UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

L'invarianza di gauge nell'azione della stringa

Relatore

Prof. Alessandro Sfondrini

Laureando

Emanuele Maria Cattaneo

Anno Accademico 2024/2025

Ringraziamenti

I miei più sentiti ringraziamenti a tutti gli amici che mi hanno accompagnato in questo percorso triennale, stimolandomi ad andare avanti e aiutandomi nei momenti di difficoltà.
Non da meno, ringrazio i miei genitori, mio nonno e mio fratello per avermi lasciato la libertà di proseguire con le mie scelte, e per aver sempre creduto in me senza alcuna condizione in cambio.
Se oggi posso parlare di teoria delle stringhe, il merito è soprattutto loro.

Indice

Introduzione e conclusioni

Le teorie di stringhe rappresentano uno dei tentativi più attuali di unificare in un solo sistema le quattro interazioni fondamentali [1]: le interazioni elettromagnetiche, deboli e forti, formalizzate da teorie di campo quantistiche, assieme alla gravità, che descriviamo tramite la relatività generale, una teoria di campo classica. Il primo obiettivo, ancora irrisolto e a cui queste teorie tentano almeno in parte di chiarire, è capire come costruire una teoria di *Quantum gravity*, in grado di spiegare la struttura quantistica dello spaziotempo, che si possa poi annettere alle altre *Quantum field theories* (QFT).
Le teorie di stringhe cominciano descrivendo le interazioni attraverso degli oggetti fondamentali 1D, le stringhe, i cui modi di vibrazione a basse energie riproducono i comportamenti delle particelle nelle tradizionali QFT usate per il modello standard. In particolare, da un punto di vista della struttura matematica esse risultano delle QFT in uno spazio 2D, il *world-sheet* della stringa.
Una proprietà che accomuna queste teorie è il fatto di essere teorie di gauge, e di presentare oltre ad invarianze comuni alle teorie di campo note, anche altre specifiche delle QFT 2D, come l'invarianza conforme di Weyl. Oggi lo studio di queste invarianze, in particolare a seguito della congettura di corrispondenza AdS/CFT [2], riscuote grande successo e interesse tra i diversi filoni di ricerca.

L'obiettivo che ci proponiamo in questa tesi è di introdurre al lettore alcune delle caratteristiche elementari delle teorie di stringhe, studiando la stringa chiusa di *Polyakov* in spaziotempo piatto.
Nel primo capitolo introdurremo la stringa classica di Nambu-Goto e di Polyakov, sue formulazioni nel formalismo lagrangiano e hamiltoniano, e individueremo le simmetrie e le invarianze di gauge del sistema.
Nel secondo capitolo discuteremo su cosa significa avere delle invarianze di gauge e decidere di eliminarle da un punto di vista hamiltoniano e simplettico, introducendo alcune proprietà dei sistemi hamiltoniani vincolati, e metteremo in pratica quanto discusso sul nostro sistema applicando la *gauge di cono luce uniforme* [3], e utilizzando le condizioni di vincolo per calcolare perturbativamene la metrica.
Infine, nel terzo capitolo prima studieremo il sistema ridotto tramite un approccio perturbativo seguendo quanto fatto in [3], calcolando nel limite di decompattificazione l'Hamiltoniana fino all'ordine quartico nei campi, le soluzioni del moto imperturbate, la legge di dispersione per la stringa libera e la matrice di Scattering al tree level (generalizzando il risultato in caso di azioni effettive relativistiche); poi richiamando risultati di teoria di integrabilità discuteremo il calcolo dello spettro dell'Hamiltoniana in volume finito con un accenno alle correzioni ed ai contributi trascurati. Questo risultato mostrerà che, nonostante la teoria sembri dipendere da un parametro di gauge, in realtà le osservabili fisiche, in particolare lo spettro, sono indipendenti dalla scelta di gauge, come ci aspettiamo che debba essere.

Sebbene la trattazione sia elementare ed adotti per l'analisi un modello semplice e noto, è sufficiente modificare appena gli elementi in gioco per rendere le questioni analizzate di interesse di ricerca attuale. Per esempio, nella teoria di superstringhe l'azione utilizzata è composta da un termine fermionico (anch'esso soggetto a problemi di invarianza di gauge), e da uno bosonico, descritto da un'azione analoga a quella di Polyakov. Queste superstringhe si possono ambientare in spazitempi curvi, solitamente compatibili con l'applicazione della corrispondenza AdS/CFT, come fatto per $AdS_5 \times T^5$ in [3] o per $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ in [11] o in [4]. In questi casi il calcolo della matrice di Scattering e dello spettro hamiltoniano richiedono tecniche di bootstrap che sfruttano proprietà legate all'integrabilità di questi

modelli, e risultano in diversi casi ancora un problema aperto.
Infine, la stringa di Nambu-Goto si rivela sufficientemente non banale da essere utilizzata nello studio di teorie di *Quantum gravity* [5], e permette di analizzare nella stessa teoria fenomeni come i *Quantum Black Holes* e il principio di indeterminazione di Heisenberg per le stringhe.

Stringa nello spaziotempo piatto

1.1 Azione della particella relativistica

Prima di descrivere le proprietà dell'azione della stringa, può essere utile rivedere lo stesso problema qualora si voglia descrivere una particella classica relativistica.
Dato uno spaziotempo a D dimensioni $\mathbb{R}^{1,D-1}$, la cui metrica segue la convenzione:

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, .., +1).$$

Richiedendo un'azione che sia invariante sotto trasformazioni di Lorentz (ovvero sia uno scalare) e compatibile con il limite di azione libera non relativistica otteniamo[1]:

$$S = -m \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \sqrt{1 - \dot{X}^i \dot{X}^j \delta_{ij}}. \tag{1.1}$$

Dove m è la massa della particella e $X^\mu = (X^0, X^i)$ la quadri-posizione, con $i, j = 1, .., D-1$ [2].
Un modo equivalente per scrivere l'azione affinché risulti esplicitamente Lorentz invariante consiste nell'esplicitare la dipendenza dall'intervallo spazio-temporale s, definito dall'integrale della radice di $ds^2 = dX^\mu dX^\nu \eta_{\mu\nu}$, come:

$$S = -m \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}s. \tag{1.2}$$

Inoltre, se si vuole che la teoria sia invariante per cambi di coordinate (come avviene per esempio in relatività generale), è possibile introdurre un generico parametro di tipo tempo[3] τ, che rappresenti la coordinata della traiettoria della particella. Dopo questa aggiunta, si può riscrivere l'azione (1.1) nella forma più generale:

$$S = -m \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau \sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu}}. \tag{1.3}$$

Dove $\dot{X}^\mu = dX^\mu/d\tau$. A questo punto potrebbe sembrare che la teoria possegga un grado di libertà in più, dato che nell'azione i campi da determinare sono D e non più $D-1$. In realtà l'inserimento del parametro in (1.3) rende solamente implicita la dipendenza tra X^i e X^0 in (1.1). È possibile ritrovare tale relazione scrivendo il momento coniugato P^μ:

$$P_\mu := \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} = m \frac{\dot{X}^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^\nu \dot{X}_\nu}}, \tag{1.4}$$

[1] Da qui in avanti si farà uso del sistema di unità naturali, per cui c $= \hbar = 1$. In questa notazione sarà equivalente scrivere $X^0 = t$.

[2] Da qui in avanti si adotterà la notazione degli indici ripetuti di Einstein, la cui metrica con cui contrarre sarà, dove non esplicitata, δ_{ij} dove presenti indici latini e $\eta_{\mu\nu}$ dove presenti gli indici greci.

[3] Un parametro τ si dice di tipo tempo se $g_{\mu\nu}\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu < 0$ per ogni punto X^μ parametrizzato dalla curva.

e calcolandone il quadrato:

$$P^2 = P^\mu P_\mu = -m^2, \qquad P^2 + m^2 = 0. \tag{1.5}$$

Si osserva immediatamente che i momenti non sono tutti indipendenti ma sono legati da un'equazione algebrica, che in questo caso è la legge di dispersione per la particella libera.

Una volta note le equazioni del moto (EOM) della particella relativistica, vogliamo trovare una nuova azione contenente un ulteriore campo $e(\tau)$, tale per cui rimangano invariate le soluzioni per le quadri-posizioni X^μ, e si preservino le simmetrie di Lorentz e di riparametrizzazione. Ciò è possibile per esempio scrivendo:

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau \left(e^{-1}\dot{X}^2 - em^2\right). \tag{1.6}$$

Dalle EOM si ricava:

$$\partial_\tau(e^{-1}\dot{X}^\mu) = 0, \qquad \dot{X}^2 + e^2m^2 = 0. \tag{1.7}$$

Sostituendo e nella prima EOM con quanto si ricavato dalla seconda, si trova che il moto di una particella è equivalente a quello descritto da (1.1). È possibile interpretare e come: $e = \sqrt{-g_{\tau\tau}}$, dove g è la metrica indotta da $\eta_{\mu\nu}$ sulla traiettoria della particella (corrispondente ad una varietà subriemanniana di dimensione 1). Ciò è confermato dal fatto che l'invarianza per riparametrizzazione rimane valida nella teoria qualora si consideri e trasformare con l'interpretazione definita sopra:

$$\tau \to \tau - \eta(\tau), \qquad \delta e = \frac{d}{d\tau}(\eta(\tau)e), \qquad \delta X^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau}\eta(\tau). \tag{1.8}$$

In virtù di quanto detto è possibile dare una ulteriore interpretazione generale alla teoria che è appena stata costruita: si può considerare la teoria descritta da (1.6) come una teoria di gravità (cioè tale per cui il principio variazionale restituisce una metrica) su una una varietà 1d parametrizzata da τ, detta *world-line*, in cui sono presenti D campi scalari X^μ.

1.2 Azione della stringa

Che cos'è una stringa relativistica? Se una particella si rappresenta come un punto il cui moto è descritto da una curva nello spaziotempo, una stringa sarà equivalente ad una circonferenza deformabile[4], il cui moto nello spaziotempo descrive una superficie omeomorfa ad un cilindro. Tale superficie determinata dalle EOM prende il nome di *world-sheet*. Per descrivere una stringa tramite un'azione è necessario un nuovo parametro di tipo spazio $\sigma \in [-R/2, R/2]$. L'azione si potrà quindi scrivere come:

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau \int_{-R/2}^{+R/2} \mathrm{d}\sigma\, \mathcal{L}(\tau,\sigma) = \int \mathrm{d}^2\sigma\, \mathcal{L}(\tau,\sigma). \tag{1.9}$$

Dove $\mathcal{L}(\tau,\sigma)$ è la densità lagrangiana, mentre nella seconda uguaglianza si usa la convenzione $\sigma = (\sigma,\tau)$.

[4] In generale le stringhe si dividono in stringhe chiuse se omeomorfe a $\mathbb{S}^1$ e aperte se omeomorfe a l'intervallo $[0,1]$.

1.2.1 Stringa di Nanbu-Goto

L'azione più semplice da costruire del tipo (1.9) si ottiene in analogia con (1.2) considerando l'elemento invariante di superficie, ed è detta *stringa di Nambu-Goto*:

$$S = -T \int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{-\gamma}. \tag{1.10}$$

Dove $\gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta}) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha}\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^\beta}\eta_{\mu\nu}$ è la metrica indotta sul world-sheet dallo spaziotempo e T una costante che, in analogia con la massa per la particella, quantifica la tensione della stringa. In questo caso l'invarianza per cambio di coordinate la si osserva riconoscendo che l'integrando è una forma di volume invariante del world-sheet, oppure scrivendo esplicitamente il determinante in funzione dei campi:

$$S = -T \int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{-\dot{X}^2 \acute{X}^2 + (\dot{X}^\mu \acute{X}_\mu)^2}. \tag{1.11}$$

Dove $\dot{X}^\mu = \partial_\tau X^\mu$, $\acute{X}^\mu = \partial_\sigma X^\mu$, $\dot{X}^2 = \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu$ e $\acute{X}^2 = \acute{X}^\mu \acute{X}_\mu$. Dal metodo variazionale, facendo uso dell'identità $\delta\sqrt{-\gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta}$ si ottengono le equazioni del moto:

$$\partial_\alpha(\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\beta X^\mu) = 0. \tag{1.12}$$

Dove $\alpha, \beta = 0, 1$, $\partial_0 = \partial_\tau$ e $\partial_1 = \partial_\sigma$.

1.2.2 Stringa di Polyakov

Similmente a quanto fatto in (1.6) vogliamo introdurre un campo $h^{\alpha\beta}$, che definisce una metrica sul world-sheet. L'esempio più importante che realizza questa condizione è la *stringa di Polyakov*:

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}. \tag{1.13}$$

Le EOM della teoria per X^μ e $h^{\alpha\beta}$sono:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\sqrt{-h} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\rho} \partial_\rho X^\mu \partial_\gamma X^\nu \eta_{\mu\nu} + \sqrt{-h}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu = 0, \\ &\partial_\alpha(\sqrt{-h} h^{\alpha\beta}\partial_\beta X^\mu) = 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

In questo caso si vede che $h^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta}$ è soluzione in aggiunta all'equazione (1.14), ma contrariamente a quanto visto in (1.6) non è più l'unica: Il campo $h^{\alpha\beta}$ può assumere altri valori oltre alla metrica indotta, a causa di ulteriori simmetrie nella teoria.
Osserviamo che l'azione di Polyakov può essere interpretata come una teoria di campo classica a 1+1 dimensioni (una temporale e una spaziale) in grado di determinare la metrica $h^{\alpha\beta}$ e D campi scalari X^μ.

1.2.3 Simmetrie e invarianze di gauge

Studiamo ora le simmetrie di (1.13):

- L'azione è invariante per trasformazioni di Poincarè del tipo:

$$X^\mu \to \Lambda^\mu_\nu X^\nu + c^\mu. \tag{1.15}$$

  Con Λ^μ_ν trasformazione di Lorentz e c^μ quadri-vettore costante. Osserviamo che le traslazioni dei campi scalari nello spaziotempo di background costituiscono una simmetria continua, e per il teorema di Noether avremo D cariche conservate:

$$\mathbb{P}_\mu = \int_{-R/2}^{+R/2} \mathrm{d}\sigma P_\mu \tag{1.16}$$

In particolare chiamiamo rispettivamente energia e momento angolare i momenti relativi alle coordinate spaziali 0 e 1.

$$E = -\int_{-R/2}^{+R/2} \mathrm{d}\sigma P_0 \qquad J = \int_{-R/2}^{+R/2} \mathrm{d}\sigma P_1. \tag{1.17}$$

- L'azione è invariante per cambi di coordinate in (τ, σ), in cui X^μ trasformano come scalari mentre $h^{\alpha\beta}$ trasforma come un tensore (0,2):

$$\sigma \to \tilde{\sigma}(\sigma), \qquad \tilde{X}^\mu(\tilde{\sigma}) = X^\mu(\sigma), \quad \tilde{h}_{\alpha\beta}(\tilde{\sigma}) = \frac{\partial \sigma^\gamma}{\partial \tilde{\sigma}^\alpha}\frac{\partial \sigma^\delta}{\partial \tilde{\sigma}^\beta} h_{\gamma\delta}(\sigma). \tag{1.18}$$

- L'azione è invariante per trasformazioni conformi della metrica:

$$h_{\alpha\beta} \to f(\sigma) h_{\alpha\beta}. \tag{1.19}$$

Dove $f(\sigma)$ è una generica funzione (a meno di ipotesi sulla regolarità) delle coordinate. Si osservi che tale simmetria è caratteristica della struttura bidimensionale della stringa, e non può essere generalizzata in modo banale in più dimensioni. Infatti, qualora si immagini di generalizzare l'azione di Polyakov considerando d coordinate per il world-sheet, la trasformazione (1.19) porterebbe:

$$\sqrt{-h} \to f(\sigma)^{d/2}\sqrt{-h}, \qquad h^{\alpha\beta} \to f(\sigma)^{-1} h^{\alpha\beta}. \tag{1.20}$$

Da cui è immediato dire che la funzione $f(\sigma)$ si semplifica solo se $d = 2$. Tale invarianza dell'azione prende il nome di *simmetria di Weyl*, e indica che la fisica non dipende da eventuali dilatazioni locali dello spaziotempo che conservino gli angoli tra vettori.

Notiamo che l'invarianza per riparametrizzazione assieme alla simmetria di Weyl permettono di avere molta libertà sulle soluzioni della metrica $h^{\alpha\beta}$. Si può dimostrare infatti che tramite cambi di coordinate è sempre possibile rendere la metrica localmente piatta, cioè nella forma:

$$\tilde{h}_{\alpha\beta} = e^\phi \eta_{\alpha\beta}. \tag{1.21}$$

Dove $\phi(\sigma)$ è una funzione reale, mentre $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1)$ è la metrica piatta. Una volta fatto ciò, dalla simmetria di Weyl si può trasformare $h_{\alpha\beta}$ direttamente in $\eta_{\alpha\beta}$.
La presenza di queste simmetrie locali, cioè dipendenti dalle coordinate dei campi, suggerisce che la teoria presenta dei gradi di libertà non fisici o ridondanti. In altre parole, ogni osservabile fisico è una particolare combinazione degli oggetti calcolabili dalla teoria (campi scalari, metriche, campi tensori,...), e rimane invariante a seguito di certe trasformazioni locali di tali oggetti, chiamate *trasformazioni di gauge*. Per calcolare gli osservabili si sceglie quindi di imporre una o più proprietà sugli oggetti calcolabili compatibili con tali trasformazioni che eliminano o riducono i gradi di libertà ridondanti. Questo procedimento prende il nome di *gauge fixing*.
L'esempio più semplice si ha considerando il potenziale vettore A^μ e il tensore antisimmetrico elettromagnetico $F^{\mu\nu}$. Supponendo che le entrate di $F^{\mu\nu}$ siano gli osservabili e che A^μ sia definito a partire dalla relazione $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$ ci si accorge facilmente che per ogni $F^{\mu\nu}$ corrisponde una famiglia di potenziali vettori, ottenendo un'invarianza di gauge del tipo:

$$A^\mu_\phi = A^\mu + \partial_\mu \phi. \tag{1.22}$$

Dove A^μ è un potenziale vettore e ϕ una generica funzione. Sapendo che gli osservabili non cambiano al variare della scelta di ϕ possiamo fissare, almeno parzialmente, la gauge imponendo una condizione su A^μ. Nell'elettromagnetismo classico la scelta di gauge più comune è la cosiddetta *gauge di Lorenz*:

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{1.23}$$

Che permette per esempio di definire le equazioni di Maxwell nel vuoto tramite l'equazione delle onde:

$$\Box A^\mu = 0. \tag{1.24}$$

In generale può non essere semplice trovare una scrittura completa ed esplicita all'intera famiglia di soluzioni dei campi considerati, e solitamente ciò che si ha è una serie di trasformazioni o simmetrie dei campi che permettono di rimanere nella stessa famiglia, nel caso studiato la simmetria di Weyl e l'invarianza per cambio di coordinate. Nelle prossime sezioni vedremo che è possibile accorgersi di questi gradi di libertà aggiuntivi nell'azione della stringa di Polyakov e successivamente come fissare la gauge, facendo uso del formalismo hamiltoniano.

1.2.4 Formalismo hamiltoniano

Riscriviamo il problema (1.13) nel formalismo hamiltoniano. Definiamo i momenti coniugati:

$$P^\mu = \frac{\delta S}{\delta \dot{X}_\mu} = -T\sqrt{-h}h^{00}\dot{X}^\mu - T\sqrt{-h}h^{01}\acute{X}^\mu. \tag{1.25}$$

Si può verificare che la relazione tra P^μ e $\dot{X}^\mu$ è invertibile da:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial P^\mu}{\partial \dot{X}^\nu} = -T\sqrt{-h}h^{00}\delta^\mu_\nu, \\ &\det\left(\frac{\partial P^\mu}{\partial \dot{X}^\nu}\right) \neq 0. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Invertendo:

$$\dot{X}^\mu = -\frac{1}{T\sqrt{-h}h^{00}}P^\mu - \frac{h^{01}}{h^{00}}\acute{X}^\mu. \tag{1.27}$$

L'azione può essere riscritta come:

$$\begin{aligned} S = &-\frac{T}{2}\int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{-h}h^{00}\left(\frac{1}{T\sqrt{-h}h^{00}}P^\mu + \frac{h^{01}}{h^{00}}\acute{X}^\mu\right)^2 \\ &- 2\sqrt{-h}h^{01}\acute{X}_\mu\left(\frac{1}{T\sqrt{-h}h^{00}}P^\mu + \frac{h^{01}}{h^{00}}\acute{X}^\mu\right) + \sqrt{-h}h^{11}(\acute{X}^\mu)^2 \\ = &-\frac{T}{2}\int \mathrm{d}^2\sigma\left(\frac{1}{T^2\sqrt{-h}h^{00}}P^\mu P_\mu - \frac{1}{\sqrt{-h}h^{00}}\acute{X}^\mu\acute{X}_\mu\right). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Per scrivere la densità Hamiltoniana:

$$P_\mu\dot{X}^\mu = -\frac{1}{T\sqrt{-h}h^{00}}P^\mu P_\mu - \frac{h^{01}}{h^{00}}P^\mu\acute{X}_\mu, \tag{1.29}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = P^\mu\dot{X}_\mu - S &= -\frac{1}{T\sqrt{-h}h^{00}}P_\mu P^\mu - \frac{h^{01}}{h^{00}}P^\mu\acute{X}_\mu + \frac{1}{2T\sqrt{-h}h^{00}}P^\mu P_\mu - \frac{T}{2\sqrt{-h}h^{00}}\acute{X}^\mu\acute{X}_\mu \\ &= -\frac{1}{2T\sqrt{-h}h^{00}}P_\mu P^\mu - \frac{h^{01}}{h^{00}}P^\mu\acute{X}_\mu - \frac{T}{2\sqrt{-h}h^{00}}\acute{X}^\mu\acute{X}_\mu. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Per la discussione successiva è utile riscrivere l'azione in una forma contenente sia $\dot{X}^\mu$ che P^μ.

$$S = \int \mathrm{d}^2\sigma\,(P^\mu\dot{X}_\mu - \mathcal{H}) = \int \mathrm{d}^2\sigma\left(P^\mu\dot{X}_\mu + \frac{1}{2T\sqrt{-h}h^{00}}P^\mu P_\mu + \frac{h^{01}}{h^{00}}P^\mu\acute{X}_\mu + \frac{T}{2\sqrt{-h}h^{00}}\acute{X}^\mu\acute{X}_\mu\right). \tag{1.31}$$

A questo punto imponiamo la prima condizione di gauge fixing. Visto quanto scritto nel paragrafo precedente dalla libertà di cambio di coordinate e dalla simmetria Weyl possiamo imporre[5]:

$$\det(h_{\alpha\beta}) = -1. \tag{1.32}$$

Con questa semplificazione la (1.31) diventa:

$$S = \int d^2\sigma \left(P^\mu \dot{X}_\mu + \frac{1}{2Th^{00}}(P^2 + T^2 \acute{X}^2) + \frac{h^{01}}{h^{00}} P^\mu \acute{X}_\mu \right). \tag{1.33}$$

Nel prossimo capitolo vedremo come la struttura di (1.31) fosse in parte prevedibile a priori studiando la natura dei vincoli derivanti dall'equazione del moto di $h^{\alpha\beta}$. Da questa analisi seguirà la condizione di fissare la gauge, che comporterà la riduzione del sistema completo a D campi delle coordinate di background + 3 componenti della metrica ad uno ridotto a $D-2$ campi delle coordinate.

[5]Questa condizione è soddisfatta per esempio nel caso in cui la metrica venga fissata come piatta nello spazio di Minkowski. In seguito, per mantenere la genericità del discorso (e non potendo sostituire tale relazione direttamente nell'azione) alcune quantità verranno calcolate senza questa condizione.

Vincoli e gauge fixing

2.1 Sistemi hamiltoniani vincolati

Prima di tornare a discutere della stringa di Polyakov, nei prossimi due paragrafi introdurremo la teoria dei cosiddetti sistemi hamiltoniani vincolati, ovvero i sistemi in cui alle equazioni di Hamilton-Jacobi si impongono dei vincoli della forma $\phi_m(q,p) = 0$ a cui devono appartenere le soluzioni. Il sistema delle equazioni dei vincoli, con opportune ipotesi di differenziabilità, definisce una sottovarietà nello spazio delle fasi, detta *varietà vincolare*, su cui ci si vuole restringere nell'analisi Hamiltoniana.

2.1.1 Classificazione dei vincoli e libertà di gauge

Una prima classificazione dei vincoli hamiltoniani può assere fatta in funzione di come essi appaiono all'interno della teoria[6]. Nel caso in cui la condizione di non invertibilità dei momenti venga soddisfatta:

$$\det\left(W_{nm}\right) := \det\left(\frac{\partial p_n}{\partial \dot{q}^m}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^m}\right) = 0. \tag{2.34}$$

Si ha che i momenti non sono mutualmente indipendenti e per il teorema della funzione inversa le $\dot{q^n}$ non possono essere scritte in funzione dei p_n. Data questa dipendenza ci si aspetta di poter trovare una relazione tra i momenti $\phi(q,p) = 0$ che espliciti la non invertibilità.

Def 1. *Un vincolo $\phi(q,p) = 0$ non banale si dice primario se vale la relazione:*

$$\frac{\partial p_n}{\partial \dot{q}^m}\frac{\partial \phi(q,p)}{\partial p_n} = 0. \tag{2.35}$$

Ovvero se il suo gradiente rispetto ai momenti è un elemento del kernel di W_{nm}.

La definizione sopra segue naturalmente dalla regola della catena:

$$\phi(q,p) = 0 \implies \quad 0 = \frac{\partial \phi(q, p(q,\dot{q}))}{\partial \dot{q}^m} = \frac{\partial \phi(q,p)}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial \dot{q}^m}. \tag{2.36}$$

Un esempio di vincolo primario è dato dalla legge di dispersione (1.5), per cui si verifica che:

$$\phi(X,P) = P^2 + m^2, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial P_\mu} = 2P^\mu, \qquad \frac{\partial P_\mu}{\partial \dot{X}_\nu} = m\frac{\delta^\nu_\mu \dot{X}^2 - \dot{X}_\mu \dot{X}^\nu}{(-\dot{X}^2)^{3/2}}, \qquad \frac{\partial P_\mu}{\partial \dot{X}_\nu}\frac{\partial \phi}{\partial P_\mu} = 0. \tag{2.37}$$

Dalle equazioni di Eulero-Lagrange

$$W_{mn}\ddot{q}^n + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^m \partial X^n}\dot{q}^n - \frac{\partial L}{\partial q^m} = 0, \tag{2.38}$$

è chiaro che l'annullamento del determinante della matrice Jacobiana indica che la derivata seconda delle posizioni $\ddot{q}$ non è più univocamente determinata da q e $\dot{q}$. Ciò suggerisce che le soluzioni ottenute non siano univocamente determinate dalle condizioni iniziali, ma che contengano dei gradi di libertà arbitrari, a cui vigliamo associare le invarianze di gauge della teoria. Dal punto di vista hamiltoniano

[6] Per le dimostrazioni dei teoremi non dimostrate si consulti [6].

come già detto la condizione (2.34) indica che le $\dot{q}$ non saranno invertibili rispetto alle p. Applicando la trasformata di Legendre:

$$H(q, \dot{q}) = \dot{q}^n p_n - L, \tag{2.39}$$

e calcolando la variazione dell'Hamiltoniana nelle posizioni e velocità:

$$\delta H = \dot{q}^n \delta p_n + \delta \dot{q}^n p_n - \delta \dot{q}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} - \delta q^n \frac{\partial L}{\partial q^n} = \dot{q}^n \delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q^n} \delta q^n, \tag{2.40}$$

osserviamo che la variazione di H non dipende da una generica variazione in $\delta \dot{q}^n$ ma da una loro combinazione in δp, e per questa ragione, sebbene non si possa scrivere $\dot{q}(p)$ è comunque possibile scrivere l'Hamiltoniana in funzione dei momenti $H = H(q, p)$.
Inoltre, dato che i momenti non sono tutti indipendenti la variazione δp non è arbitraria ma deve rispettare la condizione definita dai vincoli:

$$\delta \phi = 0. \tag{2.41}$$

Essendo ridotto il numero equazioni fornite dal calcolo delle variazioni ci aspettiamo che possano esistere una famiglia di H che rispettano la (2.40). In particolare, ciò che vogliamo mostrare è che al sistema lagrangiano possiamo associare una famiglia di Hamiltoniane equivalenti definite dalla trasformazione:

$$H \to H + c^m(q, p)\, \phi_m(q, p). \tag{2.42}$$

La prima osservazione da fare è che in presenza di vincoli le equazioni di Hamilton-Jacobi si modificano. Dal calcolo della variazione (2.40), scrivendo:

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q^n} \delta q^n + \frac{\partial H}{\partial p_n} \delta p_n, \tag{2.43}$$

si trova che:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q^n} + \frac{\partial L}{\partial q^n} \right) \delta q^n + \left(\frac{\partial H}{\partial p_n} - \dot{q}^n \right) \delta p_n = 0. \tag{2.44}$$

Dove δq^n e δp_n sono variazioni arbitrarie tangenti alla superficie vincolare. La soluzione a variazioni di questo tipo è data dal seguente lemma:

Lemma 1. *Se vale $\lambda_n \delta q^n + \mu^n \delta p_n = 0$ per ogni variazione δq^n e δp_n tangente alla varietà vincolare definita da $\phi_m = 0, \quad m = 1, .., M$ allora si ha:*

$$\lambda_n = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n},$$
$$\mu^n = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}.$$

Per qualche funzione u^m.

Di conseguenza le soluzioni a (2.44) risultano essere:

$$\begin{aligned} \dot{q}^n &= \frac{\partial H}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}, \\ \dot{p}_n &= -\frac{\partial H}{\partial q^n} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Questa condizione permette di scrivere l'evoluzione temporale delle funzioni $F(q, p)$ come:

$$\dot{F} = \{F, H\} + u^m \{F, \phi_m\}. \tag{2.46}$$

Le u possono essere pensate come variabili che consentono l'invertibilità tra lo spazio $(q, \dot{q})$ e lo spazio delle fasi "ampliato" (q, p, u). La seconda tipologia di vincolo deriva dall'imposizione che i vincoli devono rimanere costanti lungo le equazioni del moto $\dot{\phi}_n = 0$, descritte da (2.46).

Def 2. *Un vincolo hamiltoniano $\varphi(q,p)=0$ si dice secondario se è scrivibile come:*

$$\varphi(q,p)=\{\Phi,H\}+u^m\{\Phi,\phi_m\}. \tag{2.47}$$

Dove Φ è un vincolo hamiltoniano che deve soddisfare $\dot{\Phi}=0$, mentre ϕ_m sono vincoli hamiltoniani primari.

Un esempio di vincolo secondario è dato dalle EOM di $h^{\alpha\beta}$ (1.14). Diremo che un insieme di vincoli $\{\Phi_n\}_n$ è completo per un sistema se i vincoli sono tra loro indipendenti, ovvero tali per cui non esista un $\tilde{\Phi}=\sum_{\Phi_n\neq\tilde{\Phi}} c^n\Phi_n$ per delle funzioni $c^n(q,p)$, e non è possibile aggiungere altri vincoli indipendenti a questo insieme per il sistema considerato. Con questa classificazione, dati M vincoli primari e N-M secondari possiamo scrivere un generico vincolo Φ_n come:

$$\Phi_n=\phi_n, \quad n=1,..M; \qquad \Phi_n=\varphi_n, \quad n=M+1,..N. \tag{2.48}$$

Richiedendo che le nostre soluzioni si trovino sulla varietà vincolare, ha senso pensare che due funzioni siano la "stessa funzione" se differiscono solo da una combinazione lineare di vincoli.

Def 3. *Dati dei vincoli ϕ_n, si dirà che due funzioni $F(q,p)$ e $G(q,p)$ sono debolmente uguali (si scriverà $F\approx G$) se vale:*

$$F-G=c^n(q,p)\Phi_n. \tag{2.49}$$

Con $c^n(q,p)$ certe funzioni dipendenti dalle coordinate.

È quindi possibile generalizzare la condizione (2.47) richiedendo solamente l'uguaglianza debole. Considerando un insieme completo di vincoli Φ_n, $n=1,..,N$ possiamo scrivere:

$$\{\Phi_n,H\}+u^m\{\Phi_n,\phi_m\}\approx 0. \tag{2.50}$$

Con ϕ_n, $m=1,..,M$ vincoli primari. A q e p fissati avremo che l'equazione sopra definisce un sistema lineare per le incognite u^m, la cui soluzione sarà:

$$u^m=U^m+V^m. \tag{2.51}$$

Dove U^m è la soluzione particolare del sistema, mentre V^m è la soluzione generale alla equazione omogenea:

$$V^m\{\Phi_n,\phi_m\}\approx 0, \quad \forall\, n=1,..,N. \tag{2.52}$$

Dalla teoria dell'algebra lineare possiamo scrivere $V^m=v^aV_a^m \quad a=1,..A$ in cui v_a sono funzioni totalmente arbitrarie e V_a^m soluzioni indipendenti. L'equazione (2.51) diventa:

$$u^m\approx U^m+v^aV_a^m. \tag{2.53}$$

Sostituendo u^m in (2.46) otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\dot{F}\approx\{F,H_T\},\\
&H_T:=H'+v^a\phi_a,\\
&H':=H+U^m\phi_m,\\
&\phi_a=V_a^m\phi_m.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Notiamo quindi che le equazioni del moto sono determinate da un'Hamiltoniana definita a meno di somme arbitrarie dei vincoli primari ϕ_a. Questa arbitrarietà è sintomo della libertà di gauge nello spazio totale, che sparirebbe solo se ci riducessimo a studiare il sistema direttamente sulla varietà vincolare determinata dai ϕ_a.
Osserviamo inoltre che in questa discussione non risulta strettamente necessario che i vincoli risultino primari, ma ciò che conta è che i ϕ_a soddisfino $\{\Phi_n,\phi_a\}\approx 0$. Questa osservazione porta a fornire una seconda classificazione dei vincoli, che trascuri la loro origine (la cui discussione e motivazione è riportata nel paragrafo successivo).

Def 4. *Dato un sistema completo di vincoli* $\{\Phi_n\}_{n=1,..,N}$ *un vincolo* Φ_i *si dice di prima specie se:*

$$\{\Phi_i, \Phi_n\} \approx 0 \quad \forall\ n = 1, .., N. \tag{2.55}$$

Se esiste un n *tale per cui la condizione sopra non è verificata allora si parla di vincolo di seconda specie.*

Dalla definizione si deduce facilmente che H_T, H' e ϕ_a sono tutti vincoli di prima specie. Per esplicitare tutte le invarianze di gauge è possibile introdurre un'Hamiltoniana H_E più generale di H_T:

$$H_E = H' + u^a \gamma_a. \tag{2.56}$$

Dove γ_a sono tutti i vincoli di prima specie. È importante sottolineare che H_E non è equivalente al sistema lagrangiano di partenza, e le sue soluzioni possiedono gradi di libertà ulteriori. Il ruolo di H_E è quello di rendere esplicite tutte le invarianze di gauge del sistema. Per esempio, si mostrerà che l'Hamiltoniana (1.33) è scritta in una forma del tipo (2.56), con una particolare scelta dei coefficienti fissati dalla metrica.
Vediamo adesso come la formulazione (2.54) di H_T renda esplicita la ridondanza della teoria. Siccome le funzioni v^a sono arbitrarie è ammessa l'evoluzione temporale di ogni funzione $F(q,p)$ calcolata usando due insiemi di funzioni diverse v^a e v'^a. Controllando la variazione di F con queste due regole, a parità di condizione iniziale dopo un intervallo infinitesimo δt si ottiene che trasformazioni del tipo:

$$\delta F = \delta v^a \{F, \phi_a\}. \tag{2.57}$$

Con $\delta v^a = (v^a - v'^a)\delta t$ determinano una famiglia di soluzioni temporali di F accettabili. Trasformazioni come sopra sono proprio le trasformazioni infinitesime di gauge cercate. Queste forniscono anche un'idea su cosa vuole dire applicare un condizione di gauge fixing: siccome l'equazione sopra determina un multi flusso ad a parametri di soluzioni possibili, fissare una gauge significa scegliere ulteriori B vincoli:

$$C_b(q,p) \approx 0, \quad b = 1, ..B, \tag{2.58}$$

tali che siano compatibili con i vincoli già presenti, e che intersechino ogni flusso a un parametro generato dalle trasformazioni di gauge in un solo punto.
Nel paragrafo successivo verrà discusso come eliminare completamente i vincoli dal problema, riducendosi ad un sistema libero.

2.1.2 Interpretazione geometrica e gauge fixing

Vediamo ora come è possibile definire il problema dei sistemi hamiltoniani vincolati tramite il formalismo della geometria simplettica. Cominciamo con alcune definizioni preliminari:

Def 5. *Una varietà differenziabile* $\mathcal{M}$ *si dice simplettica se vi è associata una 2-forma chiusa non degenere* Ω*, chiamata forma simplettica.*

Def 6. *Data una varietà simplettica* $(\mathcal{M}, \Omega)$ *e una funzione scalare* f*, si chiama campo hamiltoniano* X_f *il campo vettoriare tale per cui* $\Omega(X_f, \cdot) = df(\cdot)$.

Le parentesi di Poisson possono essere definite come:

$$\{f, g\} = \Omega(X_f, X_g). \tag{2.59}$$

Def 7. *Date due varietà simplettiche* $(\mathcal{M}, \Omega)$ *e* $(\mathcal{N}, \Omega')$*, una funzione* f*:* $(\mathcal{M}, \Omega) \to (\mathcal{N}, \Omega')$ *si dice simplettomorfismo se* f *è un diffeomorfismo e vale:*

$$f^*\Omega' = \Omega. \tag{2.60}$$

Dove f^* *è il pull-back di* f*.*

Nel caso in cui si considera una varietà vincolare in generale non si induce una forma simplettica tramite il pull-back dalla varietà più grande, in particolare si può perdere l'invertibilità della 2-forma.

Def 8. *Una varietà differenziabile $\mathcal{M}$ si dice presimplettica se vi è associata una 2-forma chiusa non invertibile, detta forma presimplettica.*

Il Kernel di una forma presimplettica è dato dai campi vettoriali che soddisfano la relazione:

$$Ker(\Omega) = \{v^i \in TM : \quad \Omega_{ij} v^j = 0\}. \tag{2.61}$$

A partire da una varietà simplettica $(\mathcal{M}, \Omega)$ si può indurre sulla varietà vincolare $\mathcal{C}$ una forma presimplettica $\bar{\Omega}$ tramite il pull-back sull'inclusione $\iota : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$.

$$\bar{\Omega} = \iota^* \Omega. \tag{2.62}$$

Mostriamo ora che i vincoli di prima specie appartengono al nucleo di $\bar{\Omega}$. Sia C^I vincolo di prima specie, per definizione (4) si ha che $\{C^I, C^J\} = 0$ lungo la varietà vincolare, per ogni C^J vincolo. Dato che vale $dC^J(X_{C^I}) = \{C^J, C^I\} = 0$ il campo vettoriale generato da C^I è tangente alla varietà vincolare, ed è possibile definire una sua restrizione su di essa $\bar{X}$. È sufficiente osservare che:

$$\bar{\Omega}_{\alpha\beta} \bar{X}^\beta = \iota^*(\Omega_{ij} X^j_{C^I}) = \iota^*(\partial_i C^I) = 0. \tag{2.63}$$

Dimostrando quanto atteso. Per definire una forma simplettica su $\mathcal{C}$ è necessario quozientarla rispetto ai flussi generati dai campi vettoriali dei vincoli di prima specie, così da rendere il Kernel banale e la forma presimplettica $\bar{\Omega}$ non degenere. Nel formalismo visto nella sezione precedente, il campo vettoriale hamiltoniano generato dai vincoli di prima specie definisce una trasformazione di gauge, mentre il processo di fattorizzare il flusso equivale all'operazione di gauge fixing.
Una volta fattorizzati i vincoli di prima specie, è possibile ricondursi ad un sistema hamiltoniano ridotto, in cui per tutte le quantità si considera solo la loro restrizione sulla varietà vincolare, tramite le parentesi di Dirac:

Def 9. *Si chiamano parentesi di Dirac:*

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \sum_{ij} \{f, C^i\}(\{C^i, C^j\})^{-1}\{C^j, g\}. \tag{2.64}$$

Osserviamo che:

1. Per definire le parentesi di Dirac è necessario che $\{C^i, C^j\}$ sia invertibile. La condizione è verificata una volta che i vincoli di prima specie sono stati fattorizzati;
2. Se $g = C^k$ vincolo di seconda specie si ha:

$$\{f, C^k\}_D = \{f, C^k\} - \sum_{ij} \{f, C^i\}(\{C^i, C^j\})^{-1}\{C^j, C^k\} = \{f, C^k\} - \sum_i \{f, C^i\}\delta_i^k = 0. \tag{2.65}$$

   Come atteso (essendo nulla la restrizione dei vincoli sulla varietà vincolare) i campi vettoriali generati dai vincoli sono tangenti alla varietà e danno parentesi di Dirac nulle con ogni funzione f;
3. Si può dimostrare che le parentesi di Dirac sono indotte direttamente dal pull-back (2.62).

Fattorizzati i vincoli di prima specie, la varietà vincolare assieme alle parentesi di Dirac costituisce il sistema hamiltoniano ridotto cercato.
Si noti infine che nella discussione non viene fatto riferimento alla distinzione tra vincoli primari e secondari, giustificato quanto detto in merito alla loro rilevanza nel paragrafo precedente.

2.1.3 Formalismo hamiltoniano in una teoria di campo in D=2

È possibile riadattare la discussione precedente nel caso della stringa, in cui è presente anche un parametro spaziale σ, che parametrizza i suoi punti dello spaziotempo. Essendo questo parametro di tipo spaziale, ci si aspetta che la trattazione precedente si conservi, a meno di definire il comportamento

di questo parametro.
Si introduce la densità Hamiltoniana $\mathcal{H}$, descritta dalla relazione:

$$H(\tau) = \int_{-R/2}^{R/2} \mathrm{d}\sigma \, \mathcal{H}(\tau, \sigma). \tag{2.66}$$

La densità Hamiltoniana è ottenibile dalla densità lagrangiana tramite la trasformazione di Legendre. Lavorando con funzioni $f = f(\tau, \sigma)$ nello spazio delle fasi è possibile definire le parentesi di Poisson, imponendo che siano non nulle solo nel caso in cui dipendano dallo stesso σ, e che a σ fissato si comportino come le parentesi di Poisson classiche[7]:

$$\{X^j(\sigma), X_k(\sigma')\} = 0, \qquad \{P^j(\sigma), P_k(\sigma')\} = 0, \qquad \{X^j(\sigma), P_k(\sigma')\} = \delta^j_k \delta(\sigma - \sigma'). \tag{2.67}$$

Le equazioni di Hamilton-Jacobi si scriveranno:

$$\dot{F}(\tau, \sigma) = \{F, H\} = \int_{-R/2}^{R/2} \mathrm{d}\sigma' \{F(\sigma), \mathcal{H}(\sigma')\}. \tag{2.68}$$

Considerato questo formalismo, tutte le definizioni introdotte rimangono valide.

2.2 Vincoli per la stringa di Polyakov

Applichiamo quanto visto alla stringa di Polyakov, mostrando che possiede due vincoli secondari di prima specie:

$$\begin{cases} C_1(P, \acute{X}) = P^2 + T^2 \acute{X}^2 = 0, \\ C_2(P, \acute{X}) = P^\mu \acute{X}_\mu = 0. \end{cases} \tag{2.69}$$

Dalle EOM per la metrica (1.14) con la condizione $h = -1$ si ottiene:

$$\frac{h_{\alpha\beta}}{T} \mathcal{L} + \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} = 0. \tag{2.70}$$

Dove si ricorda che:

$$h_{00} = -h^{11}, \qquad h_{11} = -h^{00}, \qquad h_{01} = h^{01}.$$

Usando la forma Hamiltoniana di $\mathcal{L}$ (1.30) si ottiene per $\alpha = \beta = 1$:

$$-\frac{1}{2Th^{00}} \frac{h_{11}}{T} (P^2 - T^2 \acute{X}^2) + \acute{X}^2 = 0 \implies P^2 + T^2 \acute{X}^2 = 0. \tag{2.71}$$

Mentre per $\alpha = 1$, $\beta = 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{h_{01}}{T} \left(\frac{1}{2Th^{00}}\right)(P^2 - T^2 \acute{X}^2) + \acute{X}_\mu \left(\frac{1}{h^{00}}\right)\left(\frac{P^\mu}{T} + h^{01} \acute{X}^\mu\right) = 0, \\ &\frac{h^{01}}{2T^2}(P^2 + T^2 \acute{X}^2) + \frac{1}{T} P_\mu \acute{X}^\mu = 0 \implies P_\mu \acute{X}^\mu = 0. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Il caso $\alpha = \beta = 0$ non fornisce ulteriori informazioni, avendo già determinato il valore di una componente della metrica fissando il determinante. Per mostrare che i vincoli sono di prima specie occorre calcolare le loro mutue parentesi di Poisson. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \{C_1(\sigma), C_1(\sigma')\} &= 4T^2 \partial_\sigma C_2(\sigma) \delta(\sigma - \sigma') + 8T^2 C_2(\sigma) \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \approx 0, \\ \{C_2(\sigma), C_2(\sigma')\} &= \partial_\sigma C_2(\sigma) \delta(\sigma - \sigma') + 2C_2(\sigma) \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \approx 0, \\ \{C_1(\sigma), C_2(\sigma')\} &= 2C_1(\sigma) \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') + \partial_\sigma C_1(\sigma) \delta(\sigma - \sigma') \approx 0. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Osserviamo che l'Hamiltoniana (1.33) si presenta come caso particolare nella forma dell'Hamiltoniana estesa (2.56), data la presenza dei due vincoli secondari di prima specie.

[7] Per una trattazione più formale e completa le operazioni con andrebbero intese in senso funzionale.

2.3 Gauge di cono luce uniforme

Avendo trovato due vincoli di prima specie ci si aspetta di dover imporre due condizioni di gauge fixing al sistema. Per fissare la gauge è opportuno effettuare un cambio di variabili dei campi scalari X^μ dipendenti da parametro a, passando alle *coordinate di cono luce.*

$$\begin{cases} X^+ = aX^0 + (1-a)X^1, \\ X^- = -X^0 + X^1. \end{cases} \tag{2.74}$$

Imponendo le relazioni delle parentesi di Poisson (2.67) si possono determinare le trasformazioni per i momenti:

$$\begin{cases} P_+ = P_0 + P_1, \\ P_- = -(1-a)P_0 + aP_1. \end{cases} \tag{2.75}$$

Questa trasformazione induce una trasformazione della metrica dello spaziotempo di sfondo $\tilde{\eta}_{\alpha\beta}$, della forma:

$$\tilde{\eta}_{01} = \tilde{\eta}_{10} = 1, \qquad \tilde{\eta}_{00} = 0, \qquad \tilde{\eta}_{11} = 2a-1, \qquad \tilde{\eta}_{jk} = \delta_{jk}, \quad \forall j,k = 2,..,D-1.$$

$$\tilde{\eta}^{01} = \tilde{\eta}^{10} = 1, \qquad \tilde{\eta}^{00} = 1-2a, \qquad \tilde{\eta}^{11} = 0, \qquad \tilde{\eta}^{jk} = \delta^{jk}, \quad \forall j,k = 2,..,D-1.$$

A questo punto è possibile fissare la cosiddetta *gauge di cono luce uniforme* (o *uniform light cone gauge*):

$$\begin{aligned} X^+ &= \tau, \\ P_- &= 1. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Si fa coincidere il campo X^+ con il parametro temporale τ, e rendere costante il momento coniugato al campo X^-, senza imporre esplicitamente vincoli sulle variabili X^j. Per esempio è immediato che valgono le identità:

$$\dot{X}^+ = 1, \qquad \acute{X}^+ = 0. \tag{2.77}$$

Se calcoliamo la carica corrispondente a P_- otteniamo:

$$\int_{-R/2}^{+R/2} \mathrm{d}\sigma P_- = R = E + a(J-E). \tag{2.78}$$

Ovvero il volume della teoria del world-sheet, in questo caso R, dipendendo dal parametro a dipende dalla scelta della gauge. Ora vogliamo ricondurci ad un sistema hamiltoniano ridotto libero di $D-2$ campi X^j, utilizzando i vincoli per determinare i campi $X^\pm$ e $h^{\alpha\beta}$. Cominciando dai vincoli di prima specie (2.69):

$$P^\mu \acute{X}_\mu = 0 \implies \acute{X}^- = -P_j \acute{X}^j. \tag{2.79}$$

$$\begin{aligned} &P^\mu P_\mu + T^2 \acute{X}^\mu \acute{X}_\mu = 0 \implies (1-2a)P_+^2 + 2P_+ + P_j^2 + T^2 \acute{X}_j^2 + (2a-1)T^2 P_j P_k \acute{X}^j \acute{X}^k = 0, \\ &P_{+,12} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-(1-2a)(P_j^2 + T^2 X_j'^2) + (2a-1)^2 T^2 P_j P_k X'^j X'^k}}{1-2a}. \end{aligned} \tag{2.80}$$

Dove $P_j^2 = P_i P_j \delta^{ij}$, $\acute{X}_j^2 = \acute{X}_i \acute{X}_j \delta^{ij}$. Affinché la densità hamiltoniana sia definita positiva, si sceglie la soluzione col segno '+':

$$P_+ = \frac{-1 + \sqrt{1-(1-2a)(P_j^2 + T^2 X_j'^2) + (2a-1)^2 T^2 P_j P_k X'^j X'^k}}{1-2a}. \tag{2.81}$$

I vincoli di prima specie impongono condizioni alle variabili canoniche coniugate a quelle fissate con la gauge.
Dal primo vincolo (2.79) imponendo periodicità della coordinata spaziale (trattandosi di una stringa chiusa):

$$0 = X^-(R/2) - X^-(-R/2) = \int_{-R/2}^{+R/2} \mathrm{d}\sigma\, \acute{X}^- = -\int_{-R/2}^{+R/2} \mathrm{d}\sigma\, P_i \acute{X}^i. \tag{2.82}$$

Osserviamo che l'ultimo termine è la carica di Noether conservata da invarianza per traslazioni spaziali lungo la stringa [8]:

$$\sigma \to \tilde{\sigma} = \sigma + c, \quad \tilde{X}^i(\tilde{\sigma}) = X^i(\sigma), \quad Q = \int_{-R/2}^{+R/2} \mathrm{d}\sigma \left(\delta\tau \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \dot{X}^i)} \acute{X}^i \delta\sigma \right) = -c \int_{-R/2}^{+R/2} \mathrm{d}\sigma P_i \acute{X}^i. \tag{2.83}$$

Per analogia, così come il momento è la carica conservata per l'invarianza di traslazioni, si può dire che la carica conservata trovata è il momento totale del word-sheet p_{ws}. Dalla condizione di periodicità (2.82) si ottiene la *level matching condition*:

$$p_{ws} = 0. \tag{2.84}$$

Scriviamo ora la densità Hamiltoniana del sistema ridotto. A partire da (1.33) si possono semplificare gli ultimi due termini proporzionali ai vincoli del sistema:

$$\begin{aligned} S = &\int d^2\sigma P_\mu \dot{X}^\mu = \\ &\int d^2\sigma P_- \dot{X}^- + P_+ \dot{X}^+ + P_j \dot{X}^j = \\ &\int d^2\sigma P_j \dot{X}^j + P_+. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Quindi:

$$\mathcal{H}(X^j, \acute{X}^j, P_j) = P_j \dot{X}^j - \mathcal{L} = -P_+. \tag{2.86}$$

Dove il termine $\dot{X}^-$ si cancella per condizione di periodicità lungo la stringa. Nel caso particolare in cui $a = 1/2$ la densità Hamiltoniana è semplicemente definita come:

$$\mathcal{H}(X_j, \acute{X}_j, P_j) = \frac{1}{2}(P_j^2 + T^2 \acute{X}_j^2). \tag{2.87}$$

Mentre se $a \neq 1/2$ si ha:

$$\mathcal{H} = \frac{1 - \sqrt{1 - (1-2a)(P_j^2 + \acute{X}_j^2) + (1-2a)^2 P_j P_k \acute{X}^j \acute{X}^k}}{1 - 2a}. \tag{2.88}$$

Abbiamo così ottenuto il sistema hamiltoniano ridotto cercato.
Integrando la densità Hamiltoniana si ottiene l'Hamiltoniana e la sua relazione con il volume della teoria:

$$H = -\int_{-R/2}^{+R/2} \mathrm{d}\sigma\, P_+ = E - J, \qquad R = J + (1-a)H. \tag{2.89}$$

Vediamo infine come sia possibile determinare la metrica $h^{\alpha\beta}$. Dalla definizione dei momenti $P_\pm$:

$$\begin{aligned} P_- = &-T \frac{\delta}{\delta \dot{X}^-}(h^{01} \dot{X}^- \acute{X}^- \eta_{--} + 2h^{01} \dot{X}^- \acute{X}^+ \eta_{-+} + h^{00} \dot{X}^+ \dot{X}^- \eta_{+-} + \frac{1}{2} h^{00} \dot{X}^- \dot{X}^- \eta_{--}) = \\ &= -T(h^{00} + (2a-1)(h^{00} \dot{X}^- + h^{01} \acute{X}^-)) = 1. \end{aligned} \tag{2.90}$$

[8] Si noti che dall'invarianza per traslazione temporale si ottiene la conservazione dell'Hamiltoniana.

$$\begin{aligned} P_+ &= -T\frac{\delta}{\delta \dot{X}^+}(h^{01}\dot{X}^+\acute{X}^+\eta_{++} + 2h^{01}\dot{X}^+\acute{X}^-\eta_{+-} + h^{00}\dot{X}^+\dot{X}^-\eta_{+-} + \frac{1}{2}h^{00}\dot{X}^+\dot{X}^+\eta_{++}) = \\ &= -T(2h^{01}\acute{X}^- + h^{00}\dot{X}^-). \end{aligned} \tag{2.91}$$

Aggiungendo l'equazione $h = -1$ e $\partial_\alpha(h^{\alpha\beta}\partial_\beta X^\pm) = 0$ dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} h^{11}h^{00} - h^{10}h^{01} = -1, \\ 1 = -Th^{00} + (2a-1)(P_+ + Th^{01}\acute{X}^-), \\ \partial_0 h^{00} + \partial_1 h^{10} = 0, \\ -\partial_0(\frac{P_+}{T} - h^{01}\acute{X}^-) + \partial_1(h^{11}\acute{X}^- + h^{10}\dot{X}^-) = 0. \end{cases} \tag{2.92}$$

Dato che la soluzione analitica generale di questo sistema risulta difficile, si calcolerà l'espansione perturbativa della metrica fino al secondo ordine nei campi X^j. La prima osservazione da fare è che per il caso $a = 1/2$ il sistema ammette soluzione esplicita:

$$h^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -T^{-1} & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}. \tag{2.93}$$

Per il caso $a \neq 1/2$ osserviamo che:

- Nel caso $a = 1/2$ ci si riconduce al risultato (2.93) in cui la metrica è costante;
- X'^-, $\dot{X}^-$ e P_+ dipendono da potenze pari dei campi, e il termine di ordine 0 è nullo;
- il termine $2a - 1$ è accoppiato con un termine almeno quadratico nei campi.

Queste osservazioni suggeriscono di provare un'ansatz del tipo:

$$\begin{cases} h^{00} = -T^{-1} + (2a-1)H^{00} + O(X^4), \\ h^{11} = T + (2a-1)H^{11} + O(X^4), \\ h^{10} = (2a-1)H^{10} + O(X^4). \end{cases} \tag{2.94}$$

Dove $H^{\alpha\beta}$ è il termine quadratico nei campi della metrica $h^{\alpha\beta}$. Dalla prima condizione sul determinante si trova:

$$\begin{aligned} &h^{00}h^{11} - h^{01}h^{01} = -1, \\ &T^2 H^{00} = H^{11}. \end{aligned} \tag{2.95}$$

Dalla seconda equazione:

$$\begin{aligned} &1 = -Th^{00} + (2a-1)(P_+ + Th^{01}\acute{X}^-), \\ &H^{00} = -\frac{(2a-1)}{2T}(P_j^2 + T^2\acute{X}_j^2). \end{aligned} \tag{2.96}$$

Infine con la terza si ottiene:

$$\begin{aligned} &\partial_0 h^{00} + \partial_1 h^{10} = 0, \\ &H^{10} = (2a-1)TP^j\acute{X}_j. \end{aligned} \tag{2.97}$$

L'ultima equazione di (2.92) si può verificare che con le soluzioni sopra risulta un'identità. Mettendo assieme quanto trovato si ottiene la metrica scritta fino al secondo ordine nei campi X^j:

$$h^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -T^{-1} + \frac{(1-2a)}{2T}(P_j^2 + T^2\acute{X}_j^2) & (2a-1)TP^j\acute{X}_j \\ (2a-1)TP^j\acute{X}_j & T + \frac{T(1-2a)}{2}(P_j^2 + T^2\acute{X}_j^2) \end{pmatrix} + O(X^4). \tag{2.98}$$

Un altro modo per eliminare i gradi di libertà della metrica consiste nello scrivere:

$$S = -\frac{T}{2}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}\,A_{\alpha\beta}. \tag{2.99}$$

Dove $A_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}$ e risolvere le EOM della metrica:

$$h_{\alpha\beta} = C(\sigma) A_{\alpha\beta}, \qquad C(\sigma) = \frac{2}{h^{\rho\delta} A_{\rho\delta}}. \tag{2.100}$$

Dalla condizione $h = -1$, se $A = \det(A_{\alpha\beta})$ otteniamo:

$$\begin{aligned} &\sqrt{-A} = 1/C(\sigma), \\ &h^{\alpha\beta} = \frac{A^{\alpha\beta}}{\sqrt{-A}}, \\ &S = -T \int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{-A}. \end{aligned} \tag{2.101}$$

Troviamo quindi che semplificando la metrica si riottiene l'azione della stringa di Nambu-Goto.

Matrice S di scattering

3.1 Espansione dell'hamiltonina

In questo capitolo, seguendo l'approccio adottato in [3] studieremo la dinamica del sistema una volta rimossa l'invarianza di gauge, attraverso l'espansione perturbativa. Per fare ciò è conveniente ridefinire i campi accoppiandoli con un parametro, che per l'espansione può essere supposto piccolo. Cominciamo rimuovendo il parametro T tramite la trasformazione:

$$\sigma \to \sqrt{T}\sigma, \qquad X^i \to \frac{X^j}{\sqrt{T}}, \qquad P^j \to \frac{P^j}{\sqrt{T}}. \tag{3.102}$$

Dopo il riscalamento, osservando la densità Hamiltoniana (2.88) è chiaro che il parametro di accoppiamento cercato è $\beta := \frac{1-2a}{T}$. A questo punto possiamo scrivere l'espasione perturbativa di $\mathcal{H}$ fino al termine quartico nei campi, o equivalentemente lineare in β:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(P_j^2 + \acute{X}_j^2\right) + \frac{\beta}{8}\left(P_j^2 P_k^2 + 2P_j^2\acute{X}_k^2 + \acute{X}_j^2\acute{X}_k^2 - 4P_jP_k\acute{X}^j\acute{X}^k\right) + O(\beta^2). \tag{3.103}$$

3.1.1 Termine quadratico: EOM

Supponendo $\beta \ll 1$ possiamo scrivere $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(2)} + \beta\mathcal{H}^{(4)} + o(\beta^2)$, e calcolare le equazioni del moto a partire da $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}^{(2)}$.

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}(P_j^2 + \acute{X}_j^2). \tag{3.104}$$

Dalle equazioni di Hamilton-Jacobi si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{X}_j = P_j, \\ \dot{P}_j = X_j''. \end{cases} \tag{3.105}$$

$$\ddot{X}_j - X_j'' = 0. \tag{3.106}$$

Dove (3.106) è un'equazione delle onde e ha soluzione:

$$\begin{aligned} X_j(\sigma,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\omega}}\left(a_j(p)e^{ip\sigma - i\omega t} + a_j^*(p)e^{-ip\sigma+i\omega t}\right), \\ \acute{X}_j(\sigma,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\omega}} ip\left(a_j(p)e^{ip\sigma - i\omega t} - a_j^*(p)e^{-ip\sigma+i\omega t}\right), \\ P_j(\sigma,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\omega}}(-i\omega)\left(a_j(p)e^{ip\sigma - i\omega t} - a_j^*(p)e^{-ip\sigma+i\omega t}\right). \end{aligned} \tag{3.107}$$

In cui $a_j(p)$ sono funzioni arbitrarie di p, mentre ω è data dalla relazione di dispersione:

$$\omega = \sqrt{p^2}. \tag{3.108}$$

Osserviamo che la relazione di dispersione (3.108) non risulta analitica in $p = 0$, a causa della presenza della radice e dell'assenza di un termine di massa (presente ad esempio nelle particelle relativistiche). Tale non analiticità genera problemi a basse energie, chiamati *problemi infrarossi.*
Risolte le equazioni per i campi riscriviamo l'Hamiltoniana imperturbata in funzione di a ed a^*:

$$H_0 = \int_{-R/2}^{+R/2} \mathrm{d}\sigma\, \mathcal{H}_0. \tag{3.109}$$

Dove R è il raggio del word-sheet. Per procedere con il calcolo è necessario effettuare il cosiddetto *decompactification limit*, in cui si fa tendere $J \to \infty$, quindi anche $R \to \infty$. L'interpretazione geometrica di tale procedura è che aumentando ad infinito il raggio di curvatura il world-sheet diventa topologicamente equivalente ad un piano, eliminando così tutti i potenziali problemi legati alla compattezza, come l'impossibilità di definire particelle libere perché sempre "finitamente lontane". Applicando questa approssimazione si ottiene:

$$H_0 = \sum_{j=2}^{D-1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\; \omega(p) a_j^*(p) a_j(p). \tag{3.110}$$

Notiamo che quanto appena trovato è equivalente, a meno di costanti, all'Hamiltoniana di $D-2$ oscillatori armonici quantistici disaccoppiati definiti dagli operatori di innalzamento a_j^* e di pulsazione ω.

3.1.2 Termine quartico: matrice S di Scattering

Il primo termine perturbativo accoppiato in β può essere utilizzato per calcolare la matrice di Scattering **S** a tree level 2+2 momenti.
In teoria dello Scattering la matrice **S** è un operatore unitario che mappa gli *stati-out* di particella libera negli *stati-in* in visuale di Heisenberg. Gli stati in e out appartengono allo stesso stesso spazio di Hilbert del modello, e sono autovettori dell'Hamiltoniana H con lo stesso autovalore E:

$$H|p_1, p_2, .., p_n\rangle^{(in/out)}_{i_1,i_2,..,i_n} = E|p_1, p_2, .., p_n\rangle^{(in/out)}_{i_1,i_2,..,i_n}. \tag{3.111}$$

Dove $i_1, .., i_n$ sono indici usati per considerare le diverse proprietà delle particelle di momenti $p_1, .., p_n$. L'autovalore E può essere riscritto come:

$$E = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i_k)}_{p_k}. \tag{3.112}$$

Dove $\omega^{(i)}_p$ è l'energia data dalla relazione di dispersione della particella di tipo i e momento p.

Per descrivere gli stati in e out definiamo gli operatori di costruzione e distruzione in e out soddisfacenti le relazioni di commutazione canoniche. Sia $|\Omega\rangle$ lo stato di vuoto che viene annichilito:

$$a_{in}(p,t)|\Omega\rangle = a_{out}(p,t)|\Omega\rangle = 0. \tag{3.113}$$

Gli stati liberi in e out corrispondono agli stati ottenuti applicando gli operatori di creazione in $a_k^{in\,\dagger}(p) := a_k^{in\,\dagger}(p,0)$ e out $a_k^{out\,\dagger}(p) := a_k^{out\,\dagger}(p,0)$ sul vuoto.

$$\begin{aligned} |p_1, p_2, .., p_n\rangle^{(in)}_{i_1,i_2,..,i_n} &= a_{i_1}^{in\,\dagger}(p_1)...a_{i_n}^{in\,\dagger}(p_n)|\Omega\rangle, \\ |p_1, p_2, .., p_n\rangle^{(out)}_{i_1,i_2,..,i_n} &= a_{i_1}^{out\,\dagger}(p_1)...a_{i_n}^{out\,\dagger}(p_n)|\Omega\rangle. \end{aligned} \tag{3.114}$$

Dato che gli operatori in e out soddisfano le relazioni di commutazione canoniche, per il teorema di Stone - von Neumann sono legati da un operatore unitario **S**, che definiamo essere la *matrice di Scattering.*

$$a^\dagger_{in}(p,t) = \mathbf{S} a^\dagger_{in}(p,t)\mathbf{S}^\dagger, \quad a_{in}(p,t) = \mathbf{S} a_{in}(p,t)\mathbf{S}^\dagger, \quad \mathbf{S}|\Omega\rangle = |\Omega\rangle. \tag{3.115}$$

La matrice **S** non dipende dal tempo dato che si semplifica la dipendenza tra gli stati in e out. Di conseguenza, gli stati in e out sono legati come segue:

$$|p_1, p_2, .., p_n\rangle^{(in)}_{i_1,i_2,..,i_n} = \mathbf{S}|p_1, p_2, .., p_n\rangle^{(out)}_{i_1,i_2,..,i_n}. \tag{3.116}$$

In particolare, per stati a due particelle otteniamo:

$$|p_1, p_2\rangle^{(in)}_{i,j} = \mathbf{S}^{kl}_{ij}|p_1, p_2\rangle^{(out)}_{k,l}, \tag{3.117}$$

considerando momenti che non variano durante lo scattering, e ordinandoli in modo tale che $p_1 > p_2 > ... > p_n$. È chiaro che la matrice **S** commuta con l'Hamiltoniana, e che senza interazioni deve coincidere con l'identità. Per calcolare la matrice **S** con la teoria perturbativa, si divide l'Hamiltoniana in parte libera più parte di interazione.

$$H = H_0 + V. \tag{3.118}$$

In cui la parte libera dipende dagli operatori di costruzione e distruzione.

$$H_0 = \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\ \omega_p^{(k)} a_k^\dagger(p,t) a^k(p,t). \tag{3.119}$$

Dove gli operatori a, $a^\dagger$ sono in visuale di Heisenberg che soddisfano le leggi canoniche di commutazione:

$$[a_i^\dagger, a^j] = \delta_i^j, \tag{3.120}$$

e obbediscono alle equazioni del moto:

$$\dot{a}^k(p,t) = i[H, a^k(p,t)] = -i\,\omega_p^{(k)} a^k(p,t) + i\,[V, a^k(p,t)]. \tag{3.121}$$

Dove $V = V(a^\dagger, a)$. Essendo che a, $a^\dagger$ soddisfano le relazioni canoniche di commutazione, ancora per il teorema di Stone - von Neuman questi operatori sono legati agli operatori di creazione e distruzione in e out da delle trasformazioni unitarie.

$$\begin{aligned} a^\dagger(p,t) &= U_{in}^\dagger(t)\, a_{in}^\dagger(p,t)\, U_{in}(t), \qquad & a(p,t) &= U_{in}^\dagger(t)\, a_{in}(p,t)\, U_{in}(t), \\ a^\dagger(p,t) &= U_{out}^\dagger(t)\, a_{out}^\dagger(p,t)\, U_{out}(t), \qquad & a(p,t) &= U_{out}^\dagger(t)\, a_{out}(p,t)\, U_{out}(t). \end{aligned} \tag{3.122}$$

Dove U_{in} e U_{out} sono determinate a meno di matrici unitarie costanti, che possono essere fissate dalle condizioni al contorno:

$$U_{in}(-\infty) = \mathbb{I}, \qquad U_{out}(+\infty) = \mathbb{I}. \tag{3.123}$$

E a meno di una fase $U(t) \to e^{i\varphi(t)} U(t)$. La condizione (3.123) rende interpretabili gli stati in come gli stati asintotici a $t \to -\infty$ e gli stati out come gli stati asintotici a $t \to +\infty$. Confrontando le definizioni (3.116) e (3.122) si arriva a:

$$\mathbf{S} = U_{in}(t)\, U_{out}(t). \tag{3.124}$$

Essendo indipendente dal tempo, l'equazione sopra vale $\forall\ t$, e di conseguenza possiamo avere:

$$\mathbf{S} = U_{in}(+\infty) = U_{out}(-\infty). \tag{3.125}$$

Differenziando e manipolando un po' (3.122) otteniamo le uguaglianze:

$$\left[\dot{U}_{in} U_{in}^\dagger + iV(a_{in}^\dagger, a_{in}), a_{in}^\dagger(p,t)\right] = 0, \qquad \left[\dot{U}_{in} U_{in}^\dagger + iV(a_{in}^\dagger, a_{in}), a_{in}(p,t)\right] = 0. \tag{3.126}$$

Che implica $\dot{U}_{in} U_{in}^\dagger + iV(a_{in}^\dagger, a_{in}) = c(t)\mathbb{I}$, dove $c(t)$ non dipende dagli operatori di creazione e distruzione. Scegliendo opportunamente la fase $\varphi(t)$ si può semplificare il termine $c(t)$ e arrivare all'equazione:

$$\dot{U}_{in} U_{in}^\dagger + iV(a_{in}^\dagger, a_{in}) = 0. \tag{3.127}$$

Che può essere risulta come:

$$U_{in}(t) = \mathcal{T}\text{exp}\left(-i\int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}\tau\, V(a_{in}^{\dagger}(\tau), a_{in}(\tau))\right). \tag{3.128}$$

Dove $\mathcal{T}$ indica il time-ordered operator, la prescrizione secondo cui una produttoria di operatori è da intendersi ordinata nella variabile temporale τ. Analogamente per U_{out}:

$$\dot{U}_{out}U_{out}^{\dagger} - iV(a_{out}^{\dagger}, a_{out}) = 0, \tag{3.129}$$

$$U_{in}(t) = \mathcal{T}\text{exp}\left(-i\int_{t}^{\infty} \mathrm{d}\tau\, V(a_{out}^{\dagger}(\tau), a_{out}(\tau))\right). \tag{3.130}$$

Unendo quanto ottenuto possiamo scrivere la matrice di Scattering come:

$$\mathbf{S} = \mathcal{T}\text{exp}\left(-i\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\, V(a^{\dagger}(\tau), a(\tau))\right). \tag{3.131}$$

A questo punto, pensando V come accoppiato ad un parametro ϵ, è possibile fare un'espansione perturbativa:

$$\mathbf{S} = \mathbb{I} - i\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\, V(\tau) + O(\epsilon^2). \tag{3.132}$$

Nel caso del sistema in esame, si ha il parametro perturbativo β, accoppiato linearmente ad all'Hamiltoniana contenente i campi di ordine quartico $\mathcal{H}^{(4)}$. Abbiamo quindi:

$$\mathbf{S} = \mathbb{I} - i\beta\int \mathrm{d}^2\sigma\, \mathcal{H}^{(4)}(\tau,\sigma) + O(\beta^2) \tag{3.133}$$

Definendo la matrice di trasferimento $\mathbf{T}$ tramite la relazione:

$$\mathbf{S} = \mathbb{I} + i\mathbf{T}, \tag{3.134}$$

$$\mathbf{T} = -\beta\int \mathrm{d}^2\sigma\, \mathcal{H}^{(4)}(\tau,\sigma) + O(\beta^2). \tag{3.135}$$

Sostituendo il termine quartico della densità Hamiltoniana si ottiene:

$$\mathbf{T} = -\frac{\beta}{8}\int \mathrm{d}^2\sigma\, \left(P_j^2P_k^2 + 2P_j^2\acute{X}_k^2 + \acute{X}_j^2\acute{X}_k^2 - 4P_jP_k\acute{X}^j\acute{X}^k\right) + O(\beta^2). \tag{3.136}$$

3.2 Matrice S per l'azione effettiva

In questa sezione volgiamo calcolare esplicitamente la matrice di trasferimento data da (3.136). Per farlo calcoleremo la matrice $\mathbf{S}$ per un insieme più generale di sistemi, che hanno determinate proprietà in comune con l'azione della stringa di Polyakov. Cominciamo cercando di scrivere un'azione di $D-2$ campi scalari, che goda delle seguenti proprietà:

- Risulti invariante di Lorentz rispetto alla metrica del world-sheet;
- I campi abbiano invarianza SO$(D-2)$;
- È al più quartica nei campi X^j;
- Sono presenti al più derivate prime dei campi X^j.

Troviamo che la forma più generale può essere espressa come [7]:

$$\begin{aligned}
S &= -\int d^2\sigma\, \mathcal{L}, \\
\mathcal{L} &= \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(4)}, \\
\mathcal{L}^{(2)} &= \frac{1}{2}\partial_\alpha X^j \partial^\alpha X^j, \\
\mathcal{L}^{(4)} &= \frac{1}{4}c_1 \partial_\alpha X^k \partial^\alpha X^k \partial_\beta X^j \partial^\beta X^j + \frac{1}{4}c_2 \partial_\alpha X^k \partial^\alpha X^j \partial_\beta X^j \partial^\beta X^k.
\end{aligned} \tag{3.137}$$

Dove c_1 e c_2 sono costanti reali arbitrarie. Queste azioni effettive possono essere interpretate come le possibili azioni ottenute cambiando la scelta di gauge fixing per un'azione Lorentz invariante anche nei X^μ, espansa e tagliata all'ordine quartico nei campi. Riscriviamo le derivate dei campi e la densità lagrangiana in funzione del quadri-momento:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_j &= P_j + (c_1+c_2) P_j P_k^2 - c_1 P_j \acute{X}_k^2 - c_2 \acute{X}_j P_k \acute{X}_k, \\
\dot{X}_j P_j &= P_j^2 + (c_1+c_2) P_j^2 P_k^2 - c_1 P_j^2 \acute{X}_k^2 - c_2 P_j \acute{X}_j P_k \acute{X}_k, \\
\mathcal{L}^{(2)} &= \frac{1}{2}\acute{X}_j^2 - \frac{1}{2}P_j^2 - (c_1+c_2) P_j^2 P_k^2 + c_1 P_j^2 \acute{X}_k^2 + c_2 P_j \acute{X}_j P_k \acute{X}_k, \\
\mathcal{L}^{(4)} &= \frac{1}{4}(c_1+c_2)(P_j^2 P_k^2 + \acute{X}_j^2 \acute{X}_k^2) - \frac{1}{2}c_1 P_j^2 \acute{X}_k^2 - \frac{1}{2}c_2 (P_j \acute{X}_j)^2.
\end{aligned} \tag{3.138}$$

Infine, la densità Hamiltoniana si scrive dalla trasformata di Legendre:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(P_j^2 + \acute{X}_j^2) + a_1 P_j^2 P_k^2 + a_2 \acute{X}_j^2 \acute{X}_k^2 + a_3 P_j^2 \acute{X}_k^2 + a_4 P_j \acute{X}_j P_k \acute{X}_k. \tag{3.139}$$

Con:

$$a_1 = \frac{1}{4}(c_1+c_2), \qquad a_2 = \frac{1}{4}(c_1+c_2), \qquad a_3 = -\frac{1}{2}c_1, \qquad a_4 = -\frac{1}{2}c_2. \tag{3.140}$$

In particolare osserviamo che per la uniform light cone gauge vale:

$$c_1 = \frac{2a-1}{2}, \qquad c_2 = 1-2a, \qquad c_2 = -2c_1. \tag{3.141}$$

Passiamo ora al calcolo della matrice $\mathbf{T}$ nel caso generale:

$$\mathbf{T} = -\int d^2\sigma \,\left(a_1 P_j^2 P_k^2 + a_2 \acute{X}_j^2 \acute{X}_k^2 + a_3 P_j^2 \acute{X}_k^2 + a_4 P_j \acute{X}_j P_k \acute{X}_k\right). \tag{3.142}$$

Integrando in σ e τ appaiono tre prodotti diversi di delta di Dirac, di questi non si annulla solo quello nella forma:

$$\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)\delta(\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4) = J(\omega_1,\omega_2)[\delta(p_1-p_3)\delta(p_2-p_4)+\delta(p_1-p_4)\delta(p_2-p_3)]. \tag{3.143}$$

Se ipotizziamo $p_1 > p_2$ e $p_3 > p_4$ si riduce a:

$$J(\omega_1,\omega_2)\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)\delta(\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4) = J(\omega_1,\omega_2)\delta(p_1-p_3)\delta(p_2-p_4). \tag{3.144}$$

Dove:

$$J(\omega_1,\omega_2) = \frac{\omega_1\omega_2}{|p_1\omega_2 - p_2\omega_1|}. \tag{3.145}$$

Definito $|p_a, p_b\rangle_{i,j} = a_i^\dagger(p_a) a_j^\dagger(p_b)|0\rangle$ possiamo scrivere:

$$\mathbf{T}_{ij;kl} = \langle p_1, p_2|\mathbf{T}|p_3, p_4\rangle_{ij;kl} = \frac{1}{4\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}} J(\omega_1,\omega_2) M_{ij;kl}(p_1,p_2,p_3,p_4)\delta(p_1-p_3)\delta(p_2-p_4). \tag{3.146}$$

Dove M prende il nome di ampiezza di scattering. Dalla simmetria $SO(D-2)$ dell'Hamiltoniana si osserva che si può scomporre l'ampiezza di scattering in solo tre contributi:

$$M_{k,l}^{i,j}(p_1,p_2,p_3,p_4) = A(p_1,p_2,p_3,p_4)\delta_{k,l}^{i,j} + B(p_1,p_2,p_3,p_4)\delta_{j,l}^{i,k} + C(p_1,p_2,p_3,p_4)\delta_{j,k}^{i,l}. \tag{3.147}$$

Dove A può essere interpretato come termine di annichilazione, B termine di transizione e C di riflessione. Calcolando a titolo di esempio il termine A, per la struttura delle delta contribuiranno tutti e soli i termini della forma $2a_j(p_{i_1})a_j(p_{i_2})a_k^*(p_{i_3})a_k^*(p_{i_4})$, con i_1, i_2, i_3 e i_4 che valgono 1,..,4 e j e k indici ripetuti da 1 a D-2. Per effettuare l'applicazione dei Bra e dei Ket degli asti asintotici è necessario quantizzare il sistema pensando agli a_j come operatori e trasformando $a^* \to a^\dagger$. Infine, per eliminare l'ambiguità di ordinamento si applica il *normal ordering* in cui si sceglie convenzionalmente di tenere gli $a^\dagger$ a sinistra e gli a a destra quando questi si presentano moltiplicati tra loro. Con questa regola i 4 termini contribuiscono come:

$$\begin{aligned} A =& -8a_1\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4 - 8a_2p_1p_2p_3p_4 - 4a_3(p_1p_2\omega_3\omega_4 + p_3p_4\omega_1\omega_2)- \\ &- 2a_4(p_1p_4\omega_2\omega_3 + p_2p_3\omega_1\omega_4 + p_1p_3\omega_2\omega_4 + p_2p_4\omega_1\omega_3) = \\ =& -2c_1(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) - c_2(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) - c_2(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3). \end{aligned} \tag{3.148}$$

dove $p_a \cdot p_b = -\omega_a\omega_b + p_ap_b$ si intende il prodotto Lorentz invariante. Definendo ora le variabili di Mandestam:

$$\begin{aligned} s &= -(p_1 + p_2)^2 = -2p_1 \cdot p_2, \\ t &= -(p_1 - p_3)^2 = +2p_1 \cdot p_3, \\ u &= -(p_1 - p_4)^2 = +2p_1 \cdot p_4. \end{aligned} \tag{3.149}$$

Osservando che vale:

$$s + t + u = 0, \tag{3.150}$$

e calcolando in maniera analoga B e C è possibile scriverli come:

$$A = -\frac{1}{4}(2c_1 + c_2)s^2 + \frac{1}{2}c_2tu, \qquad B = -\frac{1}{4}(2c_1 + c_2)t^2 + \frac{1}{2}c_2su, \qquad C = -\frac{1}{4}(2c_1 + c_2)u^2 + \frac{1}{2}c_2st. \tag{3.151}$$

A seguito della convenzione di ordinamento adottata e dall'applicazione della delta si ha che:

$$p_1 = p_3, \qquad p_2 = p_4, \qquad t = 0, \qquad u = -s. \tag{3.152}$$

Semplificando A, B e C:

$$A = -\frac{1}{4}(2c_1 + c_2)s^2, \qquad B = -\frac{1}{2}c_2s^2, \qquad C = -\frac{1}{4}(2c_1 + c_2)s^2. \tag{3.153}$$

Nel caso del sistema della stringa con la scelta di gauge di cono luce uniforme, grazie alla relazione tra i coefficienti $2c_1 + c_2 = 0$, la relazione sopra si semplifica ulteriormente:

$$A = 0, \qquad B = -\frac{1}{2}c_2s^2, \qquad C = 0. \tag{3.154}$$

Affinché la $J(\omega_1, \omega_2)$ sia ben definita è necessario imporre una seconda condizione sul segno dei momenti, in particolare[9]:

$$p_2 < 0 < p_1. \tag{3.155}$$

Da questo si deduce subito che $J(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2}$, cosicchè l'ampiezza di scattering e la matrice **S** si riducono a:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{ij;kl} &= \frac{1}{8\omega_1\omega_2}M_{ij;kl}(p_1, p_2, p_1, p_2), \\ \mathbf{S}_{ij;kl} &= \delta_{ik}\delta_{jl} + i\mathbf{T}_{ij;kl}. \end{aligned} \tag{3.156}$$

[9]Questo fatto è compatibile con l'idea che le particelle senza massa in una teoria 1d si muovono sempre con la stessa velocità, e possono urtarsi solo se queste hanno verso opposto.

Nel caso specifico della stringa in light cone gauge uniforme otteniamo:

$$\mathbf{S}_{ij;kl} = \{1 + i(1 - 2a)p_1 p_2\}\delta_{ik}\delta_{jl}. \tag{3.157}$$

L'interpretazione fisica di quanto ottenuto è che, dal punto di vista della QFT 1+1 due particelle di momento p_1 e p_2 interagendo compiono necessariamente un urto elastico di sola transizione, uscendo dall'interazione nuovamente come due particelle di momento p_1 e p_2. Il fatto che sia semplificata la struttura tensoriale della matrice di Scattering nel caso della stringa non è un caso. Ciò è un sintomo che la sua teoria quantistica è integrabile, ovvero tale per cui la dinamica a più particelle sia riducibile alla dinamica di due particelle. Tale condizione risulta rispettata se vale la *Yang-Baxter equation* (a tal proposito si veda ad esempio [8]):

$$\mathbf{S}_{12}\mathbf{S}_{13}\mathbf{S}_{23} = \mathbf{S}_{23}\mathbf{S}_{13}\mathbf{S}_{12}. \tag{3.158}$$

Dove $1, 2, 3$ sono gli indici assegnati a tre diverse particelle, e la matrice $\mathbf{S}_{ij}$ descrive lo scattering della coppia (i, j). Osserviamo che data la struttura semplificata $\delta_{ik}\delta_{jl}$, la Yang-Baxter equation risulta banalmente soddisfatta, a supporto della tesi di integrabilità.

3.3 Osservabili della teoria

Come è stato osservato, sia il volume della teoria R che la matrice di Scattering $\mathbf{S}$ (così come la densità di momento P_+) dipendono dalla scelta di gauge adottata, e perciò non si possono ritenere degli osservabili fisici. In particolare, la dipendenza del volume della teoria dallo stato e dal parametro di gauge a è un fenomeno che si osserva nelle deformazioni $T\bar{T}$, come mostrato in [9] e [10]. Ciò che ci aspettiamo è che per una teoria a volume finito debba essere un osservabile lo spettro dell'Hamiltoniana H, in particolare ci aspettiamo che:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}H = 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_{-R(a)/2}^{+R(a)/2} \mathrm{d}\sigma\, P_+(a). \tag{3.159}$$

Si trova infatti che una modifica del parametro a cambia il volume precisamente in modo tale da compensare la variazione di P_+. Mostriamo ora che lo spettro dell'Hamiltoniana effettivamente non dipende da a. L'espansione della matrice $\mathbf{S}$ in (3.157) può essere vista come un espansione in $T^{-1/2}$. In questo modo:

$$\mathbf{S}_{ij;kl} = \left(1 + i\frac{1-2a}{T}p_1 p_2 + O\left(\frac{1}{T^2}\right)\right)\delta_{ik}\delta_{jl}. \tag{3.160}$$

I termini successivi possono essere ottenuti effettuando i conti a loop [10] sulle possibili configurazioni. Un possibile completamento è dato dall'esponenziale:

$$\mathbf{S}(p_1, p_2)_{ij;kl} = e^{i\frac{(1-2a)}{T}p_1 p_2}\delta_{ik}\delta_{jl}. \tag{3.161}$$

Dalla relazione di dispersione (3.108):

$$\mathbf{S}(p_i, p_j) = e^{i(1/2-a)(\omega_i p_j - \omega_j p_i)}\delta_{ik}\delta_{jl}. \tag{3.162}$$

Usando la convenzione che gli argomenti della matrice $\mathbf{S}$ risultano ordinati per intensità decrescente $p_i > p_j$. Osserviamo che la matrice di Scattering può essere scritta in modo che risulti manifestalmente relativisticamente invariante, scrivendola in funzione della variabile di Mandelstam s:

$$\mathbf{S}_{ij;kl} = e^{-i\frac{(1-2a)}{4T}s}\delta_{ik}\delta_{jl}. \tag{3.163}$$

[10] Effettuando i conti a loop si osservano sia divergenze infrarosse (basse energie) a causa della natura massless della relazione di dispersione che ultraviolette (alte energie), che necessitano di una regolarizzazione.

Consideriamo ora la scelta di gauge $a = \frac{1}{2}$, in cui la matrice di Scattering è pari all'identità. In questo caso le particelle si comportano come particelle libere non interagenti in una scatola. Data la periodicità è necessario imporre la condizione di quantizzazione dei momenti:

$$e^{ip_i R} = 1 \rightarrow \quad p_i = \frac{2\pi n_i}{R}, \qquad n_i \in \mathbb{Z}. \tag{3.164}$$

Considerando la dipendenza di R da H (2.89):

$$p_i = \frac{2\pi n_i}{J + \frac{1}{2}H}. \tag{3.165}$$

Sia ora $H = \sum_j \omega_j$, e chiamando $N := \sum_j |n_j|$ si ottiene l'identità:

$$H = \frac{2\pi N}{J + \frac{1}{2}H}, \qquad H = -J + \sqrt{J^2 + 4\pi N}. \tag{3.166}$$

Questa condizione può essere raffinata considerando la *condizione di level matching* (3.167):

$$p_{ws} = \sum_j p_j = 0. \tag{3.167}$$

Siano ora

$$N_> := \sum_{j|\, n_j > 0} n_j, \qquad N_< := \sum_{j|\, n_j < 0} n_j, \tag{3.168}$$

si ottiene la scrittura esplicita dello spettro hamiltoniano:

$$H = -J + \sqrt{J^2 + 8\pi N_>}. \tag{3.169}$$

Nel caso di a generico, si può dimostrare che la condizione al contorno (3.164) si generalizza tramite la *Bethe-Yang equation* [9]:

$$e^{ip_i R} \prod_j \mathbf{S}(p_i, p_j) = 1. \tag{3.170}$$

La relazione sopra può essere giustificata pensando che, facendo compiere alla particella i-esima un giro completo intorno alla circonferenza, questa interagisce con le altre particelle, ed il risultato di ciascuna interazione risulta un fattore $\mathbf{S}(p_i, p_j)$. Esplicitando i vari termini otteniamo:

$$\begin{aligned}
&e^{ip_i(J+(1-a)H)} \prod_j \mathbf{S}(p_i, p_j) = \\
&e^{ip_i(J+\frac{1}{2}H)} e^{ip_i(\frac{1}{2}-a)H} e^{i(\frac{1}{2}-a)(\sum_j \omega_i p_j - \sum_j \omega_j p_i)} = \\
&e^{ip_i(J+\frac{1}{2}H)} e^{ip_i(\frac{1}{2}-a)H} e^{i(\frac{1}{2}-a)(-Hp_i)} = \\
&e^{ip_i(J+\frac{1}{2}H)} = 1.
\end{aligned} \tag{3.171}$$

Dove dal secondo al terzo passaggio si è utilizzata $\sum_j \omega_j = H$ e la condizione di level matching $\sum_j p_j = 0$. Vediamo che il risultato ottenuto non dipende da a e coincide con la condizione al contorno precedentemente studiata, che conferma che lo spettro (3.169) è lo valido per ogni valore di a.
Osserviamo infine che questa trattazione non considera degli effetti di volume finito, che correggono l'energia dello stato. In particolare tali effetti vengono dalla *zero point energy*, ovvero dalla scelta di trascurare i termini costanti che comparirebbero nell'Hamiltoniana a causa delle relazioni di commutazione degli a e degli $a^\dagger$. Questi contributi per avere senso richiedono una regolarizzazione e aggiungono un termine negativo allo spettro dell'Hamiltoniana:

$$H = -J + \sqrt{J^2 + 4\pi N} - \dots. \tag{3.172}$$

Nonostante ciò si può dimostrare [10] che se alla teoria studiata (chiamata anche teoria bosonica) si aggiunge un contributo fermionico, lo spettro dell'Hamiltoniana subisce una nuova variazione che cancella quello precedente, rendendo la scrittura (3.169) esatta.

Bibliografia

[1] Michael B. Green, John H. Schwarz, and Edward Witten. *Superstring Theory Vol. 1: 25th Anniversary Edition*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2012.

[2] Juan Maldacena. The Large-N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity. *International Journal of Theoretical Physics*, 38(4):1113–1133, 1999.

[3] Gleb Arutyunov and Sergey Frolov. Foundations of the $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}_5$ superstring: I. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(25):254003, 2009.

[4] Sergey Frolov, Davide Polvara, and Alessandro Sfondrini. On mixed-flux worldsheet scattering in $\mathrm{AdS}_3/\mathrm{CFT}_2$. *Journal of High Energy Physics*, 2023(11):55, 2023.

[5] Sergei Dubovsky, Raphael Flauger, and Victor Gorbenko. Solving the Simplest Theory of Quantum Gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2012(9):133, 2012.

[6] Marc Henneaux and Claudio Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, 1994.

[7] Fiona K. Seibold and Arkady A. Tseytlin. S-matrix on effective string and compactified membrane. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 56(48):485401, 2025.

[8] Patrick Dorey. Exact S-matrices. *Conformal Field Theories and Integrable Models. Lecture Notes in Physics*, 498:85–125, 1997.

[9] F.A. Smirnov and A.B. Zamolodchikov. On space of integrable quantum field theories. *Nuclear Physics B*, 915:363–383, 2017.

[10] Marco Baggio, Alessandro Sfondrini, Gabriele Tartaglino-Mazzucchelli, and Harriet Walsh. On $T\overline{T}$ deformations and supersymmetry. *Journal of High Energy Physics*, 2019(6):63, 2019.

[11] Saskia Demulder, Sibylle Driezen, Bob Knighton, Gerben Oling, Ana L. Retore, Fiona K. Seibold, Alessandro Sfondrini, and Ziqi Yan. Exact approaches on the string worldsheet. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 57(42):423001, 2024.