in X$ si ha $\text{time}(A, I) \leq p(\text{size}(I))$.

Ora disponiamo di tutti gli ingredienti per definire cosa sia un problema decisionale e introdurre le classi P e NP .

Un problema decisionale è un problema in cui, data un'istanza, si chiede di rispondere *sì* o *no*, ovvero è una coppia (X, Y) , dove X è una famiglia di istanze e $Y \subseteq X$ è l'insieme delle istanze con risposta *sì*, nel quale si chiede di decidere, data un'istanza $I \in X$, se $I \in Y$ oppure no.

Indichiamo con P la classe di tutti i problemi decisionali che ammettono un algoritmo polinomiale per la loro risoluzione e con NP la classe di problemi decisionali (X, Y) tali che, data una qualunque istanza $I \in Y$, esiste un certificato controllabile in tempo polinomiale che permette di verificare che $I \in Y$. Va sottolineata la differenza esistente nella definizione delle due classi, mentre per un problema di tipo P deve esistere un algoritmo polinomiale in grado di risolverlo, per un problema di tipo NP è richiesta l'esistenza di un certificato in grado di verificare che una qualsiasi istanza in Y abbia risposta *sì*, ma non è detto che tale certificato debba essere trovato in tempo polinomiale: quando questo è possibile, il problema NP appartiene alla classe P . È facile comprendere che un problema di tipo P è anche di tipo NP , ovvero che $P \subseteq NP$; infatti se un problema è di tipo P , lo stesso algoritmo polinomiale utilizzato per risolverlo può essere usato anche come algoritmo di verifica per le istanze con risposta *sì*. Non è stato ancora dimostrato, invece, se $P \subset NP$ e quindi se $P \neq NP$ oppure $P = NP$.

La teoria sviluppata sulla complessità computazionale ha consentito di introdurre ulteriori definizioni e classificazioni e di individuare una particolare classe di problemi noti come NP -completi. Per definire tale classe è

necessario introdurre il concetto di *riducibilità*:

Definizione 5.1. Dati due problemi decisionali (X, Y) e (X', Y') , si dice che (X, Y) si *riduce* a (X', Y') se esiste una funzione $f : X \rightarrow X'$ tale che :

- per ogni istanza $I \in X$, l'istanza $f(I)$ può essere costruita a partire da I in un numero di operazioni polinomiale in $\text{size}(I)$, ovvero $\text{size}(f(I))$ è polinomiale in $\text{size}(I)$;
- $f(I) \in Y'$ se e solo se $I \in Y$.

Un problema decisionale è detto *NP-completo* se appartiene ad *NP* ed ogni problema in *NP* si riduce ad esso. In altri termini, i problemi *NP-completi* rappresentano un sottoinsieme dei problemi *NP più difficili*, dal momento che tutti i problemi della classe *NP* (inclusi quelli *NP-completi*) sono riducibili in tempo polinomiale ad uno qualsiasi di essi. La possibilità di ridurre tutti i problemi *NP* in un qualsiasi problema *NP-completo* comporta che, nel caso si individuasse un algoritmo polinomiale per risolvere un problema *NP-completo*, tutti i problemi in *NP* sarebbero risolvibili in tempo polinomiale e si avrebbe, quindi, che $P = NP$.

5.4.1 Esempio 1

Focalizziamoci sul seguente problema decisionale:

Dati una matrice $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ ed un vettore $b \in \mathbb{Q}^m$, decidere se esiste $x \in \mathbb{Q}^n$ tale che $Ax = b$.

Tale problema appartiene alla classe *NP* perchè quando la risposta è *sì*, ovvero nella situazione in cui il sistema $Ax = b$ ammette una soluzione ammissibile, questo può essere dimostrato esibendo una particolare \bar{x} tale che $A\bar{x} = b$, ed in questo caso il certificato è \bar{x} . Possiamo affermare che il problema è in *NP* perchè se il sistema ammette una soluzione, allora esiste una soluzione \tilde{x} tale che $\text{size}(\tilde{x})$ è polinomiale nella grandezza dell'istanza data, si veda [13]. In realtà tale problema appartiene alla classe *P* perchè esistono algoritmi polinomiali (ad esempio l'eliminazione di Gauss) per decidere se un sistema di equazioni lineari ha soluzione.

5.4.2 Esempio 2

Consideriamo un arbitrario politopo razionale $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ con $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{Q}^m$. Consideriamo il seguente problema decisionale:

Decidere se esiste $x \in \mathbb{Z}^n$ tale che $Ax \leq b$.

Anche questo problema per le stesse ragioni del precedente, appartiene alla classe NP e nel caso in cui il sistema $Ax \leq b$ ammetta una soluzione intera, allora esiste una soluzione intera \bar{x} tale che $\text{size}(\bar{x})$ è polinomiale nella grandezza dell'istanza data. A differenza del caso precedente non è possibile stabilire attualmente se tale problema appartenga anche alla classe P perchè nonostante esista un certificato controllabile in tempo polinomiale, non si riesce a trovare tale certificato in tempo polinomiale.

5.5 È possibile decidere in tempo polinomiale se un politopo di trasporto tridimensionale contiene un punto intero?

Dopo questo breve riassunto sulle nozioni di teoria della complessità computazionale funzionali ai nostri scopi, concentriamoci sulla quarta conseguenza del teorema principale di questa tesi [1], la quale può essere formulata nel seguente corollario:

Corollario 1. *Decidere se un politopo di trasporto tridimensionale planare sottile $T \subset \mathbb{R}^{r \times c \times 3}$ ha un punto intero è un problema decisionale NP -completo.*

Se per assurdo fosse possibile in tempo polinomiale decidere se un politopo di trasporto tridimensionale planare sottile contenga o no al proprio interno un punto intero, allora, grazie all'equivalenza tra tali poliedri e i politopi razionali, esisterebbe un algoritmo polinomiale che ci permette di capire se un arbitrario politopo razionale abbia oppure no al suo interno una soluzione ammissibile intera. Affermando questo si ottiene però una contraddizione con quanto detto relativamente al secondo esempio di problema decisionale fornito nella sezione precedente: quest'ultimo, infatti, è NP -completo.

Capitolo 6

Riflessioni sull'equivalenza tra politopi razionali e politopi di trasporto tridimensionali

6.1 Il caso intero misto

Nel capitolo precedente abbiamo menzionato, come conseguenza della rappresentazione in tempo polinomiale di un qualsiasi politopo razionale come un politopo di trasporto tridimensionale planare, il fatto che è sempre possibile ricondurre un problema di programmazione lineare intera definito sul primo ad un problema intero con regione ammissibile il secondo. Ci chiediamo ora se ciò è possibile anche quando i vincoli di interezza non sono richiesti su tutte le variabili ma devono essere soddisfatti da un loro sottoinsieme. La risposta è affermativa. Abbiamo già osservato che la costruzione implementata nella dimostrazione del teorema preserva l'interezza delle variabili in entrambe le direzioni e sappiamo che affermare che un politopo razionale P è equivalente a un politopo di trasporto tridimensionale T implica l'esistenza di una mappa iniettiva tra gli insiemi delle variabili dei due politopi tale da identificare ogni variabile di P con una di T . Pertanto se supponiamo che nella formulazione di P ci siano vincoli di interezza imposti su un sottoinsieme di variabili, a tali vincoli possiamo aggiungere al sistema che definisce T le richieste di interezza delle variabili di T in corrispondenza delle variabili di P a cui è richiesto di essere intere. Possiamo quindi affermare che esiste una corrispondenza biunivoca tra le soluzioni intere miste ammissibili di un problema formulato su P e quelle intere miste associate ad un programma definito su T .

6.2 Il ruolo della razionalità nel caso continuo

Il teorema principale stabilisce che i politopi *razionali*, ovvero del tipo $P = \{y \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : Ay = b\}$ con $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{Q}^m$, siano rappresentabili in tempo polinomiale come politopi di trasporto tridimensionali planari. Inoltre se supponiamo di moltiplicare ogni riga i -esima del sistema $Ax = b$ per il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni che appaiono come coefficienti nell'equazione considerata, possiamo supporre che il sistema $Ay = b$ abbia matrice e termine noto interi: tale formulazione costituisce il punto di partenza della dimostrazione della procedura con cui P può essere trasformato in un politopo di trasporto tridimensionale.

Analizzando nel dettaglio la costruzione implementata nella dimostrazione del teorema, si osserva che essa funziona anche se il politopo di partenza è definito da una matrice dei vincoli razionale e termine noto con componenti irrazionali, perchè in generale la matrici A , B e F o i vettori u , v e w , che contengono rispettivamente i termini noti dei vincoli di un politopo di trasporto tridimensionale planare o assiale, sono supposti essere a valori reali e non necessariamente razionali. Sorge quindi spontanea la seguente domanda: l'ipotesi di razionalità di P è essenziale affinché il politopo P sia equivalente ad un politopo di trasporto tridimensionale?

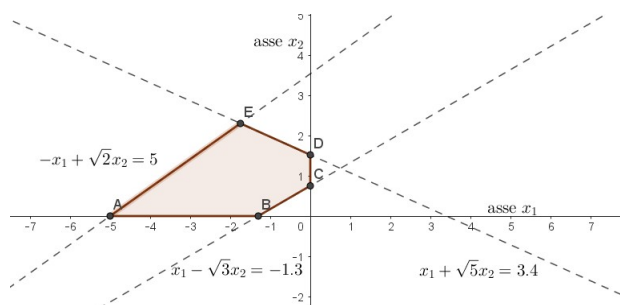
Sappiamo che i politopi di trasporto tridimensionali sono poliedri caratterizzati dalla matrice dei vincoli che li definisce razionale, dato che essa ha coefficienti in $\{0, 1\}$. Mostriamo ora, tramite un esempio, l'esistenza di politopi irrazionali tali che nessuna trasformazione lineare è in grado di mapparli in poliedri definiti da un sistema di vincoli con matrice razionale e grazie a questa osservazione è possibile attribuire alla domanda posta una risposta negativa.

6.2.1 Esempio 1

Consideriamo il politopo irrazionale $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \leq b\}$ descritto da:

$$\mathbb{R}^{5 \times 2} \ni A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^5 \ni b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ -1.3 \\ 3.4 \end{pmatrix}$$

Il politopo P è non vuoto ed è rappresentato nella seguente figura:



Sia σ una trasformazione lineare che determina un vettore $y \in \mathbb{R}^2$ di nuove variabili:

$$y = Tx, \text{ con } T \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ matrice di rappresentazione di } \sigma.$$

Supponiamo che $\det(T) \neq 0$, possiamo definire la matrice M inversa di T :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Si ha $x = My$ e P viene mappato tramite σ in $\tilde{P} = \{y \in \mathbb{R}^n : AMy \leq b\}$. L'obiettivo che ci proponiamo consiste nel dimostrare che non esiste nessuna trasformazione lineare in grado di mappare il poliedro P in un poliedro descritto da un sistema di vincoli con matrice razionale, ovvero, che, per ogni trasformazione lineare σ , la matrice prodotto AM che definisce \tilde{P} non solo non è razionale, ma non ammette neppure riscalamenti di righe che la possano rendere razionale.

A tal proposito introduciamo la seguente relazione di equivalenza definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \alpha \sim \beta \iff \exists q \in \mathbb{Q} \text{ tale che } \alpha = q\beta$$

Questa relazione di equivalenza ci permette di interpretare $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ come l'unione di classi di equivalenza e di affermare che due numeri reali non nulli appartengano alla stessa classe di equivalenza se e solo se sono l'uno un multiplo razionale dell'altro.

Supponiamo per assurdo che la trasformazione lineare σ precedentemente introdotta sia tale che la matrice prodotto AM possa, effettuando opportuni riscalamenti di righe, essere razionale. Esplicitiamo la matrice prodotto AM :

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ -a + c\sqrt{2} & -b + d\sqrt{2} \\ a - c\sqrt{3} & b - d\sqrt{3} \\ a + c\sqrt{5} & b + d\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Prima di procedere con la nostra discussione osserviamo che:

- non è possibile che i termini a e b (c e d) siano entrambi nulli altrimenti la matrice M ha la prima (seconda) riga nulla e quindi non può costituire l'inversa di una matrice T . Da questo momento in poi supponiamo che b e d siano diversi da zero;
- i termini $-a + c\sqrt{2}$ e $-b + d\sqrt{2}$ non possono essere entrambi nulli altrimenti si avrebbe $a = c\sqrt{2}$ e $b = d\sqrt{2}$ e quindi la matrice M presenterebbe due righe linearmente dipendenti, pertanto non risulterebbe invertibile.

Distinguiamo tre casi:

- **caso 1:** $-b + d\sqrt{2} \neq 0$, $-a + c\sqrt{2} \neq 0$
- **caso 2:** $-b + d\sqrt{2} \neq 0$, $-a + c\sqrt{2} = 0$;
- **caso 3:** $-b + d\sqrt{2} = 0$, $-a + c\sqrt{2} \neq 0$.

Nel **caso 1** sappiamo per ipotesi che la prima, la seconda e la terza riga della matrice AM si possono riscrivere in modo da diventare razionali, pertanto possiamo scrivere:

$$\frac{a}{b} = q_1, \quad \frac{c}{d} = q_2, \quad \frac{-a + c\sqrt{2}}{-b + d\sqrt{2}} = q_3, \quad \text{con } q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Q} \quad (6.1)$$

Ipotizziamo che a e c siano non nulli e supponiamo che $a \notin c\sqrt{2}\mathbb{Q}$, ovvero a e $c\sqrt{2}$ non appartengono alla stessa classe di equivalenza. Da (6.1) deduciamo che

$$d = \frac{c}{q_2}, \quad b = \frac{1}{q_1}a \quad (6.2)$$

Utilizzando (6.2) e (6.1) possiamo scrivere:

$$-a + c\sqrt{2} = q_3(-b + d\sqrt{2}) = -\frac{q_3}{q_1}a + \frac{q_3}{q_2}c\sqrt{2}$$

da cui si ha:

$$\left(-1 + \frac{q_3}{q_1}\right)a = \left(-1 + \frac{q_3}{q_2}\right)c\sqrt{2} \quad (6.3)$$

dove $\left(-1 + \frac{q_3}{q_1}\right)$ e $\left(-1 + \frac{q_3}{q_2}\right)$ sono razionali. Notiamo che (6.3) è un'uguaglianza tra due numeri appartenenti a due classi di equivalenza diverse e dato che l'insieme delle classi di equivalenza costituisce una partizione dell'insieme $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ciò non risulta possibile. Deduciamo pertanto che nel **caso 1** i numeri a e $c\sqrt{2}$ devono appartenere alla stessa classe di equivalenza e quindi essere l'uno un multiplo razionale dell'altro.

Nel **caso 2** supponiamo che $-a + c\sqrt{2} = 0$, allora $a = c\sqrt{2}$, pertanto a e $c\sqrt{2}$ devono appartenere alla stessa classe di equivalenza.

Nel caso **caso 3** si suppone che $-b + d\sqrt{2} = 0$, ovvero che $b = d\sqrt{2}$, uguaglianza dalla quale si deduce che $(b, d\sqrt{2})$ è una coppia formata da numeri appartenenti alla stessa classe di equivalenza.

Dopo l'analisi dei tre casi possiamo dedurre che almeno una tra le coppie $(a, c\sqrt{2})$, $(b, d\sqrt{2})$ è formata da numeri che sono l'uno un multiplo razionale dell'altro.

Il ragionamento precedente può essere applicato sostituendo alla terza riga di AM la quarta oppure la quinta; riassumendo le osservazioni che si ricavano nel caso trattato e in questi casi menzionati, sempre sotto l'ipotesi che a e c siano non nulli, possiamo affermare che:

1. almeno una tra le coppie di numeri $(a, c\sqrt{2})$ e $(b, d\sqrt{2})$ è formata da numeri che appartengono alla stessa classe di equivalenza;
2. almeno una tra le coppie di numeri $(a, c\sqrt{3})$ e $(b, d\sqrt{3})$ è formata da numeri che appartengono alla stessa classe di equivalenza;
3. almeno una tra le coppie di numeri $(a, c\sqrt{5})$ e $(b, d\sqrt{5})$ è formata da numeri che appartengono alla stessa classe di equivalenza.

Le affermazioni precedentemente elencate portano ad una contraddizione, la quale ci permette di concludere che, nel caso in cui a e c siano entrambi non nulli, non esiste nessuna trasformazione lineare in grado di mappare il politopo P in un poliedro definito da un sistema di vincoli con matrice razionale.

Dall'affermazione 1 possiamo suddividere la nostra dimostrazione in due casi: a è multiplo razionale di $c\sqrt{2}$ o b è multiplo razionale di $d\sqrt{2}$.

Supponiamo che $(a, c\sqrt{2})$ sia formata da numeri che appartengono alla stessa classe di equivalenza, allora a non può essere un multiplo razionale di $c\sqrt{3}$, pertanto deduciamo dall'affermazione 2 che $(b, d\sqrt{3})$ è formata da numeri che appartengono alla stessa classe di equivalenza. Affermando che b sia un multiplo razionale di $d\sqrt{3}$ deduciamo che non può esserlo anche di $d\sqrt{5}$, pertanto, dall'affermazione 3, deduciamo che $(a, c\sqrt{5})$ è formata da numeri che appartengono alla stessa classe di equivalenza e questo porta ad una contraddizione: a non può essere contemporaneamente multiplo razionale di $c\sqrt{2}$ e $c\sqrt{5}$.

Supponiamo ora che sia $(b, d\sqrt{2})$ la coppia formata da numeri che appartengono alla stessa classe di equivalenza, allora b non può essere un multiplo razionale di $d\sqrt{3}$, quindi, dall'affermazione 2, deduciamo che $(a, c\sqrt{3})$ è costituita da numeri che appartengono alla stessa classe di equivalenza. Affermando che a è un multiplo razionale di $c\sqrt{3}$, deduciamo che non può esserlo anche di $c\sqrt{5}$, pertanto dall'affermazione 3, deduciamo che $(b, d\sqrt{5})$

è formata da numeri che appartengono alla stessa classe di equivalenza e questo porta ad una contraddizione: b non può essere contemporaneamente multiplo razionale di $d\sqrt{2}$ e $d\sqrt{5}$.

Ora per completare la dimostrazione ci manca lo studio, nel caso in cui $-b + d\sqrt{2}$ sia diverso da zero, della situazione in cui o a o c sia nullo: non possono essere entrambi nulli in quanto, altrimenti, la matrice M presenta una colonna nulla e non risulta più invertibile.

Se $-b + d\sqrt{2} \neq 0$, supponiamo che a sia nullo, allora, da (6.1) deduciamo:

$$d = \frac{1}{q_2}c, \quad c\sqrt{2} = (-b + d\sqrt{2})q_3$$

ovvero

$$c\sqrt{2} = -q_3b + \frac{q_3}{q_2}c\sqrt{2}$$

da cui otteniamo:

$$q_3b = (-1 + \frac{q_3}{q_2})c\sqrt{2} \quad (6.4)$$

Se supponiamo che $b \notin c\sqrt{2}\mathbb{Q}$ otteniamo una contraddizione in quanto (6.4) risulta essere un'uguaglianza tra numeri che appartengono a classi di equivalenza diverse. Deduciamo quindi che b deve essere un multiplo razionale di $c\sqrt{2}$.

Se noi applichiamo lo stesso ragionamento considerando la prima, la seconda e la quarta riga di AM deduciamo che b deve essere anche un multiplo razionale di $c\sqrt{3}$ ottenendo così una contraddizione: b non può appartenere contemporaneamente alle classi di equivalenza di $c\sqrt{2}$ e $c\sqrt{3}$.

Se $-b + d\sqrt{2} \neq 0$, supponiamo che $c = 0$, allora, da (6.1) deduciamo che

$$a = q_1b, \quad \frac{-a}{-b + d\sqrt{2}} = q_3$$

ovvero

$$-q_1b = -q_3b + q_3d\sqrt{2}$$

da cui otteniamo

$$(q_3 - q_1)b = q_3d\sqrt{2} \quad (6.5)$$

Se assumiamo che $b \notin d\sqrt{2}$ otteniamo una contraddizione in quanto (6.5) risulta essere un'uguaglianza tra numeri che appartengono a classi di equivalenza diverse, pertanto possiamo concludere che b deve essere un multiplo razionale di $d\sqrt{2}$.

Applicando un ragionamento analogo sostituendo la terza riga di AM con la quarta deduciamo che b deve anche essere un multiplo razionale di $d\sqrt{3}$, pertanto otteniamo una contraddizione in quanto b non può appartenere

contemporaneamente alla classe di equivalenza di $d\sqrt{2}$ e $d\sqrt{3}$.

Quindi abbiamo dimostrato che, anche nel caso in cui a o c sia nullo, non esiste nessuna trasformazione lineare in grado di mappare il politopo P in un poliedro descritto da un sistema di vincoli con matrice razionale.

6.3 Il ruolo della razionalità nel caso intero

Riflettiamo sull'esempio precedente dal quale abbiamo dedotto che un politopo irrazionale non è riscrivibile in generale con una matrice dei vincoli razionale e pertanto non è equivalente ad un politopo di trasporto tridimensionale: cosa possiamo dire relativamente ai suoi punti interi? È possibile modificare i vincoli che lo definiscono in modo da renderli razionali a primo membro e ottenere un politopo con gli stessi punti interi del poliedro originario? Se la risposta è affermativa possiamo concludere che i punti interi di un arbitrario politopo sono equivalenti a quelli di un politopo di trasporto tridimensionale.

Prima di inoltrarci nella discussione di tale quesito ricordiamo alcuni risultati relativi a un generico poliedro e riportati in [3].

Sia $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, definiamo

$$I^= := \{i \in \{1, \dots, m\} \mid a_i x = b_i \quad \forall x \in P\}$$

e

$$I^< := \{i \in \{1, \dots, m\} \mid \exists \bar{x} \in P : a_i \bar{x} < b_i\}$$

dove con $a_i x \leq b_i$ indichiamo l' i -esima disequazione del sistema $Ax \leq b$. Allora P può essere riscritto in questo modo:

$$P = \begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \\ a_i x = b_i \quad \forall i \in I^= \\ a_i x \leq b_i \quad \forall i \in I^< \end{cases} \quad (6.6)$$

Consideriamo un'arbitraria disequazione $\alpha x \leq \beta$, essa si dice *disuguaglianza valida* per P se definisce un semispazio di \mathbb{R}^n contenente P , ovvero $\alpha x \leq \beta \quad \forall x \in P$.

Si definisce *faccia* di P l'insieme $F = \{x \in P : \alpha x = \beta\}$ con $\alpha x \leq \beta$ disuguaglianza valida per P . Tra le facce di un poliedro ci sono quelle improprie, l'insieme vuoto e P , trovabili rispettivamente in corrispondenza di $0x \leq 1$ e $0x \leq 0$, disequazioni soddisfatte sempre da tutti i punti di un generico poliedro.

In generale vale il seguente teorema:

Teorema 6.1 (Caratterizzazione delle facce [3]). *Sia $P := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i x \leq b_i, i \in M\}$ un poliedro non vuoto. Per ogni sottoinsieme $I \subseteq M$, l'insieme*

$$F_I := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i x = b_i, i \in I, a_j x \leq b_j, j \in M \setminus I\}$$

è una faccia di P . Viceversa, se F è una faccia non vuota di P , allora $F = F_I$ per qualche $I \subseteq M$.

Questo teorema ci permette di concludere che una qualsiasi faccia di P corrisponde all'insieme di punti di P che soddisfano ad uguaglianza un certo insieme di disequazioni del sistema $Ax \leq b$ che definisce il poliedro.

Tra le varie tipologie di facce, per le nostre finalità rivestono un ruolo importante le faccette, ovvero facce proprie di P che non sono contenute in nessun'altra faccia propria di P . Queste ultime si trovano ponendo ad uguaglianza una disequazione $a_i x \leq b_i$ non rindondante per il sistema $Ax \leq b$, ovvero tale che $\{x : a_j x \leq b_j \ \forall j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}\} \neq \{x : a_j x \leq b_j \ \forall j \in \{1, \dots, m\}\}$. Si può dimostrare che data una faccetta F di P esiste $i \in I^<$ tale che $F = \{x \in P : a_i x = b_i\}$.

Supponiamo che P sia rappresentato tramite la formulazione (6.6), nella quale gli insiemi delle disequazioni con indici in $I^=$ e in $I^<$ definiscono rispettivamente lo spazio affine generato da P , detto *affine hull*, e le faccette del poliedro. Distinguiamo i seguenti casi: $I^= = \emptyset$ e $I^= \neq \emptyset$.

Nel primo caso immaginiamo di perturbare questa rappresentazione, utilizzando la densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} e approssimando ogni numero irrazionale presente nei vettori a_i con un numero razionale arbitrariamente vicino: per esempio, definiamo $0 < \epsilon \ll 1$, se $a_i^k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sostituiamo a_i^k con $q \in \mathbb{Q}$ tale che $|a_i^k - q| < \epsilon \ll 1$.

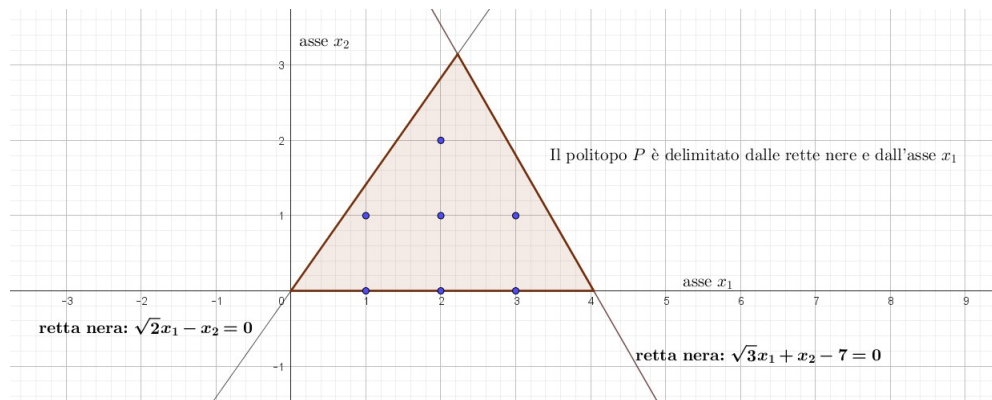
Si ottiene così un sistema a coefficienti razionali nei primi membri che definisce un poliedro con matrice dei vincoli razionale, \tilde{P} , il quale *approssima* arbitrariamente bene il poliedro di partenza ed è tale che $P \cap \mathbb{Z}^n = \tilde{P} \cap \mathbb{Z}^n$. Dal teorema principale sappiamo che \tilde{P} , oltre ad essere rappresentabile in tempo polinomiale come un politopo di trasporto tridimensionale planare T , è tale che i suoi punti interi sono in biezione con quelli di T , pertanto possiamo associare alla domanda di questa sezione una risposta affermativa nel caso in cui lo spazio affine generato da P abbia dimensione n .

6.3.1 Esempio 2

Consideriamo il politopo irrazionale

$$P = \begin{cases} -\sqrt{2}x_1 + x_2 & \leq 0 \\ \sqrt{3}x_1 + x_2 & \leq 7 \\ -x_2 & \leq 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

Abbiamo che $P \cap \mathbb{Z}^2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (2, 1), (1, 0), (2, 0), (3, 0)\}$



Procediamo con le *approssimazioni razionali* dei coefficienti irrazionali presenti nelle disequazioni che definiscono P :

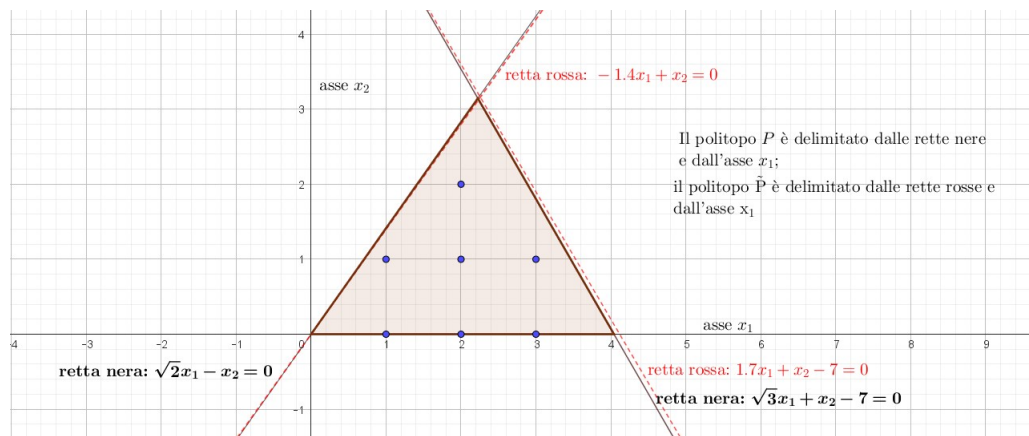
$$\sqrt{2} = 1.4142135625\dots \approx 1.4 = \frac{14}{10}$$

$$\sqrt{3} = 1.7320508076\dots \approx 1.7 = \frac{17}{10}$$

Definiamo il seguente politopo razionale

$$\tilde{P} = \begin{cases} -1.4x_1 + x_2 \leq 0 \\ 1.7x_1 + x_2 \leq 7 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

Si ottiene la seguente figura



Notiamo che $\tilde{P} \cap \mathbb{Z}^2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (2, 1), (1, 0), (2, 0), (3, 0)\} = P \cap \mathbb{Z}^2$.

Per il secondo caso, consideriamo un politopo P descritto dalla formulazione (6.6) con $I \neq \emptyset$. Definiamo $S = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i x = b_i \ \forall i \in I\}$ e

$S_I = \text{aff}(x \in S \cap \mathbb{Z}^n)$: S è lo spazio affine generato da P e S_I è un sotto-spazio affine razionale di S , in quanto contiene tutte le combinazioni affini di punti di S a coordinate intere. L'idea che vogliamo sviluppare consiste nel perturbare le equazioni che definiscono S in modo da non alterare S_I perchè quest'ultimo contiene i punti interi di P . Per ogni equazione di S con coefficienti irrazionali a primo membro possiamo immaginare di modificarne il vettore normale mantenendolo ortogonale a S_I , senza modificare il termine noto, cosicchè l'equazione alterata continui a definire un iperpiano che contenga S_I .

Ad esempio abbiamo:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i x = b_i \quad i \in I^=\}$$

$$S_I = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j x = b_j \quad j \in J\} \subseteq S$$

con $a_i, a_j \in \mathbb{R}^n$ e $b_i, b_j \in \mathbb{R}$. Lo spazio affine S_I , essendo razionale, ammette un sistema di generatori razionali pertanto possiamo supporre che $a_j \in \mathbb{Q}^n \forall j \in J$. Dato che $S_I \subseteq S$ abbiamo che $|J| \geq |I^=|$ e che le equazioni che definiscono S sono combinazioni affini di quelle di S_I pertanto si ha $\forall i \in I^=$:

$$a_i = \sum_{j \in J} c_{ij} a_j \quad \text{e} \quad b_i = \sum_{j \in J} c_{ij} b_j \quad \text{con} \quad c_{ij} \in \mathbb{R} \quad \text{tali che} \quad \sum_{j \in J} c_{ij} = 1$$

Gli spazi vettoriali ortogonali a S e S_I sono

$$S^* = \langle a_i : i \in I^= \rangle \subseteq S_I^* = \langle a_j : j \in J \rangle$$

Sia $a_i x = b_i$ un'equazione di S con $a_i \notin \mathbb{Q}^n$, tale equazione può essere riscritta in questo modo:

$$\sum_{j \in J} c_{ij} a_j x = \sum_{j \in J} c_{ij} b_j \quad (6.9)$$

Definiamo $\tilde{J}_i \subseteq J$ l'insieme degli indici j in corrispondenza dei quali c_{ij} non è razionale. Poichè $a_j \in \mathbb{Q}^n \forall j \in J$, deduciamo, dal fatto che $a_i \notin \mathbb{Q}^n$, che $|\tilde{J}_i| \neq 0$. Per ogni $\tilde{j} \in \tilde{J}_i$, utilizzando la densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} , fissando $0 < \epsilon \ll 1$, sappiamo che esiste $q_{\tilde{j}} \in \mathbb{Q}$ tale che $|q_{\tilde{j}} - c_{i\tilde{j}}| < \epsilon$. Ora sostituiamo $c_{i\tilde{j}}$ con $q_{\tilde{j}} \forall \tilde{j} \in \tilde{J}_i$ nel primo membro di (6.9) e otteniamo la seguente equazione:

$$\sum_{\tilde{j} \in \tilde{J}_i} q_{\tilde{j}} a_{\tilde{j}} x + \sum_{j \in J \setminus \tilde{J}_i} c_{ij} a_j x = \sum_{j \in J} c_{ij} b_j \quad (6.10)$$

L'equazione (6.10) definisce un iperpiano il cui vettore normale, essendo una combinazione lineare a coefficienti razionali di vettori razionali appartenenti a S_I^* , è sia razionale, sia appartenente a S_I^* .

Se applichiamo tale procedura ad ogni equazione dell'*affine hull* del poliedro P con primo membro non razionale e la procedura descritta nel caso precedente per ogni disuguaglianza di P che definisce una faccetta, riusciamo ad approssimare P con un poliedro \tilde{P} , contenente gli stessi punti interi di P ma definito da una formulazione con matrice dei vincoli razionale. Pertanto anche nel secondo caso possiamo attribuire una risposta affermativa alla domanda di riferimento.

Bibliografia

- [1] J. A. De Loera, S. Onn, *All linear and integer programs are slim 3-way transportation programs*, Siam J. Optim., Vol 17, pp.806-821.
- [2] M. Vlach, *Conditions for the existence of solutions of three dimensional planar transportation problem*, Discrete Appl. Math, 13 (1986), pp.61-78.
- [3] M. Conforti, G. Cornuèjols, G. Zambelli, *Integer Programming*, Graduate Texts in Mathematics, Springer.
- [4] E.D. Shell, *Distribution of a product by several properties*, Proc. 2nd Symposium in Linear Programming. Washington DC (1955), pp. 615-642.
- [5] K.B. Haley, *The multi-index problem*, Operations Research 11 (1963), pp. 368-379.
- [6] K. Schmid, *Zurückführung eines Sortenproblems auf das dreidimensionale Transportproblem*, Unternehmensforschung 10 (1966), pp. 32-41.
- [7] W. Junginger, *Zurückführung eines Sortenproblems auf das dreidimensionale Transportproblem*, Unternehmensforschung 16 (1972), pp. 11-25.
- [8] L.G. Raskin and I.O. Kirinčenko, *Mnogoindexnye zadaci linejnogo programirovanija*, Radio i Svjaz, Moscov, (1982).
- [9] D. Gale, *A theorem on flows in networks*, Pacific. J. Math, 7 (1957), pp. 1073-1082.
- [10] J. Moràveck and M.Vlach, *On necessary conditions for the existence of the solution of the multi-index transportation problem*, Operations Research 15 (1967), pp. 542-545.
- [11] G. Smith, *Further necessary conditions for the existence of a solution to the multi-index problem*, Operations Research 21 (1973), pp. 380-386.

- [12] G. Smith, *On the Moràveck and Vlach conditions for the existence of a solution to the multi-index problem*, Aplikace matematiky 20 (1975), pp. 432-435.
- [13] B. Korte and J. Vygen, *Combinatorial Optimization*, Springer (2018).