

Università degli Studi di Padova
Corso di Laurea Magistrale in Scienze Statistiche



**Analisi della relazione tra prezzi spot e futures del petrolio
tramite cointegrazione quantilica**

Relatore: Prof. Silvano Bordignon

Dipartimento di Scienze Statistiche

Laureando: Massimo Schiavo

Anno Accademico 2012/2013

A Isotta

Indice

1. Introduzione	1
2. Analisi di cointegrazione lineare	5
2.1. Dati utilizzati	5
2.2. Il West Texas Intermediate	6
2.3. L'impatto di avvenimenti macroeconomici recenti sul prezzo del WTI	7
2.4. Analisi descrittive	10
2.5. Analisi della stazionarietà	13
2.5.1. Il test di Dickey-Fuller	13
2.5.2. Il test di Phillips-Perron	14
2.5.3. Il test di Elliott-Lothman-Stock	15
2.5.4. Il test di Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin	16
2.6. Analisi di cointegrazione: approccio di Johansen	17
3. Analisi di cointegrazione quantilica	25
3.1. La regressione quantilica	25
3.1.1. Proprietà dello stimatore	28
3.1.2. Inferenza per la regressione quantilica	29
3.2. La regressione quantilica su un modello cointegrato	34
3.2.1. Inferenza per la cointegrazione quantilica	35
3.2.2. Applicazione a serie reali	39
3.3. Test per la cointegrazione quantilica	45
4. Analisi dei residui	49
4.1. Analisi dei residui della cointegrazione lineare	49
4.2. Test robusto di cointegrazione quantilica	53
5. Analisi delle causalità	57
5.1. Analisi di causalità secondo Granger	58
5.2. Analisi di causalità mediante un test non parametrico	61
5.3. Analisi di causalità al variare dei quantili	65

6. Conclusioni	71
Appendice	73
Appendice A	73
Appendice B	91
Bibliografia	99

1. Introduzione.

Negli ultimi decenni molte analisi hanno avuto come oggetto di studio il prezzo del petrolio per monitorarlo e cercare di comprenderne meglio l'evoluzione. Questo grande interesse può essere spiegato dalla crescente importanza del cosiddetto "oro nero" a livello macroeconomico globale. Le fluttuazioni del suo prezzo non possono essere spiegate solamente dai movimenti della domanda e dell'offerta globale, ma sono spesso il risultato di avvenimenti più complessi, tensioni geopolitiche, etc. . Oggi il petrolio è una delle *commodities* più importanti, i cui volumi di scambio hanno avuto una rapida ascesa negli ultimi decenni, visto il continuo aumento della domanda a livello mondiale.

Per questi (e altri) motivi la letteratura econometrica si è spesso occupata del prezzo del petrolio, cercando di analizzarne la relazione di lungo periodo con altre importanti variabili macroeconomiche. Si è anche studiata la relazione tra i prezzi spot e futures a diverse scadenze; alcuni interessanti esempi si possono trovare in Bopp e Sitzler (1987) e in Cologni e Manera (2008). Recentemente le analisi nei mercati energetici si sono concentrate nello studiare gli impatti asimmetrici di shock petroliferi su altre variabili macroeconomiche oppure sui mercati finanziari (un esempio su tutti: Park e Ratti, 2008). Una delle evidenze principali è che nel mercato spot-futures del petrolio si ha una relazione non costante nel tempo tra i prezzi spot e i futures alle diverse scadenze. Come affermato in Borenstein et al. (1997) e in Lardic e Mignon (2006) possibili cause di ciò possono essere i differenti costi di transazione, la microstruttura del mercato, le diverse aspettative degli agenti economici, la presenza di mercati mono o oligopolistici (il che provoca rigidità nei diversi prezzi) e l'eterogeneità nei comportamenti degli investitori. Su tutto emerge un'evidenza: gli agenti economici non reagiscono in maniera razionale agli shock nel prezzo del petrolio.

Questo lavoro, così come quello di Lee e Zeng (2011), ha fondamento concettuale nella teoria del prospetto, elaborata in Kahneman e Tversky (1979). Essa afferma che gli agenti economici tendono a sovrappesare le perdite rispetto ai possibili guadagni, ovvero assumono un atteggiamento avverso al rischio nei confronti dei guadagni e propenso al rischio verso le perdite. Tale teoria si differenzia da quella dell'utilità di Von Neumann e Morgenstern, che va a definire le condizioni secondo le quali una decisione è razionale, mentre la teoria del prospetto dice come gli individui si comportano di fronte ad una decisione. Secondo Kahneman e Tversky il comportamento degli agenti economici può essere ben definito dalla Funzione del Valore, concava nella regione dei guadagni e convessa in quella delle perdite, rappresentata in Figura 1.1.

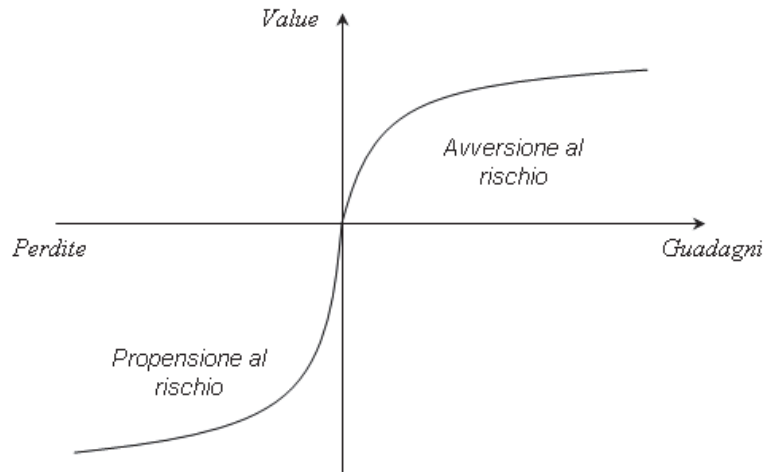


Figura 1.1. La Funzione del Valore (fonte: Wikipedia)

Un esempio molto utile per comprendere al meglio tale teoria è quello riportato in Kahneman e Tversky (1979). In particolare gli autori distinguono le seguenti due situazioni:

Situazione 1

Evento A: Possibile guadagno di \$4000 con probabilità 0,8.

Evento B: Possibile guadagno di \$3000 con probabilità 1.

Situazione 2

Evento C: Possibile perdita di \$4000 con probabilità 0,8.

Evento D: Possibile perdita di \$3000 con probabilità 1.

Secondo i due autori l'Evento B è quello maggiormente scelto nella Situazione 1, mentre l'Evento C è quello scelto con maggiore frequenza nella Situazione 2. Nella Situazione 1 l'utilità attesa è maggiore di quella dell'Evento B, ma gli agenti economici preferiscono un guadagno sicuro a uno incerto, essendo quindi avversi al rischio. Tale evidenza si capovolge quando l'agente economico viene posto di fronte ad una perdita sicura, nel cui caso diventa propenso al rischio.

Quanto verrà fatto d'ora in poi è analizzare la relazione di lungo periodo tra prezzi spot e futures del petrolio tramite la regressione quantilica, tenendo presente quanto affermato nella teoria del prospetto, la quale può essere vista come giustificazione teorica di una relazione di lungo periodo non costante tra i prezzi spot e i futures per diverse scadenze dei contratti. Come riportato in Lee e Zeng (2011) da Gennaio a Dicembre 2007, periodo in cui i prezzi del West Texas Intermediate (WTI) hanno superato i massimi storici, i prezzi spot sono aumentati da \$57,35 a \$99,44 al barile, mentre i futures a 1 mese sono passati da \$58,14 a \$95,98 al barile. In questo intervallo di tempo un incremento dell'1% nei prezzi futures a 1 mese corrispondeva a un aumento dell'1,58% dei prezzi spot, mentre, dal 1986 al 2006, i prezzi spot erano aumentati, mediamente, dell'1,10% per un incremento dell'1% nei futures. Sarebbe quindi che a prezzi più elevati corrisponda una maggior sensibilità nella relazione tra prezzi spot e futures. L'analisi di cointegrazione condotta in questo elaborato permette di verificare se ciò sia o meno vero.

L'elaborato è organizzato come segue: nel Capitolo 2 si analizzerà la relazione di lungo periodo tra i prezzi spot e futures a diverse frequenze (giornaliera e settimanale) del West Texas Intermediate (WTI) con la modellazione VECM (Vector Error Correction Model) proposta da Johansen (1991,1995). Nel verificare la stazionarietà delle serie storiche utilizzate si useranno diversi test di radice unitaria e un test di stazionarietà. Particolare attenzione sarà rivolta nell'evidenziare l'importanza della variabile macroeconomica (prezzo del petrolio) oggetto dello studio, mostrando quale sia stata l'influenza dei principali avvenimenti geopolitici sui prezzi spot e futures nel periodo di riferimento. Nel Capitolo 3, dopo aver verificato che le serie oggetto di studio sono linearmente cointegrate, si applicherà la regressione quantilica alle serie di interesse, evidenziando i principali risultati e le principali differenze rispetto ad una modellazione standard. Nel Capitolo 4 si verificherà la stazionarietà dei residui di cointegrazione ottenuti con il metodo dei minimi quadrati ordinari dinamici e con la regressione quantilica. Nel secondo caso si userà il cosiddetto test robusto di cointegrazione proposto in Xiao (2009). Nel Capitolo 5 si analizzerà la presenza o meno di relazioni di causalità usando dapprima un approccio parametrico, dopodiché alle serie di interesse sarà applicato il test non parametrico per la causalità secondo Granger proposto da Diks e Panchenko (2006). Infine si vedrà, tramite un test parametrico, se le relazioni di causalità cambino o meno al variare del quantile di interesse.

Tutte le analisi condotte sono state fatte per mezzo dei *software* statistici R (R Core Team, 2012), in parte utilizzando funzioni già implementate e in parte creandone di nuove, e STATA.

2. Analisi di cointegrazione lineare.

In questo capitolo verranno illustrati i risultati della stima del modello VECM (Vector Error Correction Model) ottenuto a partire dai prezzi spot e futures del West Texas Intermediate (WTI), sia nel caso di dati a frequenza giornaliera che settimanale. Dapprima verrà presentata la variabile macroeconomica oggetto dello studio, ovvero il WTI, ed i motivi per i quali è così importante a livello mondiale. Si mostrerà inoltre come alcuni rilevanti eventi geopolitici abbiano un impatto sulla struttura spot-futures. Infine si sposterà l'attenzione sulle diverse serie oggetto dello studio, presentandone innanzitutto delle statistiche descrittive e, in un secondo momento, dei test di radice unitaria ed un test di stazionarietà.

2.1. Dati utilizzati.

Come detto in precedenza, l'obiettivo principale di questo lavoro è quello di andare ad analizzare la relazione tra i prezzi spot e futures del WTI, che viene "scambiato" nel New York Mercantile Exchange (NYMEX). I dati utilizzati provengono da Bloomberg e sono serie giornaliere e settimanali dei prezzi spot e futures del WTI per un periodo di tempo che va dal 2 Gennaio 1986 al 6 Luglio 2009. I prezzi futures considerati sono relativi a quattro differenti scadenze del contratto, cioè 1, 2, 3 e 4 mesi. Nel caso dei dati giornalieri ciascun contratto scade il terzo giorno lavorativo prima del 25esimo giorno del mese antecedente quello della consegna. Nel caso in cui il 25esimo giorno del mese non sia un giorno lavorativo, allora si fa riferimento al quarto giorno lavorativo prima del 25esimo giorno del mese. Per i dati a frequenza settimanale si è considerato l'ultimo prezzo della settimana sia per i prezzi spot che per quelli futures.

Nel caso di contratti futures su *commodities* essendo beni materiali nelle contrattazioni a termine si pongono dei problemi di stoccaggio, deperibilità nonché trasporto al luogo di consegna. È usuale distinguere tra beni di investimento (oro, argento, etc.) e beni di consumo (petrolio, etc.). Per i secondi il detenerli potrebbe essere un vantaggio, per approfittare di eventuali carenze sul mercato piuttosto che per utilizzarli in processi produttivi o altri motivi. Pertanto nella relazione spot-futures si dovrà tenere conto anche dei costi di stoccaggio (stimati proporzionalmente ad un tasso c) e del cosiddetto *convenience yield* y , che è una stima dei vantaggi derivanti dalla detenzione fisica del bene. Come riportato in Hull (2006) se valgono le seguenti condizioni:

- a. non esistono costi di transazione;
- b. tutti i profitti sono soggetti alla stessa aliquota fiscale;
- c. il denaro può essere dato e preso a prestito allo stesso tasso privo di rischio;
- d. le opportunità di arbitraggio vengono sfruttate non appena si presentano.

Indicati con S_0 e F_0 i prezzi spot e futures della *commodity* al tempo attuale e sia T la scadenza del contratto, al valore delle quattro condizioni sopra riportate, dovrebbe essere vera la seguente relazione in equilibrio

$$F_0 = S_0 e^{(r+c-y)T},$$

dove r è il tasso di interesse annuo privo di rischio (composto continuamente), valido per un investimento che scade alla data di consegna (tra T anni).

2.2. Il West Texas Intermediate.

Dopo questa breve parentesi sui dati utilizzati si presenta la variabile macroeconomica oggetto dello studio: il West Texas Intermediate (WTI). Il WTI, noto anche come *Texas Light Sweet*, è una delle qualità di petrolio più commercializzate a livello mondiale. È definito Light per una gravità API¹ (American Petroleum Institute) minore rispetto ad altre qualità di greggio ed è definito Sweet per la bassa percentuale di solfuri contenuti, minore del 5%. Il WTI viene prodotto e raffinato soprattutto nella parte Sud-Ovest degli Stati Uniti e viene stoccato nella cittadina di Cushing, in Oklahoma. Spesso il WTI viene confuso con il Brent, che differisce sia dal punto di vista della qualità (è meno light e meno sweet) che del luogo di produzione, essendo per la maggior parte estratto nel Mare del Nord. Negli ultimi anni si è assistito ad un aumento dello *spread* tra il prezzo del Brent e quello del WTI (nonostante sia di qualità superiore), fenomeno iniziato a partire dal 2010 e culminato l'11/10/2011 con uno *spread* di \$27.88. Nella Figura 2.1 sono rappresentati i grafici delle serie dei prezzi del Brent e del WTI degli ultimi 5 anni.

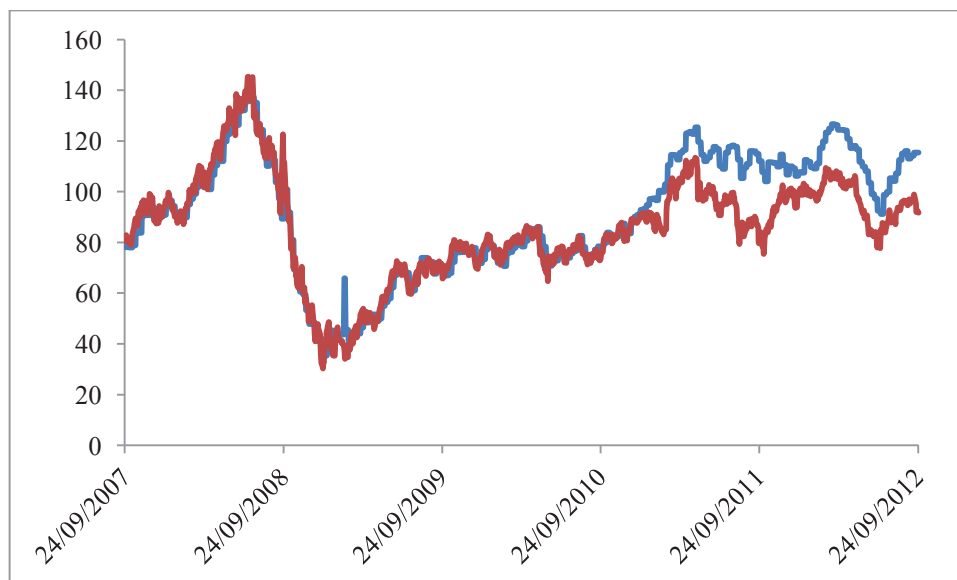


Figura 2.1. Prezzi giornalieri al barile (\$/bbl) del WTI e del Brent negli ultimi 5 anni. La linea rossa rappresenta l'evoluzione del prezzo del WTI, la linea blu del Brent (fonte: Thomson Reuters Datastream)

¹ La densità API va a definire quanto una particolare qualità di petrolio sia più o meno densa dell'acqua. Per approfondimenti si rimanda a Deutsche Bank (2010)

Il Brent costituisce, insieme al WTI, uno dei principali *benchmark* a livello mondiale sul quale vengono prezzate altre tipologie di greggio, come il petrolio libico, quello saudita, etc. . Lo *spread* tra i prezzi del Brent e del WTI può essere spiegato con le seguenti motivazioni: 1) per il WTI non si ha una struttura distributiva adeguata e quindi, una volta arrivato a Cushing, si ha un "cono di bottiglia". Gli americani consumano molto altro petrolio light, che arriva dal Texas e viene venduto come Light Louisiana Sweet; 2) il WTI è soggetto alla domanda proveniente solamente dal continente americano, mentre il Brent viene venduto anche nelle aree a maggiore domanda, come Cina ed India; 3) la produzione di Brent nel Mare del Nord è in costante declino negli ultimi anni, trattandosi di pozzi maturi. A tal proposito si può andare a vedere la Figura 2.2 in cui viene riportata la produzione giornaliera di petrolio Brent nel Mare del Nord con il numero di barili prodotti al giorno come unità di misura.

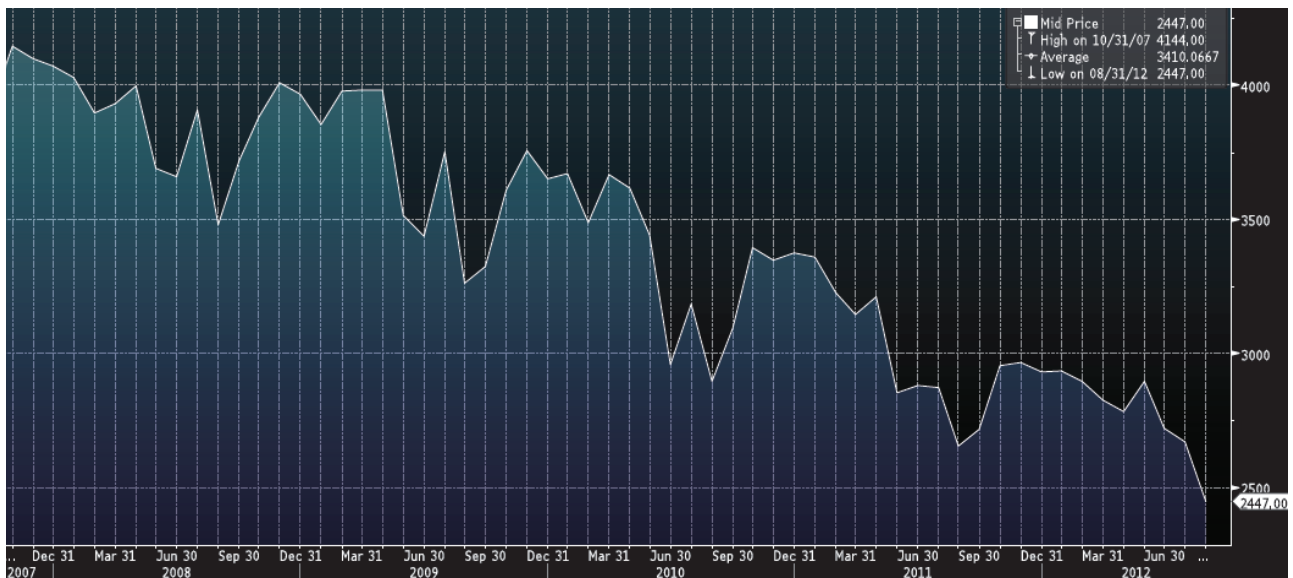


Figura 2.2. La produzione giornaliera (bbl/g) di Brent nel Mare del Nord negli ultimi cinque anni (*fonte: Bloomberg*)

4) È molto difficile esportare il WTI verso l'Asia ed il Pacifico in quanto, oltre alla carente struttura distributiva, si hanno elevati costi di trasporto, che possono giustificare parte del premio a cui attualmente è scambiato il Brent (nell'ordine di \$13-15 al barile); 5) l'offerta di greggio negli Stati Uniti è costantemente aumentata a partire dal 2008, in seguito allo sviluppo di tecniche non convenzionali di estrazione: in tal modo si è creato un sostituto più economico da raffinare rispetto al light sweet. Le stesse tecniche hanno portato alla scoperta di ampi giacimenti di gas, che si sta gradualmente sostituendo al petrolio per molti utilizzi. Nei prossimi anni la creazione di un'infrastruttura distributiva più efficiente permetterà di decongestionare Cushing, normalizzando lo spread tra WTI e Brent.

2.3. L'impatto di avvenimenti macroeconomici recenti sul prezzo del WTI.

Nel paragrafo precedente si è iniziato a spiegare il motivo per il quale il WTI sia così importante a livello globale. Si possono ora andare a vedere i principali avvenimenti geopolitici che hanno

influenzato in maniera diretta o indiretta il suo prezzo per l'intervallo di tempo considerato, riassunti nella Tabella 2.1, come riportato in Deutsche Bank (2010).

Anno	Prezzo WTI (\$/bbl)	Produzione mondiale petrolio (milioni bbl/g)	Avvenimento	Descrizione
1986	27	60	Caduta dei prezzi Eccesso di offerta	Eccesso di offerta OPEC - prezzo del petrolio crolla da \$29/bbl a \$10/bbl
1991	30	65	Prima Guerra del Golfo	Iraq invade Kuwait e viene rapidamente sconfitta dagli Stati Uniti, il prezzo del petrolio tocca il \$40/bbl
1998-2001			Fusioni tra grandi compagnie integrate	BP-Amoco-Arco, Exxon-Mobil, Chevron-Exxon, Conoco-Philips, Total-Elf-Fina
1998			Crollo del prezzo del petrolio	Crisi asiatica fa collassare il prezzo del petrolio
2003	32	77	Seconda Guerra del Golfo	Seconda guerra in Iraq
2003-2008			Repentino aumento prezzo del petrolio	Guerra civile in Iraq, inasprirsi della tensione nucleare in Iran, aumento della domanda da parte dei Paesi emergenti: il prezzo del petrolio arriva a \$150/bbl
2009			Collasso dei prezzi	La crisi finanziaria globale fa precipitare la domanda di petrolio: i prezzi crollano al di sotto dei \$33/bbl

Tabella 2.1. I principali eventi macroeconomici che hanno influenzato il prezzo del WTI dal 1986 al 2009 (fonte: Deutsche Bank (2010))

Si può ora considerare l'effetto di questi avvenimenti sui prezzi spot e futures (giornalieri) del WTI per il periodo di riferimento. La Figura 2.3 rappresenta il rapporto tra il prezzo spot ed il prezzo futures relativo al contratto con scadenza ad un mese.

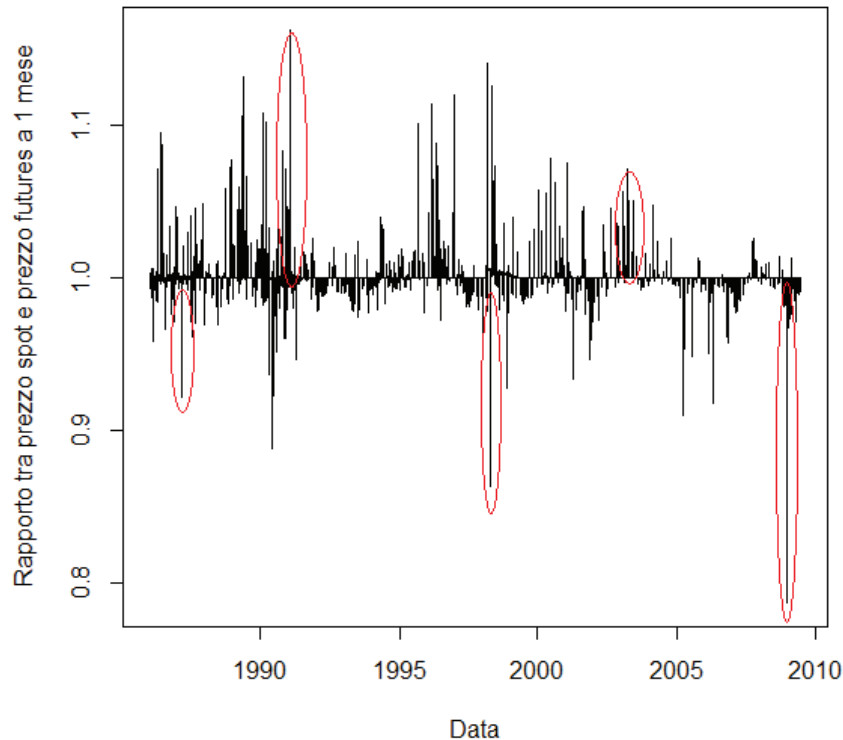


Figura 2.3. Rapporto tra prezzi spot e futures a 1 mese del WTI per il periodo di riferimento

Nella Figura 2.3 si sono evidenziati i picchi e le gole in corrispondenza degli eventi indicati nella Tabella 2.1. Negli anni 1986-1987 si ha la prima serie di picchi e gole: come si può evincere dalla Tabella 2.1 nel 1986 l'eccesso di offerta di greggio a livello globale ha provocato un crollo dei prezzi spot, causando quello che è stato definito come "contro-shock petrolifero". La ragione del crollo delle quotazioni è ascrivibile al comportamento dei concorrenti OPEC, non disposti a rivedere verso il basso il loro livello di offerta, con l'Arabia Saudita che aveva quasi raddoppiato la propria produzione. La gola evidenziata si ha in corrispondenza del 19 Ottobre 1987, altresì noto come il "Lunedì nero", quando i mercati di tutto il mondo hanno subito un improvviso crollo (Wall Street ha registrato una perdita del 22,61%). Nel periodo di tempo che va dal 1990 al 1992 si può notare un'elevata volatilità nei prezzi, caratterizzata da un susseguirsi di picchi e gole, indice delle forti tensioni a livello globale prima e dopo la Prima Guerra del Golfo. Si è messo in evidenza il picco relativo all'anno 1991, in cui ha inizio la Prima Guerra del Golfo. Si ha un forte apprezzamento del prezzo spot nei confronti del futures a un mese, a testimonianza della paura legata alla possibile diminuzione della produzione del greggio nell'area del conflitto, in cui erano e sono presenti alcuni dei maggiori produttori a livello mondiale. Si è poi evidenziata la gola nell'anno 1998, che viene dopo una serie di picchi, segnali di un continuo aumento del prezzo del petrolio. Essa si può spiegare con il crollo del prezzo del greggio dovuto alla crisi asiatica: molto interessante è notare come questa gola sia immediatamente seguita da due picchi di rilevante entità, segnali di grande incertezza a livello globale per la forte recessione dell'Est Asiatico. Si sono evidenziati poi i picchi corrispondenti alla Seconda Guerra del Golfo (Marzo 2003), che si va ad insinuare all'interno di un periodo ad elevata volatilità dei prezzi. Infine è molto importante notare quale sia l'impatto della crisi finanziaria globale, iniziata nell'autunno del 2008, che va a provocare un fortissimo calo della domanda globale di greggio, con conseguente crollo dei prezzi spot. Altro elemento da osservare è la presenza di *volatility clustering*, ossia l'alternarsi di periodi a più alta e a

più bassa volatilità nella relazione tra spot e futures a un mese. Tralasciando i casi intermedi si può ora rappresentare il rapporto tra il prezzo spot ed il prezzo futures relativo al contratto con scadenza a quattro mesi, illustrato nella figura sottostante.

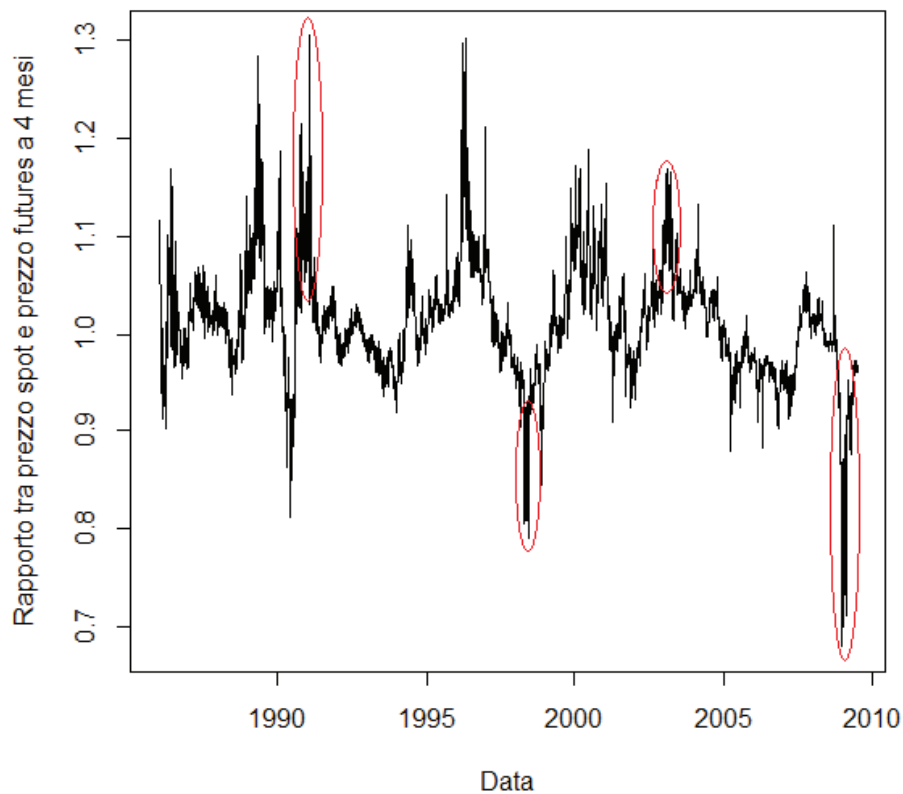


Figura 2.4. Rapporto tra prezzi spot e futures a 4 mesi del WTI per il periodo di riferimento

Nella Figura 2.4 i picchi e le gole sono molto più evidenti di quanto non lo fossero nella Figura 2.3. Interessante è notare come la prima gola, relativa al "Lunedì nero" nel 1987, sia di molto ridotta rispetto alla Figura 2.3. Ciò è segnale di come il crollo nei mercati azionari sia stato rapidamente assorbito e abbia sortito un minor effetto nei prezzi, il che è dovuto anche a una scadenza del contratto futures maggiore di prima. Nella Figura 2.4 si nota inoltre come l'aggiustamento dei prezzi futures a quattro mesi ai movimenti dei prezzi spot sia molto più lento rispetto a quanto rappresentato nella Figura 2.3, il che provoca un alternarsi di picchi e gole meno repentino del caso precedente, quindi una maggiore persistenza nella relazione tra prezzi spot e futures a più lungo termine.

2.4. Analisi descrittive.

Finora si è presentata la variabile macroeconomica di interesse e si è mostrato come alcuni dei più importanti eventi geopolitici della storia recente abbiano influito sulla struttura spot-futures. Si presentano ora alcune analisi descrittive condotte sulle serie di interesse, sia nel caso di dati a frequenza giornaliera che settimanale. Come operazione preliminare si è preso il logaritmo naturale di tutte le serie originarie, denotando con LnS_t e $LnFi_t$ i logaritmi naturali dei prezzi spot e dei futures con scadenza del contratto a i mesi ($i=1, 2, 3, 4$) al tempo t . Di volta in volta sarà chiaro se i dati utilizzati sono a frequenza giornaliera o settimanale.

Nella Figura 2.5 sono rappresentati i logaritmi dei prezzi (giornalieri) spot e futures per il periodo di riferimento.

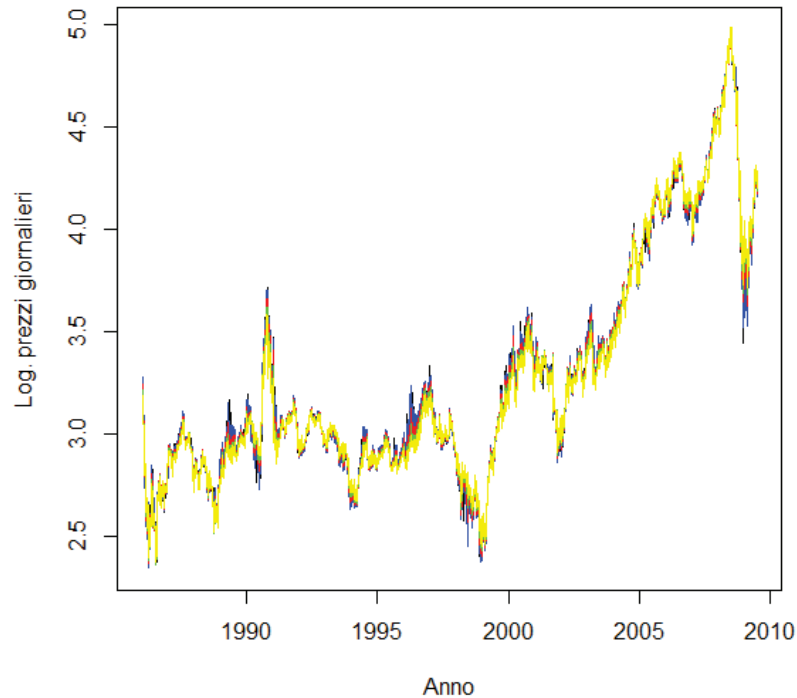


Figura 2.5. Andamento dei logaritmi dei prezzi spot e futures giornalieri del WTI per il periodo di riferimento. La linea nera contraddistingue il logaritmo del prezzo spot, quella blu il logaritmo del prezzo futures a un mese, quella rossa il logaritmo del prezzo futures a 2 mesi, quella verde il logaritmo del prezzo futures a 3 mesi e quella gialla il logaritmo del prezzo futures a 4 mesi

Dalla Figura 2.5 si nota come il livello medio della serie dei logaritmi del prezzo spot del WTI cambi al variare del tempo, indice della non stazionarietà della serie considerata. Inoltre il processo generatore dei dati non appare essere caratterizzato dalla presenza di un trend deterministico: questo aspetto verrà meglio chiarito nel Paragrafo 2.5, quando verranno presentati i risultati dei test di radice unitaria e del test di stazionarietà sulle serie in questione. Le stesse considerazioni valgono anche nel caso della serie dei logaritmi dei prezzi futures, che hanno un andamento molto simile a quello del logaritmo del prezzo spot.

Nella Figura 2.6 sono rappresentati i logaritmi dei prezzi (settimanali) spot e futures per il periodo di riferimento.

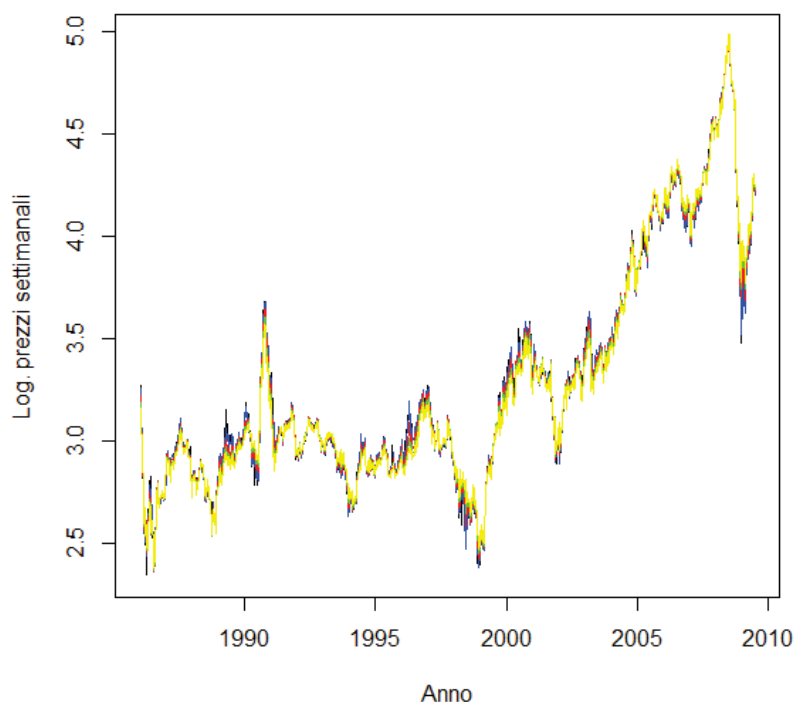


Figura 2.6. Andamento dei logaritmi dei prezzi spot e futures settimanali del WTI per il periodo di riferimento. La linea nera contraddistingue il logaritmo del prezzo spot, quella blu il logaritmo del prezzo futures a un mese, quella rossa il logaritmo del prezzo futures a 2 mesi, quella verde il logaritmo del prezzo futures a 3 mesi e quella gialla il logaritmo del prezzo futures a 4 mesi

Le evidenze notate in Figura 2.5 valgono anche qualora si considerino dati a frequenza settimanale.

Nella Tabella 2.2 si presentano alcune statistiche descrittive di base per le serie dei logaritmi dei prezzi considerate (sia a frequenza giornaliera che settimanale).

	LnS	$LnF1$	$LnF2$	$LnF3$	$LnF4$
<i>Dati giornalieri</i>					
Num. Campionaria	5849	5849	5849	5849	5849
Minimo	2,342	2,344	2,355	2,359	2,371
Massimo	4,979	4,979	4,983	4,984	4,987
Media	3,282	3,282	3,279	3,275	3,271
Varianza	0,295	0,296	0,299	0,301	0,302
<i>Dati settimanali</i>					
Num. Campionaria	1227	1227	1227	1227	1227
Minimo	2,342	2,379	2,355	2,366	2,378
Massimo	4,979	4,979	4,983	4,984	4,986
Media	3,281	3,280	3,277	3,274	3,270
Varianza	0,296	0,296	0,299	0,301	0,303

Tabella 2.2. Alcune statistiche descrittive delle serie di interesse a frequenza giornaliera e settimanale

Le serie giornaliere e settimanali hanno caratteristiche molto simili quando si considerano media, minimo, massimo e varianza. L'unica differenza rilevante riguarda la diversa numerosità campionaria (motivo per cui si è deciso di usare serie a frequenza minore).

2.5. Analisi della stazionarietà.

Come evidenziato nelle Figure 2.5 e 2.6, sia nel caso delle serie a frequenza giornaliera che settimanale il processo generatore dei dati appariva essere non stazionario. Adesso, con dei test di radice unitaria (in cui l'ipotesi nulla è che il processo generatore dei dati sia caratterizzato da una radice unitaria) e un test di stazionarietà (in cui l'ipotesi nulla è che il processo generatore sia stazionario), si può verificare se ciò sia o meno valido.

2.5.1. Il test di Dickey-Fuller.

Il test di radice unitaria più conosciuto è quello di Dickey-Fuller. La regressione utilizzata in tale test è

$$\Delta y_t = \boldsymbol{\beta}' \mathbf{D}_t + \gamma y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} b_j \Delta y_{t-j} + a_t,$$

dove il termine di errore a_t è la realizzazione di un processo rumore bianco (*white noise*). Nella regressione $\boldsymbol{\beta}$ è un vettore di parametri costanti e \mathbf{D}_t è un vettore di termini deterministici, pertanto il termine $\boldsymbol{\beta}' \mathbf{D}_t$ coglie la parte deterministica del processo generatore dei dati. Per la scelta del numero dei ritardi p da aggiungere alla regressione si è usata la procedura suggerita da Ng e Perron (2001).

Per verificare la presenza di una radice unitaria il sistema di ipotesi da usare è:

$$\begin{cases} H_0: \gamma = 0 \\ H_1: \gamma < 0 \end{cases}$$

Nella Tabella 2.3 sono riportati i diversi valori assunti dalla statistica test con i relativi p-value, sia nel caso di dati a frequenza giornaliera che settimanale.

	Dati giornalieri		Dati settimanali	
	Livello	Diff.prima	Livello	Diff.prima
<i>LnS</i>	-1,528	-76,700 **	-1,477	-39,961 **
<i>LnF1</i>	-1,470	-77,616 **	-1,310	-37,827 **
<i>LnF2</i>	-1,158	-76,347 **	-1,068	-36,818 **
<i>LnF3</i>	-0,995	-76,287 **	-0,901	-36,425 **
<i>LnF4</i>	-0,877	-77,031 **	-0,766	-36,262 **

Tabella 2.3. Risultati dell'applicazione del test di Dickey-Fuller alle serie di interesse. (**) denota il rifiuto dell'ipotesi nulla ad un livello di significatività del 5%

Nella Tabella 2.3 si nota come le serie considerate siano tutte integrate di ordine 1, d'ora in poi I(1). Il test ADF condotto sulle differenze prime permette di escludere ordini di integrazione superiori. Sulla base dei test condotti si può affermare che il processo generatore dei dati per tutte e cinque le serie considerate, sia a frequenza giornaliera che settimanale, è I(1) senza drift.

2.5.2. Il test di Phillips-Perron.

Il test di Phillips-Perron (PP) differisce dal test ADF principalmente nel modo con cui tratta l'autocorrelazione seriale e l'eteroschedasticità negli errori. La regressione utilizzata nel test PP è

$$\Delta y_t = \beta' D_t + \gamma y_{t-1} + u_t,$$

dove u_t è I(0) e può essere eteroschedastico. La componente $\beta' D_t$ è definita come nel test di Dickey-Fuller.

Anziché approssimare una struttura ARMA degli errori con un modello parametrico AR (come viene fatto nel test ADF), il test PP corregge per l'autocorrelazione seriale e (nel caso servisse) l'eteroschedasticità nell'errore u_t modificando direttamente e non parametricamente la statistica $\tau_{ADF,\gamma}$ del test ADF. Il fattore di correzione impiegato dipende dal parametro incognito

$$\lambda^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \gamma(i)$$

e $\gamma(i)$ è la funzione di autocovarianza del processo stazionario u_t . λ^2 viene stimato a partire da

$$\hat{\lambda}^2 = \sum_{i=-T+1}^{T-1} K(i) * \hat{\gamma}(i),$$

dove $K(i)$ è una funzione kernel. Il kernel originariamente proposto da Phillips e Perron è quello di Bartlett, dato da

$$K(i/m) = \begin{cases} 1 - \frac{|i|}{m}, & \text{se } |i| < m \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove m è un parametro di troncamento spesso fissato pari a $m = \lfloor 4 * (T/100)^{2/9} \rfloor$. Indicando con τ_{PP} la statistica PP si dimostra che, sotto l'ipotesi nulla $H_0: \gamma = 0$, ha la stessa distribuzione asintotica della statistica ADF. Sulla base di quanto visto finora il test PP è robusto rispetto a forme di eteroschedasticità dell'errore. Si può ora vedere la Tabella 2.4, in cui si hanno i diversi valori assunti dalla statistica test con i relativi p-value, sia nel caso di dati a frequenza giornaliera che settimanale.

	Dati giornalieri		Dati settimanali	
	Livello	Diff.prima	Livello	Diff.prima
LnS	-1,356	-77,016 **	-1,437	-39,673 **
$LnF1$	-1,328	-77,841 **	-1,386	-37,714 **
$LnF2$	-1,154	-76,349 **	-1,217	-36,820 **
$LnF3$	-1,017	-76,289 **	-1,090	-36,506 **
$LnF4$	-0,897	-77,030 **	-0,985	-36,411 **

Tabella 2.4. Risultati dell'applicazione del test di Phillipps e Perron alle serie di interesse. (**) denota il rifiuto dell'ipotesi nulla ad un livello di significatività del 5%

Si ottengono le stesse indicazioni del test ADF, cioè le serie considerate sono tutte I(1). Il test PP condotto sulle differenze prime permette di escludere ordini di integrazione superiori. Sulla base dei test condotti si può affermare che il processo generatore dei dati per tutte e cinque le serie considerate, sia a frequenza giornaliera che settimanale, è I(1) senza drift.

2.5.3. Il test di Elliott-Rothenberg-Stock.

I test di radice unitaria visti in precedenza mostrano scarsa potenza nel caso in cui il processo generatore dei dati è un AR(1) con coefficiente autoregressivo prossimo a uno. Il test proposto in Elliot et al. (1996) è costruito a partire dalla seguente regressione

$$\Delta y_t^d = \alpha_0 y_{t-1}^d + \alpha_1 \Delta y_{t-1}^d + \dots + \alpha_p \Delta y_{t-p}^d + \varepsilon_t,$$

in cui ε_t è un white noise e y_t^d sono i dati detrendizzati (o depurati dalla media) ottenuti a partire dalla seguente regressione ausiliaria

$$y_t^d = y_t - \beta' z_t.$$

Nel nostro caso, dato che si vuole testare o meno la presenza del drift allora $z_t = \mathbf{1}$. Il test di radice unitaria a questo punto si basa sulla verifica del sistema di ipotesi

$$\begin{cases} H_0: \alpha_0 = 0 \\ H_1: \alpha_0 < 0 \end{cases}$$

La statistica test è data da

$$P_t = \frac{S(a = \bar{a}) - \bar{a}S(a = 1)}{\hat{\omega}^2}.$$

$S(a = \bar{a})$ e $S(a = 1)$ sono le somme dei quadrati dei residui ottenute a partire dalla regressione dei minimi quadrati ordinari di \check{y}_a su \check{Z}_a , dove

$$\check{y}_a = (\check{y}_1, \check{y}_2, \dots, \check{y}_T)' = (y_1, y_2 - ay_1, \dots, y_T - ay_{T-1})'$$

$$\check{Z}_a = (\check{z}_1, \check{z}_2, \dots, \check{z}_T)' = (z_1, z_2 - az_1, \dots, z_T - az_{T-1})'.$$

Per una stima della varianza di lungo periodo ω^2 si rimanda a Elliot et al. (1996), nel quale sono presentati anche i valori critici del test. Per i test fatti, sulla base di quanto affermato dai tre autori, si è posto $\bar{a} = -7$.

Nella Tabella 2.5 si possono vedere i risultati dell'applicazione ai dati del test ERS.

	Dati giornalieri		Dati settimanali	
	Livello	Diff.prima	Livello	Diff.prima
<i>LnS</i>	4,950	0,035 **	6,011	0,216 **
<i>LnF1</i>	5,343	0,034 **	6,825	0,181 **
<i>LnF2</i>	7,199	0,039 **	8,368	0,217 **
<i>LnF3</i>	8,706	0,040 **	9,911	0,225 **
<i>LnF4</i>	10,234	0,041 **	11,481	0,229 **

Tabella 2.5. Risultati dell'applicazione del test di Elliott-Rothenberg-Stock alle serie di interesse. (**) denota il rifiuto dell'ipotesi nulla ad un livello di significatività del 5%

Anche in questo caso il test applicato sui livelli suggerisce la presenza di una radice unitaria per tutte e cinque le serie considerate, mentre l'applicazione alle differenze prime fa escludere ordini di integrazione superiori al primo.

2.5.4. Il test di Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin.

Viene ora presentato un test di stazionarietà, dopo tre test di radice unitaria. In particolare Kwiatkowski et al. (1992), d'ora in poi KPSS, hanno proposto un test di tipo LM per verificare se il processo sia trend-stazionario o stazionario nei livelli. Nel test KPSS si considera il seguente modello

$$y_t = \beta' D_t + r_t + u_t$$

$$r_t = r_{t-1} + \varepsilon_t,$$

dove r_t è un processo random walk, la componente $\beta' D_t$ è definita come nel test di Dickey-Fuller, u_t è I(0) (può essere eteroschedastico) e $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Il sistema di ipotesi è

$$\begin{cases} H_0: \sigma_\varepsilon^2 = 0 \\ H_1: \sigma_\varepsilon^2 > 0 \end{cases}$$

sotto l'ipotesi nulla y_t è stazionario.

Si può ricavare la statistica test. Per prima cosa si regredisce y_t su una costante, o su una costante più un trend, a seconda dell'ipotesi di stazionarietà che si vuole verificare. Si possono calcolare le somme parziali dei residui di regressione come

$$S_t = \sum_{i=1}^t \hat{u}_i, t = 1, 2, \dots, T.$$

La statistica test di ottiene da

$$LM = \frac{\sum_{t=1}^T S_t^2}{\hat{\sigma}_u^2},$$

dove $\hat{\sigma}_u^2$ è una stima della varianza di lungo periodo. Kwiatkowski et al. suggeriscono di usare una finestra di Bartlett, $\omega(s, l) = 1 - s/(l + 1)$ come funzione dei pesi ottimale per stimare la varianza di lungo periodo σ_u^2 , una cui stima, insieme ai valori critici per la statistica test, si può trovare in Kwiatkowski et al. (1992). Nella Tabella 2.6 si hanno i risultati del test KPSS applicato ai dati:

	Dati giornalieri		Dati settimanali	
	Livello	Diff.prima	Livello	Diff.prima
<i>LnS</i>	11,526 **	0,090	3,701 **	0,092
<i>LnF1</i>	11,545 **	0,093	3,707 **	0,093
<i>LnF2</i>	11,724 **	0,102	3,752 **	0,101
<i>LnF3</i>	11,825 **	0,112	3,775 **	0,109
<i>LnF4</i>	11,879 **	0,122	3,786 **	0,116

Tabella 2.6. Risultati dell'applicazione del test di Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin alle serie di interesse. (**) denota il rifiuto dell'ipotesi nulla ad un livello di significatività del 5%

Quest'ultimo test di stazionarietà ha permesso di rafforzare quanto si era evidenziato con i precedenti test, ovvero che il processo generatore dei dati è I(1) senza drift.

2.6. Analisi di cointegrazione: approccio di Johansen.

Finora si è visto come tutte e cinque le serie di interesse, sia a frequenza giornaliera che settimanale, siano I(1). Si può ora vedere se, nel lungo periodo, esiste una relazione tra i prezzi spot e futures al variare della lunghezza del contratto. Si analizzerà se le diverse serie sono cointegrate e per farlo si utilizzerà l'approccio suggerito da Johansen, di cui si darà una breve introduzione. Per approfondimenti si vedano Johansen (1991,1995) e Juselius (2007).

Si vuole verificare se la serie dei logaritmi dei prezzi spot sia cointegrata con la serie dei logaritmi dei prezzi futures a 1, 2, 3 e 4 mesi, rispettivamente. Dato che si considerano solo due variabili alla volta si potrà avere al massimo un trend stocastico comune.

Il primo passo della procedura di Johansen consiste nello stimare un modello VAR (Vector Autoregressive) per le serie di interesse, in quanto l'ordine del modello VECM che si andrà poi a stimare dipende dall'ordine del modello VAR di partenza. Un modello VAR di ordine p, d'ora in poi VAR(p), calcolato a partire dalle serie di interesse scritto in forma estesa è

$$\mathbf{y}_t = \Phi_0 + \Phi_1 \mathbf{y}_{t-1} + \dots + \Phi_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{u}_t, t = 1, \dots, T$$

dove:

$$-\mathbf{y}_t = \begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} LnS_t \\ LnFi_t \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3, 4;$$

- Φ_0 è un vettore (2x1) di costanti e Φ_i è una matrice (2x2), $i = 1, \dots, p$;

- $\mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} u_{1,t} \\ u_{2,t} \end{pmatrix}$ è un white noise a media nulla e con matrice di covarianza Σ , di dimensione (2x2).

Si può stimare un modello VAR(p) per le diverse coppie di variabili, nella Tabella 2.7 è riportato l'ordine p dei modelli stimati scelto sulla base del criterio di Hannan-Quinn (HQ), definito formalmente in Hannan e Quinn (1979).

	Freq. Giornaliera	Freq. Settimanale
<i>LnS-LnF1</i>	19	5
<i>LnS-LnF2</i>	18	4
<i>LnS-LnF3</i>	13	3
<i>LnS-LnF4</i>	10	3

Tabella 2.7. Scelta dell'ordine p del modello VAR al variare della frequenza di osservazione dei dati

Dalla Tabella 2.7 si può evidenziare come all'aumentare della lunghezza del contratto futures diminuisca l'ordine del modello VAR e si riduce, quindi, la persistenza della relazione tra la serie dei logaritmi del prezzo spot e quella dei logaritmi del futures di interesse. Interessante è poi notare come l'ordine decresca al diminuire della frequenza di osservazione, quindi anche della numerosità campionaria.

Prima di proseguire con l'analisi è fondamentale definire il modello VECM. Se \mathbf{y}_t è cointegrato di ordine 1, ovvero $\mathbf{y}_t \sim CI(1,1)$, allora, per il Teorema di Rappresentazione di Granger, ammette rappresentazione VECM, definita da

$$\Delta \mathbf{y}_t = \Pi \mathbf{y}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta \mathbf{y}_{t-j} + \mathbf{u}_t, \quad (1)$$

dove:

- $\Pi = \Phi_1 + \dots + \Phi_p - I_2$, con $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

- $\Gamma_j = -\sum_{i=j+1}^p \Phi_i$, con $j=1, \dots, (p-1)$.

Dopo aver stimato un modello VAR di ordine appropriato, si deve:

- determinare il rango della matrice Π , detto rango di cointegrazione, tramite procedure appropriate;
- stimare i parametri delle relazioni di lungo e breve periodo nella rappresentazione VECM.

Dato che si considerano due serie alla volta allora il rango di cointegrazione massimo sarà pari a 1, pertanto si dovranno verificare i seguenti sistemi di ipotesi²:

(a) $\begin{cases} H(0): rank(\Pi) = 0 \\ H(2): rank(\Pi) = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} H(1): rank(\Pi) = 1 \\ H(2): rank(\Pi) = 2 \end{cases}$

² (a) e (b) si definiscono sistemi di ipotesi "nidificati" in quanto $H(0) \subset H(1) \subset H(2)$

$$(c) \begin{cases} H(0): rank(\boldsymbol{\Pi}) = 0 \\ H(1): rank(\boldsymbol{\Pi}) = 1 \end{cases}$$

Sotto $H(0)$ si ha assenza di cointegrazione e le singole componenti di \mathbf{y}_t sono $I(1)$, sotto $H(2)$ si ha assenza di cointegrazione e le singole componenti di \mathbf{y}_t sono $I(0)$ e, infine, sotto $H(1)$ si ha presenza di cointegrazione e le singole componenti di \mathbf{y}_t sono $I(1)$. Per determinare il rango di cointegrazione si possono utilizzare due differenti test proposti da Johansen:

- Test della traccia. Per poter verificare i sistemi di ipotesi (a) e (b) si possono condurre dei test costruiti a partire dal rapporto di verosimiglianza (LR). In particolare per primo si verifica:

(a) la statistica LR in questo caso vale $LR(0/2) = -2(l(0) - l(2)) = -T[\log(1 - \hat{\lambda}_1) + \log(1 - \hat{\lambda}_2)]$, dove $l(0)$ è la funzione di log-verosimiglianza³ per il modello VECM di riferimento sotto $H(0)$ calcolata nel suo punto di massimo, che vale $l(0) \sim 0$. $l(2)$ è la funzione di log-verosimiglianza per il modello VECM di riferimento sotto $H(2)$ calcolata nel suo punto di massimo, che vale $l(2) \sim -\frac{T}{2}[\log(1 - \hat{\lambda}_1) + \log(1 - \hat{\lambda}_2)]$. $\hat{\lambda}_1$ e $\hat{\lambda}_2$ sono ottenuti a partire dalla minimizzazione di un'equazione caratteristica e sono tali che $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2$. La distribuzione asintotica di $LR(0/2)$ sotto $H(0)$ è non standard con valori critici tabulati, che dipendono dalla specificazione della componente deterministica. Se non si rifiuta $H(0)$ si ha assenza di cointegrazione, mentre se non si accetta $H(0)$ allora si verifica (b);

(b) la statistica LR in questo caso vale $LR(1/2) = -2(l(1) - l(2)) = -T[\log(1 - \hat{\lambda}_2)]$, dove $l(1)$ è la funzione di log-verosimiglianza per il modello VECM di riferimento sotto $H(1)$ calcolata nel suo punto di massimo, che vale $l(1) \sim -\frac{T}{2}[\log(1 - \hat{\lambda}_1)]$. La distribuzione asintotica di $LR(1/2)$ sotto $H(1)$ è non standard con valori critici tabulati, che dipendono dalla specificazione della componente deterministica. Nel caso in cui non si rifiuti $H(1)$ allora si ha presenza di cointegrazione.

- Test dell'autovalore massimo. Questo test si può utilizzare per verificare il sistema di ipotesi (c), la statistica utilizzata è $LR_{max}(0/1) = -T[\log(1 - \hat{\lambda}_1)]$, che sotto $H(0)$ ha distribuzione non standard, con valori critici tabulati.

Nella Tabella 2.8 si hanno i risultati dell'applicazione dei due diversi test alle serie di riferimento.

³ Tutte le funzioni di log-verosimiglianza sono calcolate sotto l'ipotesi $\mathbf{u}_t \sim GWN(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$

	Freq. Giornaliera		Freq. Settimanale	
	Test della traccia	Test dell'autovalore massimo	Test della traccia	Test dell'autovalore massimo
	<i>LnS-LnF1</i>		<i>LnS-LnF1</i>	
H0: r=0	206,29 **	204,10 **	185,84 **	183,45 **
H0: r≤1	2,19	2,19	2,39	2,39
	<i>LnS-LnF2</i>		<i>LnS-LnF2</i>	
H0: r=0	38,37 **	36,77 **	45,22 **	43,56 **
H0: r≤1	1,61	1,61	1,66	1,66
	<i>LnS-LnF3</i>		<i>LnS-LnF3</i>	
H0: r=0	37,73 **	36,40 **	41,47 **	40,22 **
H0: r≤1	1,34	1,34	1,24	1,24
	<i>LnS-LnF4</i>		<i>LnS-LnF4</i>	
H0: r=0	33,92 **	32,65 **	36,62 **	35,44 **
H0: r≤1	1,27	1,27	1,18	1,18

Tabella 2.8. Verifica della presenza di cointegrazione tramite il test della traccia e dell'autovalore massimo. r identifica il rango di cointegrazione, mentre (**) denota il rifiuto dell'ipotesi nulla ad un livello di significatività del 5%

Nella Tabella 2.8 si nota che per tutte e quattro le quattro coppie di serie considerate, a frequenza sia giornaliera che mensile, il rango della matrice Π è pari a 1, quindi le serie condividono un trend stocastico comune. Le serie sono cointegrate e, per il Teorema di rappresentazione di Granger, ammettono rappresentazione VECM descritta in (1).

Dato che le singole serie sono a coppie cointegrate allora la matrice Π può essere fattorizzata nel modo seguente

$$\Pi = \alpha\beta', \quad (2)$$

dove:

- α è la matrice dei fattori di aggiustamento (*factor loadings*), che regolano la velocità dell'aggiustamento verso l'equilibrio di lungo periodo. Il suo elemento di posto (i,j) descrive l'effetto della i-esima variabile sul j-esimo elemento di $\beta' y_{t-1}$, ovvero sulla relazione di cointegrazione. In questo elaborato, per ogni coppia di variabili considerata, α è un vettore di dimensione (2x1) di rango 1;

- β è la matrice di cointegrazione. In questo elaborato, per ogni coppia di variabili, β è un vettore di dimensione (2x1) di rango 1.

Sulla base della fattorizzazione (2) il modello VECM (1) diventa

$$\Delta y_t = \alpha\beta' y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta y_{t-j} + u_t.$$

Si pone ora un problema: la fattorizzazione $\Pi = \alpha\beta'$ non è unica, infatti, per ogni matrice non singolare H di dimensione (rxr), dove r è pari al rango di cointegrazione (quindi nell'elaborato H è uno scalare), si ha

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{H}\mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\beta}' = (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{H})(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{H}^{-1})')' = \boldsymbol{\alpha}^*\boldsymbol{\beta}^{*'}.$$

Per rendere unica la fattorizzazione $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ si è *normalizzato* il vettore $\boldsymbol{\beta}$ fissando, come vincolo di normalizzazione, il primo elemento di $\boldsymbol{\beta}$ pari a 1. Se $\mathbf{y}_t \sim CI(1,1)$ allora esiste un vettore di cointegrazione $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1 \beta_2)'$ per il quale vale la seguente relazione di cointegrazione

$$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_t = \beta_1 y_{1,t} + \beta_2 y_{2,t} \sim I(0).$$

Adottando la precedente regola di normalizzazione si ottiene

$$\boldsymbol{\beta}_c = (1 \beta_2^*)' = (1 -\beta_1^{-1}\beta_2)'$$

In seguito alla regola di normalizzazione precedente la rappresentazione VECM (1) diventa:

$$\Delta\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}_c'\mathbf{y}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \boldsymbol{\Gamma}_j \Delta\mathbf{y}_{t-j} + \mathbf{u}_t$$

Oppure, equazione per equazione (rappresentazione ECM)

$$\begin{aligned} \Delta y_{1,t} &= \alpha_1(y_{1,t-1} + \beta_2^* y_{2,t-1}) + \sum_{j=1}^{p-1} a_j \Delta y_{1,t-j} + \sum_{j=1}^{p-1} b_j \Delta y_{2,t-j} + u_{1,t}, \\ \Delta y_{2,t} &= \alpha_2(y_{1,t-1} + \beta_2^* y_{2,t-1}) + \sum_{j=1}^{p-1} c_j \Delta y_{1,t-j} + \sum_{j=1}^{p-1} d_j \Delta y_{2,t-j} + u_{2,t}. \end{aligned}$$

La rappresentazione ECM collega la relazione di lungo periodo, rappresentata dalla relazione di cointegrazione $(y_{1,t-1} + \beta_2^* y_{2,t-1})$, con la dinamica di breve periodo. In particolare essa descrive il meccanismo di aggiustamento verso l'equilibrio di lungo periodo, ovvero come le variabili si comportano quando deviano da esso. I parametri α_1 e α_2 descrivono la velocità di aggiustamento verso tale equilibrio.

Nelle Tabelle seguenti sono presentati i risultati della stima del modello VECM per le serie di interesse. In Tabella 2.9 si ha la stima dei coefficienti di cointegrazione, mentre in Tabella 2.10 si ha la stima dei coefficienti di aggiustamento. I risultati sono stati ottenuti adottando la normalizzazione presentata in precedenza, ovvero rispetto a *LnS*.

Freq. Giornaliera		Freq. Settimanale	
<i>LnS-LnF1</i>		<i>LnS-LnF1</i>	
<i>LnS</i>	<i>LnF1</i>	<i>LnS</i>	<i>LnF1</i>
1,000	-0,998 ** (0,001)	1,000	-0,998 ** (0,001)
<i>LnS-LnF2</i>		<i>LnS-LnF2</i>	
<i>LnS</i>	<i>LnF2</i>	<i>LnS</i>	<i>LnF2</i>
1,000	-0,985 ** (0,007)	1,000	-0,985 ** (0,007)
<i>LnS-LnF3</i>		<i>LnS-LnF3</i>	
<i>LnS</i>	<i>LnF3</i>	<i>LnS</i>	<i>LnF3</i>
1,000	-0,977 ** (0,012)	1,000	-0,977 ** (0,012)
<i>LnS-LnF4</i>		<i>LnS-LnF4</i>	
<i>LnS</i>	<i>LnF4</i>	<i>LnS</i>	<i>LnF4</i>
1,000	-0,968 ** (0,017)	1,000	-0,968 ** (0,017)

Tabella 2.9. Stima dei coefficienti di cointegrazione al variare della frequenza di osservazione per le quattro regressioni di interesse. I valori tra parentesi sono gli standard errors relativi ai coefficienti di cointegrazione. (**) denota il rifiuto dell'ipotesi di nullità del coefficiente ad un livello di significatività del 5%

Freq. Giornaliera		Freq. Settimanale	
<i>LnS-LnF1</i>		<i>LnS-LnF1</i>	
<i>LnS</i>	<i>LnF1</i>	<i>LnS</i>	<i>LnF1</i>
-0,469 ** (0,076)	-0,041 (0,075)	-1,321 ** (0,243)	-0,435 (0,320)
<i>LnS-LnF2</i>		<i>LnS-LnF2</i>	
<i>LnS</i>	<i>LnF2</i>	<i>LnS</i>	<i>LnF2</i>
-0,054 ** (0,013)	-0,017 (0,012)	-0,227 ** (0,060)	-0,087 (0,051)
<i>LnS-LnF3</i>		<i>LnS-LnF3</i>	
<i>LnS</i>	<i>LnF3</i>	<i>LnS</i>	<i>LnF3</i>
-0,030 ** (0,008)	-0,005 (0,007)	-0,132 ** (0,038)	-0,032 (0,030)
<i>LnS-LnF4</i>		<i>LnS-LnF4</i>	
<i>LnS</i>	<i>LnF4</i>	<i>LnS</i>	<i>LnF4</i>
-0,021 ** (0,006)	-0,003 (0,005)	-0,099 ** (0,030)	-0,019 (0,022)

Tabella 2.10. Stima dei coefficienti di aggiustamento al variare della frequenza di osservazione per le quattro regressioni di interesse. I valori tra parentesi sono gli standard errors relativi ai coefficienti di aggiustamento. Se si considera la relazione tra il logaritmo del prezzo spot e quello del prezzo futures a un mese allora si deve vedere "*LnS-LnF1*". Il valore posto sotto *LnS* è la stima del coefficiente di aggiustamento nel modello ECM in cui la differenza prima di *LnS* è la variabile dipendente. Allo stesso modo, il valore posto sotto *LnF1* è la stima del coefficiente di aggiustamento nel modello ECM in cui la differenza prima di *LnF1* è la variabile dipendente. E così via per tutte le altre relazioni di lungo periodo. (**) denota il rifiuto dell'ipotesi di nullità del coefficiente ad un livello di significatività del 5%

Prima di presentare i risultati delle Tabelle 2.9 e 2.10 è necessario fare una premessa su come si sono calcolati gli standard errors del coefficiente di aggiustamento e del coefficiente di cointegrazione. Nel caso in cui $\mathbf{u}_t \sim GWN(\mathbf{0}, \Sigma)$, si può scrivere la funzione di log-verosimiglianza per il modello VECM, da cui si ottengono le stime di massima verosimiglianza di α e β , tramite la procedura descritta in Juselius (2007). Lo stimatore di β è *super-consistente*, ovvero converge al vero valore del parametro ad una velocità maggiore della usuale, pari a \sqrt{T} . La sua distribuzione asintotica è non standard: è una distribuzione mistura di normali (o mistura gaussiana), con parametro di mistura che non dipende da β . Pertanto stimando consistentemente tale parametro si

può fare inferenza sui singoli coefficienti mediante gli usuali test *t-ratio*, che sotto l'ipotesi nulla sono asintoticamente condizionatamente gaussiani.

La distribuzione asintotica di $\hat{\alpha}$ è normale, pertanto l'inferenza su α può essere condotta in modo standard.

Le stime dei coefficienti di cointegrazione risultano essere tutte significativamente diverse da zero ad un livello del 5%. Lo stesso discorso non vale quando si considerano i coefficienti di aggiustamento, che sono significativamente diversi da zero nei modelli ECM per *LnS*, mentre non lo sono quando si considera il modello ECM per *LnF1*, *LnF2*, *LnF3* e *LnF4*, rispettivamente. Ciò vale indipendentemente dalla frequenza di osservazione.

Nella Tabella 2.9 si nota come nel lungo periodo i prezzi spot ed i futures si comportano (quasi) allo stesso modo, dato che i coefficienti di cointegrazione stimati sono, per tutte e quattro le relazioni di cointegrazione, prossimi a 1. Pertanto, nel lungo periodo, si ha una relazione molto forte tra prezzi spot e futures del WTI, come suggerito dalla teoria economica. Tuttavia tale relazione si "indebolisce" all'aumentare della lunghezza del contratto futures e ciò vale indipendentemente dalla frequenza di osservazione.

Si possono considerare ora i coefficienti di aggiustamento stimati che, come detto in precedenza, descrivono la velocità di aggiustamento verso l'equilibrio di lungo periodo.

I modelli ECM stimati quando si considera la relazione *LnS-LnF1* sono, per dati a frequenza giornaliera

$$\Delta LnS_t = -0,469(LnS_{t-1} - 0,998LnF1_{t-1}) + \sum_{j=1}^{p-1} \hat{a}_j \Delta LnS_{t-j} + \sum_{j=1}^{p-1} \hat{b}_j \Delta LnF1_{t-j} + u_{1,t},$$

$$\Delta LnF1_t = \sum_{j=1}^{p-1} \hat{c}_j \Delta LnS_{t-j} + \sum_{j=1}^{p-1} \hat{d}_j \Delta LnF1_{t-j} + u_{2,t}.$$

Avere un coefficiente di aggiustamento pari a -0,469 vuol dire che, dato un errore di disequilibrio positivo (il prezzo spot è cresciuto di più del prezzo futures rispetto alla relazione di equilibrio al tempo t-1), allora al tempo t il prezzo spot si corregge di una percentuale tale da ridurre il disequilibrio del 47% circa mediamente. Interessante è notare che il coefficiente di aggiustamento relativo al prezzo futures a 1 mese non risulta essere significativamente diverso da zero, rendendo il prezzo futures esogeno rispetto alla relazione di cointegrazione. Considerando i dati settimanali con un disequilibrio positivo al tempo t-1 al tempo t il prezzo spot si corregge di una percentuale tale da ridurre il disequilibrio maggiore di quella ottenuta con i dati a frequenza giornaliera. La differenza può essere spiegata dal diverso intervallo di tempo che si ha tra il tempo t-1 e il tempo t nel caso in cui i dati siano a frequenza giornaliera o settimanale.

Osservando gli altri coefficienti stimati in Tabella 2.10 si nota che all'aumentare della lunghezza del contratto futures diminuisce il coefficiente di aggiustamento, quindi anche la velocità di aggiustamento all'equilibrio di lungo periodo, relativo all'equazione ECM per i prezzi spot. Tale coefficiente è sempre maggiore quando si considerano dati a frequenza minore. Inoltre in tutti i casi i coefficienti di aggiustamento relativi ai prezzi futures alle diverse scadenze sono pari a zero. Il che

significa che nel lungo periodo, a fronte di un possibile squilibrio, l'equilibrio viene raggiunto grazie a movimenti dei prezzi spot.

3. Analisi di cointegrazione quantilica.

Finora si è ipotizzato che la relazione di lungo periodo tra i prezzi spot e i prezzi futures con diverse scadenze fosse costante rispetto ai diversi quantili. Si può vedere, mediante la cointegrazione quantilica, cosa accade qualora si ipotizzi una relazione che varia al variare del quantile di riferimento, come proposto in Xiao (2009).

3.1. La regressione quantilica.

Come affermato in Koenker (2005) la maggior parte degli studi condotti in ambito econometrico si concentra sull'analisi della media condizionata della variabile oggetto di studio. Ma, così come nelle analisi descrittive la valutazione della sola media condizionata limita l'analisi, lo stesso si può dire per il modello di regressione lineare. Sulla base di questa osservazione Koenker formula la propria teoria andando a generalizzare il modello di regressione lineare classico con una specificazione che permette di stimare interamente la distribuzione condizionata della variabile risposta a partire da un insieme di variabili esplicative.

Una qualunque variabile casuale Y continua (o discreta) si può caratterizzare a partire dalla sua funzione di ripartizione (continua a destra), definita come

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y).$$

Per ogni $\tau \in (0,1)$ il τ -esimo quantile di Y è dato da $\gamma_\tau \in R$ tale che

$$\Pr(Y < \gamma_\tau) \leq \tau \leq \Pr(Y \leq \gamma_\tau). \quad (3)$$

Se Y è una variabile casuale (d'ora in poi v.c.) continua, le probabilità nell'equazione (3) coincidono, mentre se Y è una v.c. discreta, le suddette probabilità definiscono un intervallo chiuso e ciò comporta che il quantile non sia unico, a differenza del caso precedente. Per convenzione allora si assume, indipendentemente dalla natura della v.c., che il quantile è sempre il più piccolo elemento nell'insieme delle soluzioni possibili. In particolare, sia $F_Y(y)$ la funzione di ripartizione di Y , allora la funzione del quantile (continua a sinistra) è

$$Q_Y(\tau) = F_Y^{-1}(y) = \inf\{y: F_Y(y) \geq \tau\}, \tau \in (0,1).$$

Tale funzione permette di ottenere il quantile τ -esimo non condizionato di Y andando a scegliere il valore più piccolo che rende continua a sinistra $Q_Y(\tau)$.

Si può ora definire un'importante proprietà della funzione appena introdotta. Come affermato in Koenker (2005), per una qualunque funzione h monotona crescente continua a sinistra si ha

$$\Pr(Y \leq Q_Y(\tau)) = \Pr(h(Y) \leq h(Q_Y(\tau))) = \tau.$$

Sia $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_T\}$ un campione casuale semplice, la funzione di ripartizione empirica $\hat{F}_Y(y)$ calcolata a partire dai dati è

$$\hat{F}_Y(y) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T I_{(-\infty, y]}(y_t), \quad y \in \mathbb{R},$$

dove $I_{(-\infty, y]}(y_t) = \begin{cases} 1, & \text{se } y_t \leq y \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$. Dato che $\hat{F}_Y(y)$ si distribuisce come una v.c. binomiale di dimensione n e parametro $F_Y(y)$, allora valgono le seguenti proprietà:

1. $E(\hat{F}_Y(y)) = F_Y(y)$, pertanto è uno stimatore non distorto della vera funzione di ripartizione;
2. $Var(\hat{F}_Y(y)) = \frac{1}{T} F_Y(y)(1 - F_Y(y))$;
3. sulla base delle due proprietà precedenti $\hat{F}_Y(y)$ è uno stimatore consistente di $F_Y(y)$, in quanto vale la condizione sufficiente per la consistenza (asintoticamente non distorto con varianza che tende a zero al tendere della numerosità campionaria all'infinito);
4. $\sqrt{T}(\hat{F}_Y(y) - F_Y(y)) \xrightarrow{d} N(0, F_Y(y)(1 - F_Y(y)))$ si ha cioè la convergenza in distribuzione ad una v.c. normale.

Dopo aver definito la funzione di ripartizione empirica si può definire l'analogo campionario della funzione del quantile, dato da

$$\hat{Q}_Y(\tau) = \hat{F}_Y^{-1}(y) = \inf\{y: \hat{F}_Y(y) \geq \tau\}, \tau \in (0, 1).$$

Per ottenere il quantile non condizionato empirico basta ordinare il campione dal valore più piccolo al più grande, in modo tale che si raggiunga la soglia τ .

Un metodo alternativo per la stima della funzione del quantile è stato proposto in Koenker e Basset (1978): per ottenere il quantile di interesse si va a minimizzare una funzione di perdita. In generale una funzione di perdita si può così definire: sia Y una v.c. continua che si vuole approssimare con un valore c , commettendo un errore ε . La funzione di perdita C , definita come $C(\varepsilon) = C(Y - c)$, gode delle seguenti proprietà:

1. $C(0) = 0$;
2. se $0 < u_1 < u_2$ allora $C(0) < C(u_1) < C(u_2)$ e $C(0) < C(-u_1) < C(-u_2)$;
3. è integrabile rispetto alla distribuzione di Y .

La funzione di perdita è sempre positiva (o uguale a 0), crescente se $\varepsilon > 0$ e decrescente se $\varepsilon < 0$. Si può ora vedere come la funzione di perdita rientra nella stima della funzione del quantile

$$\hat{Q}_Y(\tau) = \underset{\gamma_\tau \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_{t \in \{t | y_t \geq \gamma_\tau\}} \tau |y_t - \gamma_\tau| + \sum_{t \in \{t | y_t < \gamma_\tau\}} (1 - \tau) |y_t - \gamma_\tau| \right). \quad (4)$$

L'equazione (4) si può definire in maniera compatta tramite l'introduzione della *check function* (che sarà particolarmente importante nel caso della cointegrazione quantilica)

$$\rho_\tau(u) = u(\tau - I(u < 0)),$$

dove, ancora una volta, $I(u < 0) = \begin{cases} 1, & \text{se } u < 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$. Con l'introduzione della *check function* la (4) diventa

$$\hat{Q}_Y(\tau) = \underset{\gamma_\tau \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \sum_{t=1}^T \rho_\tau(y_t - \gamma_\tau).$$

In Koenker (2005) si ha la dimostrazione di come la funzione di perdita descritta in (4) permetta di individuare il quantile empirico di qualsivoglia livello τ .

Si assume che il modello della regressione quantilica sia il seguente

$$y_t = \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}_\tau + u_{t,\tau}, \quad t = 1, \dots, T$$

dove y_t è la variabile risposta, \mathbf{x}_t è un vettore ($K \times 1$) di variabili esplicative contenenti la costante e $u_{t,\tau}$ un termine di errore che varia al variare del quantile scelto. Così come nel modello di regressione lineare classico veniva fatta un'ipotesi sulla media condizionata del termine di errore, in questo caso se ne fa una riguardante il quantile condizionato del termine di errore. In particolare si assume che il τ -esimo quantile condizionato del termine di errore sia pari a zero, ovvero

$$Q_\tau(u_{t,\tau} | \mathbf{x}_t) = 0.$$

Da ciò si deriva che il τ -esimo quantile della variabile risposta condizionatamente alle variabili esplicative è dato da

$$Q_\tau(y_t | \mathbf{x}_t) = \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}_\tau.$$

Sulla base di quanto visto in precedenza per ottenere una stima di $\boldsymbol{\beta}_\tau$ si deve risolvere un problema di minimizzazione, in questo caso dato da

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}_\tau &= \underset{\boldsymbol{\beta}_\tau \in \mathbb{R}^k}{\operatorname{argmin}} \left(\tau \sum_{t \in \{t | y_t \geq \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}_\tau\}} |y_t - \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}_\tau| + (1 - \tau) \sum_{t \in \{t | y_t < \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}_\tau\}} |y_t - \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}_\tau| \right) \\ &= \underset{\boldsymbol{\beta}_\tau \in \mathbb{R}^k}{\operatorname{argmin}} \sum_{t=1}^T \rho_\tau(y_t - \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}_\tau). \end{aligned} \quad (5)$$

Dopo aver ottenuto una stima $\hat{\boldsymbol{\beta}}_\tau$ di $\boldsymbol{\beta}_\tau$, conoscendo i regressori, si può ottenere una stima del quantile condizionato

$$\hat{Q}_\tau(y_t | \mathbf{x}_t) = \mathbf{x}'_t \hat{\boldsymbol{\beta}}_\tau.$$

Nella regressione quantilica, a differenza dei minimi quadrati ordinari, non si ha una forma chiusa dello stimatore dei parametri, in quanto l'equazione (5) non ammette una soluzione analitica

esplicita dato che la *check function* non è derivabile nell'origine. Per ricavare uno stimatore adeguato si deve ricorrere a *procedure numeriche* di ottimizzazione della (5). Alcuni metodi di ottimizzazione numerica sono descritti in Koenker (2005); di seguito si riportano in maniera molto sintetica quelli utilizzati nello svolgimento dell'elaborato. Il primo algoritmo utilizzato⁴, descritto in Koenker e d'Orey (1987), è quello di Barrodale e Roberts (1973). Questo algoritmo si basa su quello del semplice modificato per il problema di regressione della mediana, generalizzato da Koenker e d'Orey per la stima numerica di tutti i quantili di una determinata distribuzione di riferimento. Quando si lavora con più di 5000 osservazioni e/o con più di 20 regressori, conviene utilizzare il metodo di seguito proposto. Il secondo algoritmo è stato sviluppato da Mehrotra (1992) a partire da un adattamento dell'algoritmo di Frisch e Newton utilizzando il metodo dei punti interni per risolvere problemi di programmazione lineare. Dettagli su questo secondo metodo si possono trovare in Koenker e Portnoy (1997).

3.1.1. Proprietà dello stimatore.

Le proprietà più importanti sono quelle di *equivarianza* dello stimatore. In particolare, sia $\hat{\beta}_\tau(\mathbf{y}, \mathbf{X})$ il vettore di coefficienti della regressione quantilica stimato, dipendente dalle osservazioni (\mathbf{y}, \mathbf{X}) , allora valgono le seguenti proprietà:

- (a) $\hat{\beta}_\tau(\lambda \mathbf{y}, \mathbf{X}) = \lambda \hat{\beta}_\tau(\mathbf{y}, \mathbf{X})$, $\lambda \in [0, +\infty)$;
- (b) $\hat{\beta}_\tau(-\lambda \mathbf{y}, \mathbf{X}) = \lambda \hat{\beta}_{1-\tau}(\mathbf{y}, \mathbf{X})$, $\lambda \in [0, +\infty)$;
- (c) $\hat{\beta}_\tau(\mathbf{y} + \mathbf{X}\lambda, \mathbf{X}) = \hat{\beta}_\tau(\mathbf{y}, \mathbf{X}) + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^k$;
- (d) $\hat{\beta}_\tau(\mathbf{y}, \mathbf{XA}) = \mathbf{A}^{-1} \hat{\beta}_\tau(\mathbf{y}, \mathbf{X})$, con \mathbf{A} matrice $(K \times K)$ non singolare.

Le proprietà (a) e (b) descrivono *equivarianze di scala*, in quanto se \mathbf{y} è moltiplicato per uno scalare allora l'intero vettore dei parametri stimati $\hat{\beta}_\tau$ subisce la medesima operazione. La proprietà (c) è detta *equivarianza di "shift"* o di regressione, infine la (d) è l'*equivarianza rispetto a riparametrizzazioni del disegno*, la quale mostra come trasformazioni dei regressori si trasferiscono sul vettore di coefficienti stimati tramite l'inversa della matrice di trasformazione.

Un'altra proprietà molto importante è quella di *invarianza a trasformazioni monotone*: sia $h()$ una funzione strettamente monotona a valori reali, per la quale cioè $\Pr(Y \leq y) = \Pr(h(Y) \leq h(y))$, allora

$$\hat{Q}_\tau(h(y)|X) = h\left(\hat{Q}_\tau(y|X)\right), \quad (6)$$

come riportato in Koenker (2005) questo sta a significare che il quantile condizionato della risposta trasformata equivale alla trasformazione dei quantili condizionati della risposta. Questa proprietà nel caso della media condizionata non era valida, infatti per la disuguaglianza di Jensen si aveva⁵

⁴ Impostato come *default* nella libreria "quantreg" di R

⁵ La disuguaglianza si trasforma in uguaglianza solo ed esclusivamente nel caso in cui $h()$ sia *affine*

$$h(E(y|X)) \leq E(h(y)|X).$$

L'equazione (6) risulta molto utile in tutte quelle situazioni nelle quali si hanno trasformazioni della variabile risposta (ad esempio, nel caso di una trasformazione logaritmica, $e^{x'\hat{\beta}_\tau}$ si può sempre interpretare come una stima appropriata del quantile condizionato di livello τ di Y , il che non valeva nel caso della media condizionata).

Una delle proprietà più importanti di uno stimatore è la sua *efficienza*. Come riportato il Koenker (2005) per una vasta gamma di distribuzioni non gaussiane della dipendente la varianza asintotica della mediana campionaria risulta essere il 50% minore, se non addirittura di più, di quella della media campionaria. Solo nel caso di gaussianità la relazione si inverte e la media campionaria risulta essere efficiente.

Un ultimo punto da sottolineare riguarda l'interpretazione dei parametri stimati. Nel caso dei minimi quadrati ordinari la stima del parametro relativo alla p -esima variabile si poteva interpretare come l'effetto marginale della p -esima variabile sul valore atteso della variabile dipendente, *coeteris paribus*. Nella regressione quantilica si ha la stessa identica interpretazione, solo che la parità di tutte le altre condizioni vale solo per il quantile τ -esimo. In particolare la stima del parametro relativo alla p -esima variabile sul τ -esimo quantile misura l'effetto marginale della p -esima variabile sul τ -esimo quantile condizionato, *coeteris paribus*.

3.1.2. Inferenza per la regressione quantilica.

Si può parlare ora di inferenza per la regressione quantilica. Per ricavare la distribuzione asintotica dello stimatore risulta particolarmente utile definire la *sparsity function* $s_y(\tau)$, che va ad impattare sulla forma della matrice di covarianza asintotica. Essa può essere definita come

$$s_y(\tau) = \frac{\delta Q_Y(\tau)}{\delta \tau} = \frac{\partial F_Y^{-1}(y)}{\partial \tau} = \frac{1}{f_Y(Q_Y(\tau))},$$

è quindi pari all'inversa della funzione di densità di probabilità calcolata nella funzione del quantile.

Prima di passare ai risultati asintotici per lo stimatore $\hat{\beta}_\tau$ si possono definire i risultati che valgono per lo stimatore del quantile non condizionato, che è stato definito come

$$\hat{Q}_Y(\tau) = \underset{\gamma_\tau \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \sum_{t=1}^T \rho_\tau(y_t - \gamma_\tau).$$

Quello che si dimostra in Koenker (2005) è che sotto alcune ipotesi, tra cui la principale riguarda l'indipendenza e l'identica distribuzione delle osservazioni, si ha

$$\sqrt{T} \left(\hat{Q}_Y(\tau) - Q_Y(\tau) \right) \xrightarrow{d} N(0, \delta^2), \text{ con } \delta^2 = \tau(1 - \tau)s_y^2(\tau).$$

Si nota che la varianza asintotica dello stimatore del quantile non condizionato dipende dalla *sparsity function*, quindi anche dalla funzione di densità di probabilità della variabile casuale,

facendo sì che $\hat{Q}_Y(\tau)$ sia più preciso nelle regioni a maggiore densità. Dopo aver parlato dello stimatore del quantile non condizionato si può presentare la teoria asintotica nel caso dello stimatore della regressione quantilica. Essa afferma che questo è uno stimatore consistente del vero valore del parametro, ovvero che $\hat{\beta}_\tau \xrightarrow{p} \beta_\tau$. Inoltre sotto alcune condizioni di regolarità, tra le quali non è richiesta l'indipendenza e l'identica distribuzione delle osservazioni, la matrice di covarianza di $\sqrt{T}(\hat{\beta}_\tau - \beta_\tau)$ prende la forma del *sandwich di Huber*, cioè

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_\tau - \beta_\tau) \xrightarrow{d} N(0, \tau(1-\tau)H_\tau^{-1}J_\tau H_\tau^{-1}) = N(0, \mathfrak{J}_\tau),$$

dove:

$$- J_\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t';$$

$$- H_\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' f_t(Q_\tau(y_t | \mathbf{x}_t)).$$

$f_t(Q_\tau(y_t | \mathbf{x}_t))$ denota la densità condizionata della variabile risposta, y_t , calcolata nel τ -esimo quantile condizionato.

Si possono fare le seguenti distinzioni a seconda delle ipotesi fatte sugli errori:

1. metodi diretti di stima della matrice di covarianza nel caso di errori indipendenti ed identicamente distribuiti, d'ora in poi i.i.d. . Sotto tale ipotesi le funzioni di densità f_t sono tutte uguali e la matrice di covarianza asintotica di $\sqrt{T}(\hat{\beta}_\tau - \beta_\tau)$ diventa

$$\mathfrak{J}_\tau = \frac{\tau(1-\tau)}{f^2(F^{-1}(\tau))} J_\tau^{-1} = \tau(1-\tau) s_y^2(\tau) J_\tau^{-1}.$$

Nel caso di errori i.i.d. la *sparsity function* assume un'importanza fondamentale, tuttavia essa a sua volta dipende dalla funzione di ripartizione F , che è ignota e va quindi stimata.

Per farlo e per ottenere quindi una stima della *sparsity function*, si hanno diversi metodi diretti, il principale è noto come *metodo di Siddiqui*. In tale metodo la stima della *sparsity* viene fatta come differenza delle funzioni di ripartizione empiriche, in particolare

$$\hat{s}_y(\tau) = \frac{[\hat{F}^{-1}(\tau + h_T) - \hat{F}^{-1}(\tau - h_T)]}{2h_T},$$

dove \hat{F} è una stima della funzione di ripartizione e h_T è una *bandwidth* che tende a zero al crescere della numerosità campionaria, ovvero quando $T \rightarrow \infty$. Come *bandwidth* si possono fare tre scelte diverse:

(a) la *bandwidth* proposta in Hall e Sheater (1988), data da $h_T = T^{-1/3} z_\alpha^{2/3} \left(\frac{1.5(f(F^{-1}(\tau)))^2}{2(F^{-1}(\tau))^2 + 1} \right)^{1/3}$, dove $z_\alpha = F^{-1}(1 - \alpha/2)$, con α scelto in modo tale da controllare l'ampiezza dell'intervallo di confidenza di livello $1 - \alpha$;

(b) la *bandwidth* proposta in Bofinger (1975), data da $h_T = T^{-1/5} \left(\frac{4.5(f(F^{-1}(\tau)))^4}{[2(F^{-1}(\tau))^2 + 1]^2} \right)^{1/5}$;

(c) la *bandwidth* proposta in Chamberlain (1994), data da $h_T = z_\alpha \sqrt{\frac{\tau(1-\tau)}{T}}$, dove z_α è scelto come nel caso (a).

Dopo aver scelto la *bandwidth* appropriata il passo successivo è stimare F^{-1} . L'approccio più semplice è usare i residui derivanti dalla stima della regressione quantilica e a partire da essi si può ottenere \hat{F}^{-1} con tre possibili approcci, descritti nel dettaglio in Koenker (2005).

Un metodo alternativo a quello di Siddiqui per la stima della matrice di covarianza asintotica nel caso di errori i.i.d. è basato su stime kernel della funzione di densità di probabilità. L'idea è stimare $s_y(\tau)$ tramite l'inverso dello stimatore kernel della densità, come proposto in Powell (1989). Procedendo così si ottiene

$$\hat{s}_y(\tau) = 1 / \left[(1/T) \sum_{t=1}^T c_T^{-1} K(\hat{u}_{t,\tau}/c_T) \right],$$

dove:

- $\hat{u}_{t,\tau}$ sono i residui della regressione quantilica, dati da $\hat{u}_{t,\tau} = y_t - \hat{Q}_\tau(y_t | \mathbf{x}_t)$;
- c_T è una *bandwidth* che, sulla base di quanto detto in Koenker (2005), è data da

$$c_T = \rho(F^{-1}(\tau + h_T) - F^{-1}(\tau - h_T)),$$

con $\rho = \min(s, IQR/1,34)$ ⁶ e h_T è la *bandwidth* di Hall e Sheater⁷;

- $K()$ è uno stimatore kernel della funzione di densità. Sulla base di quanto affermato in Powell (1989) si può adottare un kernel uniforme, dato da

$$K(a) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } |a| \leq 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Finora si è visto come ottenere la matrice di covarianza nel caso di errori i.i.d., ipotesi molto difficile da sostenere qualora si vadano a fare delle applicazioni empiriche, tuttavia alcuni dei metodi qui utilizzati torneranno utili nel seguito della trattazione.

2. Metodi di stima diretti nel caso di errori indipendenti ma non identicamente distribuiti, d'ora in poi i.n.i.d. . In questo caso la matrice di covarianza dello stimatore della regressione quantilica assume la forma del *sandwich di Huber*, ovvero

$$\mathfrak{J}_\tau = \tau(1 - \tau)H_\tau^{-1}J_\tau H_\tau^{-1},$$

dove:

$$- J_\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' ;$$

⁶ s è la deviazione standard campionaria e IQR è lo scarto interquartile

⁷ Possibili alternative sono date dalla *bandwidth* di Chamberlain o di Bofinger

$$- H_\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' f_t(Q_\tau(y_t | \mathbf{x}_t)) .$$

A differenza di quando si avevano errori i.i.d. , in questo caso si devono stimare due quantità: J_τ e H_τ . Per la stima di J_τ basta utilizzare il suo analogo campionario, pertanto si dovrà stimare H_τ . Per fare ciò si hanno due metodi differenti: il primo, che è un'estensione del metodo di Siddiqui, descritto in dettaglio in Hendricks e Koenker (1992), mentre il secondo è basato sul metodo di Powell visto in precedenza, che si può analizzare in dettaglio. Nella procedura di Powell per la stima di H_τ si può usare

$$\hat{H}_\tau = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T c_T^{-1} K(\hat{u}_{t,\tau}/c_T) \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' .$$

dove $\hat{u}_{t,\tau}$ sono i residui della regressione quantilica, c_T è la stessa *bandwidth* usata nel metodo di Powell per errori i.i.d. e $K()$ è il kernel uniforme.

3. Metodi di ricampionamento *bootstrap*, sia nel caso di errori i.i.d. che i.n.i.d. . I metodi diretti di stima della matrice di covarianza asintotica degli stimatori richiedono la stima dei parametri di interesse nella *sparsity function*. Con i metodi *bootstrap* si può evitare ciò. Di questi ne esistono molti; quelli maggiormente utilizzati sono: (a) *bootstrap* dei residui; (b) *bootstrap* del disegno, o delle coppie XY; (c) Markov Chain Marginal Bootstrap (MCMB).

(a) Il metodo *bootstrap* dei residui è costruito a partire da ricampionamenti (con reinserimento) indipendenti dai residui della regressione quantilica $\hat{u}_{t,\tau}$ e dai regressori \mathbf{x}_t .

Sia \mathbf{u}^* un vettore (mx1) di residui ricampionati e sia \mathbf{X}^* una matrice di dimensione (mxK) ottenuta da ricampionamenti indipendenti dalla matrice originaria \mathbf{X}^8 . A questo punto, a partire dai ricampionamenti dei residui e della matrice dei regressori, uniti ai coefficienti stimati, si può ricavare una versione *bootstrap* della variabile dipendente a partire da

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{X}^* \hat{\boldsymbol{\beta}}_\tau + \mathbf{u}^* ,$$

dove \mathbf{y}^* è il vettore (mx1) della variabile dipendente ottenuta con procedura *bootstrap*. Dopo aver ricavato \mathbf{y}^* si può ottenere una stima *bootstrap* di $\hat{\boldsymbol{\beta}}_\tau$, che si può indicare con $\hat{\boldsymbol{\beta}}_\tau^*$, applicando la regressione quantilica nella seguente equazione

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{X}^* \boldsymbol{\beta}_\tau + \mathbf{u} .$$

Tale procedura può essere ripetuta per M volte e lo stimatore della matrice di covarianza asintotica risultante è dato da

$$\boldsymbol{\Sigma}_\tau^* = \frac{m}{T} \left(\frac{1}{M} \right) \sum_{j=1}^M (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{j,\tau}^* - \bar{\boldsymbol{\beta}}_\tau^*) (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{j,\tau}^* - \bar{\boldsymbol{\beta}}_\tau^*)' . \quad (7)$$

dove $\bar{\boldsymbol{\beta}}_\tau^*$ è una media delle M replichezioni *bootstrap*.

⁸ È importante dire che non è necessario che m sia pari alla numerosità campionaria T

Nell'applicare questa prima procedura si deve fare attenzione ai ricampionamenti separati. Infatti, usare come campioni separati $\hat{u}_{t,\tau}$ e \mathbf{x}_t richiede l'indipendenza dei residui u dai regressori \mathbf{X} .

(b) Il *bootstrap* delle coppie, a differenza del caso precedente, vale anche quando i residui ed i regressori non sono indipendenti. Sia \mathbf{y}^* un vettore ($m \times 1$) di osservazioni ricampionate dalla variabile dipendente \mathbf{y} e sia \mathbf{X}^* una matrice di dimensione ($m \times K$) ottenuta da ricampionamenti indipendenti dalla matrice originaria \mathbf{X} . Si ottiene poi una stima *bootstrap* di $\hat{\boldsymbol{\beta}}_\tau$, indicata con $\hat{\boldsymbol{\beta}}_\tau^*$, applicando il metodo della regressione quantilica nella seguente equazione, in cui si hanno le versioni *bootstrap* di \mathbf{y} e \mathbf{X}

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{X}^* \boldsymbol{\beta}_\tau + \mathbf{u}.$$

La procedura viene ripetuta per M volte e si può ricavare la matrice di covarianza asintotica a partire dalla formula (7).

(c) Il Markov Chain Marginal Bootstrap (MCMB) per la prima volta è stato proposto in He e Hu (2002). La sua principale caratteristica è che, al posto di risolvere equazioni K -dimensionali come gli altri metodi *bootstrap*, risolve K equazioni unidimensionali producendo una catena di Markov.

Il metodo MCMB utilizzato in questo elaborato è quello proposto in Kocherginsky et al. (2005), in cui la linearità è richiesta solamente nell'equazione del quantile di livello τ , non in tutti i percentili.

Siano $x_{t,j}$ la j -esima componente di \mathbf{x}_t , $\mathbf{x}_{t,(j-)}$ e $\mathbf{x}_{t,(j+)}$ le prime $(j-1)$ e le ultime $(K-j)$ componenti di \mathbf{x}_t , rispettivamente. Di conseguenza si può scrivere $\mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta} = x_{t,j} \beta_j + \mathbf{x}'_{t,(j-)} \boldsymbol{\beta}_{(j-)} + \mathbf{x}'_{t,(j+)} \boldsymbol{\beta}_{(j+)}$ per ogni $1 \leq j \leq K$.

Sia ψ_τ la derivata prima della funzione ρ_τ , definita a partire da

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \psi_\tau(y_t - \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}) \mathbf{x}_t = 0.$$

Siano infine $\mathbf{z}_t = \psi_\tau(\hat{u}_t) \mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{z}}$, con $\bar{\mathbf{z}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \psi_\tau(\hat{u}_t) \mathbf{x}_t$ e $\hat{u}_t = y_t - \mathbf{x}'_t \hat{\boldsymbol{\beta}}$ i residui. L'algoritmo MCMB parte dalla stima ottenuta mediante regressione quantilica $\boldsymbol{\beta}^{(0)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_\tau$ al passo $p = 0$ e itera i seguenti passaggi:

i) $p \leftarrow p + 1$;

ii) per ogni j partendo da 1 fino a K ($j \in [1, K]$), $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_T\}$ sono ricampionate con reinserimento per ottenere $\{\mathbf{z}_1^{p,j}, \dots, \mathbf{z}_T^{p,j}\}$ da cui ricavare $\beta_j^{(p)}$ come soluzione di

$$\sum_{t=1}^T \psi_\tau \left(y_t - x_{t,j} \beta_j^{(p)} - \mathbf{x}'_{t,(j-)} \boldsymbol{\beta}_{(j-)}^{(p)} - \mathbf{x}'_{t,(j+)} \boldsymbol{\beta}_{(j+)}^{(p-1)} \right) x_{t,j} = \sum_{t=1}^T z_t^{p,j}.$$

iii) I passaggi i) e ii) sono ripetuti M volte.

Il passaggio ii) è chiave per l'algoritmo MCMB, in particolare un campione indipendente $\{\mathbf{z}_1^{p,j}, \dots, \mathbf{z}_T^{p,j}\}$ deve essere ricampionato per ogni j al p -esimo passaggio. Ripetendo M volte i passaggi i) e ii) si ottiene una sequenza di catene di Markov $\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(K)}$, dato che nel passaggio ii) si ottiene $\beta_j^{(p)}$ come soluzione di un'equazione che dipende solamente dai valori più recenti dei parametri. La matrice di covarianze asintotica di $\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$ si può approssimare prendendo il momento secondo della catena di Markov se la media

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \psi_{\tau}(y_t - \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}) \mathbf{x}_t$$

converge, quando $T \rightarrow \infty$ a una funzione continua differenziabile.

Per ottenere dei risultati inferenziali corretti Kocherginsky et al. (2005) suggeriscono, per una regressione quantilica fatta con K regressori, di avere

$$T \min\{\tau, 1 - \tau\} > 5K .$$

Procedure inferenziali quali verifiche di ipotesi su singoli coefficienti o gruppi di questi, costruzione di intervalli di confidenza, sono costruiti in modo classico basandosi sui risultati asintotici che si sono visti finora.

3.2. La regressione quantilica su un modello cointegrato.

Si può vedere cosa accade qualora si vada ad applicare la regressione quantilica a serie cointegrate. In tal modo si andrà ad analizzare la cointegrazione quantilica, definita formalmente per la prima volta in Xiao (2009).

Nel modello di cointegrazione tradizionale proposto in Engle e Granger (1987) il vettore di cointegrazione $\boldsymbol{\beta}$ è costante nei quantili. In questo paragrafo quello che si introdurrà è un modello di cointegrazione in cui tale vettore cambia nei quantili, riuscendo a vedere se si hanno evidenze differenti al variare del quantile di riferimento.

Il modello di partenza sul quale si va a fare lo studio di cointegrazione quantilica è il seguente

$$y_t = \alpha + \boldsymbol{\beta}'_{\tau} \mathbf{x}_t + u_t = \boldsymbol{\theta}' \mathbf{z}_t + u_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (8)$$

in cui:

- \mathbf{x}_t è un vettore ($K \times 1$) di regressori (escluso il termine costante);
- $\boldsymbol{\beta}_{\tau}$ è il vettore ($K \times 1$) dei coefficienti di cointegrazione;
- u_t è un termine di errore stazionario a media nulla;
- $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \boldsymbol{\beta}'_{\tau})'$ è il vettore ($(K+1) \times 1$) dei parametri (incluso quello relativo al termine costante);

- $\mathbf{z}_t = (1, \mathbf{x}'_t)'$ è vettore $((K+1) \times 1)$ dei regressori (incluso il termine costante).

Una stima di $\boldsymbol{\theta}$ si può ottenere da

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_\tau = \underset{\boldsymbol{\theta} \in R^{k+1}}{\operatorname{argmin}} \sum_{t=1}^T \rho_\tau(y_t - \boldsymbol{\theta}' \mathbf{z}_t),$$

dove, ancora una volta, $\rho_\tau(u) = u(\tau - I(u < 0))$, con $I(u < 0) = \begin{cases} 1, & \text{se } u < 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$. Anche in questo caso a livello di stima puntuale si hanno dei problemi, per fare fronte ai quali si possono utilizzare le medesime procedure numeriche descritte nel paragrafo precedente.

3.2.1. Inferenza per la cointegrazione quantilica.

Per ricavare la distribuzione asintotica dello stimatore del vettore di cointegrazione ottenuto con il metodo della regressione quantilica Xiao segue l'approccio di Knight (1989). Nel fare ciò si debbono definire alcuni elementi utili per il seguito: siano f_u la funzione di densità di probabilità di u_t , F_u la sua funzione di ripartizione, $\psi_\tau(u) = \tau - I(u < 0)$ e $u_{t,\tau} = y_t - \boldsymbol{\theta}'_\tau \mathbf{z}_t = u_t - F^{-1}(\tau)$.

Per evitare problemi di endogenità dovuti alla possibile correlazione tra u_t e $\Delta \mathbf{x}_t$, sulla base di quanto proposto da Saikkonen (1991) nel modello di cointegrazione classico, il termine di errore u_t viene decomposto in una componente i.i.d., denotata con ε_t , e in una collegata a $\Delta \mathbf{x}_t$, in particolare se ne prendono gli anticipi e i ritardi. Per facilitare l'analisi asintotica vengono fatte le seguenti assunzioni.

Assunzione A. A partire da $\mathbf{v}_t = \Delta \mathbf{x}_t$ si può definire $\{\mathbf{v}_t, u_t\}$ la sequenza di vettori casuali di dimensione $((K+1) \times 1)$ stazionari a media nulla. Per un valore R fissato u_t può essere scomposto come segue

$$u_t = \sum_{j=-R}^R \mathbf{v}'_{t-j} \boldsymbol{\Pi}_j + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

dove ε_t è un processo stazionario tale che $E(\mathbf{v}_{t-j} \varepsilon_t) = 0, \forall j$. Le somme parziali dei processi vettoriali $(\psi_\tau(\varepsilon_t), \mathbf{v}_t)$ convergono asintoticamente a:

$$T^{-1/2} \sum_{t=1}^{\lfloor Tr \rfloor} \begin{bmatrix} \psi_\tau(\varepsilon_t) \\ \mathbf{v}_t \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}(r) = \begin{bmatrix} B_\psi^*(r) \\ B_v(r) \end{bmatrix} = BM(0, \Omega^*),$$

dove " \Rightarrow " implica convergenza debole (verrà usata sempre questa notazione d'ora in poi) della misura di probabilità associata, $\lfloor Tr \rfloor$ indica la parte intera di Tr , $\mathbf{B}(r)$ è un moto Browniano e Ω^* è la matrice di covarianza del moto Browniano $(B_\psi^*(r), B_v(r))'$.

Assunzione B. La funzione di ripartizione di ε_t , $F_\varepsilon(\varepsilon)$, ha densità $f_\varepsilon(\varepsilon)$ continua con $f_\varepsilon(\varepsilon) > 0$ nell'insieme $\{\varepsilon: 0 < F_\varepsilon(\varepsilon) < 1\}$.

Assunzione C. La funzione di ripartizione condizionata

$$F_{t-1}(u) = Pr[u_t < u \mid u_{t-j}, j \geq 1, \mathbf{v}_{t-R}, R \geq 0]$$

ha derivata prima f_{t-1} , con $f_{t-1}(s_T)$ integrabile per una qualunque sequenza $s_T \rightarrow F^{-1}(\tau)$ e $E[f_{t-1}^\delta(F^{-1}(\tau))] < \infty$ per un qualche $\delta > 1$.

Assunzione D. Dato $\boldsymbol{\beta}_\tau = (\beta_{1,\tau}, \dots, \beta_{K,\tau})'$, allora i coefficienti $\beta_{i,\tau}$ di cointegrazione sono funzioni monotone del termine di errore ε_t .

Si può mostrare che, sotto l'Assunzione A

$$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda) = f_{uu}(\lambda) - f_{uv}(\lambda)f_{vv}(\lambda)^{-1}f_{vu}(\lambda),$$

in cui $f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)$, $f_{uu}(\lambda)$, $f_{vv}(\lambda)$ sono, rispettivamente, le funzioni di densità di probabilità di ε , u , \mathbf{v} , e $f_{uv}(\lambda)$ è la funzione di densità congiunta di u e \mathbf{v} , da cui la varianza di lungo periodo di ε è $\omega_{\varepsilon\varepsilon}^2 = \omega_{uu}^2 - \Omega_{uv}\Omega_{vv}^{-1}\Omega_{vu}$.

Si può partizionare la matrice di covarianza Ω^* del moto Browniano $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ come

$$\Omega^* = \begin{bmatrix} \omega_{\psi}^{*2} & 0 \\ 0 & \Omega_{vv} \end{bmatrix}.$$

Sempre sotto tale Assunzione la regressione di partenza (8) viene scomposta in

$$y_t = \alpha + \boldsymbol{\beta}'_\tau \mathbf{x}_t + \sum_{j=-R}^R \Delta \mathbf{x}'_{t-j} \boldsymbol{\Pi}_j + \varepsilon_t.$$

Se si denota il τ -esimo quantile di ε_t con $Q_\tau(\varepsilon)$, sia $I_t = \{\mathbf{x}_t, \Delta \mathbf{x}_{t-j}, \forall j\}$ l'insieme informativo al tempo t , allora il τ -esimo quantile di y_t condizionato a I_t è

$$Q_\tau(y_t \mid I_t) = \alpha + \boldsymbol{\beta}'_\tau \mathbf{x}_t + \sum_{j=-R}^R \Delta \mathbf{x}'_{t-j} \boldsymbol{\Pi}_j + F_\varepsilon^{-1}(\tau),$$

dove $F_\varepsilon(\cdot)$ è la funzione di ripartizione di ε_t .

Sia \mathbf{Z}_t il vettore di regressori costituito da $\mathbf{z}_t = (1, \mathbf{x}_t)'$ e da $(\Delta \mathbf{x}'_{t-j}, j = -R, \dots, R)$, siano poi $\boldsymbol{\Theta} = (\alpha, \boldsymbol{\beta}'_\tau, \boldsymbol{\Pi}'_{-R}, \dots, \boldsymbol{\Pi}'_R)'$ e $\boldsymbol{\Theta}_\tau = (\alpha_\tau, \boldsymbol{\beta}'_\tau, \boldsymbol{\Pi}'_{-R,\tau}, \dots, \boldsymbol{\Pi}'_{R,\tau})'$, dove $\alpha_\tau = \alpha + F_\varepsilon^{-1}(\tau)$. Sfruttando quanto appena definito le regressioni precedenti diventano

$$y_t = \boldsymbol{\Theta}' \mathbf{Z}_t + \varepsilon_t$$

e

$$Q_\tau(y_t \mid I_t) = \boldsymbol{\Theta}'_\tau \mathbf{Z}_t.$$

Definito $\varepsilon_{t,\tau} = \varepsilon_t - F_\varepsilon^{-1}(\tau)$ allora $Q_\tau(\varepsilon_{t,\tau}) = 0$. Come si può notare nelle equazioni precedenti i vettori di cointegrazione variano al variare del quantile di riferimento e si possono pertanto definire

come "quantile-dipendenti". Il modello finora illustrato è quello che Xiao definisce modello di cointegrazione quantilica, che include la specificazione adottata da Engle e Granger (1987) come caso particolare in cui $\boldsymbol{\beta}_\tau$ è un vettore di costanti. In questo caso le equazioni precedenti diventano

$$y_t = \alpha + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{x}_t + \sum_{j=-R}^R \Delta \mathbf{x}'_{t-j} \boldsymbol{\Pi}_j + \varepsilon_t$$

e

$$Q_\tau(y_t | \mathbf{x}_t) = \alpha + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{x}_t + \sum_{j=-R}^R \Delta \mathbf{x}'_{t-j} \boldsymbol{\Pi}_j + F_\varepsilon^{-1}(\tau).$$

Lo stimatore del modello di cointegrazione quantilica viene ottenuto a partire dalla solita minimizzazione della funzione di perdita

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_\tau = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{t=1}^T \rho_\tau(y_t - \boldsymbol{\theta}' \mathbf{Z}_t).$$

Come fatto per $\boldsymbol{\theta}_\tau$ si può partizionare lo stimatore $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\tau = [\hat{\alpha}_\tau, \hat{\boldsymbol{\beta}}'_\tau, \hat{\boldsymbol{\Pi}}'_{-R,\tau}, \dots, \hat{\boldsymbol{\Pi}}'_{R,\tau}]'$. A questo punto, dato $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\tau$, la τ -esima funzione del quantile condizionato di y_t viene stimata a partire da

$$\hat{Q}_\tau(y_t | I_t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}'_\tau \mathbf{Z}_t.$$

La funzione di densità condizionata di y_t viene stimata a partire da

$$\hat{f}_\tau(y_t | I_t) = \frac{\tau_j - \tau_{j-1}}{(\hat{Q}_{\tau_j}(y_t | I_t) - \hat{Q}_{\tau_{j-1}}(y_t | I_t))},$$

sulla base di una scelta opportuna per la sequenza di τ_j . La distribuzione limite dello stimatore della cointegrazione quantilica viene definita a partire dal Teorema seguente.

Teorema 1. Sotto le Assunzioni A, B, C e D:

$$G_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\tau - \boldsymbol{\theta}_\tau) \Rightarrow \frac{1}{f_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}(\tau))} \begin{bmatrix} \int_0^1 \bar{B}_v(r) \bar{B}'_v(r) & 0 \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \int_0^1 \bar{B}_v(r) dB_\psi^*(r) \\ \psi \end{bmatrix},$$

dove:

- $G_T = \text{diag}(D_T, \sqrt{T}, \dots, \sqrt{T})$, con $D_T = \text{diag}(\sqrt{T}, T I_K)$, con I_K matrice identità di dimensione $(K \times K)$;
- $\bar{B}_v(r) = (1, B'_v(r))'$;
- $\Gamma = E(V_t V'_t)$, con $V_t = (\Delta \mathbf{x}'_{t-R}, \dots, \Delta \mathbf{x}'_{t+R})'$;
- ψ è una normale multivariata con dimensione confrontabile con quella di $(\boldsymbol{\Pi}'_{-R,\tau}, \dots, \boldsymbol{\Pi}'_{R,\tau})'$.

Per quanto riguarda il vettore di cointegrazione quantilica si ha, sotto tutte e quattro le Assunzioni precedenti

$$T(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_\tau - \boldsymbol{\beta}) \Rightarrow \frac{1}{f_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}(\tau))} \left[\int_0^1 \underline{B}_v(r) \underline{B}'_v(r) \right]^{-1} \int_0^1 \underline{B}_v(r) dB_\psi^*(r) \quad (9)$$

$$\xrightarrow{d} MN \left(\mathbf{0}, \frac{\omega_\psi^2}{f_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}(\tau))^2} \left[\int_0^1 \underline{B}_v(r) \underline{B}'_v(r) \right]^{-1} \right)$$

dove:

- $\underline{B}_v(r) = B_v(r) - rB_v(1)$ è un moto browniano di dimensione $(K \times 1)$ "depurato" dalla media;
- ω_ψ^2 è la varianza di $\psi_\tau(\varepsilon_{t,\tau})$;
- MN indica una distribuzione mistura di normali.

Per la dimostrazione del Teorema 1 si veda Xiao (2009).

La distribuzione asintotica di $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_\tau$ è una mistura di normali, ciò facilita l'inferenza statistica condotta in un modello di cointegrazione quantilica. Ad esempio, supponiamo si voglia verificare il seguente sistema di ipotesi

$$H_0: \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}_\tau = \mathbf{r},$$

dove:

- \mathbf{R} è una matrice di selezione di dimensione $(q \times K)$;
- \mathbf{r} è un vettore di dimensione $(q \times 1)$.

Sotto l'ipotesi nulla e le Assunzioni precedenti si ha

$$\frac{f_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}(\tau))}{\omega_\psi} \left[\mathbf{R} \left(\int_0^1 \underline{B}_v(r) \underline{B}'_v(r) \right)^{-1} \mathbf{R}' \right]^{-1/2} T(\mathbf{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_\tau - \mathbf{r}) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_q),$$

dove $N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_q)$ sta ad indicare una distribuzione normale q-variata.

Sia ora

$$M_X = \sum_{t=1}^T (\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})'$$

Allora una statistica test alla Wald sarà data da

$$W_T(\tau) = \frac{f_\varepsilon(\widehat{F_\varepsilon^{-1}(\tau)})^2}{\widehat{\omega}_\psi^2} (\mathbf{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_\tau - \mathbf{r})' [\mathbf{R}M_X^{-1}\mathbf{R}']^{-1} (\mathbf{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_\tau - \mathbf{r}),$$

dove:

- $f_\varepsilon(\widehat{F_\varepsilon^{-1}}(\tau))$ è una stima consistente di $f_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}(\tau))$;
- $\widehat{\omega}_\psi^2$ è una stima consistente di ω_ψ^2 .

Teorema 2. Sotto le assunzioni del Teorema 1 e sotto H_0 si ha

$$W_T(\tau) \xrightarrow{d} \chi^2(q),$$

dove $\chi^2(q)$ sta ad indicare una variabile casuale chi-quadrato centrale con q gradi di libertà.

3.2.2. Applicazione a serie reali.

Dopo questa premessa teorica si può ora illustrare quanto fatto per stimare i coefficienti di cointegrazione e di aggiustamento con il metodo della regressione quantilica.

Le stime dei coefficienti di cointegrazione sono state ottenute da

$$\text{Ln}S_t = a + \beta \text{Ln}Fi_t + \sum_{j=-R}^R f_j \Delta \text{Ln}Fi_{t-j} + \varepsilon_t \quad (10)$$

dove il numero R di anticipi-ritardi dei futures è stato fissato pari a 3⁹. A tale equazione è stato applicato il metodo della regressione quantilica e le varianze asintotiche dei coefficienti sono state ottenute mediante la procedura MCMB, fissando il numero di replicazioni *bootstrap* pari a 500 .

Una volta ottenuti i coefficienti di cointegrazione si sono stimati i coefficienti di aggiustamento applicando il metodo della regressione quantilica alle seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \Delta \text{Ln}S_t &= \alpha_{01} + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} + \sum_{j=1}^M \delta_{1,j} \Delta \text{Ln}Fi_{t-j} + \sum_{j=1}^N \gamma_{1,j} \Delta \text{Ln}S_{t-j} + e_{1,t}, \\ \Delta \text{Ln}Fi_t &= \alpha_{02} + \alpha_2 \hat{\varepsilon}_{t-1} + \sum_{j=1}^M \delta_{2,j} \Delta \text{Ln}Fi_{t-j} + \sum_{j=1}^N \gamma_{2,j} \Delta \text{Ln}S_{t-j} + e_{2,t}, \end{aligned}$$

dove:

- $\hat{\varepsilon}_{t-1}$ è il residuo di cointegrazione ritardato ottenuto a partire dall'equazione (10);
- N e M sono i ritardi. Si è deciso di porre N=M e sono stati fissati considerando i ritardi scelti per il modello VAR con il criterio di Hannan-Quinn, presentati in Tabella 2.7;
- $e_{1,t}$ e $e_{2,t}$ sono due termini di errore incorrelati tra loro e stazionari.

In Tabella 3.1 sono presentate le stime dei coefficienti di cointegrazione per le diverse relazioni spot-futures considerate con dati a frequenza giornaliera e settimanale.

⁹ Si è fissato R pari a 4, 6, 9, non notando differenze rispetto ai risultati ottenuti con il numero di ritardi qui considerato

<i>Prezzo spot vs. prezzo futures a 1 mese</i>									
<i>Dati giornalieri</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Beta	1,00078**	1,00002**	1,00000**	1,00000**	1,00000**	0,99999**	0,99999**	0,99985**	0,99859**
<i>Dati settimanali</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Beta	1,00158**	1,00019**	0,99999**	0,99998**	0,99988**	0,99992**	0,99986**	0,99956**	0,99837**
<i>Prezzo spot vs. prezzo futures a 2 mesi</i>									
<i>Dati giornalieri</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Beta	0,99488**	0,99599**	0,99556**	0,99587**	0,99583**	0,99500**	0,99313**	0,98964**	0,98301**
<i>Dati settimanali</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Beta	0,99566**	0,99492**	0,99513**	0,99618**	0,99463**	0,99350**	0,99281**	0,98830**	0,98092**
<i>Prezzo spot vs. prezzo futures a 3 mesi</i>									
<i>Dati giornalieri</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Beta	0,99318**	0,99274**	0,99021**	0,99026**	0,99203**	0,99061**	0,98864**	0,98269**	0,97258**
<i>Dati settimanali</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Beta	0,99126**	0,99035**	0,98983**	0,99067**	0,99018**	0,98878**	0,98822**	0,98157**	0,96922**
<i>Prezzo spot vs. prezzo futures a 4 mesi</i>									
<i>Dati giornalieri</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Beta	0,99165**	0,98932**	0,98570**	0,98502**	0,98757**	0,98757**	0,98540**	0,97813**	0,96457**
<i>Dati settimanali</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Beta	0,99038**	0,98660**	0,98390**	0,98374**	0,98534**	0,98581**	0,98483**	0,97701**	0,96277**

Tabella 3.1. Stima dei coefficienti di cointegrazione nelle relazioni di cointegrazione tra prezzi spot e futures al variare del quantile e della frequenza di osservazione dei dati. (**) denota il rifiuto dell'ipotesi di nullità del coefficiente di riferimento ad un livello di significatività del 5%

Per tutte le relazioni di cointegrazione considerate i coefficienti stimati diminuiscono all'aumentare del quantile di riferimento. Quando il prezzo spot è più basso (quantili più piccoli) si ha una relazione di lungo periodo molto forte tra prezzi spot e futures. Quando il prezzo spot è più elevato (quantili più grandi) la relazione di lungo periodo si indebolisce. Pertanto si ha una maggiore sensibilità, nel lungo periodo, dei prezzi spot a *shocks* nei prezzi futures quando il prezzo spot è più basso. La sensibilità dei prezzi spot a *shocks* nei prezzi futures diminuisce poi all'aumentare della lunghezza del contratto futures considerato. Per i quantili intermedi, ovvero nell'intervallo 0,2-0,8, i coefficienti di cointegrazione stimati sono piuttosto stabili, le differenze maggiori si possono notare nei quantili estremi, ovvero 0,1 e 0,9, come evidenziato anche in Figura 3.1.

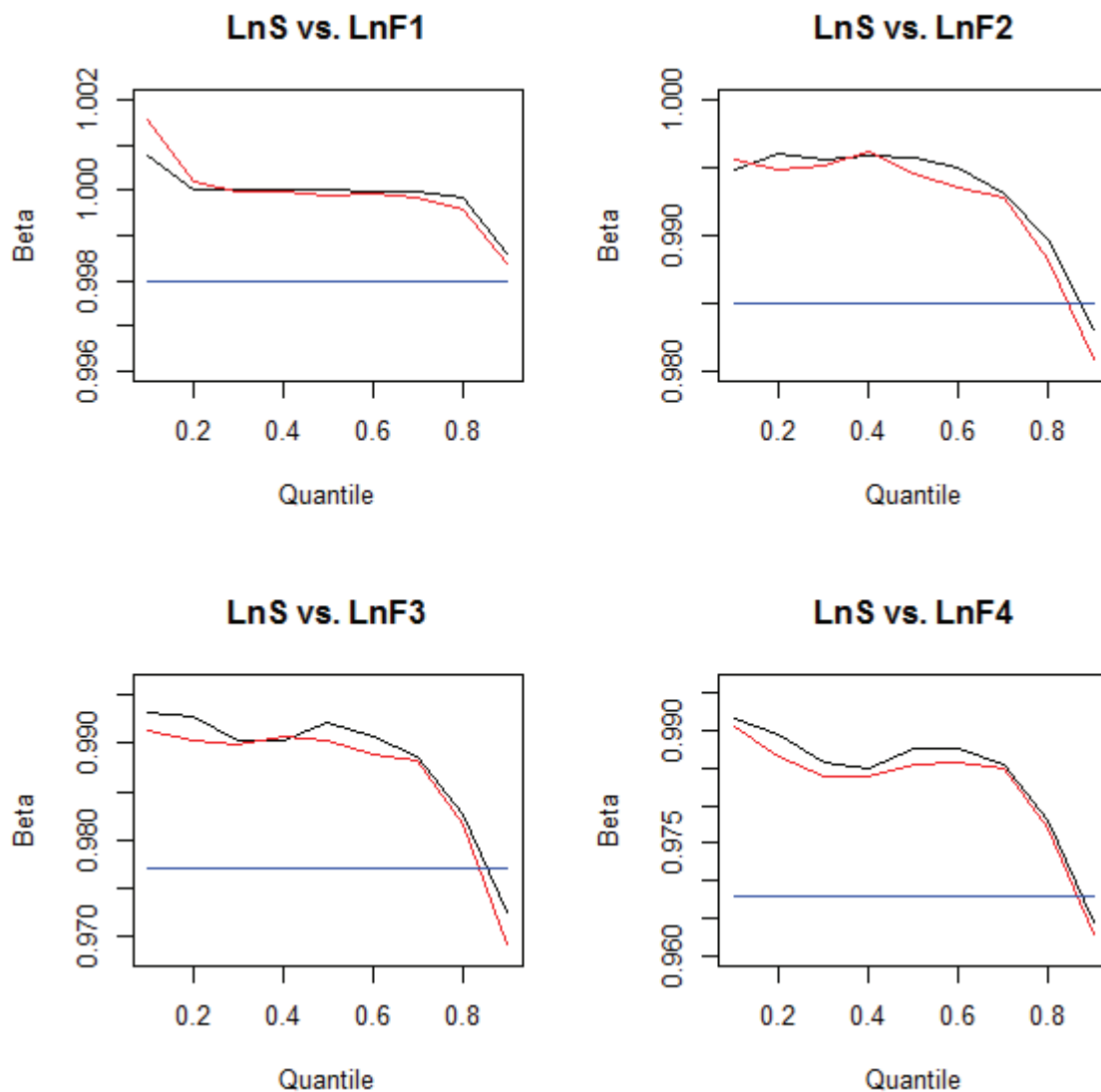


Figura 3.1. Confronto tra i coefficienti di cointegrazione ottenuti con il metodo della regressione quantilica con quelli ottenuti tramite la procedura di Johansen (linea blu). La linea nera indica i coefficienti calcolati a partire da dati giornalieri, quella rossa dai settimanali

Analizzando le singole relazioni di cointegrazione si hanno dei risultati ancor più interessanti. Se si considera la relazione tra i prezzi spot e futures a 1 mese, la diminuzione dei coefficienti di cointegrazione è dello 0,22% circa (nel caso di dati giornalieri) all'aumentare dei quantili, mentre, quando si esamina quella tra prezzi spot e futures a 4 mesi, si ha una riduzione del 2,81% circa (sempre nel caso di dati giornalieri). Si ha quindi maggiore stabilità nei coefficienti di cointegrazione stimati quando si valutano le relazioni di lungo periodo dei prezzi spot con i futures più a breve termine.

La cointegrazione quantilica rispetto all'analisi di cointegrazione standard, condotta con la metodologia proposta da Johansen, ha permesso di evidenziare differenti relazioni di lungo periodo tra prezzi spot e futures a seconda delle condizioni del mercato e della lunghezza del contratto futures.

Si può ora analizzare la velocità di aggiustamento all'equilibrio di lungo periodo al variare del quantile di riferimento. In Tabella 3.2 sono presentate le stime di α_1 e α_2 nelle rappresentazioni ECM illustrate in precedenza.

<i>Prezzo spot vs. prezzo futures a 1 mese</i>									
<i>Dati giornalieri</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Alpha (LnS)	-0,53670**	-0,57726**	-0,53386**	-0,32723**	-0,24901**	-0,13916	-0,08101	-0,06708	-0,09031
Alpha (LnF1)	-0,15673	-0,15609	-0,01677	0,11419	0,12026	0,22551**	0,25644**	0,22708**	0,05566
<i>Dati settimanali</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Alpha (LnS)	-1,98966**	-0,67854	-0,52026	-0,57226	-0,58726	-0,78438	-0,96390**	-1,10322**	-1,14958
Alpha (LnF1)	-0,84156	0,19857	0,25686	0,23272	0,19325	0,05520	-0,06350	-0,49403	-0,57530
<i>Prezzo spot vs. prezzo futures a 2 mesi</i>									
<i>Dati giornalieri</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Alpha (LnS)	-0,03862	-0,05015**	-0,04010**	-0,01548	-0,00208	0,00868	-0,00534	-0,03614	-0,05130**
Alpha (LnF2)	0,00068	-0,01092	-0,00790	0,00581	0,02557**	0,02848**	0,00902	0,00162	-0,03666
<i>Dati settimanali</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Alpha (LnS)	-0,00664	-0,02417	-0,00169	-0,04852	0,01442	-0,04782	0,03304	-0,11431	-0,30237**
Alpha (LnF2)	0,13405	0,16451	0,13920	0,17237**	0,08869	0,02746	0,04724	-0,12651	-0,18208**
<i>Prezzo spot vs. prezzo futures a 3 mesi</i>									
<i>Dati giornalieri</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Alpha (LnS)	-0,00622	-0,01494	-0,01702	-0,00988	0,00334	0,00523	0,00409	-0,01943	-0,01960
Alpha (LnF3)	0,00319	0,00541	0,00457	0,00772	0,01305	0,01963**	0,01402	0,00954	-0,00364
<i>Dati settimanali</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Alpha (LnS)	-0,06002	-0,10090	-0,01321	-0,01818	-0,04205	0,00684	0,00923	-0,06260	-0,18935**
Alpha (LnF3)	0,06746	0,05777	0,08545	0,10174**	0,05667	0,02771	0,01147	-0,03112	-0,09710**
<i>Prezzo spot vs. prezzo futures a 4 mesi</i>									
<i>Dati giornalieri</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Alpha (LnS)	-0,00407	-0,01083	-0,01143	-0,00338	0,00532	0,00562	0,00593**	-0,01342	-0,01107
Alpha (LnF4)	0,00786	0,00783	0,00453	0,00617	0,00889	0,01353**	0,01149	0,00660	-0,00096
<i>Dati settimanali</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Alpha (LnS)	-0,08379	-0,08561	-0,00656	-0,01203	-0,02201	0,00683	0,00509	-0,01888	-0,09773**
Alpha (LnF4)	0,03269	0,02101	0,05123	0,07652**	0,08171**	0,02708	0,02844	0,00844	-0,03299

Tabella 3.2. Stima dei coefficienti di aggiustamento all'equilibrio di lungo periodo nelle rappresentazioni ECM dei prezzi spot e futures al variare del quantile e della frequenza di osservazione dei dati. (**) denota il rifiuto dell'ipotesi di nullità del coefficiente di aggiustamento ad un livello di significatività del 5%

Nella Figura 3.2 si confrontano i coefficienti di aggiustamento per il prezzo spot ottenuti con la cointegrazione quantilica con quelli riportati in Tabella 2.10, nel caso di dati a frequenza giornaliera. Non si analizzeranno i coefficienti di aggiustamento relativi ai prezzi futures in quanto, nella maggior parte dei casi, non statisticamente diversi da zero a un livello del 5%. Anche con la cointegrazione quantilica si ha conferma dell'esogenità dei prezzi futures dalle relazioni di cointegrazione.

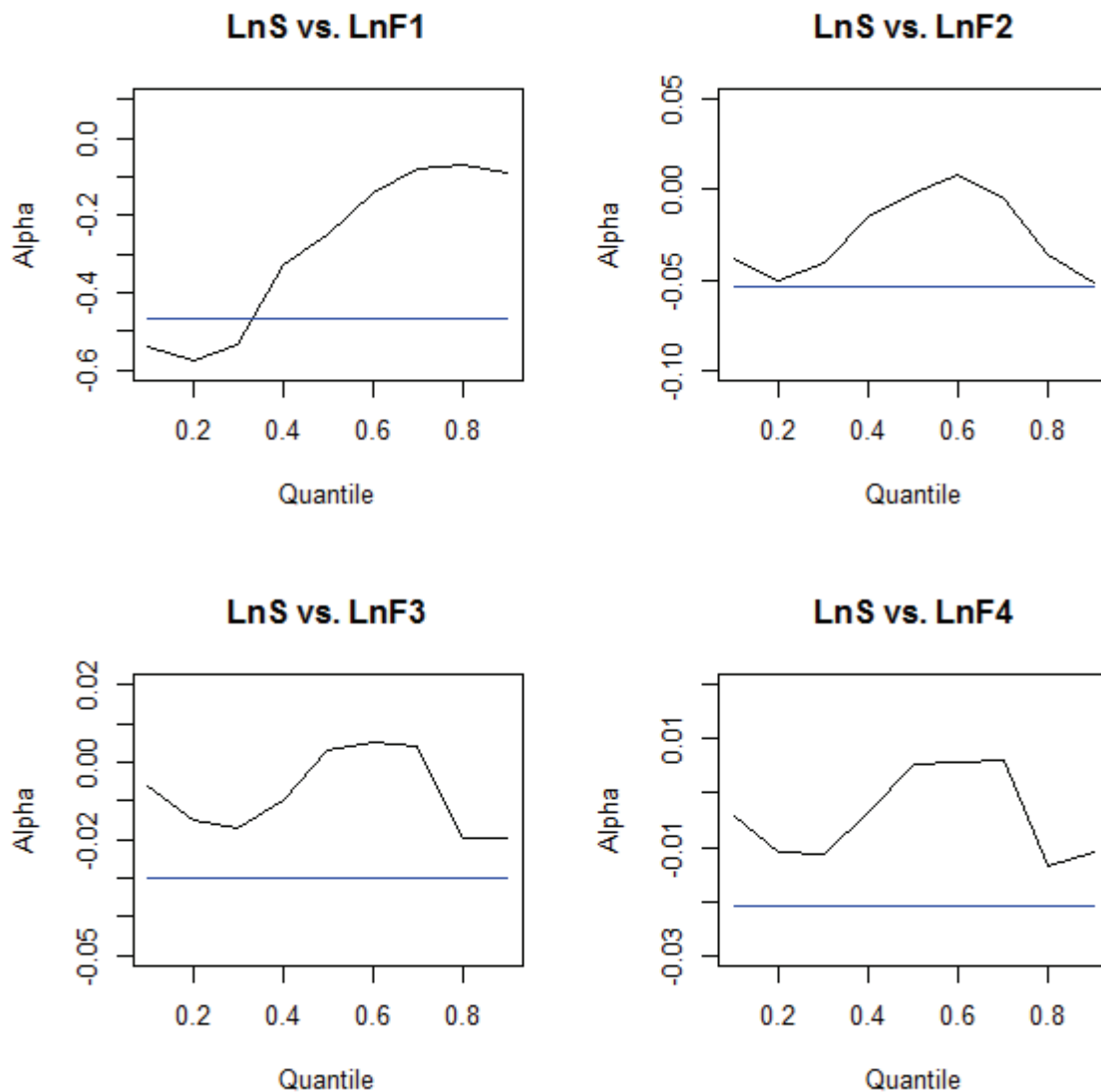


Figura 3.2. Coefficienti di aggiustamento all'equilibrio di lungo periodo per il logaritmo del prezzo spot con dati a frequenza giornaliera. In nero sono rappresentati quelli ottenuti con la cointegrazione quantilica, mentre in blu quelli con la procedura di Johansen

La stima dei coefficienti di aggiustamento del prezzo spot ottenuta con la procedura di Johansen viene sovrastimata dalla cointegrazione quantilica, con differenze meno pronunciate per i quantili minori e maggiori. Ciò è vero quando si considerano le relazioni ECM tra i prezzi spot e futures a 2, 3 e 4 mesi¹⁰. Si ha sia sovrastima che sottostima quando si considera la relazione ECM tra il prezzo

¹⁰ In questi casi si hanno molti coefficienti di aggiustamento stimati non statisticamente diversi da zero a un livello di significatività del 5%

spot e il futures a 1 mese. In quest'ultimo caso la velocità di aggiustamento del prezzo spot all'equilibrio di lungo periodo diminuisce all'aumentare del quantile di riferimento: con prezzi spot alti (bassi) si ha una minore (maggiore) velocità di aggiustamento all'equilibrio di lungo periodo. Per le altre tre rappresentazioni ECM si ha una velocità di aggiustamento che è maggiore nei quantili più piccoli e grandi rispetto agli intermedi. Pertanto con futures a più lunga scadenza la velocità di aggiustamento del prezzo spot all'equilibrio di lungo periodo è minore quando i prezzi spot sono ad un livello mediano.

Nella Figura 3.3 si hanno i risultati nel caso di dati a frequenza settimanale.

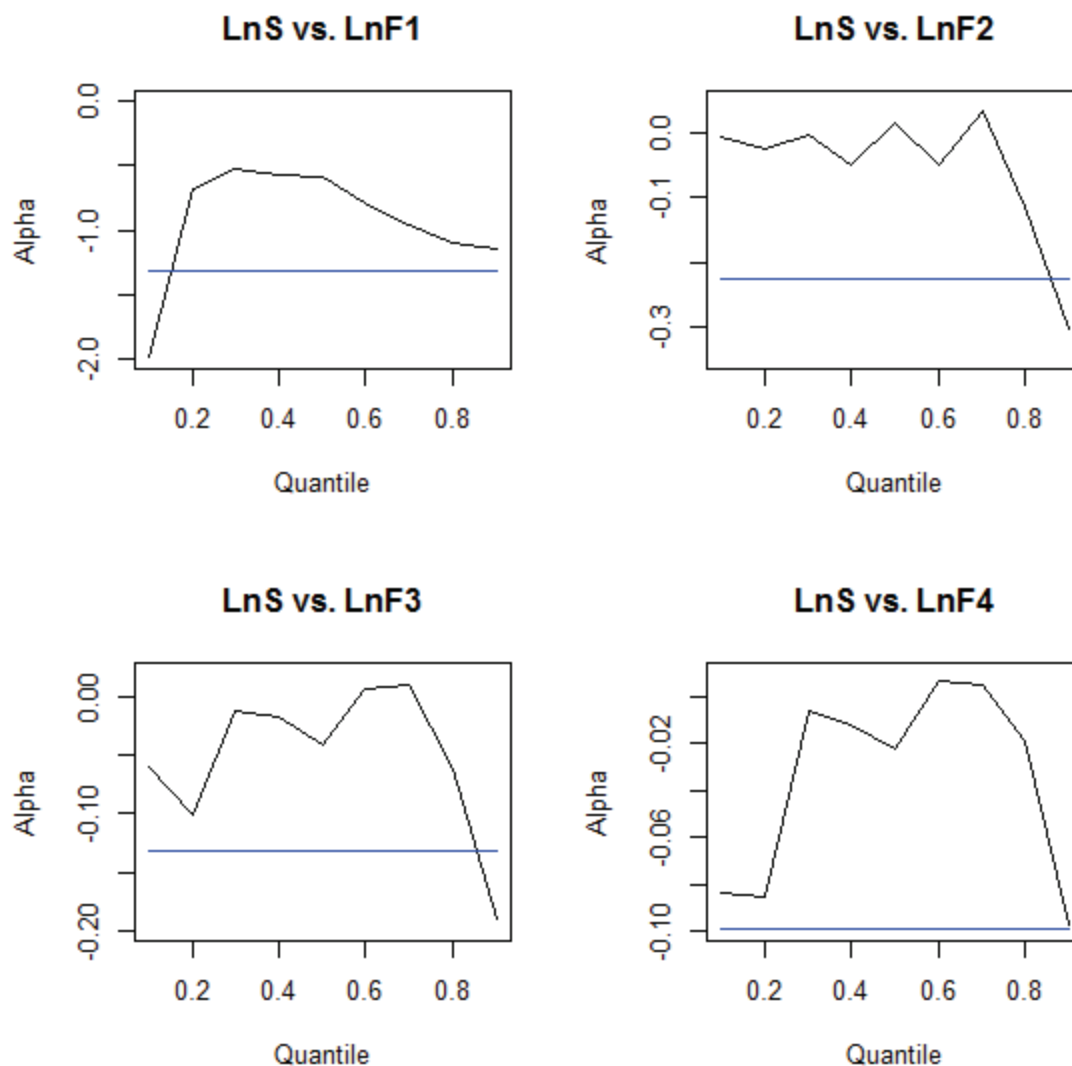


Figura 3.3. Coefficienti di aggiustamento all'equilibrio di lungo periodo per il logaritmo del prezzo spot con dati a frequenza settimanale. In nero sono rappresentati quelli ottenuti con la cointegrazione quantilica, mentre in blu quelli con la procedura di Johansen

Si hanno notevoli differenze rispetto ai risultati riportati nella Figura 3.2. Il trend comune in tutte e quattro le relazioni ECM qui considerate è un aumento (in valore assoluto) del coefficiente di aggiustamento per i quantili più elevati. Quando si considerano dati a frequenza settimanale la

velocità di aggiustamento maggiore (tranne per la relazione ECM tra prezzi spot e futures a 1 mese) si ha quando si considera un prezzo spot molto elevato.

3.3. Test per la cointegrazione quantilica.

Una volta ottenute le stime dei coefficienti con la procedura della cointegrazione quantilica si può valutare se il vettore di cointegrazione β_τ sia o meno costante. Per farlo si può utilizzare il test proposto in Xiao (2009), basato sulla seguente verifica di ipotesi

$$H_0: \beta_\tau = \bar{\beta},$$

dove:

- $\tau \in \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9\}$;

- $\bar{\beta}$ è un vettore di costanti ignote.

Per testare il sistema di ipotesi si può usare una statistica test funzione della differenza $(\hat{\beta}_\tau - \bar{\beta})$, la cui distribuzione asintotica, sulla base di (9) e sotto l'ipotesi nulla, è

$$T(\hat{\beta}_\tau - \bar{\beta}) \Rightarrow \frac{1}{f_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}(\tau))} \left[\int_0^1 \underline{B}_v(r) \underline{B}'_v(r) \right]^{-1} \int_0^1 \underline{B}_v(r) dB_{\psi^*}^*(r).$$

Nella pratica $\bar{\beta}$ è un vettore di costanti ignote e bisogna ricavarne una stima. Supponiamo tale vettore sia stimato con $\hat{\beta}$, allora la statistica test utilizzata sarà

$$\hat{V}_T(\tau) = T(\hat{\beta}_\tau - \hat{\beta}).$$

Sotto l'ipotesi nulla si ha

$$\hat{V}_T(\tau) \Rightarrow \frac{1}{f_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}(\tau))} \left[\int_0^1 \underline{B}_v(r) \underline{B}'_v(r) \right]^{-1} \int_0^1 \underline{B}_v(r) dB_{\psi^*}^*(r) - \underset{T \rightarrow \infty}{plim} T(\hat{\beta}_\tau - \hat{\beta}),$$

che dipende dalla stima di $\bar{\beta}$ che si decide di utilizzare. La necessità di stimare $\bar{\beta}$ introduce una componente aggiuntiva ($\underset{T \rightarrow \infty}{plim} T(\hat{\beta}_\tau - \hat{\beta})$). Se $\hat{\beta}$ è una stima OLS (Ordinary Least Squares) ottenuta a partire dall'equazione (10) allora, sotto l'ipotesi nulla

$$\sup_{\tau} |\hat{V}_T(\tau)| \Rightarrow \sup_{\tau} \left| \frac{1}{f_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}(\tau))} \left[\int_0^1 \underline{B}_v(r) \underline{B}'_v(r) \right]^{-1} \int_0^1 \underline{B}_v(r) d \left(B_{\psi^*}^*(r) - f_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}(\tau)) B_\varepsilon^*(r) \right) \right|,$$

dove $B_\varepsilon^*(r)$ è il limite delle somme parziali di ε_t . Il test qui condotto è basato sulla statistica test di Kolmogoroff-Smirnoff $\sup_{\tau} |\hat{V}_T(\tau)|$. I valori critici per tale statistica test possono essere generati mediante simulazione o metodi di ricampionamento. La procedura per ricavare i valori critici

utilizzata è la seguente¹¹, dove il simbolo * è usato per identificare le quantità ottenute mediante *bootstrap* dal campione originario:

(a) si ottengono le stime $\widehat{\beta}_\tau$ e $\widehat{\beta}$ applicando la regressione quantilica e OLS, rispettivamente, alla seguente equazione

$$y_t = a + \beta x_t + \sum_{j=-R}^R f_j \Delta x_{t-j} + \varepsilon_t.$$

Una volta ottenute le stime si può calcolare la statistica test $\widehat{V}_T(\tau) = T(\widehat{\beta}_\tau - \widehat{\beta})$ e si ottengono i residui della regressione

$$\widehat{u}_t = y_t - \widehat{a} - \widehat{\beta} x_t, t = 1, \dots, T.$$

(b) Definito $\widehat{\omega}_t = \{v_t, \widehat{u}_t\}$, dove $v_t = \Delta x_t$, si ipotizza per $\widehat{\omega}_t$ un modello autoregressivo di ordine q :

$$\widehat{\omega}_t = \sum_{j=1}^q \mathbf{B}_j \widehat{\omega}_{t-j} + \mathbf{b}_t, t = (q+1), \dots, T.$$

Per ottenere una stima $\widehat{\mathbf{B}}_j$ di \mathbf{B}_j Xiao consiglia di utilizzare le equazioni di Yule-Walker. Si possono poi ricavare i residui $\widehat{\mathbf{b}}_t$:

$$\widehat{\mathbf{b}}_t = \widehat{\omega}_t - \sum_{j=1}^q \widehat{\mathbf{B}}_j \widehat{\omega}_{t-j}, t = (q+1), \dots, T.$$

(c) Si generano le variabili i.i.d. $\{\mathbf{b}_t^*\}_{t=q+1}^T$ centrando i residui appena ottenuti

$$\widehat{\mathbf{b}}_t - \frac{1}{T-q} \sum_{j=q+1}^T \widehat{\mathbf{b}}_j$$

e si ricava ω_t^* da \mathbf{b}_t^* tramite la seguente autoregressione:

$$\omega_t^* = \sum_{j=1}^q \widehat{\mathbf{B}}_j \omega_{t-j}^* + \mathbf{b}_t^*, t = (q+1), \dots, T$$

dove $\omega_j^* = \widehat{\omega}_j, j = 1, \dots, q$.

(d) Definito $\omega_t^* = \{v_t^*, u_t^*\}$ allo stesso modo di $\widehat{\omega}_t = \{v_t, \widehat{u}_t\}$, si può generare

$$x_t^* = x_{t-1}^* + v_t^*$$

con $x_1^* = x_1$. Poi:

$$y_t^* = \widehat{a} + \widehat{\beta} x_t^* + u_t^*$$

¹¹ Il codice utilizzato nell'implementazione in R si può trovare in Appendice B

In tal modo si è ottenuto il campione di osservazioni (y_t^*, x_t^*) con procedure *bootstrap*.

(e) Si possono infine costruire delle stime *bootstrap* di $\widehat{\beta}_\tau$, $\widehat{\beta}$ e $\widehat{V}_T(\tau)$ a partire dal campione (y_t^*, x_t^*) . Per farlo si devono calcolare $\widehat{\beta}_\tau^*$ e $\widehat{\beta}^*$ applicando la regressione quantilica e OLS a

$$y_t^* = a + \beta x_t^* + \sum_{j=-R}^R f_j \Delta x_{t-j}^* + \varepsilon_t.$$

Come ultimo passaggio si può ricavare la versione *bootstrap* della statistica test

$$\widehat{V}_T^*(\tau) = T(\widehat{\beta}_\tau^* - \widehat{\beta}^*).$$

La distribuzione limite di $\widehat{V}_T^*(\tau)$ può essere approssimata ripetendo i passaggi (b)-(e) molte volte, in questo lavoro sono state fatte 1000 repliche *bootstrap*.

Sia ora $C_t^*(\tau; \vartheta)$ il (100ϑ) -esimo quantile, allora

$$Pr^* \left[\sup_{\tau} |\widehat{V}_T^*(\tau)| \leq C_t^*(\tau; \vartheta) \right] = \vartheta$$

l'ipotesi di coefficienti di cointegrazione costanti verrà non accettata a un livello ϑ se $\sup_{\tau} |\widehat{V}_T^*(\tau)| > C_t^*(\tau; \vartheta)$.

La tipologia di *bootstrap* qui applicata prende il nome di *sieve bootstrap*, introdotta per la prima volta in Kreiss (1988).

In Tabella 3.3 sono riportati i valori della statistica test e i valori critici ottenuti mediante procedure *bootstrap*, sia nel caso di dati giornalieri che settimanali.

Modello	Sup V(τ)	CV10	CV05	CV01
Dati giornalieri				
<i>LnS vs. LnF1</i>	10,75	6,02	7,62	11,20
<i>LnS vs. LnF2</i>	22,73	6,87	8,35	11,80
<i>LnS vs. LnF3</i>	36,75	8,36	10,41	15,61
<i>LnS vs. LnF4</i>	50,42	8,73	10,87	16,06
Dati settimanali				
<i>LnS vs. LnF1</i>	2,83	1,66	2,14	3,11
<i>LnS vs. LnF2</i>	6,28	1,76	2,23	3,27
<i>LnS vs. LnF3</i>	7,39	1,94	2,72	3,75
<i>LnS vs. LnF4</i>	11,54	2,41	2,86	4,03

Tabella 3.3. Test per la costanza dei coefficienti della cointegrazione quantilica. Sono riportati i valori della statistica test ed i valori critici, ottenuti con 1000 repliche *bootstrap*

Per tutte le relazioni considerate, sia con dati a frequenza giornaliera che settimanale, l'ipotesi nulla non viene accettata ad un livello di significatività del 5%: le stime dei coefficienti ottenute con il metodo della cointegrazione quantilica non sono costanti al variare dei quantili (situazione che si avrebbe qualora si considerassero le stime OLS). Sia nel caso di dati giornalieri che settimanali, nella relazione tra prezzi spot e futures a 1 mese l'ipotesi nulla non viene rifiutata a un livello di

significatività dell'1%. Questo risultato è coerente con quanto osservato nella Tabella 3.1, nella quale si era evidenziato che i coefficienti relativi alla prima relazioni di cointegrazione (spot-futures a 1 mese) erano più stabili rispetto a quelli ottenuti negli altri casi.

4. Analisi dei residui.

Nel modello di cointegrazione di Engle e Granger (1987) per verificare se le serie considerate sono o meno cointegrate si fa un test di stazionarietà sui residui. Nel caso in cui essi siano stazionari le serie sono cointegrate, altrimenti si è in presenza della cosiddetta *regressione spuria*.

Con la cointegrazione quantilica si può ragionare nello stesso modo. In Xiao (2009) è proposto un test per la verifica della presenza di cointegrazione quantilica denominato "test robusto di cointegrazione". Il test, in maniera simile a quanto fatto nel modello di Engle e Granger, va a verificare la stabilità dei residui di cointegrazione ottenuti condizionatamente a ciascun quantile.

4.1. Analisi dei residui della cointegrazione lineare.

Nel Capitolo 3, tramite il test di Johansen, si è detto che i prezzi spot erano cointegrati con i futures alle diverse scadenze. Per la verifica della presenza o meno di cointegrazione sono stati presentati due diversi test: il test della traccia e il test dell'autovalore massimo, che sono basati su rapporti delle funzioni di log-verosimiglianza.

Nel modello di Engle e di Granger la presenza o meno di cointegrazione viene determinata a partire dalla stazionarietà dei residui di cointegrazione. In particolare, data la seguente equazione

$$\text{Ln}S_t = \alpha + \beta \text{Ln}Fi_t + \sum_{j=-3}^3 \Pi_j \Delta \text{Ln}Fi_{t-j} + \varepsilon_t.$$

Per stimare il vettore di cointegrazione con il modello di Engle e Granger basta fare una regressione OLS nell'equazione sopra riportata, ottenendo il cosiddetto stimatore OLS Dinamico o DOLS (Dynamic OLS) di β . Lo stimatore DOLS di β quindi non è altro che lo stimatore OLS ottenuto a partire da una relazione di cointegrazione che include valori passati, presenti e futuri delle variazioni dei regressori. Si può dimostrare che se le variabili $\text{Ln}S_t$ e $\text{Ln}Fi_t$ sono cointegrate lo stimatore DOLS è super-consistente ed asintoticamente normale.

Le stime DOLS di β coincidono con quelle ottenute con la procedura di Johansen, rappresentate in Tabella 2.9 del Capitolo 2. Una volta ottenute le stime di α , β e di Π_j , nel modello di Engle e Granger si analizza la stazionarietà dei residui, che in questo caso sono dati da

$$\hat{\varepsilon}_t = \text{Ln}S_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \text{Ln}Fi_t - \sum_{j=-3}^3 \hat{\Pi}_j \Delta \text{Ln}Fi_{t-j}.$$

I residui di cointegrazione ottenuti con il modello di Engle e Granger per le quattro relazioni di cointegrazione al variare della frequenza di osservazione dei dati sono rappresentati nelle Figure seguenti.

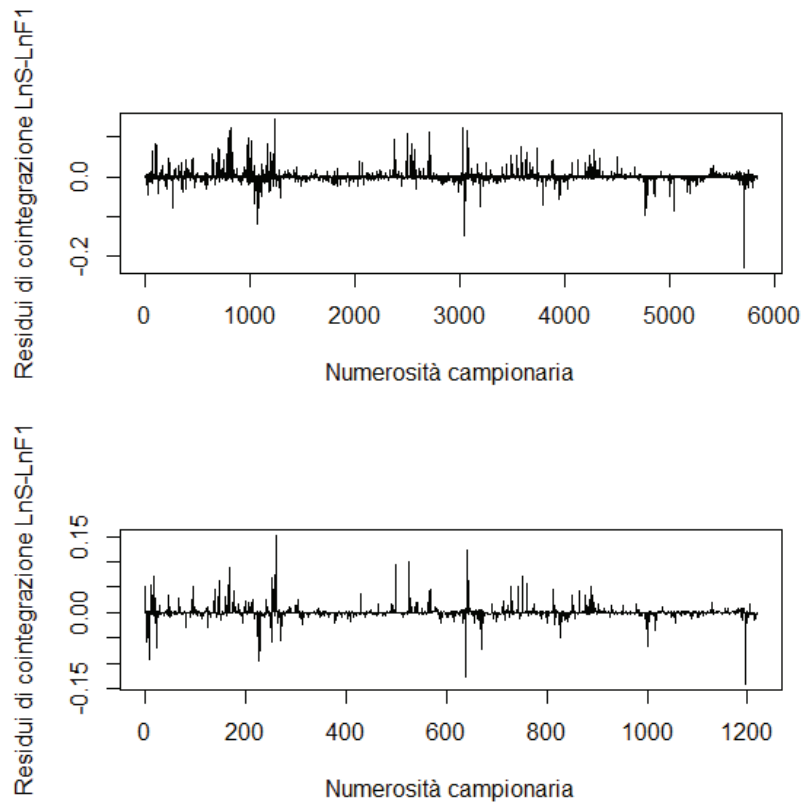


Figura 4.1. Residui ottenuti dalla regressione di cointegrazione di LnS su $LnF1$. Nella Figura in alto si hanno i residui ottenuti nel caso di dati a frequenza giornaliera, in quella in basso nel caso di dati a frequenza settimanale

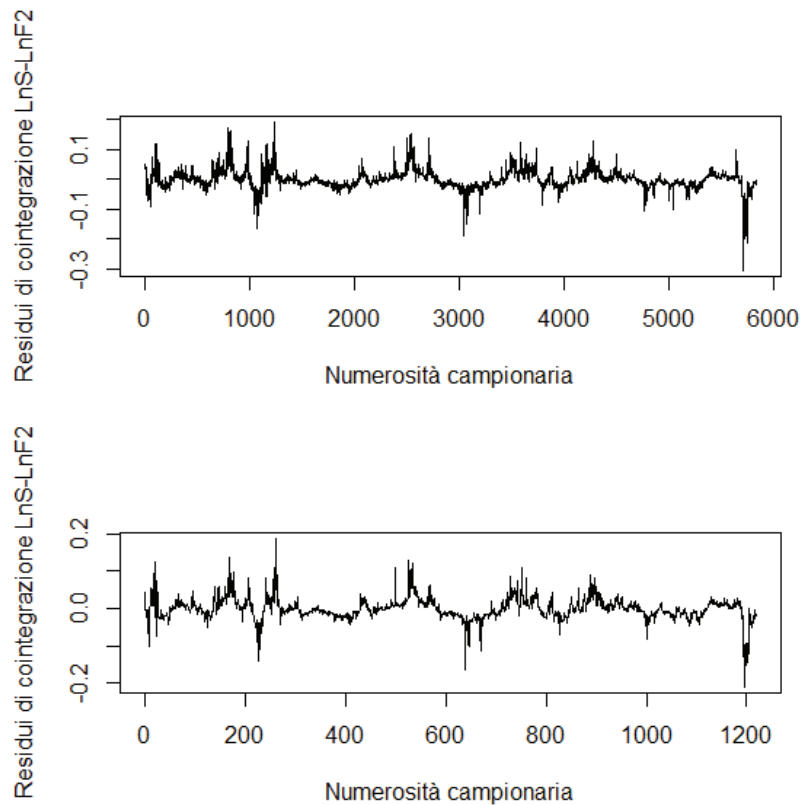


Figura 4.2. Residui ottenuti dalla regressione di cointegrazione di LnS su $LnF2$. Nella Figura in alto si hanno i residui ottenuti nel caso di dati a frequenza giornaliera, in quella in basso nel caso di dati a frequenza settimanale

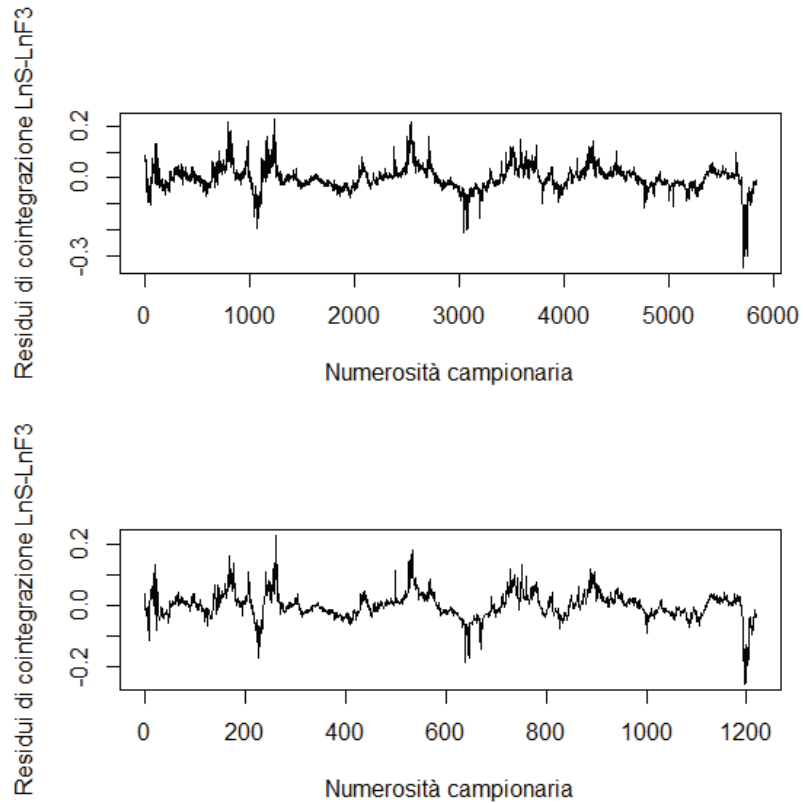


Figura 4.3. Residui ottenuti dalla regressione di cointegrazione di LnS su $LnF3$. Nella Figura in alto si hanno i residui ottenuti nel caso di dati a frequenza giornaliera, in quella in basso nel caso di dati a frequenza settimanale

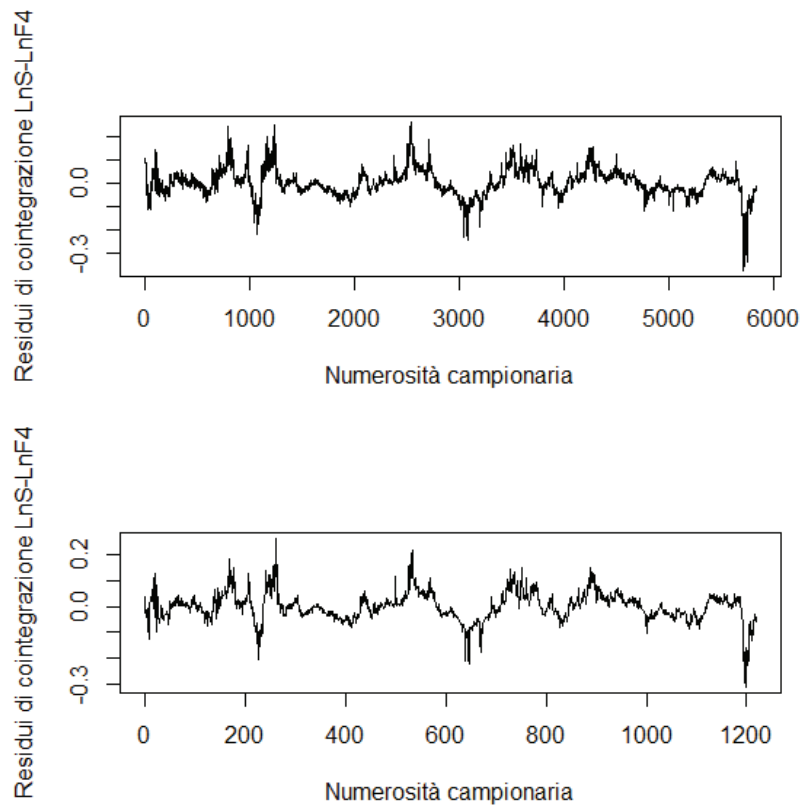


Figura 4.4. Residui ottenuti dalla regressione di cointegrazione di LnS su $LnF4$. Nella Figura in alto si hanno i residui ottenuti nel caso di dati a frequenza giornaliera, in quella in basso nel caso di dati a frequenza settimanale

Per meglio verificare la stazionarietà dei residui di cointegrazione è necessario fare un test di radice unitaria. Ad esempio, se si utilizza il test ADF, si considera la seguente regressione

$$\Delta \hat{\varepsilon}_t = a + \gamma \hat{\varepsilon}_{t-1} + \sum_j \psi_j \Delta \hat{\varepsilon}_{t-j} + e_t .$$

In questo caso si sta applicando un test ADF a dei residui di cointegrazione, non è pertanto possibile utilizzare i valori critici delle usuali distribuzioni di DF. Per costruzione lo stimatore OLS minimizza la varianza dei residui: "sceglie" quindi i residui che hanno varianza campionaria più piccola, anche se le variabili non sono cointegrate, facendo apparire i residui stimati $\hat{\varepsilon}_t$ "più stazionari" di quanto non lo siano in realtà. Pertanto se si utilizzano i valori critici della distribuzione DF usuale, si tende a sovra-rifiutare l'ipotesi nulla.

Per i motivi appena citati si è deciso di utilizzare i valori critici ottenuti a partire dalla formula di Mackinnon (2010), che fornisce i valori critici di livello p per ogni T

$$C_k(p) = \beta_\infty + \beta_1 T^{-1} + \beta_2 T^{-2} ,$$

dove:

- β_∞ è una stima del valore critico asintotico per un test di radice unitaria di livello p ;
- β_1 e β_2 dipendono dal numero K di regressori inclusi nella relazione di cointegrazione e da quali termini deterministici si è deciso di inserire in tale relazione.

I valori critici di Mackinnon per il test di cointegrazione nel caso di dati a frequenza giornaliera e settimanale sono riportati in Tabella 4.1.

	0,1	0,05	0,01
Dati giornalieri	-3,902	-3,339	-3,047
Dati settimanali	-3,909	-3,343	-3,050

Tabella 4.1. Valori critici di Mackinnon per il test di cointegrazione al variare della frequenza di osservazione dei dati e del livello di significatività del test

Per verificare se si ha o meno presenza di cointegrazione si devono calcolare i valori della statistica test di Dickey-Fuller ottenuti a partire da ciascun residuo di cointegrazione, riportati in Tabella 4.2.

	Dati giornalieri	Dati settimanali
<i>LnS-LnF1</i>	-40,611	-24,464
<i>LnS-LnF2</i>	-15,790	-10,235
<i>LnS-LnF3</i>	-11,250	-7,940
<i>LnS-LnF4</i>	-9,484	-7,021

Tabella 4.2. Valori della statistica test del test ADF calcolato a partire dei residui delle quattro relazioni di cointegrazione considerate, nel caso di dati a frequenza giornaliera e settimanale

Se si confrontano i valori della statistica test del test ADF in Tabella 4.2 con i valori critici riportati in Tabella 4.1 si nota che i residui di cointegrazione, per tutte e quattro le relazioni, sono stazionari ad un qualunque livello di significatività. Pertanto, anche usando una procedura differente, con il

modello di Engle e Granger sono stati ottenuti gli stessi risultati della procedura di Johansen, ovvero che i prezzi spot sono cointegrati con tutti e quattro i futures.

4.2. Test robusto di cointegrazione quantilica.

Nell'ambito della cointegrazione lineare si hanno molti metodi per verificare se due o più serie storiche sono tra di loro cointegrate, le procedure più utilizzate sono quelle di Engle e Granger (1987) e Johansen (1991). Dato che le relazioni di lungo periodo tra due o più variabili hanno suscitato particolare interesse in ambito economico alcuni autori, tra cui Park et al. (1988) e Shin (1994), per verificare la presenza o meno di cointegrazione hanno sviluppato test basati sui residui. Più recentemente, Xiao e Phillips (2002) hanno applicato il test CUSUM, solitamente impiegato per la verifica della stabilità strutturale dei parametri di un modello, ai residui della regressione di cointegrazione e hanno sviluppato un test a partire dai residui di cointegrazione per testare l'ipotesi nulla di cointegrazione.

Per esaminare le fluttuazioni presenti nei residui di cointegrazione Xiao e Phillips (2002) hanno calcolato la somma cumulata dei residui di cointegrazione ottenuti a partire dalla regressione di cointegrazione stimata con OLS. Sotto l'ipotesi nulla di cointegrazione i residui sono generati da un processo stabile e la statistica test ottenuta dalla loro somma cumulata converge a una funzione di moti Browniani. Sotto l'ipotesi alternativa di assenza di cointegrazione le fluttuazioni nei residui fanno sì che la statistica test diverga ad infinito asintoticamente.

Xiao (2009) estende la procedura di Xiao e Phillips (2002) a residui ottenuti con il metodo della cointegrazione quantilica.

Per costruire il test si sono ottenuti i residui di cointegrazione stimando con la regressione quantilica la seguente equazione per ogni τ

$$\text{Ln}S_t = \alpha + \beta \text{Ln}F_i_t + \sum_{j=-3}^3 \Pi_j \Delta \text{Ln}F_{i_{t-j}} + \varepsilon_t.$$

Definito $\psi_\tau(u) = \tau - I(u < 0)$, dove $I(u < 0)$ è una funzione indicatrice che vale 1 quando $u < 0$ e 0 altrimenti, si sono presi i residui della regressione quantilica

$$\varepsilon_{t,\tau} = \text{Ln}S_t - Q_\tau(\text{Ln}S_t|I_t) = \text{Ln}S_t - \alpha - \beta \text{Ln}F_i_t - \sum_{j=-3}^3 \Pi_j \Delta \text{Ln}F_{i_{t-j}},$$

dove:

- I_t rappresenta l'insieme informativo al tempo t ;
- $Q_\tau(\text{Ln}S_t|I_t)$ è la funzione del quantile di $\text{Ln}S_t$ condizionata a I_t .

La relazione di cointegrazione può essere verificata osservando le fluttuazioni dei residui di cointegrazione $\hat{\varepsilon}_{t,\tau}$ ottenuti a partire dalla regressione quantilica¹², dove

$$\hat{\varepsilon}_{t,\tau} = LnS_t - \hat{\alpha}_\tau - \hat{\beta}_\tau LnFi_t - \sum_{j=-3}^3 \hat{\Pi}_{j,\tau} \Delta LnFi_{t-j}.$$

In presenza di cointegrazione le fluttuazioni del processo generatore dei residui dovrebbero essere stabili, senza divergere, mentre in assenza di cointegrazione si ha un processo generatore più instabile.

Sulla base di quanto visto finora la presenza di cointegrazione può essere testata direttamente a partire dai residui di cointegrazione $\varepsilon_{t,\tau}$. Si consideri il seguente processo costituito da somme parziali

$$Y_T(r) = \frac{1}{\omega_\psi \sqrt{T}} \sum_{j=1}^{\lfloor Tr \rfloor} \psi_\tau(\varepsilon_{j,\tau}),$$

dove:

- ω_ψ^2 è la varianza di lungo periodo di $\psi_\tau(\varepsilon_{j,\tau})$;
- $\lfloor Tr \rfloor$ indica la parte intera di Tr .

Sotto condizioni di regolarità appropriate si può dimostrare che

$$\frac{1}{\omega_\psi \sqrt{T}} \sum_{j=1}^{\lfloor Tr \rfloor} \psi_\tau(\varepsilon_{j,\tau}) \Rightarrow \mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) \sim BM(0, \mathbf{\Omega}),$$

dove $\mathbf{B}_\omega(\mathbf{r})$ è un vettore di moti Browniani con matrice di covarianza $\mathbf{\Omega}$. Per approfondimenti si veda Xiao (2009).

Scelta una funzione continua h che misuri le fluttuazioni di $Y_T(r)$, un test "robusto" per la cointegrazione può essere costruito basandosi su $h(Y_T(r))$. Una scelta di h appropriata porta alla costruzione di una statistica test a là Kolmogoroff-Smirnoff del tipo

$$CS_T(\tau) = \max_{n=1, \dots, T} \frac{1}{\omega_\psi \sqrt{T}} \left| \sum_{j=1}^n \psi_\tau(\varepsilon_{j,\tau}) \right|.$$

Sotto l'ipotesi nulla di cointegrazione $CS_T(\tau)$ converge a una funzione di moti Browniani, mentre sotto l'alternativa converge a ∞ . Uno stimatore consistente di $CS_T(\tau)$ può essere ottenuto da

$$\widehat{CS}_T(\tau) = \max_{n=1, \dots, T} \frac{1}{\widehat{\omega}_\psi \sqrt{T}} \left| \sum_{j=1}^n \psi_\tau(\hat{\varepsilon}_{j,\tau}) \right|,$$

¹² Per motivi di spazio i grafici dei residui della cointegrazione quantilica sono stati messi in Appendice A

dove $\widehat{\omega}_\psi$ è uno stimatore consistente di ω_ψ , che può essere ottenuto a partire da

$$\widehat{\omega}_\psi^2 = \sum_{h=-M}^M K\left(\frac{h}{m}\right) \widehat{f}_{\psi,\psi}(h), \text{ con } \widehat{f}_{\psi,\psi}(h) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} \psi_\tau(\varepsilon_{t,\tau}) \psi_\tau(\varepsilon_{t+h,\tau}).$$

Sulla base di quanto proposto in Xiao e Phillips (2002) K è il Kernel di Bartlett, dato da

$$K(u) = \begin{cases} 1 - |u|, & \text{se } |u| \leq 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Poi M è una bandwidth scelta nel modo seguente $M = O(2T^{1/3})$, quindi nel caso di dati a frequenza giornaliera $M = 36$ e nel caso di dati a frequenza settimanale $M = 21$.

Per calcolare i valori critici del test $CS_T(\tau)$, come proposto in Li e Xiao (2000), si è utilizzato il *sieve bootstrap* introdotto nel Capitolo 3, facendo 1000 replicazioni *bootstrap*.

In Tabella 4.3 sono riportati i valori assunti dalla statistica test $CS_T(\tau)$ al variare del livello del quantile di riferimento τ e della relazione di cointegrazione considerata. Il codice utilizzato per il calcolo della statistica test $CS_T(\tau)$ in R è riportato in Appendice B.

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Dati giornalieri									
<i>LnS-LnF1</i>	1,293	1,955	2,085	2,105	2,075	1,841	1,811	1,851	1,728
<i>LnS-LnF2</i>	1,800	1,755	1,683	1,782	1,776	1,456	1,378	1,386	1,305
<i>LnS-LnF3</i>	1,589	1,662	1,657	1,653	1,588	1,517	1,418	1,302	1,291
<i>LnS-LnF4</i>	1,501	1,544	1,673	1,626	1,554	1,561	1,469	1,226	1,239
Dati settimanali									
<i>LnS-LnF1</i>	1,649	1,880	1,866	1,959	1,713	1,644	1,589	1,599	1,553
<i>LnS-LnF2</i>	1,622	1,468	1,430	1,393	1,465	1,176	1,079	1,126	1,164
<i>LnS-LnF3</i>	1,356	1,549	1,333	1,261	1,316	1,138	1,110	1,155	1,124
<i>LnS-LnF4</i>	1,377	1,265	1,211	1,208	1,216	1,222	1,083	1,199	1,147

Tabella 4.3. Valori della statistica test per la verifica della presenza di cointegrazione quantilica. (*) denota il rifiuto dell'ipotesi nulla di stabilità del processo generatore dei residui a un livello del 5%

In Tabella 4.3 si nota che, sia per dati a frequenza giornaliera che settimanale, il valore della statistica test $CS_T(\tau)$ diminuisce all'aumentare del livello τ del quantile di riferimento e della lunghezza del contratto futures considerato nella relazione di cointegrazione quantilica. Nel caso di dati a frequenza giornaliera si ha un leggero aumento del valore della statistica test per i quantili di livello intermedio.

Per tutte e quattro le relazioni di cointegrazione ad un livello di significatività del 5% i valori della statistica test ottenuti sono sempre minori dei valori critici di riferimento. Anche con la cointegrazione quantilica si ha conferma della presenza di una relazione di lungo periodo tra i prezzi spot e futures del WTI.

5. Analisi delle causalità.

Come riportato in Bekiros e Diks (2008) molti studi hanno finora analizzato le relazioni di anticiporitardo tra prezzi spot e futures delle diverse *commodities*. Per primi Garbade e Silber (1983) hanno presentato un modello per analizzare l'effetto di arbitraggi nei mercati spot-futures delle *commodities*. Quanto da loro fatto è stato poi utilizzato da Silvapulle e Moosa (1999) per studiare il mercato mondiale del petrolio e da Bopp e Sitzler (1987), che hanno testato l'ipotesi secondo cui i prezzi futures sono buoni predittori dei prezzi spot nel mercato del greggio.

In teoria, dato che sia i prezzi spot che futures riflettono il medesimo valore dello stesso *asset* sottostante e considerata la possibilità di arbitraggi istantanei, i prezzi futures non dovrebbero mai anticipare né ritardare gli spot. La maggior parte degli studi concordano, invece, nell'affermare che i prezzi futures influenzano gli spot, ma non viceversa. A motivazione di ciò spesso si dichiara che i prezzi futures rispondono a nuove informazioni più rapidamente degli spot, grazie soprattutto a costi di transazione inferiori e alla maggiore flessibilità data dalle vendite allo scoperto.

Riferendosi in maniera specifica al mercato del greggio, se la nuova informazione indica un possibile aumento dei prezzi spot per, ad esempio, una riduzione dell'offerta globale, un operatore potrebbe comprare sul mercato spot o su quello futures. Mentre l'acquisto spot richiede un maggior esborso iniziale e potrebbe comportare più tempo per essere effettuato, le transazioni futures possono essere fatte immediatamente e con minore spesa da speculatori che non hanno alcun interesse nell'acquisto della *commodity*. Allo stesso modo un *hedger*¹³, che ha interesse nella *commodity* e vincoli sulle scorte, compra contratti futures. Per questi (e altri) motivi sia gli speculatori che gli *hedgers* reagiscono all'arrivo di nuove informazioni preferendo transazioni nel mercato futures piuttosto che in quello spot. Inoltre, per quanto affermato in Silvapulle e Moosa (1999), i prezzi spot rispondono con ritardo all'arrivo di nuove informazioni, in quanto le transazioni nel mercato spot non possono essere eseguite alla stessa velocità del mercato futures.

In letteratura, come detto in precedenza, la maggior parte degli studi supporta l'anticipo dei prezzi futures sugli spot, ma vi sono altre analisi che evidenziano l'anticipo degli spot sui futures ed altre ancora che sottolineano l'esistenza di una relazione bidirezionale tra i due. Si possono ora proporre alcuni interessanti spunti a supporto di ciascuna delle tre evidenze:

- futures anticipano spot. Garbade e Silber (1983) hanno analizzato sette differenti mercati di *commodities* verificando che i prezzi futures anticipano gli spot senza che valga il viceversa;
- spot anticipano futures. Moosa (1996) ha evidenziato che un cambiamento nel prezzo spot del greggio causa una reazione da parte di tutti gli operatori del mercato, la quale provoca degli effetti anche nel mercato futures. In un primo momento a muoversi sono gli arbitraggisti e gli speculatori. I primi reagiscono alla violazione della relazione teorica tra prezzi spot e futures del greggio indicata all'inizio del Capitolo 2, i secondi rivedono le proprie aspettative sul prezzo spot e

¹³ Con *hedger* si indica quell'operatore finanziario che ricorre a prodotti derivati (come futures, forwards, etc.) con fini di copertura e non speculativi

rispondono alla disparità tra prezzo spot atteso e futures. Allo stesso modo gli speculatori che operano nei mercati futures modificano le proprie aspettative su tali prezzi rispondendo alla disparità tra prezzi futures correnti ed attesi;

- relazione bidirezionale tra prezzi spot e futures. Kawaller et al. (1988) hanno affermato che sia i prezzi spot che i futures sono influenzati dalla propria storia passata, così come dall'attuale informazione presente nel mercato. Gli schemi di anticipo-ritardo pertanto cambiano dinamicamente non appena giunge nuova informazione.

Sulla base di quanto visto finora l'ipotesi più forte in letteratura è che i prezzi futures anticipano gli spot. Si può vedere se ciò valga anche per le serie di prezzi spot e futures considerate in questo elaborato. Per farlo si verificherà la presenza di causalità tra prezzi spot e futures del WTI utilizzando procedure parametriche e non parametriche.

5.1. Analisi di causalità secondo Granger.

Tra le serie dei prezzi spot e futures del WTI si analizzerà la presenza o meno di causalità nel senso di Granger, che si può definire nel modo seguente. Se una variabile, o un gruppo di variabili, y_1 aiuta a migliorare le previsioni di un'altra variabile o gruppo di variabili, y_2 allora si dice che y_1 causa secondo Granger y_2 . In maniera più formale:

- sia $\mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1t} \\ \mathbf{y}_{2t} \end{bmatrix}$ una serie storica multivariata stazionaria in cui le K componenti sono suddivise nei due gruppi \mathbf{y}_{1t} e \mathbf{y}_{2t} ;

- sia $I_t = \{\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{y}_{t-2}, \dots\}$ l'insieme delle osservazioni al tempo t ;

- sia $\mathbf{y}_{2,t+h|t} = E(\mathbf{y}_{2,t+h} | I_t)$ il previsore ottimale (secondo il criterio del *Mean Square Error* - MSE) di $\mathbf{y}_{2,t+h}$ sulla base di I_t e sia $\Sigma_2(h | I_t)$ il suo MSE di previsione.

Allora si dice che \mathbf{y}_{1t} causa secondo Granger \mathbf{y}_{2t} se e solo se

$$\Sigma_2(h | I_t) < \Sigma_2(h | I_t \setminus \{\mathbf{y}_{1s}, s \leq t\}), \text{ per almeno un } h = 1, 2, \dots$$

Se si suppone che \mathbf{y}_t sia modellato mediante un modello VAR(p) stazionario del tipo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1t} \\ \mathbf{y}_{2t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_{01} \\ \Phi_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_{11,1} & \Phi_{12,1} \\ \Phi_{21,1} & \Phi_{22,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1,t-1} \\ \mathbf{y}_{2,t-1} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \Phi_{11,p} & \Phi_{12,p} \\ \Phi_{21,p} & \Phi_{22,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1,t-p} \\ \mathbf{y}_{2,t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1t} \\ \mathbf{a}_{2t} \end{bmatrix} \\ &= \Phi_0 + \Phi_1 \mathbf{y}_{t-1} + \dots + \Phi_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{a}_t, \end{aligned}$$

dove $\mathbf{a}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1t} \\ \mathbf{a}_{2t} \end{bmatrix} \sim WN(\mathbf{0}, \Sigma)$, con Σ non singolare.

Allora si può mostrare che \mathbf{y}_{1t} non causa (nel senso di Granger) \mathbf{y}_{2t} , ovvero $\Sigma_2(h | I_t) = \Sigma_2(h | I_t \setminus \{\mathbf{y}_{1s}, s \leq t\})$ per $h = 1, 2, \dots$, se e solo se $\Phi_{21,i} = \mathbf{0}$ per $i = 1, 2, \dots, p$. Analogamente \mathbf{y}_{2t} non causa (nel senso di Granger) \mathbf{y}_{1t} , ovvero $\Sigma_1(h | I_t) = \Sigma_1(h | I_t \setminus \{\mathbf{y}_{2s}, s \leq t\})$ per $h = 1, 2, \dots$, se e solo se $\Phi_{12,i} = \mathbf{0}$ per $i = 1, 2, \dots, p$.

Per l'analisi di causalità secondo Granger in un modello VAR(p) si deve verificare che alcuni coefficienti siano pari a zero. Definiamo:

- $\mathbf{B} = [\Phi_0 \ \Phi_1 \ \dots \ \Phi_p]$ la matrice di dimensione $K \times (Kp+1)$ contenente tutte le matrici di coefficienti;
- $\boldsymbol{\beta} = \text{vec}(\mathbf{B})$ la vettorizzazione di dimensione $(K^2p+K) \times 1$ della matrice \mathbf{B} ;
- \mathbf{C} una matrice di selezione di dimensione $N \times (K^2p+K)$ e di rango N ;
- \mathbf{c} un vettore di dimensione $(N \times 1)$.

Per la verifica dell'assenza di causalità secondo Granger si può utilizzare il seguente sistema di ipotesi

$$\begin{cases} H_0: \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c} \\ H_1: \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{c} \end{cases}$$

Se $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ è lo stimatore OLS/ML di $\boldsymbol{\beta}$ allora si può dimostrare che

$$\sqrt{T}(\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} N[\mathbf{0}, \mathbf{C}(\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma})\mathbf{C}'],$$

dove:

- \otimes indica il prodotto di Kronecker;

- $\boldsymbol{\Gamma} = p \lim \mathbf{Z}\mathbf{Z}'/T$ e $\mathbf{Z} = [\mathbf{Z}_0 \ \dots \ \mathbf{Z}_{T-1}]$ è la matrice $(Kp \times 1) \times T$ in cui $\mathbf{Z}_t = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{y}_t \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{t-p+1} \end{bmatrix}$.

Sotto H_0 si può mostrare che

$$T(\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})' [\mathbf{C}(\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma})\mathbf{C}']^{-1} (\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}) \xrightarrow{d} \chi^2(N).$$

Se si sostituiscono a $\boldsymbol{\Gamma}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ le loro stime consistenti $\hat{\boldsymbol{\Gamma}} = \mathbf{Z}\mathbf{Z}'/T$ e $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ allora la statistica risultante è la seguente

$$\lambda_w = (\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})' [\mathbf{C}((\mathbf{Z}\mathbf{Z}')^{-1} \otimes \hat{\boldsymbol{\Sigma}})\mathbf{C}']^{-1} (\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}),$$

la cui distribuzione asintotica è ancora $\chi^2(N)$.

Come riportato in Bekiros e Diks (2008) se due (o più) serie sono cointegrate allora la verifica della causalità secondo Granger può essere basata sul modello VECM piuttosto che sul modello VAR. In particolare, l'assenza di cointegrazione comporterebbe l'assenza di una relazione tra prezzi spot e futures e, quindi, i prezzi spot non convergono ai futures alla scadenza del contratto, come invece è supposto in teoria.

Per questo motivo il test per la causalità secondo Granger è stato condotto a partire dalle seguenti due equazioni

$$\Delta \ln S_t = \alpha_{01} + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} + \sum_{j=1}^M \delta_{1,j} \Delta \ln F_{i_{t-j}} + \sum_{j=1}^N \gamma_{1,j} \Delta \ln S_{t-j} + e_{1,t},$$

$$\Delta \ln F_{i_t} = \alpha_{02} + \alpha_2 \hat{\varepsilon}_{t-1} + \sum_{j=1}^M \delta_{2,j} \Delta \ln F_{i_{t-j}} + \sum_{j=1}^N \gamma_{2,j} \Delta \ln S_{t-j} + e_{2,t},$$

dove:

- $\hat{\varepsilon}_{t-1}$ è il residuo di cointegrazione ritardato ottenuto a partire dall'equazione (10);
- N e M sono i ritardi. Si è deciso di porre N=M e sono stati fissati considerando i ritardi scelti per il modello VAR con il criterio di Hannan-Quinn, presentati in Tabella 2.7;
- $e_{1,t}$ e $e_{2,t}$ sono due termini di errore incorrelati tra loro e stazionari.

A questo punto verificare che i prezzi futures non causano secondo Granger i prezzi spot e che i prezzi spot non causano secondo Granger i prezzi futures equivale a testare, rispettivamente, le seguenti ipotesi

$$H_{01}: \delta_{1,j} = 0 \forall j,$$

$$H_{02}: \gamma_{2,j} = 0 \forall j.$$

Non accettare H_{01} (H_{02}) implica che i prezzi futures (spot) del WTI causano secondo Granger gli spot (futures).

In Tabella 5.1 si hanno i risultati (valore della statistica test e relativo p-value) del test per la causalità secondo Granger nel caso di serie giornaliere e settimanali.

	Dati giornalieri	Dati settimanali
$\ln F1 \rightarrow \ln S$	109,92 (0)	25,65 (0)
$\ln F2 \rightarrow \ln S$	80,44 (0)	21,33 (0)
$\ln F3 \rightarrow \ln S$	41,01 (0)	25,20 (0)
$\ln F4 \rightarrow \ln S$	29,69 (0)	21,75 (0)
$\ln S \rightarrow \ln F1$	85,10 (0)	40,28 (0)
$\ln S \rightarrow \ln F2$	87,00 (0)	7,48 (0,06)
$\ln S \rightarrow \ln F3$	41,61 (0)	1,56 (0,46)
$\ln S \rightarrow \ln F4$	30,52 (0)	1,05 (0,59)

Tabella 5.1. Test per la causalità secondo Granger nelle rappresentazioni VECM. Sono riportati i valori della statistica test con tra parentesi i relativi p-value. Con " $X \rightarrow Y$ " si rappresenta la relazione di causalità secondo Granger unidirezionale da X a Y

Sebbene due variabili siano tra di loro cointegrate questo non specifica la direzione della relazione causale, se esiste, tra le variabili. La teoria economica garantisce che esiste sempre causalità in almeno una direzione in presenza di serie cointegrate. Nel caso di dati giornalieri si ha una relazione di causalità bi-direzionale tra i prezzi spot con i futures alle differenti scadenze. Le cose cambiano, probabilmente anche per la minore numerosità campionaria, quando si considerano dati a frequenza settimanale. In particolare, mentre tutti i prezzi futures, indipendentemente dalla lunghezza del contratto, causano secondo Granger i prezzi spot, non è vero il contrario. Infatti i prezzi spot del WTI non causano secondo Granger i prezzi futures a 2, 3 e 4 mesi a un livello di significatività del 5%. Pertanto, nel caso di dati a frequenza settimanale, la relazione di causalità unidirezionale dai prezzi spot ai futures si indebolisce all'aumentare della lunghezza del contratto, per sparire quando si considerano i contratti futures più lunghi.

5.2. Analisi di causalità mediante un test non parametrico.

Baek e Brock (1992) hanno notato che i test parametrici per la causalità secondo Granger in un modello lineare hanno scarsa potenza quando sotto l'ipotesi alternativa si ha una relazione non lineare. In particolare, Silvapulle e Moosa (1999) hanno evidenziato che in un'analisi di causalità lineare i prezzi futures causano gli spot, mentre in una condotta a partire da un modello non lineare si ha causalità di tipo bidirezionale. Bekiros e Diks (2008) hanno mostrato che, quando si modella la causalità tra prezzi spot e futures, non si ha una direzione di causalità esplicita, ma le relazioni di causalità cambiano al variare del periodo di tempo considerato. A partire da queste recenti evidenze empiriche i test non parametrici sono interessanti in quanto pongono un'enfasi diretta sulle previsioni senza imporre una forma funzionale di tipo lineare.

In letteratura sono stati finora proposti molti test non parametrici per la causalità secondo Granger. Uno dei maggiormente utilizzati è quello di Hiemstra e Jones (1994), che è un'estensione del test non parametrico di Baek e Brock (1992), il quale era applicabile solamente a serie storiche indipendenti ed identicamente distribuite. Nel test di Hiemstra e Jones, invece, le singole serie storiche possono esibire una debole auto-dipendenza. Tuttavia, Diks e Panchenko (2006) hanno dimostrato che il test di Hiemstra e Jones ha una probabilità di rifiutare sotto la nulla che tende a 1 all'aumentare della numerosità campionaria, portando in tal modo a risultati non corretti.

Siano:

- $\mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1t} \\ \mathbf{y}_{2t} \end{bmatrix}$ una serie storica multivariata stazionaria in cui le K componenti sono suddivise nei due gruppi \mathbf{y}_{1t} e \mathbf{y}_{2t} ;

- sia $I_{y_1,t} = \{\mathbf{y}_{1t}, \mathbf{y}_{1,t-1}, \mathbf{y}_{1,t-2}, \dots\}$ l'insieme informativo al tempo t relativo alla prima variabile e $I_{y_2,t} = \{\mathbf{y}_{2t}, \mathbf{y}_{2,t-1}, \mathbf{y}_{2,t-2}, \dots\}$ quello relativo alla seconda.

Allora, indicata con " \sim " l'equivalenza in distribuzione, si dice che \mathbf{y}_{1t} non causa secondo Granger \mathbf{y}_{2t} se, per $k \geq 1$

$$(\mathbf{y}_{2,t+1}, \dots, \mathbf{y}_{2,t+k}) \mid (I_{y_1,t}, I_{y_2,t}) \sim (\mathbf{y}_{2,t+1}, \dots, \mathbf{y}_{2,t+k}) \mid I_{y_2,t}.$$

Il caso $k = 1$ è quello maggiormente utilizzato nella pratica e non si fa altro che confrontare la distribuzione condizionata un passo in avanti di \mathbf{y}_{2t} con e senza i valori passati e presenti di \mathbf{y}_{1t} . Negli approcci convenzionali per la verifica della causalità secondo Granger con serie storiche stazionarie si assume un modello lineare e parametrico per la media condizionata $E[\mathbf{y}_{2,t+1} | (I_{y_1,t}, I_{y_2,t})]$, poi si procede come illustrato nel precedente paragrafo.

Si considerino ora i seguenti vettori ritardati $\mathbf{y}_{1t}^{l_{y_1}} = (\mathbf{y}_{1,t-l_{y_1}+1}, \dots, \mathbf{y}_{1t})$ e $\mathbf{y}_{2t}^{l_{y_2}} = (\mathbf{y}_{2,t-l_{y_2}+1}, \dots, \mathbf{y}_{2t})$, ($l_{y_1}, l_{y_2} \geq 1$). L'ipotesi nulla del test di Diks e Panchenko (2006) è che le osservazioni passate di $\mathbf{y}_{1t}^{l_{y_1}}$ non contengono informazione aggiuntiva (oltre quella contenuta in $\mathbf{y}_{2t}^{l_{y_2}}$) riguardo $\mathbf{y}_{2,t+1}$, ovvero

$$H_0: \mathbf{y}_{2,t+1} | (\mathbf{y}_{1t}^{l_{y_1}}, \mathbf{y}_{2t}^{l_{y_2}}) \sim \mathbf{y}_{2,t+1} | \mathbf{y}_{2t}^{l_{y_2}}. \quad (11)$$

Per serie storiche stazionarie l'equazione (11) implica l'invarianza in distribuzione del vettore di dimensione $(l_{y_1} + l_{y_2} + 1)$ ¹⁴ $\mathbf{W}_t = (\mathbf{y}_{1t}^{l_{y_1}}, \mathbf{y}_{2t}^{l_{y_2}}, z_t)$, dove $z_t = y_{2,t+1}$. Si supponga d'ora in poi che $l_{y_1} = l_{y_2} = 1$. L'ipotesi nulla (11) può essere riscritta in termini di rapporti di funzioni di densità di probabilità. In particolare la funzione di densità di probabilità congiunta $f_{y_1, y_2, z}(y_1, y_2, z)$ e le densità di probabilità marginali devono soddisfare la seguente uguaglianza

$$\frac{f_{y_1, y_2, z}(y_1, y_2, z)}{f_{y_2}(y_2)} = \frac{f_{y_1, y_2}(y_1, y_2)}{f_{y_2}(y_2)} \frac{f_{y_2, z}(y_2, z)}{f_{y_2}(y_2)}.$$

Oppure, equivalentemente

$$\frac{f_{y_1, y_2, z}(y_1, y_2, z)}{f_{y_1, y_2}(y_1, y_2)} = \frac{f_{y_2, z}(y_2, z)}{f_{y_2}(y_2)}.$$

Le due equazioni implicano che y_1 e z sono indipendenti condizionatamente a y_2 . A questo punto Diks e Panchenko (2006) affermano che l'ipotesi nulla (11) di assenza di causalità secondo Granger si traduce in

$$q_g = E \left[\left(\frac{f_{y_1, y_2, z}(y_1, y_2, z)}{f_{y_2}(y_2)} - \frac{f_{y_1, y_2}(y_1, y_2)}{f_{y_2}(y_2)} \frac{f_{y_2, z}(y_2, z)}{f_{y_2}(y_2)} \right) g(y_1, y_2, z) \right] = 0.$$

con $g(y_1, y_2, z)$ funzione positiva. Sotto l'ipotesi nulla (11) il termine tra le parentesi tonde è uguale a zero, pertanto anche il suo valore atteso sarà nullo. Si possono fare diverse scelte per la forma di $g(y_1, y_2, z)$, tra cui:

(a) $g_1(y_1, y_2, z) = f_{y_2}(y_2)$;

(b) $g_2(y_1, y_2, z) = f_{y_2}^2(y_2)$;

¹⁴ Questo vale se \mathbf{y}_t è un vettore bivariato

$$(c) g_3(y_1, y_2, z) = \frac{f_{y_2}(y_2)}{f_{y_1, y_2}(y_1, y_2)}.$$

Tramite metodi di simulazione *bootstrap* Diks e Panchenko (2006) hanno illustrato come g_1 e g_2 si comportano in maniera simile e sono più stabili di g_3 . In questo lavoro si è deciso di usare g_2 , da cui si ottiene la seguente formulazione per q_g

$$q_g = E[f_{y_1, y_2, z}(y_1, y_2, z)f_{y_2}(y_2) - f_{y_1, y_2}(y_1, y_2)f_{y_2, z}(y_2, z)] = 0.$$

Sia $\hat{f}_w(w_i)$ uno stimatore della densità di probabilità calcolata in w_i del vettore d_w -variato \mathbf{w} , pari a

$$\hat{f}_w(w_i) = \frac{(2\varepsilon_T)^{-d_w}}{T-1} \sum_{j, j \neq i} I_{ij}^W,$$

dove:

- $I_{ij}^W = I(\|\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_j\| < \varepsilon_T)$ è una funzione indicatrice che vale 1 se $\|\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_j\| < \varepsilon_T$ e 0 altrimenti, con $\|\mathbf{x}\| = \sup_{i=1, \dots, d_w} |x_i|$;

- ε_T una bandwidth dipendente dalla numerosità campionaria T.

Dato questo stimatore allora la statistica test è l'analogo campionario di q_g

$$T_T(\varepsilon_T) = \frac{T-1}{T(T-2)} \sum_i [f_{y_1, y_2, z}(y_{1i}, y_{2i}, z_i) \hat{f}_{y_2}(y_{2i}) - \hat{f}_{y_1, y_2}(y_{1i}, y_{2i}) \hat{f}_{y_2, z}(y_{2i}, z_i)].$$

Nel caso in cui $l_{y_1} = l_{y_2} = 1$ la statistica test qui utilizzata è uno stimatore consistente del vero valore della statistica test se la bandwidth viene fatta dipendere dalla numerosità campionaria T, come

$$\varepsilon_T = CT^{-\beta},$$

dove:

- $C > 0$;

- $\frac{1}{4} < \beta < \frac{1}{3}$.

Sotto queste condizioni si può provare che la statistica test $T_T(\varepsilon_T)$ soddisfa

$$\sqrt{T} \frac{(T_T(\varepsilon_T) - q_g)}{S_T} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

dove S_T è uno stimatore della varianza asintotica di $T_T(\varepsilon_T)$.

Per la scelta della bandwidth da utilizzare Diks e Panchenko (2006) suggeriscono

$$\varepsilon_T = \max(CT^{-2/7}; 1,5),$$

dove si è posto $\varepsilon_T = 1,5$, come in Lee e Zeng (2011)¹⁵.

Nella Tabella 5.2 sono presentati i risultati del test per la causalità secondo Granger con il metodo non parametrico sviluppato in Diks e Panchenko (2006).

	Dati giornalieri	Dati settimanali
$LnF1 \rightarrow LnS$	5,348 (0)	2,221 (0,013)
$LnF2 \rightarrow LnS$	7,255 (0)	2,128 (0,017)
$LnF3 \rightarrow LnS$	7,447 (0)	1,863 (0,031)
$LnF4 \rightarrow LnS$	7,537 (0)	1,900 (0,029)
$LnS \rightarrow LnF1$	4,327 (0)	2,922 (0,002)
$LnS \rightarrow LnF2$	5,097 (0)	3,040 (0,001)
$LnS \rightarrow LnF3$	4,400 (0)	2,727 (0,003)
$LnS \rightarrow LnF4$	3,872 (0)	2,579 (0,005)

Tabella 5.2. Test non parametrico per la causalità secondo Granger di Diks e Panchenko. Sono riportati i valori della statistica test con tra parentesi i relativi p-value. Per questo test sono state usate le differenze prime della variabili, pertanto " LnS " sono i rendimenti logaritmici dello spot del WTI, e così via per le altre quattro variabili. Con " $X \rightarrow Y$ " si rappresenta la relazione di causalità secondo Granger unidirezionale da X a Y

Considerando un livello di significatività del 5%, sia nel caso di dati a frequenza giornaliera che settimanale, si ha una relazione di causalità bidirezionale tra prezzi spot e futures, indipendentemente dalla scadenza del contratto. Ragionando a un livello di significatività dell'1% si hanno dei risultati differenti (considerando dati a frequenza settimanale) da quelli ottenuti nella Tabella 5.1. In particolare, mentre i prezzi spot causano secondo Granger i prezzi futures, la relazione unidirezionale di causalità dai prezzi futures (indipendentemente dalla scadenza) agli spot si è indebolita. Questi risultati sono coerenti con quelli ottenuti in Bekiros e Diks (2008), che hanno evidenziato le differenze tra i test di causalità secondo Granger in un modello lineare e non lineare. In particolare, lavorando sugli stessi dati utilizzati in questo elaborato (anche se per un periodo di tempo leggermente differente) Bekiros e Diks hanno notato una relazione di causalità unidirezionale dai prezzi spot ai futures del WTI, indipendentemente dalla scadenza del contratto; per meglio capire a cosa fosse dovuto ciò il campione è stato "spezzato" in due parti: a) una prima comprendente i dati dal 21 Ottobre 1991 al 29 Ottobre 1999; b) una seconda contenente i dati dall'1 Novembre 1999 al 30 Ottobre 2007. Tramite questa operazione gli autori sono riusciti ad evidenziare come, mentre per il primo campione vi fosse una relazione di causalità bidirezionale, considerando il secondo arco temporale solamente i prezzi spot causavano secondo Granger i futures. I differenti risultati vengono spiegati a partire dalla maggiore volatilità nei prezzi (sia spot che futures) nel periodo b), che riesce ad essere catturata da una modellazione non lineare, mentre con una modellazione lineare si avevano delle evidenze opposte.

¹⁵ Si ringrazia Valentyn Panchenko per aver fornito il codice dell'algoritmo utilizzato per effettuare il test

5.3. Analisi di causalità al variare dei quantili.

Oltre che con i metodi visti in precedenza, l'analisi della causalità secondo Granger è stata condotta anche mediante la regressione quantilica. In particolare, definito con $Q_\tau(\mathbf{y}_{2t}|I_t)$ il τ -esimo quantile condizionato di \mathbf{y}_{2t} , con I_t che rappresenta l'insieme informativo al tempo t , definito nel Paragrafo 5.1. Allora \mathbf{y}_{1t} non causa secondo Granger \mathbf{y}_{2t} nel quantile di livello τ se vale la seguente uguaglianza

$$Q_\tau(\mathbf{y}_{2t}|\mathbf{y}_{1,t-1}, \mathbf{y}_{2,t-1}) = Q_\tau(\mathbf{y}_{2t}|\mathbf{y}_{2,t-1}). \quad (12)$$

Usando la regressione quantilica si può vedere come cambiano le relazioni di causalità al variare del livello del quantile di riferimento. Il test per la causalità secondo Granger impiegato nel Paragrafo 5.1 andava ad analizzare le relazioni di causalità nella media condizionata a partire da un modello lineare. Come affermato in Chuang et al. (2009) la presenza di causalità in media non ha alcuna implicazione quando si vanno a valutare le relazioni di causalità in tutta la distribuzione (nei quantili) delle variabili di riferimento. Ad esempio, un test di causalità convenzionale potrebbe evidenziare assenza di causalità in media perché relazioni di causalità opposte nei diversi quantili si annullano quando si considera una stima ottenuta con i minimi quadrati ordinari. Pertanto la verifica di causalità secondo Granger nei diversi quantili permette di avere una maggiore visibilità sulle relazioni di causalità in tutta la distribuzione delle variabili di interesse. Siano:

$$- \mathbf{Y}_{t-1,p} = [y_{2,t-1}, \dots, y_{2,t-p}]';$$

$$- \mathbf{X}_{t-1,q} = [y_{1,t-1}, \dots, y_{1,t-q}]';$$

$$- \mathbf{Z}_{t-1} = [1, \mathbf{Y}'_{t-1,p}, \mathbf{X}'_{t-1,q}]'.$$

La τ -esima funzione del quantile condizionato sarà

$$Q_\tau(\mathbf{Y}_t|\mathbf{Z}_{t-1}) = c_\tau + \mathbf{Y}'_{t-1,p}\boldsymbol{\gamma}_\tau + \mathbf{X}'_{t-1,q}\boldsymbol{\delta}_\tau = \mathbf{Z}'_{t-1}\boldsymbol{\theta}_\tau,$$

dove $\boldsymbol{\theta}_\tau = [c_\tau, \boldsymbol{\gamma}'_\tau, \boldsymbol{\delta}'_\tau]'$ è il vettore ($K \times 1$) dei parametri con $K=p+q+1$. Per ricavare una stima di $\boldsymbol{\theta}_\tau$ si deve minimizzare una funzione di perdita

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{t=1}^T \left(\tau - I_{\{y_{2,t} < \mathbf{Z}'_{t-1}\boldsymbol{\theta}_\tau\}} \right) |y_{2,t} - \mathbf{Z}'_{t-1}\boldsymbol{\theta}_\tau|,$$

dove $I_{\{y_{2,t} < \mathbf{Z}'_{t-1}\boldsymbol{\theta}_\tau\}}$ è la funzione indicatrice che vale 1 se $y_{2,t} < \mathbf{Z}'_{t-1}\boldsymbol{\theta}_\tau$ e 0 altrimenti. Una volta ottenuta una stima $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\tau$ di $\boldsymbol{\theta}_\tau$, sotto determinate condizioni di regolarità $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\tau$ è uno stimatore consistente di $\boldsymbol{\theta}_\tau$, con distribuzione asintotica

$$\sqrt{T}[\hat{\boldsymbol{\theta}}_\tau - \boldsymbol{\theta}_\tau] \xrightarrow{d} [\tau(1-\tau)]^{1/2} \boldsymbol{\Omega}_\tau^{1/2} N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_K),$$

dove:

- \mathbf{I}_K è una matrice identità di dimensione ($K \times K$);

- $\boldsymbol{\Omega}_\tau = \mathbf{D}_\tau^{-1} \mathbf{M}_{ZZ} \mathbf{D}_\tau^{-1}$, con:

a. $\mathbf{M}_{ZZ} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_{t-1} \mathbf{Z}'_{t-1}$;

b. $\mathbf{D}_\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f_{t-1}(F_{t-1}^{-1}(\tau)) \mathbf{Z}_{t-1} \mathbf{Z}'_{t-1}$.

In b. f_{t-1} e F_{t-1} sono, rispettivamente, la funzione di densità di probabilità e la funzione di ripartizione di \mathbf{Y}_t condizionate all'insieme informativo generato da $\{\mathbf{Z}_{t-i}, i = 1, 2, 3, \dots\}$.

Per l'analisi di causalità descritta in (12) si è verificata la seguente ipotesi nulla

$$H_0: \boldsymbol{\delta}_\tau = \mathbf{0}.$$

Per un dato livello τ la statistica di Wald per la verifica di $\boldsymbol{\delta}_\tau = \mathbf{0}$ è

$$W_T(\tau) = \frac{T \widehat{\boldsymbol{\delta}}_\tau' (\mathbf{B} \widehat{\boldsymbol{\Omega}}_\tau \mathbf{B}')^{-1} \widehat{\boldsymbol{\delta}}_\tau}{[\tau(1-\tau)]},$$

dove:

- $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_\tau$ è uno stimatore consistente di $\boldsymbol{\Omega}_\tau$;

- \mathbf{B} è una matrice di selezione di dimensione (qxK) tale che $\mathbf{B} \boldsymbol{\theta}_\tau = \boldsymbol{\delta}_\tau$.

Sotto l'ipotesi nulla la statistica test $W_T(\tau)$ converge a una distribuzione $\chi^2(q)$, dove q è il numero di parametri che si stanno vincolando a zero sotto l'ipotesi nulla.

Se $f_t = f$, ovvero quando si è in presenza di errori i.i.d., e $\boldsymbol{\Omega}_\tau = f(F^{-1}(\tau))^{-2} \mathbf{M}_{ZZ}^{-1}$ la statistica di Wald diventa

$$W_T(\tau) = \frac{T \widehat{\boldsymbol{\delta}}_\tau' (\mathbf{B} \widehat{\mathbf{M}}_{ZZ}^{-1} \mathbf{B}')^{-1} \widehat{\boldsymbol{\delta}}_\tau \widehat{f}^2}{[\tau(1-\tau)]},$$

dove:

- $\widehat{\mathbf{M}}_{ZZ} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_{t-1} \mathbf{Z}'_{t-1}$;

- \widehat{f} è uno stimatore consistente di f .

Nella pratica si sono stimate con regressione quantilica le seguenti due equazioni

$$\Delta \text{Ln} S_t = \alpha_{01} + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} + \sum_{j=1}^M \delta_{1,j} \Delta \text{Ln} F i_{t-j} + \sum_{j=1}^N \gamma_{1,j} \Delta \text{Ln} S_{t-j} + e_{1,t}$$

$$\Delta \text{Ln} F i_t = \alpha_{02} + \alpha_2 \hat{\varepsilon}_{t-1} + \sum_{j=1}^M \delta_{2,j} \Delta \text{Ln} F i_{t-j} + \sum_{j=1}^N \gamma_{2,j} \Delta \text{Ln} S_{t-j} + e_{2,t}$$

dove:

- $\hat{\varepsilon}_{t-1}$ è il residuo di cointegrazione ritardato ottenuto a partire dall'equazione (10);
- N e M sono i ritardi. Si è deciso di porre $N=M$ e sono stati fissati considerando i ritardi scelti per il modello VAR con il criterio di Hannan-Quinn, presentati in Tabella 2.7;
- $e_{1,t}$ e $e_{2,t}$ sono due termini di errore incorrelati tra loro e stazionari.

Una volta ottenute le stime dei parametri relative a un quantile di livello τ fissato si è analizzato che, per il quantile di riferimento, i prezzi futures non causino secondo Granger i prezzi spot e che i prezzi spot non causino secondo Granger i prezzi futures mediante, rispettivamente, le seguenti ipotesi

$$H_{01}: \delta_{1,j} = 0 \quad \forall j ,$$

$$H_{02}: \gamma_{2,j} = 0 \quad \forall j .$$

Non accettare H_{01} (H_{02}) implica che i prezzi futures (spot) del WTI causano secondo Granger gli spot (futures) per un determinato quantile di livello τ . Per verificare i sistemi di ipotesi H_{01} e H_{02} è stata usata la statistica di Wald sopra proposta. I valori della statistica test al variare dei quantili sono rappresentati in Tabella 5.3.

<i>Prezzo spot vs. prezzo futures a 1 mese</i>									
<i>Dati giornalieri</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
<i>LnS</i> → <i>LnF1</i>	4,596 **	2,379 **	1,460	1,854 **	1,582	2,104 **	2,786 **	5,599 **	3,056 **
<i>LnF1</i> → <i>LnS</i>	11,513 **	8,402 **	5,502 **	5,109 **	5,401 **	5,218 **	3,275 **	4,525 **	5,434 **
<i>Dati settimanali</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
<i>LnS</i> → <i>LnF1</i>	4,348 **	5,999 **	4,541 **	4,003 **	2,539 **	1,420	2,115	3,838 **	4,954 **
<i>LnF1</i> → <i>LnS</i>	17,818 **	8,848 **	10,553 **	9,454 **	7,611 **	10,503 **	14,152 **	12,510 **	9,485 **
<i>Prezzo spot vs. prezzo futures a 2 mesi</i>									
<i>Dati giornalieri</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
<i>LnS</i> → <i>LnF2</i>	2,697 **	1,412	1,804 **	1,625	2,050 **	2,268 **	1,957 **	3,186 **	6,024 **
<i>LnF2</i> → <i>LnS</i>	5,943 **	5,158 **	2,983 **	2,182 **	1,816 **	1,698 **	1,403 **	2,046 **	2,500 **
<i>Dati settimanali</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
<i>LnS</i> → <i>LnF2</i>	2,741 **	3,370 **	3,040 **	1,893	1,294	1,138	1,001	2,914 **	4,629 **
<i>LnF2</i> → <i>LnS</i>	7,309 **	9,458 **	6,067 **	5,451 **	4,265 **	3,728 **	3,610 **	5,670 **	5,508 **
<i>Prezzo spot vs. prezzo futures a 3 mesi</i>									
<i>Dati giornalieri</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
<i>LnS</i> → <i>LnF3</i>	1,634 **	0,621	0,862	0,849	0,820	1,319	1,326	2,704 **	4,431 **
<i>LnF3</i> → <i>LnS</i>	6,823 **	3,107 **	2,609 **	1,434	0,985	0,938	1,036	1,127	1,908 **
<i>Dati settimanali</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
<i>LnS</i> → <i>LnF3</i>	2,265 **	2,521 **	2,528 **	1,086	0,900	0,614	0,913	2,275 **	6,308 **
<i>LnF3</i> → <i>LnS</i>	6,676 **	6,140 **	5,805 **	4,118 **	3,199 **	2,644 **	3,926 **	5,186 **	3,613 **
<i>Prezzo spot vs. prezzo futures a 4 mesi</i>									
<i>Dati giornalieri</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
<i>LnS</i> → <i>LnF4</i>	2,130 **	1,068	1,047	0,601	0,835	0,739	1,265	1,539	4,111 **
<i>LnF4</i> → <i>LnS</i>	5,236 **	2,983 **	2,080 **	1,239	0,911	0,688	0,635	0,882	1,808 **
<i>Dati settimanali</i>									
Quantile	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
<i>LnS</i> → <i>LnF4</i>	2,666 **	2,366 **	2,217 **	0,808	0,687	0,487	0,569	2,375	5,474 **
<i>LnF4</i> → <i>LnS</i>	6,883 **	4,659 **	5,089 **	3,436 **	2,391 **	2,880 **	3,237 **	3,606 **	2,024 **

Tabella 5.3. Test per la causalità secondo Granger al variare del livello τ del quantile di riferimento. Sono riportati i valori della statistica test, (**) denota il rifiuto dell'ipotesi nulla a un livello di significatività del 5%. Con " $X \rightarrow Y$ " si rappresenta la relazione di causalità secondo Granger unidirezionale da X a Y per il quantile di livello τ

Come evidenziato in Tabella 5.3 si hanno diverse relazioni di causalità al variare della lunghezza del contratto futures, del quantile di riferimento e della frequenza dei dati. Per i dati a frequenza settimanale i prezzi futures hanno un'influenza su tutti i prezzi spot, non importa quale sia il quantile di riferimento o se si tratta dei contratti più lunghi o più brevi. Quando si analizza la relazione di causalità unidirezionale dai prezzi spot ai futures si hanno dei risultati differenti al variare della lunghezza del contratto. Tuttavia, in tutti e quattro i casi per i quantili di livello intermedio i prezzi spot non causano secondo Granger i futures. Quindi, sempre nel caso di dati

settimanali, quando i prezzi nel mercato spot sono più bassi o più alti, i prezzi spot causano secondo Granger i prezzi futures.

Considerando dati a frequenza giornaliera si hanno risultati leggermente differenti. In particolare, solo i prezzi futures a minor scadenza (1 o 2 mesi) causano secondo Granger i prezzi spot indipendentemente dal quantile di riferimento. Per i contratti più lunghi si ha una relazione di causalità unidirezionale solamente per i quantili "estremi" (più piccoli o più grandi). Anche con i dati giornalieri, come accadeva per i settimanali, i prezzi spot non causano secondo Granger i futures per i quantili intermedi.

Grazie alla regressione quantilica si è visto come le relazioni di causalità cambino al variare del livello del quantile di riferimento, e quindi a seconda delle condizioni del mercato, notando un comportamento nelle code della distribuzione diverso da quello nella parte centrale. In particolare si ha una relazione di casualità bidirezionale tra prezzi spot e futures solamente per quantili "estremi", ovvero i più piccoli o i più grandi, indipendentemente dalla frequenza di osservazione dei dati. Pertanto quando nel mercato spot i prezzi sono molto bassi o alti si ha una relazione di causalità tra prezzi spot e futures che si rafforza. Per i quantili intermedi, rappresentanti condizioni di mercato "normali", la relazione di causalità più forte è quella dai prezzi futures a quelli spot, anche se ciò vale soprattutto per i contratti più a breve termine. I risultati qui ottenuti permettono di arricchire quanto notato finora in letteratura sulle relazioni tra prezzi spot e futures del petrolio (ad esempio: Silvapulle e Moosa, 1999; Bekiros e Diks, 2008).

6. Conclusioni.

In questo elaborato si è studiata la relazione di lungo periodo tra i prezzi spot e futures (a 1, 2, 3 e 4 mesi) del West Texas Intermediate (WTI), con dati a frequenza giornaliera e settimanale. L'obiettivo principale dell'analisi è verificare se la cointegrazione quantilica, introdotta in Xiao (2009), permette di aggiungere qualcosa di interessante ai numerosi studi sulla cointegrazione tra spot e futures del WTI già presenti in letteratura.

Nella fase iniziale si sono presentati i dati utilizzati, evidenziando l'effetto di avvenimenti storici sui prezzi spot e futures del WTI e mostrando che i loro movimenti non sono influenzati solamente dalla domanda e dall'offerta. Si è poi messa in luce l'importanza del WTI a livello macroeconomico globale e quale relazione, teoricamente, dovrebbe sussistere tra prezzi spot e futures del petrolio.

Mediante alcuni test di radice unitaria e un test di stazionarietà si è evidenziata la non stazionarietà di tutte e cinque le serie considerate nel periodo di riferimento. Si è analizzata la relazione di cointegrazione tra prezzi spot e futures del WTI mediante la procedura di Johansen (1991, 1995). Il principale risultato è una relazione di lungo periodo molto forte dei prezzi spot con tutti e quattro i futures, che si indebolisce all'aumentare della lunghezza del contratto futures. Questi risultati sono coerenti con quanto individuato da altri autori come, ad esempio, Lee e Zeng (2011). Si è notato inoltre come, a fronte di squilibri di breve periodo nella relazione di cointegrazione, l'equilibrio viene raggiunto grazie ad aggiustamenti nei prezzi spot.

Dopo questi primi importanti risultati si è applicato il metodo della cointegrazione quantilica alle serie di interesse. Rispetto ad una relazione di cointegrazione lineare, la cointegrazione quantilica ha permesso di evidenziare come variano le relazioni di lungo periodo tra prezzi spot e futures del WTI a seconda delle condizioni del mercato. Si è notato che quando i prezzi spot sono più bassi si ha una relazione di lungo periodo molto forte tra prezzi spot e futures, che si indebolisce quando i prezzi sono più alti. L'evidenza principale è quindi una maggiore sensibilità dei prezzi spot ai movimenti dei futures quando il prezzo spot è più basso. Si è proposto, in analogia con Xiao (2009), un test per verificare se il vettore dei coefficienti di cointegrazione quantilica ottenuto sia o meno costante.

Seguendo la procedura di Engle e Granger (1987) si sono analizzati i residui ottenuti dalla regressione di cointegrazione, sia lineare che quantilica. Nel caso lineare si sono utilizzati i valori critici di Mackinnon (2010), evidenziando la presenza di cointegrazione tra le serie considerate. Per la cointegrazione quantilica, invece, si è impiegato il cosiddetto "test robusto di cointegrazione" proposto in Xiao (2009). Quanto ottenuto ha confermato la presenza di cointegrazione tra i prezzi spot ed i futures del WTI considerando tutta la distribuzione dei dati, non solo la loro media condizionata.

Nell'ultimo Capitolo si sono analizzate le relazioni di causalità tra prezzi spot e futures del WTI. Per prima cosa, esaminando le relazioni di causalità a partire dalle stime ottenute nel modello VECM, si è ottenuta una relazione di causalità secondo Granger bidirezionale tra prezzi spot e futures. Si è

inoltre controllato, mediante il test di Diks e Panchenko (2006), se i risultati cambiassero utilizzando un test non parametrico per la causalità secondo Granger. Quanto notato, nel caso di dati a frequenza settimanale, è in contrasto con quanto ottenuto con il precedente test: i prezzi spot causano secondo Granger i futures. Questo risultato è stato ottenuto lavorando a un livello di significatività dell'1%, non del 5%, ed è coerente con quanto notato in Bekiros e Diks (2008). Si è visto poi come variano le relazioni di causalità al variare del quantile di riferimento, quindi al mutare delle condizioni nel mercato spot. Si è notata una relazione di causalità tra prezzi spot e futures bidirezionale solamente per i quantili "estremi", ovvero i più piccoli ed i più grandi, mentre per quelli intermedi si ha una relazione di causalità unidirezionale dai prezzi futures agli spot.

Appendice.

Appendice A.

Di seguito sono riportati i grafici dei residui della cointegrazione quantilica al variare della lunghezza del contratto futures considerato nella relazione di cointegrazione e del livello τ del quantile di riferimento.

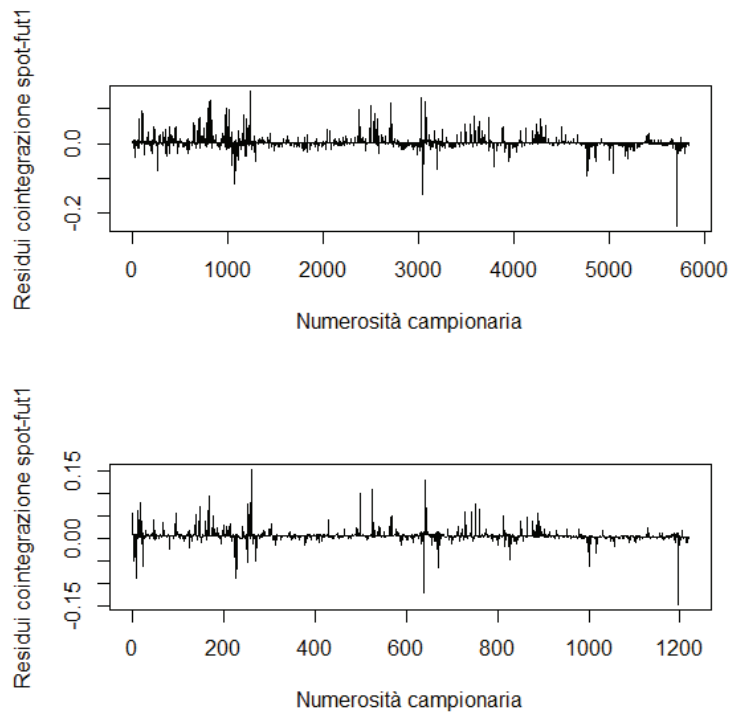


Figura A.1. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnFI$ per $\tau=0,1$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

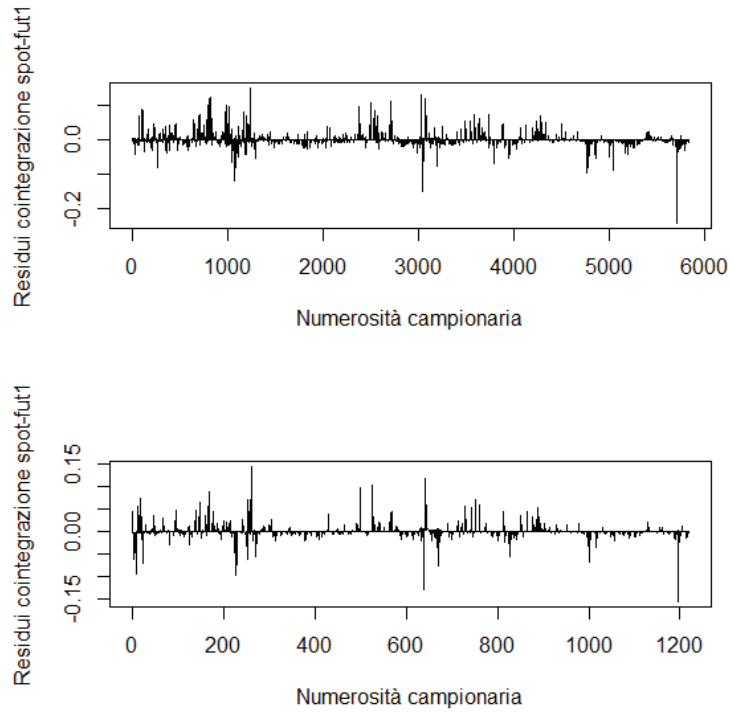


Figura A.2. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF1$ per $\tau=0,2$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

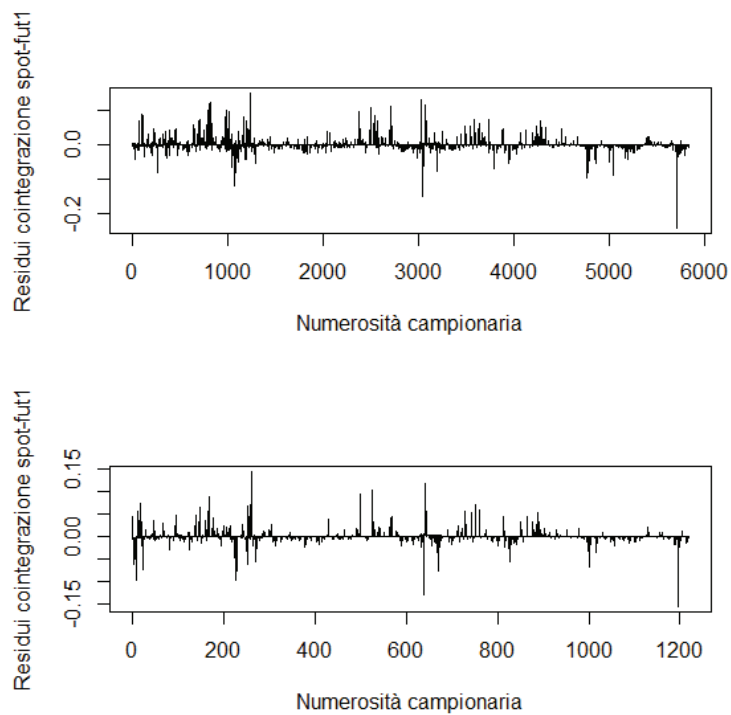


Figura A.3. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF1$ per $\tau=0,3$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

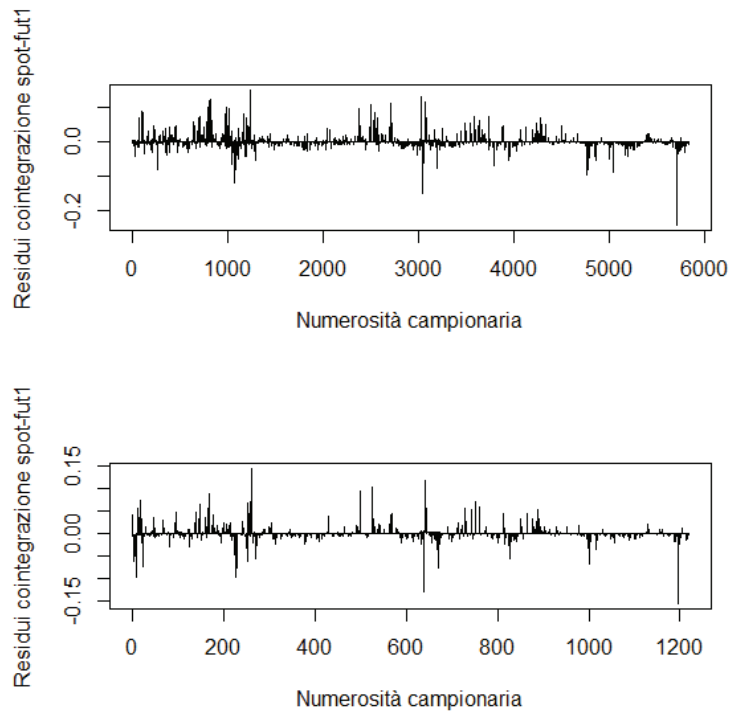


Figura A.4. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnFI$ per $\tau=0,4$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

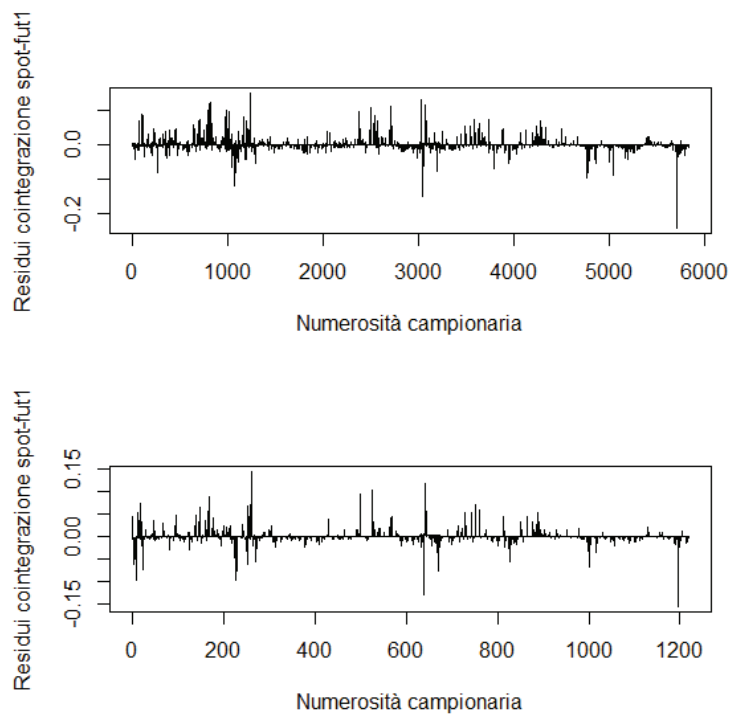


Figura A.5. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnFI$ per $\tau=0,5$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

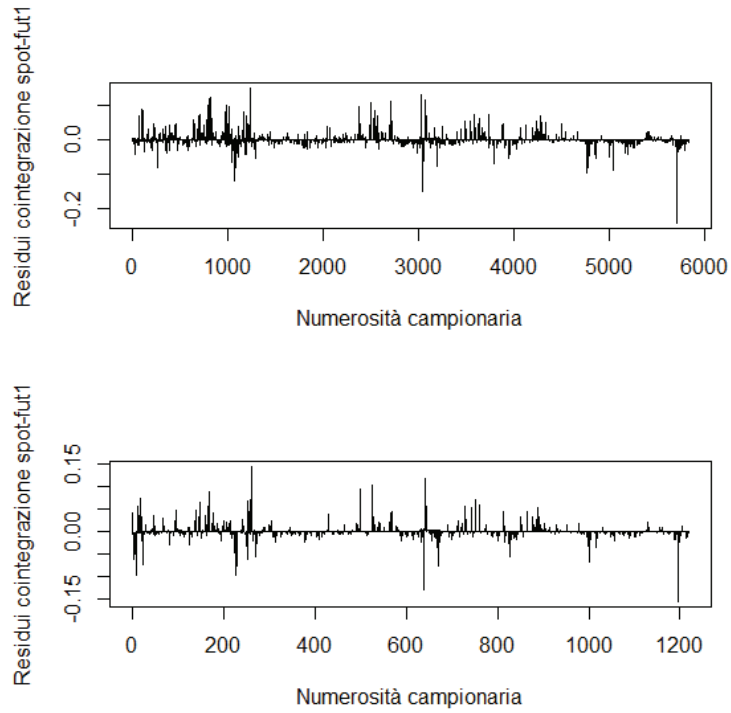


Figura A.6. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnFI$ per $\tau=0,6$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

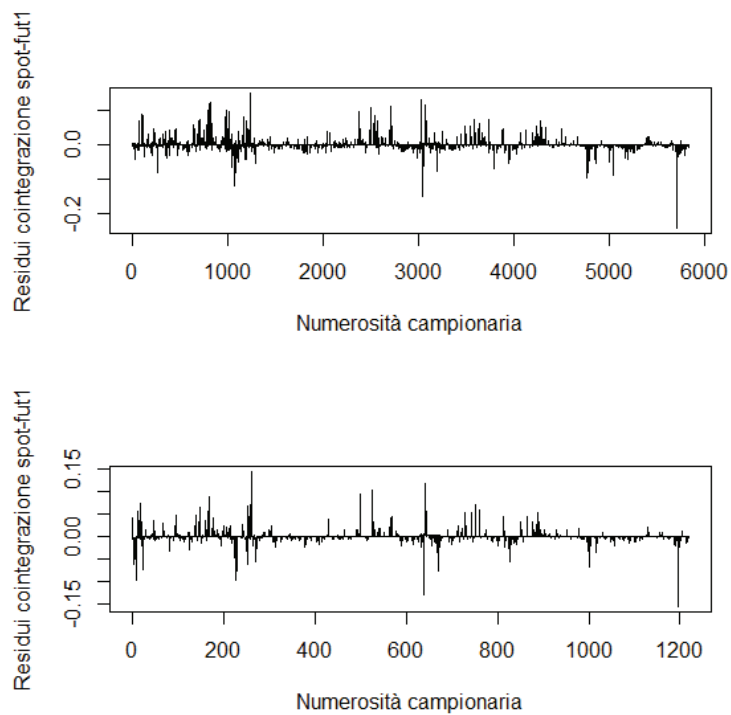


Figura A.7. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnFI$ per $\tau=0,7$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

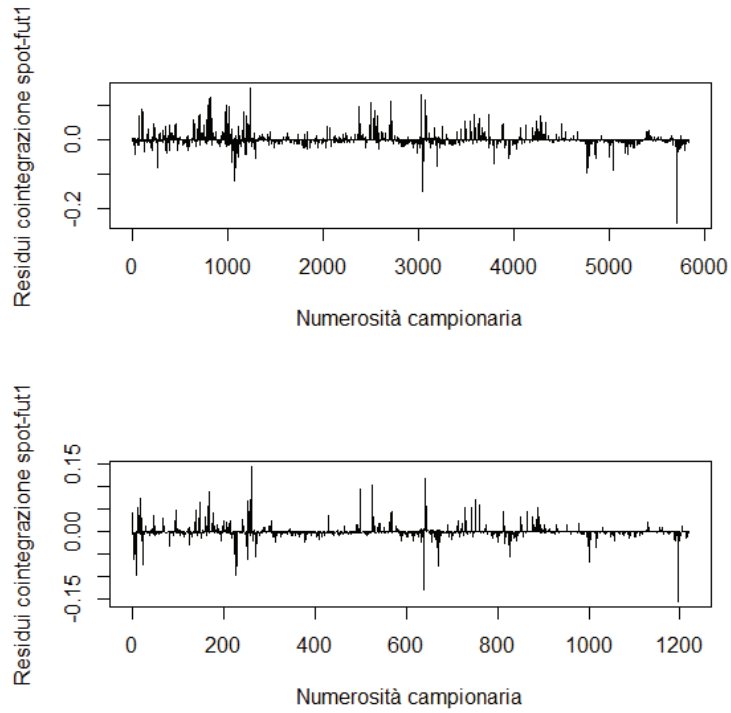


Figura A.8. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnFI$ per $\tau=0,8$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

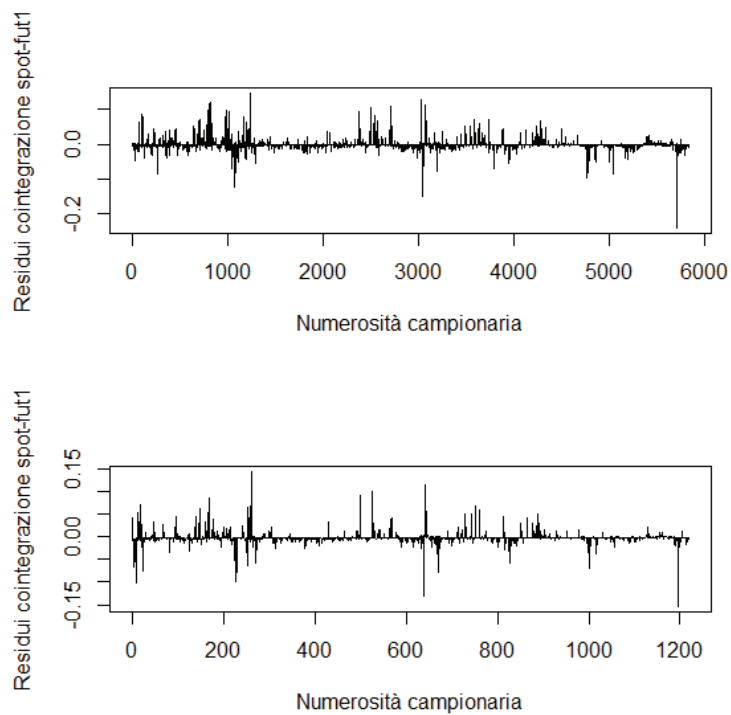


Figura A.9. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnFI$ per $\tau=0,9$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

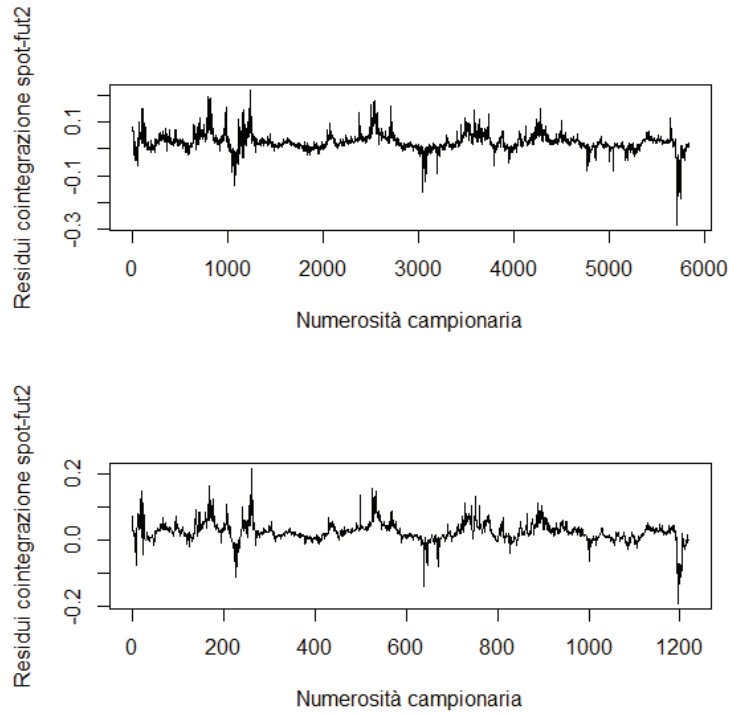


Figura A.10. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF2$ per $\tau=0,1$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

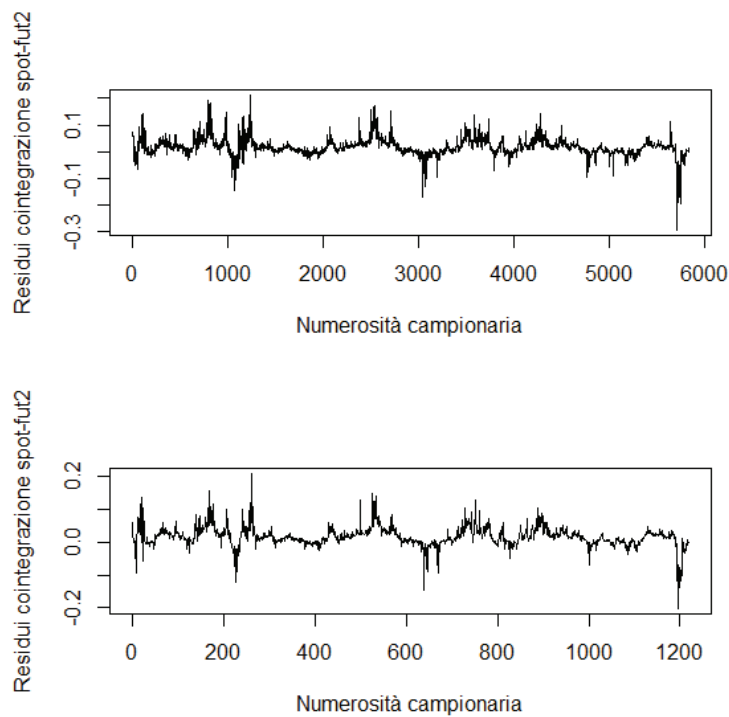


Figura A.11. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF2$ per $\tau=0,2$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

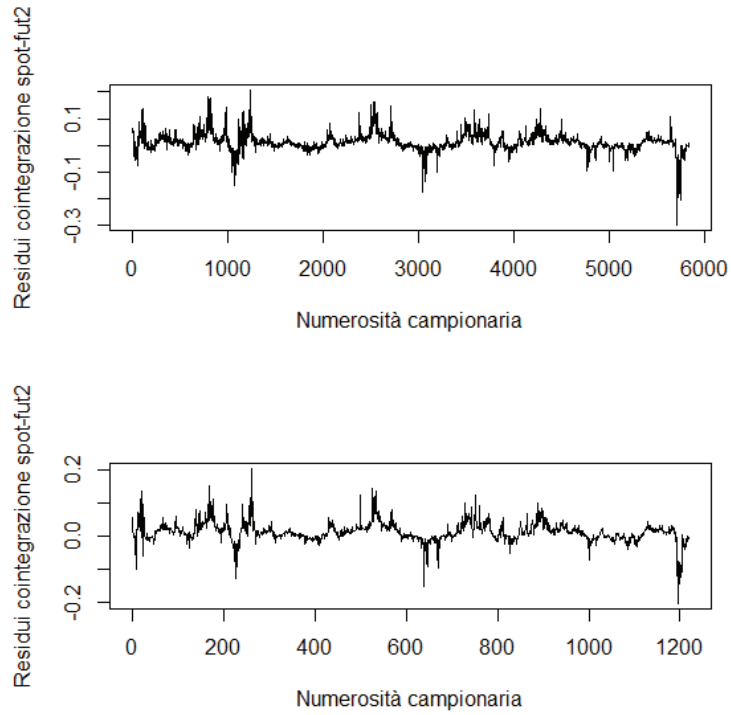


Figura A.12. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF2$ per $\tau=0,3$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

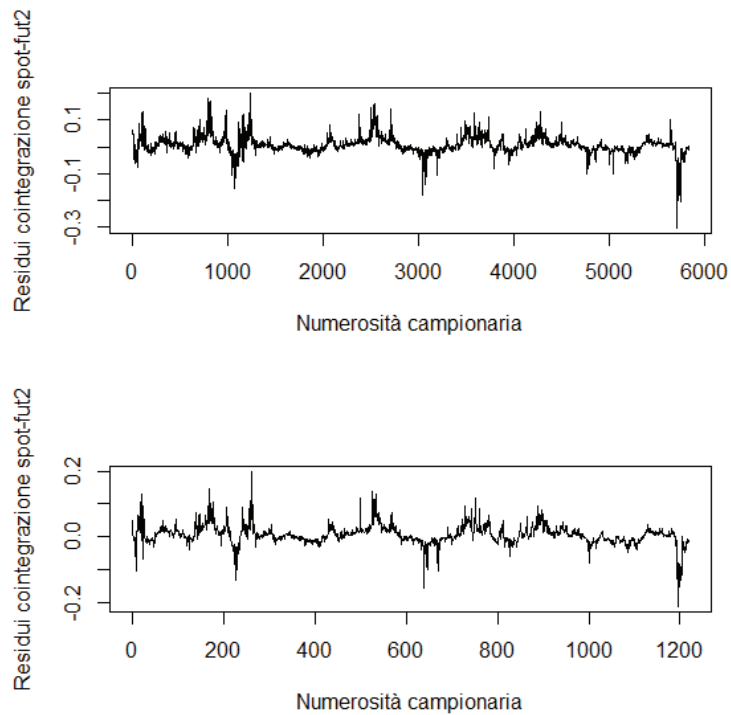


Figura A.13. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF2$ per $\tau=0,4$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

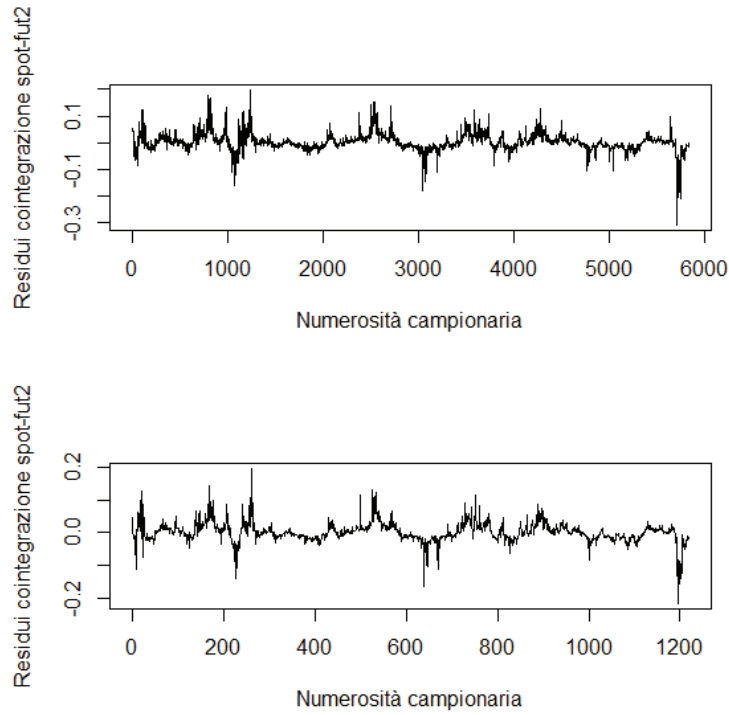


Figura A.14. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF2$ per $\tau=0,5$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

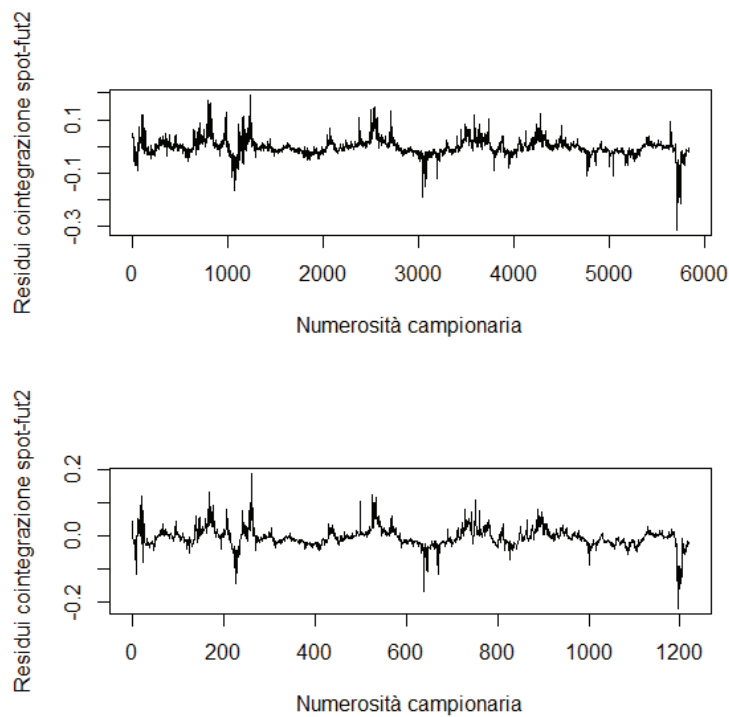


Figura A.15. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF2$ per $\tau=0,6$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

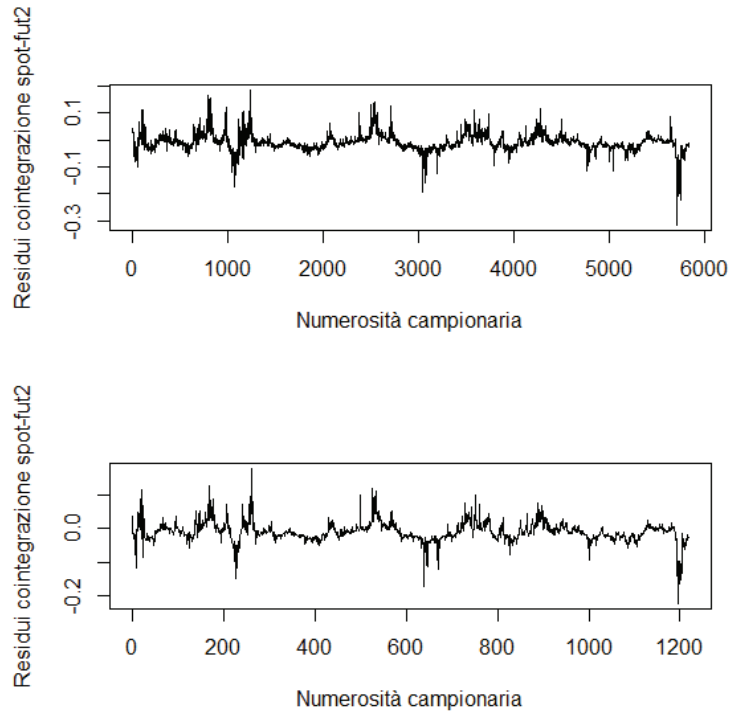


Figura A.16. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF2$ per $\tau=0,7$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

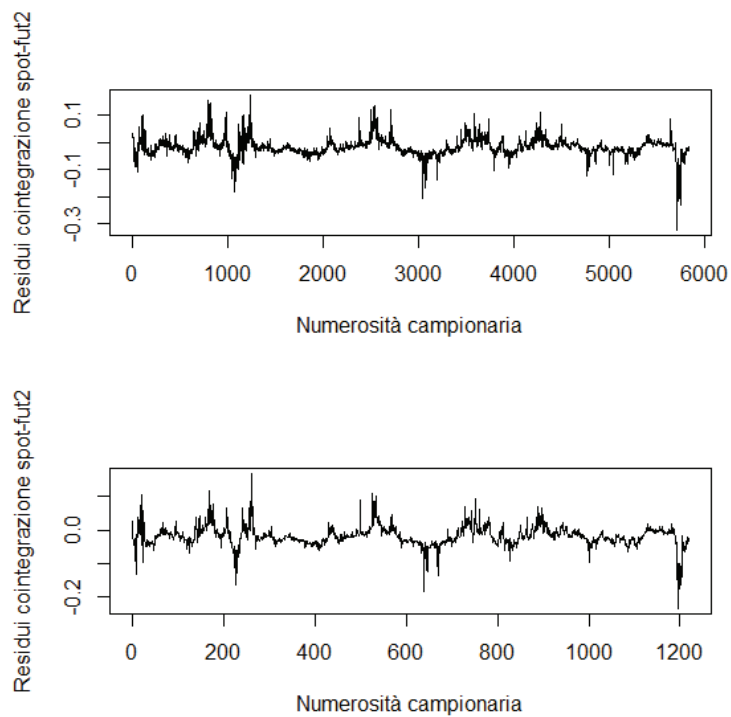


Figura A.17. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF2$ per $\tau=0,8$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

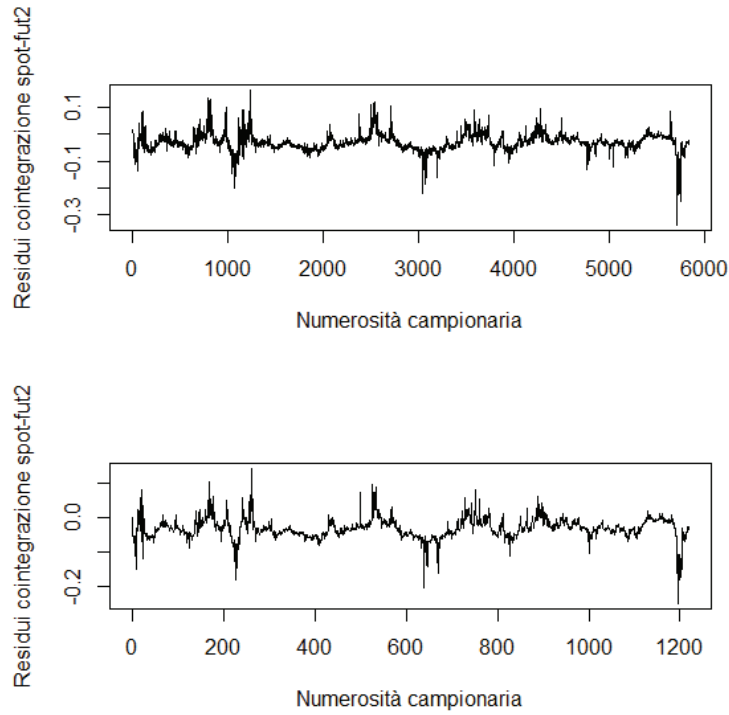


Figura A.18. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF2$ per $\tau=0,9$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

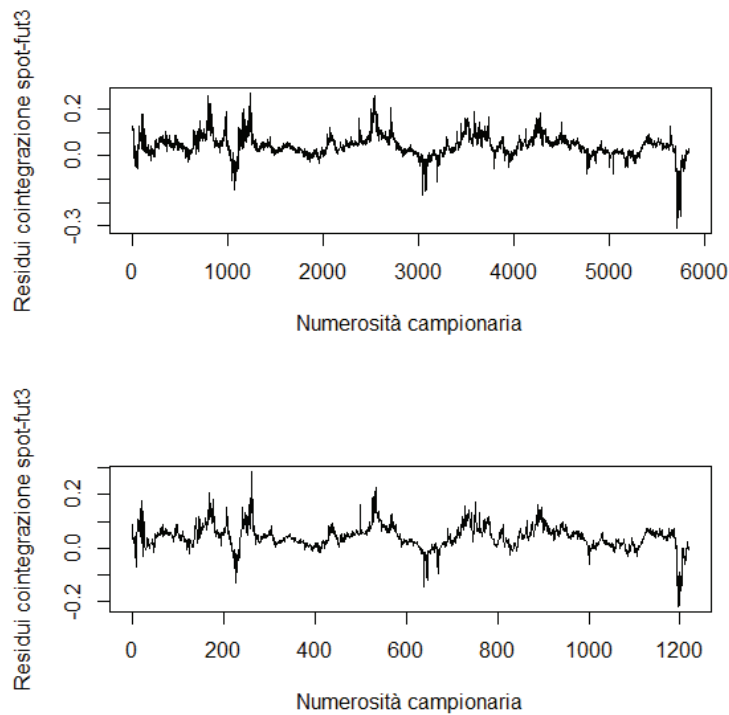


Figura A.19. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF3$ per $\tau=0,1$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

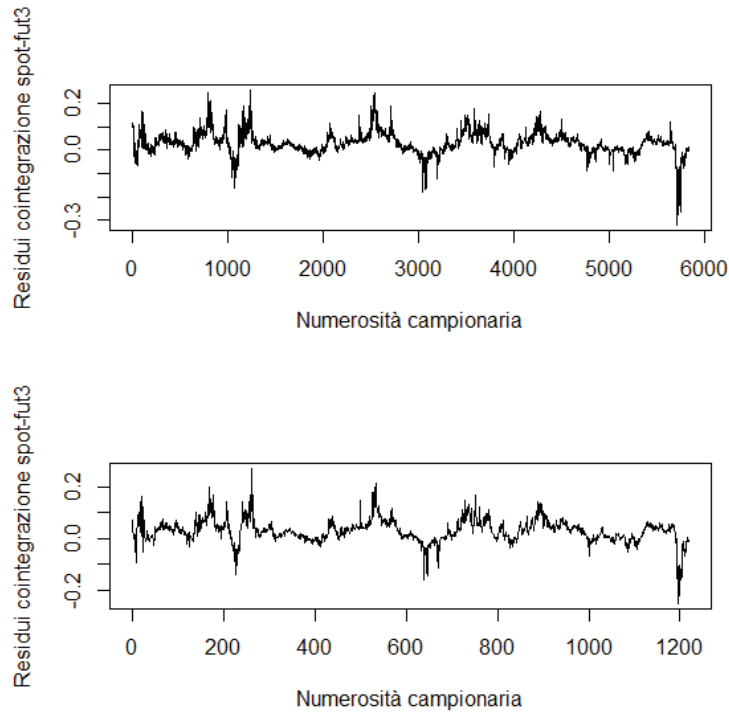


Figura A.20. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF3$ per $\tau=0,2$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

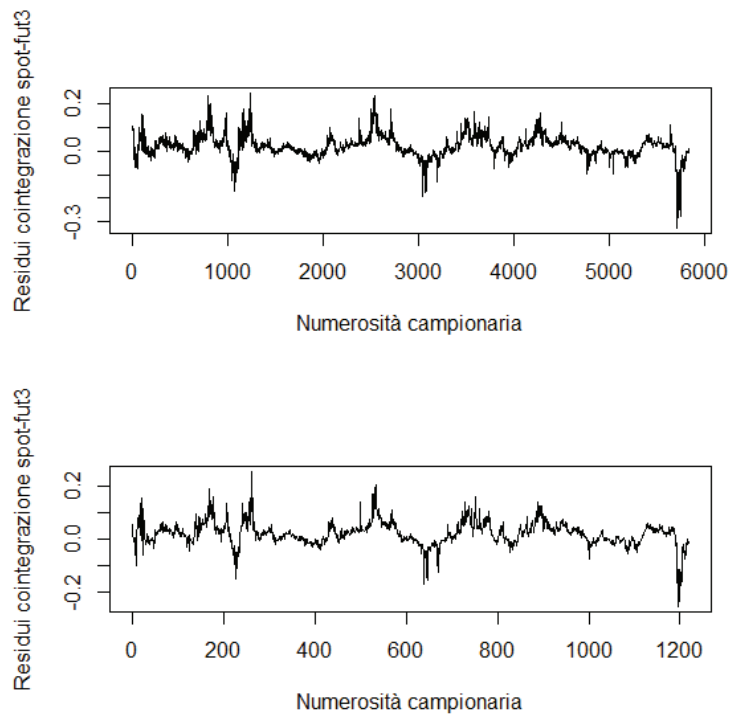


Figura A.21. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF3$ per $\tau=0,3$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

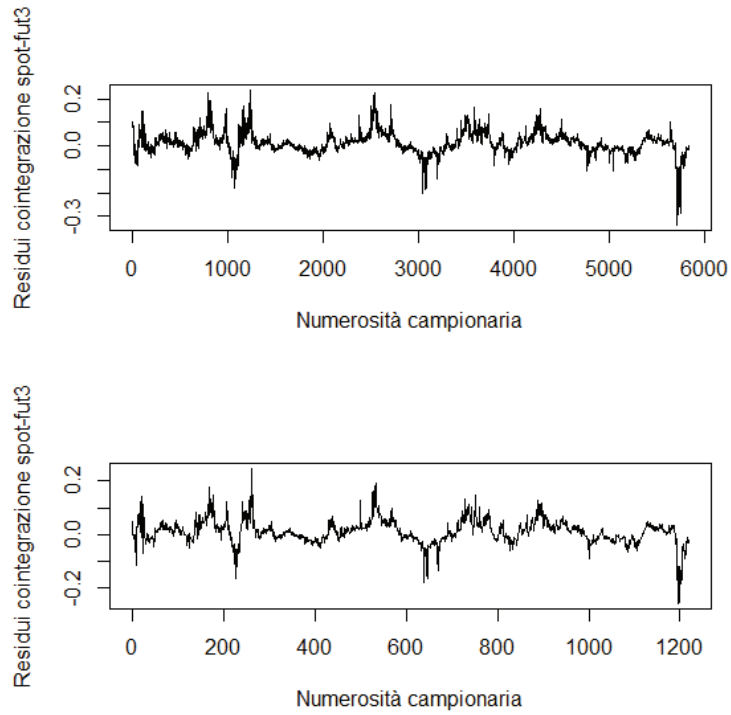


Figura A.22. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF3$ per $\tau=0,4$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

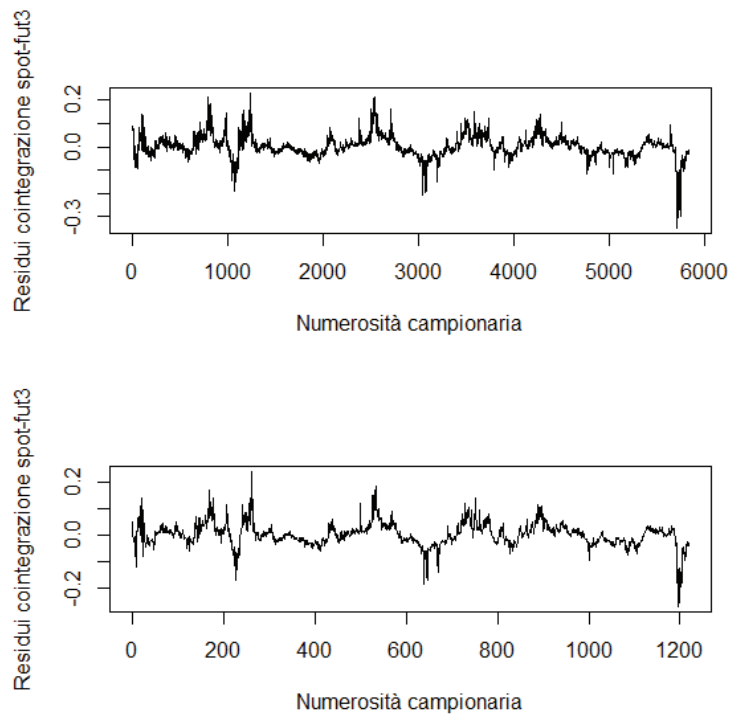


Figura A.23. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF3$ per $\tau=0,5$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

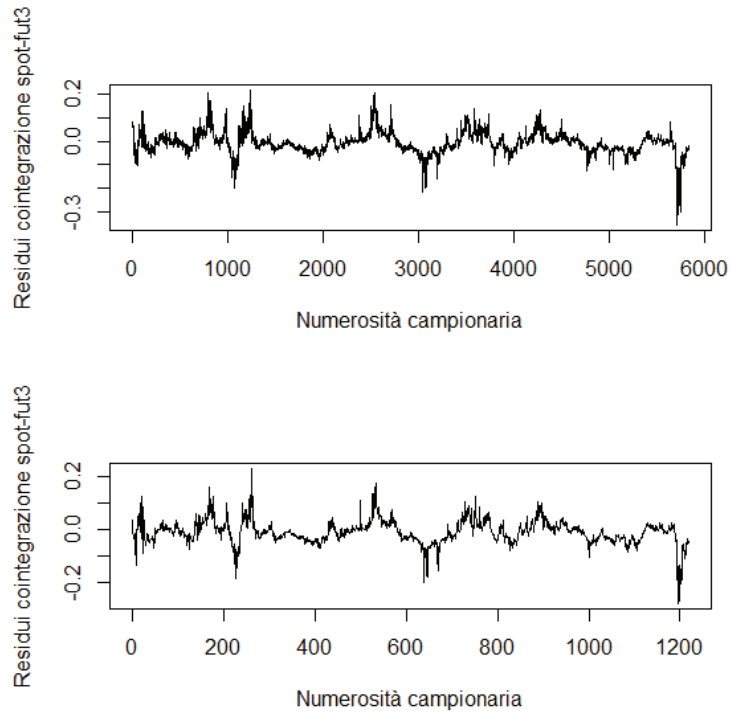


Figura A.24. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF3$ per $\tau=0,6$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

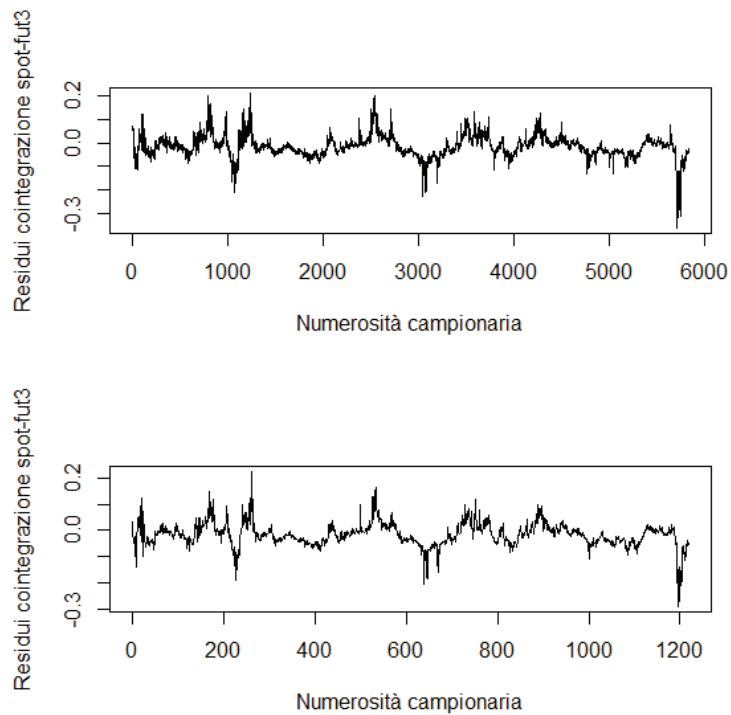


Figura A.25. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF3$ per $\tau=0,7$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

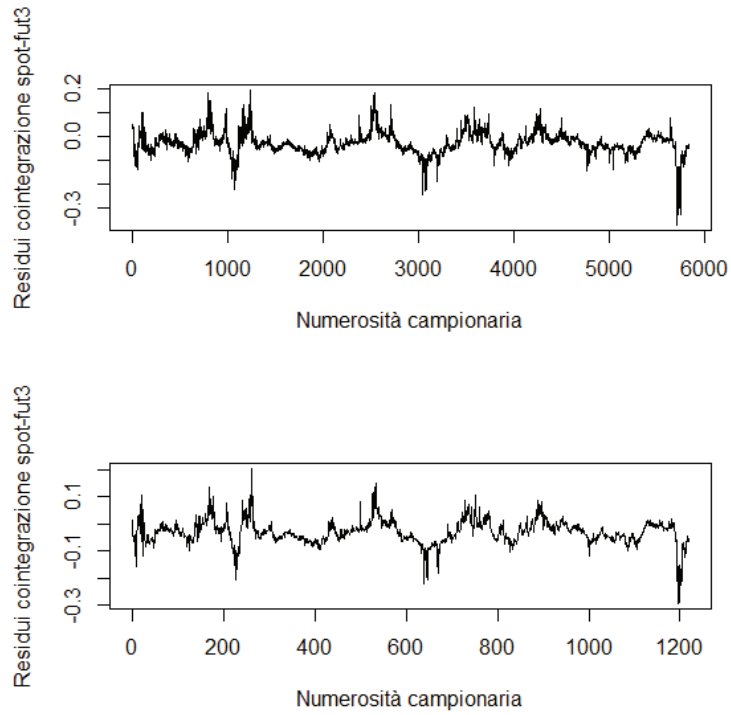


Figura A.26. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF3$ per $\tau=0,8$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

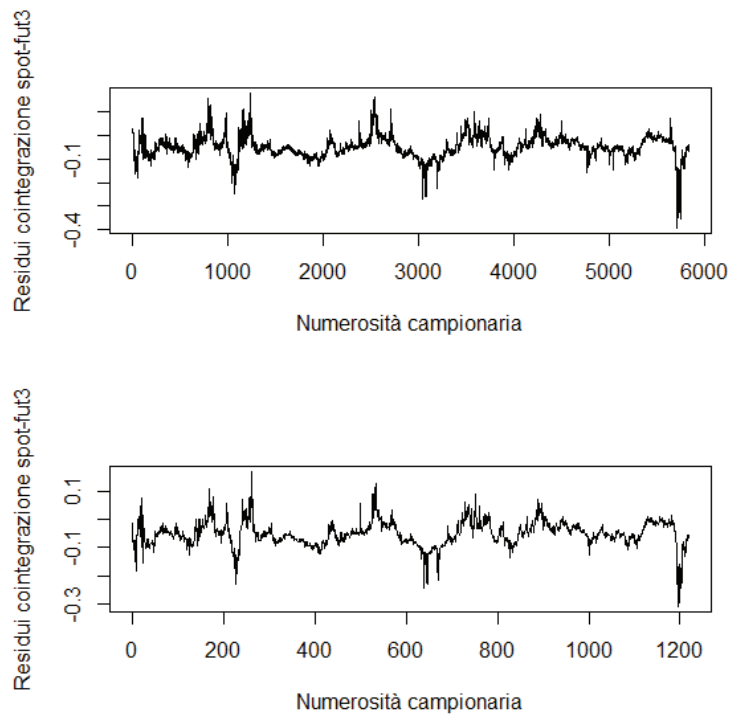


Figura A.27. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF3$ per $\tau=0,9$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

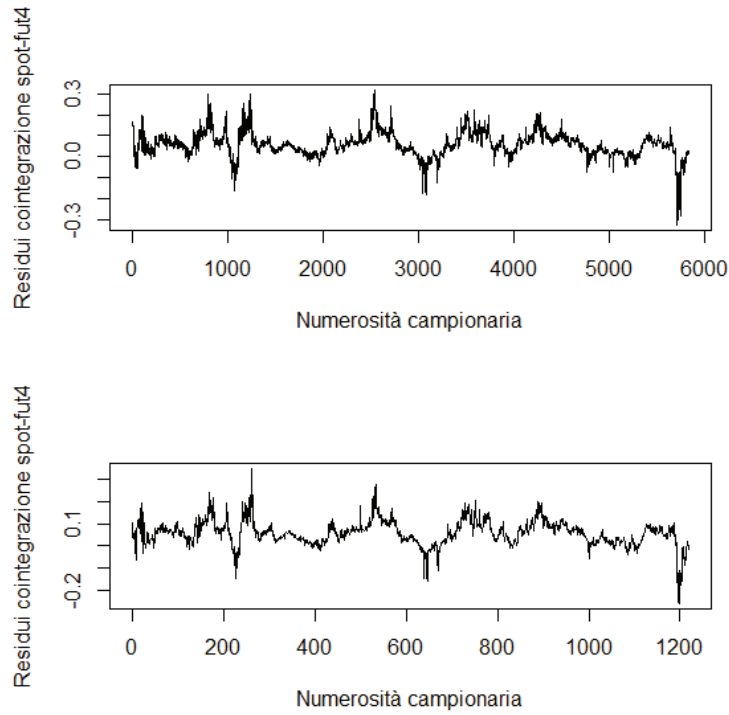


Figura A.28. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF4$ per $\tau=0,1$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

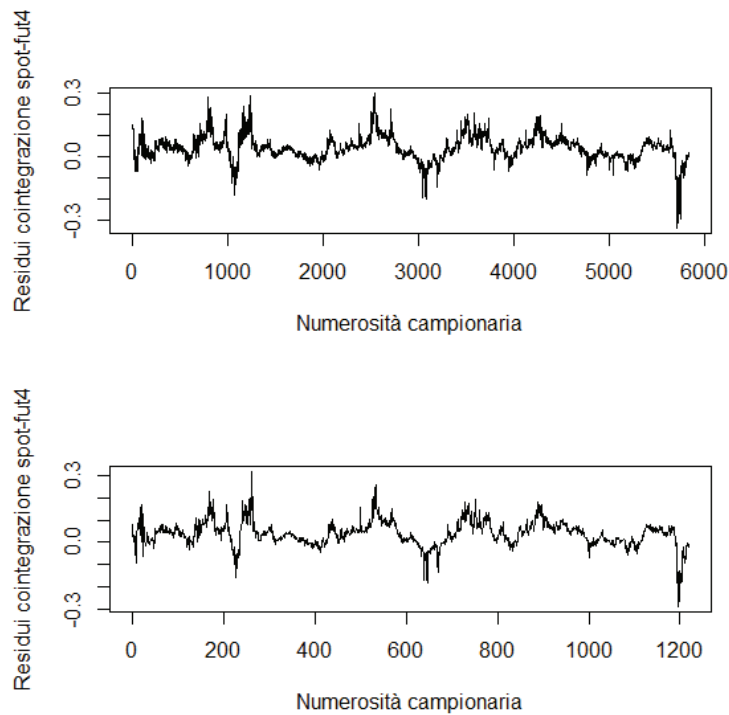


Figura A.29. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF4$ per $\tau=0,2$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

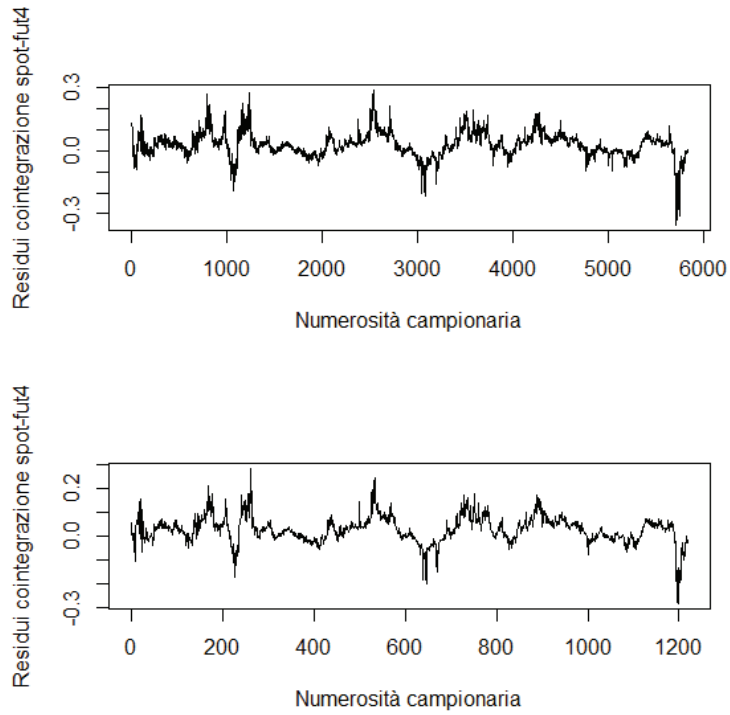


Figura A.30. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF4$ per $\tau=0,3$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

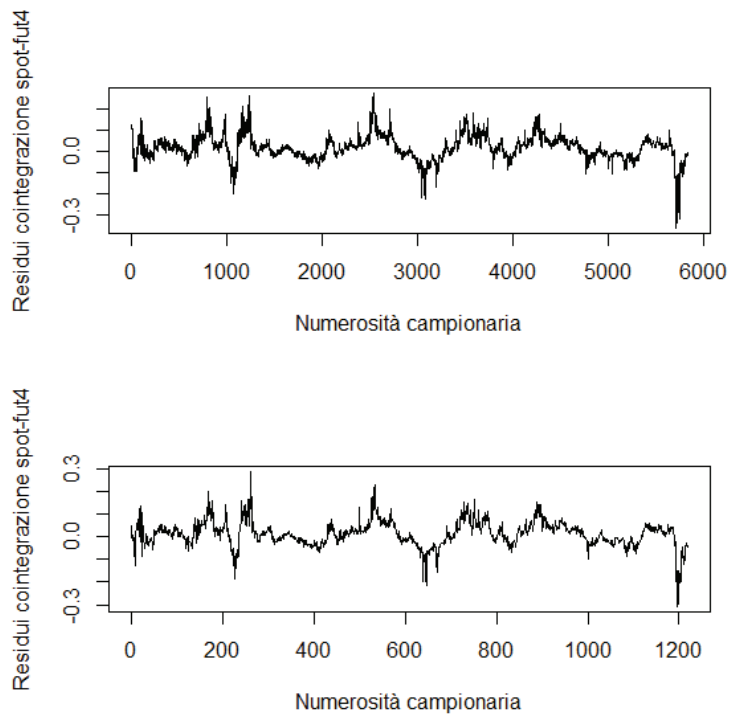


Figura A.31. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF4$ per $\tau=0,4$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

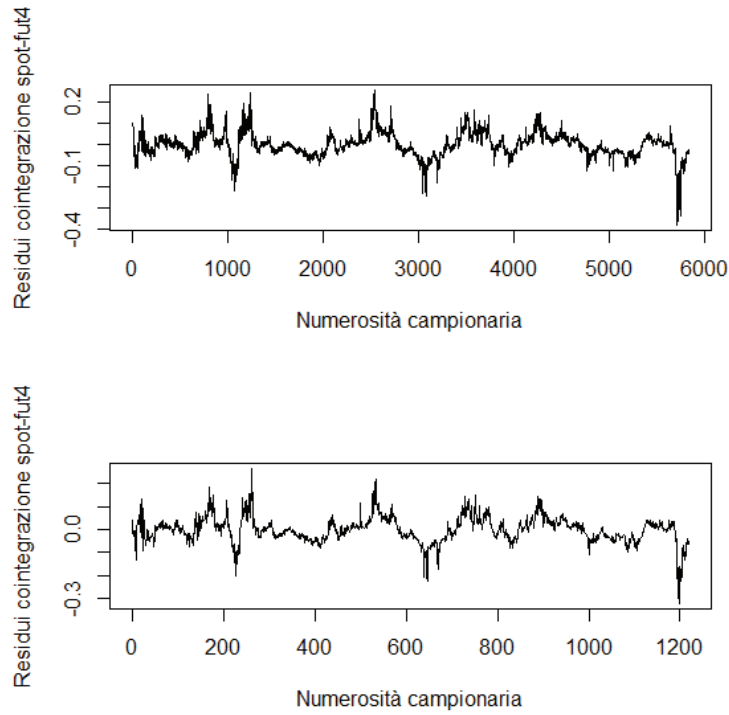


Figura A.32. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF4$ per $\tau=0,5$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

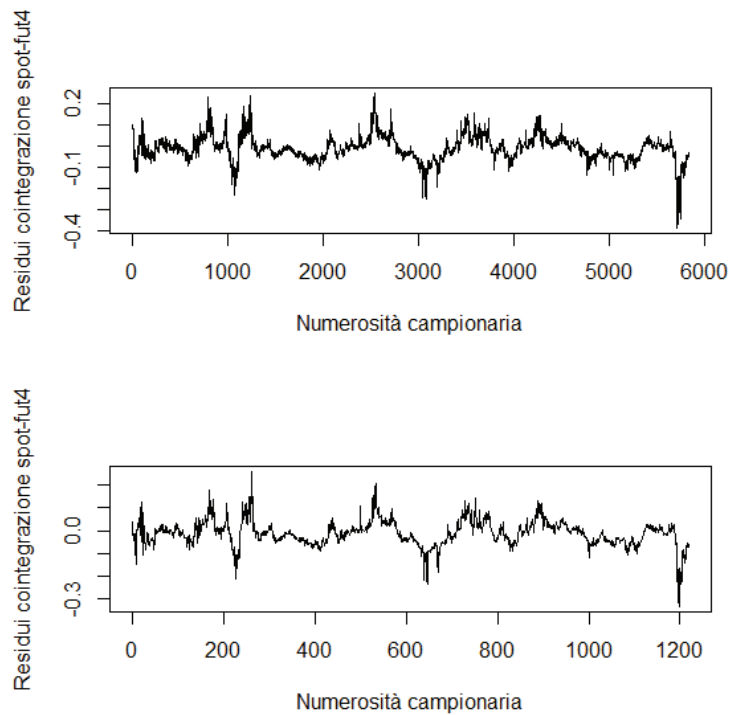


Figura A.33. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF4$ per $\tau=0,6$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

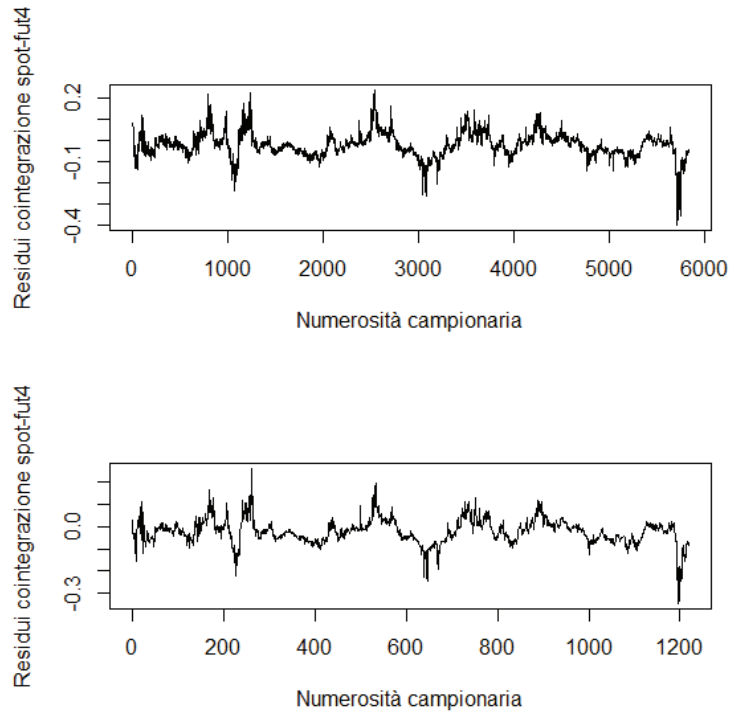


Figura A.34. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF4$ per $\tau=0,7$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

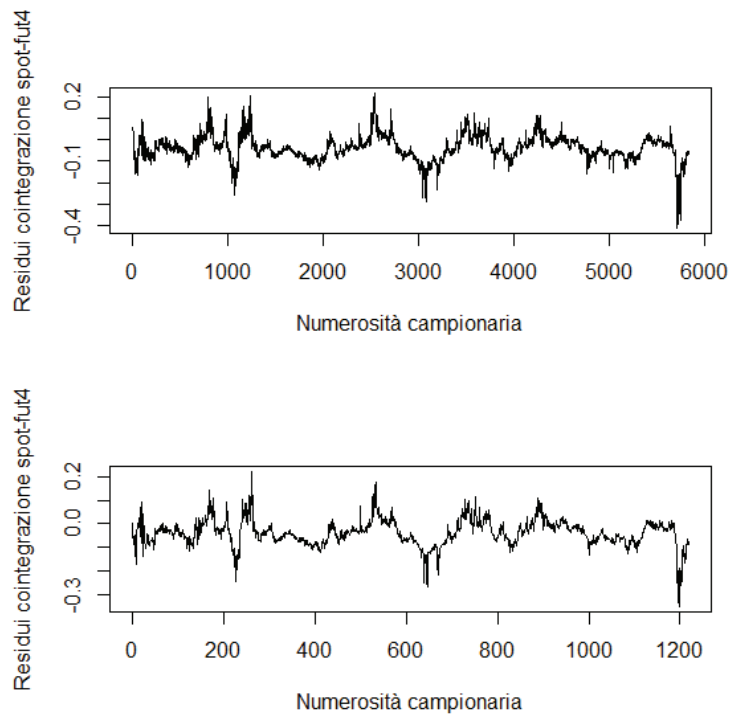


Figura A.35. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF4$ per $\tau=0,8$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

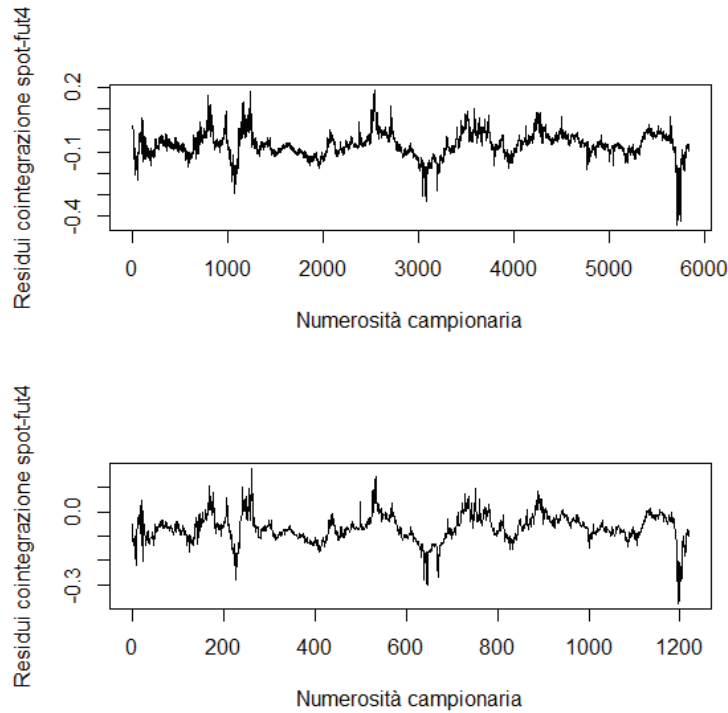


Figura A.36. Residui ottenuti dalla relazione di cointegrazione tra LnS e $LnF4$ per $\tau=0,9$. In alto si hanno i residui ottenuti con dati giornalieri, in basso con dati settimanali

Appendice B.

Di seguito è riportato il codice utilizzato in R per il test per la costanza dei beta. È descritto quello relativo alla relazione tra prezzi spot e futures a 1 mese, gli altri sono stati ricavati allo stesso modo.

```
##### test per la costanza dei beta #####
library(quantreg)
# passaggi descritti nel Capitolo 3
m=length(eps1.test)
## "eps1.test" sono i residui della relazione di cointegrazione
## (1)
# vettore dei coefficienti di cointegrazione al variare del tau
beta.quant.f1=round(c(coef(fit1.01)[2],coef(fit1.02)[2],coef(fit1.03)[2],coef(fit1.04)[2],coef(fit1.05)[2],coef(fit1.06)[2],coef(fit1.07)[2],coef(fit1.08)[2],coef(fit1.09)[2]),5)
# stima DOLS del coefficiente di cointegrazione
beta.dols.f1=round(rep(coef(fit1.lm)[2],9),5)
# costruzione della statistica test del tipo Kolmogoroff-Smirnoff
vn.f1.tot=m*(beta.quant.f1-beta.dols.f1)
```

```

vn.fl=max(vn.fl.tot)

## (2)

# si può definire il vettore (2*1) a partire dal quale poi si condurrà la sieve autoregression
x1=fut11[7:n]

d.x1=diff(x1,1)

# si definisce la quantità w alla quale si è interessati:
w1=cbind(d.x1,eps1.test)

#####

p1=19 # ordine del processo autoregressivo

## partenza del ciclo

M=1000 # numero di replicazioni bootstrap

val.crit.boot.l=rep(0,M)

for (t in 1:M)

{

# ricavo gli stimatori di Yule-Walker:

ar.w1=ar(w1,method="yule-walker",demean=F,aic=F,order.max=p1)

# estraggo gli stimatori dei coefficienti di Yule Walker e i residui:

B1=ar.w1$ar

e1.partial=ar.w1$resid[((p1+1):m),]

## (3)

# per prima cosa centro i residui:

mean.e1=apply(e1.partial,2,mean)

e1.q=e1.partial-mean.e1

# faccio il bootstrap con cui mi ricavo e1*

e1.star=apply(e1.q,2,sample,size=(m-p1),replace=T)

# ricavo w1*

wt.1.star=cbind(rep(0,m),rep(0,m))

wt.1.star[(1:p1),]=w1[(1:p1),] # fisso i primi p1 valori

# ricavo gli altri:

for (i in (p1+1):m)

{ a=0

for (j in 1:p1)

{a=a+B1[j,,]%*wt.1.star[i-j,]}

wt.1.star[i,]=a+e1.star[(i-p1),]}

```



```

## (4)

# a questo punto posso ricavare x1*
v.t.star=wt.1.star[,1]
x1.star=rep(0,m)
x1.star[1]=fut1l[1]
for (i in 2:m)
{
x1.star[i]=x1.star[i-1]+v.t.star[i]
}
# una volta ricavato x1* ricavo direttamente y1*
u.t.star=wt.1.star[,2]
alpha.dols.f1=round(coef(fit1.lm)[1],5)
y1.star=rep(0,m)
for (i in 1:m)
{
y1.star[i]=alpha.dols.f1+beta.dols.f1[1]*x1.star[i]+u.t.star[i]
}

## (5)

##### stimatori DOLS e quantile regression
# stime dei parametri con regressione quantilica

fit1.boot.01=rq(y1~x1+d_3.x1.star+d_2.x1.star+d_1.x1.star+d.x1.star+d1.x1.star+d2.x1.star+d3.x1.star
,tau=0.1,method="fn")

fit1.boot.02=rq(y1~x1+d_3.x1.star+d_2.x1.star+d_1.x1.star+d.x1.star+d1.x1.star+d2.x1.star+d3.x1.star
,tau=0.2,method="fn")

fit1.boot.03=rq(y1~x1+d_3.x1.star+d_2.x1.star+d_1.x1.star+d.x1.star+d1.x1.star+d2.x1.star+d3.x1.star
,tau=0.3,method="fn")

fit1.boot.04=rq(y1~x1+d_3.x1.star+d_2.x1.star+d_1.x1.star+d.x1.star+d1.x1.star+d2.x1.star+d3.x1.star
,tau=0.4,method="fn")

fit1.boot.05=rq(y1~x1+d_3.x1.star+d_2.x1.star+d_1.x1.star+d.x1.star+d1.x1.star+d2.x1.star+d3.x1.star
,tau=0.5,method="fn")

fit1.boot.06=rq(y1~x1+d_3.x1.star+d_2.x1.star+d_1.x1.star+d.x1.star+d1.x1.star+d2.x1.star+d3.x1.star
,tau=0.6,method="fn")

fit1.boot.07=rq(y1~x1+d_3.x1.star+d_2.x1.star+d_1.x1.star+d.x1.star+d1.x1.star+d2.x1.star+d3.x1.star
,tau=0.7,method="fn")

fit1.boot.08=rq(y1~x1+d_3.x1.star+d_2.x1.star+d_1.x1.star+d.x1.star+d1.x1.star+d2.x1.star+d3.x1.star
,tau=0.8,method="fn")

fit1.boot.09=rq(y1~x1+d_3.x1.star+d_2.x1.star+d_1.x1.star+d.x1.star+d1.x1.star+d2.x1.star+d3.x1.star
,tau=0.9,method="fn")

```

```

# stime bootstrap
beta.boot.01=coef(fit1.boot.01) [2]
beta.boot.02=coef(fit1.boot.02) [2]
beta.boot.03=coef(fit1.boot.03) [2]
beta.boot.04=coef(fit1.boot.04) [2]
beta.boot.05=coef(fit1.boot.05) [2]
beta.boot.06=coef(fit1.boot.06) [2]
beta.boot.07=coef(fit1.boot.07) [2]
beta.boot.08=coef(fit1.boot.08) [2]
beta.boot.09=coef(fit1.boot.09) [2]

# vettore di stime bootstrap
beta.boot.tau=c(beta.boot.01,beta.boot.02,beta.boot.03,beta.boot.04,beta.boot.05,beta.boot.06,beta.boot.07,beta.boot.08,beta.boot.09)

## a questo punto si ottiene lo stimatore DOLS
fit1.boot.lm=lm(y1~x1+d_3.x1.star+d_2.x1.star+d_1.x1.star+d.x1.star+d1.x1.star+d2.x1.star+d3.x1.star)
beta.boot.dols=rep(coef(fit1.boot.lm) [2], 9)
vn.boot.f1=m*(beta.boot.tau-beta.boot.dols)
val.crit.boot.1[t]=max(vn.boot.f1)
}

## valori critici
quantile(val.crit.boot.1,0.9)
quantile(val.crit.boot.1,0.95)
quantile(val.crit.boot.1,0.99)

```

Di seguito è riportato il codice utilizzato in R per il test sui residui della cointegrazione quantilica. È descritto quello relativo alla relazione tra prezzi spot e futures a 1 mese, gli altri sono stati ricavati allo stesso modo.

```

##### test sui residui di cointegrazione quantilica #####

# per prima cosa si definiscono i residui "corretti":
eps1.tau.01=0.1-(eps1.01<0)
eps1.tau.02=0.2-(eps1.02<0)
eps1.tau.03=0.3-(eps1.03<0)
eps1.tau.04=0.4-(eps1.04<0)
eps1.tau.05=0.5-(eps1.05<0)
eps1.tau.06=0.6-(eps1.06<0)

```

```

eps1.tau.07=0.7-(eps1.07<0)
eps1.tau.08=0.8-(eps1.08<0)
eps1.tau.09=0.9-(eps1.09<0)
# definisco le variabili esplicative
d.x1=diff(fut11,1)
pp=length(d.x1)
d.x1=d.x1[4:(pp-3)]
# definisco ora la bandwidth:
T=length(eps1.tau.01)
M=round((2*T^(1/3)),0) #36 nel caso di dati a frequenza giornaliera
# funzione che calcola il Kernel di Bartlett
bart.kern=function(c)
{
if(abs(c)<=1){y=1-abs(c)}
else {y=0}
return(y)
}
# funzioni per il calcolo della varianza di lungo periodo dei residui "corretti"
vM<-c(-(M:1),0,1:M)
length(vM)
gamma.xy=function(h,x,y) {
t = T-36
h = -36
a = rep(0,(t-h)-37)
for (i in 37:(t-h)) a[i]=x[i]*y[i+h]
return(sum(a)/T) }
xxx.fun=function(x,y)
{
b=0
for (i in (1:73))
{
b=b+bart.kern(vM[i]/M)*gamma.xy(vM[i],x,y)
}
return(b) }

```

```
##### SPOT VS. FUT1 #####
```

```
# tau=0.1
```

```
omega1.tau.01=xxx.fun(eps1.tau.01,eps1.tau.01)
```

```
sd1.01=sqrt(omega1.tau.01)
```

```
den1.01=sd1.01*sqrt(T)
```

```
stat.test.01=(1/den1.01)*max(abs(cumsum(eps1.tau.01)))
```

```
# tau=0.2
```

```
omega1.tau.02=xxx.fun(eps1.tau.02,eps1.tau.02)
```

```
sd1.02=sqrt(omega1.tau.02)
```

```
den1.02=sd1.02*sqrt(T)
```

```
stat.test.02=(1/den1.02)*max(abs(cumsum(eps1.tau.02)))
```

```
# tau=0.3
```

```
omega1.tau.03=xxx.fun(eps1.tau.03,eps1.tau.03)
```

```
sd1.03=sqrt(omega1.tau.03)
```

```
den1.03=sd1.03*sqrt(T)
```

```
stat.test.03=(1/den1.03)*max(abs(cumsum(eps1.tau.03)))
```

```
# tau=0.4
```

```
omega1.tau.04=xxx.fun(eps1.tau.04,eps1.tau.04)
```

```
sd1.04=sqrt(omega1.tau.04)
```

```
den1.04=sd1.04*sqrt(T)
```

```
stat.test.04=(1/den1.04)*max(abs(cumsum(eps1.tau.04)))
```

```
# tau=0.5
```

```
omega1.tau.05=xxx.fun(eps1.tau.05,eps1.tau.05)
```

```
sd1.05=sqrt(omega1.tau.05)
```

```
den1.05=sd1.05*sqrt(T)
```

```
stat.test.05=(1/den1.05)*max(abs(cumsum(eps1.tau.05)))
```

```
# tau=0.6
```

```
omega1.tau.06=xxx.fun(eps1.tau.06,eps1.tau.06)
```

```
sd1.06=sqrt(omega1.tau.06)
```

```
den1.06=sd1.06*sqrt(T)
```

```
stat.test.06=(1/den1.06)*max(abs(cumsum(eps1.tau.06)))
```

```
# tau=0.7
```

```
omega1.tau.07=xxx.fun(eps1.tau.07,eps1.tau.07)
```

```
sd1.07=sqrt(omega1.tau.07)
```

```
den1.07=sd1.07*sqrt(T)
```

```
stat.test.07=(1/den1.07)*max(abs(cumsum(eps1.tau.07)))
```

```
# tau=0.8
```

```
omega1.tau.08=xxx.fun(eps1.tau.08,eps1.tau.08)
```

```
sd1.08=sqrt(omega1.tau.08)
```

```
den1.08=sd1.08*sqrt(T)
```

```
stat.test.08=(1/den1.08)*max(abs(cumsum(eps1.tau.08)))
```

```
# tau=0.9
```

```
omega1.tau.09=xxx.fun(eps1.tau.09,eps1.tau.09)
```

```
sd1.09=sqrt(omega1.tau.09)
```

```
den1.09=sd1.09*sqrt(T)
```

```
stat.test.09=(1/den1.09)*max(abs(cumsum(eps1.tau.09)))
```


Bibliografia

- Baek, E., Brock, W. (1992), A general test for non-linear Granger causality: bivariate model. Working paper, *Iowa State University and University of Wisconsin, Madison, WI*
- Barrodale, I., Roberts, F.D.K. (1973), An improved algorithm for discrete ℓ_1 linear approximation, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 10, pp. 839-848
- Bekiros, S.D., Diks, C.G.H. (2008), The Relationship between Crude Oil Spot and Futures Prices: Cointegration, Linear and Nonlinear Causality, *Energy Economics*, Vol. 30, pp. 2673-2685
- Bofinger, E. (1975), Estimation of a Density Function Using Order Statistics, *Australian Journal of Statistics*, Vol. 17, pp. 1-7
- Bopp, A., Sitzer, S. (1987), Are petroleum futures prices good predictors of cash value?, *Journal of Futures Markets*, Vol. 7, pp. 705-719
- Borenstein, S., Cameron, A.C., Gilbert, R. (1997), Do gasoline prices respond asymmetrically to crude oil price changes?, *Quarterly Journal of Economics*, pp. 305-339
- Chamberlain, G. (1994), Quantile Regression, Censoring and the Structure of Wages, *Advances in Econometrics*, pp. 171-209
- Chuang, C.C., Kuan, C.M., Lin, H.Y. (2009), Causality in Quantiles and Dynamic Stock Return-Volume Relations, *Journal of Banking & Finance*, Vol. 33, pp. 1351-1360
- Cognigni, A., Manera, M. (2008), Oil prices, inflation and interest rates in a structural cointegrated VAR model for the G-7 countries, *Energy Economics*, Vol. 30, pp. 856-888
- Deutsche Bank (2010), Oil & Gas for Beginners
- Diks, C., Panchenko, V. (2006), A new statistic and practical guidelines for nonparametric Granger causality testing, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 30, pp. 1647-1669
- Elliott, G., Rothenberg, T.J., Stock J.H. (1996), Efficient tests for an autoregressive unit root, *Econometrica*, Vol. 64, pp. 813-836
- Engle, R.F., Granger, C.W.J. (1987), Cointegration and error correction: Representation, estimation, and testing, *Econometrica*, Vol. 55, pp. 251-276
- Garbade, K.D., Silber, W. L. (1983), Price movement and price discovery in futures and cash markets, *Review of Economics and Statistics*, Vol. 65, pp. 289-297
- Hall, P., Sheather, S. J., On the Distribution of the Studentized Quantile, *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 50, pp. 381-391

- Hannan, E.J., Quinn, B.G. (1979), The Determination of the Order of an Autoregression, *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 41, pp. 190-195
- He, X., Hu, F. (2002), Markov chain marginal bootstrap, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 97, pp. 783-795
- Hendricks, W., Koenker, R. (1992), Hierarchical Spline Models for Conditional Quantiles and the Demand for Electricity, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 87, pp. 58-68
- Hiemstra, C., Jones, J.D. (1994), Testing for linear and nonlinear Granger causality in the stock price-volume relation, *Journal of Finance*, Vol. 49, pp. 1639-1664
- Hull, J.C. (2006), Opzioni, Futures e altri Derivati, *Pearson Education Italia*
- Johansen, S. (1991), Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models, *Econometrica*, Vol. 59, pp. 1551-1580
- Johansen, S. (1995), Likelihood-based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models, *Oxford University Press*
- Juselius, K. (2007), The Cointegrated VAR model: Methodology and Applications, *Oxford University Press*
- Kahneman, D., Tversky, A. (1979), Prospect theory: an analysis of decision under risk, *Econometrica*, Vol. 47, pp. 263-292
- Kawaller, I.G., Koch, P.D., Koch, T.W. (1988), The relationship between the S&P 500 index and the S&P 500 index futures prices, *Federal Reserve Bank of Atlanta Economic Review*, Vol. 73, pp. 2-10
- Knight, K. (1989), Limit Theory for Autoregressive-parameter estimates in an infinite-variance random walk, *The Canadian Journal of Statistics*, Vol. 17, pp. 261-278
- Kocherginsky, M., He, X., Mu, Y. (2005), Practical confidence intervals for regression quantiles, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, Vol. 14, pp. 41-55
- Koenker, R. (2005), Quantile Regression, *Econometric Society Monograph Series*, Cambridge
- Koenker, R., Bassett, W. (1978), Regression Quantiles, *Econometrica*, Vol. 46, pp. 33-50
- Koenker, R., d'Orey, V. (1987), Computing regression quantiles, *Applied Statistics*, Vol. 36, pp. 383-393
- Koenker, R., Portnoy, S. (1997), The Gaussian Hare and the Laplacean Tortoise: Computability of Squared-errors. Absolute Error Estimators, *Statistical Science*, Vol. 12, pp. 279-300

- Kreiss, J.P. (1988), *Asymptotic Statistical Inference for a Class of Stochastic Processes*, *Habilitationsschrift, Universitat Hamburg*
- Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P. and Shin, Y. (1992), Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic time series have a unit root?, *Journal of Econometrics*, Vol. 54, pp. 159-178
- Lardic, S., Mignon, V. (2006), The impact of oil prices on GDP in European countries: an empirical investigation based on asymmetric cointegration, *Energy Policy*, Vol. 34, pp. 3910-3915
- Lee, C.C., Zeng J.H. (2011), Revisiting the relationship between spot and futures oil prices: Evidence from quantile cointegrating regression, *Energy Economics*, Vol. 33, pp. 924-935
- Li, H., Xiao, Z. (2000), Bootstrap-Based Test for Stationarity and Cointegration, *APDSI 2000 Full Paper*
- Mackinnon, J.G. (2010), Critical Values for Cointegration Tests, *Queen's Economics Department Working Paper No. 1227*
- Mehrotra, S. (1992), On the implementation of a primal-dual interior point method, *SIAM J. Optimization*, Vol. 2, pp. 575-601
- Moosa, I.A. (1996), An econometric model of price determination in the crude oil futures markets, *Proceedings of the Econometric Society Australasian meeting*, Vol. 3, pp. 373-402
- Ng, S., Perron, P. (2001), Lag Length Selection and the Construction of Unit Root Tests with Good Size and Power, *Econometrica*, Vol. 69, pp. 1519-1554
- Park, J., Ouliaris, S., Choi, B. (1988), Spurious regressions and tests for cointegration, *Mimeo, Cornell University*
- Park, J., Ratti, R.A. (2008), Oil price shocks and stock markets in the U.S. and 13 European countries, *Energy Economics*, Vol. 30, pp. 2587-2608
- Powell, J. (1989), Estimation of Monotonic Regression Models Under Quantile Restrictions, *Nonparametric and Semiparametric Methods in Econometrics*
- R Core Team (2012), *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN: 3-900051-07-0. URL: <http://www.R-project.org/>
- Saikkonen, P. (1991), Asymptotically efficient estimation of cointegration regression, *Econometric Theory*, Vol. 7, pp. 1-21
- Shin, Y. (1994), A residual based test of the null of cointegration against the alternative of no cointegration, *Econometric Theory*, Vol. 10, pp. 91-115
- Silvapulle, P., Moosa, I.A. (1999), The Relationship between Spot and Futures Prices: Evidence from the Crude Oil Market, *The Journal of Futures Markets*, Vol. 19, pp. 175-193

Xiao, Z. (2009), Quantile cointegrating regression, *Journal of Econometrics*, Vol. 150, pp. 248-260

Xiao, Z., Phillips, P.C.B. (2002), A CUSUM test for cointegration using regression residuals, *Journal of Econometrics*, Vol. 108, pp. 43-61