

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Interazione Disco-Pianeta

Relatore

Dr. Francesco Marzari

Laureando

Paolo Cornale

Anno Accademico 2017/2018

Introduzione

Il miglioramento tecnico dei telescopi e lo sviluppo di metodi di osservazione indiretta, hanno dato slancio alla ricerca degli esopianeti e dei dischi protostellari. Le numerose scoperte effettuate in quest'ambito dimostrano l'esistenza di una straordinaria varietà di pianeti extrasolari e di strutture protostellari, e ciò ha stimolato lo sviluppo di nuove teorie e di sofisticate simulazioni numeriche. Questo è il caso delle gap e delle strutture ad anello riscontrate nei dischi, che ancora oggi si cerca di comprendere pienamente elaborando teorie che coinvolgono meccanismi dinamici e non-dinamici. Tuttavia l'ipotesi principalmente adottata è quella planetaria.

In questo elaborato si cerca di approfondire lo studio dell'interazione mareale tra pianeta e disco, focalizzandosi in particolare sulla formazione della gap nel disco gassoso e sulla migrazione che quest'ultimo induce sul pianeta.

Momento torcente di interazione disco-pianeta

La grandezza fisica decisiva nello studio dell'interazione tra un disco protostellare e un protopianeta è il momento torcente, che in questo elaborato si stimerà in un contesto semplificato in cui il pianeta ha una massa ridotta, compie un'orbita circolare in un disco bidimensionale e in cui sono trascurati tutti i contributi non gravitazionali e non fluidistici. In questo studio si possono adottare due approcci diversi:

1) l'approssimazione impulsiva, ossia un approccio particellare in cui il momento angolare viene scambiato tra il pianeta e la singola particella del disco. Essa si avvicina al pianeta e vi interagisce in un tempo-scala ridotto, in modo da subire una piccola deflessione rispetto alla traiettoria imperturbata. Questa stima del momento fu sviluppata da Lin & Papaloizou nel 1979;

2) l'approccio fluidistico, in cui si linearizzano le equazioni della fluidodinamica di Navier-Stokes e si studiano le piccole perturbazioni che il pianeta induce sugli anelli fluidi che compongono il disco. Questa stima inizialmente fu sviluppata da Goldreich & Tremaine nel 1979, e poi ripresa e approfondita da Rafikov & Petrovich nel 2012.

Il pianeta perturba gravitazionalmente il disco circostante, inducendo delle piccole oscillazioni dei suoi elementi (fluidi o particellari), le quali si propagano tramite delle onde di densità. Tuttavia, la rotazione differenziale $\Omega(R)$ del disco interrompe la propagazione lineare di queste perturbazioni, creando dei motivi a onda che, nei dischi gassosi, interagiscono costruttivamente a formare una "wake", ossia una scia a forma di spirale ad un braccio. Lo smorzamento delle perturbazioni della densità del disco, a causa della rotazione differenziale, è responsabile del meccanismo di trasferimento del momento angolare dalle onde agli elementi fluidi del disco. Si possono distinguere due contributi complessivi del momento torcente: il primo detto *di eccitazione* che si aggiunge alle onde di densità, e il secondo, detto *di deposito* che viene trasferito dalle

onde al disco. Quest'ultimo controlla la formazione di una regione assialsimmetrica attorno al pianeta (detta *gap*) e la migrazione stessa del pianeta. Sono queste ultime, assieme alla formazione della wake, le conseguenze principali della formazione delle onde di densità e della presenza del meccanismo di smorzamento, come si cercherà di capire in questo elaborato. Se il pianeta è sufficientemente massivo, almeno 50 masse terrestri, orbita con una velocità angolare minore rispetto alla parte interna del disco, e quindi (essendoci frizione tra i due) tende a rallentarla, esercitando un momento torcente negativo; viceversa si muove con una velocità maggiore rispetto alla parte esterna del disco, e tende quindi, ad accelerarla, esercitando un momento torcente positivo. Gli elementi fluidi del disco interno, perdendo momento, tendono ad allontanarsi dal pianeta migrando verso l'interno, mentre quelli del disco esterno si spostano ulteriormente verso la periferia del disco. L'allontanamento di materiale dal pianeta, perciò, forma la gap la cui morfologia è determinata dalle proprietà locali del disco e dalle dimensioni del pianeta. Un ragionamento analogo si può fare dal punto di vista del disco, in particolare nel caos di un pianeta poco massivo: il disco interno esercita un momento positivo sul pianeta, mentre quello esterno uno negativo, e la combinazione dei due causa la migrazione planetaria (in genere, come si vedrà, domina il momento esterno (negativo), e quindi il pianeta tende a spostarsi verso orbite più interne).

Approssimazione impulsiva

Si studia lo scambio impulsivo di momento angolare tra il pianeta e la singola particella del disco, di cui si trascurano gli effetti viscosi. Per essere impulsiva, questa interazione deve essere "breve" (ossia avvenire in un intervallo di tempo molto minore rispetto al periodo orbitale del pianeta), e alla fine del processo, la particella deve subire una leggera deflessione rispetto alla traiettoria originale. Durante l'interazione si può quindi trascurare il moto orbitale del pianeta intorno alla stella e si può anche assumere che la velocità della particella sia molto minore rispetto quella kepleriana v_k associata alla posizione della particella nel disco. A finché la particella riesca a compiere questa traiettoria è necessaria la presenza di una regione ipodensa attorno al pianeta, in modo che le altre particelle presenti nel disco non la perturbino eccessivamente. È quindi necessaria la presenza di una gap, ossia di un pianeta sufficientemente massivo.

Sperimentalmente in un disco gassoso si è osservato che $v \sim \sqrt{\alpha} c_s$, dove c_s è la velocità del suono e α è il parametro di turbolenza di Shakura e Sunyaev. L'altezza di scala H_g è definita come: $H_g = \frac{c_s}{\Omega}$, con $\Omega = \Omega(R) =$ velocità angolare differenziale del disco, si ha, inoltre, che $v_k = R\Omega$. Quindi la condizione $v \ll v_k$ implica

$$\begin{aligned} v &\ll v_k \\ \sqrt{\alpha} c_s &\ll R\Omega \\ \sqrt{\alpha} H_g \Omega &= R\Omega \end{aligned}$$

$$\frac{H_g}{r} \ll \alpha^{-1/2}$$

Questa condizione in genere è soddisfatta nei dischi protostellari.

Le condizioni ipotizzate permettono di approssimare il moto del pianeta e quello della particella ad un moto rettilineo uniforme, e la loro interazione ad uno scattering debole ed impulsivo: quindi la traiettoria della particella rimane imperturbata fino a quando non raggiunge la distanza minima dal pianeta.

La particella ha massa m e orbita attorno alla stella con una circonferenza di raggio R . Il pianeta ha massa M_P e il raggio della sua orbita è R_P . R deve essere sufficientemente diverso da R_P , in modo da permettere il verificarsi delle ipotesi stabilite. Nel sistema di riferimento eliocentrico (quello inerziale centrato sulla stella), la velocità angolare del pianeta è Ω_P , mentre quella della particella è Ω .

Ci si sposta nel sistema di riferimento corotante, in cui il pianeta è immobile e la velocità della particella è $\Omega - \Omega_P$. In questo SDR la particella arriva dall'infinito con una velocità esclusivamente tangenziale v_0 e parametro d'impatto $b = (R - R_P)_\perp$, ossia pari alla componente radiale della distanza relativa tra particella e pianeta. A causa dell'interazione impulsiva la particella acquista una velocità radiale v_\perp .

$$|v_\perp| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_\perp}{m} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{GmM_P}{md_t^2} \sin \theta dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{GM_P b}{d_t^2} \frac{b}{d} dt \quad (1)$$

con $d(t)$ = distanza istantanea tra particella e pianeta (ponendo $t = 0$ l'istante di maggior vicinanza).

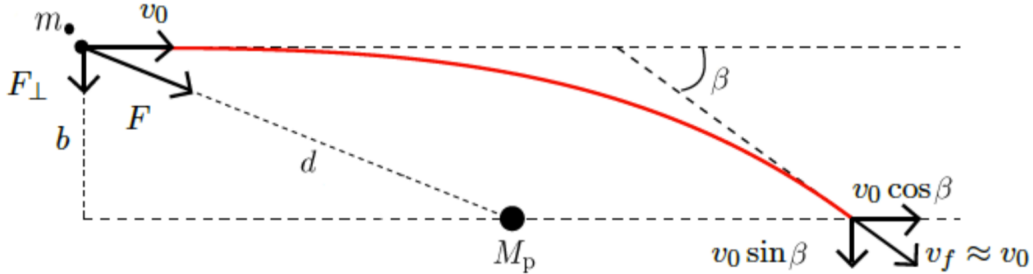


Figura 1: Deflessione impulsiva di una particella sotto l'influenza mareale di un pianeta [immagine tratta da "Substructures in Protoplanetary Discs Dust and Gas Dynamics" di G. DiPierro, G. Lodato; cap. 7]

Poichè la deflessione è piccola, si può approssimare la distanza percorsa lungo la direzione iniziale a $x = v_0 t$. Quindi, usando Pitagora

$$d^2(t) = b^2 + (v_0 t)^2 = b^2 + s^2 \quad (2)$$

ed, eseguendo nell'integrale il cambio di variabile $t \rightarrow s = v_0 t$ si ottiene:

$$|v_{\perp}| = \frac{GM_P}{v_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{b}{b^2 + s^2} \right)^{3/2} ds = \frac{2GM_P}{bv_0} \quad (3)$$

ma, essendo β piccolo, si può scrivere $|v_{\perp}| = v_0 \sin \beta \sim v_0 \beta$. Stiamo inoltre assumendo che, durante l'interazione, sia cambiata solo la direzione della velocità relativa, non il suo modulo. Si può fare questa assunzione ricordando la conservazione dell'energia cinetica della particella tra prima e dopo l'interazione. Quindi:

$$|v_{\perp}| = v_0 \beta = \frac{2GM_P}{bv_0} \Rightarrow \beta = \frac{2GM_P}{bv_0^2} \quad (4)$$

A causa di questo nuovo termine v_{\perp} la particella acquista un'eccentricità. Tuttavia, le forze dissipative presenti nel disco tendono a circularizzare l'orbita: si pone che questo processo avvenga entro un periodo sinodico $T = \frac{2\pi}{(\Omega - \Omega_P)}$. In questo intervallo di tempo la componente j_{\perp} del momento angolare specifico (ossia per unità di massa) si "consuma", per cui la variazione del momento angolare specifico è

$$\delta j = j_{FIN} - j_{IN} = Rv_l - Rv_0 = Rv_0(\cos \beta - 1) = -Rv_0 \frac{\beta^2}{2} \quad (5)$$

Dove, in virtù di un β piccolo, si è approssimato il coseno al secondo ordine con Taylor: $\cos \beta \sim 1 - \frac{\beta^2}{2!}$

Ora, sostituendo il valore di β espresso da (4) si ottiene:

$$\delta j = -\frac{2G^2 M_P^2 R}{b^2 v_0^3} \quad (6)$$

Nel SDR corotante la particella ha velocità angolare $\Omega' = \Omega - \Omega_P$. Quindi

$$v_0 = R\Omega - R_P\Omega_P \sim R_P|\Omega - \Omega_P| \operatorname{sgn} b \quad (7)$$

Dove nella prima uguaglianza si è ricordato che $\frac{R}{R_P} = \frac{R_P + b}{R_P} \sim 1$, e nella seconda uguaglianza si è posto il valore assoluto poichè $\Delta\Omega$ ha lo stesso segno di $\Delta R = b$.

Si cerca ora un'espressione di $d\Omega$ che coinvolga le grandezze caratteristiche del sistema:

$$d\Omega = \Omega - \Omega_P = \frac{\Omega - \Omega_P}{R - R_P} (R - R_P) = \left(\frac{d\Omega}{dR} \right)_{R_P} \cdot b \quad (8)$$

La derivata di Ω si può calcolare ricordando la legge di Newton e l'espressione dell'accelerazione centripeta agente sulla particella:

$$F = G \frac{M_* m}{R^2} = ma = m\Omega^2 R \rightarrow \Omega = \sqrt{GM_*} \cdot R^{-3/2} \quad (9)$$

Infatti si ha:

$$\left(\frac{d\Omega}{dR}\right)_{R_P} = \left(\sqrt{GM_*} \left(-\frac{3}{2}\right) R^{-3/2} R^{-1}\right)_{R_P} = \left(-\frac{3\Omega}{2R}\right)_{R_P} = -\frac{3\Omega_P}{2R_P} \quad (10)$$

Sostituendo questo risultato nella (8) si ricava:

$$d\Omega = \Omega - \Omega_P = \frac{3\Omega_P}{2R_P} \cdot b \quad (11)$$

Il momento torcente specifico per la particella $\delta\Gamma$ è la perdita di momento angolare che si verifica in un periodo sinodico δt , Poichè si può stimare la seconda equazione cardinale di Eulero per intervalli non infinitesimi: $\delta\Gamma = \frac{dj}{dt} \sim \frac{\delta j}{\delta t_{\text{sinodico}}}$.

$$\delta\Gamma_{\text{particella}} = \frac{\delta j}{\delta t} = \frac{\delta j}{\left(\frac{2\pi}{|\Omega - \Omega_P|}\right)^{-1}} = \quad (12)$$

$$\text{usando (6): (12)} = -\frac{2G^2 M_P^2 R \Delta\Omega}{b^2 v_0^3 \cdot 2\pi} =$$

(ricordando l'espressione di v_0 e di $\Delta\Omega$):

$$= \frac{-2G^2 M_P^2 R \Delta\Omega}{-b^2 R_P^3 \Delta\Omega^3 \cdot 2\pi} \cdot \text{sgn } b = \frac{G^2 M_P^2 4R_P^2}{b^2 R_P^2 9\Omega_P^2 b^2 \pi} \cdot \text{sgn } b$$

quindi

$$\delta\Gamma_{\text{particella}} = \text{sgn } b \cdot \frac{4}{9\pi} \left(\frac{GM_P}{\Omega_P}\right)^2 \cdot \frac{1}{b^4} \quad (13)$$

Questa espressione si può riscrivere in funzione della posizione radiale della particella e in termini di $\frac{M_P}{M_*}$. Così facendo si ottiene il momento torcente specifico mareale che agisce su un anello di particelle posto a distanza R dalla stella. Basta risolvere l'equazione (9) rispetto a G ottenendo $G = \frac{\Omega_P^2 R_P^3}{M_*}$. Sostituendo questa espressione in (13) e ricordando che $b = R - R_P$ si trova:

$$\delta\Gamma_{\text{anello}} = \text{sgn } (R - R_P) \cdot \frac{4}{9\pi} \left(\frac{M_P}{M_*}\right)^2 \Omega_P^2 R_P^6 \cdot \frac{1}{(R - R_P)^4} \quad (14)$$

Questa non è una formula esatta poichè nei conti si era approssimato $R \sim R_P$, tuttavia la dipendenza da queste grandezze, in (14) è $\propto (R - R_P)^{-4}$, quindi per grandi distanze l'imprecisione è trascurabile.

Integrando su tutta la massa del disco si ricava il momento torcente totale. La massa di un anello compreso tra b e $b + \delta b$ è: $dm = 2\pi R_P \Sigma db$, dove Σ è la densità superficiale del disco (bidimensionale) che poniamo costante.

$$\Gamma_{TOT} = \int_M \delta\Gamma dm = \frac{8}{9} \left(\frac{M_P}{M_*} \right)^2 \Sigma \Omega_P^2 R_P^7 \int_{b_{min}}^{+\infty} \frac{db}{b^4} = \frac{8}{27} \left(\frac{M_P}{M_*} \right)^2 \Sigma \Omega_P^2 R_P^7 \frac{1}{b_{min}^3} \quad (15)$$

con b_{min} = minimo parametro d'impatto tale che l'incontro tra il pianeta e la particella soddisfi le ipotesi della teoria dell'impulso. Si deve sicuramente avere che $b > R_H$, con R_H = raggio di Hill, ossia il raggio della sfera in cui l'influenza gravitazionale del pianeta domina rispetto alla forza centrifuga e rispetto alla gravità della stella:

$$R_H \equiv R_P \left(\frac{M_P}{3M_*} \right)^{1/3} \quad (16)$$

Si cerca ora di stimare b_{min} . Una prima stima si può effettuare ipotizzando un disco gassoso. Qui la velocità del suono c_s si può interpretare come la velocità con cui le perturbazioni gravitazionali indotte dal pianeta si propagano nel disco. Affinchè le ipotesi iniziali vengano soddisfatte, la velocità relativa tra la particella e il pianeta deve essere maggiore di quella del suono. Se fosse minore, infatti, la particella avvertirebbe la presenza gravitazionale del pianeta prima di aver raggiunto il punto di massima vicinanza da questo: ciò contrasterebbe con le ipotesi iniziali su cui si basa questa teoria. Quindi $v_{0,minimo} \sim c_s \Rightarrow R_P |\Omega - \Omega_P|_{b_{min}} = -$ usando eq. (11)- $\frac{3\Omega_P}{2} b_{min}$, da cui si trova:

$$b_{min} = \frac{2 c_s}{3 \Omega} = \frac{2}{3} H_g \quad (17)$$

Infine, ricordando la condizione precedentemente imposta $b > R_H$, si può scrivere:

$$b_{min} = \max \left(\frac{2}{3} H_g, R_H \right) \quad (18)$$

Alla luce di questo risultato si può raffinare l'equazione (14), sostituendo Δ_g al posto di $(R - R_P)$ ottenendo:

$$\delta\Gamma_{anello} = \text{sgn} (R - R_P) \cdot \frac{4}{9\pi} \left(\frac{M_P}{M_*} \right)^2 \Omega_P^2 R_P^6 \cdot \frac{1}{(\Delta_m)^4} \quad (19)$$

con $\Delta_m = \max(|R - R_P|, \frac{2}{3} H_g, R_H)$.

Per la conservazione del momento angolare si ha che il pianeta modifica il suo momento angolare specifico di una quantità $\delta j_P = -\delta j$. Di conseguenza il pianeta

tende a spostarsi verso l'esterno (interno) a causa dell'ingerenza gravitazionale del gas presente nelle orbite più interne (esterne). Dall'equazione (15) si ricava che il momento che agisce sul pianeta dipende quadraticamente dalla sua massa.

Quindi questo scambio di momento angolare comporta 2 conseguenze:

- 1) il gas viene allontanato dall'orbita del pianeta e si forma la "gap";
- 2) il pianeta migra.

Momento torcente di Lindblad

Da qui si utilizza la teoria del disco fluido. Si richiede che il pianeta abbia una massa ridotta, in modo che le perturbazioni che induce sugli elementi fluidi del disco possano essere studiate con un'analisi lineare. In particolare si deve avere $M_P < M_{TH}$, dove:

$$M_{TH} \equiv \frac{c_s^3}{G\Omega_k} \quad (20)$$

Come visto prima si ha $G = \frac{\Omega_P^2 R_P^3}{M_*}$ e $H_g \equiv \frac{c_s}{\Omega_k}$, e questo permette di scrivere la massa termica come:

$$M_{TH} = \frac{c_s^3 M_*}{\Omega_k^3 R_P^3} = M_* \left(\frac{H_g}{R_P} \right)^3 \quad (21)$$

La massa termica si può quindi interpretare come la massa di un pianeta il cui raggio di Hill R_H è comparabile con l'altezza di scala H_g . Infatti se $M_P \sim M_{TH}$, sostituendo M_{TH} al posto di M_P nell'espressione del raggio di Hill si trova:

$$R_H \equiv R_P \left(\frac{M_P}{3M_*} \right)^{1/3} = R_P \left(\frac{M_*}{3M_*} \left(\frac{H_g}{R_P} \right)^3 \right)^{1/3} = \frac{H_g}{3^{1/3}} \sim H_g$$

La teoria di Lindblad richiede numerose ipotesi: un disco gassoso, bidimensionale, non autogravitante, assialsimmetrico, senza pressione, kepleriano ($\kappa = \Omega_k$), avente all'interno un protopianeta con massa ridotta ($M_P < M_{TH}$), che compie un moto di rivoluzione attorno alla stella su un'orbita fissa, circolare e complanare (ossia con eccentricità ed inclinazione nulle) con velocità angolare kepleriana $\Omega_P = \sqrt{GM_*/R_P^3}$. La velocità casuale degli elementi fluidi è molto minore rispetto a quella orbitale, quindi anch'essi compiono un'orbita circolare attorno alla stella.

Uno dei primi studi sull'instabilità di un mezzo fluido dovuta all'autoattrazione gravitazionale è stato condotto da Jeans (1902). Egli dimostrò che un mezzo statico, omogeneo, infinito e posto ad una temperatura T fissa ha una massa critica superata la quale diventa instabile a piccole perturbazioni. Questo avviene perchè la gravità sbilancia l'equilibrio stabilizzante indotto dalla pressione termica. Il caso di un disco gassoso rotante è più complicato: qui l'effetto stabilizzante è dato dalla rotazione differenziale $\Omega(R)$. Ci sono comunque delle oscillazioni stocastiche da parte degli

elementi fluidi, che oscillano attorno l'orbita di equilibrio lungo la direzione radiale con una frequenza κ :

$$\kappa^2 \equiv \frac{2\Omega}{R} \frac{\partial}{\partial R} (\Omega R^2) \quad (22)$$

Se c'è un perturbatore (come un protopianeta) si possono verificare le condizioni che originano le risonanze di Lindblad, ossia una forte risposta del sistema causata dalla combinazione della frequenza epicyclica e di quella del perturbatore.

Queste perturbazioni si trasferiscono nel disco come delle onde di densità. L'equazione delle onde che le descrive può essere studiata con l'approssimazione WKB.¹ Nel caso bidimensionale in esame, l'equazione delle onde ha due componenti: una radiale e una azimutale. Sia detto m il numero d'onda azimutale della perturbazione, e k quello radiale. Si può dimostrare che l'utilizzo dell'approssimazione WKB implica che $m \ll \Omega_k \frac{R}{c_s} = \frac{R}{H_g}$.

In questo caso si ha un disturbo dell'equilibrio non assialsimmetrico, e la relazione di dispersione generica si può scrivere come:

$$(w - m\Omega)^2 = c_s^2 k^2 - 2\pi G \Sigma |k| + \kappa^2 \quad (23)$$

che, nel caso di piccole perturbazioni in un disco sottile soggetto ad una rotazione differenziale, si semplifica:

$$m^2(\Omega - \Omega_p)^2 = \kappa^2 + k^2 c_s^2 \quad (24)$$

Il potenziale gravitazionale del pianeta nel SDR eliocentrico è $\Theta_P(R, \phi) = -\frac{GM_P}{d}$.

Osservando la figura 2 si può scrivere $\theta = \phi - \phi_P =$ azimut relativo, con $\phi_P = \Omega_P t$. Applicando il teorema di Carnot si può ricavare un'espressione di d : $d = \sqrt{R^2 - R_P^2 m - 2RR_P \cos \theta}$. Quindi il potenziale si può interpretare come una funzione 2π -periodica di θ , e questo permette di espanderlo come una serie di Fourier nella variabile θ :

$$\Theta(R, \theta, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{im\theta} \quad \text{con } c_n \in \mathbb{C}$$

Considerando solo la parte reale e ricordando l'espressione di θ si ottiene:

$$\Theta(R, \theta, t) = \text{Re} \left(2 \sum_{m=0}^{+\infty} \Theta_m^P(R) \cdot e^{im(\phi(t) - \Omega_P t)} \right) = 2 \sum_{m=0}^{+\infty} \Theta_m^P(R) \cos(im(\phi(t) - \Omega_P t)) \quad (25)$$

¹da Wentzel-Kramers-Brillouin. Questo metodo permette di approssimare e semplificare lo studio delle equazioni lineari del secondo ordine, imponendo che la funzione d'onda si possa scrivere come $\Psi(x) = e^{\phi(x)}$ con $\phi(x)$, una funzione che varia lentamente, e che può essere approssimata in una serie di potenze.

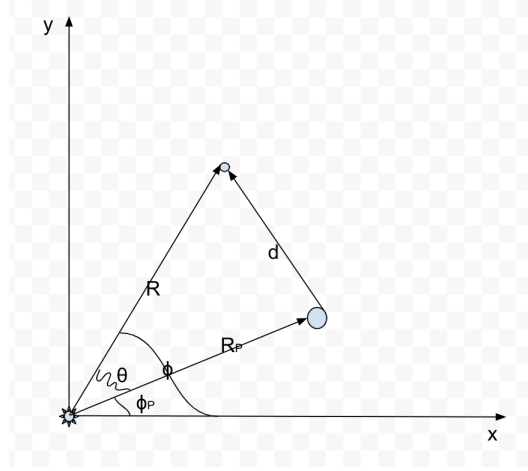


Figura 2: illustrazione schematica degli angoli e delle distanze coinvolte tra stella, pianeta e particella del disco

Dove il fattore 2 deriva dal fatto che la funzione è pari, quindi anziché far variare m da $-\infty$ a $+\infty$, si può semplificare gli estremi da 0 a $+\infty$, raddoppiando il tutto. Il coefficiente di potenziale $\Theta_m^P(R)$ è espresso, per ciascun m , dalla formula di Goldreich e Tremaine (1980):

$$\Theta_m^P(R) = -\frac{2GM_P}{\pi R_P} \int_0^\pi \left(1 + \left(\frac{R}{R_P} \right)^2 - 2 \left(\frac{R}{R_P} \right) \cos \phi \right)^{-1/2} \cos(m\phi) d\phi \quad (26)$$

Essendo in coordinate polari, la frequenza di ciascuna componente dello sviluppo di Fourier del potenziale si può calcolare eseguendo la derivata temporale della fase, ossia dell'argomento della funzione coseno, ottenendo $m(\Omega_{(R)} - \Omega_P)$. La risonanza di Lindblad si verifica quando questa frequenza è un multiplo intero della frequenza epicyclica $\kappa = \Omega_k$.

$$m(\Omega_k(R_M) - \Omega_P) = \pm \Omega_k(R_m) \rightarrow \Omega_k(R_m) = \frac{m}{m \pm 1} \Omega_P \quad (27)$$

Da questa formulazione si capisce perchè le risonanze di Lindblad sono dette anche *risonanze di moto medio*: mentre la particella compie m orbite attorno alla stella, il pianeta ne compie $m \pm 1$. Ricordando l'espressione (9) di Ω , si può scrivere la (25) in funzione della distanza radiale, ottenendo i valori R_m in cui si osservano le risonanze di Lindblad:

$$R_m = \left(\frac{m \pm 1}{m} \right)^{2/3} \cdot R_P \quad (28)$$

Si possono verificare 3 casi possibili:

- 1) $m \geq 2$: per ogni m , ossia per ogni numero d'onda azimutale, si verificano 2 risonanze: la prima (detta ILR: inner Lindblad resonance) è interna all'orbita del pianeta e corrisponde al segno "meno", la seconda (detta OLR: outer Lindblad resonance) è esterna all'orbita del pianeta e corrisponde al segno "più".
- 2) $m = 1$: si verifica solo la risonanza esterna.
- 3) $m(\Omega_k(R) - \Omega_P) = 0$: si manifesta la *risonanza di corotazione*, che avviene quando la velocità angolare locale del disco e quella orbitale del pianeta sono le stesse: $\Omega_k(R) = \Omega_P$.

Ogni risonanza di Lindblad è quindi causata dalla componente m -esima dello sviluppo alla Fourier del potenziale gravitazionale del pianeta. Presso ogni localizzazione nel disco di queste risonanze agisce un momento torcente di Lindblad Γ_m^L , che determina la liberazione di onde di densità, le quali si propagano allontanandosi dal pianeta. L'espressione della componente m -esima del momento di Lindblad è stata stimata da Goldreich & Tremaine nel 1979 (e successivamente da Meyer-Vernet & Sicardy nel 1987):

$$\Gamma_m^L = \text{sgn}(R - R_P) \frac{\pi^2 \Sigma}{3 \Omega_k \Omega_P} \left(R \frac{d\Theta_m^P}{dR} + \frac{2m^2(\Omega_k - \Omega_P)}{\Omega_k} \Theta_m^P \right) \quad (29)$$

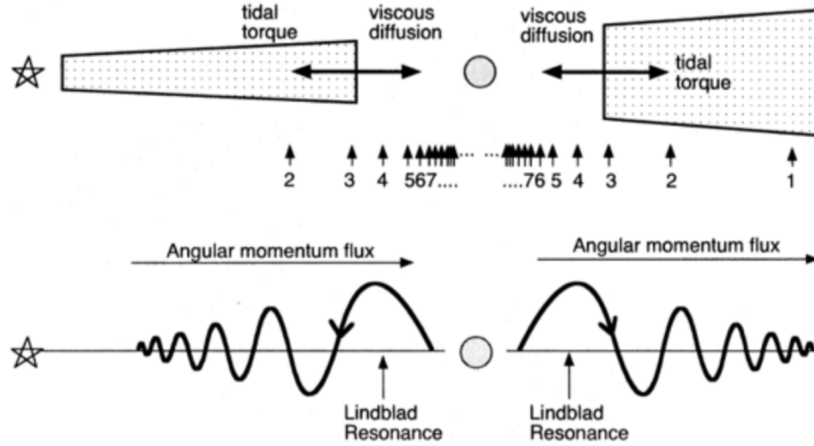


Figura 3: Formazione di gap nel disco sotto l'azione di forze mareali e viscosi [immagine tratta da "Substructures in Protoplanetary Discs Dust and Gas Dynamics" di G. DiPierro, G. Lodato; cap. 7]

L'equazione (26) mostra che, per $m \rightarrow +\infty$ le risonanze di Lindblad tendono ad accumularsi: da una certa regione in poi le risonanze si bloccano, il momento torcente limite viene detto, in gergo, di "cut-off". Tuttavia questo limite non è

contemplato dalla teoria, perchè l'utilizzo dell'approssimazione WKB implica che $m \ll \Omega_k \frac{R}{c_s} = \frac{R}{H_g}$. Una prima stima della regione di accumulazione delle risonanze si può effettuare con il valore critico di m pari a $m_{crit} = \frac{R_P}{H_g}$. La posizione radiale delle risonanze in questo limite si trova andando a sostituire m_{crit} in (26), per poi approssimare con Taylor al primo ordine la potenza ottenuta:

$$\lim_{m \rightarrow m_{crit}} R_m = \left(\frac{\frac{R}{H_g} \pm 1}{\frac{R}{H_g}} \right)^{2/3} \cdot R_P \sim \left(1 \pm \frac{2}{3} \frac{H_g}{R_P} \right) \cdot R_P = R_P \pm \frac{2}{3} H_g$$

Per stimare la distanza radiale dal pianeta $|R - R_P|$ in cui le risonanze si verificano con la massima intensità, basta considerare il distanza maggiore tra il risultato appena ottenuto, e il raggio di Hill: $|R - R_P| = \max(2H_g/3, R_H)$. Questo valore, al di sotto del quale le risonanze sono soppresse, si accorda con quello ottenuto con l'approssimazione dell'impulso al paragrafo 3.

Pitch angle Si può dimostrare che, nei dischi gassosi, queste onde di densità con differente m possono interagire costruttivamente a formare una spirale ad un braccio (*wake*), di cui è agevolmente stimabile il *pitch angle* i , ossia l'angolo di inclinazione della spirale, definito come l'angolo tra la tangente alla spirale in un punto, e la tangente alla circonferenza concentrica alla spirale e passante per il punto stesso, come si può osservare dal disegno sottostante.

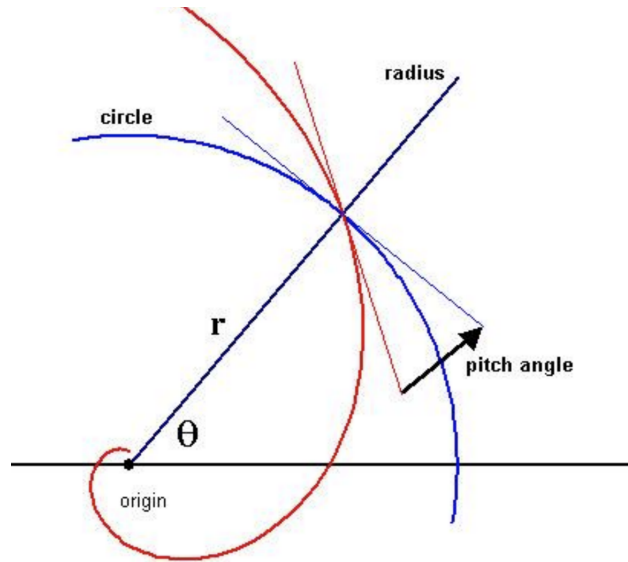


Figura 4: visualizzazione grafica del *pitch angle* di una spirale, [immagine tratta una presentazione dell' *Arkansas Center for Space and Planetary Sciences*]

Per definizione $0 < i < 90$. Il braccio di una spirale si può descrivere matematicamente (in coordinate polari) con la curva: $\phi + g(R, t) = \text{costante}$. Immaginiamo che la spirale goda di una simmetria discreta rotazionale di ordine m : questo vuol dire che ruotando il tutto di $2\pi/m$, il profilo della spirale non cambia. Nel caso generico, quindi, l'espressione più conveniente per descrivere la posizione di tutti i bracci della spirale è $m\phi + f(R, t) = \text{costante}$, dove $f(R, t) = mg(R, t)$. Questa scrittura permette di ridefinire il numero d'onda radiale come $k = \frac{\partial f(R, t)}{\partial R}$. L'angolo di inclinazione si può quindi esprimere come:

$$\cotang(i) = \left| R \cdot \frac{\partial \phi}{\partial R} \right| = \left| \frac{kR}{m} \right| \quad (30)$$

(In cui si è derivato ambo i membri dell'equazione generica della spirale, ottenendo: $m \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{\partial f(R, t)}{\partial R} = 0$.)

Ricordando la relazione di dispersione, e ponendo $\kappa \sim 0$, perchè stiamo valutando quest'espressione su distanze considerevoli dove le vibrazioni epicicliche si possono trascurare, si trova che $m(\Omega - \Omega_p) = c_s k$, e questo permette di riscrivere il pitch angle come:

$$i = \tan^{-1} \left(\frac{c_s}{R|\Omega - \Omega_p|} \right) \quad (31)$$

Wake Si può introdurre la propagazione e l'evoluzione delle onde di densità (*waves*) generate dal pianeta nel disco protostellare in modo qualitativo. L'evoluzione di queste onde conduce inevitabilmente ad uno loro smorzamento, ed inoltre porta a degli *shocks*, ossia degli urti con gli elementi fluidi circostanti, tramite i quali le onde trasferiscono il loro momento angolare al disco. Numerosi sono i fenomeni che possono condurre ad una dissipazione lineare delle onde di densità, come la viscosità, le turbolenze magnetodinamiche, i moti convettivi e la radioattività, ma si è dimostrato (anche con simulazioni numeriche) che essi sono per lo più processi secondari, che non influiscono particolarmente nell'evoluzione delle onde di densità. Quindi questo fenomeno sembra dominato da una dissipazione non lineare, che causa il trasferimento di momento angolare dalle waves al disco circostante. Le due ragioni principali di ciò sono la rotazione differenziale del disco (che riduce la lunghezza d'onda delle perturbazioni, le quali, venendo "comprese" tendono più facilmente a spezzarsi causando gli shocks) e la conservazione del flusso di momento angolare (che contribuisce ad incrementare l'ampiezza d'onda nelle vicinanze del pianeta, e ciò la tende ad accelerarla verso la dissipazione non lineare). Si può dimostrare (Goodman & Rafikov 2001) che se il pianeta ha una massa ridotta (minore della massa termica) è possibile separare l'evoluzione della wake in due regioni distinte: la *generazione lineare* (in cui si trascurano gli effetti non lineari) che si esaurisce in 1-2 H_g dal pianeta, e la successiva *evoluzione non lineare* (in cui si trascura il potenziale del pianeta) che porta agli shocks. Simulazioni accurate (Hartmann 1998) hanno mostrato che, in condizioni favorevoli, lo smorzamento delle onde di densità

può far evolvere l'intero disco protostellare in un temposcala di $10^5 - 10^7$ anni. Si assume che il valore istantaneo della pressione del disco sia legato alla pressione superficiale da una legge politropica con indice specifico γ :

$$P = P_0(R) \left(\frac{\Sigma}{\Sigma_0(R)} \right)^\gamma \quad (32)$$

Da cui si ricava la velocità del suono:

$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \Sigma} = c_0^2(R) \left(\frac{\Sigma}{\Sigma_0(R)} \right)^{\gamma-1} \quad (33)$$

dove $P_0(R)$ e $c_0(R)$ sono i valori imperturbati della pressione e della velocità del suono.

Landau & Lifshitz, nel libro "Fluid mechanics" del 1959, si sono ricavati le equazioni del moto stazionarie (indipendenti dal tempo) in coordinate polari nel sistema di riferimento corotante:

$$\begin{cases} v_R \partial_R v_R + \frac{v_\phi}{R} \partial_\phi v_R - \frac{v_\phi^2}{R} = -\frac{1}{\Sigma} \partial_R P + 2\Omega_P v_\phi + \Omega_P^2 R - \partial_R U \\ v_R \partial_R v_\phi + \frac{v_\phi}{R} \partial_\phi v_\phi + \frac{v_\phi v_R}{R} = -\frac{1}{\Sigma R} \partial_\phi P - 2\Omega_P v_R - \frac{1}{R} \partial_\phi U \end{cases}$$

L'equazione di continuità è:

$$\frac{1}{R} \partial_R (\Sigma R v_R) + \frac{1}{R} \partial_\phi (\Sigma v_\phi) = 0 \quad (34)$$

Queste tre equazioni vengono studiate come un unico sistema tramite una teoria perturbativa della propagazione delle onde in grado di includere anche gli effetti non lineari. Si assume che v_R e v_ϕ si possano esprimere come: $v_R = u$ e $v_\phi = v_0(R) + v$, dove $v_0(R) = R(\Omega(R) - \Omega_P) = R\Delta\Omega$, e u, v sono le perturbazioni della velocità (si assume che $u, v \ll v_0$). Sostituendo questi valori nelle equazioni del moto e nell'equazione di continuità, si possono ottenere le equazioni della perturbazione:

$$\begin{cases} \Delta\Omega \partial_\phi u + u \partial_R u - 2\Omega v = -\left(\frac{1}{\Sigma} \partial_R P - \frac{1}{\Sigma} \partial_R P_0\right) + \frac{v^2}{R} \\ \Delta\Omega \partial_\phi v + u \partial_R v + 2B u = -\frac{1}{\Sigma R} \partial_\phi P - \frac{uv}{R} \\ \Delta\Omega \partial_\phi \Sigma + u \partial_R \Sigma + \Sigma \partial_R u = -\frac{\Sigma u}{R} - \frac{v}{R} \partial_\phi \Sigma - \frac{\Sigma}{R} \partial_\phi v \end{cases}$$

Dove si è scritta la perturbazione della pressione come $P - P_0(R)$, e si sono trascurati i termini minori che non influenzano particolarmente l'evoluzione non lineare del sistema.

Si introduce poi una nuova coordinata radiale definita come:

$$\xi = \int_{R_P}^R \Delta\Omega dR \quad (35)$$

che trasforma il sistema in:

$$\begin{cases} \partial_\phi u + u\partial_\xi u + \frac{1}{\Sigma} \partial_\xi P - \frac{1}{\Sigma_0} \partial_\xi P_0 = \frac{2\Omega}{\Delta\Omega} v + \frac{v^2}{\Delta\Omega R} \\ \partial_\phi v + u\partial_\xi v + \frac{c^2}{\Delta\Omega R \Sigma} \partial_\phi \Sigma = -\frac{2B}{\Delta\Omega} u - \frac{uv}{\Delta\Omega R} \\ \partial_\phi \Sigma + u\partial_\xi \Sigma + \Sigma \partial_\xi u = -\frac{\Sigma u}{\Delta\Omega R} - \frac{v}{\Delta\Omega R} \partial_\phi \Sigma - \frac{\Sigma}{\Delta\Omega R} \partial_\phi v \end{cases}$$

I primi membri della prima e della terza equazione di questo sistema sono simili alle equazioni che descrivono il moto di un gas isoentropico unidimensionale (Landau & Lifshitz (1959)) che possiede due invarianti di Riemann R_\pm i quali sono conservati nelle curve caratteristiche C_\pm . (Ved. Appendice)

In questo caso, però, i secondi membri delle equazioni sono diversi da zero, e questo implica che gli invarianti non sono conservati esattamente. Si può dimostrare (Ved. Appendice) che la loro forma analitica è:

$$R_\pm = u \pm \frac{2c}{\gamma - 1} \quad (36)$$

In particolare la caratteristica C_+ incrocia il profilo della wake, mentre la C_- lo segue, e questo implica che C_- si trova sempre nella regione perturbata del fluido, mentre C_+ solo per breve tempo. Per questo motivo è lecito ipotizzare che i cambiamenti di R_+ dovuti a questo incrocio siano ridotti: ne consegue che si può approssimare R_+ al suo valore imperturbato: $R_+ = 2c_0/(\gamma - 1)$. Inserendo questo valore conservato nell'espressione di R_+ si ricava il valore di $u = 2(c_0 - c)/(\gamma - 1)$ e da questo si trova $R_- = 2(c_0 - 2c)/(\gamma - 1)$. L'equazione dell'evoluzione del secondo invariante di Riemann si può ridurre, usando quanto appena ricavato, ad un'equazione di Burger inviscida:

$$\partial_t \chi - \chi \partial_\eta \chi = 0 \quad (37)$$

con:

$$\begin{aligned} \chi &\equiv \frac{\gamma+1}{2} \frac{\Sigma - \Sigma_0}{\Sigma_0} g(R) \\ t &\equiv -\frac{R_P}{l_P} \int_{R_P}^R \frac{\Omega(R') - \Omega_P}{c_0(R')g(R')} dR' \\ \eta &\equiv \frac{R_P}{l_P} \left(\phi + \text{sign}(R - R_P) \int_{R_P}^R \frac{\Omega(R') - \Omega_P}{c_0(R')} dR' \right) \\ g(R) &\equiv \frac{2^{1/4}}{R_P c_P \Sigma_P^{1/2}} \left(\frac{R \Sigma_0 c_0^3}{|\Omega - \Omega_P|} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

dove $l_P = c_P/|2A(R_P)| = (2/3)H_g$ è la lunghezza di Mach, ossia la distanza dal pianeta in cui l'interazione kepleriana rende la velocità del fluido pari a c .

Nella vicinanza del pianeta le definizioni appena date si semplificano in:

$$\begin{aligned} \chi &\sim \frac{\gamma+1}{2^{3/4}} \left| \frac{x}{l_P} \right|^{-1/2} \frac{\Sigma - \Sigma_0}{\Sigma_0} \\ t &\sim \frac{2^{3/4}}{5} \left| \frac{x}{l_P} \right|^{5/2} \\ \eta &\sim \frac{y}{l_P} + \frac{x^2}{2l_P^2} \text{sign}(x) \end{aligned}$$

dove $x = R - R_P$ e $y = R_P\phi$.

Quindi le perturbazioni mareali causate dal pianeta (la cui posizione è data dalla condizione $\eta = costante$) seguono un tragitto parabolico nelle sue vicinanze, mentre più lontano, quando la propagazione non è più uniforme, la forma delle onde è descritta dall'equazione:

$$\phi = \phi_0 - sign(R - R_P) \int_{R_P}^R \frac{\Omega(R') - \Omega_P}{c_0(R')} dR' \quad (38)$$

che rappresenta una spirale dipendente dalle condizioni del disco.

Risonanza di corotazione Se si studia, nel sistema di riferimento corotante, il sistema composto dalla protostella, dal protopianeta e dagli elementi fluidi di disco come una sorta di problema dei tre corpi ristretto, si nota che, oltre alla regione interna del disco (in blu nel disegno sottostante) e a quella esterna (in rosso), esiste anche una regione "a ferro di cavallo" -horseshoe region- (in giallo) la cui larghezza è $x_s \sim R_H$.

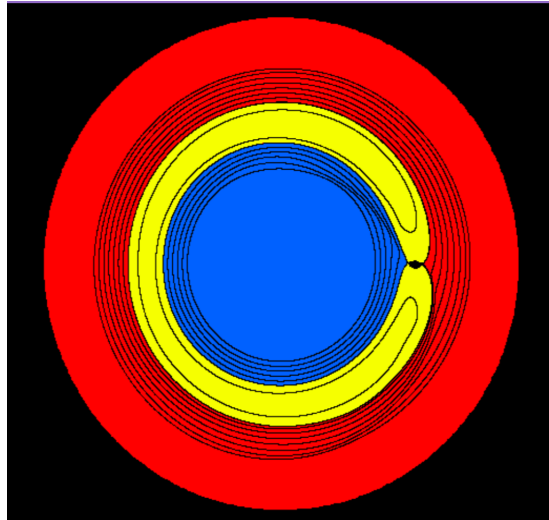


Figura 5: suddivisione del disco che evidenzia la regione a ferro di cavallo, prevista dal problema dei tre corpi ristretto

Se un elemento fluido inizialmente si trova in questa regione nella posizione $R = R_P + b$ (con $0 < b < x_s$) dopo una rivoluzione viene traslato nell'orbita con $R = R_P - b$, e nella rivoluzione successiva torna nell'orbita iniziale. La forma della traiettoria percorsa è, quindi, quella di un ferro di cavallo, nei cui due estremi avviene un periodico scambio di momento con il disco cicostante: questo è il momento torcente di corotazione. Esso si presenta come una seconda componente, dopo quella di Lindblad, del momento torcente di interazione tra pianeta e disco, ma ha

valore in modulo ridotto: per questo negli studi iniziali era stata trascurata. Questa componente vale:

$$\Gamma_C = \frac{3}{4} x_s^4 \Omega_P^2 \Sigma \frac{d(\log(\Sigma/B))}{d \log R} \quad (39)$$

con $B =$ seconda costante di Oort $= \frac{1}{2R} \frac{d(R^2 \Omega)}{dR} = \frac{4\kappa^2}{4\Omega}$.

La trattazione compiuta è semplificata rispetto alla casistica effettiva, in quando si sono trascurati i contributi delle forze di pressione (che, in un disco gassoso, determinano uno spostamento della localizzazione delle risonanze, e modificano anche l'espressione dei momenti torcenti), l'eventuale presenza di un campo elettromagnetico, di turbolenze, di un gradiente di temperatura o di densità superficiale o di entropia, e l'autogravità del disco.

Migrazione planetaria

Lo scambio di momento angolare tra disco e pianeta comporta molte conseguenze, tra cui la migrazione di quest'ultimo. La migrazione di un pianeta inglobato in un disco protoplanetario può avvenire secondo almeno tre regimi diversi, dipendentemente dalla sua massa e dalle proprietà locali del disco. In seguito ci si focalizza sui due regimi noti più dettagliatamente.

Migrazione del primo tipo

I pianeti con massa ridotta (fino alle 50 masse terrestri) non sono in grado di intagliare la gap all'interno del disco, nè di influenzarne la struttura in modo rilevante. Quindi, a causa della presenza del gas del disco vicino al pianeta stesso, avviene uno scambio di momento angolare tra onde di densità e il pianeta, e questo ne guida la migrazione. I coefficienti di Goldreich & Tremaine espressi dall'equazione (24), decrescono simmetricamente spostandosi verso le regioni esterne, e ciò garantisce che lo scambio di energia e momento tra disco e pianeta sia efficiente. Questo tipo di interazione è detta *migrazione del tipo I*.

La risposta del disco a delle risonanze di Lindblad esterne (interne) tende a far perdere (guadagnare) momento al pianeta, inducendolo a mirare verso l'interno (esterno). La combinazione tra le OLR e le ILR agente sul pianeta è detta *momento torcente differenziale di Lindblad*, se è negativo guida il pianeta verso l'interno del disco. Man mano che il numero d'onda azimutale m aumenta, le risonanze tendono ad accumularsi vicino al pianeta, come si nota dall'equazione (28):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m \pm 1}{m} \right)^{2/3} = 1 \rightarrow R_m \sim R_P$$

Osservando la (27) questo si può interpretare come una diminuzione della velocità orbitale all'aumentare del raggio.

Dall'equazione (6), sviluppata nell'ambito dell'approssimazione impulsiva, si nota che l'intensità delle risonanze è maggiore per le OLR, rispetto alle ILR. Analogamente si ha con la teoria del disco fluido qui adottata: dalla (29) si evince che $\Gamma_m^L \propto \frac{1}{\Omega_k(R_m)}$, ricordando che $\Omega(R)$ diminuisce andando verso l'esterno. Inoltre, il termine tra parentesi nella (29) è proporzionale al raggio, e quindi è maggiore per le OLR.

Tutte queste constatazioni suggeriscono che la migrazione di tipo I sia la principale interazione nel sistema disco-pianeta, e che, nel caso di masse planetarie ridotte, essa induce preferibilmente una migrazione verso l'interno. Ciò è stato verificato anche con molte simulazioni analitiche nel corso dei decenni: dagli studi pionieristici di Goidreich & Tremaine (1979) a quelli di D'Angelo & Lubow (2010). Questi calcoli computazionali hanno permesso di ricavare una formula semi-empirica del momento differenziale di Lindblad, assumendo un profilo radiale a potenza della densità superficiale e della temperatura ($\Sigma \propto R^{-p}, T \propto R^{-q}$):

$$\Gamma_{diff,L} = -\frac{1}{\gamma}(1.36 + 0.62p + 0.45q)\Gamma_0 \text{ con:}$$

$$\Gamma_0 = \left(\frac{M_P}{M_*}\right)^2 \left(\frac{H_g}{R_P}\right)^{-2} \Sigma_P R_P^4 \Omega_P^2$$

Dove γ è il rapporto tra i calori specifici di disco e pianeta.

Il tempo di migrazione di tipo I, nel caso, per esempio, di un pianeta con massa simile a quella terrestre che orbita attorno alla protostella ad una distanza di 5 UA e che ha una densità superficiale $\Sigma \sim 10^2 \text{ g cm}^{-2}$ è (ricordando che il momento angolare del pianeta è $J_P = M_P \Omega_P R_P^2$):

$$T_{migrI} \sim \frac{J}{|dJ/dt|} = \frac{M_P \Omega_P R_P^2}{\Gamma_{diff,L}} \sim 10^9 \text{ anni.} \quad (40)$$

Invece, nel caso di un pianeta più massivo (simile a Giove, per esempio) il tempo di migrazione si riduce fino ad arrivare all'ordine di 10^5 anni, ossia minore della durata media della vita del disco. Questo vuol dire che, avvalendosi esclusivamente della migrazione di tipo I, non si dovrebbe riscontrare la presenza di pianeti giganti, nell'universo, poichè sarebbero tutti precipitati nella stella.

Migrazione del secondo tipo

Se il pianeta è sufficientemente massivo riesce a formare una gap, che riduce la quantità di gas vicina all'orbita planetaria. Questo tenderebbe ad indebolire lo scambio di momento angolare tra gas e pianeta, riducendo l'effetto migratorio e incastonando il pianeta all'interno della gap. Tuttavia nuovo materiale del disco tende ad entrare nella lacuna: quello che entra dal disco interno (esterno) esercita un momento

torcente positivo (negativo) sul pianeta che lo induce a migrare verso l'esterno (interno). In questo regime si assume che il momento sia maggiormente "contenuto" nel gas piuttosto che nel pianeta, e che quindi il moto di quest'ultimo sia controllato da un'evoluzione viscosa, in cui le risonanze precedentemente esaminate non intervengono. La velocità tipica di questa migrazione è ricavata applicando le teorie della fluidodinamica.

Le prime due equazioni di Navier-Stokes sono:

1) conservazione della massa (equazione di continuità):

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\Sigma \vec{v}) = 0 \quad (41)$$

2) conservazione della quantità di moto:

$$\frac{D}{Dt} v = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} = -\frac{1}{\Sigma} (\nabla P - \nabla \tilde{\sigma}) - \nabla \Theta \quad (42)$$

Dove:

$\frac{D}{Dt}$ = derivata materiale

Θ = potenziale gravitazionale che soddisfa l'equazione di Poisson $\nabla^2 \Theta = 4\pi G \rho$

$\tilde{\sigma}$ = tensore delle tensioni: è un tensore del secondo ordine che nel caso 3D ha, quindi, 9 componenti.

La viscosità in questo contesto è importante (per quello non si utilizzano le equazioni di Eulero valide per un fluido inviscido) perchè il disco ruota con una rotazione differenziale, e quindi tra i vari anelli vi è "comunicazione", ossia scambio di momento angolare. Nel caso 3D la seconda equazione di Navier-Stokes ha 3 componenti: risolvendola lungo z si trova la condizione di equilibrio idrostatico verticale, lungo r la condizione di equilibrio centrifugo, e lungo ϕ la conservazione del momento angolare.

Si tratta un disco bidimensionale assialsimmetrico, quindi conviene utilizzare delle coordinate polari. In questo sistema di coordinate la divergenza e il gradiente sono:

$$\begin{aligned} \nabla a &= \frac{\partial a}{\partial R} \hat{u}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial a}{\partial \phi} \hat{u}_\phi \\ \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{1}{R} \frac{\partial (R A_R)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \end{aligned}$$

D'ora in poi è sottinteso che si opera sempre in coordinate polari.

Ricordando che il disco è assialsimmetrico (ossia che $\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0$) l'eq. 41 diventa:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R) = 0 \quad (43)$$

Anche l'eq. 42 si semplifica: il tensore $\tilde{\sigma}$ ha solo un termine non nullo: $\sigma_{R\phi} = \sigma_{\phi R} = \eta R \frac{d\Omega}{dR}$ (con η = coefficiente di viscosità e vale:

$$\nabla \cdot \tilde{\sigma}|_{\phi} = \left(\frac{\partial}{\partial R} + \frac{2}{R} \right) \sigma_{R\phi} \quad (44)$$

Poichè la componente verticale lungo z non è rilevante, si può integrare il coefficiente di viscosità lungo la direzione verticale ottenendo $\int_{-\infty}^{+\infty} \eta dz = \nu \Sigma$, con ν viscosità cinematica media. Quindi:

$$\sigma_{R\phi} = \nu \Sigma R \frac{d\Omega}{dR} \quad (45)$$

L'equazione 42 diventa:

$$\Sigma \frac{D}{Dt} \vec{v} = -(\nabla P - \nabla \sigma_{R\phi}) - \Sigma \nabla \Theta \quad (46)$$

con P = integrale verticale della pressione.

Questa equazione vettoriale ha 2 componenti: una radiale e una azimutale. Si considera quest'ultima, in cui ∇P e $\nabla \Theta$ influiscono a causa dell'assisimmetria del disco.

$$\left(\frac{D\vec{v}}{Dt} \right)_{\phi} = \frac{\partial v_{\phi}}{\partial t} + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial(Rv_R)}{\partial R} + \frac{\partial v_{\phi}}{R \partial \phi} \right) \cdot v_{\phi} = \frac{\partial v_{\phi}}{\partial t} + v_R \frac{\partial}{\partial R} v_{\phi} + \underbrace{\frac{v_{\phi}}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} v_{\phi}}_{=0} + \frac{v_R v_{\phi}}{R}$$

Quindi la 42 diventa:

$$\Sigma \left(\frac{\partial v_{\phi}}{\partial t} + v_R \left(\frac{v_{\phi}}{R} + \frac{\partial v_{\phi}}{\partial R} \right) \right) = (\nabla \cdot \sigma)_{||\phi} \quad (47)$$

Moltiplicando ambo i membri di quest'equazione per R , e ricordando la legge di continuità si può scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Sigma R v_{\phi}) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \Sigma v_R v_{\phi}) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dR} \right) \quad (48)$$

Questa equazione sottolinea come le forze viscosse siano essenziali nella teoria di accrezione di un disco e nella migrazione di tipo II. Il primo membro rappresenta la derivata materiale di $\Sigma R v_{\phi}$, ossia del momento angolare specifico di un anello di disco posto a distanza R dall'attrattore centrale. Il secondo addendo, in particolare, indica la perdita di momento angolare dovuta alla caduta radiale di materiale nella stella. Il secondo membro rappresenta il momento torcente esercitato dalle forze viscosse per unità di area. Moltiplicandolo per $dA = 2\pi R dR$ si ottiene il momento torcente di un anello largo dR . Il momento torcente di un disco di raggio R si ottiene:

$$\Gamma_R = \int_0^R \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dR} \right) \underbrace{2\pi R dR}_{=dA} = 2\pi \nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dR}$$

Il segno positivo indica convenzionalmente che il movimento avviene verso l'interno.

Svolgendo i conti dell'eq. 48 (con $v_\phi = R\Omega$) si trova:

$$R^2 \Omega \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial (R^2 \Omega)}{\partial t} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial R} (R^2 \Omega) \cdot \Sigma R v_R + R^2 \Omega \frac{\partial}{\partial R} (\Sigma v_R \Omega) \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dR} \right)$$

Definendo $(R^2 \Omega)' = \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \Omega)$:

$$\rightarrow R^2 \Omega \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial (R^2 \Omega)'}{\partial t} + (R^2 \Omega) \Sigma v_r + R \Omega \frac{\partial}{\partial R} (\Sigma v_R \Omega) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dR} \right)$$

da cui, ricordando l'equazione di continuità e facendo un cambio di variabili:

$$\rightarrow \Sigma \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \Omega) \frac{\partial R}{\partial t} + (R^2 \Omega)' \Sigma v_R = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dR} \right)$$

da cui infine

$$R \Sigma v_R = \frac{\partial}{\partial R} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dR} \right) \cdot \frac{1}{(R^2 \Omega)'}$$

inserendo questo risultato nell'equazione di continuità:

$$\frac{d\Sigma}{dt} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial}{\partial R} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dR} \right) \cdot \frac{1}{(R^2 \Omega)'} \right) \quad (49)$$

Questa equazione descrive l'evoluzione temporale della densità superficiale del disco, mettendola in correlazione con la viscosità cinematica.

Ricordando l'equazione (9) si può ricavare il caso particolare di un disco kepleriano ($\Omega = \Omega_k$) in cui $\frac{d\Omega}{dR} = -\frac{3\Omega_k}{2R}$:

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{3}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\sqrt{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\nu \Sigma \sqrt{R} \right) \right) \quad (50)$$

Si può compiere un'analisi dimensionale per stimare il tempo scala tipico dell'evoluzione della densità superficiale dovuta alle forze viscosi, e si verifica agevolmente che

$$[T] \propto \frac{[L]^2}{[\nu]} \quad (51)$$

Per capire in modo più approfondito il flusso di momento angolare, è utile derivare la soluzione in uno stato stazionario. Moltiplicando ambo i membri dell'equazione di continuità per $2\pi R dR$ per riferirsi ad un anello di disco, si trova che:

$$\dot{M} = 2\pi R \Sigma v_R \quad (52)$$

Dove \dot{M} è il costante flusso di massa attraverso l'anello del disco. Convenzionalmente il segno negativo indica che, se $\dot{M} > 0$ il flusso si muove verso l'interno. Si procede analogamente con l'equazione 48 che esprime la conservazione della quantità di moto.

$$\dot{J} = \dot{M}R^2\Omega + 2\pi\nu\Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dR} \quad (53)$$

Nel caso di un disco che ha velocità decrescente con il raggio, come quello kepleriano (dove $d\Omega/dR = -3\Omega/2R$, questa equazione implica un trasporto di momento angolare verso l'esterno).

L'immagine sottostante illustra un prospetto della velocità angolare del disco: è ragionevole pensare che man mano che ci si avvicina alla stella centrale, la velocità decresce sempre di più rispetto al valore kepleriano, fino ad incontrare la lenta velocità di rotazione della stella stessa.

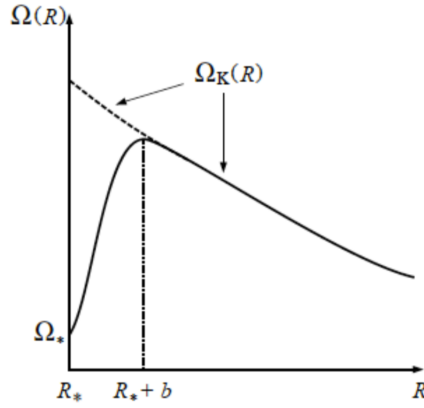


Figura 6: Illustrazione schematica del profilo della velocità angolare di un disco, man mano che ci si avvicina alla stella centrale [immagine tratta da *Substructures in Protoplanetary Discs Dust and Gas Dynamics* di G. DiPierro, G. Lodato; cap. 1]

Quindi la decrescita della velocità avviene in uno strato compreso tra R_* e $R_{in} = R_* + b$. Nel limite esterno di questa regione si verifica un massimo di Ω , ossia localmente il profilo della velocità di appiattisce: questo indica che la derivata prima rispetto ad R si annulla, e che quindi l'equazione del flusso del momento si semplifica in $\dot{J} = \dot{M}R_{in}^2\Omega_{in}$. Ricordando che questo flusso è una costante si può porre:

$$\begin{aligned} \dot{M}R_{in}^2\Omega_{in} &= \dot{M}R^2\Omega + 2\pi\nu\Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dR} \\ \rightarrow \dot{M}R^2\Omega \left(-1 + \frac{R_{in}^2\Omega_{in}}{R^2\Omega} \right) &= 2\pi\nu\Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dR} \end{aligned}$$

E poichè $\frac{d \ln(\Omega)}{dR} = \frac{d\Omega}{dR} \cdot \frac{1}{\Omega}$ e $\frac{d \ln R}{dR} = \frac{1}{R} \rightarrow \frac{d\Omega}{dR} = \frac{\Omega d(\ln \Omega)}{R d(\ln R)}$, e ricordando l'espressione kepleriana $\Omega = \sqrt{GM} \cdot R^{-3/2}$ si trova:

$$2 \left| \frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln R} \right| \pi \nu \Sigma = \dot{M} \left(1 - \sqrt{\frac{R_m}{R}} \right) \quad (54)$$

Quindi:

$$2 \left| \frac{\partial \ln(\sqrt{GM} R^{-3/2})}{\partial R} \right| \frac{\partial R}{\partial \ln R} \pi \nu \Sigma = 2 \cdot \frac{3}{2} R^{-5/2} R^{3/2} R \pi \nu \Sigma = 3 \pi \nu \Sigma = \dot{M} \left(1 - \sqrt{\frac{R_m}{R}} \right). \quad (55)$$

che, per grandi raggi $R_{in} \ll R \rightarrow \frac{R_{in}}{R} \sim 0$, diventa: $\dot{M} = 3 \pi \nu \Sigma$. Questa relazione è stata grandemente usata nell'osservazione dei dischi protostellari per ricavare una stima della viscosità partendo dalla misura della velocità di accrezione della massa. Ricavando \dot{M} dalla (55) ed inserendo questo valore nella (52) si trova la velocità radiale del gas in un disco stazionario:

$$v_R = -\frac{3\nu}{2R} \left(1 - \sqrt{\frac{R_{in}}{R}} \right)^{-1} \approx -\frac{3\nu}{2R} \quad (56)$$

Shakura & Sunyaev (1973) introdussero la cosiddetta *prescrizione* α che esprime la viscosità cinematica come $\nu = \alpha c_S H_g$. Essendo, dalla definizione di altezza di scala, $c_s = H_g \Omega$ e $v_k = \Omega_k R$ si trova:

$$v_R = -\frac{3\nu}{2R} = -\frac{3\alpha c_S H_g}{2R} = -\frac{3\alpha H_g \Omega_k H_g R}{2R R} = -\frac{3}{2} \alpha \left(\frac{H_g}{R_P} \right)^2 v_k \quad (57)$$

Quindi questa è la tipica velocità in uno stato stazionario della migrazione di tipo II. Si nota che, a differenza della migrazione di tipo I, la velocità dipende da pochi parametri ed è indipendente dalla massa del pianeta. Tuttavia, per tenere conto del fatto che i pianeti molto massivi possono contrastare per inerzia la migrazione, è necessario valutare la conservazione del momento angolare in un anello sottile che orbita intorno al pianeta ad un raggio R_P . L'interazione mareale col pianeta ne modifica il momento angolare:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial t} \right)_P = \frac{d}{dt} (M_P R_P^2 \Omega_P) = \frac{1}{2} M_P \Omega_P R_P \dot{R}_P \quad (58)$$

Risolvendo l'equazione (48) con $\Omega = \Omega_k$, $v_R = \dot{R}$, si ottiene:

$$\frac{d(\Sigma R v_\phi)}{dt} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\Sigma \dot{R} R^3 \Omega_k \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\nu \Sigma \frac{3}{2} \Omega_k R^2 \right)$$

da cui, moltiplicando per lo spessore dell'anello $2\pi R_P dR$ e semplificando:

$$\frac{\partial J_P}{\partial t} + 2\pi R_P^3 \dot{R}_P \Sigma_P \Omega_k = 3\pi \nu \Sigma R_P^2 \Omega_k \quad (59)$$

Ricordando il valore di \dot{J} la (59) diventa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M \Omega R \dot{R} + 2\pi R^3 \dot{R} \Omega \Sigma &= 3\pi \nu \Sigma R^3 \Omega \rightarrow \\ \dot{R} &= \frac{6\pi \nu \Sigma R}{M + 4\pi R^2 \Sigma} \rightarrow \\ \int_0^t \frac{dR}{dt} dt &= \int_0^{R_P} dR = \int_0^t \frac{6\pi \nu \Sigma R}{M + 4\pi R^2 \Sigma} dt \rightarrow \\ R_P &= \frac{6\pi \nu \Sigma R}{M + 4\pi R^2 \Sigma} \cdot t \rightarrow \\ t &= \frac{M + 4\pi R^2 \Sigma}{6\pi \nu \Sigma} \frac{2R^2}{2R^2} \text{ da cui:} \end{aligned}$$

$$t_{migr,II} = \frac{M_P + 4\pi R_P^2 \Sigma_P}{4\pi R_P^2 \Sigma_P} \frac{2R_P^2}{3\nu(R_P)} = \frac{M_P + M_g(R_P)}{M_g(R_P)} t_{visc}(R_P) = \frac{1+B}{B} t_{visc}(R_P) \quad (60)$$

Con:

- $t_{visc}(R_P)$ il tempo di evoluzione viscosa degli elementi fluidi del disco in un tratto pari a R_P . Essendo $|v| = \frac{R_P}{t_{visc}} = \frac{3\nu}{2R_P}$ si può scrivere: $t_{visc}(R_P) = \frac{2R_P^2}{3\nu(R_P)}$;
- $M_g(R_P) = 4\pi R_P^2 \Sigma_P =$ massa locale del disco gassoso;
- $B = \frac{M_g(R_P)}{M_P}$.

Da questo risultato si possono distinguere 2 casi limite:

- 1) $B \ll 1$: regime in cui domina il pianeta: il pianeta è molto massivo, e la sua inerzia ne arresta la migrazione, di conseguenza il materiale si accumula dal disco alla gap. Per pianeti estremamente massivi $B \rightarrow 0$, quindi $t_{migr,II} \gg t_{visc}$;
- 2) $B \gg 1$: regime in cui domina il disco: il pianeta è poco massivo e segue l'evoluzione viscosa. $t_{migr,II} \sim t_{visc}$.

Poichè $B \propto R$, si ha che la migrazione dei pianeti massivi tende a bloccarsi verso l'esterno del disco. Inoltre, a differenza della migrazione di tipo I, quella di tipo II non dipende dall'espressione del momento torcente mareale.

Criteri di apertura della gap nei dischi gassosi

Sono tre i principali criteri che favoriscono la formazione della gap attorno al pianeta:

- 1) *criterio termico* che afferma che il raggio di Hill del pianeta è maggiore dell'altezza di scala del disco. In questo modo le onde di densità causate dall'interazione gravitazionale col pianeta si smorzano in breve spazio, ossia cedono il loro momento agli elementi del disco, i quali, eccitandosi, iniziano a migrare formando la gap.

Precedentemente si era introdotto il concetto di massa termica M_{th} , ossia la massa limite del pianeta nello studio delle risonanze di Lindblad tale che $R_H \sim H_g$. Il criterio termico implica che la massa del pianeta sia almeno 3 volte maggiore M_{th} :

$$R_H > H_g \rightarrow R_P \left(\frac{M_P}{3M_*} \right)^3 > H_g \rightarrow M_P > 3 \left(\frac{H_g}{R} \right)^3 M_* = 3M_{th} \quad (61)$$

2) Il processo che porta all'apertura della gap deve essere più veloce rispetto al riempimento viscoso della stessa. Per tradurre matematicamente questa richiesta, si ipotizza che il primo criterio sia verificato, e si cerca poi di confrontare il tempo necessario per svuotare un anello di disco con quello per riempirlo viscosamente. Approssimativamente la più piccola gap che si può aprire ha semiampiezza pari a $b_{min} = \max(R_H, 2H_g/3)$, e poichè il primo criterio è soddisfatto, si ha che $b_{min} = R_H$. Per semplificare ulteriormente si può approssimare l'ampiezza stessa a R_H (consistente, tra l'altro, con l'ipotesi che essa sia proporzionale alla massa del pianeta). Il momento angolare specifico di un anello di spessore $\delta R = R_H$ a distanza R dal pianeta è $j = R^2 \Omega_k(R)$, la variazione di j tra la posizione iniziale R_P e quella finale $R_P + R_H$ si può scrivere:

$$\delta j = \frac{\delta j}{\delta R} \delta R = \frac{j_{R_P+R_H} - j_{R_P}}{(R_P + R_H) - R_P} \cdot ((R_P + R_H) - R_P) = \frac{\delta j}{\delta R} \cdot R_H \quad (62)$$

Ricordando che $\left(\frac{\delta j}{\delta R} \right)_{R_P} = \left(\frac{\partial(R^2 \Omega_k)}{\partial R} \right)_{R_P} = 2R_P \Omega - \frac{3}{2} R_P \Omega = \frac{R_P \Omega(R_P)}{2}$ la (62), dopo averla moltiplicata per la massa M dell'anello $= 2\pi R_P \Sigma \delta R = \pi R_P \Sigma R_H$, diventa:

$$2\pi R_P \Sigma \delta j = \Delta J = 2\pi R_P R_H \Sigma \frac{R \Omega}{2} R_H = \pi R_P^2 R_H^2 \Sigma \Omega(R_P) \quad (63)$$

Il tipico tempo scala per svuotare tutta la regione dal gas è: $t_{open} = \frac{\Delta J}{|dJ-dt|} = \frac{\Delta J}{\Gamma}$, dove è il momento torcente totale di Lindblad (valutato indifferentemente con l'approccio impulsivo o quello fluidistico). Il tempo per il riempimento viscoso, invece, si può stimare come $t_{close} = \frac{R_H^2}{\nu}$, ricordando l'analisi dimensionale svolta in (51), e che R_H si può interpretare come una "lunghezza tipica" del fenomeno studiato. Si farà una stima della condizione che deriva da questo criterio utilizzando Γ_{TOT} ricavato nell'equazione (15) (con l'approssimazione impulsiva), e usando $b_{min} = R_H$, e ricordando la prescrizione di Shakura & Sunyaev che permette di scrivere: $\nu = \alpha c_s H_g$.

$$t_{open} > t_{close} \rightarrow \frac{\pi R_P^2 R_H^2 \Sigma \Omega(R_P)}{\frac{8}{27} \left(\frac{M_P}{M_*} \right)^2 \Sigma \Omega^2 \frac{R_P^7}{R_H^3}} > \frac{R_H^2}{\alpha c_s H_g} \Rightarrow \frac{M_P}{M_*} > \frac{3\pi\alpha}{8} \left(\frac{H_g}{R_P} \right)^2 \quad (64)$$

3) *limite inerziale*, che afferma che la velocità di migrazione del pianeta attraverso la sua horseshoe region è più lenta rispetto al processo di apertura della gap. Assumendo un profilo a potenza della densità del gas ($\Sigma_g \propto R^{-p}$), Ward (1997) ha

stimato questo limite come:

$$\frac{M_P}{M_*} > \left(\frac{M_P}{M_*} \right)_{migr} \sim \frac{7}{8} p^2 \frac{H_g}{R_p} \left(\frac{\pi H_g^2 \Sigma_g(R_P)}{M_*} \right) \quad (65)$$

In genere, come si nota dalle simulazioni al computer, questo limite è meno restrittivo del primo.

Conclusioni

Il sistema costituito da un disco protostellare con inglobato un protopianeta interagisce in molti modi diversi, che ancor oggi devono essere pienamente compresi. Anche per questa ragione sono utili le simulazioni svolte al computer: possono confermare o inficiare le teorie elaborate, contribuendo a chiarire questi fenomeni così complessi. La mutua interazione tra i due può causare la migrazione del pianeta (secondo regimi dipendenti dalla sua massa, ma anche dalle condizioni del disco) e la propagazione di onde di densità, che portano alla formazione della gap o della wake, le quali influenzano l'evoluzione del disco stesso. Il gran numero di osservazioni astronomiche degli ultimi decenni contribuisce sicuramente a mantenere vivo l'interesse verso quest'ambito, stimolando una ricerca che, in fondo, riguarda anche lo stesso Sistema Solare, e quindi noi stessi.

Appendice

Le curve caratteristiche (che nel caso tridimensionale sono delle superfici) rappresentano anche la direzione lungo cui le perturbazioni si propagano. In un caso unidimensionale, per esempio, le curve caratteristiche sono delle linee nel piano $x - t$ la cui pendenza dx/dt è pari alla velocità con cui la perturbazione si propaga in un SDR fisso. Nel mezzo le perturbazioni si propagano con la velocità del suono c lungo la direzione positiva o negativa dell'asse su cui avviene il moto. Questo vuol dire che, nel SDR fisso, si ha $dx/dt = v \pm c$, dove v è la velocità del mezzo rispetto al SDR fisso. A seconda del verso positivo o negativo considerato, si hanno due famiglie di curve caratteristiche dette C_+ e C_- . C'è anche una terza famiglia (C_0) rappresentata dalle perturbazioni che si propagano con il gas: $dx/dt = v$. Quest'ultima relazione è la costante di integrazione usata quando si vuole ricavare la forma delle curve C_{\pm} , integrando la relazione differenziale che le definisce. La ricerca delle caratteristiche, in genere, è molto utile perchè lungo queste curve un'equazione differenziale alle derivate parziali di primo grado (PDE) si comporta come un'equazione differenziale ordinaria (ODE), la quale, una volta calcolata, può essere trasformata in soluzione per la PDE.

Si ricavano gli invarianti di Riemann e la legge che ne esprime l'evoluzione nel caso

di un gas isoentropico unidimensionale ed inviscido. L'equazione di continuità e l'equazione di Eulero sono:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\Sigma v) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

L'equazione di continuità si può scrivere inserendo la pressione P al posto della densità Σ . Basta effettuare un cambio di variabili: $\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{\partial \Sigma}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t}$; $\frac{\partial \Sigma}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Sigma}{\partial x}$. Così si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + v \frac{\partial P}{\partial x}(\Sigma v) + \Sigma c^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Dividendo la prima equazione per $\pm \Sigma c$ e sommandola alla seconda si ottiene la seguente equazione del moto:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \pm \frac{1}{\Sigma c} \frac{\partial P}{\partial t} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \pm \frac{1}{\Sigma c} \frac{\partial P}{\partial x} \right) (v \pm c) = 0 \quad (66)$$

Adesso si introducono gli invarianti di Riemann sconosciuti $R_{\pm} = v \pm \int \frac{dP}{\Sigma c}$, ricordando che Σ, c , nel flusso isoentropico considerato sono delle funzioni note di P e questo conduce a $R_{\pm} = v \pm 2c/(\gamma - 1)$. In termini di questa quantità l'equazione del moto si può riscrivere come l'equazione dell'evoluzione degli invarianti di Riemann:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (v \pm c) \frac{\partial}{\partial x} \right) R_{\pm} = 0 \quad (67)$$

Bibliografia

- G. Lodato, G. Dipierro: *Substructures in Protoplanetary Discs Dust and Gas Dynamics* (2016)
- C. Baruteau, F. Masset: *Recent developments in planet migration theory* (2012)
- P. Armitage: *Astrophysics of planet formation*, Cambridge University Press (2010)
- P. Goldreich, S. Tremaine: *Disk – satellite interactions*, American Astronomical Society (1980)
- G. I. Ogilvie, S. H. Lubow: *On the wake generated by a planet in a disc*, University of Cambridge (2001)
- J. Goodman, R. R. Rafikov: *Planetary torques as the viscosity of protoplanetary disks*, The Astrophysical Journal (2001)
- R. R. Rafikov: *Non linear propagation of planet – generated tidal waves*, The Astrophysical Journal (2002)
- J. Binney, S. Tremaine: *Galactic Dynamics*, Second Edition, Princeton Series in Astrophysics
- L. D. Landau, E. M. Lifshitz: *Fluid Mechanics*, Second Edition, Pergamon Press (1987)