



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE  
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

## **Il rumore termico**

*Laureando:*  
Alberto COMIN

*Relatore:*  
Dr. Lorenzo FINESSO

Anno accademico 2012/2013



# Sommario

In questa tesi si prende in esame il fenomeno del rumore termico, che fra i vari nomi è conosciuto anche con quello di rumore Johnson, in quanto fu scoperto e misurato da John Bertrand Johnson. Questo fenomeno prende origine dal fatto che in un qualsiasi conduttore le cariche elettriche si trovano in uno stato di agitazione termica, in equilibrio termodinamico con il moto caotico degli atomi del conduttore [1]. La manifestazione di tutto questo è una differenza di potenziale fluttuante ai capi del conduttore, che può essere misurata con una strumentazione adeguatamente sensibile. Lo studio portato da Johnson, sulla base di misurazioni effettuate e da Nyquist, su basi completamente teoriche, ha rivelato una dipendenza diretta di questa differenza di potenziale dalla resistenza del conduttore, oltre che dalla temperatura come era stato ipotizzato inizialmente.

Nei capitoli che seguono, si farà una introduzione agli strumenti matematici indispensabili per la trattazione che segue, con cui sarà poi possibile ricavare un'espressione semplice per la differenza di potenziale ai capi di un resistore. Inoltre sarà presente anche una dimostrazione, interamente teorica portata da Nyquist del fenomeno.



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>9</b>
1.1	SISTEMI LINEARI . . . . .	9
1.1.1	Risposta ad un generico segnale d'ingresso nei sistemi lineari . . . . .	9
1.1.2	Alcuni esempi particolari di risposta in frequenza . . . . .	13
1.2	LE SEQUENZE CASUALI . . . . .	15
1.2.1	Le sequenze a caso e le medie di insieme . . . . .	15
1.2.2	Processi aleatori stazionari . . . . .	18
1.2.3	Le medie nel tempo e l'ipotesi ergodica . . . . .	18
1.3	LINEE DI TRASMISSIONE . . . . .	21
1.3.1	Circuiti a costanti concentrate e distribuite, equazioni del telegrafo e del telefono . . . . .	21
1.3.2	Linee senza perdite, lunghezza d'onda, coefficiente di riflessione, impedenza caratteristica . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Il Rumore Termico</b>	<b>27</b>
2.1	IL RUMORE NEL DOMINIO DEL TEMPO E DELLA FREQUENZA	27
2.1.1	L'intervallo di quasi periodicità . . . . .	27
2.1.2	Densità spettrale di rumore . . . . .	28
2.1.3	Densità spettrali di rumore in ingresso e in uscita di una rete lineare . . . . .	29
2.2	IL RUMORE JOHNSON DI UN RESISTORE . . . . .	32
2.2.1	Derivazione dello spettro di potenza del rumore termico secondo Nyquist . . . . .	37
2.2.2	Distribuzione gaussiana delle ampiezze del rumore termico . . . . .	40
2.2.3	Esempio: il rumore termico in un circuito RC . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>43</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>45</b>



# Elenco delle figure

1.1	Esempio di rete lineare . . . . .	9
1.2	Impulso di ingresso e corrispondente risposta al raddoppiare dell'estensione temporale . . . . .	10
1.3	Segnale di ingresso effettivo (tratto continuo) e approssimato tramite la formula 1.2 (spezzata) . . . . .	11
1.4	Risposta al segnale di ingresso calcolata tramite la formula 1.3 . . . . .	12
1.5	Simulazione numerica di una misura di ddp ai capi di un resistore senza che sia applicata nessuna tensione esterna . . . . .	17
1.6	Circuito equivalente di un tratto di linea di trasmissione . . . . .	22
1.7	Linea che termina sulla propria resistenza caratteristica . . . . .	25
2.1	Esempio di rete elementare con generatore equivalente secondo Thevenin	30
2.2	Esempio di rete elementare con generatore equivalente secondo Norton	31
2.3	Rappresentazioni equivalenti di una resistenza rumorosa con generatore di tensione . . . . .	32
2.4	Rappresentazioni equivalenti di una resistenza rumorosa con generatore di tensione o di corrente . . . . .	33
2.5	Schema per ricavare la dipendenza della densità spettrale di rumore dal valore di R . . . . .	34
2.6	Simulazione numerica di tensione ai capi della stessa resistenza misurate con oscillografi aventi bande passanti differenti . . . . .	36
2.7	Circuito di base con i due conduttori schematizzati come RI e RII . . . . .	37
2.8	Schema di base in cui è stato inserito il circuito risonante . . . . .	38
2.9	Schema di base dove si esplicita la lunghezza della linea . . . . .	39
2.10	Circuito RC in esame . . . . .	41
2.11	Andamento della relazione 2.26 per due valori di C . . . . .	42





# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 SISTEMI LINEARI

#### 1.1.1 Risposta ad un generico segnale d'ingresso nei sistemi lineari

Si consideri una rete lineare e si identifichino in essa due terminali di ingresso ai quali venga applicato un segnale (una ddp)  $S(t)$  e due terminali di uscita dai quali si preleva la risposta (ancora una ddp)  $R(t)$  come ad esempio in Fig 1.1. Ciò che segue, salvo piccoli adeguamenti sul significato delle grandezze introdotte, si può applicare a qualunque sistema fisico che si comporti in maniera lineare; tuttavia qui e nel seguito verrà fatto riferimento esclusivo ad una rete elettrica. Il principio di causalità impone che la risposta  $R(t)$  ad un tempo  $t$  possa solo dipendere dal valore che il segnale  $S(\theta)$  ha assunto ai tempi  $\theta < t$ . Per trovare l'espressione più generale che lega  $R(t)$  al segnale  $S(\theta)$ , si esamini la risposta  $r(t)$  del sistema (rispetto ai terminali di ingresso e uscita introdotti precedentemente) ad un segnale particolare, un impulso rettangolare  $i(t)$  di area unitaria, durata  $\Delta\theta$  molto breve (successivamente verrà esplicitato rispetto

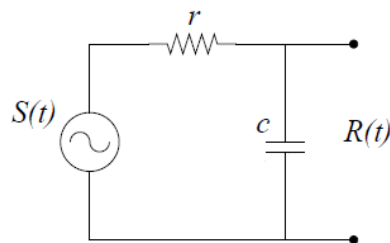


Figura 1.1: Esempio di rete lineare

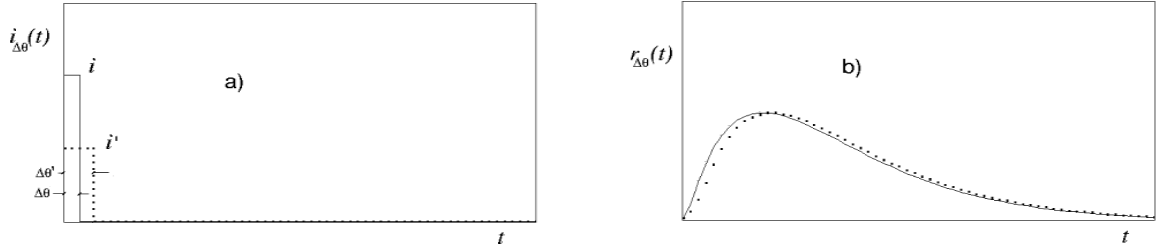


Figura 1.2: Impulso di ingresso e corrispondente risposta al raddoppiare dell'estensione temporale

a cosa) e con inizio nell'origine dei tempi:

$$\begin{aligned}
 i_{\Delta\theta}(t) &= cost \quad \forall 0 \leq t \leq \Delta\theta, = 0 \quad \text{altrimenti} \\
 r_{\Delta\theta}(t) &\neq 0 \quad \forall t \geq 0, = 0 \quad \text{altrimenti}
 \end{aligned}$$

In Fig. 1.2 nelle parti a) e b) sono riportate rispettivamente, a tratto continuo una eccitazione  $i_{\Delta\theta}(t)$  e la corrispondente risposta  $r_{\Delta\theta}(t)$ , dove i pedici  $\Delta\theta$  stanno a ricordare l'estensione temporale dell'impulso di ingresso. Nella stessa figura è anche riportata un'altra coppia segnale-risposta, a tratto punteggiato, con l'eccitazione caratterizzata dall'aver una durata doppia, ma la stessa area. Gli assi orizzontali sono gli stessi per entrambe le parti della figura. Se ora supponiamo di ridurre progressivamente la durata  $\Delta\theta$  dell'impulso, mantenendo il vincolo che l'integrale di  $i_{\Delta\theta}(t)$  ( $i_{\Delta\theta}(t) \cdot \Delta\theta$ ) resti unitario e assumiamo che esista il limite della funzione  $r_{\Delta\theta}(t)$  per  $\Delta\theta \rightarrow 0$  e chiamiamo tale limite  $r(t)$ .  $r(t)$  è la risposta del sistema alla delta di Dirac  $\delta(t)$ , centrata nell'origine. In tutti i casi realistici si trova che la  $r(t)$  ha una estensione temporale non nulla. L'estensione temporale della risposta alla  $\delta$  fornisce il termine di paragone naturale tramite il quale confrontare l'estensione dell'eccitazione: ovvero impulsi in ingresso di durata molte breve rispetto alla durata della risposta alla  $\delta$  daranno luogo a risposte confondibili/confrontabili con quelle alla  $\delta$ .

Come in effetti si può notare, dalla Fig 1.2, un raddoppio dell'estensione temporale della curva punteggiata ( $i'$ ) provoca un cambiamento molto modesto nella curva di risposta (sempre quella punteggiata nella parte b), proprio perchè l'estensione complessiva della funzione di risposta è comunque significativamente superiore alla durata dell'eccitazione.

Se le caratteristiche del circuito sono indipendenti dal tempo (ad esempio nel caso di componenti costanti come resistori, condensatori, induttori), si può allora affermare che la risposta  $r(t, \theta)$  ad una eccitazione  $\delta(t - \theta)$  centrata in  $t = \theta$ , invece che sull'origine dei tempi, sarà data semplicemente da  $r(t - \theta)$  e in queste condizioni  $r(t)$  è detta funzione di risposta del circuito in esame, con riferimento ai terminali di ingresso e uscita considerati.

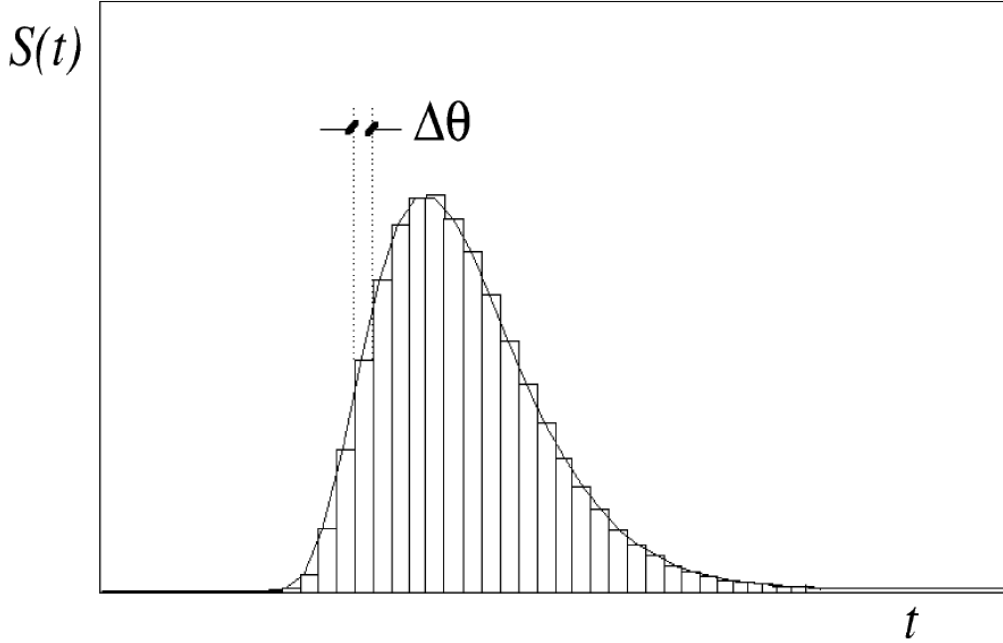


Figura 1.3: Segnale di ingresso effettivo (tratto continuo) e approssimato tramite la formula 1.2 (spezzata)

Si ha quindi un'invarianza traslazionale rispetto all'asse dei tempi, ciò significa che vi è una dipendenza da  $(t - \theta)$  della risposta del sistema alla  $\delta$  centrata in  $\theta$ . Se invece non è verificata questa proprietà ma si è nel caso più generale in cui la risposta possa dipendere dal tempo, allora la risposta alla  $\delta(t - \theta)$  dovrà essere scritta nella forma  $r(t, \theta)$  in cui si sottolinea l'effettiva dipendenza dal parametro  $\theta$  che comporta variazioni dei parametri del sistema.

Tornando all'ipotesi di invarianza traslazionale nel tempo, sfruttando la definizione di  $\delta(t)$ , è possibile esprimere  $S(t)$  tramite l'integrale:

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\theta)\delta(t - \theta)d\theta \quad (1.1)$$

che può essere interpretato come il limite per  $\Delta\theta \rightarrow 0$  dell'espressione approssimata (Fig. 1.3):

$$S(t) \approx S_{\Delta\theta}(t) = \sum_{k=0}^N S(\theta'_k) i_{\Delta\theta}(t - \theta_k) \Delta\theta = \sum_{k=0}^N c_k i_{\Delta\theta}(t - \theta_k) \Delta\theta \quad (1.2)$$

I vari  $\theta_k$  dell'espressione 1.2 rappresentano l'origine degli impulsi rettangolari di area unitaria che moltiplicano il valore medio  $c_k$  della funzione nell'intervallo considerato;

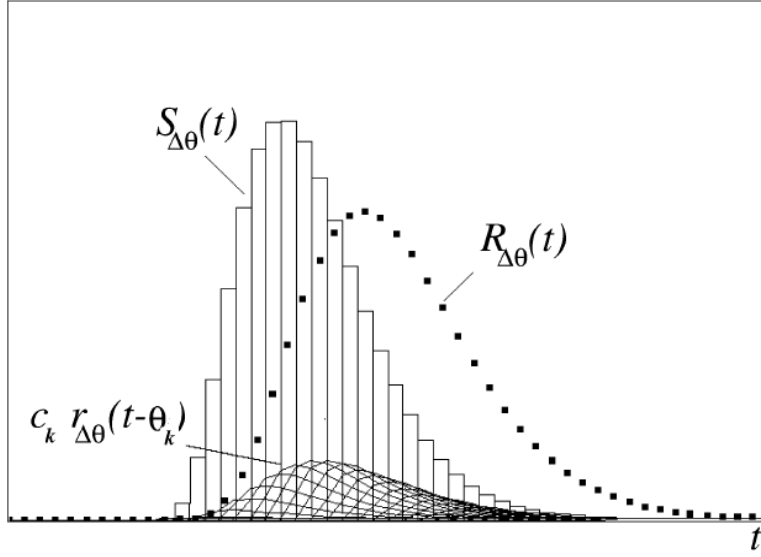


Figura 1.4: Risposta al segnale di ingresso calcolata tramite la formula 1.3

tale valore medio, a causa della regolarità che assumiamo per la funzione, è anche esprimibile mediante il valore che la funzione  $S(\theta'_k)$  assume in un punto interno all'intervallo  $\Delta\theta$  su cui si estende l'impulso:  $\theta_k < \theta'_k < \theta_k + \Delta\theta$ . La formula 1.2, rappresentando la  $S(t)$  come somma di segnali, permette, sfruttando le proprietà di linearità del sistema, di scrivere la risposta come somma delle risposte ai vari segnali addendi:

$$R_{\Delta\theta}(t) = \sum_{k=0}^M c_k r_{\Delta\theta}(t - \theta_k) \Delta\theta \quad (1.3)$$

con  $M$  tale che  $\theta_M \leq t$ ; cioè la somma include, per il principio di causalità, soltanto le eccitazioni con origine dei tempi a  $\theta_k$  antecedenti l'istante in cui si considera la risposta. Nella Fig. 1.4 viene rappresentata la risposta  $R_{\Delta\theta}(t)$  (punteggiata) come somma dei contributi  $c_k r_{\Delta\theta}(t - \theta_k)$  ai vari impulsi  $c_k i_{\Delta\theta}(t - \theta_k)$  che approssimano come scritto nella formula 1.2 il segnale. Se ora si riscrive la formula 1.3, per il comportamento al limite di  $\Delta\theta \rightarrow 0$  e si tiene conto che  $\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} S(\theta'_k) = S(\theta_k)$ , si ottiene:

$$R(t) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} R_{\Delta\theta}(t) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^M c_k r_{\Delta\theta}(t - \theta_k) \Delta\theta = \int_{-\infty}^t S(\theta) r(t - \theta) d\theta \quad (1.4)$$

Con alcuni passaggi matematici, questa formula può essere resa in una forma più utile, effettuando la sostituzione  $\tau = t - \theta$ :

$$R(t) = - \int_{+\infty}^0 S(t - \tau) r(\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} S(t - \tau) r(\tau) d\tau$$

e ricordando che per definizione  $r(\tau) = 0 \forall \tau < 0$  si può riscrivere in questo modo:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t - \tau)r(\tau)d\tau \quad (1.5)$$

arrivando alla conclusione fondamentale che la risposta complessiva del sistema al segnale  $S(t)$  è rappresentata dal prodotto di convoluzione del segnale con la funzione di risposta del sistema.

Essa vale per qualunque sistema lineare che abbia funzione di risposta impulsiva  $r(t)$ . Se inoltre per i segnali  $S(t)$  e  $r(t)$  sono verificate le condizioni di Dirichlet [6]:

1.  $r(t)$  e  $S(t)$  assolutamente integrabili:  $\int_{-\infty}^{+\infty} |r(t)|dt < \infty$ ;
2.  $r(t)$  e  $S(t)$  hanno un numero di massimi e minimi finito per qualsiasi intervallo finito;
3.  $r(t)$  e  $S(t)$  hanno un numero finito di discontinuità per qualsiasi intervallo finito, inoltre queste discontinuità devono essere finite;

allora è garantita l'esistenza della loro trasformata secondo Fourier (queste condizioni sono verificate in tutti i casi fisici di interesse, in cui in pratica è richiesta una certa regolarità).

Quindi se vale la formula 1.5, allora ottenendo le trasformate  $FT\{r(t)\} = A(f)$ ,  $FT\{R(t)\} = R(f)$  e  $FT\{S(t)\} = S(f)$ , vale:

$$R(f) = S(f) \cdot A(f) \quad (1.6)$$

cioè la FT della risposta del sistema è data dal prodotto delle FT del segnale in ingresso e della funzione di risposta. Inoltre la trasformata della risposta impulsiva  $FT\{r(t)\} = A(f)$  prende il nome di risposta in frequenza della rete lineare rispetto alle coppie di terminali indicate inizialmente.

Con le formule 1.5 e 1.6 è possibile valutare la risposta, rispettivamente o nel dominio del tempo o in quello delle frequenze, una volta che sia nota (oltre ovviamente al segnale  $S(t)$  o la sua FT  $S(f)$ ) la funzione di risposta  $r(t)$  oppure la sua FT  $A(f)$ , cioè la sua risposta in frequenza. Pertanto il vero problema che di volta in volta va risolto nell'esaminare la risposta di una rete ad una eccitazione generica  $S(t)$ , è quello di determinare la risposta impulsiva  $r(t)$  o la risposta in frequenza  $A(f)$ , rispetto ai terminali di ingresso e di uscita di interesse.

### 1.1.2 Alcuni esempi particolari di risposta in frequenza

Come primo esempio di applicazione della formula 1.6, si consideri il caso in cui  $S(t) = \delta(t)$ . Secondo quanto è stato detto precedentemente in questo caso la risposta al

segnale  $\delta(t)$  dovrà essere proprio  $r(t)$  la risposta impulsiva del sistema. Se infatti si impone  $S(t) = \delta(t)$ , si trova  $S(f) = FT\{\delta(t)\} = 1$  ed essendo  $R(f) = A(f)$ :

$$R(t) = FT^{-1}\{1 \cdot A(f)\} = r(t)$$

confermando quanto detto precedentemente.

Un altro caso molto interessante di applicazione della formula 1.6 è quella in cui il segnale di ingresso  $S(t) = S_0 e^{j2\pi f_s t}$  ovvero un segnale fasoriale. Calcolando la sua trasformata si ottiene:

$$S(t) = FT\{S_0 e^{j2\pi f_s t}\} = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_s t} e^{-j2\pi f t} dt = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f-f_s)t} dt = S_0 \delta(f-f_s)$$

Da cui si ottiene:

$$R(f) = S(f) \cdot A(f) = S_0 A(f) \delta(f-f_s) \quad (1.7)$$

Quindi per ottenere la risposta del sistema al segnale di ingresso nel dominio del tempo, basta antitrasformare:

$$R(t) = FT^{-1}\{R(f)\} = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} A(f) \delta(f-f_s) e^{j2\pi f t} df = S_0 A(f_s) e^{j2\pi f_s t} \quad (1.8)$$

Se ora esprimiamo  $R(t) = R_0 e^{j2\pi f_s t}$  in cui  $R_0 = S_0 A(f_s)$  si trova una relazione molto importante fra il segnale di ingresso  $S(t)$  e il segnale di uscita  $R(t)$  in questo caso particolare. Se si considera ad esempio  $S(t)$  sinusoidale, grazie alla relazione ricavata si può vedere come anche il segnale di uscita sarà sinusoidale, inoltre avente anche la stessa pulsazione e con ampiezza  $R_0$  (in generale complessa) proporzionale all'ampiezza di ingresso  $S_0$ , dove la proporzionalità dipende oltre che dalla pulsazione del segnale di ingresso anche dalle caratteristiche della rete.

La risposta in frequenza del sistema è calcolabile considerando la rete lineare, con un segnale di ingresso sinusoidale e applicando il metodo simbolico,  $A(f)$  sarà quindi funzione unicamente delle impedenze della rete in esame. Si consideri nuovamente la rete di Fig 1.1, presa come esempio per introdurre l'argomento, e se ne calcoli la risposta in frequenza:

$$R(f) = S(f) \frac{1/j\omega c}{r + 1/j\omega c} = S_0 \frac{1}{j\omega r c + 1} = S_0 \frac{1}{1 + j2\pi f r c}$$

da cui dalla 1.6 si ricava la risposta in frequenza  $A(f)$ :

$$A(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f r c}$$

Con questo metodo è quindi possibile trovare la risposta di un qualunque sistema lineare (con risposta indipendente dal tempo) a qualunque segnale di ingresso  $S(t)$  a patto che sia trasformabile secondo Fourier.

## 1.2 LE SEQUENZE CASUALI

### 1.2.1 Le sequenze a caso e le medie di insieme

Per iniziare ad introdurre concetti fondamentali, utili successivamente, si è deciso di partire con un esempio ben preciso che verrà illustrato anche in seguito, ovvero la differenza di potenziale che si presenta ai capi di un resistore anche quando questo non è percorso da una corrente imposta dall'esterno. Si consideri quindi un resistore  $r$  di resistenza  $R$ . Indicando il valore  $R$  si ha l'intenzione di caratterizzare il resistore in esame, sempre ricordando che con l'indicazione del valore di  $r$  non si ha univocamente definito il resistore, esistono infatti moltissimi resistori, tutti apparentemente uguali dal punto di vista macroscopico (in particolare tutti caratterizzati dall'aver la stessa resistenza  $R$ ), certamente differenti l'uno dall'altro per diverse aggregazioni microscopiche del materiale di cui sono costituiti. Normalmente questo può avere uno scarso interesse, quando però si osserva che posto il resistore a temperatura  $T$  costante e senza applicare alcuna tensione ad esso, la ddp misurata con uno strumento sufficientemente sensibile risulta fluttuante e in generale diversa da zero, questo aspetto può diventare molto interessante. Ci si può infatti porre il problema di cosa accadrebbe se il resistore venisse cambiato con un altro, allora le innumerevoli maniere con cui i resistori di resistenza  $R$  sono aggregati microscopicamente diventavano non solo interessanti, ma addirittura fondamentali se il nostro scopo è individuare e definire (se possibile) delle proprietà medie di questa ddp osservata su un singolo campione. Per iniziare con la valutazione di queste proprietà medie, si immagini di disporre di un insieme costituito da tutti quei resistori macroscopicamente identici e compatibili con il resistore originario, posti nelle stesse condizioni fisiche (in particolare nel nostro caso alla stessa temperatura  $T$ ) e se ne studino le proprietà fra le quali la ddp ai loro capi, in assenza di un'applicazione esterna di tensione. In generale le possibili repliche saranno in un numero  $M$  molto grande, matematicamente tendente all'infinito. Se si ammette di compiere le misure di ddp su tutte le  $M$  resistenze ad intervalli di tempo regolari e contemporaneamente su tutte quante, si otterrà per ogni resistenza  $r_m$  un insieme di registrazioni (ognuna costituente una sequenza, vettore) che possiamo indicare con il simbolo:

$$\underline{v}_{mi}$$

con l'indice  $m$  che corre sull'insieme degli  $M$  resistori e l'indice  $i$  che ordina le misure effettuate sulla resistenza  $r_m$  secondo il parametro tempo; qui e in seguito le variabili aleatorie saranno indicate con una sottolineatura. Essendo gli elementi della sequenza, come appena detto variabili aleatorie, le sequenze sono anch'esse dette aleatorie o casuali.

Grazie alle misure effettuate ora si dispone di un insieme di  $M$  sequenze e l' $i$ -esimo elemento dell' $m$ -esima sequenza rappresenta la misura della ddp ai capi di  $r_m$  effettuata al tempo  $t_i = i \cdot \Delta t$ , con  $i=0, \dots, I$  e  $\Delta t$  intervallo fra una misura e l'altra. Nel limite per  $M \rightarrow \infty$ , ovvero nella presunzione di aver considerato tutte le repliche fisicamente

possibili del resistore di partenza, per ogni valore di  $i$  è possibile determinare la densità di probabilità  $f_{v_i}(v_i, i)$  che la tensione  $\underline{v}_i$  sia compresa in un intervallo infinitesimo di estensione  $dv_i$  attorno a  $v_i$ :

$$p(v_i \leq \underline{v}_i \leq v_i + dv_i) = f_{v_i}(v_i, i)dv_i \quad (1.9)$$

L'aver ammesso di disporre di un numero  $M$  illimitato di resistori tutti identici fra loro rispetto al valore  $R$  permette, utilizzando le leggi della statistica, di estrarre le informazioni sulle proprietà matematiche delle distribuzioni che sperabilmente sono in grado di rappresentare il processo.

È possibile introdurre le medie di insieme delle grandezze che si stanno studiando e delle loro funzioni. Ad esempio per quanto riguarda la media di insieme delle ddp misurate  $\underline{v}_i$ , cioè delle tensioni misurate al tempo  $t_i = i \cdot \Delta t$ , come:

$$E[\underline{v}_i] = \int_{-\infty}^{+\infty} v f_{v_i}(v, i) dv_i \quad (1.10)$$

Nel caso in cui la variabile  $v_i$  sia discreta, ad esempio se le misure vengano effettuate con un ADC che ha un numero finito di bit, occorre passare dagli integrali alle somme e dalle densità di probabilità alle probabilità associate ai valori discreti. Non è comunque il caso considerato fin'ora in quanto si suppone che le misure vengano effettuate con uno strumento infinitamente sensibile e preciso.

Occorre precisare che in generale (ma non nel caso che si sta esaminando delle resistenze), la media di insieme, cioè l'aspettazione di  $\underline{v}_i$ , dipende da  $i$ , così come da  $i$  dipende in generale  $f_{v_i}(v, i)$ .

Avendo a che fare con vettori di variabili aleatorie  $\{\underline{v}_i\}$ , possiamo definire le densità di probabilità congiunta  $f_{v_i, v_j}(v_i, i; v_j, j)$  per due componenti del vettore  $v_i, v_j$ , che servirà nel momento in cui verranno considerate funzioni di due variabili aleatorie della sequenza. Per questa probabilità congiunta valgono le usuali considerazioni riguardo all'indipendenza o meno delle variabili aleatorie: in particolare la condizione necessaria e sufficiente per l'indipendenza, ovvero la fattorizzabilità della densità di probabilità congiunta nelle due densità marginali.

Oltre alla media di insieme  $E[\underline{v}_i]$ , possono essere definite la media di insieme al quadrato  $E[\underline{v}_i^2]$  e la varianza di insieme  $\sigma^2(\underline{v}_i) = E[(\underline{v}_i - E[\underline{v}_i])^2]$ :

$$E[\underline{v}_i^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 f_{v_i}(v, i) dv_i \quad (1.11)$$

$$\sigma^2(\underline{v}_i) = E[(\underline{v}_i - E[\underline{v}_i])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (v - E[\underline{v}_i])^2 f_{v_i}(v, i) dv_i = E[\underline{v}_i^2] - E[\underline{v}_i]^2 \quad (1.12)$$

Così come la media  $E[\underline{v}_i]$  anche  $E[\underline{v}_i^2]$  e  $\sigma^2(\underline{v}_i)$  in generale dipendono dall'indice  $i$ , cioè dal tempo (ma, come detto prima, non è il caso della resistenza che si sta considerando).



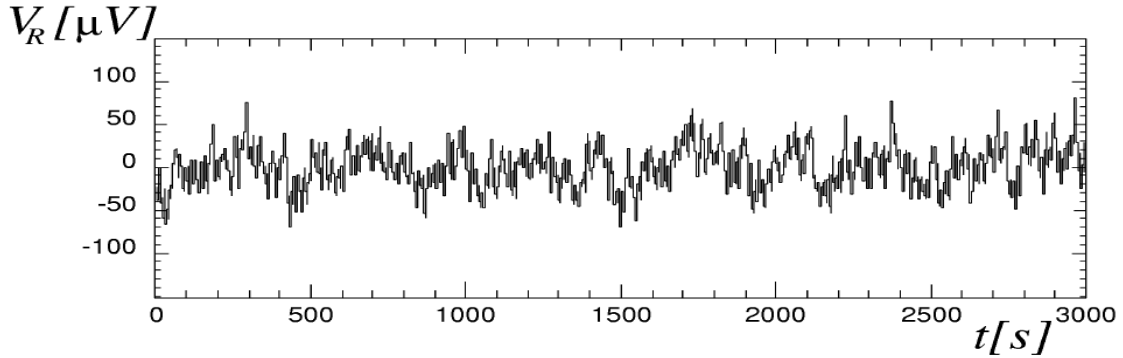


Figura 1.5: Simulazione numerica di una misura di ddp ai capi di un resistore senza che sia applicata nessuna tensione esterna

Risultano avere un notevole interesse le correlazioni fra componenti della sequenza, nel caso in esame, essendo la sequenza ordinata secondo il tempo, l'indice delle componenti del vettore  $E[v_i]$  gioca un ruolo fondamentale nella definizione e ricerca delle correlazioni. La sequenza di autocorrelazione è definita come segue:

$$\Phi_{vv}(i, j) = E[v_i \cdot v_j] = \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} v \cdot u^* f_{v_i v_j}(v, i; u, j) du \quad (1.13)$$

e la sequenza di autocovarianza come:

$$\gamma_{vv}(i, j) = E[(v_i - E[v_i]) \cdot (v_j - E[v_j])^*] \quad (1.14)$$

dove il simbolo \* rappresenta l'operazione di coniugazione, che per grandezze reali come sono le tensioni ai capi dei resistori sulle quali ci si sta concentrando, non ha alcun effetto.

In generale le sequenze di autocorrelazione e autocovarianza dipendono sia da  $i$  che da  $j$ . La dipendenza di queste sequenze dai due indici fa vedere come le variabili siano fra loro correlate al variare di  $i$  e  $j$ , ovvero al loro muoversi all'interno della sequenza originaria. Intuitivamente ci si può aspettare che quando  $i$  e  $j$  sono vicini in valore (ad esempio quando sono adiacenti) il modulo della autocorrelazione possa essere molto maggiore di quando gli indici sono molto diversi, ovvero quando le due misure sono temporalmente molto distanti. Come si può notare nella sequenza riportata in Fig. 1.5 (che rappresenta una simulazione numerica di una misura di ddp ai capi di un resistore senza che sia applicata nessuna tensione esterna ad esso), i valori della tensione anche se fluttuanti denotano una tendenza a rimanere costanti su intervalli di tempo dell'ordine delle centinaia di secondi. Quindi nel caso in cui si scelgano  $i$  e  $j$  tali per cui la loro differenza di tempo associata è minore di tale intervallo temporale il prodotto  $(v_i - E[v_i]) \cdot (v_j - E[v_j])$  risulterà quasi sempre positivo, mentre per differenze fra  $i$  e  $j$  decisamente superiori il prodotto sarà mediamente nullo. Le sequenze per

le quali l'autocorrelazione 1.13 è diversa da zero solo quando  $i = j$ , cioè quando la 1.14 coincide con il calcolo della varianza di insieme 1.12, sono dette puramente casuali. Appare evidente che la sequenza considerata in Fig 1.5 non sia una sequenza puramente casuale, corrisponde infatti alla misura di tensione (simulazione) ai capi di un resistore con un taglio per frequenze superiore al centesimo di Hz (perchè introdotto dallo strumento di misura o da una capacità posta in parallelo a r).

## 1.2.2 Processi aleatori stazionari

Queste sequenze che si stanno analizzando, in particolare quelle associate a processi del tipo di quelli responsabili della ddp ai capi di un resistore posto a temperatura T finita, anche se possiedono variazioni non completamente prevedibili, allo stesso tempo sono dotati di una certa regolarità, che consente di caratterizzarli statisticamente. Si riescono quindi a valutare le densità di probabilità  $f_{v_i}(v_i, i)$  e  $f_{v_i, v_j}(v_i, i; v_j, j)$  e a ricavare le medie definite precedentemente oltre a notare che esse godono di importanti proprietà.

Per quanto riguarda il processo che si sta analizzando, esso appartiene alla categoria dei processi aleatori stazionari, ovvero processi nei quali si osserva una forma di invarianza nel tempo della descrizione statistica. In particolare le medie al primo ordine (quelle che coinvolgono una sola variabile aleatoria per volta) 1.10, 1.11 e 1.12, non dipendono dal tempo, cioè dall'indice  $i$ , ed inoltre quelle del secondo ordine, quali definite da 1.13 e 1.14, dipendono soltanto dalla differenza di tempo fra le due componenti  $\underline{v}_i, \underline{v}_j$ , cioè da  $(j - i) \cdot \Delta t$ .

Nel caso considerato delle resistenze, si trova che data la costanza della temperatura T del bagno termico con il quale i resistori sono in equilibrio effettivamente il processo è stazionario. Ancora più esplicitamente si ricaverà che:

$$E[\underline{v}_i] = E[\underline{v}] = 0$$

cioè che il valore medio (di insieme) della tensione è nullo.

## 1.2.3 Le medie nel tempo e l'ipotesi ergodica

Introdurre le repliche del sistema in esame (cioè M resistori tutti uguali e tutti in equilibrio alla temperatura T) è stato utile per poter definire le medie come valori di aspettazione ed utilizzare i metodi del calcolo delle probabilità. Nel seguito si vedrà che effettivamente molto spesso dal punto di vista della schematizzazione fisica dei processi, l'approccio delle medie di insieme è assai vantaggioso. Dal punto di vista pratico, in particolare delle misure, normalmente si ha a che fare con un unico sistema fisico (un solo resistore a temperatura T nel caso in esame) e si cerca di estrarre le proprietà medie da esso soltanto, magari osservando questo unico sistema per un tempo sufficientemente esteso. Data allora un'unica sequenza  $\{\underline{v}_i\}$ , definiamo

la media temporale della sequenza come:

$$\langle \underline{v}_i \rangle = \langle v \rangle = \lim_{I \rightarrow \infty} \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \underline{v}_i \quad (1.15)$$

e la autocorrelazione temporale:

$$\langle \underline{v}_{i+k}, \underline{v}_i^* \rangle = \lim_{I \rightarrow \infty} \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \underline{v}_{i+k} \cdot \underline{v}_i^* \quad (1.16)$$

Nei casi che si incontreranno successivamente, l'autocorrelazione temporale, così come la sequenza di autocorrelazione definita dalla 1.13, si manterrà significativamente diversa da zero, in funzione di  $k$  e quindi della differenza fra i due istanti considerati, solo entro un certo limite superiore  $\tau_{max} = k_{max} \cdot \Delta t$ .

Se si stanno trattando  $M$  repliche dello stesso sistema fisico originario, le medie temporali che si assume aver effettuato sulle varie sequenze dell'insieme devono essere tutte uguali fra loro. Quindi se i processi sono stazionari, per i quali la media di insieme è per definizione indipendente dal tempo, i due metodi adottati per mediare (cioè la media temporale e la media di insieme) devono coincidere. Esplicitando quanto appena detto, se si esamina una sola sequenza stazionaria e se ne fa una media temporale, quest'ultima deve coincidere con la media di insieme che si ottiene sulle repliche del sistema fisico in esame:

$$\langle v \rangle = \lim_{I \rightarrow \infty} \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \underline{v}_i = E[\underline{v}_i] \quad (1.17)$$

$$\langle \underline{v}_{i+k}, \underline{v}_i^* \rangle = \lim_{I \rightarrow \infty} \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \underline{v}_{i+k} \cdot \underline{v}_i^* = E[\underline{v}_i \cdot \underline{v}_{i+k}] = \Phi_{vv}(i+k, i) \quad (1.18)$$

Questa situazione appena descritta, che di fatto è quella che si verifica esaminando la tensione ai capi di un resistore (senza che sia applicata nessuna tensione esterna ad esso) a temperatura finita  $T$ , rappresenta il caso dei processi stazionari ergodici, in particolare in media e correlazione.

Nella pratica se si vuole seguire l'approccio della media temporale su un unico sistema stazionario ergodico, non si potranno estendere le medie temporali fra  $-\infty$  e  $+\infty$ , ma sarà necessario limitarsi ad un intervallo di tempo finito (in modo analogo a quanto accadrebbe se si volessero considerare le medie statistiche, soltanto un numero finito di repliche sarebbero state considerate). Si rende necessario ora capire quale sia il criterio da seguire per definire l'intervallo di tempo su cui effettuare la media senza commettere errori significativi rispetto al caso ideale di media valutata su un intervallo infinito: l'accorgimento sarà quello di scegliere una durata per l'operazione di media che abbia un'estensione decisamente superiore all'intervallo di tempo caratteristico, del processo fisico che si sta studiando, che il sistema impiega per cambiare

significativamente di stato (nel caso in esame: il tempo che la ddp casuale impiega per cambiare di valore di una quantità apprezzabile). Questo tempo è proprio il  $\tau_{max}$  trovato precedentemente, intervallo in cui l'autocorrelazione temporale si mantiene significativamente diversa da zero. Per quanto riguarda il caso del resistore questo tempo è molto breve e se si tiene conto del fatto che ai capi di una resistenza R ci sarà sempre una capacità C, allora necessariamente il tempo caratteristico da superare dovrà essere la costante di tempo  $\tau = RC$ .

Le medie temporali definite dalle 1.15 e 1.16 sono calcolate sulle sequenze di punti, intervallate da un certo  $\Delta t$ . Questo non è rilevante per la definizione di media temporale, ma corrisponde al fatto che le misure effettive di una sequenza sono sempre in numero finito e distanti di un intervallo finito. Tuttavia, dal punto di vista della trattazione matematica risulta spesso preferibile scrivere le medie temporali nel continuo:

$$\langle v \rangle = \langle \underline{v}(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} v(t) dt \quad (1.19)$$

$$\langle \underline{v}(t + \tau), \underline{v}(t)^* \rangle = R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} v(t + \tau) \cdot v^*(t) dt \quad (1.20)$$

Dove la relazione 1.20 definisce la funzione di autocorrelazione della sequenza  $\{\underline{v}(t)\}$ . Per  $\tau = 0$  il valore della funzione di autocorrelazione corrisponde alla varianza della sequenza:

$$R(\tau = 0) = \sigma^2(\underline{v}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |v(t)|^2 dt \quad (1.21)$$

Potendo esprimere una qualunque sequenza  $\{\underline{v}(t)\}$  nella forma della somma del valor medio della sequenza più un termine che risulta dalla differenza fra gli elementi della sequenza  $\{\underline{v}(t)\}$  e il valor medio:

$$\{\underline{v}(t)\} = \{\underline{di}(t)\} + \langle v \rangle \quad (1.22)$$

con  $\langle \{\underline{di}(t)\} \rangle = 0$ .

Nella pratica si avrà sempre a disposizione una sequenza finita di un processo a caso  $\{v_i\}$  e non sarà quindi possibile effettuare il calcolo al limite presente nella 1.15 e seguenti. Sarà necessario allora accontentarsi di valutare le medie sul campione tramite somme finite; ricordando che somme di variabili aleatorie sono ancora variabili aleatorie, le medie sul campione andranno considerate come estimatori delle medie di interesse.

## 1.3 LINEE DI TRASMISSIONE

### 1.3.1 Circuiti a costanti concentrate e distribuite, equazioni del telegrafo e del telefono

Si riportano ora alcune considerazioni che saranno poi utilizzate successivamente, in particolare nella dimostrazione fatta da Nyquist riguardo il rumore Johnson [3].

Quando si analizzano circuiti a costanti concentrate, le proprietà elettriche del circuito si considerano tutte contenute nei relativi componenti circuitali (resistenza, capacità, induttanza, ecc.) e i collegamenti fra i vari componenti si considerano ideali, cioè privi di alcun contributo di resistenza, induttanza o capacità. Questa assunzione va bene fin tanto che le dimensioni geometriche dei componenti e le lunghezze dei collegamenti rimangono piccole rispetto alle lunghezze d'onda associate ai segnali che sono presenti nel circuito.

Una linea di trasmissione invece può essere costituita da fili paralleli, piatti paralleli, da un cavo coassiale, o in generale da qualsiasi coppia di conduttori separati da un dielettrico. Nell'analisi convenzionale si considerano una coppia di conduttori idealmente paralleli con sezione e caratteristiche costanti su tutto il filo, le cui proprietà elettriche sono distribuite sull'intera lunghezza.

Una linea di trasmissione può essere considerata composta da infiniti elementi di lunghezza infinitesima  $\Delta x$ , ciascuno equivalente ad un circuito contenente una induttanza, una capacità, una resistenza e una conduttanza infinitesime, come in Fig. 1.6. Per scrivere le equazioni di tensioni e correnti lungo la linea si utilizzano le convenzioni riportate in Fig. 1.6: la coordinata  $x$  individua la posizione lungo la linea ed ha direzione positiva verso destra, una corrente è positiva quando scorre verso destra nel conduttore superiore (e verso sinistra in quello inferiore), le tensioni indicano il potenziale del conduttore superiore rispetto a quello inferiore.

Con queste convenzioni, se si cerca di risolvere il circuito inferiore in Fig. 1.6, dove  $Z = R + j\omega L$  e  $Y = G + j\omega C$ , applicando le leggi di Kirchhoff si ottiene:

$$\begin{aligned} V(x) &= Z\Delta x \cdot I(x) + V(x + \Delta x) \\ I(x) &= Y\Delta x \cdot V(x + \Delta x) + I(x + \Delta x) \end{aligned} \quad (1.23)$$

$V(x)$  e  $I(x)$  sono quantità complesse che raccolgono ampiezza e fase di tensione e corrente lungo la linea per una componente alternata di frequenza angolare  $\omega$  (sono dei fasori appunto). Sviluppando ora in serie di Taylor arrestata al primo ordine la prima delle 1.23, si ottiene allora:

$$\begin{aligned} V(x + \Delta x) &= V(x) - Z\Delta x \cdot I(x) \\ V(x) + \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x &= V(x) - Z\Delta x \cdot I(x) \end{aligned}$$

Da cui risolvendo si ricava:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -ZI \quad (1.24)$$

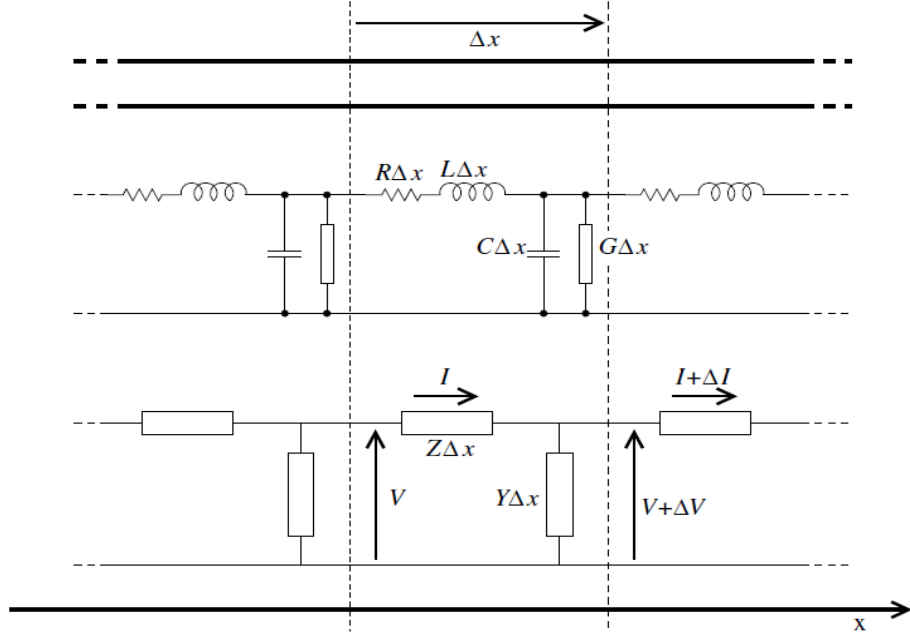


Figura 1.6: Circuito equivalente di un tratto di linea di trasmissione

dove per semplicità di notazione sono state omesse le dipendenze dalla posizione  $x$ , con lo stesso procedimento, in modo analogo dalla seconda delle 1.23 si ottiene:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -YV \quad (1.25)$$

La 1.24 e la 1.25 come si può vedere sono due equazioni accoppiate e prendono il nome di equazioni del telegrafo. Se ora queste due equazioni vengono ulteriormente elaborate, derivandole entrambe rispetto ad  $x$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -Z \frac{\partial I}{\partial x} = -Z(-YV) \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} &= -Y \frac{\partial V}{\partial x} = -Y(-ZI) \end{aligned}$$

da cui infine si ricavano altre due equazioni accoppiate:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= ZYV \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} &= ZYI \end{aligned} \quad (1.26)$$

le equazioni del telefono. Ricavare una soluzione per questa coppia di equazioni, non è una cosa banale, ma si può verificare che effettivamente una soluzione della prima

delle 1.26 può essere data da:

$$V(x) = V_+e^{-\Gamma x} + V_-e^{+\Gamma x} \quad (1.27)$$

$V_+$  e  $V_-$  sono costanti che dipendono dalle condizioni al contorno (com'è fatto il generatore, com'è fatto l'utilizzatore, ecc.).  $\Gamma$  è in generale un numero complesso, detto costante di propagazione, pari a  $\Gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$ . Essendo un numero complesso può in generale essere espresso come:  $\alpha + j\beta$  in cui  $\alpha$  prende il nome di costante di attenuazione e considera le perdite dovute all'effetto Joule e del passaggio di corrente indesiderato attraverso il dielettrico,  $\beta$  è invece detta costante di fase che misura la fase istantanea al punto  $x$  rispetto al punto  $x = 0$ . I due termini,  $V_+e^{-\Gamma x}$  e  $V_-e^{+\Gamma x}$ , sono di fatto onde, la prima è detta onda progressiva e la seconda onda regressiva di tensione. Dalle equazioni del telegrafo è quindi possibile ricavare un'analogia descrizione della corrente in funzione della coordinata  $x$ :

$$I(x) = \frac{I_+}{Z_0}e^{-\Gamma x} - \frac{I_-}{Z_0}e^{+\Gamma x} \quad (1.28)$$

dove i due termini sono detti onda progressiva e onda regressiva di corrente rispettivamente. L'impedenza in linea alla generica coordinata  $x$  è data dal rapporto fra i fasori di tensione e corrente  $Z(x) = V(x)/I(x)$ .  $Z_0 = \sqrt{Z/Y}$  è detta impedenza caratteristica della linea, è in generale un numero complesso e la sua importanza cruciale sarà chiara in seguito. La velocità con la quale queste onde si muovono è detta velocità di fase,  $V_f = \frac{\omega}{\beta}$ , è dipendente dalle costanti della linea e sarà in generale vicina a  $c$ .

### 1.3.2 Linee senza perdite, lunghezza d'onda, coefficiente di riflessione, impedenza caratteristica

Si consideri ora una linea senza perdite, ovvero in cui i parametri di resistenza e conduttanza della linea sono nulli. Essendo  $R, G = 0$ , si ricava che  $\Gamma = j\beta$ ,  $\beta = \omega\sqrt{LC}$  e  $V_f = 1/\sqrt{LC}$ . Per quanto riguarda dunque le relazioni dei fasori di tensione e corrente trovati precedentemente:

$$\begin{aligned} V(x) &= V_+e^{-j\beta x} + V_-e^{+j\beta x} \\ I(x) &= \frac{I_+}{Z_0}e^{-j\beta x} - \frac{I_-}{Z_0}e^{+j\beta x} \end{aligned} \quad (1.29)$$

da cui si può notare come in una linea senza perdite l'onda progressiva e l'onda regressiva di tensione e di corrente siano periodiche. In particolare se tensione e corrente sono osservate in un qualsiasi punto  $x$ , si ritroveranno esattamente gli stessi valori in tutti i punti tali che  $\beta x$  differisce di multipli di  $2\pi$ , rispetto al valore nel primo punto. La distanza fra punti che hanno stessa tensione e corrente è chiamata

lunghezza d'onda  $\lambda$ , ovvero:

$$\begin{aligned}\beta\lambda &= 2\pi \\ \lambda &= \frac{2\pi}{\beta}\end{aligned}\tag{1.30}$$

Ricordando l'espressione trovata precedentemente per  $\beta$  è possibile rielaborare quella di  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{lc}} = \frac{1}{f\sqrt{lc}}$$

essendo  $\omega = 2\pi f$ . Di conseguenza si può capire come al variare della frequenza il considerare una linea di trasmissione come a costanti concentrate o distribuite può essere una valida approssimazione oppure un errore non da poco. Se si ricava infatti la relazione riguardante l'impedenza alla generica coordinata  $x$ , si trova che essa è periodica di periodo  $\lambda/2$ , se quindi si lavora con frequenze oltre il mezzo GHz anche a lunghezze di alcuni centimetri si possono trovare consistenti variazioni di impedenza, diversamente se si lavora a qualche MHz o frequenze inferiori.

Si definisce coefficiente di riflessione alla coordinata  $x$ :

$$\rho(x) \triangleq \frac{V_- e^{\Gamma x}}{V_+ e^{-\Gamma x}} = \rho(0) \frac{e^{\Gamma x}}{e^{-\Gamma x}} = \rho_L \frac{e^{\Gamma x}}{e^{-\Gamma x}}\tag{1.31}$$

dove l'origine dell'asse  $x$  è stato collocato, come al solito, al carico. Per una linea senza perdite, riscrivendo l'espressione del fasore di tensione:

$$\begin{aligned}V(x) &= V_+ e^{-j\beta x} + V_- e^{+j\beta x} = V_+ e^{-j\beta x} + \rho_L V_+ e^{+j\beta x} \\ &= |V_+| e^{j\varphi_{v+}} [e^{-j\beta x} + |\rho_L| e^{j\varphi_{\rho L}} e^{j\beta x}]\end{aligned}\tag{1.32}$$

da cui si può notare facilmente come nel caso in cui  $|\rho_L|$  sia uguale a zero, risulti:

$$V(x) = |V_+| e^{j\varphi_{v+}} e^{-j\beta x}\tag{1.33}$$

ovvero la sola parte di onda progressiva, l'onda regressiva non è presente. Proprio questo caso particolare interesserà successivamente nella dimostrazione di Nyquist. Rielaborando ora l'espressione dell'impedenza alla generica coordinata  $x$ , ovvero il rapporto fra i fasori di tensione e corrente, utilizzando il coefficiente di riflessione si ottiene:

$$Z(x) = Z_0 \frac{1 + \rho(x)}{1 - \rho(x)}\tag{1.34}$$

da cui ora si può ricavare un'espressione per il coefficiente di riflessione dipendente dall'impedenza alla generica coordinata  $x$ :

$$\rho(x) = \frac{Z(x) - Z_0}{Z(x) + Z_0}\tag{1.35}$$

Si ricava quindi un risultato molto importante che tornerà utile in seguito, ovvero se l'impedenza nel punto che si sta considerando è pari all'impedenza caratteristica



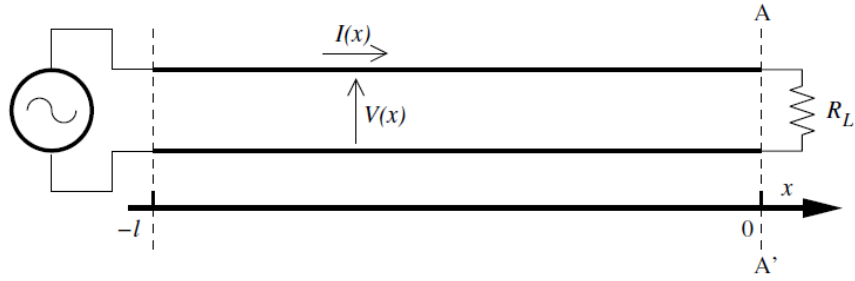


Figura 1.7: Linea che termina sulla propria resistenza caratteristica

della linea (Fig. 1.7),  $\rho(x) = 0$  e di conseguenza non si fa onda regressiva, ma soltanto onda progressiva. L'importanza dell'impedenza caratteristica è quindi cruciale e in una linea senza perdite (dove come detto precedentemente  $R, G = 0$ ) vale:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1.36)$$

ovvero reale ed indipendente da  $\omega$



# Capitolo 2

## Il Rumore Termico

### 2.1 IL RUMORE NEL DOMINIO DEL TEMPO E DELLA FREQUENZA

#### 2.1.1 L'intervallo di quasi periodicità

Si consideri una sequenza casuale  $\{f(t)\}$  definita in un intervallo  $-T/2, +T/2$ , si ammetta che  $\langle f \rangle = 0$  e che quindi la media temporale del modulo al quadrato coincida con la varianza:

$$\sigma^2 = \langle f^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f^2(t) dt \quad (2.1)$$

L'intervallo  $-T/2, +T/2$  viene detto intervallo di quasi periodicità della sequenza, questo perchè molto spesso i fenomeni aleatori vengono riportati con uno sviluppo in serie o con una trasformata di Fourier della sequenza. Nel caso si scelga di utilizzare lo sviluppo in serie di Fourier per applicarlo alla sequenza  $\{f(t)\}$ , si dovrà elaborare la sequenza che di periodico non ha nulla, in un segnale periodico. Per fare questo si assume che la sequenza che si vuol sviluppare in serie di Fourier sia costituita da infinite sequenze  $\{f(t)\}$ , definite in un intervallo  $-T/2, +T/2$ , tutte repliche di quella di base effettivamente osservata e centrate in multipli interi del periodo  $T$ .

Lo sviluppo in serie è ora possibile e l'armonica fondamentale ha pulsazione pari a  $2\pi/T$ . Il fatto che l'intervallo di quasi-periodicità sia finito porta ovviamente un limite alla minima frequenza identificabile nel processo in studio ( $1/T$ ); si tratta di un limite reale ma concettualmente superabile, imposto dalla durata temporale del campionamento che è stato effettuato. Il limite si può ampliare, ovvero le frequenze più basse si possono studiare, semplicemente estendendo la durata della sequenza per un intervallo di tempo  $T' > T$ .

Normalmente per passare dal dominio dove è stata registrata la sequenza, cioè il tempo, a quello delle frequenze si impiega la trasformata di Fourier e quindi non occorre che la funzione da trasformare sia periodica. In questo caso, data una certa

sequenza  $\{f(t)\}$ , definita fra  $-T/2, +T/2$ , si associa ad essa una sequenza  $\{f_e(t)\}$  definita fra  $-\infty$  e  $+\infty$ , identica alla  $\{f(t)\}$  nell'intervallo  $-T/2, +T/2$  e 0 altrove.  $\{f_e(t)\}$  è quindi definita su un supporto compatto ampio T. Nel seguito si seguirà sempre questo approccio, comunque continuando a chiamare l'intervallo  $-T/2, +T/2$  intervallo di quasi-periodicità.

### 2.1.2 Densità spettrale di rumore

Si applichi la definizione di varianza data nella formula 2.1, di una sequenza reale  $\{f(t)\}$ , con  $\langle f \rangle = 0$ , utilizzando la sequenza estesa  $\{f_e(t)\}$  definita precedentemente:

$$\langle f^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_e^2(t)}{T} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t, T) dt \quad (2.2)$$

dove:

$$g^2(t, T) = \frac{f_e^2(t)}{T} \quad (2.3)$$

In pratica per il calcolo di  $\langle f^2 \rangle$  si procede in questo modo, si definisce un intervallo di quasi periodicità e si costruisce la  $g^2(t, T)$ , quindi si calcola l'integrale fra  $-\infty$  e  $+\infty$ . Per calcolare poi il limite si estende l'intervallo di quasi-periodicità  $T' > T$ , cioè si considerano anche gli altri contributi di  $\{f(t)\}$  alla periferia dell'intervallo precedente; si ricalcola l'integrale e così via. Si ammetta che il valore di questi integrali converga ad un valore costante; il valore del limite è quindi la varianza. Se il limite di formula 2.2 esiste, ciò significa che  $g^2(t, T)$ , per tutti i valori del parametro T, è una funzione a quadrato sommabile e pertanto ammette trasformata di Fourier:

$$FT\{g(t, T)\} = FT\left\{\frac{f_e(t)}{\sqrt{T}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{T}} FT\{f_e(t)\} \quad (2.4)$$

Ricordando ora il Teorema di Parseval che stabilisce l'equivalenza fra l'integrale del modulo quadro di una funzione calcolato nel dominio proprio di definizione e il modulo quadro della sua FT integrato sul dominio trasformato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |S(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |FT\{S(t)\}|^2 df \quad (2.5)$$

Ora applicando la 2.5 appena introdotta al calcolo della varianza della formula 2.2 si ottiene:

$$\langle f^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t, T) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |FT\{g(t, T)\}|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|FT\{f_e(t)\}|^2}{T} df \quad (2.6)$$

dove lo scambio fra integrazione e limite è stato fatto perchè le due operazioni associate agiscono su variabili differenti.

Quindi la formula 2.6 mostra come un integrale normalmente calcolato nel dominio del tempo, possa equivalentemente essere calcolato nel dominio trasformato  $f$ . L'integrando della 2.6, tranne che per un fattore costante, definisce la densità spettrale (di rumore) o spettro di potenza della sequenza  $\{f\}$  e viene indicato con  $\omega(f)$ :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|FT\{f_e(t)\}|^2}{T} = \frac{\omega(f)}{2} \quad (2.7)$$

Essendo  $f(t)$  reale allora  $FT\{f_e\}(f) = FT^*\{f_e\}(-f)$ , si può scrivere:

$$\langle f^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|FT\{f_e(t)\}|^2}{T} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega(f)}{2} df = \int_0^{+\infty} \omega(f) df \quad (2.8)$$

Questo tipo di approccio, cioè di operare nel dominio delle frequenze porta fondamentalmente a due vantaggi, il primo è la semplicità, infatti se per esempio è nota la densità spettrale di rumore per la tensione fra due terminali di una rete lineare si può passare alla conoscenza della corrispondente densità spettrale di rumore di altri due terminali qualunque della rete.

Un altro vantaggio che porta questo approccio è operativo, se si suppone di disporre di uno strumento che misura la tensione rms in bande spettrali molto strette e con centro banda regolabile precisamente (un voltmetro selettivo accordabile) sfruttando la formula 2.8 è possibile costruire la varianza della tensione come somma dei contributi misurati negli intervalli centrati alla varie frequenze, ovvero una misura per punti della densità spettrale di rumore associata alla tensione, in funzione della frequenza. Lo spettro di potenza quindi, pur avendo una definizione elaborata, risulta essere una grandezza disponibile sperimentalmente.

### 2.1.3 Densità spettrali di rumore in ingresso e in uscita di una rete lineare

Si supponga di disporre di un generatore reale di tensione, caratterizzato da una  $v_{in}(t)$  generica e da una impedenza interna  $Z_s$ . Sia  $v_{in}(t)$  una sequenza casuale, quindi propriamente da indicare come  $\{v_{in_i}\}$ , definita in un intervallo di quasi-periodicità  $-T/2, T/2$ . Allora la sua densità spettrale di rumore è data da:

$$\omega_v^{in} = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|FT\{v_{in}\}|^2}{T} \quad (2.9)$$

Si voglia ora trovare quale effetto provoca questo generatore in termini di tensione  $v_{out}$  ai capi di altri due terminali della rete, in base alla 1.6 risulta:

$$v_{out}(t) = FT^{-1}\{FT\{v_{in}\} \cdot A(f)\} \quad (2.10)$$

dove  $A(f)$  rappresenta la risposta in frequenza fra i terminali di ingresso considerati (quelli del generatore) e quelli di uscita, inoltre dipenderà, fra le altre cose, dall'impedenza interna del generatore  $Z_s$ .

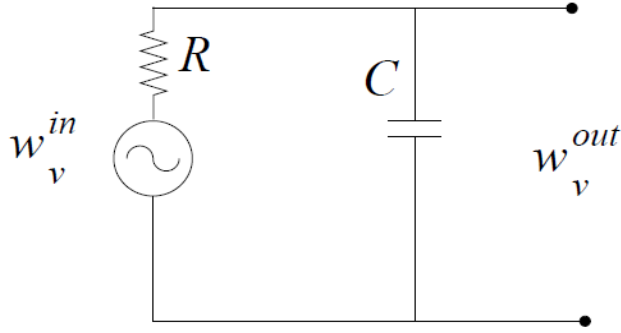


Figura 2.1: Esempio di rete elementare con generatore equivalente secondo Thevenin

La formula 1.6 permette di valutare anche la densità spettrale di rumore  $\omega_v^{out}(f)$  associata alla tensione di uscita  $v_{out}(t)$ :

$$\begin{aligned}\omega_v^{out} &= 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|FT\{v_{out}\}|^2}{T} = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|FT\{v_{in}\} \cdot A|^2}{T} \\ &= 2|A|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|FT\{v_{in}\}|^2}{T} = |A|^2 \cdot \omega_v^{in}\end{aligned}\tag{2.11}$$

Si trova quindi che la densità spettrale di rumore di tensione ai terminali di uscita è uguale alla densità spettrale di rumore in ingresso moltiplicata per il modulo quadro della risposta in frequenza rispetto ai terminali di uscita e di ingresso considerati.

La formula 2.11 trovata è immediatamente estendibile al caso in cui l'eccitazione in ingresso sia costituita, invece che da una tensione, da una sequenza a caso di corrente  $i_{in}(t)$ . In questo caso occorre considerare il generatore reale di corrente associato e calcolare la risposta in frequenza fra il ramo di ingresso e la tensione di uscita. La soluzione per gli altri casi (corrente-corrente e tensione-corrente) è ottenibile, allo stesso modo estendendo le conclusioni precedenti.

Tramite la formula 2.11 si potrà riuscire a valutare il rumore elettrico nelle reti lineari. Come infatti si vedrà nella prossima sezione, le sorgenti fisiche fondamentali del rumore elettrico sono sempre schematizzabili con ottima approssimazione con dei generatori reali (di corrente o tensione), situati in punti facilmente identificabili nella rete. Una volta che si saranno determinate queste sorgenti e nota la loro densità spettrale di rumore, mediante la formula 2.11 risulta possibile calcolare la densità spettrale di rumore (in tensione o corrente) fra qualunque coppia di terminali della rete in studio. Come primo esempio elementare, si consideri un generatore reale di tensione (densità spettrale di rumore  $\omega_v^{in}$ , resistenza equivalente secondo il teorema di Thevenin  $R$ ) chiuso su una capacità  $C$  (Fig. 2.1).

$$|A(f)|^2 = \left| \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \right|^2 = \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2 R^2 C^2}\tag{2.12}$$

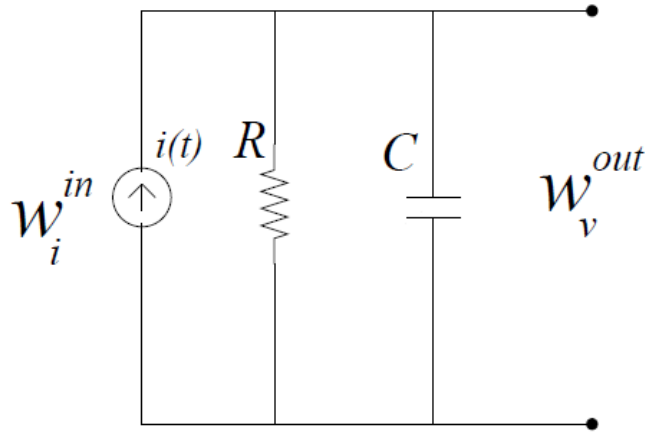


Figura 2.2: Esempio di rete elementare con generatore equivalente secondo Norton

$$\omega_v^{out} = |A|^2 \cdot \omega_v^{in} = \frac{\omega_v^{in}}{1 + 4\pi^2 f^2 R^2 C^2} \quad (2.13)$$

Un secondo esempio, che può essere considerato il duale del precedente, comprende un generatore reale di corrente  $i(t)$  (densità spettrale di rumore  $\omega_i^{in}$ , resistenza equivalente secondo il teorema di Norton  $R$ ), chiuso su una capacità  $C$  (Fig. 2.2). Come prima cosa in questo caso si trovi la relazione che lega la tensione complessa in uscita con la corrente complessa in entrata del generatore:

$$V_{out} = I \cdot \frac{R \cdot 1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} = I \cdot \frac{R}{1 + j2\pi f RC}$$

quindi procedendo come fatto nell'esempio precedente:

$$A(f) = \frac{R}{1 + j2\pi f RC}$$

$$|A(f)|^2 = \frac{R^2}{1 + 4\pi^2 f^2 R^2 C^2} \quad (2.14)$$

$$\omega_v^{out} = \omega_v^{in} \frac{R^2}{1 + 4\pi^2 f^2 R^2 C^2} \quad (2.15)$$

Se nella rete sono presenti più generatori casuali e si considera che siano tutti fra loro indipendenti, è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti e considerare l'effetto di ognuno di essi separatamente. A questo punto le densità spettrali si sommano, perchè trattandosi di variabili aleatorie indipendenti, la variabile aleatoria somma di variabili aleatorie ha varianza pari alla somma delle varianze delle variabili di partenza.

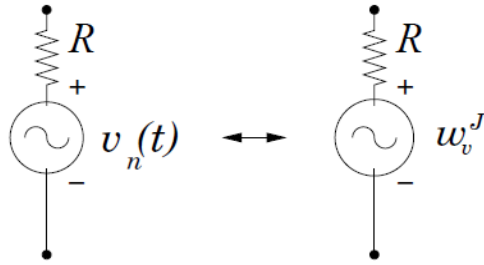


Figura 2.3: Rappresentazioni equivalenti di una resistenza rumorosa con generatore di tensione

## 2.2 IL RUMORE JOHNSON DI UN RESISTORE

Si supponga nuovamente di disporre di una resistenza  $R$ , in equilibrio termico con un serbatoio di calore a temperatura  $T$  costante. Si misuri ora con un voltmetro ideale (ovvero con impedenza di ingresso infinita, banda passante infinita) la ddp ai capi della resistenza, si troverà una sequenza di valori di tensione  $\{v_R(t)\}$  con  $-T/2 < t < T/2$  che costituirà la sequenza casuale stazionaria su cui si opererà.

Si assuma come fatto sperimentale (ottenuto dopo uno studio approfondito sulla resistenza con intervalli di quasi-periodicità molto estesi) che il valore medio della tensione  $\langle v_R \rangle$  sia nullo. Ciò comporta quindi che il valore quadratico medio della tensione rappresenta anche la varianza ai capi della resistenza:

$$\langle v_R^2 \rangle = \int_0^\infty \omega_v^J(f) df \quad (2.16)$$

dove lo spettro di potenza riporta una  $J$ , visto che tale rumore è detto rumore Johnson dal nome del suo scopritore. L'origine di questa ddp fluttuante ai capi di  $R$  va ricercata nel moto caotico dei portatori di carica nel conduttore, ovvero nell'agitazione termica. Utilizzando sempre la simbologia precedentemente introdotta queste medie riportate rappresentano le medie temporali osservate su un unico resistore. Per l'ipotesi ergodica introdotta nel paragrafo 1.2.3 queste coincidono anche con le medie di insieme.

L'origine termica di questo tipo di rumore può essere messa in evidenza cambiando la temperatura del bagno termostatico con il quale  $R$  si trova in contatto, se si considera di determinare la varianza alle varie temperature, questa risulterà proporzionale a  $T$ , ovvero:

$$\omega_v^J(f) \propto T$$

Per ricercare la dipendenza della densità spettrale di rumore dal valore della resistenza si cerca di precisare il concetto di resistenza rumorosa [5]. Tramite lo strumento introdotto all'inizio del paragrafo è stato possibile ricavare la fem equivalente secondo Thevenin ai capi di  $R$ , la resistenza sorgente del rumore a temperatura  $T$  è un



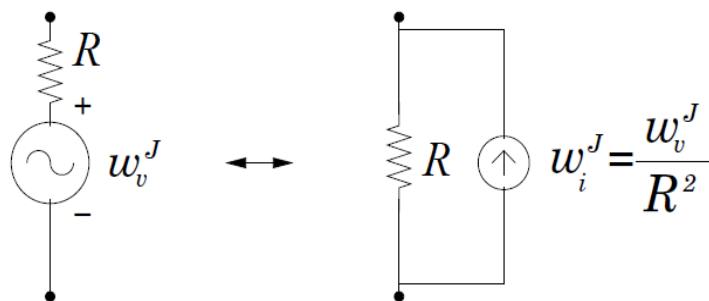


Figura 2.4: Rappresentazioni equivalenti di una resistenza rumorosa con generatore di tensione o di corrente

elemento lineare e può essere schematizzato come una resistenza  $R$  non rumorosa e un generatore con fem pari a quella osservata dal voltmetro ideale  $\{v_R\} = \{v_n(t)\}$  (Fig. 2.3). L'indice  $n$  (come noise, rumore) sta ad indicare che si tratta di un generatore casuale con densità spettrale di rumore  $\omega_v^J$ . Con il modello introdotto, si riesce a riprodurre fedelmente i fenomeni sperimentali osservati riguardo al rumore della resistenza, in modo duale il generatore di tensione può essere sostituito con quello equivalente di corrente secondo Norton, quando necessario (Fig. 2.4). In particolare il generatore ideale di corrente in parallelo alla resistenza non rumorosa  $R$  avrà una densità spettrale di rumore di corrente  $\omega_i^J$  pari a quella del generatore di tensione equivalente, divisa per il quadrato di  $R$ .

Entrambi i generatori hanno valore medio di tensione o di corrente nullo, questo però non implica che essi non possano trasferire potenza verso l'esterno, a patto di non violare il secondo principio della termodinamica. Ragionando in termini termodinamici si considerino infatti due resistori (rumorosi)  $R_1$  e  $R_2$  collegati come in Fig. 2.5, il primo posto a contatto con un bagno termico  $B_1$  a temperatura  $T_1$  e il secondo con un bagno termico  $B_2$  a temperatura  $T_2$ . In un istante generico  $t$ , le tensioni dei generatori saranno  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  e la corrente istantanea  $i(t)$  che circola nella maglia sarà data da:

$$i(t) = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_1 + R_2} \quad (2.17)$$

Il collegamento fra i due serbatoi di calore  $B_1$  e  $B_2$  avviene unicamente tramite i conduttori elettrici fra le due resistenze (si immagini che la conducibilità termica di questi conduttori sia trascurabile) e che quindi ogni trasferimento di energia da un sistema all'altro passi unicamente tramite il trasferimento di potenza elettrica. Pertanto, per calcolare la potenza che istantaneamente viene trasferita fra i due sistemi è sufficiente calcolare il prodotto  $i(t) \cdot v(t)$ , dove  $v(t)$  rappresenta la tensione fra i due terminali tramite i quali i due circuiti sono accoppiati:

$$W_{1 \rightarrow 2}(t) = i(t) \cdot v(t) \quad (2.18)$$

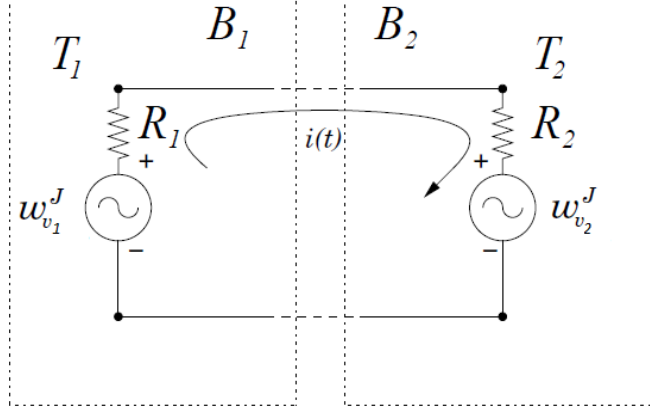


Figura 2.5: Schema per ricavare la dipendenza della densità spettrale di rumore dal valore di R

Ora la  $v(t)$  può essere espressa come la somma della tensione di rumore sulla resistenza  $R_2$  più la caduta totale della  $i(t)$  su di essa:

$$v(t) = v_2(t) + i(t) \cdot R_2 \quad (2.19)$$

Utilizzando ora le relazioni 2.17 e 2.19 appena ricavate è possibile ottenere la media temporale della 2.18 (per semplicità di notazione non è stata riportata la dipendenza dal tempo delle tensioni  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$ ):

$$\begin{aligned}
 \langle W_{1 \rightarrow 2}(t) \rangle &= \left\langle \frac{(v_1 - v_2)}{R_1 + R_2} \cdot (v_2 + i(t) \cdot R_2) \right\rangle \\
 &= \left\langle \frac{(v_1 - v_2)[(R_1 + R_2)v_2 + (v_1 - v_2)R_2]}{(R_1 + R_2)^2} \right\rangle \\
 &= \left\langle \frac{(v_1 - v_2)(R_1v_2 + v_1R_2)}{(R_1 + R_2)^2} \right\rangle \quad (2.20) \\
 &= \left\langle \frac{v_1v_2(R_1 - R_2)}{(R_1 + R_2)^2} \right\rangle + \left\langle \frac{v_1^2R_2}{(R_1 + R_2)^2} \right\rangle - \left\langle \frac{v_2^2R_1}{(R_1 + R_2)^2} \right\rangle \\
 &= \frac{\langle v_1^2 \rangle}{(R_1 + R_2)^2} \cdot R_2 - \frac{\langle v_2^2 \rangle}{(R_1 + R_2)^2} \cdot R_1
 \end{aligned}$$

dove si è sfruttata la linearità del valore atteso e il fatto che i prodotti misti del tipo  $v_1 \cdot v_2$  sono nulli in quanto i due generatori di rumore agiscono indipendentemente uno dall'altro e hanno entrambi media nulla. La formula 2.20 appena ricavata può essere interpretata come un primo addendo che rappresenta la potenza che il generatore di rumore associato alla resistenza  $R_1$  trasferisce sul sistema  $B_2$  e il secondo addendo rappresenta analogamente la potenza trasferita dal generatore di rumore associato ad

$R_2$  sul sistema  $B_1$ . Il segno che assumerà la 2.20 sarà indice di verso quale sistema viene trasferita l'energia e da quale assorbita, se infatti essa è positiva sta a significare che la potenza viene trasferita da sinistra a destra, ovvero il primo addendo è superiore al secondo quando la temperatura  $T_1$  del serbatoio  $B_1$  è superiore a  $T_2$ , temperatura del serbatoio  $B_2$  e viceversa.

Se ora si considera  $T_1 = T_2 = T$ , essendo i due sistemi in equilibrio, non deve avvenire alcun trasferimento netto di potenza da un sistema verso l'altro, ovvero devono essere uguali le potenze medie trasferite da un sistema all'altro. Dunque ponendo:

$$\langle W_{1 \rightarrow 2}(t) \rangle = 0$$

i due addendi risultano uguali:

$$\frac{\langle v_1^2 \rangle}{(R_1 + R_2)^2} \cdot R_2 = \frac{\langle v_2^2 \rangle}{(R_1 + R_2)^2} \cdot R_1$$

da cui si ottiene:

$$\frac{\langle v_2^2 \rangle}{\langle v_1^2 \rangle} = \frac{R_2}{R_1} \quad (2.21)$$

ovvero che il rapporto fra le varianze delle tensioni ai capi delle resistenze è uguale a quello fra i valori delle rispettive resistenze. Analogamente questo dovrà valere anche per le densità spettrali di rumore, perchè se relazione 2.21 non valesse in ogni intervallo di frequenza sarebbe possibile violare il secondo principio della termodinamica inserendo un opportuno filtro puramente passivo fra le due resistenze (questa situazione verrà spiegata meglio nella successiva dimostrazione del prossimo paragrafo fatta da Nyquist).

Utilizzando il fatto che la densità spettrale di rumore è proporzionale alla temperatura, unendo il fatto che essa è proporzionale anche alla resistenza si ricava:

$$\omega_v^J = k' T R$$

Per quanto riguarda la dipendenza dalla frequenza si ricava, dalla successiva dimostrazione di Nyquist, che la densità spettrale di rumore è costante, cioè indipendente dalla frequenza e pari a:

$$\omega_v^J = 4k T R \quad (2.22)$$

dove  $k$  è la costante di Boltzman,  $k = 1.38066 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$ .

Il risultato trovato da Nyquist in realtà non è del tutto preciso, perchè se non si considerano fenomeni quantistici, la varianza totale di rumore della ddp ai capi di  $R$  dovuta al rumore termico diverge. La differenza fra le due trattazioni è però apprezzabile soltanto per frequenze oltre i  $6 \cdot 10^{12} Hz$  a temperatura ambiente, ciò significa che a causa della banda passante della strumentazione elettronica disponibile normalmente, la densità spettrale di rumore Johnson può essere effettivamente trattata come costante con un errore quasi nullo.

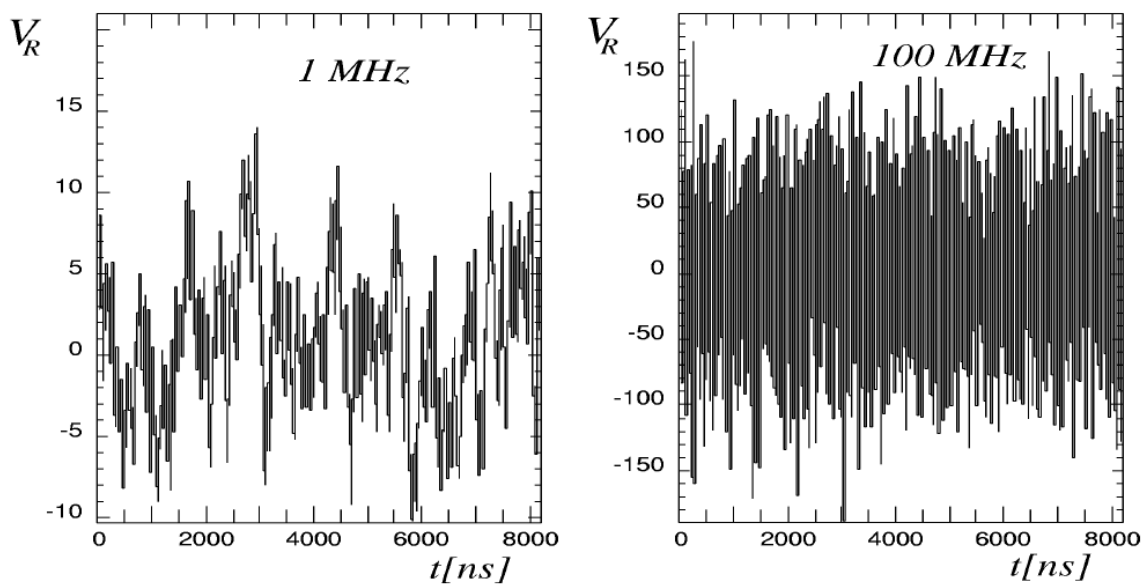


Figura 2.6: Simulazione numerica di tensione ai capi della stessa resistenza misurate con oscillografi aventi bande passanti differenti

Si consideri ora il calcolo della varianza totale di rumore, considerando che lo strumento di misura possiede una banda passante  $BW$  limitata:

$$\langle v^2 \rangle_{BW} = \int_{BW} \omega_v^J df = 4kTR \cdot BW \quad (2.23)$$

Se si pensa ad un esempio numerico, per una resistenza  $R = 1M\Omega$ , a temperatura ambiente e con una banda passante dello strumento di misura estesa fra 0 e 1MHz si ottiene  $\langle v^2 \rangle_{BW} \approx 1.7 \cdot 10^{-8} V^2$  cioè una tensione rms  $\langle v_{rms} \rangle \approx 130\mu V$ .

Le fluttuazioni osservate sono comunque molto piccole e questo rende ragione del fatto che, senza disporre di strumentazione sufficientemente sensibile, tali effetti non siano facilmente messi in evidenza. Si può notare che se si osserva con un oscillografo sufficientemente sensibile la tensione ai capi di una resistenza a temperatura finita  $T$ , se l'oscillografo ha un definito limite in alta frequenza (ad esempio 1MHz), l'andamento caotico della tensione presenta variazioni che non hanno componenti di frequenza apprezzabili oltre il limite superiore della banda passante. La varianza totale osservata, valutata con la formula 2.23, si compone di tutte le fluttuazioni del segnale visibili sullo schermo. Se si osservasse la stessa resistenza, alla stessa temperatura ma con un oscillografo da 100MHz, si osserverebbe una sequenza che è diversa rispetto alla precedente per la presenza aggiuntiva di componenti più rapidamente variabili, tali per cui l'ampiezza media delle fluttuazioni risulterebbe accresciuta di un fattore 10 e la varianza totale aumentata del fattore 100, previsto dalla formula 2.23. In figura

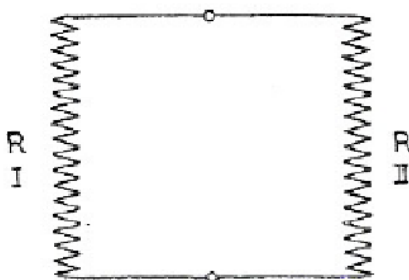


Figura 2.7: Circuito di base con i due conduttori schematizzati come RI e RII

2.6 si riporta una simulazione numerica rappresentante i due casi in esame, osservati con la stessa base dei tempi (parte sinistra e destra rispettivamente per  $BW = 1$  MHz e  $BW = 100$  MHz; le unità di misura delle ordinate sono arbitrarie).

### 2.2.1 Derivazione dello spettro di potenza del rumore termico secondo Nyquist

Successivamente alla scoperta fatta da Johnson, sulla misura di una ddp in conduttori non collegati a sorgenti esterne, legata alla temperatura in quanto la sua causa viene attribuita all'agitazione termica dei portatori nei conduttori, Nyquist riuscì a darne una dimostrazione completamente teorica [2].

Si considerino due conduttori, ognuno di resistenza  $R$  e alla stessa temperatura  $T$  connessi come in Figura 2.7. La forza elettromotrice dovuta all'agitazione termica nel conduttore I causa una corrente che si instaura nel circuito il cui valore è ottenuto dividendo la forza elettromotrice per  $2R$ . Questa corrente è causa di riscaldamento e assorbimento di potenza nel conduttore II, la potenza assorbita dovrà essere uguale al prodotto di  $R$  per il quadrato della corrente. In altre parole la potenza viene trasferita dal conduttore I al conduttore II. Allo stesso modo può essere dedotta la potenza che viene trasferita dal conduttore II al conduttore I. Ora essendo i due conduttori alla stessa temperatura, segue direttamente dalla seconda legge della termodinamica che la potenza che scorre in una direzione è esattamente uguale a quella che scorre nella direzione opposta. Se così non fosse, cioè se le potenze scambiate fossero diverse, si avrebbe un aumento di temperatura. Si può notare come nessuna assunzione è stata fatta sulla natura dei due conduttori, possono essere costituiti di metalli diversi, oppure uno metallico e l'altro elettrolitico, ecc.

Si può dimostrare che questa situazione di equilibrio vale, non soltanto per la potenza totale scambiata dai conduttori sotto le condizioni assunte, ma anche per la potenza scambiata a qualsiasi frequenza. Si consideri che questo non sia vero, e si denoti con  $A$  l'intervallo di frequenza in cui il conduttore I scambia più potenza di quanta ne riceva. Si connetta una rete non dissipativa fra i due conduttori, progettata in modo

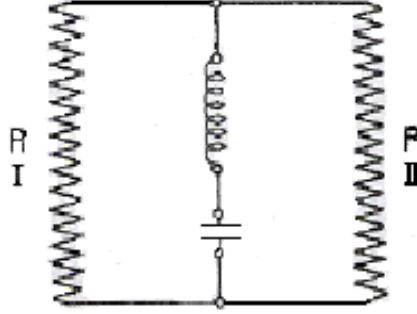


Figura 2.8: Schema di base in cui è stato inserito il circuito risonante

da interferire maggiormente con l'energia trasferita nell'intervallo A, per esempio un circuito risonante connesso come in Figura 2.8. Essendoci equilibrio fra le potenze trasferite nelle due direzioni prima del inserimento della rete, segue che dopo l'inserimento della rete, più potenza sarà trasferita dal conduttore II al conduttore I piuttosto che nella direzione opposta. Ma, essendo i due conduttori alla stessa temperatura  $T$ , questo andrebbe a violare la seconda legge della termodinamica (si dovrebbero avere due temperature diverse essendo le potenze scambiate differenti). Si arriva quindi all'importante conclusione che la forza elettromotrice dovuta all'agitazione termica nei conduttori è una funzione universale della frequenza, della resistenza e della temperatura e solamente di queste tre variabili.

Per determinare la forma di questa funzione si considerino di nuovo due conduttori ognuno di resistenza  $R$ , connessi come in Figura 2.9, cioè attraverso una lunga linea di trasmissione non dissipativa, con induttanza  $L$  e capacità  $C$  per unità di lunghezza, in modo tale che  $\sqrt{L/C} = R$ . Come si può vedere questa è la condizione per evitare la riflessione dell'onda fra un conduttore e l'altro, vista nelle formule 1.35 e 1.36.

Sia ora la lunghezza della linea  $l$  e la velocità di propagazione  $v$ . Una volta che è stato stabilito l'equilibrio termico, sia  $T$  la temperatura assoluta del sistema. Saranno presenti due flussi di energia che attraversano la linea di trasmissione, uno da sinistra a destra nella figura, quella trasferita dal conduttore I al conduttore II, e un altro flusso nella direzione opposta.

In qualsiasi momento, una volta che l'equilibrio termico è stato stabilito, si isoli la linea dai conduttori, tramite l'applicazione di due cortocircuiti alle estremità. In queste condizioni vi è una riflessione completa alle due estremità e l'energia che era presente all'interno della linea vi rimane intrappolata. Ora, se si descrivono le onde nella linea come due flussi che transitano in direzione opposta, è possibile descrivere la linea come vibrante alla propria frequenza naturale, quella della fondamentale grazie alle scelte fatte. Corrispondente cioè alla più bassa frequenza tale per cui l'onda di tensione ha un nodo ad entrambe le estremità e non ne ha di intermedi. La frequenza che corrisponde a questa vibrazione è  $v/2l$ . La frequenza naturale successiva più alta

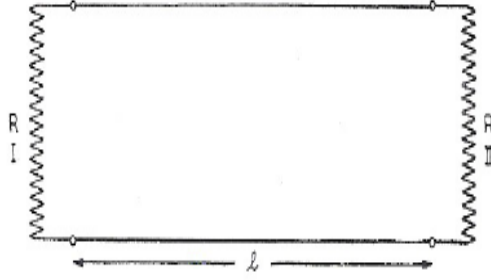


Figura 2.9: Schema di base dove si esplicita la lunghezza della linea

è  $2v/2l$ , in questo caso questo tipo di vibrazione ha un nodo ad entrambe le estremità e uno a metà, in modo analogo accade per le frequenze naturali  $3v/2l$ ,  $4v/2l$ , ecc.

Si consideri ora un intervallo di frequenze che si estende da  $f$  cicli al secondo a  $f + df$  cicli al secondo, ovvero un intervallo di frequenze di larghezza  $df$ . Il numero di vibrazioni diverse, che stanno all'interno di questo intervallo può essere considerato  $2ldf/v$ ,  $l$  deve essere presa sufficientemente grande (rispetto alla lunghezza d'onda) in modo tale da ottenere da questa espressione un numero significativo (all'interno dell'intervallo saranno comprese molte frequenze multiple della fondamentale).

Sotto queste condizioni è possibile parlare di energia media per grado di libertà come una quantità definita. Per ogni grado di libertà vi corrisponde un'energia uguale a  $kT$  in media, dove  $k$  è la costante di Boltzmann. Di questa energia, una metà è magnetica e l'altra metà è elettrica.

L'energia totale delle vibrazioni nella frequenza di intervallo  $df$  sarà quindi  $2lkTdf/v$ . Ma non essendo presenti riflessioni, questa è l'energia nell'intervallo di frequenza che era stata trasferita fra i due conduttori durante l'intervallo tempo  $l/v$ . La potenza media, trasferita da ogni conduttore alla linea nell'intervallo di frequenza  $df$  durante l'intervallo di tempo  $l/v$  è quindi  $kTdf$ .

Come era stato detto precedentemente la corrente nel circuito di Figura 2.7 dovuta alla forza elettromotrice di entrambi i conduttori si ottiene dividendo la forza elettromotrice per  $2R$  e quindi la potenza trasferita all'altro conduttore si ottiene moltiplicando il quadrato della corrente per la resistenza  $R$ .

Se si indica il quadrato della tensione nell'intervallo  $df$  con  $E^2df$  si ottiene allora:

$$R \cdot I^2 df = kTdf$$

$$R \cdot \frac{E^2}{R_{tot}^2} = R \cdot \frac{E^2}{4R^2} = \frac{E^2}{4R}$$

$$E^2 df = 4RkTdf \tag{2.24}$$

## 2.2.2 Distribuzione gaussiana delle ampiezze del rumore termico

Fino ad ora si è evitato di dare una descrizione della sequenza casuale che prevedesse la conoscenza della distribuzione delle ampiezze della sequenza, a favore della determinazione delle sue proprietà medie; più precisamente dei valori medi e delle varianze. A questo punto della trattazione si può cercare di ricavare la densità di probabilità delle variabili aleatorie  $\{f_n(t)\}$  che costituiscono la sequenza. Per prima cosa si consideri questa osservazione: se il sistema di registrazione della sequenza  $\{f_n(t)\}$  è a banda passante infinita, se la registrazione è istantanea, se il rumore è bianco, ovvero la densità spettrale di potenza è costante per tutto lo spettro di frequenze, allora la distribuzione delle ampiezze presenta infinite singolarità che impediscono ad essa di avere un andamento regolare, in particolare gaussiano; infatti, rappresentando la nostra  $f(t)$  come una successione di impulsi  $\delta$ formi, avremo:

$$f(t) = \sum_{k=1}^M q_k \delta(t - t_k)$$

e quindi, avendo il nostro sistema tempo di registrazione infinitesimo (permesso dalla banda passante infinita ipotizzata), la  $f(t)$  assume o valore nullo (nessun impulso per quel  $t$  in esame) o valore divergente (a causa degli andamenti elementari  $\delta$ formi); è irrilevante (purché finito) il numero di impulsi nell'intervallo di quasi-periodicità  $-T/2, T/2$  dove è definita la sequenza.

Si consideri ora un caso più interessante dal punto di vista fisico (o sicuramente meno astratto), si ammetta che il processo non dia rumore bianco, ma dia uno spettro di potenza limitato in frequenza (supponiamo ad esempio che il processo base, cioè l'impulso elementare, abbia una durata finita  $\theta$ , che produce un taglio in frequenza dell'ordine di  $1/\theta$ ) oppure che la funzione di trasferimento fra dove il processo fisico è generato e là dove viene osservata la sequenza introduca un filtro passa basso oppure entrambe le cose. Si conservi al momento l'ipotesi che il processo di registrazione sia istantaneo. Nelle ipotesi sopra dette, il valore della ampiezza della tensione (o corrente) misurata al tempo  $t$  vale:

$$f(t) = \sum_{k=1}^M q_k \phi(t - t_k) \quad (2.25)$$

con  $t_k < t$  e  $\phi(t)$  che rappresenta l'impulso di estensione finita  $\theta$ . Il valore di  $M$ , il limite superiore della sommatoria, dipende dalla estensione temporale di  $\phi(t)$  e dal numero medio di impulsi nell'unità di tempo  $\bar{f}$ :  $M$  deve essere tale da includere tutti gli impulsi che al tempo  $t$  hanno un valore diverso da 0.  $M$  deve essere pertanto dell'ordine di  $M \approx \bar{f} \cdot \theta$ . La rappresentazione del segnale della sequenza espressa dalla formula 2.25 consente quindi di affermare che la funzione  $f(t)$  ad ogni istante risulta dalla somma di  $M$  contributi indipendenti, ovvero gli  $M$  segnali elementari  $\phi_k(t - t_k)$



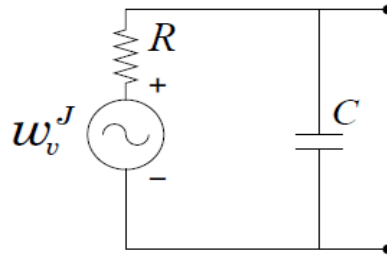


Figura 2.10: Circuito RC in esame

che hanno ampiezza diversa da 0 al tempo  $t$ ; ognuno di questi impulsi ha valor medio  $\overline{\phi_k}$  e varianza  $(\phi_k - \overline{\phi_k})^2$  finiti. Nel limite di  $M$  tendente all'infinito, quindi con un ritmo medio di impulsi  $\phi_k(t - t_k)$  pure tendente all'infinito, il Teorema del limite centrale assicura che  $f(t)$  presenta una distribuzione gaussiana (considerando che le variabili aleatorie in esame ammettono primo e secondo momento). Qualora (come nel caso del rumore Johnson) anche  $q_k$  sia una variabile aleatoria, la conclusione resta a maggior ragione vera.

Se ora si considera che la registrazione non avviene in maniera istantanea, ma dura un tempo finito e quindi rappresenta la media della  $f(t)$  su un tempo finito  $\tau$ , le conclusioni non cambiano: infatti si può ragionare nello stesso modo visto sopra, salvo che ora le  $M$  variabili aleatorie che concorrono a costituire il valore della tensione media misurata nell'intervallo  $\tau$ , sono a loro volta i valori medi di ognuno degli  $M$  impulsi  $\phi_k(t - t_k)$  nell'intervallo  $\phi$ , che restano quindi  $M$  variabili aleatorie indipendenti, essendo comunque le loro origini indipendenti e distribuite a caso. La gaussianità delle distribuzioni di rumore può essere verificata misurando le distribuzioni delle ampiezze delle sequenze di rumore termico, dai risultati si trova che esse sono effettivamente gaussiane con un ottimo grado di approssimazione [4].

### 2.2.3 Esempio: il rumore termico in un circuito RC

Come esempio di calcolo di rumore termico, si è riconsiderato il circuito RC di figura 2.10 già preso in esame precedentemente. Ora si procederà sfruttando la formula 2.24, ricavata tramite la dimostrazione di Nyquist, per il calcolo della densità spettrale di rumore ai capi del condensatore. Si era già trovata nell'esempio trattato in precedenza la formula 2.13, il risultato generale, nel caso specifico risulta:

$$\omega_v^C = \frac{4kTR}{1 + 4\pi^2 f^2 R^2 C^2} \quad (2.26)$$

In figura 2.11 viene riportato l'andamento rappresentato dalla formula 2.26 per due valori di  $C$ . Si nota che, pur partendo da una densità spettrale di rumore bianca

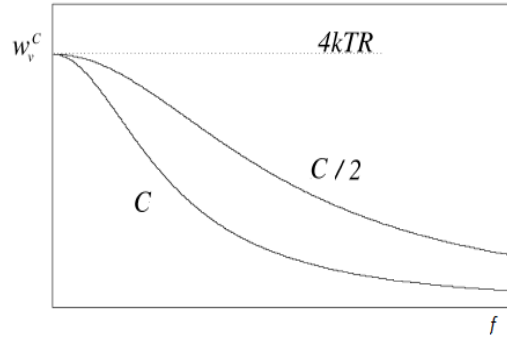


Figura 2.11: Andamento della relazione 2.26 per due valori di  $C$

sulla resistenza  $R$ , la presenza di una capacità  $C$  ai capi di  $R$  porta ad una densità spettrale che va a zero all'aumentare della frequenza. In particolare, detto  $\tau = RC$ , la densità di potenza si dimezza rispetto al valore in continua (coincidente con la densità spettrale di rumore Johnson su  $R$ ) per la frequenza  $f_H = 1/(2\pi\tau)$ . Questo risultato si deve al taglio in alta frequenza introdotto dalla presenza della capacità (essa potrebbe essere anche solo parassita) fra i terminali di misura. Si consideri ora un esempio numerico in cui è presente un resistore con  $R = 50 \Omega$ , con una capacità fra i terminali (comprensiva dello strumento di misura) di  $0,1 \text{ pF}$  (difficile scendere ulteriormente sotto questo valore). Anche in queste condizioni ottimali, esiste un taglio in frequenza a circa  $f_H \approx 30 \text{ GHz}$ , decisamente inferiore al limite posto dalla meccanica quantistica (che era stato considerato circa  $6 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$  quando è stato accennato). Calcoliamo ora la varianza totale di rumore ai capi di  $C$ :

$$\begin{aligned}
 \langle v_{Cn}^2 \rangle &= \int_0^\infty \omega_v^C df = \int_0^\infty \frac{4kTR}{1 + 4\pi^2 f^2 R^2 C^2} df = \frac{4kT}{2\pi C} \int_0^\infty \frac{d(2\pi RCf)}{1 + 4\pi^2 f^2 R^2 C^2} = \\
 &= \frac{2kT}{\pi C} \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{2kT}{\pi C} \arctan(x) \Big|_0^\infty = \frac{2kT}{\pi C} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{kT}{C}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Si trova quindi che il valore quadratico medio della tensione ai capi del condensatore posto in parallelo alla resistenza sorgente del rumore è costante e inversamente proporzionale a  $C$ .

# Capitolo 3

## Conclusioni

Dall'analisi eseguita, possono essere tratte alcune importanti conclusioni, fra l'altro già considerate fra le righe, nei capitoli precedenti. Come prima osservazione sarà risultato chiaro che l'ampiezza delle fluttuazioni della ddp ai capi di una resistenza, senza l'applicazione di una tensione esterna, è molto modesta, ragion per cui senza una strumentazione adeguatamente sensibile essa non risulta apprezzabile. Il molto modesta però va giustificato, in quanto essa deve essere rapportata all'ordine di grandezza delle tensioni che poi effettivamente verranno applicate al circuito che conterrà la resistenza, se queste sono confrontabili con il rumore Johnson ovviamente il suo effetto non sarà più trascurabile.

Inoltre il risultato trovato, ovvero una relazione molto semplice, dipendente soltanto dalla resistenza e dalla temperatura, addirittura costante in frequenza, non è del tutto preciso. Come detto infatti all'aumentare della frequenza, in particolare oltre il limite che si è considerato di  $\approx 6 \cdot 10^{12} Hz$  i fenomeni quantistici iniziano ad avere un peso non indifferente, portando addirittura alla divergenza della densità spettrale di rumore. Se però si considera che qualsiasi strumento di misura, se non ideale, possiede una banda passante limitata e che comunque la presenza di capacità parassite all'interno del circuito è inevitabile, allora effettivamente la densità spettrale di rumore può essere trattata come costante, con un errore quasi nullo.



# Bibliografia

- [1] J.B. Johnson, Thermal Agitation of Electricity in Conductors, Phys. Rev. 32,97 (1928)
- [2] H. Nyquist, Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors, Phys. Rev. 32,110 (1928)
- [3] S.Ramo, J.R. Whinnery, T. Van Duzer, Fields and Waves in Communication Electronics, Wiley (1965)
- [4] G. Poggi, Appunti sul rumore elettrico, (2004)
- [5] N. Benvenuto, M. Zorzi, Principles of Communications Networks and Systems, Wiley (2011)
- [6] A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, Signals and Systems, Prentice Hall, (1996)