Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Triennale in Matematica

La geometria come teoria del primo ordine: gli assiomi di Tarski

Relatore:
Prof. Francesco Ciraulo

Laureando: Elena Scuccimarra
Matricola: 2002611

Anno Accademico 2022/2023

21/07/2023

Indice

Introduzione

In questa tesi si è scelto di parlare di un esempio di sistema assiomatico per la geometria euclidea: l'insieme di assiomi di Alfred Tarski.
Nel capitolo 1 facciamo una veloce panoramica storica su varie assiomatizzazioni esistenti della geometria euclidea. Partiamo proprio da Euclide, che con gli *Elementi* rappresenta un esempio di assiomatizzazione antica. Parliamo delle criticità che gli *Elementi* hanno, per arrivare alle teorie assiomatiche più recenti, come quelle di Pieri e Hilbert. Dopo una rapida descrizione delle differenze tra logica del primo e del secondo ordine, introduciamo il lavoro di Alfred Tarski, fulcro di questa tesi.
Nel capitolo 2, poi, esponiamo e commentiamo gli assiomi di Tarski, mettendo in evidenza le scelte storiche e matematiche, compiute dall'autore, per arrivare all'ultima formulazione della teoria. Parliamo quindi del problema dell'indipendenza degli assiomi, e esponiamo le varie semplificazioni.
Nel capitolo 3 proponiamo una costruzione di base della geometria euclidea, la dimostrazione dell'esistenza del punto medio. Ci proponiamo quindi di ripercorrere i passi che portano a dimostrarlo formalmente all'interno della teoria di Tarski.
Nell'ultimo capitolo infine, parliamo delle proprietà *metateoretiche* che la teoria assiomatica di Tarski dovrebbe avere, come il problema della completezza e della decidibilità.

Capitolo 1

Cenni storici sui fondamenti della geometria

1.1 Gli *Elementi*: esempio antico di sistema assiomatico

Il primo esempio di assiomatizzazione della geometria a noi giunto, come riportato in [9], ci viene da Euclide: egli nei suoi *Elementi* cerca di formalizzare le nozioni geometriche conosciute a quell'epoca in una raccolta di libri, che diventerà per gli studiosi moderni **l'archetipo** del trattato scientifico.
Nonostante l'importanza del testo euclideo, sappiamo ben poco sul suo autore; ciò che possiamo dire è che possiamo far risalire il periodo della sua attività attorno al 300 a.C. epoca in cui il centro degli studi matematici si stava spostando da Atene ad Alessandria d'Egitto, città fondata da Alessandro Magno sulle foci del Nilo. Sappiamo che qui, come detto in [9], Euclide fondò una sua scuola di matematica; presso l'antico Museo di Alessandria, eretto per volontà di Tolomeo I come edificio dedicato alle Muse, che rappresentasse il luogo di incontro tra i sapienti dell'epoca.
Nonostante le poche informazioni su Euclide, il suo testo ci è giunto in forma quasi integra. Ciò che distingue gli *Elementi* non è la loro originalità per quanto riguarda il contenuto, essi non rappresentano un lavoro di ricerca, ma più un lavoro volto a riunificare in modo formale varie conoscenze geometriche note al tempo; l'originalità di Euclide consiste proprio nell'impostazione che gli *Elementi* hanno.
Gli *Elementi* sono un insieme di 13 libri e 465 proposizioni che rappresentano il primo esempio di sistema assiomatico. All'interno del trattato troviamo 4 tipi di nozioni:

1. Vengono introdotti dei *termini primitivi* i quali non possono essere definiti a partire da altri, in termini moderni li chiameremo oggetti primitivi.

2. Troviamo poi quelli che in termini moderni chiamiamo assiomi, enunciati che non possono essere dimostrati ma vanno assunti come veri. Per Euclide si distinguono in *postulati*, cioè gli assiomi propri della geometria, e le *nozioni comuni*, cioè gli assiomi comuni a tutte le scienze deduttive.

3. Un altro tipo di ente è rappresentato dai *termini definiti*: oggetti che vengono definiti a partire da termini primitivi utilizzando i postulati per legarli tra loro.

4. Troviamo poi un secondo tipo di enunciato: i *teoremi*, essi sono dimostrabili con regole logiche a partire dai termini primitivi, dai postulati, dai termini definiti o anche da teoremi dimostrati in precedenza.

Nonostante il grande lavoro euclideo, perché non possiamo considerarlo un sistema assiomatico moderno?
Focalizzandoci sul I libro, quello che più tratta di geometria, leggendolo attentamente, ci si accorge ben presto che il formalismo in alcuni punti viene meno, e si abbandonano le ferree regole logiche. Un chiaro esempio è la **Proposizione 1**, del libro I. Siccome tale proposizione è la prima del primo libro, ci appare ovvio come per dimostrarla siano necessari solo postulati e nozioni comuni.
Per convenienza scegliamo di enunciare solo i postulati che compaiono nei passi della dimostrazione euclidea, per le notazioni seguiamo essenzialmente [9].

Postulato (Postulato 1). *E' sempre possibile costruire una retta passante per 2 punti.*

Postulato (Postulato 3). *E' sempre possibile costruire un cerchio dato un punto e un raggio.*

Nozione Comune (Nozione comune 1). *Cose uguali a una stessa cosa sono uguali tra di loro.*

Definizione (Definizione 15). *Il cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea* (circonferenza) *tale che tutte le rette che intersecano la circonferenza da un punto interno al cerchio, sono uguali fra loro.*

Definizione (Definizione 20). *Dei triangoli, si dice equilatero, quello che ha i tre lati uguali, isoscele quello che ha solo due lati uguali e scaleno quello che ha i tre lati diversi.*

Proposizione (Proposizione 1). *Su una retta terminata data, costruire un triangolo equilatero.*

Dimostrazione. La dimostrazione segue i seguenti passaggi.

1. Sia AB la retta data, con centro A e raggio AB costruiamo un cerchio Δ (per postulato 3).

2. Con centro B e raggio AB costruiamo un cerchio Σ (per postulato 3).

3. Sia C il punto d'intersezione tra i due cerchi, si conducano dai punti A e B, le rette AC e BC (per postulato 1).

4. Poiché A è il centro del cerchio Δ allora $AC = AB$ (per definizione 15).

5. Poiché B è il centro del cerchio Σ allora $BC = AB$ (per definizione 15).

6. Siccome $AC = AB$ e $BC = AB$ allora per la nozione comune 1 $AC = BC$ e le tre linee sono uguali tra di loro, il triangolo ABC è equilatero (per definizione 20).

□

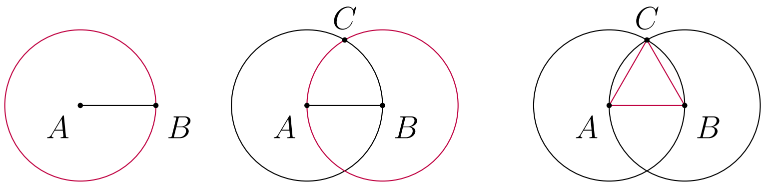

Figura 1.1: Dimostrazione Proposizione 1

Apparentemente i passaggi logici ci appaiono rispettati, tranne uno. Chi ci assicura che al passo 3 il punto C, di intersezione, esista? Ciò non è in generale vero, perché sia vero, è necessario infatti un postulato che ci assicuri in qualche modo la continuità delle circonferenze. Se infatti le circonferenze sono costruite in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, dove i postulati euclidei valgono, nulla assicura che il punto di intersezione esista; ad esempio consideriamo un triangolo equilatero di lato $AC = 2a$. L'altezza di questo triangolo lo dividerà in due triangoli rettangoli di ipotenusa $2a$ e cateto minore a. L'altezza vale allora: $CH = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{a^2(4-1)} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

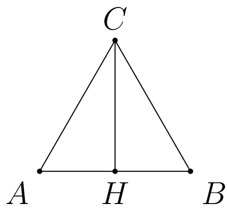

Figura 1.2: Irrazionalità dell'ordinata del punto C in un sistema di coordinate

Come proposto in [9], perché la dimostrazione sia totalmente giustificata, sarebbe necessario un ulteriore postulato:

Postulato.

1. *Un cerchio separa i punti del piano non giacenti su esso in due regioni, dette interno ed esterno.*

2. *Ogni linea tracciata da un punto esterno a un punto interno interseca il cerchio.*

3. *Ogni retta tracciata da un punto sul cerchio a un punto interno incontrerà, se prolungata indefinitamente oltre il punto interno, il cerchio esattamente un'altra volta.*

Il punto 2 è quindi ciò che serve per assicurarci che il punto di intersezione nel passo 3 della dimostrazione esista.

1.2 Pieri e Hilbert: esempi moderni di assiomatizzazione

Dopo un silenzio durato molti anni, con l'avvento delle geometrie non euclidee il lavoro di Euclide fu nuovamente studiato dai matematici dell'epoca. Tra la fine del 1800 e gli inizi del 1900 molti furono i matematici che si riproposero di formalizzare il sistema della geometria euclidea riempendone le lacune. Come è stato detto infatti nel paragrafo precedente, a un occhio attento non sfugge come Euclide, non giustifichi effettivamente tutte le sue assunzioni. Le lacune euclidee posso essere riassunte in 4 categorie:

1. *Problemi di incidenza*: ad esempio, i postulati 1 e 3 del I libro, parlano di rette e cerchi, ma non di punti su di essi; facendo sì che i postulati in sé siano quasi privi di significato. Quando infatti parliamo dell'incidenza di due rette, è necessario che su queste rette sia assunta l'esistenza di punti su di esse, affinché esse si intersechino; assunzione che Euclide fa, senza però esplicitarla.

2. *Problemi di ordine*: tra tali problemi rientra ad esempio l'assunzione implicita della tricotomia, cioè che date due grandezze a e b tali che $a \neq b$, allora o $a < b$ o $a > b$. Euclide però non giustifica mai il perché dell'assunzione basandosi sull'intuizione di un continuo geometrico.

3. *Problemi di congruenza*: Euclide dimostra la congruenza delle figure essenzialmente con un concetto di sovrapponibilità tramite un movimento rigido, esso però non è incluso né nei termini primitivi, né in quelli definiti.

4. *Problema della continuità*: questo problema è già stato trattato nel paragrafo precedente; infatti non assumendo la continuità delle figure interessate nelle dimostrazioni, non è assicurata la loro intersezione.

Per risolvere questi problemi, molti matematici moderni si riproposero di formalizzare la geometria euclidea; tra essi troviamo in Italia Mario Pieri, e in Germania David Hilbert.

1.2.1 Mario Pieri: *La geometria elementare istituita sulle nozioni di punto e sfera*

Mario Pieri (Lucca 1860 - Capannori 1913) fu un matematico italiano noto per i suoi studi sulla geometria proiettiva e su questioni logiche.
Fin dall'anno della sua laurea (1884) egli cominciò a tenere corsi di geometria proiettiva in varie università italiane. Significativo fu il suo arrivo alla Scuola Militare di Torino, dove conobbe Giuseppe Peano, che lo avvicinò allo studio della logica matematica: sotto il suo influsso Pieri pubblicherà un sistema di assiomi per la geometria euclidea tridimensionale. Ma perché l'incontro con Peano è stato determinante? Peano, noto matematico vissuto tra la fine del 1800 e il 1900, era una delle figure di spicco del campo della logica matematica, che contribuirono, nell'Italia di quegli anni, allo sviluppo della logica moderna. In quel periodo, infatti, si era diffuso un atteggiamento comune tra i vari matematici: quello di provare ad assiomatizzare le teorie matematiche e poi, secondo le regole deduttive della

logica, dimostrare in modo rigoroso, quanti più risultati possibili. Proprio a Peano si deve l'assiomatizzazione moderna dell'aritmetica.
Ispirato proprio dalla formalizzazione di Peano, Pieri dedicò gran parte della sua vita a costruire un sistema assiomatico per la geometria euclidea, che fosse il più semplice ed elegante possibile. Lo stesso Pieri, in [4], ci dice che il suo sistema assiomatico è basato su due termini primitivi: *In un lavoro del 1899, ho affermato la possibilità di comporre tutta quanta la geometria elementare con queste due sole materie prime: il punto e una certa relazione fra tre punti* a, b, c, *che si può interpretare con le frasi 'c dista da a quanto b', 'c appartiene alla sfera di* [raggio il segmento] *ab e centro a', 'le coppie* (a, b) *e* (a, c) *sono congrue tra loro', e rappresentar se ci piace, col simbolo* $c \in b_a$.
La versione finale del suo sistema assiomatico conta quindi di due nozioni primitive: il punto e la relazione tra tre punti da lui definita con il simbolo $c \in b_a$ (numero di termini primitivi minore di tutti gli altri sistemi: come si vedrà infatti il sistema di Hilbert si basa su 6 nozioni primitive, quello di Tarski su 3). Egli, poi, come Euclide, elenca definizioni, postulati e teoremi, dividendoli in più sezioni. I postulati totali sono 24, essi non sono esposti tutti all'inizio come nell'opera euclidea, ma Pieri li cita procedendo nella trattazione, all'occorrenza, di modo che il lettore comprenda subito da quali postulati deriva una determinata proposizione. L'opera di Pieri si divide in 8 sezioni. Nella terza sezione, quella che parla di punti interni e esterni a una sfera, vengono introdotti i postulati che giustificano la dimostrazione della prima dimostrazione euclidea: *dicesi interno alla sfera il punto medio di qualsiasi coppia di punti esistenti sopra la sfera e diversi l'uno dall'altro. E al contrario sarà da chiamarsi punto esterno, ogni punto, per cui non esistano sopra la sfera due punti, neppur coincidenti, che lo ammettano qual punto medio. Ciascun punto che non appartenga alla sfera deve essere interno o esterno, né potrà essere l'uno e l'altro ad un tempo.* Quindi come nel postulato proposto a pag. 4 si definisce l'esistenza di punti e interni e esterni a un cerchio, e quindi l'intersezione di due cerchi seguirà poi da altri postulati che avranno lo stesso carattere del postulato appena citato.

1.2.2 Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*

David Hilbert (Konigsberg 1862 - Gottinga 1943) fu un famoso matematico tedesco noto per le sue ricerche, in svariati ambiti della matematica teorica: contribuì alla nascita dell'algebra commutativa, allo sviluppo dell'analisi funzionale (con i contributi dati al calcolo delle variazioni), si dedicò alla teoria algebrica dei numeri e alla geometria (con la sistematizzazione assiomatica della geometria euclidea); propose infine una lista dei 23 problemi aperti per il nuovo millennio, che spaziavano in tutti gli ambiti matematici. Hilbert fu un noto sostenitore della logica; impegno che occupò gran parte della sua vita fu quello, infatti, di assiomatizzare non solo la geometria, ma tutta la matematica. Il suo sistema assiomatico per la geometria ci appare intensamente moderno e rigoroso: non presenta infatti alcuna definizione esplicita, reale, ma solo definizioni che citano enti matematici. Se infatti da una parte la prima definizione di Euclide, è quella di punto (*Punto è ciò che non ha parti*), dall'altra Hilbert invece divide i suoi concetti primitivi in tre sistemi: *Consideriamo 3 sistemi di oggetti e chiamiamo punti gli oggetti del I sistema, rette quelli del II sistema, piani quelli del III sistema.* Gli enti primitivi di Hilbert sono quindi punto, linea e retta. Egli poi include anche tre relazioni tra punti:

- La relazione di *essere su* che indica quando un punto appartiene a una retta o un piano, o quando una retta è contenuta in un piano.
- La relazione di *essere fra* che indica quando un punto appartiene al segmento che ha per estremi altri due punti.
- La relazione di *essere congruente* che indica quando angoli e segmenti possono essere congruenti.

Hilbert poi, come si vede da [2], divide gli assiomi del suo sistema assiomatico, in 5 gruppi che ripercorrono, quelle che per lui sono le 5 lacune euclidee, quelle citate nel paragrafo 1.2, a cui si aggiunge il problema del V postulato.
Gli assiomi di Hilbert si dividono quindi in:

1. *Assiomi di collegamento*: tali assiomi postulano le proprietà della relazione di *essere su*, parlano di punti, rette e piani e delle relazioni tra di loro. Fa parte di questo gruppo, ad esempio, l'assioma che postula che fra due punti passa una e una sola retta.

2. *Assiomi di ordinamento*: tali assiomi postulano invece le proprietà della relazione di *essere fra*. In questo gruppo compare, per esempio, l'assioma che ci dice che presi due punti, ne esiste sempre uno compreso tra i due dati. Tali assiomi quindi definiscono l'ordinamento dei punti su una retta, dando un senso ai termini *essere dalla stessa parte* o *essere da parti opposte*.

3. *Assiomi di congruenza*: questi assiomi riguardano la relazione di *essere congruente*. Parlano di congruenze tra segmenti e angoli, e quindi compare anche l'assunzione (non implicita come nel caso euclideo) di un movimento rigido, attraverso il quale si definisce la congruenza fra le figure del piano.

4. *Assioma delle parallele*: contiene solo un assioma, una formulazione equivalente del V postulato euclideo, ovvero quella proposta da Playfair: *Per un punto non appartenente a una retta, passa una e una sola retta parallela a quella data.*

5. *Assiomi di continuità*: quest'ultimo gruppo è, per certi versi, il più importante. Questo è infatti il gruppo, che esplicitamente, postula la continuità delle rette e delle linee che vengono usate in geometria. Quest'ultimo gruppo contiene solo due assiomi:

   - **L'assioma Archimedeo**: dati AB e CD due segmenti, esiste un multiplo n tale che il trasporto del segmento CD fatto n volte da A sulla semiretta passante per B, porta al di là di B.
   - **L'assioma di completezza**: ad un sistema di punti, rette e piani è impossibile aggiungere altri elementi geometrici in modo che il sistema così generalizzato formi una nuova geometria obbediente a tutti i postulati precedenti.

> (Conseguenza di questi due assiomi è il seguente enunciato: *date due circonferenze Γ e Δ, se esistono almeno due punti in Δ, che chiamiamo A e B, tali che A è interno a Γ e B è esterno a Γ, allora Γ e Δ si intersecano*, che è proprio quello che serve ad esempio a dimostrare la prima proposizione euclidea).

Perché quindi se abbiamo a disposizione due sistemi assiomatici moderni per la geometria euclidea, scegliamo di parlare di un terzo, forse meno noto ai più, quello di Alfred Tarski?

1.3 Sulla logica del secondo ordine

Le teorie sopra esposte, quella di Pieri e quella di Hilbert, hanno in comune una proprietà. Sono entrambe teorie assiomatiche basate sulla logica del secondo ordine. Cosa si intende quando si parla di logica del primo o del secondo ordine?

- Con logica del **primo ordine** intendiamo la costruzione di un linguaggio predicativo, i cui quantificatori agiscano su un insieme precedentemente definito, quindi si occupano solo di quantificare elementi di un insieme. Dato per esempio un insieme $\mathbb{X}$ e una proprietà che per semplicità chiamiamo P, un esempio di enunciato per la logica del primo ordine è: $\forall\ x \in \mathbb{X}$ vale P.

- Con logica del **secondo ordine** intendiamo la costruzione di un linguaggio predicativo, i cui quantificatori non agiscano soltanto su elementi, ma anche su sottoinsiemi dell'insieme di partenza. Dato quindi l'insieme $\mathbb{X}$ e la proprietà P, un esempio di enunciato per la logica del secondo ordine è: $\forall\ X \subset \mathbb{X}$ vale P.

Dopo aver dato questa distinzione, vorremmo enunciare qualche proprietà *metateoretica* delle teorie assiomatiche, per capire la potenza della logica del primo ordine, anche se essa ci permette meno espressività rispetto a quella del secondo. Le seguenti definizioni e risultati sono tratti da [3], a cui si rimanda per maggiori dettagli.

- **Teoria non contraddittoria**: una teoria si dice non contraddittoria (o coerente o consistente) se e solo se non esiste nessun enunciato A tale che sia A che $\neg A$ siano teoremi della teoria. Da una teoria consistente quindi non può essere derivato il falso.

- **Teoria sintatticamente completa**: una teoria si dice sintatticamente completa se e solo se comunque preso un enunciato formulato nel linguaggio della teoria, vale che o A o $\neg A$ è un teorema della teoria.

- **Teoria decidibile**: una teoria si dice decidibile se e solo se esiste un algoritmo che permette di stabilire in un numero finito di passi se un qualsiasi enunciato formulato con il linguaggio della teoria è un teorema oppure no.

- **Teoria semanticamente completa**: una teoria è semanticamente completa se è sempre possibile dimostrare gli enunciati in tutti modelli della teoria.

- **Teoria categorica**: una teoria è categorica se e solo se tutti i suoi modelli sono isomorfi tra di loro. Detto α un cardinale infinito, la teoria si dice α categorica, se tutti i modelli di cardinalità α sono isomorfi tra loro.

Quindi se consideriamo solo teorie al primo ordine, abbiamo importanti teoremi che legano queste proprietà tra loro. Senza entrare nel dettaglio ne citiamo alcuni:

- Ogni teoria al primo ordine categorica è sintatticamente completa.
- Se una teoria al primo ordine è consistente, non ha modelli finiti ed è α categorica, per qualche α cardinale infinito maggiore della cardinalità del linguaggio, allora è sintatticamente completa (test di Vaught).
- Le teorie al primo ordine sono tutte semanticamente complete.

Enunciate tali proprietà sappiamo che non sono molte le teorie al primo ordine ad averle tutte. Per esempio sono pochissime le teorie ad essere complete: la teoria degli spazi vettoriali su un campo di cardinalità infinita è completa, la teoria dei campi algebrici chiusi di caratteristica zero è completa, ma l'aritmetica di Peano al primo ordine non lo è. Se parliamo di teorie al secondo ordine le proprietà che si perdono sono di più. Per esempio nella logica del primo ordine vale il teorema di compattezza (se ogni sottoinsieme finito di una teoria ha modello, allora anche la teoria ha modello), che nella logica del secondo ordine non può valere. Nella logica del primo ordine valgono poi i teoremi di Löwenheim-Skölem (se una teoria ha modelli infiniti allora ne ha uno di cardinalità minore o uguale a quella del linguaggio, e se una teoria ha modelli infiniti allora per ogni k cardinale infinito, e maggiore della cardinalità del linguaggio, esiste sempre un modello di cardinalità $\geq k$), che nella logica del secondo ordine non valgono. Per esempio poi nessuna teoria al secondo ordine può essere semanticamente completa. Se esistesse infatti un calcolo logico completo per la logica del secondo ordine, la validità della logica del secondo ordine sarebbe da ricondurre alla derivabilità nel calcolo, quindi tutte le proposizioni valide nella logica del secondo ordine sarebbero ricorsivamente enumerabili. Sarebbero enumerabili quindi anche quelle non valide della logica dei predicati del primo ordine (per un risultato di [3], a cui si rimanda per i dettagli, che ci dice che: la chiusura esistenziale del secondo ordine di un enunciato $\neg A$ è valida nella logica del secondo ordine se e solo se A non è valida nella logica del primo ordine). Dato che le proposizioni valide per la logica del primo ordine sono enumerabili (perché il calcolo dei predicati al primo ordine è completo) avremmo enumerazioni sia di quelle valide che di quelle non valide, e quindi la validità delle proposizioni della logica del primo ordine sarebbe decidibile, contro il teorema di Church (il calcolo dei predicati della logica del primo ordine non è decidibile)[1].

1.4 Il sistema di Tarski

Alfred Tarski nacque a Varsavia nel 1901 e morì a Berkley nel 1983. Il suo lavoro si focalizzò principalmente sulla logica matematica: dalla teoria degli insiemi a quella dei

[1] [3] pag. 151

modelli, fino alla ricerca di una formalizzazione per la geometria. Spicca nella sua vita la collaborazione con Banach (da cui nacque il famoso paradosso di teoria degli insiemi: di Banach-Tarski). Durante poi la sua permanenza a Vienna egli ebbe modo di conoscere Kurt Gödel e approcciarsi quindi allo studio della logica. Si stabilì poi nel 1942 a Berkley, dove fino alla sua morte sviluppò la sua scuola di logica.
La prima versione degli assiomi di Tarsky per la geometria euclidea, risale al 1926/1927. Il grande merito di Tarski, e il motivo principale per cui questa tesi tratta di lui, è il fatto di essere riuscito a dare una teoria assiomatica per la geometria euclidea piana, che lui stesso chiamerà *geometria elementare*: cioè la parte della geometria euclidea non basata sulle nozioni di teoria degli insiemi. Quindi, gli assiomi di Tarski sono tutti del primo ordine.
Il fatto che la teoria sia al primo ordine comporta innumerevoli conseguenze *metateoretiche* importanti. Nel 1930, per esempio egli riuscirà a dimostrare, tramite l'eliminazione dei quantificatori, che ogni formula è equivalente a una combinazione booleana di formule senza quantificatori. Questo fondamentale risultato porterà a importanti corollari:

1. La teoria è **completa**: ogni enunciato è dimostrabile, oppure è dimostrabile la sua negazione.

2. La teoria è **decidibile**: esiste una procedura meccanica per determinare se un determinato enunciato è dimostrabile all'interno della teoria.

3. La teoria è **consistente**: da essa non può essere derivato il falso (e ciò è dimostrabile tramite una dimostrazione costruttiva).

A parte le importanti proprietà *metateoriche* di tale teoria, degna di nota è l'estrema semplicità e eleganza degli assiomi, specialmente nella versione finale, raggiunta all'incirca nel 1965.
Se volessimo in qualche modo formalizzare questa nozione di semplicità, come espresso in [8], possiamo per esempio considerare la teoria tarskiana, a cui, come vedremo poi in dettaglio, sostituiamo l'Ax.11 con l'assioma di continuità al secondo ordine. Facendo ciò la teoria ha un numero finito di assiomi e possiamo usare come misura della semplicità la lunghezza totale della teoria, cioè la somma delle lunghezze di tutti gli assiomi della teoria (per capire la lunghezza di un assioma si devono contare tutte le occorrenze di una variabile, come anche costanti logiche e non). Se quindi, usando questa nozione comparassimo la teoria formata dagli assiomi di Tarski, al secondo ordine, che sono in numero finito (nella forma finale sono 11 assiomi) a quelli di Pieri (24), il risultato sarebbe sorprendente. Tenendo conto che spesso gli assiomi di Pieri sono scritti usando termini definiti, e solo poi viene data la versione con solo termini primitivi, risulterebbe che la lunghezza di un solo assioma di Pieri (il numero XXI per esempio: *Dati i punti non collineari A, B, C, qualunque retta del piano ABC, che passi fra i punti A e B, dovrà inoltre passare fra i punti A e C o fra i punti B e C: se però non contenga nessuno degli A, B, C.*) non sarebbe molto minore della lunghezza totale del sistema assiomatico di Tarski per la geometria tridimensionale. Sommando alla lunghezza dell'assioma XXI, quella dell'assioma più corto di Pieri (il numero XI: *Se essendo A, B, C, D punti dati ed M un punto arbitrario, le tre sfere D_A, D_B e D_C non abbian punti a comune all'infuori*

di D; allora ogni punto comune alle sfere M_A, M_B, M_C dovrà stare sulla sfera M_D.) si otterrebbe un numero maggiore della lunghezza totale dell'insieme di assiomi di Tarski. Questo semplice esempio quindi ci fa capire l'importanza del sistema assiomatico tarskiano, da una parte per la sua semplicità, dall'altra, la più importante, per le sue proprietà *metateoretiche*: in primis, completezza e decidibilità.

Capitolo 2

Gli assiomi di Alfred Tarski

In questo capitolo, ci occuperemo principalmente di presentare gli assiomi di Tarski per la geometria euclidea elementare, commentandone il significato, e sottolineando lo sviluppo storico degli assiomi, dalla loro prima versione fino a quella finale. Per la numerazione degli assiomi seguiamo essenzialmente la trattazione in [8], cambiando, però, per semplicità le notazioni con quelle per le relazioni fondamentali da noi introdotte.

2.1 1926-1927: gli assiomi originali

In contrasto con Pieri e Hilbert, Tarski utilizza un linguaggio su cui fondare la sua teoria molto semplice. In tale linguaggio troviamo un unico ente primitivo: il punto. Tutte le variabili, quindi, che si trovano all'interno degli assiomi (A, B, C, etc) sono punti. Tali oggetti primitivi vengono legati tra loro da due nozioni geometriche primitive:

- La relazione di *stare fra*: una relazione ternaria che indica quando il punto B sta sul segmento che congiunge A con C. Per indicarlo scriviamo $A^B C$.

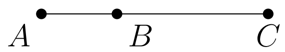

Figura 2.1: *Stare fra*

- La relazione di *congruenza*: una relazione quaternaria che indica quando il segmento che unisce A e B ha la stessa lunghezza (è congruente) al segmento che congiunge C con D. Per indicarlo scriviamo $AB \equiv CD$.

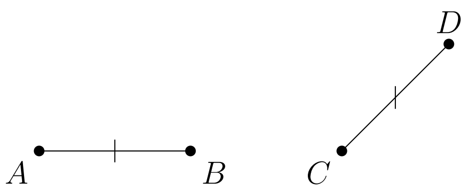

Figura 2.2: *Congruenza*

Il linguaggio si arricchisce poi con gli usuali connettivi logici: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ e con i quantificatori: esistenziale ($\exists$) e universale ($\forall$).
La prima formulazione degli assiomi fu data da Alfred Tarski, nell'anno accademico 1926-1927. Egli presentò i suoi 20 assiomi più uno schema di assiomi, durante il suo corso di *Geometria Euclidea* all'università di Varsavia. Tale insieme di assiomi apparirà pubblicato solo nel 1967 in *The completeness of elementary algebra and geometry.* Nella seguente trattazione consideriamo le variabili che non sono quantificate, come universalmente quantificate.

Assioma 1 (Simmetricità della *congruenza*)**.**

$$AB \equiv BA$$

Tale assioma formalizza la nostra intuizione sulle proprietà della *congruenza*: il segmento AB ha la stessa lunghezza del segmento BA.

Assioma 2 (Transitività della *congruenza*)**.**

$$AB \equiv CD \wedge AB \equiv EF \rightarrow CD \equiv EF$$

L'Ax. 2 ci assicura invece la transitività della *congruenza*: se la lunghezza del segmento AB è uguale sia alla lunghezza del segmento CD, che a quella del segmento EF, allora i segmenti CD e EF avranno la stessa lunghezza.

Assioma 3 (Assioma identità per la *congruenza*)**.**

$$AB \equiv CC \rightarrow A = B$$

In pratica se la lunghezza del segmento AB è uguale a quella del segmento CC (nulla) il punto A deve per forza coincidere con il punto B.

Assioma 4 (Costruzione di un segmento)**.**

$$\exists\ X\ \big(C^D X \wedge DX \equiv AB\big)$$

Tale assioma ci assicura che è sempre possibile costruire un segmento che sia congruente a un segmento dato. In particolare: dato il segmento AB è sempre possibile costruire come prolungamento di un segmento CD un segmento DX che abbia la stessa lunghezza di quello dato.

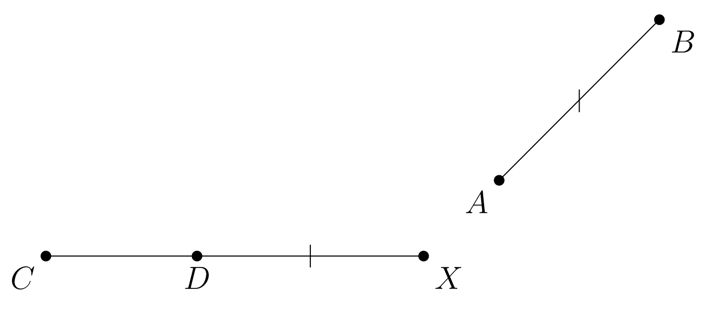

Figura 2.3: Ax. 4

Assioma 5 (Assioma del quinto segmento)**.**

$$\big(A \neq B \wedge B \neq C \wedge A^{B}C \wedge A'^{B'}C' \wedge AB \equiv A'B' \wedge BC \equiv B'C' \wedge AD \equiv A'D' \wedge BD \equiv B'D'\big)$$
$$\to CD \equiv C'D'$$

Tale assioma ci dice essenzialmente che dati due triangoli ACD e $A'C'D'$ e due punti interni B e B' rispettivamente sui segmenti AC e $A'C'$, dalla congruenza di alcuni segmenti possiamo concludere la congruenza di CD e $C'D'$. Tale asserto ha un carattere del tutto simile ai criteri euclidei, che permettono di concludere, partendo dall'ipotesi di congruenza di certi lati e angoli corrispondenti, circa la congruenza di altri lati o angoli corrispondenti.

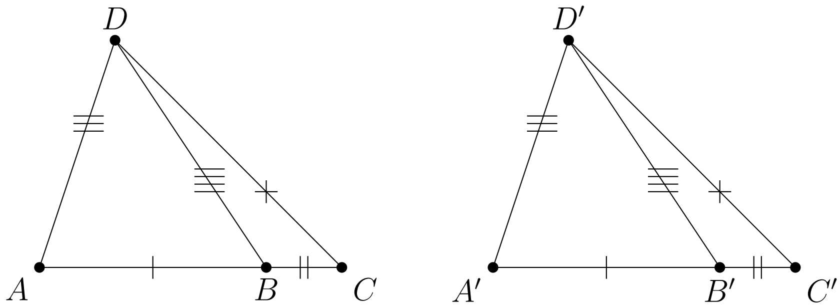

Figura 2.4: Ax. 5

Assioma 6 (Assioma identità per lo *stare fra*)**.**

$$A^{B}A \to A = B$$

Che è una condizione che ci dice che affinché un punto B sia compreso nel segmento AA è necessario che A e B coincidano.

Assioma 7 (Assioma di Pasch)**.**

$$A^{D}B \wedge C^{B}E \to \exists\, X\big(A^{X}C \wedge X^{D}E\big)$$

L'assioma di Pasch è un assioma molto importante che ci dice che data una retta che intersechi un triangolo in un suo lato, e che non intersechi nessun vertice, deve per forza intersecare il triangolo anche in uno degli altri due lati. Nella figura, dato un segmento DE che intersechi il triangolo ABC nel prolungamento del lato BC (ipotesi $C^{B}E$), e il lato AB (ipotesi $A^{D}B$) deve per forza intersecare il lato AC in un punto X la cui esistenza è giustificata dall'assioma.

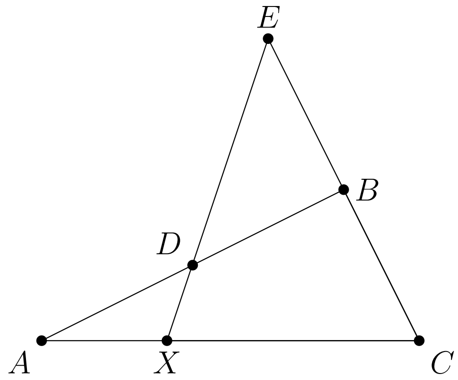

Figura 2.5: Ax. 7

Assioma 8 (Assioma per almeno la bidimensionalità)**.**

$$\exists\ A\ \exists\ B\ \exists\ C\ \big(\neg A^B C \wedge \neg B^C A \wedge \neg C^A B\big)$$

Tale assioma ci dice che possiamo sempre trovare tre punti che non sono allineati, e questo ci assicura che lo spazio euclideo, per cui Tarski sta fornendo i suoi assiomi, è almeno bidimensionale.

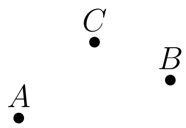

Figura 2.6: Ax. 8

Assioma 9 (Assioma per al più la bidimensionalità)**.**

$$\begin{aligned}\exists\ Y\big\{&\big[\big(X^Y A \vee Y^A X \vee A^X Y\big) \wedge B^Y C\big]\\ \vee\ &\big[\big(X^Y B \vee Y^B X \vee B^X Y\big) \wedge C^Y A\big]\\ \vee\ &\big[\big(X^Y C \vee Y^C X \vee C^X Y\big) \wedge A^Y B\big]\big\}\end{aligned}$$

L'Ax. 9 ci dice che presi tre punti non allineati A, B e C, se da un qualsiasi punto X tracciamo le rette ai vertici del triangolo ABC, almeno una di queste linee deve intersecare il lato opposto al vertice. L'assioma quindi ci assicura che la dimensione sia al più bidimensionale.

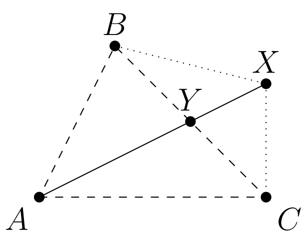

Figura 2.7: Ax. 9

Assioma 10 (Assioma euclideo)**.**

$$A^E D \wedge B^E C \wedge A \neq E \to \exists\ X\ \exists\ Y \big(A^B X \wedge A^C Y \wedge X^D Y\big)$$

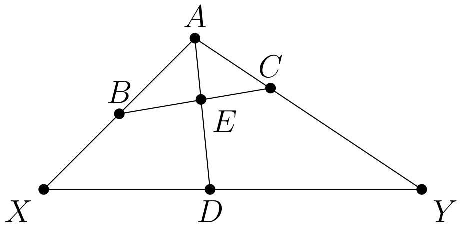

Figura 2.8: Ax. 10

Tale postulato asserisce che dato un qualsiasi punto D all'interno dell'angolo BAC, esisterà un segmento XY che intersechi entrambi i lati dell'angolo. Questo assioma rappresenta a tutti gli effetti il V postulato euclideo. Come detto infatti in [8], se riscriviamo tale assioma in una forma equivalente (vedi [8]), otteniamo che l'Ax. 10 è equivalente al V postulato. Tale variante è la seguente:

$$\big(A^B F \wedge AB \equiv BF \wedge A^D E \wedge AD \equiv DE \wedge B^D C \wedge BD \equiv DC\big) \to BC \equiv FE$$

Questa forma dell'assioma ci dice che il segmento che collega i punti medi B e D, rispettivamente dei lati AF e AE, è la metà del terzo lato del triangolo FE, e tale risultato, in geometria euclidea è equivalente a dire che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, che a sua volta è equivalente al V postulato.

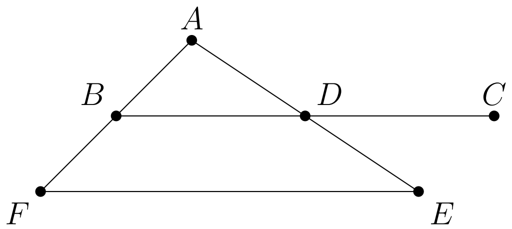

Figura 2.9: Variante Ax. 10

Assumendo quindi l'Ax. 10 otteniamo la geometria euclidea in dimensione 2, assumendone la negazione, otteniamo la geometria iperbolica di Bolyai e Lobacevskij.

Assioma 11 (Schema di assiomi per la continuità)**.**

$$\exists\ A\ \forall\ X\ \forall\ Y\ \big(\alpha \wedge \beta \to A^X Y\big) \to \exists\ B\ \forall\ X\ \forall\ Y (\alpha \wedge \beta \to X^B Y)$$

Questo assioma rappresenta proprio quell'assioma di continuità che Euclide assumeva nelle sue dimostrazioni, senza mai però elencarlo tra i postulati. Qui α e β rappresentano due formule qualsiasi al primo ordine, dove la prima non contiene occorrenze libere di A,

B e Y e la seconda non contiene occorrenze libere di A, B e X. Esso non è un singolo assioma, ma è un insieme infinito di assiomi (schema di assiomi, perché appunto α e β possono essere sostituite con qualsiasi formula al primo ordine che rispetti le assunzioni). Il postulato di continuità, come espresso in [5], rappresenta l'ostacolo più difficile per assiomatizzare la teoria al primo ordine. Tarski infatti aveva cominciato a cercare una formulazione al primo ordine dell'assioma di continuità, a partire dalla forma (al secondo ordine) più intuitiva di Dedekind:

$$\forall\, \mathbb{X}\, \forall\, \mathbb{Y}\, (\mathbb{X} < \mathbb{Y} \rightarrow \exists\, X\; \mathbb{X} \leq X \leq \mathbb{Y})$$

Tale assioma afferma che per ogni insieme $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ che noi consideriamo, per cui valga $\mathbb{X} < \mathbb{Y}$ (intesa come abbreviazione per l'enunciato: $\forall\, x \in \mathbb{X}\, \forall\, y \in \mathbb{Y} \rightarrow x < y$), allora esiste sempre un elemento X che è maggiore di tutti gli elementi di $\mathbb{X}$ e minore di tutti gli elementi di $\mathbb{Y}$. Ovviamente questo assioma utilizza nozioni che nella teoria di Tarski non sono esprimibili. Tarski stesso quindi dà una propria versione dell'assioma di continuità, sempre al secondo ordine:

$$\exists\, A\, \forall\, X\, \forall\, Y\, \big(X \in \mathbb{X} \wedge Y \in \mathbb{Y} \rightarrow A^X Y\big) \rightarrow \exists\, B\, \forall\, X\, \forall\, Y\, \big(X \in \mathbb{X} \wedge Y \in \mathbb{Y} \rightarrow X^B Y\big)$$

Esso asserisce che dati due qualsiasi insiemi $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ tali che gli elementi del primo precedano gli elementi del secondo rispetto a un punto A (ipotesi rappresentato da $A^X Y$ qualsiasi siano i punti X e Y), tali elementi sono separati da un punto B.

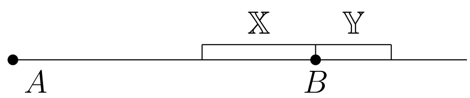

Figura 2.10: Ax. 11

Ovviamente tale assioma non può rientrare nella teoria tarskiana, in quanto è al secondo ordine. Riscrivere l'Ax. 11 al primo ordine non è così semplice: dobbiamo rinunciare a un singolo assioma in favore di uno schema di assiomi; tale svantaggio è inevitabile: la geometria euclidea elementare non è finitamente assiomatizzabile (non può essere assiomatizzata quindi con un numero finito di assiomi).

Assioma 12 (Riflessività dello *stare fra*)**.**

$$A^B B$$

Il cui chiaro significato è che ovviamente il punto B è contenuto nel segmento AB.

Assioma 13 (Inverso dell'assioma identità per lo *stare fra*)**.**

$$A = B \rightarrow A^B A$$

Assioma 14 (Simmetricità dello *stare fra*)**.**

$$A^B C \rightarrow C^B A$$

Che intuitivamente ci dice che se B è contenuto nel segmento AC allora sarà contenuto anche nel segmento CA.

Assioma 15 (Transitività *interna* dello *stare fra*)**.**

$$A^B D \wedge B^C D \rightarrow A^B C$$

Il significato è che se B è contenuto nel segmento AD, e C è contenuto nel segmento BD, allora B è contenuto nel segmento AC.

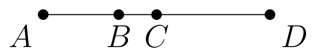

Figura 2.11: Ax. 15

Assioma 16 (Transitività *esterna* dello *stare fra*)**.**

$$A^B C \wedge B^C D \wedge B \neq C \rightarrow A^B D$$

Il cui significato può essere spiegato con la stessa figura fatta per l'Ax. 15. Nel primo assioma la transitività è assunta sui primi punti A, B e C, questa volta invece è assunta sui punti più esterni: A, B e D.

Assioma 17 (Connettività *interna* dello *stare fra*)**.**

$$A^B D \wedge A^C D \rightarrow \left(A^B C \vee A^C B\right)$$

Che essenzialmente ci dice che dato B sul segmento AD e C sempre sullo stesso segmento, ci possono essere due possibilità: o C sta su AB oppure su BD, cioè il punto C è interno a uno dei due segmenti divisi dal punto B.

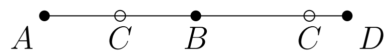

Figura 2.12: Ax. 17

Assioma 18 (Connettività *esterna* dello *stare fra*)**.**

$$A^B C \wedge A^B D \wedge A \neq B \rightarrow \left(A^C D \vee A^D C\right)$$

Cioè che dato B sul segmento AC e allo stesso tempo sul segmento AD, con A diverso da B, si hanno sempre due casi: o C sta sul segmento AD o D sta sul segmento AC. Tale assioma differisce dall'Ax. 17 per la posizione finale di C che può essere anche esterna al segmento AD.

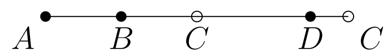

Figura 2.13: Ax. 18

Assioma 19.

$$A = B \rightarrow AC \equiv BC$$

Assioma 20 (Unicità dei triangoli)**.**

$$\begin{aligned}&\big(AC \equiv AC' \wedge BC \equiv BC' \wedge A^D B \wedge A^{D'} B \wedge C^D X \wedge C'^{D'} X \wedge D \neq X \wedge D' \neq X\big)\\ &\rightarrow C = C'\end{aligned}$$

L'assioma di unicità afferma che al massimo un triangolo può essere costruito su un dato segmento come lato, e con misure date per gli altri due lati: dato un segmento AB, non possono esistere due punti C e C' distinti, dalla stessa parte di AB tali che ABC e ABC' siano triangoli congruenti. La parte di piano su cui giacciono C e C', è determinata da un punto X opposto a C e a C' e da due punti D e D' sul segmento AB (ipotesi $C^D X$ e $C'^{D'} X$). La figura sottostante va intesa tenendo conto che i due triangoli dovrebbero essere sovrapposti, ma per semplicità sono stati rappresentati così.

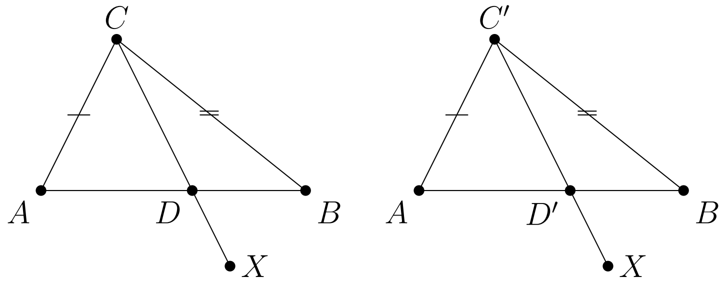

Figura 2.14: Ax. 20

Assioma 21 (Esistenza dei triangoli)**.**

$$\begin{aligned}&AB \equiv A'B'\\ &\rightarrow \exists\ C\ \exists\ X\ \big[AC \equiv A'C' \wedge BC \equiv B'C' \wedge C^X P \wedge \big(A^B X \vee B^X A \vee X^A B\big)\big]\end{aligned}$$

Questo assioma ci assicura sostanzialmente la possibilità di costruire triangoli. Dato un triangolo $A'B'C'$ e un segmento AB congruente al lato $A'B'$, esiste allora un punto C da una specifica parte di AB, tale che i triangoli ABC e $A'B'C'$ siano congruenti. Il lato da cui deve trovarsi C è dalla parte opposta di un punto P. Il punto X, sul lato AB è usato a sua volta per dire che P e C sono dalla parte opposta rispetto ad AB.

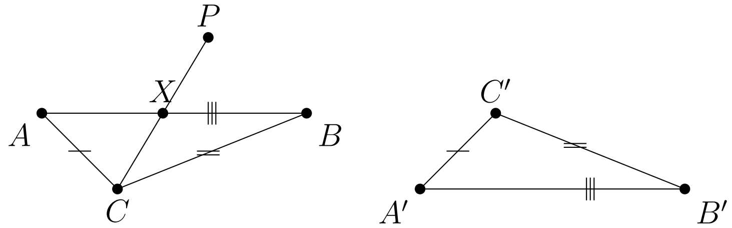

Figura 2.15: Ax. 21

2.2 La diminuizione del numero di assiomi

Dopo aver formulato i suoi assiomi, Tarski si pose come obbiettivo quello di arrivare a un insieme di assiomi che fosse il più elegante possibile, e soprattutto che fosse formato da assiomi tutti indipendenti tra loro. Un assioma si dice indipendente (da un insieme di altri assiomi) quando non può essere dimostrato a partire dagli altri assiomi della teoria.

2.2.1 1948: la prima semplificazione

In [6] Tarski applica una prima semplificazione all'insieme dei suoi assiomi, qui l'Ax. 13 e l'Ax. 19 vengono eliminati, essi si possono infatti derivare dagli altri. Inoltre l'Ax. 20 viene sostituito con una sua variante:

$$\big[A \neq B \wedge AC \equiv AC' \wedge BC \equiv BC' \wedge B^D C' \wedge \big(A^D C \vee A^C D\big)\big] \rightarrow C = C'$$

la quale è una versione più corta del precedente Ax. 20, ma più elegante per asserire ugualmente lo stesso contenuto matematico.

2.2.2 1956-1957: ancora semplificazioni

In [7] si ha l'ultima semplificazione dovuta a Tarski, assieme ad alcuni suoi collaboratori: Eva Kallin e Scott Taylor. In questo nuovo lavoro, gli assiomi 5, 7, 9 e 10 sono sostituiti da formulazioni equivalenti, ritenute più soddisfacenti per vari motivi. Riportiamo di seguito la lista delle variazioni:

Ax. 5: $\big(A \neq B \wedge A^B C \wedge A'B'C' \wedge AB \equiv A'B' \wedge BC \equiv B'C' \wedge AD \equiv A'D' \wedge BC \equiv B'D'\big) \rightarrow CD \equiv C'D'$
la cui unica modificazione è stata nell'eliminazione dell'ipotesi $B \neq C$, non necessaria.

Ax. 7: $A^D B \wedge C^B E \rightarrow \exists\, X\big(A^X C \wedge E^D X\big)$
la cui unica modifica è l'inversione dei punti nell'ultima ipotesi ($E^D X$ al posto di $X^D E$).

Ax. 9: $\exists\, A\ \exists\, B\ \exists\, C\ \exists\, P\ \exists\, Q\,(P \neq Q \wedge AP \equiv AQ \wedge BP \equiv BQ \wedge CP \equiv CQ) \rightarrow \big(A^B C \vee B^C A \vee C^A B\big)$
in cui a cambiare non è solo la forma, ma anche il contenuto matematico: presi comunque tre punti A, B e C che siano equidistanti da due punti P e Q, essi devono essere allineati, cioè l'insieme dei punti equidistanti da 2 punti deve essere una retta.

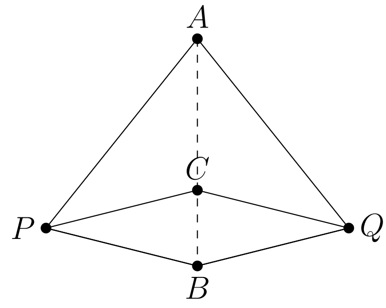

Figura 2.16: Ax. 9

Ax. 10: $A^E D \wedge B^E C \wedge A \neq E \rightarrow \exists\, X\ \exists\, Y\big(A^B X \wedge A^C Y \wedge Y^D X\big)$
dove anche qui l'unica modifica è l'inversione dell'ultima ipotesi, $Y^D X$ al posto di $X^D Y$.

Ma la vera semplificazione si ha con la riduzione del numero di assiomi: 12, 14, 16, 17, 20 e 21 sono stati dimostrati essere dipendenti e quindi omessi. La teoria a questo punto quindi conta 12 assiomi più uno schema di assiomi.

Il ruolo degli assiomi 8 e 9

Nella loro ultima forma gli assiomi 8 e 9 vengono dati in formulazioni che sembrano molto simili tra loro. Questo perché essi sono interconnessi: rappresentano infatti una limitazione inferiore e superiore alla dimensione dello spazio. Tali assiomi possono essere scritti per ogni dimensione:

Ax.$\mathbf{8_1}$: $\exists\, A\ \exists\, B\,(A \neq B)$

Ax.$\mathbf{8_2}$: $\exists\, A\ \exists\, B\ \exists\, C\,\big(\neg A^B C \wedge \neg B^C A \wedge \neg C^A B\big)$

Ax.$\mathbf{8_3}$: $\exists\, A\ \exists\, B\ \exists\, C\ \exists\, P\ \exists\, Q\big[AP \equiv AQ \wedge BP \equiv BQ \wedge CP \equiv CQ \wedge \big(\neg A^B C \wedge \neg B^C A \wedge \neg C^A B\big)\big]$

Ax.$\mathbf{8_n}$: $\exists\, A\ \exists\, B\ \exists\, C\ \exists\, P_1 \ldots \exists\, P_{n-1}\big[\bigwedge_{1\leq i<j<n} P_i \neq P_j \wedge \bigwedge_{i=2}^{n-1} AP_1 \equiv AP_i \wedge \bigwedge_{i=2}^{n-1} BP_1 \equiv BP_i \wedge \bigwedge_{i=2}^{n-1} CP_1 \equiv CP_i \wedge \big(\neg A^B C \wedge \neg B^C A \wedge \neg C^A B\big)\big]$

L'Ax. 8_n quindi ci dice essenzialmente che lo spazio ha dimensione almeno n. Per dare la formulazione dell'Ax. 9_n, è necessario solamente negare l'Ax. 8_{n+1}, in quanto la condizione che lo spazio sia al più n-dimensionale, è la negazione logica della condizione di essere almeno $n+1$-dimensionale ($\neg\ (d \leq n) = d > n = d \geq n+1$).

Ax.$\mathbf{9_0}$: $A = B$

Ax.$\mathbf{9_1}$: $A^B C \vee B^C A \vee C^A B$

Ax.9$_2$: $\exists\, A\, \exists\, B\, \exists\, C\, \exists\, P\, \exists\, Q\, (P \neq Q \wedge AP \equiv AQ \wedge BP \equiv BQ \wedge CP \equiv CQ) \rightarrow \big(A^B C \vee B^C A \vee C^A B\big)$

Ax.9$_n$: $\exists\, A\, \exists\, B\, \exists\, C\, \exists\, P_1 \ldots \exists\, P_n \big[\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} P_i \neq P_j \wedge \bigwedge_{i=2}^{n} AP_1 \equiv AP_i \wedge \bigwedge_{i=2}^{n} BP_1 \equiv BP_i \wedge \bigwedge_{i=2}^{n} CP_1 \equiv CP_i \wedge \big(A^B C \wedge B^C A \wedge C^A B\big)\big]$

Da questa loro interconnessione, si capisce il motivo per cui Tarski, scelse di modificare la forma dell'Ax. 9, per dare così una visione chiara e immediata di quale sia appunto il ruolo degli assiomi 8 e 9. Nel caso bidimensionale si vede infatti chiaramente come l'Ax. 9_2 sia la negazione logica dell'Ax. 8_3 e quindi per questo motivo, ritenuto più soddisfacente.

2.2.3 1965: lo studio di Gupta

Nella sua tesi di dottorato: [1], Haragauri Narayan Gupta, allievo di Tarski, ci fornisce l'ultima semplificazione degli assiomi. Egli essenzialmente dimostra che anche gli assiomi 6 e 18 sono dipendenti. La dimostrazione di questo fatto non è banale, come espresso in [1] (a cui si rimanda per i dettagli) per dimostrare la dipendenza dell'Ax. 6 sono necessari ben 17 teoremi, per dimostrare quella dell'Ax.18 ben 23. Quindi gli assiomi finali risultano essere 10 più uno schema di assiomi:

Ax. 1: $AB \equiv BA$

Ax. 2: $AB \equiv CD \wedge AB \equiv EF \rightarrow CD \equiv EF$

Ax. 3: $AB \equiv CC \rightarrow A = B$

Ax. 4: $\exists\, X\, \big(C^D X \wedge DX \equiv AB\big)$

Ax. 5: $\big(A \neq B \wedge A^B C \wedge A'^{B'} C' \wedge AB \equiv A'B' \wedge BC \equiv B'C' \wedge AD \equiv A'D' \wedge BD \equiv B'D'\big) \rightarrow CD \equiv C'D'$

Ax. 7: $A^D B \wedge C^B E \rightarrow \exists\, X \big(A^X C \wedge E^D X\big)$

Ax. 8: $\exists\, A\, \exists\, B\, \exists\, C\, \big(\neg A^B C \wedge \neg B^C A \wedge \neg C^A B\big)$

Ax. 9: $\exists\, A\, \exists\, B\, \exists\, C\, \exists\, P\, \exists\, Q\, (P \neq Q \wedge AP \equiv AQ \wedge BP \equiv BQ \wedge CP \equiv CQ) \rightarrow \big(A^B C \vee B^C A \vee C^A B\big)$

Ax. 10: $A^E D \wedge B^E C \wedge A \neq E \rightarrow \exists\, X\, \exists\, Y \big(A^B X \wedge A^C Y \wedge Y^D X\big)$

Ax. 11: $\exists\, A\, \forall\, X\, \forall\, Y\, \big(\alpha \wedge \beta \rightarrow A^X Y\big) \rightarrow \exists\, B\, \forall\, X\, \forall\, Y\, \big(\alpha \wedge \beta \rightarrow X^B Y\big)$

Ax. 15: $A^B D \wedge B^C D \rightarrow A^B C$

Capitolo 3

Sull'esistenza del punto medio di un segmento

In questo terzo capitolo vorremmo porci come obbiettivo quello di dimostrare l'esistenza del punto medio di un segmento.
Come detto infatti in [1], durante una lezione Tarski propose ai suoi allievi, tra cui Gupta, il seguente problema: dimostrare, se possibile, con gli assiomi della teoria, che il punto medio di un segmento esiste.
Se infatti gli assiomi esposti nel precedente capitolo rappresentano la geometria euclidea piana, allora devono riuscire a dimostrare problemi che sembrano banali, ma che sono alla base della geometria.
Ciò che si vuole provare quindi, nel linguaggio della teoria di Tarski, è il seguente enunciato: $\forall\, X \;\forall\, Y \;\exists\, Z \big(X^Y Z \wedge XY \equiv YZ \big)$.
Prima di procedere con i passi della dimostrazione, vorremmo fare un'osservazione: come si vedrà nelle pagine seguenti, anche un problema apparentemente semplice, come quello di dimostrare l'esistenza del punto medio, può risultare complesso, se lo si vuole fare in modo formale all'interno di una teoria.
Nel seguito assumeremo come assiomi anche quelli dipendenti, per non appesantire le notazioni.
Rispetto alle notazioni assunte in [1] si vedranno qui delle modifiche; nelle definizioni 3.1, 3.2 e 3.3, infatti, sono state introdotte delle notazioni nuove per essere coerenti con le notazioni del capitolo 1.

Teorema 3.1. $XY \equiv XY$

Dimostrazione. Per l'Ax. 1 si ha che: $YX \equiv XY$, per l'Ax. 2 vale poi: $YX \equiv XY \wedge YX \equiv XY \rightarrow XY \equiv XY$ (1). Da (1) e usando le normali regole logiche di inferenza (*modus ponens*) si ha la tesi: $XY \equiv XY$. □

Come vediamo da questo teorema, che un segmento sia uguale a sé stesso non è un assioma, ma è una proprietà facilmente dimostrabile.

Teorema 3.2. $XY \equiv ZU \rightarrow ZU \equiv XY$

Dimostrazione. Sia $XY \equiv ZU$ l'ipotesi. Dal teorema 3.1 abbiamo che $XY \equiv XY$. Per l'Ax. 2 abbiamo quindi che:

$$XY \equiv ZU \land XY \equiv XY \to ZU \equiv XY$$

Quindi abbiamo dimostrato che $XY \equiv ZU \to ZU \equiv XY$. □

Teorema 3.3. $XY \equiv ZU \to YX \equiv ZU$

Dimostrazione. Sia $XY \equiv ZU$ l'ipotesi. Per l'Ax. 1 abbiamo che: $XY \equiv YX$, applicando nuovamente l'Ax. 2 come sopra abbiamo la tesi: $XY \equiv ZU \to YX \equiv ZU$. □

Teorema 3.4. $XY \equiv ZU \leftrightarrow YX \equiv UZ \leftrightarrow XY \equiv UZ \leftrightarrow ZU \equiv YX$

Dimostrazione. Segue facilmente per i precedenti teoremi. □

Questi primi quattro teoremi ci assicurano quindi, che cambiando l'ordine dei punti, all'interno della relazione di congruenza, il contenuto non cambia.

Teorema 3.5. $XY \equiv ZU \to \big(X = Y \leftrightarrow Z = U\big)$

Dimostrazione. Sia $XY \equiv ZU$ l'ipotesi. Da essa e dal teorema 3.2 abbiamo che: $ZU \equiv XY$ (1).

$\to$: Sia $X = Y$, da (1) possiamo dire che $ZU \equiv XX$, per l'Ax. 3 quindi $Z = U$.

$\leftarrow$: Si ora $Z = U$, sempre da (1) abbiamo che $XY \equiv ZZ$, e nuovamente per l'Ax. 3: $X = Y$.

□

Teorema 3.6. $X^Y Y \land YY \equiv XX$

Dimostrazione. Per l'Ax. 4 esiste un punto Z tale che: $X^Y Z \land YZ \equiv XX$ (1). Quindi per l'Ax. 3 e per la seconda ipotesi in (1) si ha che: $Y = Z$ (2). Da (1) insieme a (2) otteniamo che $X^Y Y \land YY \equiv XX$. □

Teorema 3.7 (Proprietà additiva dei segmenti)**.** $XY \equiv X'Y' \land YZ \equiv Y'Z' \land X^Y Z \land X'^{Y'} Z' \to XZ \equiv X'Z'$

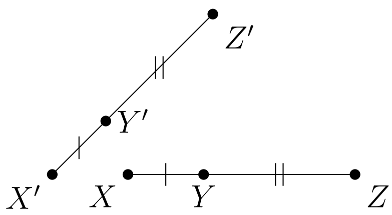

Figura 3.1: Teorema 3.7

Dimostrazione. Siano le seguenti ipotesi: $XY \equiv X'Y'$ (1) e $YZ \equiv Y'Z'$ (2).

- Se $X = Y$ allora da (1) abbiamo che, per il teorema 3.5: $X' = Y'$, da questo e da (2) si ha che $XZ \equiv X'Z'$.
- Se $X \neq Y$ dal teorema 3.6 abbiamo che $XX \equiv X'X'$ e quindi dal teorema 3.4 e da (1) abbiamo che: $YX \equiv Y'X'$. Da (1), (2) e dal fatto che $XX \equiv X'X'$ e $YX \equiv Y'X'$ possiamo quindi concludere, per l'Ax. 5 che: $ZX \equiv Z'X'$ (3). Da (3) e dal teorema 3.4 concludiamo con: $XZ \equiv X'Z'$.

□

Teorema 3.8. $X^Y Z \wedge X^Y U \wedge YZ \equiv YU \wedge X \neq Y \rightarrow Z = U$
Se il punto Y sta in XZ e in XU e i segmenti YZ e YU sono uguali, supposto che X non coincida con Y, allora Z coincide con U.

Dimostrazione. Assunte le ipotesi: $X^Y Z$, $X^Y U$, $YZ \equiv YU$ e che dal teorema 3.1 segua che: $XY \equiv XY$ e $YZ \equiv YZ$ otteniamo: $XZ \equiv XU$ e $XY \equiv X'Y' \wedge YZ \equiv Y'Z' \wedge XU \equiv X'U' \wedge YU \equiv Y'U' \wedge X \neq Y \rightarrow ZU \equiv Z'U'$.

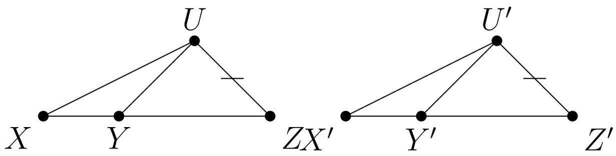

Figura 3.2: Ipotesi $XY \equiv X'Y' \wedge YZ \equiv Y'Z' \wedge XU \equiv X'U' \wedge YU \equiv Y'U' \wedge X \neq Y \rightarrow ZU \equiv Z'U'$

Combinando i dati otteniamo: $ZZ \equiv ZU$ (1). Quindi da (1) e per il teorema 3.5 segue la tesi: $Z = U$. □

Teorema 3.9. $X \neq Y \rightarrow \forall\, Z\big(X^Y Z \wedge Y \neq Z\big)$
Esiste sempre un punto (qui Y) compreso tra altri due punti (qui X e Z).

Dimostrazione. Per ipotesi $X \neq Y$ (1). Per l'Ax. 4 esiste Z tale che: $X^Y Z$ (2) e $YZ \equiv XY$ (3). Da (1) e (3) per il teorema 3.5, si ha che: $Y \neq Z$ (4). Da (2) e (4) si ha la tesi. □

Teorema 3.10 (Teorema del quinto segmento)**.** $XY \equiv X'Y' \wedge XZ \equiv X'Z' \wedge XU \equiv X'U' \wedge ZU \equiv Z'U' \wedge X^Y Z \wedge X'^{Y'} Z' \rightarrow YU \equiv Y'U'$

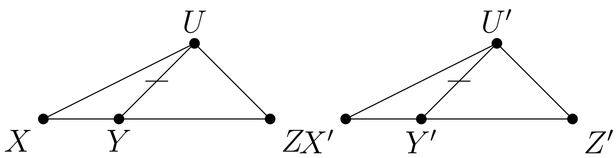

Figura 3.3: Teorema 3.10

Dimostrazione. Siano le ipotesi: $XY \equiv X'Y'$ (1), $XZ \equiv X'Z'$ (2), $XU \equiv X'U'$ (3), $ZU \equiv Z'U'$ (4), $X^Y Z$ (5) e $X'^{Y'} Z'$ (6).

- Se $X = Z$ (7) allora da (2) e per il teorema 3.5 si ha che: $X' = Z'$ (8). Da (5), (6), (7) e (8) otteniamo che, per l'Ax. 6: $X = Y = Z$ (9) e $X' = Y' = Z'$ (10). La tesi $YU \equiv Y'U'$ segue da (3), (9) e (10).

- Se $X \neq Z$ (11), per il teorema 3.9, esiste T tale che: $Z^X T$ (12) e $X \neq T$ (13). Per l'Ax. 4 poi esiste T' tale che $Z'^{X'}T'$ (12') e $X'T' \equiv XT$ (13'). Da (12) e (5) quindi: $T^X Y$ (14). Similmente per (12'): $T'^{X'}Y'$ (14'). Da (2), (3), (4), (11) e (14) utilizzando il teorema 3.4 e l'Ax. 5 otteniamo $TU \equiv T'U'$ (15). Infine da (1), (3), (14) e (15) usando il teorema 3.4 nuovamente e l'Ax. 5 si ha la tesi: $YU \equiv Y'U'$.

□

Teorema 3.11. $XY \equiv X'Y' \wedge YZ \equiv Y'Z' \wedge XU \equiv X'U' \wedge ZU \equiv Z'U' \wedge X^Y Z \wedge X'^{Y'}Z' \to YU \equiv Y'U'$

Dimostrazione. Il teorema è del tutto simile al precedente, cambia solo qualche ipotesi. La dimostrazione segue facilmente dal teorema 3.4 e dal teorema 3.7. □

Teorema 3.12 (Proprietà sottrattiva dei segmenti)**.** $X^Y Z \wedge X'^{Y'}Z' \wedge XZ \equiv X'Z' \wedge XY \equiv X'Y' \to YZ \equiv Y'Z'$

Dimostrazione. Segue facilmente dal teorema 3.11. □

Teorema 3.13. $X^Y Z \wedge XY \equiv XZ \to Y = Z$

Dimostrazione. Siano le ipotesi $X^Y Z$ (1) e $XY \equiv XZ$ (2). Allora dal teorema 3.6 e dal teorema 3.1 abbiamo: $X^Y Y$ (3) e $XY = XY$ (4). Per l'Ax. 4 poi: $YZ = ZY$ (5). Utilizzando il teorema 3.10 con le ipotesi (1), (2), (3), (4) e (5) si ottiene che: $YZ \equiv YY$, da ciò la tesi segue dall'Ax. 3. □

Teorema 3.14. $X^Y Z \wedge XU \equiv XY \wedge ZU \equiv ZY \to U = Y$
Se Y è in XZ, il segmento XU è uguale al segmento XY, e il segmento ZU è uguale al segmento ZY, allora il punto U coincide con il punto Y.

Dimostrazione. Siano: $X^Y Z$ (1), $XU \equiv XY$ (2) e $ZU \equiv ZY$ (3). Dal teorema 3.1 abbiamo poi che $XY \equiv XY$ (4) e $XZ \equiv XZ$ (5). Con il teorema 3.10, usando le ipotesi da (1) a (5) troviamo che: $YU \equiv YY$, e quindi per l'Ax. 3 $Y = U$. □

Teorema 3.15. $X^Y Z \wedge XZ \equiv XZ' \wedge YZ \equiv YZ' \wedge X \neq Y \to Z = Z'$

Dimostrazione. Teorema molto simile al precedente. La dimostrazione procede nel seguente modo. Siano: $X^Y Z$ (1), $XZ \equiv XZ'$ (2), $YZ \equiv YZ'$ (3) e $X \neq Y$ (4). Allora per il teorema 3.1 abbiamo sempre che: $XY \equiv XY$ (5) e $YZ \equiv YZ$ (6). Da queste sei ipotesi quindi, per l'Ax. 5 abbiamo: $ZZ \equiv ZZ'$ da cui, per il teorema 3.5 si ha che $Z = Z'$. □

Teorema 3.16 (Teorema del punto interno)**.** $XZ \equiv X'Z' \wedge X^Y Z \to \exists\, Y'\big(X'^{Y'}Z' \wedge YZ \equiv Y'Z'\big)$
Dati due segmenti XZ e $X'Z'$ uguali, e un punto Y in XZ, allora esiste un punto Y' che sta in $X'Z'$ e tale che YZ è uguale a $Y'Z'$.

Dimostrazione. Sia $XZ \equiv X'Z'$ (1) e $X^Y Z$ (2).

- Se $X' = Z'$ da (1) e per l'Ax. 3 si ha: $X = Z$ (3). Da (2) e (3) e per l'Ax. 6 segue: $X = Y = Z$. Possiamo prendere quindi $Y' = X'$ e per il teorema 3.6 otteniamo: $X'^{Y'} Z'$ e $XY \equiv X'Y'$.

- Se $X' \neq Z'$ per il teorema 3.9 esiste un punto T' tale che $Z'^{X'} T'$ (4) e $T' \neq X'$ (5). Per l'Ax. 4 poi esiste un punto Y' tale che $T'^{X'} Y'$ (6) e $X'Y' \equiv XY$ (7). Otteniamo anche un punto $\bar{Z}$ tale che: $T'^{Y'} \bar{Z}$ (8) e $Y'\bar{Z} \equiv YZ$ (9). Da (6) e (8) per l'Ax. 14, 15 e 16: $X'^{Y'} \bar{Z}$ (10) e $T'^{X'} \bar{Z}$ (11). Da (2),(7),(9) e (10) usando il teorema 3.7: $X'\bar{Z} \equiv XZ$ (12). Confrontando (1) e (12), per il teorema 3.1 e l'Ax. 2 si ha: $X'Z' \equiv X'\bar{Z}$ (13). Da (4) per l'Ax. 14 abbiamo $T'^{X'} Z'$ (14). Da (5), (11) e (14) per il teorema 3.8 abbiamo: $Z' = \bar{Z}$ (15). Da (7), (10) e (15) poi $X'^{Y'} Z'$ e un'opzione tra $X'Y' \equiv XY$ e $XY \equiv X'Y'$, da cui la tesi.

□

Teorema 3.17. $X^Y Z \wedge XZ \equiv X'Z' \wedge XY \equiv X'Y' \wedge YZ \equiv Y'Z' \rightarrow X'^{Y'} Z'$
Dati 3 punti allineati X, Y e Z tali che: XZ è uguale a $X'Z'$, XY è uguale a $X'Y'$ e YZ è uguale a $Y'Z'$, allora anche i punti X', Y' e Z' sono allineati.

Dimostrazione. Siano le ipotesi: $X^Y Z$ (1), $XZ \equiv X'Z'$ (2), $XY \equiv X'Y'$ (3) e $YZ = Y'Z'$ (4). Per (2) esiste un punto $\bar{Y}$ tale che per il teorema 3.16 si ha: $X'^{\bar{Y}} Z'$ (5) e $XY \equiv X'\bar{Y}$ (6). Da (1), (2) e (5) per il teorema 3.12: $\bar{Y}Z' \equiv YZ$ (7). Da (3) e (6): $X'Y' \equiv X'\bar{Y}$ (8). Da (4) e (7): $Y'Z' \equiv \bar{Y}Z'$ (9). Quindi da (5), (8) e (9) per il teorema 3.14 possiamo concludere: $\bar{Y} = Y'$ e quindi da (5): $X'^{Y'} Z'$. □

Teorema 3.18 (Teorema per la simmetria dei punti)**.** $XU \equiv UX' \wedge YU \equiv YU' \wedge X^U X' \wedge Y^U Y' \rightarrow XY \equiv X'Y'$

Dimostrazione. Assumendo le ipotesi abbiamo due casi:

- Se $X = U$ allora $X = U = X'$. La conclusione è parte delle ipotesi. Il caso in cui $Y = U$ è analogo.

- Se $X \neq U \neq Y$ allora usiamo l'Ax. 4, esistono quindi 4 punti V, V', Z e Z' tali che: $Y'^Y V$ (1), $YV \equiv XU$ (2), $Y^{Y'} V'$ (3), $Y'V' \equiv XU$ (4), $X^{X'} Z'$ (5), $X'Z' \equiv YU$ (6), $X'^X Z$ (7) e $XZ \equiv YU$ (8).

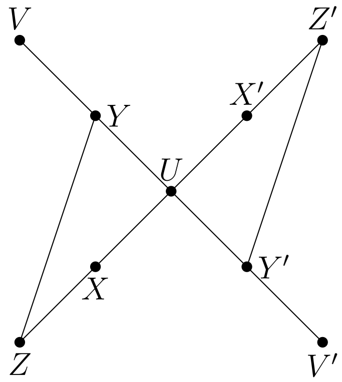

Figura 3.4: Ipotesi da (1) a (8)

Da (1), (3), (5) e (7) usando le ipotesi e gli assiomi 15 e 16 si ha: $U^{X'}Z'$, U^XZ, Z^UZ', U^YV, $U^{Y'}V$ e V^UV'. Per il teorema 3.7 invece abbiamo: $ZU \equiv Z'U$, $VU \equiv UV'$ e $ZU \equiv UV'$. Osservando che $Z \neq U$ per l'Ax. 5 abbiamo che: $Z'V' \equiv VZ$. Per il teorema 3.10 quindi $YZ \equiv Y'Z'$ e riapplicando lo stesso teorema la tesi: $XY \equiv X'Y'$.

□

Definizione 3.1. *Nel seguito scriviamo $X^{YY}Z$ per indicare: $X^YZ \wedge XY \equiv YZ$.*

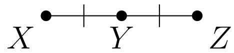

Figura 3.5: Definizione 1

Teorema 3.19. $X^{YY}Z \wedge X^{UU}Z \to Y = U$
Dati 4 segmenti tale che il segmento XY è uguale al segmento YZ, e il segmento XU è uguale a UZ, allora i punti Y e U coincidono.

Dimostrazione. Siano le ipotesi: $X^{YY}Z$ (1) e $X^{UU}Z$ (2). Abbiamo poi: X^UZ (3) e $XU \equiv UZ$ (4). Quindi possiamo prendere un punto V tale che U^YV (5) e $YV \equiv YU$ (6). Per il teorema 3.18: $XU \equiv ZV$ (7) e $UZ \equiv XV$ (8). Per (4) e (8) quindi: $XU \equiv XV$ (9) e similmente $ZU \equiv ZV$ (10). Quindi da (3), (9) e (10) per il teorema 3.14: $U = V$. Poi per (5) possiamo concludere con l'Ax. 6: $Y = U$. □

Teorema 3.20 (Invarianza dello *stare fra* per la simmetria dei punti)**.** $X^{UU}X' \wedge Y^{UU}Y' \wedge Z^{UU}Z' \to \left(X^YZ \leftrightarrow X'^{Y'}Z'\right)$

Dimostrazione. Dimostriamo un'implicazione, l'altra segue per simmetria. Assunte le ipotesi, dal teorema 3.18 si ha che $X'Y' \equiv X'Y'$, $YZ \equiv Y'Z'$, $XZ \equiv X'Z'$. Per il teorema 3.17 quindi: $X^YZ \to X'^{Y'}Z'$. □

Definizione 3.2. *Nel seguito scriviamo $\bigvee XYZ$ per indicare: $X^YZ \vee Y^ZX \vee Z^XY$.*

Teorema 3.21. $\bigvee XYZ \leftrightarrow \bigvee YZX \leftrightarrow \bigvee ZXY \leftrightarrow \bigvee XZY \leftrightarrow \bigvee ZYX \leftrightarrow \bigvee YXZ$

Teorema 3.22. $XZ \equiv YZ \wedge XU \equiv YU \wedge Z \neq U \wedge \bigvee ZUV \rightarrow XV \equiv YV$
Dato XZ uguale a YZ e XU uguale a YU, se Z non coincide con U e i punti Z, U e V sono allineati, allora XV è uguale a YV.

Dimostrazione. Assumendo: $XZ \equiv YZ$ (1), $XU \equiv YU$ (2), $Z \neq U$ (3) e $\bigvee ZUV$, da quest'ultima si ha che, per definizione: $Z^UV \vee U^VZ \vee V^ZU$ (4).

- Se Z^UV allora per l'Ax. 5 si ha che: $VX \equiv VY$ quindi equivalentemente $XV \equiv YV$.
- Se U^VZ allora per il teorema 3.10 si ha che $VX \equiv VY$ e quindi ugualmente $XV \equiv YV$.
- Se V^ZU allora sicuramente si ha U^ZV. Quindi di nuovo per l'Ax. 5 si ha la tesi.

□

Teorema 3.23. $\bigvee XYU \wedge XY \equiv XU \rightarrow Y = U \vee Y^{XX}U$
Se dati tre punti X, Y e U allineati, tali che XY è uguale a XU e Y coincide con U, allora X è compreso tra Y e U, e il segmento YX è uguale al segmento XU.

Dimostrazione. Assumendo $\bigvee XYU$ (1) e $XY \equiv XU$ (2), si hanno 3 casi, dettati dall'ipotesi (1).

- Se X^YU allora per il teorema 3.13 si ha: $Y = U$.
- Se Y^UX allora abbiamo anche X^UY e di nuovo per il teorema 3.13 si ha $Y = U$.
- Se U^XY allora abbiamo anche Y^XU. Per (2) quindi si ha anche $YX \equiv XU$ e quindi $Y^{XX}U$.

□

Teorema 3.24. $\bigvee XYZ \wedge \bigvee XYU \wedge X \neq Y \rightarrow \bigvee YZU$
Dati 3 punti: X, Y e Z allineati, e un altro punto U allineato con X e Y, se X non coincide con Y allora anche i punti Y, Z e U sono allineati.

Dimostrazione. Assunte le ipotesi, si ha che: $X \neq Y$ (1), $X^YZ \vee Y^ZX \vee Z^XY$ (2) e $X^YU \vee Y^UX \vee U^XY$ (3). Da (2) e (3) abbiamo quindi nove possibili combinazioni. In ognuno di questi casi, seguirà dagli assiomi 15, 16, 17 e 18 che: Y^ZU oppure Z^UY o ancora U^YZ che è proprio la definizione di $\bigvee YZU$. □

Teorema 3.25. $\bigvee XYZ \wedge \bigvee XYU \wedge \bigvee XYV \wedge X \neq Y \rightarrow \bigvee ZUV$
Versione del teorema precedente per 5 punti.

Dimostrazione. Dalle ipotesi seguono 2 casi:

- Se due tra i punti Z, U e V coincidono si ha che la tesi segue dal teorema 3.6 e dal teorema 3.21.

- Se $Z \neq U \neq V$ allora si avrà anche che $Y \neq Z$ oppure $Y \neq U$ oppure $Y \neq V$. Senza perdere di generalità supponiamo che $Y \neq Z$ (1). Allora dalle ipotesi e dal teorema 3.24 si ha che: $\bigvee YZU$ (2) e $\bigvee YZV$ (3). Da (1), (2) e (3) usando il teorema 3.24 concludiamo che $\bigvee ZUV$. I casi in cui $Y \neq U$ o $Y \neq V$ seguono in modo simile.

$\square$

Teorema 3.26. $X \neq Y \wedge \bigvee XYZ \wedge \bigvee XYU \rightarrow \bigvee ZUX \wedge \bigvee ZUY$
Dati 2 punti X e Y distinti, tali che X, Y e Z sono allineati, così come X, Y e U; allora anche Z, U e X e Z, U e Y sono allineati.

Dimostrazione. Sia: $\bigvee XYZ$ (1), $\bigvee XYU$ (2) e $X \neq Y$ (3). Dal teorema 3.6 e dal teorema 3.21 abbiamo che: $\bigvee XYX$ (4). Dalle ipotesi (1), (2), (3) e (4) otteniamo che $\bigvee ZUX$ e analogamente $\bigvee ZUY$. $\square$

Teorema 3.27. $X \neq Y \wedge Z \neq U \wedge \bigvee XYZ \wedge \bigvee XYU \rightarrow \forall\, T\big(\bigvee XYT \leftrightarrow \bigvee ZUT\big)$
Dati due punti distinti X e Y e altri due punti distinti Z e U, se X, Y e Z sono allineati, così come X, Y e U, allora per ogni punto T, X, Y e T sono allineati se e solo se lo sono Z, U e T.

Dimostrazione. $\rightarrow$: Assumendo che $\bigvee XTY$, dalle ipotesi e dal teorema 3.25 possiamo concludere che $\bigvee ZUT$.

$\leftarrow$: Assumendo che $\bigvee ZUT$ (1), dal teorema 3.26 si ha che $\bigvee ZUX$ (2) e $\bigvee ZUY$ (3). Quindi da (1), (2) e (3) possiamo concludere per il teorema 3.25 che: $\bigvee XYT$.

$\square$

Teorema 3.28. $X \neq Y \rightarrow \exists\, Z\big(\neg \bigvee XYZ\big)$

Dimostrazione. Per l'Ax. 8 esistono 3 punti: U, V e W tali che: $\neg \bigvee UVW$ (1). Ora se per assurdo assumessimo che $\bigvee XYU$, $\bigvee XYV$, $\bigvee XYW$ e $X \neq Y$ avremmo che, per il teorema 3.25, $\bigvee UVW$ e questo, contraddirebbe ovviamente (1). Quindi per almeno uno di questi tre punti, diciamo per U, deve valere che $\neg \bigvee XYU$. $\square$

Teorema 3.29 (Esistenza di un punto interno a un triangolo)**.** $X^TY \wedge X^VZ \wedge Y^UZ \rightarrow \exists\, W\big(X^WU \wedge T^WV\big)$

Dimostrazione. Per l'Ax. 7 esiste un punto R tale che: Z^RT e X^RU (1).

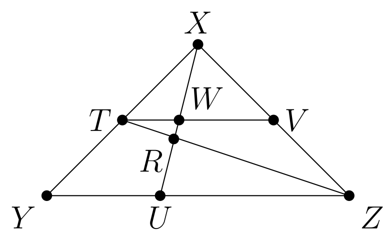

Figura 3.6: Esistenza di R

Di nuovo per l'Ax. 7 esiste un punto W tale che: $T^{W}V$ (2) e $X^{W}R$ (3).

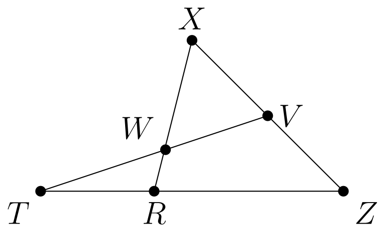

Figura 3.7: Esistenza di W

Da (1) e (3) per gli assiomi 15 e 16 si ottene che $X^{W}U$ (4). Da (2) e (4) si ha quindi la tesi. □

Teorema 3.30. $X^{UU}X' \wedge Y^{UU}Y' \wedge X^{TT}Y \rightarrow \exists\, T'\big(X'^{T'T'}Y' \wedge T^{UU}T'\big)$

Dimostrazione. Per l'Ax. 4 si ha che: $T^{UU}T'$ (1). Da (1) quindi, per il teorema 3.26 si trova: $X'^{T'}Y'$. Per il teorema 3.18 poi: $XT \equiv X'T'$ (2) e $TY \equiv T'Y'$. Per l'ipotesi che $XT \equiv TY$ allora, con (2) abbiamo che: $X'T' \equiv T'Y'$ per l'Ax. 2. Inoltre poi $X'^{T'T'}Y'$ (3). Da (1) e (3) abbiamo la tesi.

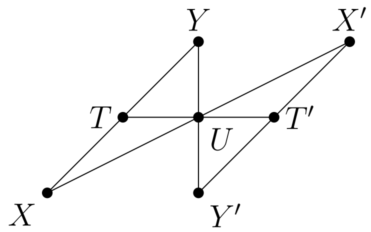

Figura 3.8: Teorema 3.30

□

Teorema 3.31. $U^{YY}Z \wedge X'^{Y'Y'}Z' \wedge XZ \equiv X'Z' \rightarrow XY \equiv X'Y'$
Dati tre segmenti tali che: UY è uguale a YZ, $X'Y'$ è uguale a $Y'Z'$ e XZ è uguale a $X'Z'$, allora XY è uguale a $X'Y'$

Dimostrazione. Dal fatto che $XZ \equiv X'Z'$ per il teorema 3.15 si ha che esiste un punto $\bar{Y}$ tale che: $X'^{\bar{Y}}Z'$ e $X'\bar{Y} \equiv XY$ (1). Per il teorema 3.12 quindi $\bar{Y}Z' \equiv YZ$ (2). Da (1), (2) e $X^{YY}Z$ si ha che $X'^{\bar{Y}\bar{Y}}Z'$. Quindi per il teorema 3.19: $\bar{Y} = Y'$ (3). Quindi da (1) e (3) si ha che $X'Y' \equiv XY$ e anche $XY \equiv X'Y'$. □

Teorema 3.32. $X^{TT}Y \wedge X^{VV}Z \wedge Y^{UU}Z \wedge T^{WW}V \wedge XY \equiv XZ \rightarrow X^{W}U$
Dati dei segmenti tali che: XT è uguale a TY, XV è uguale a VZ, YU è uguale a UZ, TW è uguale a WV e XY è uguale a XZ, allora W è compresa tra X e U.

Dimostrazione. Assunte le ipotesi, dal teorema 3.29 si ha che esiste un punto W' tale che $X^{W'}U$ (1) e $T^{W'}V$ (2).

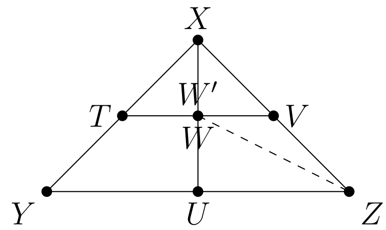

Figura 3.9: Esistenza di W'

Dal teorema 3.10 poi sappiamo che $W'Y \equiv W'Z$. Dalle ipotesi abbiamo $XY \equiv XZ$, $X^{TT}Y$ e $X^{VV}Z$, e per il teorema 3.31 invece abbiamo che $XT \equiv XV$. Dal teorema 3.10 poi $TW' \equiv VW'$ oppure $TW' \equiv W'V$ (3). Da (2) e (3) si ha quindi per definizione che: $T^{W'W'}V$ (4). Dalle ipotesi abbiamo poi che $T^{WW}V$ che insieme con (4), per il teorema 3.19, fanno si che: $W = W'$ (5). Da (1) e (5) otteniamo che: $X^{W}U$. $\square$

Teorema 3.33. $XY \equiv XZ \to \exists \left(Y^{WW}Z\right)$
Dati 2 segmenti uguali: XY e XZ, allora esiste un punto Y, che rende uguali i segmenti YW e WZ.

Dimostrazione. Assumiamo che $XY \equiv XZ$. Abbiamo due casi:

- Se $\bigvee XYZ$ allora per il teorema 3.23 si ha che: $Y = Z \vee Y^{XX}Z$. Se quindi $Y = Z$ prendiamo $W = Y = Z$, se invece $Y^{XX}Z$ prendiamo $W = X$.

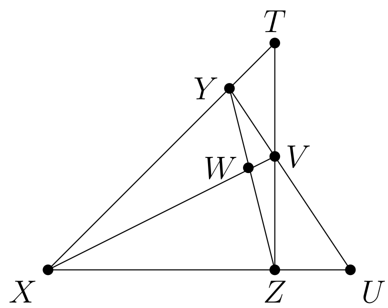

Figura 3.10: Caso 1

- Se $\neg \bigvee XYZ$ (1) allora abbiamo che $X \neq Y \neq Z$. Quindi per il teorema 3.9 esiste un punto T tale che $X^{Y}T$ e $Y \neq T$. Per l'Ax. 4 si ha che esiste anche un punto U tale che: $X^{Z}U$ e $ZU \equiv YT$. Quindi per l'Ax. 7 esiste un punto V tale che: $Y^{V}U$ (2) e $T^{V}Z$ (3).

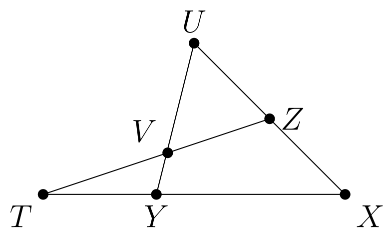

Figura 3.11: Esistenza di V

Ancora per l'Ax. 7 esiste anche un punto W tale che: $Y^W Z$ (4) e $X^W V$.

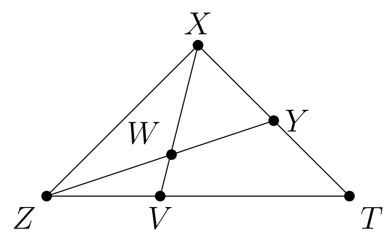

Figura 3.12: Esistenza di W

Per l'Ax. 5 quindi possiamo concludere che $TZ \equiv UY$ (5). Per il teorema 3.15 poi esiste un punto V' tale che: $T^{V'}Z$ (6) e $TV' \equiv UV$ (7). Per il teorema 3.10 poi: $V'Y \equiv VZ'$ (8) e $V'U \equiv VT$ (9). Quindi da (2), (5), (8) e (9) si ha che, per il teorema 3.17: $Y^{V'}U$ (10).
Se $V \neq V'$, allora da (2), (3), (6) e (10) abbiamo che $\bigvee VV'\bar{Y}$, $\bigvee VV'U$, $\bigvee VV'Z$ o $\bigvee YUZ$ (per i teoremi 3.24 e 3.25). Ma da $\bigvee YZU$ e $\bigvee XZU$, con $Z \neq U$, avremmo che $\bigvee XYZ$, per il teorema 3.24. Ma questo contraddirebbe la (1).
Quindi $V = V'$ e per (8) si ha che: $VY \equiv VZ$. Di nuovo per il teorema 3.10 si ha $WY \equiv WZ$ (11) e da (4) e (11) segue che: $Y^{WW}Z$.

□

Teorema 3.34. $X^U X' \wedge Y^U Y' \wedge XU \equiv UY \wedge X'U \equiv UY' \wedge X^{TT}Y \wedge X^{T'T'}Y' \to T^U T'$
Dati dei punti allineati X, U e X', e Y, U e Y' tali che XU è uguale a UY, $X'U$ è uguale a UY', XT è uguale a TY e XT' è uguale a $T'Y'$ allora T, U e T' sono allineati.

Dimostrazione. Assunte le ipotesi, otteniamo quattro punti: $\bar{X}$, $\bar{Y}$, X'' e Y'' tali che: $X'^X\bar{X}$ (1), $X\bar{X} \equiv X'U$, $Y'^Y\bar{Y}$ (2), $Y\bar{Y} \equiv Y'U$, $X^{X'}X''$ (3), $X'X'' \equiv XU$, $Y^{Y'}Y''$ (4) e $Y'Y'' \equiv YU$.

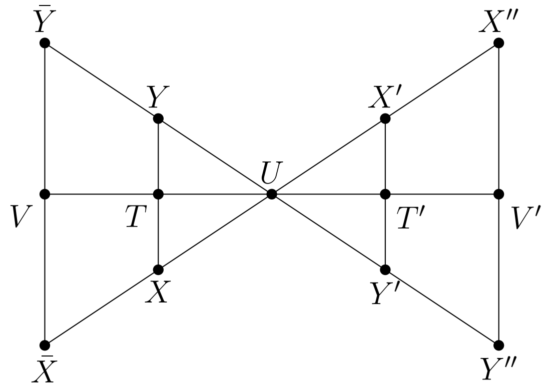

Figura 3.13: Esistenza di $\bar{X}$, $\bar{Y}$, X'' e Y''

Dalle ipotesi (1), (2), (3) e (4) otteniamo che, per gli assiomi 15 e 16: $U^{X'}X$, $U^{Y'}Y''$, $X^U X''$, $Y^U Y''$, $U^X \bar{X}$, $U^Y \bar{Y}$, $X'^U \bar{X}$ e $Y'^U \bar{Y}$. Per il teorema 3.7 quindi: $UX'' \equiv UY''$ (5), $U\bar{X} \equiv U\bar{Y}$ (6), $\bar{X}U \equiv UX''$ e $\bar{Y}U \equiv UY''$.

- Se $X = U$ allora anche $Y = U$. Quindi abbiamo che $X = U = Y$. La tesi $T^U T'$ segue dal teorema 3.6 e per l'Ax. 14.

- $X \neq U$, allora anche $Y \neq U$. Per l'Ax. 16 quindi: $\bar{X}^U X''$ e $\bar{Y}^U Y''$. Per (5) e (6) quindi esistono due punti V e V' tali che: $\bar{X}^{VV}\bar{Y}$ e $X''^{V'V'}Y''$. Per il teorema 3.30 quindi $V^U V'$ (7). Per il teorema 3.32 poi concludiamo che $V^T U$ (8) e $V'^{T'}U$ (9), quindi da (7), (8) e (9) per l'Ax. 15 si ha la tesi: $T^U T'$.

□

Teorema 3.35. $\neg \bigvee XYZ \wedge XY \equiv ZU \wedge YZ \equiv XU \wedge X^T Z \wedge \bigvee YTU \wedge Y \neq U \rightarrow \big(Y^{TT}Z \wedge X^{TT}Z\big)$
Dati tre punti non allineati X, Y e Z tali che XY è uguale a ZU, YZ è uguale a XU e i punti X, T e Z sono allineati così come Y, T e U. Se Y non coincide con U, allora: YT è uguale a TZ, così come XT e TZ.

Dimostrazione. Assunte le ipotesi, notiamo in particolare che $X \neq Z$. Dall'Ax. 1 quindi $XZ \equiv ZX$. Dal fatto che $X^T Z$, per il teorema 3.15 esiste un punto T' tale che $Z^{T'}Z$ (1) e $ZT' \equiv XT$ (2).

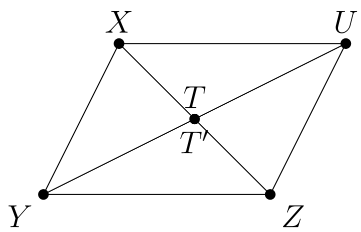

Figura 3.14: Esistenza di T'

Per il teorema 3.10 abbiamo $TU \equiv T'Y$ (3) e $TY \equiv T'U$.

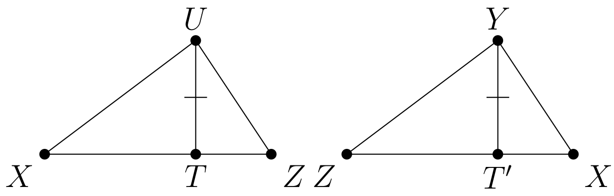

Figura 3.15: $TU \equiv T'Y$

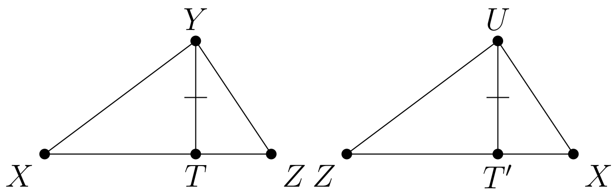

Figura 3.16: $TY \equiv T'U$

Siccome dalle ipotesi $\bigvee YTU$ allora $YT' \equiv UT$, $UT' \equiv YT$ e $YU \equiv UY$. Dal teorema 3.17 quindi: $\bigvee UT'Y$.
Se $T \neq T'$ allora dal fatto che: $X \neq Z$, $Y \neq U$, $\bigvee YTU$, $\bigvee YT'U$, $\bigvee XTZ$ e $\bigvee XT'Z$. Per i teoremi 3.26 e 3.27 segue che $\bigvee XYZ$, contrariamente alle ipotesi.
Quindi deve per forza essere $T = T'$ (4) e da questo insieme a (1) e (2) si ha che: $X^{TT}Z$. Da (3) e (4) poi si ha che $TU \equiv TY$, quindi per ipotesi abbiamo $\bigvee YTU$ e $Y \neq U$, allora dal teorema 3.23: $Y^{TT}U$. $\square$

Definizione 3.3. *Nel seguito scriviamo* ΔXYZ *per indicare:* $\exists\, U\big(Z^{YY}U \wedge XZ \equiv XU\big)$

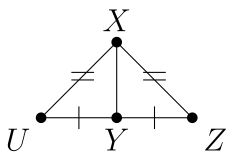

Figura 3.17: ΔXYZ

Teorema 3.36. $\Delta XYY \wedge \Delta XXY$

Teorema 3.37. $\Delta XYZ \wedge \bigvee XYZ \leftrightarrow X = Y \vee Y = Z$
X, Y e Z soddisfano la definizione 3.3 e sono allineati se e solo se coincidono.

Dimostrazione. $\rightarrow$: Assumiamo che ΔXYZ e $\bigvee XYZ$. Supponendo che $X \neq Y$ allora esiste un punto U tale che: $X^{YY}U$ e $XZ \equiv XU$. Dal fatto che $XZ \equiv XU$, $YU \equiv YZ$, $\bigvee XYZ$ e $X \neq Y$, segue che, dal teorema 3.22: $ZZ \equiv ZU$ e quindi per il teorema 3.5 che $Z = U$. Quindi da ciò e dal fatto che $X^{YY}U$ si ha che: $Z = Y$.

$\leftarrow$: Segue semplicemente usando il teorema 3.36 e il fatto che valga: $\bigvee XXZ$ e $\bigvee XYY$. $\square$

Teorema 3.38. $\Delta XYZ \wedge \Delta XYU \wedge \Delta ZUV \wedge Z \neq U \rightarrow \Delta XYV$

Dimostrazione. Per simmetria si ha anche che: ΔZYX e ΔUYX. Sia X' un punto tale che: $X^{YY}X'$. Allora $ZX \equiv ZX'$ (1) e $UX \equiv UX'$ (2).

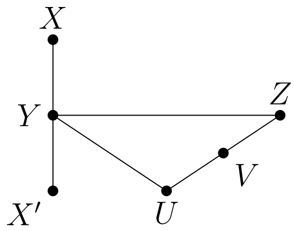

Figura 3.18: Punto X'

Da (1), (2), $\bigvee ZUV$ e $Z \neq V$ per il teorema 3.22 abbiamo che $VX \equiv VX'$, quindi ΔVYX oppure ΔXYV. $\square$

Teorema 3.39. $\Delta XYZ \wedge \Delta YZU \wedge Y \neq Z \rightarrow \Delta XYU$

Dimostrazione. Dal teorema 3.36 sappiamo anche che vale ΔXYY, quindi per il teorema 3.38 abbiamo la tesi. $\square$

Teorema 3.40. $\Delta XYZ \wedge XY \equiv X'Y' \wedge YZ \equiv Y'Z' \wedge XZ \equiv X'Z' \rightarrow \Delta X'Y'Z'$

Dimostrazione. Date le ipotesi, esiste un punto U tale che: $Z^{YY}U$ e $XZ \equiv XU$ (1). Allora esisterà anche un punto U' tale che $Z'^{Y'Y'}U'$.

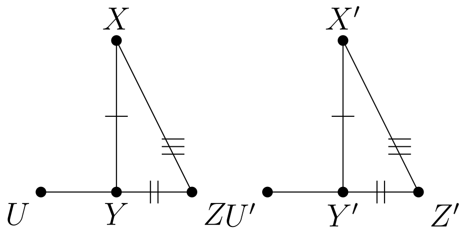

Figura 3.19: Punti U e U'

Se $Y = Z$ allora per il fatto che $YZ \equiv Y'Z'$ avremmo anche che $Y' = Z'$. Quindi $\Delta X'Y'Z'$ per il teorema 3.36. Assumiamo quindi $Y \neq Z$. Allora per l'Ax. 5 possiamo concludere che $UX \equiv U'X'$ o equivalentemente che $XU \equiv X'U'$ (2). Dall'ipotesi $XZ \equiv X'Z'$, da (1) e (2) segue che $\Delta X'Z'Y'$ e quindi $\Delta X'Y'Z'$. $\square$

Teorema 3.41. $\Delta XYZ \wedge X^{YY}X' \wedge X^{ZZ}U \wedge X'^{VV}U \rightarrow \Delta YZV$

Dimostrazione. Se $Y = Z$ oppure $Z = V$ abbiamo subito la tesi dal teorema 3.36. Quindi assumiamo che $Y \neq Z \neq V$ (1).

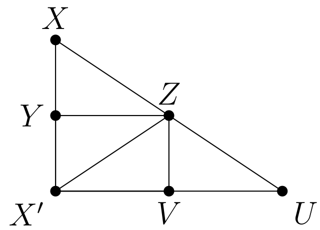

Figura 3.20: Ipotesi del teorema

Dal fatto che ΔXYZ, per simmetria abbiamo anche che $\Delta ZYX'$ quindi: $ZX \equiv ZX'$. Dal fatto che $X^{ZZ}U$ allora: $ZX' \equiv ZU$. Abbiamo quindi un punto U' tale che: $X'^{ZZ}U'$. Per il teorema 3.30 poi, esistono U' e V' tali che: $V^{ZZ}V'$, $X^{V'V'}U'$, $Y^{ZZ}Y'$ (2) e $U^{Y'Y'}U'$.

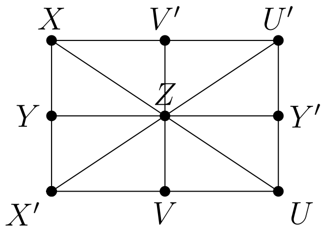

Figura 3.21: Applicazione teorema 3.30

Quindi da (1) e (2) si ha che $Z \neq Y'$. Per il teorema 3.18 si ha che $XU' \equiv X'U$, mentre per il teorema 3.31: $XV' \equiv X'V$. Quindi da $Y'U \equiv Y'U'$, $ZU \equiv ZU'$, $Y'^{Z}Y$ e $Y' \neq Z$ segue dal teorema 3.22 che: $YU \equiv YU'$. Quindi dal teorema 3.10 possiamo concludere che $V'Y \equiv VY$ o equivalentemente che $YV \equiv YV'$.

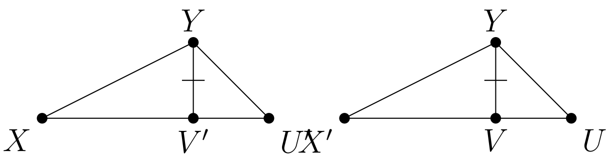

Figura 3.22: Applicazione teorema 3.10

Quindi dal fatto che $V^{ZZ}V'$ segue la tesi: ΔYZV. □

Teorema 3.42. $\forall\, X\ \forall\, Y\ \forall\, Z\ \exists\, T\big(\Delta XTY \wedge \Delta XTZ \wedge \Delta YZT\big)$

Dimostrazione.
- Se $\bigvee XYZ$ allora scegliamo $T = X$. Siccome ΔXXY e ΔXXZ per il teorema 3.36, allora si ha che $\bigvee YZX$.

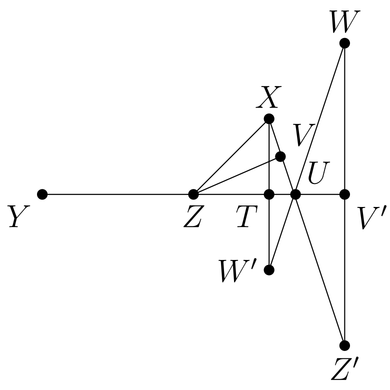

Figura 3.23: Caso 2

- Se $\bigvee XYZ$ allora si ha che: $Y \neq Z \neq X$. Per l'Ax. 4 esiste un punto U tale che: $Y^{Z}U$ (1) e $ZU \equiv ZX$ (2). Per (2) esiste un punto V, per il teorema 3.33, tale che $X^{VV}U$ (3). Per (2) e (3) quindi possiamo dire che: ΔZVU. Per l'Ax. 4 ancora poi esistono V' e Z' tali che: $Y^{U}V'$, $UV' \equiv UV$, $X^{U}Z'$ e $UZ' \equiv ZU$. Per l'Ax. 15 e da (1) e (3) si ottiene quindi: $Z^{U}V'$ e $Z'UV$. Dal fatto che $ZU \equiv ZX$ e $Z \neq X$ allora: $Z \neq U$. Quindi per l'Ax. 5 si ha che: $V'Z' \equiv VZ$. Dal fatto che $ZV \equiv Z'V'$, $ZU \equiv Z'U$, $VU \equiv V'U$ e $Z^{VV}U$, per il teorema 3.40 segue che: $\Delta Z'V'U$ e quindi $\Delta UV'Z'$ (4). Otteniamo quindi un punto W tale che $Z'^{V'V'}W$. Da (4) $\Delta UV'Z'$ segue che: $UZ' \equiv UW$. Otteniamo poi anche un punto W' tale che: $W^{U}W'$ e $UW' \equiv UX$. Perciò per il teorema 3.34 esiste un punto T tale che: $X^{TT}W'$. Sempre per il teorema 3.34 possiamo anche concludere che: $W'^{U}T$. Quindi siccome $Y^{Z}U$ e $\neg \bigvee XYZ$ abbiamo in particolare che $\neg \bigvee XZU$ (5) e $Z \neq U$. Quindi siccome $X^{VV}U$ abbiamo anche che $U \neq V$ (6). Da (3) e (5) quindi $Z \neq V$ e quindi $Z' \neq V'$ (7). Da (4), (6) e (7) per il teorema 3.37: $\neg \bigvee UV'Z'$ e anche per definizione: $\bigvee UWZ'$ (8). Quindi dal fatto che $\bigvee YZU$, $\bigvee YZV'$, $Y \neq Z$, $U \neq V'$ e $V'^{U}T$, per i teoremi 26 e 27 segue che: $\bigvee YZT$ (9), $\bigvee YTU$ (10) e $\bigvee ZTU$ (11). Da $UW' \equiv UX$ e $X^{TT}W'$ abbiamo che ΔUTX oppure che ΔXTU (12).
  Se $T = U$ avremmo che $\bigvee XUW'$, unendolo a $X \neq U$, $X^{U}Z'$, $W'^{U}W$ e $W' \neq U$ abbiamo: $\bigvee UWZ'$, contrariamente a (8), quindi $T \neq U$ (13).
  Da (9), (10), (12) e (13) si ha che ΔXTZ (14) e ΔXTY (15). Quindi da (9), (14) e (15) abbiamo l'esistenza del punto T cercato.

□

Teorema 3.43. $Y \neq Z \rightarrow \exists\, X\big(X \neq Y \wedge \Delta XYZ\big)$

Dimostrazione. Sia $Y \neq Z$ allora per il teorema 3.28 esiste un punto U tale che: $\neg \bigvee UYZ$ (1). Per il teorema 3.42 esiste anche un punto T tale che: ΔUTY (2), ΔUTZ (3) e ΔYZT (4). Quindi da (1) e (4) si vede che $T \neq U$ (5).

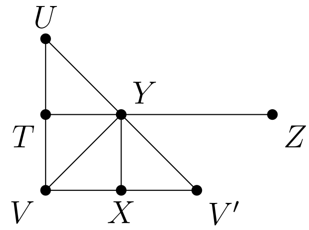

Figura 3.24: Teorema 3.43

- Se $T = Y$ allora scegliamo $X = U$. Abbiamo quindi $X \neq Y$ e quindi ΔXYZ.
- Se $T \neq Y$ otteniamo quindi due punti V e V' tali che: $U^{TT}V$ (6) e $\Delta UYV'$ (7). Allora da (2) e (6) abbiamo quindi che $YU \equiv YV$ (8). Da (7) e (8) allora: $YV \equiv YV'$ (9). In virtù di (9) quindi esiste un punto X tale che: $V^{XX}V'$ (10). Da (2), (6), (7) e (10) possiamo concludere per il teorema 3.41 che: ΔTYX o equivalentemente che ΔXYT (11). Da (4), (11) e $T \neq Y$ si ha per il teorema 3.39 che: ΔXYZ (12). Quindi da (2), (5) e $T \neq Y$ possiamo concludere per il teorema 3.37 che: $\neg \bigvee UTY$. Quindi anche che: $\neg \bigvee UYV$ (13) e in particolare che $U \neq Y$. Vale poi anche che $V \neq Y$ e $V' \neq Y$.
  Se $X = Y$ allora avremmo che $\bigvee VYV'$, quindi insieme con $\bigvee V'YU$ e $V' \neq Y$ si avrebbe che $\bigvee VYU$ in contraddizione con (13).
  Quindi $X \neq Y$ e quindi per (12) si ha la tesi.

□

Definizione 3.4. *In seguito scriviamo $XY : ZU$ per indicare:* $\exists\, V\big(Z^{V}U \wedge ZV \equiv XY\big)$

Teorema 3.44 (Esistenza del punto medio del segmento)**.** $\forall\, X\ \forall\, Y\ \exists\, S\big(X^{SS}Y\big)$

Dimostrazione.
- Se $X = Y$ allora scegliamo $X = Y = S$ e abbiamo la tesi.
- Se $X \neq Y$ allora per il teorema 3.43 si ha che esiste un punto U tale che ΔUXY (1) e $U \neq X$ (2).

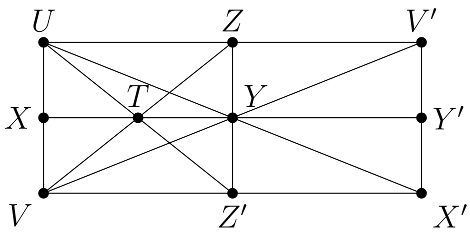

Figura 3.25: Esistenza di U

Otteniamo quindi tre punti V, X' e V' tali che $U^{XX}V$ (3), $U^{YY}X'$ (4) e $V^{YY}V'$ (5). Da (1), (3), (4) e (5) segue che: $YV \equiv YX'$ (6) e $YU \equiv YV'$ (6'). Dal teorema 3.33 esiste un punto Z' tale che: $V^{Z'Z'}X'$ (7). Allora dal teorema 3.30 esiste un punto Z tale che: $U^{ZZ}V'$ (8) e $Z'^{YY}Z$ (9). Allora per il teorema 3.18: $UV' \equiv VX'$ (10). Invece per il teorema 3.31: $UZ \equiv VZ'$ (11). Come nella dimostrazione del teorema 3.43 si ha che $Z' \neq Y$ (12). Da (1) e (3) vediamo che $YU \equiv YV$ (13). Dal teorema 3.41 poi si ha che $\Delta Z'YX$ (14). Da (14) e (9) si ottiene quindi $XZ \equiv XZ'$. Dall'Ax. 5 poi otteniamo che: $ZV \equiv Z'U$ (16). Per il teorema 3.29 poi esiste T tale che X^TY (17) e U^TZ' (18).

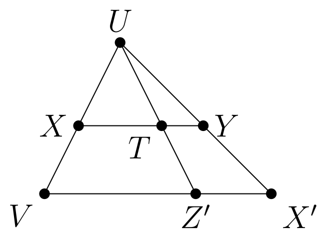

Figura 3.26: Esistenza di T

Da $XU \equiv XV$, $YU \equiv YV$, X^TY e $X \neq Y$, per il teorema 3.22 si ha che $TU \equiv TV$ (19). Da $YZ \equiv YZ'$, $XZ \equiv XZ'$, X^TY e $Z \neq Y$, per il teorema 3.22 si ha ancora che: $TZ \equiv TZ'$ (20). Quindi per (16), (18), (19) e (20) si ottiene per il teorema 3.17 che: V^TZ.

- Se $VU : YZ$ allora esiste un punto W tale che: Y^WZ (22) e $YW \equiv XU$ (23). Per il teorema 3.15 quindi esiste un punto W' tale che: $Y^{W'}Z'$ (24) e $YW' \equiv YW$ (25).

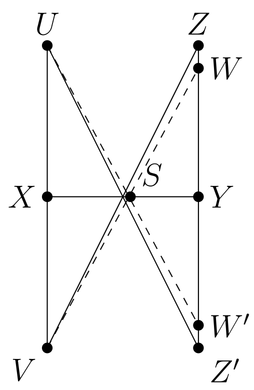

Figura 3.27: Esistenza di W'

Quindi per (21) e (22) usando l'Ax. 7, esiste un punto S tale che: V^SW (26) e T^SY (27).

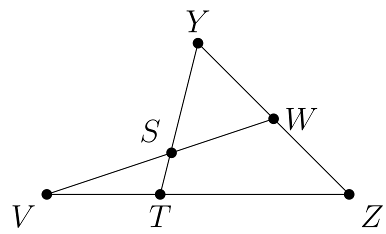

Figura 3.28: Esistenza di S

Per il teorema 3.10 abbiamo che $WV \equiv W'U$ (28). Da X^TY e T^SY abbiamo che per l'Ax. 15: X^SY (29). Da ΔXYZ, ΔYWZ e $Y \neq Z$ dal teorema 3.39 segue che: ΔXYW (30). Quindi $XW \equiv XW'$ (31). Da (25), (29), (31) e $X \neq Y$ per il teorema 3.22 si ha che: $SW \equiv SW'$ (33). Da $XU \equiv XV$, $YU \equiv YV$, X^SY e $X \neq Y$, sempre dal teorema 3.22 segue anche che: $SU \equiv SV$ (34). Da (26), (28), (32) e (33) per il teorema 3.17 segue che: U^SW' (34). Dal teorema 3.10 poi: $WU \equiv W'V$ (35). Per il teorema 3.7 quindi: $UV \equiv WW'$ (36). Se $\bigvee UVW$ avremmo che $\bigvee UXW$ e quindi anche ΔYXW oppure ΔWXY. Avremmo quindi anche che ΔXYW o ΔWYX. Quindi da ΔWXY e ΔWYX otterremo che $X = Y$, che è una contraddizione. Quindi: $\neg \bigvee VUW$. Notiamo poi anche che $U \neq W'$ (38) (altrimenti avremmo che $U = S$ e quindi $\bigvee U^XY$). Ciò non è possibile per il teorema 3.37 perché $U \neq X$, $X \neq Y$ e ΔUXY). Quindi per il teorema 3.35 si ha che: $V^{SS}W$ (39) e $U^{SS}W'$ (40). Per il teorema 3.10 quindi: $XS \equiv YS$ (41) o equivalentemente $XS \equiv SY$ (41'). Combinando (9) e (41') avremmo che $X^{SS}Y$.

– Se $YZ : XU$, la tesi si ottiene per simmetria ragionando su un punto S tale che $X^{SS}Y$.

$\square$

Capitolo 4

Proprietà *metateoretiche* della teoria

Nel secondo capitolo, abbiamo esposto un insieme di 10 assiomi, più uno schema di assiomi, che rappresentano la geometria euclidea piana. Chiamiamo tale teoria: $\mathcal{E}_2$. Nel seguito ci proponiamo di dimostrare delle proprietà *metateoretiche* importanti per tale teoria matematica, in particolare: la caratterizzazione di tutti i **modelli** di $\mathcal{E}_2$, la **completezza**, la **decidibilità** e l'impossibilità di avere un'**assiomatizzazione finita**. Essenzialmente seguiamo il lavoro di Tarski in [7] per la formalizzazione dei seguenti risultati.

4.1 Caratterizzazione dei modelli

Cerchiamo in questa sezione di caratterizzare tutti i modelli di $\mathcal{E}_2$. Definiamo prima, cosa intendiamo con **modello**.

Definizione 4.1 (Modello di una teoria). *Un modello di una teoria (qui $\mathcal{E}_2$) è un sistema: $\mathcal{M} = (\mathbb{A}, b, d)$ dove:*

- *$\mathbb{A}$ è un arbitrario insieme non vuoto e b e d sono rispettivamente una relazione ternaria e quaternaria sugli elementi di $\mathbb{A}$.*
- *Tutti gli assiomi di $\mathcal{E}_2$ valgono in $\mathcal{M}$ se tutte le variabili che vi compaiono sono assunte essere scelte come elementi di $\mathbb{A}$ e le relazioni b e d rappresentano rispettivamente le relazioni di* stare fra *e* congruenza*.*

Esempio 4.1. *Il più familiare esempio di modello di $\mathcal{E}_2$ è il piano cartesiano su un campo ordinato.*
Assumiamo note le condizioni sotto cui un sistema $\mathcal{F} = (\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ è un campo ordinato e come vanno interpretati i simboli 0, $x - y$ e x^2. Un campo ordinato $\mathcal{F}$ si dice ***euclideo*** *se ogni elemento non negativo di $\mathbb{F}$ è un quadrato. Un campo ordinato si dice* ***reale chiuso*** *se è euclideo e ogni polinomio con grado dispari e a coefficienti in $\mathbb{F}$, ha una radice in $\mathbb{F}$. Consideriamo poi l'insieme $\mathbb{A}_{\mathcal{F}} = \mathbb{F} \times \mathbb{F}$, come l'insieme di tutte le coppie ordinate $x = (x_1, x_2)$ dove x_1 e x_2 sono elementi di $\mathbb{F}$. Definiamo quindi le relazioni:*

- $b_{\mathcal{F}}(x, y, z) \Leftrightarrow \left(x^y z\right)_{\mathcal{F}}$ *se e solo se:*
  - $(x_1 - y_1)(y_2 - z_2) = (x_2 - y_2)(y_1 - z_1)$

  - $0 \leq (x_1 - y_1)(y_1 - z_1)$
  - $0 \leq (x_2 - y_2)(y_2 - z_2)$

- $d_{\mathcal{F}}(x, y, z, u) \Leftrightarrow xy \equiv_{\mathcal{F}} zu$ *se e solo se* $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = (z_1 - u_1)^2 + (z_2 - u_2)^2$

Così fatto quindi il sistema $\mathcal{C}_2(\mathcal{F}) = (\mathbb{A}_{\mathcal{F}}, b_{\mathcal{F}}, d_{\mathcal{F}})$ *si chiama* ***piano cartesiano*** *sul campo ordinato* $\mathcal{F}$*. In particolare possiamo scegliere come* $\mathcal{F}$ *il campo dei numeri reali* $\mathbb{R}$ *e otteniamo il piano cartesiano usuale.*

Teorema 4.1 (Caratterizzazione dei modelli)**.** $\mathcal{M}$ *è un modello di* $\mathcal{E}_2$ *se e solo se* $\mathcal{M}$ *è isomorfo a* $\mathcal{C}_2(\mathcal{F})$*, il piano cartesiano su un qualche campo reale chiuso.*

Dimostrazione. $\leftarrow$: Per l'esempio 1 sappiamo che tutti gli assiomi di $\mathcal{E}_2$ valgono in $\mathcal{C}_2(\mathbb{R})$, e quindi quest'ultimo è un modello di $\mathcal{E}_2$.
Per un risultato di [6], possiamo dire che, ogni campo reale $\mathcal{F}$ è elementarmente equivalente al campo dei reali $\mathbb{R}$, cioè ogni enunciato che valga in uno di questi due campi, vale anche nell'altro. Quindi $\mathcal{C}_2(\mathcal{F})$ è elementarmente equivalente a $\mathcal{C}_2(\mathbb{R})$, e quindi è un modello di $\mathcal{E}_2$, e questo può essere applicato a tutti i sistemi $\mathcal{M}$ che siano isomorfi a $\mathcal{C}_2(\mathcal{F})$.

$\rightarrow$: Per provare questa implicazione useremo nozioni di teoria delle proporzioni. Consideriamo un modello di $\mathcal{E}_2$: $\mathcal{M} = (\mathbb{A}, b, d)$. Siano z e u due elementi distinti di $\mathbb{A}$, e sia $\mathbb{F}$ la linea retta che li congiunge. Quindi $\mathbb{F}$ è l'insieme di tutti i punti x tali che $z^u x \vee u^x z \vee x^z u$.
Possiamo quindi definire le operazioni $+$ e $\cdot$, e la relazione $\leq$, tra due qualsiasi punti x e y di $\mathbb{F}$.

- $\leq$: Diciamo che $x \leq y$ se vale una delle seguenti: $x = y$ o $x^z u \wedge \neg y^x u$ o ancora $z^x y \wedge \neg x^z u$.
- $+$: Diciamo che $x + y$ è l'unico punto v di $\mathbb{F}$ tale che $zx \equiv yv$ e vale una delle seguenti: $z \leq x \wedge y \leq v$ oppure $x \leq z \wedge v \leq y$.
- $\cdot$: La costruzione di $x \cdot y$ è la più articolata e si basa sulla teoria delle rette parallele, la dimostrazione è complessa e non verrà qui riportata.

Dopo aver fatto ciò dobbiamo dimostrare che $\mathcal{F} = (\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ è un campo ordinato, e con l'aiuto dell'Ax. 11 che è un campo reale chiuso.
Considerando una linea retta $\mathbb{G}$ perpendicolare a $\mathbb{F}$ in un punto z, possiamo introdurre un sistema di coordinate rettangolari in $\mathcal{M}$, e definire quindi una corrispondenza biunivoca tra gli elementi $x, y, ...$ di $\mathbb{A}$ e le coppie ordinate $\bar{x} = (x_1, x_2), \bar{y} = (y_1, y_2), ...$ delle loro coordinate in $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$.
Con l'aiuto quindi del teorema di Pitagora si dimostra che la formula $xy \equiv st$ è valida per i punti di $\mathbb{A}$ se e solo se la formula $\bar{x}\bar{y} \equiv \bar{s}\bar{t}_{\mathcal{F}}$ è valida, quindi se:

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = (s_1 - t_1)^2 + (s_2 - t_2)^2$$

Dimostrandolo analogamente per la relazione di *stare fra* si arriva a concludere che $\mathcal{M}$ e $\mathcal{C}_2(\mathcal{F})$ sono isomorfi.

□

Non entreremo nel dettaglio del risultato di [6] citato nella dimostrazione, ma ne diamo una breve introduzione. Tale risultato prende il nome di *metodo di eliminazione dei quantificatori.*
Come suggerito dal nome, il metodo corrisponde a una serie finita di passi che portano da una formula con quantificatori, ad un enunciato senza quantificatori, da cui quindi possiamo dedurre la decidibilità o meno.
Facciamo un esempio:

Esempio 4.2. *Consideriamo la teoria dei campi reali chiusi. Il linguaggio di tale teoria è:* $\mathcal{L} = \{+, \cdot, <, 0, 1\}$*, con* $+$ *e* $\cdot$ *simboli di operazione binaria,* $<$ *un simbolo di relazione unaria, e* 0, 1 *due simboli di costante. In tale linguaggio la formula* $\exists\ x\ (ax^2 + bx + c = 0)$ *è equivalente a dare le condizioni affinché l'equazione ammetta soluzione, e cioè:*

$$\neg((b^2 - 4ac) < 0)$$

4.1.1 La completezza

Ricordiamo che una teoria è completa, se ogni enunciato A formulabile con il linguaggio della teoria è derivabile, o è derivabile la sua negazione.

Corollario 4.1 (Teorema di completezza)**.**
1. *Un enunciato è valido in* $\mathcal{E}_2$ *se e solo se è valido in* $\mathcal{C}_2(\mathbb{R})$*.*
2. *La teoria* $\mathcal{E}_2$ *è completa (e consistente).*

Dimostrazione.
1. Segue dal teorema 4.1 e per il risultato di [6] usato nel teorema stesso.
2. È un'immediata conseguenza del punto 1.

□

4.1.2 La decidibilità

Il problema della decidibilità della teoria $\mathcal{E}_2$ corrisponde al problema del dimostrare l'esistenza di un procedimento meccanico che ci renda capaci di dire a priori, con un numero finito di passi, quando una formula in $\mathcal{E}_2$ è valida oppure no.

Corollario 4.2 (Teorema di decidibilità)**.** *La teoria* $\mathcal{E}_2$ *è decidibile.*

Dimostrazione. Per il corollario 4.1, $\mathcal{E}_2$ è completa. Inoltre è ricorsivamente assiomatizzabile, e quindi c'è un algoritmo che ci permette di decidere sempre quando una formula è un assioma o meno. Ma ogni teoria completa e assiomatizzabile è decidibile, e quindi $\mathcal{E}_2$ è decidibile. □

4.1.3 L'impossibilità di un'assiomatizzazione finita

Come già detto nel capitolo 2, nella teoria compare uno schema di assiomi, l'Ax. 11, affinché la teoria possa essere scritta al primo ordine. Ciò non vieta che la teoria sia finitamente assiomatizzabile, potremmo infatti trovare un singolo assioma equivalente all'Ax. 11 e quindi rendere finito l'insieme di assiomi.
Ciò però non è possibile, e ce lo assicura il seguente risultato:

Corollario 4.3. *La teoria $\mathcal{E}_2$ non è finitamente assiomatizzabile.*

Dimostrazione. Diciamo innanzitutto $\mathcal{I}_1$, l'insieme di tutti gli assiomi di $\mathcal{E}_2$, cioè quello formato da: Ax. 1, Ax. 2, Ax. 3, Ax. 4, Ax. 5, Ax. 7, Ax. 8, Ax. 9, Ax. 10, Ax. 11, Ax. 15.
Dalla dimostrazione del teorema 4.1, vediamo che lo schema di assiomi Ax. 11 può essere sostituito equivalentemente con un'infinità di enunciati: S_0, S_1, ... S_n, ... Chiamiamo $\mathcal{I}_2$ l'insieme quindi di tutti gli assiomi di $\mathcal{E}_2$, in cui abbiamo sostituito Ax. 11.
S_0 assicura che il campo ordinato $\mathcal{F}$ costruito nella dimostrazione del teorema 4.1, sia euclideo, e S_n, per $n > 0$, indicano che ogni polinomio di grado $2n+1$ ha uno zero in $\mathbb{F}$. Per ogni numero primo p possiamo costruire un campo ordinato $\mathcal{F}_p$, dove ogni polinomio di grado dispari $2n+1 < p$ ha soluzione, mentre qualche polinomio di grado p non ha soluzioni in $\mathbb{F}_p$. Quindi se $2m+1 = p$ è primo, tutti gli assiomi della teoria e S_n per ogni $n < m$, valgono in $\mathcal{C}_2(\mathcal{F}_p)$, mentre S_m non vale. Questo implica che $\mathcal{I}_2$ non possiede un sottoinsieme finito da cui tutti gli assiomi della teoria derivino. Quindi non esiste nemmeno un insieme finito di assiomi che sia equivalente a $\mathcal{I}_1$. □

4.2 Altre assiomatizzazioni della *geometria elementare*

Nel seguito esponiamo brevemente altre due assiomatizzazioni della *geometria elementare*: le teorie $\mathcal{E}_2'$ e $\mathcal{E}_2''$, e spiegheremo brevemente perché vengano poco utilizzate.

$\mathcal{E}_2'$: La teoria $\mathcal{E}_2'$ è ottenuta aggiungendo a $\mathcal{E}_2$ un frammento della logica del secondo ordine. In particolare, includiamo nuove variabili $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, ..., che rappresentano arbitrari insiemi di punti. Includiamo poi anche un'altra relazione: $\in$, che indica quando dei punti, appartengono a un insieme finito di punti. Come assiomi di $\mathcal{E}_2'$ possiamo scegliere gli assiomi di $\mathcal{E}_2$ sostituendo all'Ax. 11, il vero assioma di continuità, al secondo ordine: $\forall\, \mathbb{X}\, \forall\, \mathbb{Y}\, (\mathbb{X} < \mathbb{Y} \rightarrow \exists\, X\; \mathbb{X} \leq X \leq \mathbb{Y})$, dove con $\mathbb{X} < \mathbb{Y}$ intendiamo un'abbreviazione per: $\forall\, x \in \mathbb{X}\, \forall\, y \in \mathbb{Y} \rightarrow x < y$, e con $\exists\, X\; \mathbb{X} \leq X \leq \mathbb{Y}$ un'abbreviazione per $\exists\, X \big(\forall\, x \in \mathbb{X}\, \forall\, y \in \mathbb{Y}\; x \leq X \leq y\big)$.
La teoria $\mathcal{E}_2'$ ha quindi più potere espressivo della teoria $\mathcal{E}_2$, in essa possiamo formulare anche l'esistenza di nozioni classiche della geometria elementare, come l'esistenza di un poligono con un numero arbitrario di vertici. Per quanto riguarda le proprietà *metateoretiche* della teoria $\mathcal{E}_2'$, per esempio, non conosciamo un risultato per una semplice caratterizzazione di tutti i modelli di $\mathcal{E}_2'$. Per esempio si può dimostrare

che il postulato archimedeo vale in $\mathcal{E}_2'$, e quindi per il teorema 4.1, che un modello della teoria è il piano cartesiano $\mathcal{C}_2(\mathcal{F})$ su un qualunque campo archimedeo reale chiuso. Esistono però campi archimedei reali e chiusi che non sono modelli della teoria.
Per il problema della decidibilità di $\mathcal{E}_2'$ vale invece:

Teorema 4.2. *La teoria $\mathcal{E}_2'$ è indecidibile, e così anche tutte le sue possibili estensioni consistenti.*

Il teorema è essenzialmente conseguenza del fatto che l'aritmetica di Peano sia relativamente interpretabile in $\mathcal{E}_2'$ e quindi la teoria diventa automaticamente indecidibile, per maggiori dettagli si veda [7].

$\mathcal{E}_2''$: La teoria $\mathcal{E}_2''$ è ottenuta indebolendo il sistema di assiomi di $\mathcal{E}_2$. Infatti sostituiamo l'Ax. 11 con un singolo assioma (Ax. 11') che sia conseguenza dello schema infinito. Il nuovo assioma dice che dato un segmento che colleghi due punti, uno interno a un cerchio, l'altro esterno, esso intersecherà sempre il cerchio.

$$AB \equiv AB' \wedge AC \equiv AC' \wedge A^BC \wedge B^DC \rightarrow \exists\, D'\big(AD \equiv AD' \wedge B'^{D'}C'\big)$$

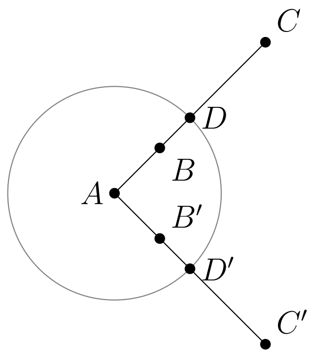

Figura 4.1: Ax. 11'

A causa di questo indebolimento, appare ovvio che alcune formule che prima valevano in $\mathcal{E}_2$ non valgono più in $\mathcal{E}_2''$. Per le proprietà *metateoretiche*, abbiamo i seguenti risultati:

Teorema 4.3. *$\mathcal{M}$ è un modello di $\mathcal{E}_2''$ se e solo se è isomorfo al piano cartesiano $\mathcal{C}_2(\mathcal{F})$ su un qualunque campo euclideo.*

Dimostrazione. Segue in modo similare alla dimostrazione del teorema 4.1. □

Usando il teorema 4.3 quindi, possiamo dimostrare che la teoria $\mathcal{E}_2''$ è incompleta e dalla definizione di $\mathcal{E}_2''$ è anche finitamente assiomatizzabile. Se poi consideriamo il caso di formule che contengano solo quantificatori universali, possiamo dire che:

Teorema 4.4. *Una formula è valida in $\mathcal{E}_2$ se e solo se è valida in $\mathcal{E}_2''$.*

Dimostrazione. Per il fatto che tutti i campi ordinati possono essere estesi a campi reali chiusi, dai teoremi 4.1 e 4.3 segue che un modello di $\mathcal{E}_2''$ può essere esteso a un modello di $\mathcal{E}_2$. Quindi ogni formula con quantificatori universali in $\mathcal{E}_2$ è valida anche in $\mathcal{E}_2''$. L'implicazione opposta è ovvia. $\square$

Considerando solo le formule con quantificazione universale, quindi, la teoria $\mathcal{E}_2''$ risulta essere decidibile.

Conclusione

In questa tesi, quindi abbiamo studiato in dettaglio il sistema assiomatico per la geometria elementare, proposto da Alfred Tarski.
Distinguendosi quindi dai suoi contemporanei, la sua teoria è al primo ordine, e forse per questo meno nota. Abbiamo messo in luce come l'insieme di assiomi di Tarski sia estremamente elegante e semplice, con soli 10 assiomi, più uno schema di assiomi.
Procedendo poi in modo classico nello studio della teoria, abbiamo studiato i suoi assiomi, dalla forma iniziale fino a quella finale, frutto di varie semplificazioni. Ci siamo proposti poi di dimostrare un teorema classico della geometria piana, l'esistenza di un punto medio, che come è stato fatto notare, non è banale se derivato formalmente all'interno della teoria.
Abbiamo infine indagato le proprietà *metateoretiche* della teoria, sottolineando il fatto che essa è completa, come non può essere una teoria al secondo ordine. La teoria di Tarski quindi si rivela molto importante, perché gode di tali proprietà, assolutamente non scontate. Si sono poi infine proposti, a conclusione del nostro lavoro, due esempi di ampliamento dell'assiomatica tarskiana. Uno dei due esempi, rende l'assiomatica tarskiana al secondo ordine, rendendola quindi, per esempio, finitamente assiomatizzabile.
Lo scopo quindi di questa tesi è stato raggiunto: si è riusciti a descrivere la teoria, sia dal punto di vista delle potenzialità matematiche, ma anche per il formalismo logico e le proprietà *metateoretiche* che essa possiede.

Bibliografia

[1] Haragaure Narayan Gupta. *Contributions to the Axiomatic Foundations of Geometry.* Thesis (Ph.D.)–University of California, Berkeley. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1965.

[2] David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie.* Vol. 6. Teubner-Archiv zur Mathematik. Supplement [Teubner Archive on Mathematics. Supplement]. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart, 1999.

[3] Dario Palladino. *Logica e teorie formalizzate: completezza, incompletezza, indecidibilità.* Carocci, Roma, 2019.

[4] Mario Pieri. "La geometria elementare istituita sulle nozioni di punto e sfera". In: *Mem. Mat. Fis. Soc. Ital. Sci. Ser. 3* 15 (1908), pp. 345–450.

[5] L. W. Szczerba. "Tarski and geometry". In: *J. Symbolic Logic* 51.4 (1986), pp. 907–912.

[6] Alfred Tarski. "A decision method for elementary algebra and geometry". In: *Quantifier elimination and cylindrical algebraic decomposition (Linz, 1993).* Texts Monogr. Symbol. Comput. Springer, Vienna, 1998, pp. 24–84.

[7] Alfred Tarski. "What is elementary geometry?" In: *Proceedings of an International Symposium held at the Univ. of Calif., Berkeley, Dec. 26, 1957-Jan. 4, 1958,* a cura di L. Henkin e P. Suppes. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. The axiomatic method., With special reference to geometry and Physics. , 1959, pp. 16–29.

[8] Alfred Tarski e Steven Givant. "Tarski's system of geometry". In: *Bull. Symbolic Logic* 5.2 (1999), pp. 175–214.

[9] Richard J Trudeau et al. *La rivoluzione non euclidea.* Bollati Boringhieri, Torino, 1991.