Università degli studi di Padova

Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

Tesi di Laurea Magistrale

Giochi a Campo Medio con e senza Assorbimento

Laureando

Tommaso Partenzi

1130352

Relatore

Markus Fischer

15 Dicembre 2017

Anno Accademico 2016\2017

UNIVERSITA DI PADOVA

TESI MAGISTRALE

Giochi a Campo Medio con e senza Assorbimento

Autore:
Tommaso PARTENZI

Relatore:
Markus FISCHER

15 Dicembre 2017

Sommario

Università di Padova
Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

Matematica

Giochi a Campo Medio con e senza Assorbimento

di Tommaso PARTENZI

Nella tesi si studiano giochi a campo medio con e senza assorbimento, discutendo esistenza e unicità delle soluzioni del gioco. In particolare si mostrano esempi di giochi in cui il numero delle soluzioni cambiano quando si considera o non si considera l'assorbimento.

Indice

Capitolo 1

Processi di Markov

1.1 Definizioni

Sia Ω un insieme, $\mathcal{F}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di Ω, e P una misura di probabilità su Ω. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ è chiamato uno spazio di probabilità. Una variabile casuale a valori reali è una funzione su uno spazio di probabilità che è $\mathcal{F}$ misurabile. Più in generale, una funzione da uno spazio di probabilità in uno spazio metrico separabili e completo Σ, sarà chiamato un vettore casuale, se è misurabile rispetto $\mathcal{F}$ e la σ-algebra $\mathcal{B}(\Sigma)$ dei sottoinsiemi boreliani di Σ. Un processo stocastico ξ assegna ad ogni tempo t che appartiene a qualche insieme $\mathcal{T}$ un vettore casuale $\xi(t)$. Quindi $\xi = \xi(\cdot, \cdot)$ è una funzione da $\mathcal{T} \times \Omega$ in Σ, dove $\mathcal{T} \subset E^1$, in modo tale che $\xi(t, \cdot)$soddisfa le condizioni di misurabilità per ogni tempo $t \in \mathcal{T}$. Chiameremo Σ lo spazio degli stati del processo, e $\xi(t, \omega)$ lo stato al tempo t.
Nella discussione che segue prenderemo l'insieme $\mathcal{T}$ come l'intervallo compatto [0,T], con tempo iniziale 0 e tempo finale T. Un processo stocastico ξ è detto continuo se $\xi(\cdot, \omega)$ è una funzione continua su $\mathcal{T}$ per P-quasi ogni $\omega \in \Omega$. La funzione $\xi(\cdot, \omega)$ è chiamata funzione campione del processo ξ. Quindi la continuità significa che la funzione campione sono continue in $\mathcal{T}$ con probabilità 1.
Un processo stocastico ξ è misurabile se $\xi(\cdot, \cdot)$ è misurabile rispetto la σ-algebra $\mathcal{B}(\mathcal{T}) \times \mathcal{F}$, $\mathcal{B}$. Qualunque processo continuo è misurabile.
Processi non anticipativi; supponiamo che oltre alla σ-algebra $\mathcal{F}$, una σ-algebra $\mathcal{F}_t$ è data per ogni $t \in \mathcal{T}$ con:

$$\mathcal{F}_r \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \qquad \text{se}\, r < t.$$

Una tale famiglia di σ algebre è chiamate crescente. Di solito, la σ-algebra $\mathcal{F}_t$ descrive teoricamente ciò che si sa della storia passata al tempo t. Sia ξ un processo misurabile su $\mathcal{T}$. Allora ξ è non anticipativo rispetto alla famiglia $\mathcal{F}_t$ di σ-algebre se il processo ξ è tale che $\xi(\cdot, \omega) = \tilde{\xi}(\cdot, \omega)$ con probabilità 1 e il vettore casuale $\tilde{\xi}(t)$ è $\mathcal{F}_t$-misurabile per ogni $t \in \mathcal{T}$.
Tempo di arresto; la variabile casuale $\tau : \Omega \to \mathcal{T}$ è chiamata tempo d'arresto se è misurabile rispetto la σ-algebra $\mathcal{F}_t$ per ogni $t \in \mathcal{T}$. Inoltre chiameremo τ_ξ il tempo di uscita di $\xi(t)$ da B. Dimostriamo che effettivamente è un tempo di arresto. Ridefinendo in caso $\xi(\cdot, \omega)$ su un insieme di probabilità 0, si può supporre che la traiettoria di ogni funzione campione è continua. Sia $\mathcal{T}'$ un sottoinsieme numerabile denso di $\mathcal{T}$ e, per m=1,2,...,K_m l'insieme chiuso di tutte le x con distanza $(x, \Sigma - B) \leq m^{-1}$. Siccome le traiettorie campione sono continue

$$\{\tau > t\} = \cup_{m=1}^{\infty} \{\xi(r) \in K_m \, \text{per ogni}\, r \leq t, r \in \mathcal{T}' \in\}$$

per $0 < t < T$; per altri valori di t, la condizione è banalmente soddisfatta. Se si suppone che ξ è non anticipativo, $\{\xi(r) \in K_m\}$ differisce da un insieme $\mathcal{F}_r$ misurabile per un insieme Γ tale che $P(\Gamma) = 0$. Siccome $\mathcal{F}_r \subset \mathcal{F}_t$, l'evento $\{\tau_\xi > t\}$ differisce da un insieme $\mathcal{F}_t$ misurabile per insieme di probabilità nulla. Questo prova che τ_ξ è un tempo di arresto.

1.2 Processi di diffusione di Markov

1.2.1 Processi di Markov

Affinché un processo stocastico ξ, con Σ spazio degli stati metrico separabile e completo, sia un processo di Markov deve accadere che lo stato $\xi(r)$ al tempo r deve contenere tutte le informazioni probabilistiche importanti per determinare l'evoluzione del processo per i tempi t>r. Questo può essere espresso precisamente nella seguente maniera. Consideriamo un insieme finito di tempi $t_1 < t_2 < ... < t_m < t$ in $\mathcal{T}$. Allora per ogni B$\in \mathcal{B}(\Sigma)$,

$$P(\xi(t) \in B|\xi(t_1), ..., \xi(t_m)) = P(\xi(t) \in |\xi(t_m)) \tag{1.1}$$

P-quasi sicuramente.Sia

$$\hat{P}(s, y, t, B) = P(\xi(t) \in B|\xi(s) = y).$$

il lato destro di (1.1) è esattamente$\hat{P}(t_m, \xi(t_m), t, B)$. Chiameremo $\hat{P}$ la funzione di transizione.

Definizione 1.2.1. Un processo stocastico ξ su un insieme di tempi $\mathcal{T}$, con spazio degli stati Σ, è un processo di Markov se:

1. l'equazione (1.1) vale per ogni $t_1 < t_2 < ... < t_m$ in $\mathcal{T}$ e $B \in \mathcal{B}(\sigma)$
2. $\hat{P}(s, \cdot, t, B)$ è $\mathcal{B}(\Sigma)$ misurabile per s,t,B fissati, e $\hat{P}(s, y, t, \cdot)$ è una misura di probabilità su $\mathcal{B}(\Sigma)$ con s,y,t fissati;
3. L'equazione di Chapman-Kolmogorov:

   $$\hat{P}(s, y, t, B) = \int_\Sigma \hat{P}(t, x, t, B)\hat{P}(s, y, r, \mathrm{d}x)$$

   è vera per s<r<t, s,r,t,$\in \mathcal{T}$.

Definiamo una famiglia di operatori lineari $S_{s,t}$ associati al processo di Markov. Sia $V(\Sigma)$ lo spazio di tutte le funzioni Φ a valori reali, limitate, Borel misurabili su Σ, con la norma

$$\|\Phi\| = \sup_{x\in\Sigma} |\Phi(x)|$$

per ogni $\Phi \in V(\Sigma)$ e s<t, sia

$$S_{s,t}\Phi(y) = \int_\Sigma \Phi(x)\hat{P}(s, y, t, \mathrm{d}x) = \mathbb{E}_{sy}\Phi[\xi(t)]$$

dove E_{sy} indica la media condizionata a $\xi(s) = y$. Dall'equazione di Chapman-Kolmogorov,

$$S_{s,r}S_{r,t} = S_{s,t} \quad \text{per } s < r < t$$

Definiamo l'operatore A(t), su qualche sottospazio di $V(\Sigma)$, come

$$A(t)\Phi = \lim_{h\to 0^+} h^{-1}[S_{t,t+h}\Phi - \Phi] \tag{1.2}$$

.

1.2.2 Diffusioni

Supponiamo in questo paragrafo che $\Sigma = E^n$. Un processi di Markov su un intervallo $\mathcal{T}$ è chiamato un processo di diffusione n-dimensionale se:

1. Per ogni $\epsilon > 0$ e $t \in \mathcal{T}$,$x \in E^n$,

$$\lim_{h\to 0^+} h^{-1} \int_{|x-z|>\epsilon} \hat{P}(t,x,t+h,\mathrm{z}) = 0;$$

2. esistono delle funzioni $a_{ij}(t,x)$, $b_i(t,x)$, $i,j = 1,...,n$ tali che per ogni $\epsilon > 0$ e $t \in \mathcal{T}$, $x \in E^n$

$$\lim_{h\to 0^+} h^{-1} \int_{|x-z|\leq\epsilon} (z_i - x_i)\hat{P}(t,x,t+h,\mathrm{z}) = b_i(t,x);$$
$$\lim_{h\to 0^+} h^{-1} \int_{|x-z|\leq\epsilon} (z_i - x_i)(z_j - x_j)\hat{P}(t,x,t+h,\mathrm{z}) = a_{ij}(t,x);$$

   le funzioni b sono chiamate il termine di deriva locale e le matrici $a = (a_{ij})$ la matrice di covarianza locale

1.2.3 Diffusioni rappresentate come soluzione di equazioni differenziali stocastiche

Supponiamo che abbiamo una funzione vettoriale b e una matrice σ, che sono continue sulla striscia chiusa $\bar{Q}^0 = \mathcal{T} \times E^n$ e soddisfano le seguenti proprietà (le condizioni di Ito):

- esiste una costante C tale che, per ogni $(t,x) \in \bar{Q}^0$,

$$|b(t,x)| \leq C(1+|x|), \qquad |\sigma(t,x)| \leq C(1+|x|) \tag{1.3}$$

- per ogni insieme limitato $B \subset E^n$ e 0<T'<T esiste una costante K (che può dipendere da B e T') tale che , per ogni $x, y \in B$ e $0 \leq t \leq T'$

$$\begin{aligned} |b(t,x) - b(t,y)| &\leq K|x-y| \\ |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| &\leq K|x-y| \end{aligned} \tag{1.4}$$

Può essere dimostrato che (Gikman - Skorokhod [5]) che per ogni (s,y), la soluzione di:

$$\xi(t) = b(t,x)\mathrm{d}t + \sigma(t,x)\mathrm{d}W \tag{1.5}$$

con dato iniziale $\xi(s) = y$ è una diffusione. Il termine di deriva è b, e la matrice di covarianza locale a soddisfa

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^{d} \sigma_{il}\sigma_{lj}, \qquad i,j = 1,...,n \tag{1.6}$$

o equivalentemente, $\sigma\sigma' = a$. Le matrici $a(t,x)$ sono simmetriche definite positive. Per un processo di diffusione, A(t) prende la forma di un operatore differenziale del secondo ordine, nel senso che il dominio di A(t) contiene tutte le funzioni Φ di classe $\mathcal{C}^2$ e:

$$A(t)\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}. \tag{1.7}$$

Dato un tale operatore A(t), per trovare la corrispettiva diffusione usando l'equazione differenziale stocastica, abbiamo bisogno che esista la radice quadrata $\sigma(t,x)$ della matrice definita positiva $a(t,x)$, come in (1.6). Inoltre, dovremmo avere che b,σ soddisfano le condizioni (1.3)(1.4). Se a_{ij} è di classe $\mathcal{C}^2$ e a_{ij} insieme alle sue prime e seconde derivate parziali sono limitate per $i,j = 1,...,n$, allora la radice quadrata $\sigma(t,x)$ esiste ed è Lipschitziana e in questo caso soddisfa le condizioni di Ito. Ora prendiamo una soluzione di (1.5). Applichiamo la regola di Ito ad una funzione $\psi \in \mathcal{C}^{1,2}$:

$$(*) \qquad \psi(t,\xi(t)) - \psi(s,\xi(s)) = \int_s^t [\psi_t + A(r)\psi]\mathrm{d}r + \int_s^t \psi_x \sigma \mathrm{d}w.$$

Prendendo il valore atteso e tenendo conto che $\mathbb{E}\int_s^t |\psi_x\sigma|^2\mathrm{d}r < \infty$, abbiamo che per un dato iniziale $\xi(s) = y$:

$$\mathbb{E}_{sy}\psi[t,\xi(t)] - \psi(s,y) = \mathbb{E}_{sy}\int_s^t [\psi_t(r,\xi(r)) + A(r)\psi(r,\xi(r))]\mathrm{d}r \tag{1.8}$$

Lemma 1.3. *Sia ψ di classe $\mathcal{C}^{1,2}$, Q un insieme aperto e limitato, $(s,\xi(s)) \in Q$, e τ il tempo di uscita da Q. Allora*

$$\mathbb{E}\psi(\tau,\xi(\tau)) - \mathbb{E}\psi(s,\xi(s)) = \mathbb{E}\int_s^\tau [\psi_t(r,\xi(r)) + A(r)\psi(r,\xi(r))]\mathrm{d}r. \tag{1.9}$$

Dimostrazione. la formula (*) è vera tranne per un insieme fissato di probabilità 0 che non dipende da t. Sostituiamo t con τ in (*), prendiamo il valore atteso e scriviamo:

$$\mathbb{E}_{sy}\psi[\tau,\xi(\tau)] - \psi(s,y) = \mathbb{E}_{sy}\int_s^T 1_{t<\tau}[\psi_t(r,\xi(r)) + A(r)\psi(r,\xi(r))]\mathrm{d}r + \int_s^T 1_{t<\tau}\psi_x\sigma\mathrm{d}w.$$

Ora tutti i valori attesi e integrali esistono, in quanto tutti i termini sono limitati. □

chiamiamo con $\mathcal{C}^{1,2}(Q)$ lo spazio delle funzioni $\psi(t,x)$ continue su Q insieme alle sue derivate parziali ψ_t,ψ_{x_i},$\psi_{x_i x_j}$, i,j=1,...,n. Diciamo che ψ soddisfa una condizione di crescita polinomiale su Q se, per qualche costante D,k

$$|\psi(t,x)| \leq D(1 + |x|^k)$$

quando $(t,x) \in Q$. Sia $\mathcal{C}_p^{1,2}$ la classe delle funzioni ψ in $\mathcal{C}^{1,2}(Q)$ che soddisfano una condizione di crescita polinomiale su Q. Nel prossimo teorema Q è aperto, $Q \subset Q^0$; ξ è una soluzione di (1.5) con dati iniziali $\xi(s) = y$, $(s,y) \in Q$. τ è il tempo di uscita da Q.

Teorema 1.3.1. *Supponiamo:*

1. *b,σ soddisfano la* (1.3)
2. *ψ è in $\mathcal{C}_p^{1,2}(Q)$, ψ è continua su $\bar{Q}$; e*
3. *$\psi_t + A(t)\psi + M(t,x) \geq 0$ per ogni $(t,x) \in Q$, dove $\mathbb{E}_{sy}\int_s^\tau |M(t,\xi(t)|\mathrm{d}t < \infty$ per ogni $(s,y) \in Q$. Allora*

$$\psi(s,y) \leq \mathbb{E}_{sy}\left\{\int_s^\tau M(t,\xi(t))\mathrm{d}t + \psi(\tau,\xi(\tau))\right\} \tag{1.10}$$

Dimostrazione. Prendiamo una sequenza di insiemi aperti e limitati $Q_1, Q_2, \ldots$ con $\bar{Q}_j \subset Q_{j+1} \subset Q$, $j = 1, 2, \ldots$, e Q è l'unione dei Q_j. Per $(s,y) \in Q_j$, sia τ_j il tempo di uscita di $(t,\xi(t))$ da Q_j. Allora τ_j è una sequenza crescente , che tende con probabilità 1 a τ per $j \to \infty$ in quanto ξ è un processo continuo. Sia inoltre α_j una funzione $\mathcal{C}^2$ tale che $\alpha_j = 1$ su $\bar{Q}_j$ e $\alpha_j = 0$ al di fuori di un sottoinsieme compatto di Q. La funzione $\psi_j = \alpha_j\psi$ è di classe $\mathcal{C}^{1,2}$, e $\psi = \psi_j$ su $\bar{Q}_j$. Dal lemma (1.9), con τ_j al posto di τ:

$$\psi(s,y) = -\mathbb{E}\int_s^{\tau_j}[\psi_t + A(t)\psi]\mathrm{d}t + \mathbb{E}\psi(\tau_j,\xi(\tau_j)),$$

$$(\#) \qquad \psi(s,y) \leq \mathbb{E} \in_s^{\tau_J} M(t,\xi(t))\mathrm{d}t + \mathbb{E}\psi(\tau_j,\xi(\tau_j)).$$

il primo termine nella parte destra della disequazione (#) tende a $\mathbb{E}\int_s^\tau M\mathrm{d}t$ per $j \to \infty$. Ora mostriamo che

$$(\#\#) \qquad \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}\psi(\tau_j,\xi(\tau_j)) = \mathbb{E}\psi(\tau,\xi(\tau)).$$

Vediamo che $\psi(\tau_j,\xi(\tau_j)) \to \psi(\tau,\xi(\tau))$ con probabilità 1 per $j \to \infty$, in quanto $\tau_j \to \tau$ e ψ è continua su $\bar{Q}$. Per R>0, sia

$$1_R = 1 \text{ se } \|\xi\| \leq R, \quad 1_R = 0 \,\text{se}\, \|\xi\| > R.$$

Dal teorema della convergenza dominata,

$$\lim_{j\to\infty} \mathbb{E}[\psi(\tau_j,\xi(\tau_j))1_R] = \mathbb{E}[\psi(\tau,\xi(\tau))1_R]$$

Per ogni R>0. Siccome ψ ha una crescita polinomiale,$|\psi(t,x)| \leq D(1+|x|^k)$ per qualche D,k. Sia $H(r) = P(\|\xi\| > r)$, e prendiamo $2m > k$. Da [8] pag. 119 si ha la seguente stima:

$$H(r) \leq M_1 r^{-2m}$$

dove la costante M_1 dipende dalle stime per $\mathbb{E}|\xi(s)|^{2m}$, $T - T_0$,m e D.
Allora $\int_R^\infty r^{k-1}H(r)\mathrm{d}r < \infty$, che implica che (integrando per parti su (R,∞))

$$\lim_{R\to\infty}\int_R^\infty (1+r^k)\mathrm{d}H(r) = 0.$$

Allora

$$|\psi(\tau_j,\xi(\tau_j))| \leq D(1+|\xi(\tau_j)^k| \leq D(1+\|\xi\|^k),$$

$$\mathbb{E}[|\psi(\tau_j,\xi(\tau_j))|(1-1_R)] \leq -D\int_R^\infty (1+r^k)\mathrm{d}H(r),$$

il lato destro tende a 0 per $R \to \infty$. Ciò prova (##), e quindi anche il teorema. □

In particolare, se $M = -(psi_t + A(t)\psi)$ soddisfa la condizione di integrabilità (3) nel teorema (1.3.1), abbiamo applicando il teorema a $\pm\psi$, $\mp M$

Teorema 1.3.2. *Assumiamo le condizione (1), (2) del teorema* (1.3.1), *e inoltre abbiamo*

$$\mathbb{E}_{sy} \in_s^\tau |\psi_t + A(t)\psi|\mathrm{d}t < \infty$$

per ogni $(s, y) \in Q$. *Allora*

$$\psi(s, y) = -\mathbb{E}_{sy} \int_s^\tau [\psi_t + A(t)\psi]\mathrm{d}t + \mathbb{E}_s y\psi(\tau, \xi(\tau)) \tag{1.11}$$

Osservazione 1.3.1. *In questi due teoremi, si può vedere che rimangono veri anche per coefficienti stocastici b,*σ *che soddisfino*

- *per ogni* $(t, x) \in \bar{Q}^0$, $b(t, x, \cdot$,$\sigma(t, x, \cdot)$ *sono* $\mathcal{F}_t$*-misurabili dove* $\mathcal{F}_t$ *è una famiglia crescente di* σ*-algebre,* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.
- *esiste una costante C tale che*

$$|b(t, x, \omega)| \leq C(1 + |x|), \qquad |\sigma(t, x, \omega)| \leq C(1 + |x|)$$

$$|b(t, x, \omega) - b(t, y, \omega)| \leq C|x - y|$$
$$|\sigma(t, x, \omega) - \sigma(t, y, \omega)| \leq C|x - y|$$

per tutti $t \in [T_0, T]$,$x, y \in E^n$,$\omega \in \Omega$.

Capitolo 2

Equazioni di Hamilton Jacobi

2.1 Derivazione

in questa sezione daremo un derivazione formale dell'equazione di Hamilton Jacobi per una classe generale di processi di Markov. Sia $\Sigma = E^n$ lo spazio degli stati del processo che viene controllato. Sia U un insieme dal quale un controllo è scelto e applicato al tempo t. Una legge di controllo feedback è una funzione $u = u(\cdot, \cdot)$ da $\mathcal{T}_0 \times \Sigma$ in U, dove $\mathcal{T}_0 = [0, T]$ è un intervallo contenente tutti i tempi t da considerare. Si suppone che il processo ξ evolve secondo la legge:

$$\mathrm{d}\xi = g(r, \xi(t), u(t))\mathrm{d}t + \sigma(t, \xi(t), u(t))\mathrm{d}w, \quad t \geq s \tag{2.1}$$

dove $\xi(t)$ è lo stato del sistema al tempo t, $u(t)$ è il controllo applicato al tempo t e w è un moto Browniano d-dimensionale. Facciamo le seguenti ipotesi riguardo alle funzioni f(t,x,u), $\sigma(t, x, u)$. Queste sono funzioni di classe $\mathcal{C}^{1,2}(\bar{Q}^0 \times U)$. Inoltre sia C una costante tale che

$$\begin{aligned} &|g(t,0,0)| \leq C, \qquad |\sigma(t,0,0)| \leq C \\ &|g_x| + |g_u| \leq C, \qquad |\sigma_x| + |\sigma_u| \leq C. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Viene inoltre assegnato dei dati iniziali del processo $\xi(0)$. Quindi possiamo considerare (2.1) con dati iniziali:

$$\xi(0) = y \tag{2.3}$$

dove $y \in E^n$ il vettore di stati iniziali. Abbiamo detto che ad ogni tempo t, il controllo $u(t)$ è applicato tramite una legge di controllo feedback u:

$$u(t) = u(t, \xi(t)).$$

Data una u e una funzione $g(t, x, u(t, x))$, usiamo la notazione

$$g^u(t, x) = g(t, x, u(t, x)).$$

Ammettiamo solamente controlli feedback con queste proprietà.

Definizione 2.1.1. Una legge di controllo feedback è ammissibile se u è una funzione Borel misurabile da $\bar{Q}^0$ in U, tale che:

(2.4)

1. per ogni (s,y),$\mathcal{T}_0 \leq s < T$, esiste un moto Browniano w tale che esiste una soluzione ξ a(2.1) con dati iniziali (2.3), unica in legge,

2. per ogni $k > 0$, $\mathbb{E}_{sy}|\xi(t)|^k$ è limitata per $0 \leq t \leq T$ e

$$\mathbb{E}_{sy}\int_0^T |u(t)|^k \mathrm{d}t < \infty$$

dove per semplicità $u(t) = u(t, \xi(t))$. la stima precedente può dipendere da (0,y).

Chiamiamo con $\mathcal{V}$ la classe dei controlli ammissibili. Condizioni sufficienti affinché un controllo u sia ammissibile possono essere:

- Per qualche costante M_1, $|(u(t,x)| \leq M_1(1 + |x|)$ per tutti $(t,x) \in \bar{Q}^0$. Inoltre, per ogni insieme $B \subset^n$ e $T_0 < T' < T$ esiste una costante K_1 tale che ,per tutti $x, y \in B$ e $T_0 \leq t \leq T'$,

$$|u(t,x) - u(t,y)| \leq K_1|x - y|.$$

- u soddisfa una condizione di Lipschitz su $\bar{Q}^0$
- Se supponiamo che $g(t,x,u) = \tilde{b}(t,x) + \sigma(t,x)\theta(t,x,u)$, dove $\tilde{b}$, σ soddisfano le condizioni di ito σ è limitata,θ è di classe $\mathcal{C}^1(\bar{Q}^0 \times U)$, e θ è limitata su $\bar{Q}^0 \times U_1$ per ogni insieme limitato $U_1 \subset$.

se una delle tre condizioni precedenti allora qualunque funzione u limitata, Borel misurabile è un controllo ammissibile.
sia f, e F funzioni continue che soddisfano condizioni di crescita lineare:

$$\begin{aligned} &(a) \quad |f(t,x,u)| \leq C(1 + |x| + |u|)^k \\ &(c) \quad |F(t,x)| \leq C(1 + |x|)^k \end{aligned} \tag{2.5}$$

per delle opportune costanti C,k.
Formuliamo il problema da considerare:
trovare un controllo feedback $u^\star$ che minimizzi

$$J(s,y,u,m) = \mathbb{E}_{sy}\left\{ \int_s^\tau f(t,\xi(t),u(t))\mathrm{d}t + F(\tau,\xi(\tau)) \right\} \tag{2.6}$$

tra tutti i controlli feedback $u \in \mathcal{V}$. τ è il tempo di uscita da un dato insieme aperto $Q \subset Q^0$ e dati iniziali (s,y) che sono in Q. se $Q = Q^0$, abbiamo che $\tau = T$.
Per una diffusione, l'operatore definito nel capitolo 1 è del tipo

$$A^v(s) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^v(s,y)\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^n g_i^v(s,y)\frac{\partial}{\partial y_i}$$

Il principio di programmazione dinamica di Bellman afferma che:

$$V(t,x) = \inf_C \mathbb{E}_{tx}\{\int_t^{t+h} f(s,X(s),u(s)) + V(t+h, X(t+h))\} \tag{2.7}$$

prendendo un controllo ammissibile v:

$$V(t,x) \leq \mathbb{E}_{tx}\int_t^{t+h} f(s,X(s),v) + V(t+h,X(t+h))$$

sottraendo $V(t,x)$,dividendo per h e facendo il limite di h a 0 otteniamo per ogni $v \in \Gamma$:

$$0 \leq A^v V(t,x) + f(t,x,v)$$

dove

$$A^v = \frac{1}{2}\sigma^2 \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial_i \partial_j} + \sum_{i=1}^{n} u_i(t,x) \frac{\partial}{\partial y_i} \tag{2.8}$$

se $u^\star$ è un controllo di Markov ottimale abbiamo:

$$0 = A^{u^\star} V(t,x) + f(t,x,u^\star(t,x)).$$

combinando le due otteniamo l'equazione del controllo ottimo:

$$0 = \min_{v \in \Gamma} A^v V(t,x) + f(t,x,v(t,x),m_t). \tag{2.9}$$

2.1.1 Teoremi di verifica

Sia ancora Q un insieme aperto nel quale i dati iniziali (s,y) giacciono, con $Q \subset Q^0$. Sia $\partial^\star Q$ un insieme chiuso di ∂Q tale che $(\tau, \xi(\tau)) \in \partial^\star Q$ con probabilità 1, per ogni scelta iniziale $(s,y) \in Q$ e ogni controllo ammissibile u.

Teorema 2.1.1. *Sia $W(s,y)$ una soluzione all'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman*

$$0 = W_s + \min_{v \in U} [A^v(s)W + f(s,x,v)] \tag{2.10}$$

con dati finali

$$W(s,y) = F(s,y) \qquad (s,y) \in \partial^\star Q, \tag{2.11}$$

tale che W è in $\mathcal{C}_p^{1,2}(Q)$ e continua in $\bar{Q}$. Allora

1. *$W(s,y) \leq J(s,y,u)$ per ogni controllo feedback u e ogni dato iniziale $(s,y) \in Q$.*
2. *Se $u^\star$ è un controllo feedback ammissibile tale che*

$$A^{u^\star}(s)W + f^{u^\star}(s,y) = \min_{v \in U} [A^v(s)W + f(s,y,v)] \tag{2.12}$$

per tutti $(s,y) \in Q$, allora $W(s,y) = J(s,y,u^\star, m(s))$ per tutti $(s,y) \in Q$. Quindi $u^\star$ è ottimo.

Dimostrazione. Per ogni $v \in U$, $\mu \in \mathcal{P}$,$(s,y) \in Q$,

$$0 \leq W_s + A^v(s)W + f(s,t,y)$$

ora sostituiamo s,y,v,con t,$\xi(t)$, $u(t) = u(t,\xi(t))$, $s \leq t \leq \tau$. Otteniamo

$$(*) \qquad 0 \leq W_s + A^u(s) + f^u.$$

Applichiamo il teorema 1.3.1 con $M = f^u$, $\psi = W$. Condizioni (2.4) seconda condizione e (2.5) implicano:

$$\mathbb{E}_{sy} \int_s^\tau |M(t,\xi)| \mathrm{d}t \leq \mathbb{E}_{sy} \int_s^T |M(t,\xi(t))| < \infty$$

Otteniamo
$$W(s,y) \leq \mathbb{E}_{sy}\left\{\int_s^\tau f^u(t,\xi(t))\mathrm{d}t + F(\tau,\xi(\tau))\right\}$$
Siccome il lato destro è proprio J otteniamo la prima condizione. Per provare la seconda, abbiamo l'uguaglianza in (*) per $u = u^\star$. Quindi, $W(s,y) = J(s,y,u^\star)$ usando il teorema 1.3.2 □

Più avanti avremmo bisogno di risultati più forti di questo teorema, dove (2.12) è richiesta che sia vera quasi ovunque in Q (rispetto la misura di Lebesgue). Sia $\xi^\star$ soluzione di (2.1), (2.3) con $u^\star$, e $\tau^\star$ il corrispettivo tempo di uscita da Q.

Corollario 2.1.1. *Sia W come in (2.1.1) e sia $u^\star$ un controllo feedback ammissibile tale che (2.12) sia vera per quasi tutti $(s,y) \in Q$. Inoltre, supposto che le funzioni di transizione $\hat{P}^{u^\star}$ hanno densità $p^\star(s,y,t,x)$. Allora $W(s,y) = J(s,y,u^\star)$ per tutti $(s,y) \in Q$; dunque $u^\star$ è ottimale.*

Dimostrazione. Sia N un insieme con misura nulla tale che (2.12) sia vera per tutti i punti $Q - N$. Se $(t,\xi(t)) \in Q - N$, allora
$$A^{u^\star}(s)W + f^{u^\star}(s,\xi^\star) = \min_{v\in U}[A^v(s)W + f(s,\xi^\star,v)].$$
Dalla dimostrazione del teorema (2.1.1), è sufficiente dimostrare che, con probabilità 1, $(t,\xi(t)) \in N$ per quasi nessun $t \in [s,T]$. Sia $\chi(t) = 1_{(t,\xi(t))\in N}$ la funzione indicatrice, allora
$$\mathbb{E}_{sy}\int_s^T \chi(t)\mathrm{d}t = \int_s^T P_{sy}\{(t,\xi^\star(t)) \in N\}\mathrm{d}t = \iint_N p^\star(s,y,t,x)\mathrm{d}x\mathrm{t} = 0$$
da cui si ottiene la conclusione. □

2.1.2 Esistenza soluzioni delle equazioni di secondo grado quasi lineari

Facciamo le seguenti supposizioni:
$$\begin{aligned} &Q = (0,T) \times G \\ &\partial^\star Q = ([0,T] \times \partial G) \cup (\{T\} \times G) \end{aligned} \tag{2.13}$$
dove G è limitato con ∂G una varietà di classe $\mathcal{C}^2$.

$$\text{U è compatto.} \tag{2.14}$$

inoltre:

(2.15)

1. f il costo corrente è di classe $\mathcal{C}(\Omega \times U)$ e Hölder continua di esponente μ nel tempo.
2. il costo finale F(T,x) è di classe $\mathcal{C}^2(\bar{G})$; e$F(t,x) = \tilde{F}(t,x)$ per $0 \leq t \leq T, x \in \partial G$, dove $\tilde{F}$ è di classe $\mathcal{C}^{1,2}(\bar{Q})$.

Teorema 2.1.2. *supponiamo che le condizioni (2.13) - (2.15) valgano allora (2.9) ha un unica soluzione in Q che soddisfa la condizione finale, in modo tale che W è in $\mathcal{C}^{1,2}$ e continua in $\bar{Q}$*

Osservazione 2.1.1. *Per dimostrare il teorema è necessario un risultato dal libro di Ladyzenskaja O.A., Solonnikov V.A and Ural'ceva N.N Linear and quasilinear equations of parabolic type [6]. Nella dimostrazione incontreremo la seguente equazione*

$$\begin{gathered}\psi_s + A(s)\psi + \Lambda(s,y) = 0 \\ A(s)\phi = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(s,y)\psi_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(s,y)\psi_{y_i} + c(s,y)\psi.\end{gathered} \tag{2.16}$$

considerata su una regione cilindrica $Q = ([T_0, T] \times \partial G) \cup (\{T\} \times G)$ *con condizione al bordo:*

$$\psi(s,y) = \Psi(s,y), \qquad (s,y) \in \partial^\star Q \tag{2.17}$$

Con G limitato e ∂G *una varietà compatta di classe* $\mathcal{C}^2$ *abbiamo un'equazione uniformemente parabolica. Per il teorema 9.1 capitolo IV del libro citato prima abbiamo che questo problema ammette un unica soluzione in* H^λ, *dove* H^λ *denota lo spazio delle funzioni* ψ *tali che* ψ *insieme a tutte le sue derivate parziali generalizzate* ψ_s, ψ_{y_i},$\psi_{y_i y_j}$, *i,j =1 ... n sono in* $L^\lambda(Q)$. *Inoltre abbiamo la seguente stima:*

$$\|\psi\|^{(2)}_{\lambda,Q} \leq M(\|\Lambda\|_{\lambda,Q} + \|\Psi\|^{(2)}_{\lambda,Q}) \tag{2.18}$$

dove la costante M dipende solamente sulle stime per b_i, *c in Q, se Q e i coefficienti* a_{ij} *sono dati. la norma* $\|\psi\|^{(2)}_{\lambda,Q}$ *del tipo di Sobolev.*

Osservazione 2.1.2. *stime di Hölder. consideriamo, per* $0 < \mu \leq 2$, *le norme di Hölder del tipo:*

$$\|\psi\|_Q = \sup_{(s,y)\in Q} |\psi(s,y)|,$$

$$|\psi|^\mu_Q = \|\psi\|_Q + \sup_{x,y\in G T_0 \leq s \leq T} \frac{|\psi(s,x) - \psi(s,y)|}{|x-y|^\mu} + \sup_{T_0 \leq s \leq T y \in G} \frac{|\psi(s,y) - \psi(t,y)|}{|s-t|^{\frac{\mu}{2}}}$$

la limitatezza di $|\psi|^\mu_Q$ *implica che* ψ *è limitata e soddisfa le condizioni di Hölder; in particolare,* ψ*è continua in* $\bar{Q}$. *Per* $\lambda > \frac{n+2}{2}$, $\|\psi\|^{(2)}_{\lambda,Q<\infty}$ *implica che* $|\psi|^\mu_Q < \infty$ *per qualche* $\mu > 0$ *([6] pag 80). Siano inoltre:*

$$|\psi|^{1+\mu}_Q = |\psi|^\mu_Q + \sum_{i=1}^{n} |\psi_{y_i}|^\mu_Q,$$

$$|\psi|^{2+\mu}_Q = |\psi|^{1+\mu}_Q + |\psi|^\mu_Q + \sum_{i=1}^{n} |\psi_{y_i}|^\mu_Q,$$

la stima (2.18) implica che $|\psi|^{1+\mu}_Q < \infty$ *per qualche* $\mu > 0$, *se* λ *è abbastanza grande. Infatti, se* $\lambda > n+2$

$$|\psi|^{1+\mu}_Q \leq M_1 \|\psi\|^{(2)}_{\lambda,Q}, \quad \mu = 1 - \frac{n+2}{\lambda} \tag{2.19}$$

dove la costante M_1 *dipende da Q e da* λ. *([6] pag 80, pag 342). Sotto ipotesi più stringenti sui coefficienti di A(s) e* Λ, *nella forma delle condizioni di Hölder, ci sono delle stime per tutte le derivate parziali di* ψ *che appaiono in (2.16). Infatti, se si suppone che* Q', Q'' *siano due sottoinsiemi aperti e limitati di Q con* $Q' \subset Q''$ *allora:*

$$|\psi|^{1+\mu}_Q \leq M_2(|\Lambda|^\mu_{Q''} + \|\psi\|_{Q''}), \tag{2.20}$$

dove la costante M_2 *dipende da* Q',Q'', *e* $|b_i|^\mu_{Q''}$, *i,j=1,...,n,* $|c|^\mu_{Q''}$. *([6] thm 10.1 Cap IV). Se*

b_i,c,Λ soddisfano le condizioni di Hölder su Q, allora possiamo prendere Q″=Q e Q′ come qualunque sottoinsieme aperto con la chiusura compatta $\bar{Q}'$ contenuta in Q. La soluzione ψ allora è in $\mathcal{C}^{1,2}(Q)$, cioè è una soluzione classica. Se∂G, $\Psi(T;x)$ e $\tilde{\Psi}$ sono di classe $\mathcal{C}^3$, allora potremmo prendere qualunque Q' con $\bar{Q}' \subset \bar{Q} - \{T\} \times \partial G$.(([6] thm 10.1 Cap IV).

Dimostrazione. per dimostrare il teorema si definirà una sequenza di funzioni W^1, W^2, ... su $\bar{Q}$ e una sequenza di leggi feedback Borel misurabili e limitati u^0, u^1,... definiti nella seguente maniera. Si sceglie un controllo u^0 arbitrario. Allora W^{n+1} sarà la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$0 = W_s^{n+1} + A^{u^m}(s)W^{m+1} + f^{u^m}, \quad m = 0, 1, \ldots \quad W^{m+1} = F \text{ su } \partial^\star Q; \tag{2.21}$$

e per quasi ogni $(s, y) \in Q$, m = 1,2,...

$$\begin{aligned} A^{u^m}(s)W^m + f^{u^m} &= \min_{v \in U}[A^v(s)W^m + f(s,t,v)] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(s,y)W^m_{y_i y_j} + H(s,y,W^m_y). \end{aligned} \tag{2.22}$$

per l'osservazione (2.1.1) il problema (2.21) ha un'unica soluzione W^{m+1} in $\mathcal{H}^\lambda(Q)$. Si può notare che u^m, il costo corrente sono limitati in Q, con stime che non dipendono da m poiché Q e U sono limitati. Possiamo applicare (2.18) con $\psi = W^{m+1}$, $c^m = 0$, per concludere che $\|W^{m+1}\|^{(2)}_{\lambda,Q}$ è limitata per qualunque $\lambda > 1$. Da (2.22):

$$W_s^m + A^{u^m}(s)W^m + f^{u^m} \leq W_s^m + A^{u^{m-1}}(s)W^m + f^{u^{m-1}} = 0.$$

Sottraendo questo da (2.21) otteniamo:

$$(W^{m+1} - W^m)_s + A^{u^m})(s)(W^{m+1} - W^m) \geq 0 \quad \text{in } Q$$

Con $W^{m+1} - W^m = 0$ su $\partial^\star Q$. per un risultato standard su il principio del massimo per equazioni paraboliche [[3] pag 39] abbiamo che $W^{m+1} - W^m \leq 0$ in Q. La sequenza $W^1, W^2, \ldots$ è non crescente. Sia W il suo limite per $m \to \infty$. Siccome $\|W^m\|^{(2)}_{\lambda,Q}$ è limitata per $1 < \lambda < \infty$, da (2.19) con $\lambda > n + 2$, $|W^m|^{1+\mu}_Q$ è limitata per qualche $\mu > 0$. Per $m \to \infty$, W^m, W^m_y converge a W,W_y uniformemente su $\bar{Q}$, infatti prendiamo $m > n$

$$\begin{aligned} |W^n(s,x) - W(s,x)| &\leq |W^n(s,x) - W^n(t,y)| + |W^n(t,y) - W(t,y)| + |W(t,y) - W(t,y)| \\ &\leq 2M(|x-y| + |s-t|) + \epsilon \end{aligned}$$

in quanto le W^n soddisfano le condizioni di Hölder sia nel tempo che nello spazio e la successione converge puntualmente. Prendendo il limite per $(t, y) \to (s, x)$ e $\epsilon \to 0$ dimostriamo che la successione Converge uniformemente. Per W^m_y osserviamo che, essendo Hölder continue, grazie ad Ascoli-Arzelà, esiste una sottosuccessione che converge uniformemente a $\tilde{W}_y$, inoltre il rapporto incrementale

$$\frac{1}{2h}\left(W^n(\bar{x} + h) + W^n(\bar{x} - h)\right)$$

converge uniformemente a

$$\frac{1}{2h}\Big(W(\bar{x}+h)+W(\bar{x}+h)\Big)$$

dove $\bar{x}=(t,x)$ e h è un opportuno vettore di incrementi. Ora se scriviamo:

$$\begin{aligned}
&|\frac{1}{2h}\Big(W(\bar{x}+h)+W(\bar{x}+h)\Big)-\tilde{W}_y(\bar{x})| \leq \\
&\leq |\frac{1}{2h}\Big(W(\bar{x}+h)+W(\bar{x}+h)-(W^n(\bar{x}+h)+W^n(\bar{x}-h))\Big)| \quad + \\
&+|\frac{1}{2h}\Big((W^n(\bar{x}+h)+W^n(\bar{x}-h))\Big)-\tilde{W}^n_y(\bar{x})|+ \\
&+|W^n_y-\tilde{W}_y|
\end{aligned}$$

Siccome le W^n convergono uniformemente e C^2 nello spazio abbiamo che per n grande:

$$|\frac{1}{2h}\Big(W(\bar{x}+h)+W(\bar{x}+h)\Big)-\tilde{W}_y(\bar{x})| \leq \frac{o(h^2)}{2h}+2\epsilon$$

infine facendo tendere ϵ e h a zero otteniamo la convergenza. Invece W^m_s, $W^m_{y_iy_j}$ converge debolmente in L^λ(Q) a W_s, $W_{y_iy_j}$ i,j=1,....,n. Infatti:

$$\int W^n_s g(s)\mathrm{d}s = W^n(t)g(t) - \int W^n g'(s)\mathrm{d}s \to W(t)g(t) - \int W(s)g(s)\mathrm{d}s = \int W_s g(s)\mathrm{d}s$$

dove abbiamo considerato la derivata in senso debole e usato l'integrazione per parti e il teorema della convergenza dominata, in quanto le W^n sono limitate. La medesima dimostrazione vale per le derivate seconde nello spazio.

Da (2.22)

$$\begin{aligned}
W^m_s + A^u(s)W^m + f^u &\geq W^m_s + A^{u^m}(s)W^m + f^{u^m} \\
&= (W^m - W^{m+1})_s + A^{u^m}(s)(W^m - W^{m+1})
\end{aligned}$$

per qualunque controllo u ammissibile. Per $m \to \infty$, la parte sinistra tende debolmente in $L^\lambda(Q)$ a $W_s + A^u(W) + f^u$, e il lato destro debolmente a 0. Quindi

$$0 \leq W_s + A^u(s)W + f^u,$$

quasi ovunque su Q. Definiamo la funzione:

$$\Theta(s,y,v) = W_y(s,y)\cdot v + f(,s,y,v)$$

che continua in $Q \times U$, e U è compatto. Dal teorema di selezione esiste una funzione Borel misurabile $u^\star$ da Q in U tale che;

$$\Theta(s,y,u^\star(s,y)) = \min_{v\in U}\theta(s,y,v).$$

infatti basta prendere $p = n+1$, $z = (s,y)$. Scriviamo $Q = K_1 \cup K_2 \cup ...$ dove

$K_1 \subset K_2 \subset ...$ e ogni K_l sono compatti. Sia:

$$D = \{(s, y, u) : (s, y) \in Q, W_y(s, y) \cdot v + f(t, s, v) = \mathcal{H}(s, y, W_y(s, y))\}$$

Allora $D = D_1 \cup D_2 \cup ...$, dove D_l è definito nella stessa maniera ma con $(s, y) \in K_l$. Ogni D_l è compatto. Applicando il teorema di selezione (in [8] pag.198) troviamo $u^\star(s, y)$ con le proprietà volute.
A questo punto:

$$\begin{aligned} W_s + A^{u^\star}W + f^{u^\star} &\leq W_s + A^{u^m}(s)W + f^{u^m} \\ &= (W - W^{m+1})_s + A^{u^m}(s)(W - W^{m+1}) \end{aligned}$$

Ancora abbiamo che il lato destro converge debolmente a zero per $m \to \infty$. Abbiamo dimostrato che:

$$0 = W_s + A^{u^\star}(s)W + f^{u^\star} = W_s + \frac{1}{2}\sigma^2 \Delta W + \mathcal{H}(s, y, W_y)$$

quasi ovunque in Q. Allora W è soluzione di (2.9) in $\mathcal{H}^\lambda$. Siccome $\mathcal{H}$ è localmente Lipschiziana e $|W_y|_Q^\mu < \infty$ per qualche μ, $|\mathcal{H}(s, y, W_y)|_Q^\mu < \infty$. Usando la stima (2.20) W è in $\mathcal{C}^{1,2}(Q)$. Infine l'unicità della soluzione deriva dal fatto che W può anche essere definito come il costo minimo atteso, cioè come:

$$W(s, y) = \min_{\mathcal{U}(s)} J(s, y, u).$$

$\square$

Ora analizziamo il caso in cui $Q = Q^0 = [0, T] \times E^n$, e il tempo finale $\tau = T$. Siccome Q^0 è illimitato le ipotesi del teorema (2.1.2) devono essere rafforzate per includere il comportamento per $|x| \to \infty$. Ora supponiamo che, in aggiunta a (2.14):

(2.23)

1. il costo corrente $f(t, x, u)$ è in $\mathcal{C}^1(\bar{Q}^0 \times U)$;e f, f_x soddisfano una condizione di crescita polinomiale.
2. $F(t, \cdot)$ è di classe $\mathcal{C}^2(E^n)$; e F,F_x soddisfano una condizione di crescita polinomiale.

Qualunque funzione Borel misurabile u in valori in U sono ammissibili. Per estendere il teorema (2.1.2) ci serve una stima a priori, su ogni insieme limitato, per una soluzione W a (2.9) e per il suo gradiente W_y.

Lemma 2.2. *sia $B \subset E^n$ limitato, W una soluzione di (2.9) in $\mathcal{C}^{1,2}(Q^0)$ con W continua in $\bar{Q}^0$ e $W(T, x) = F(T, x)$. Allora esiste una costante M_B, tale che*

$$|W| \leq M_B, \quad |W_y| \leq M_B \quad \textit{per ogni } y \in B, T_0 \leq s < T.$$

Dimostrazione. W(S,y) è l'estremo inferiore di $J(s, y, u, \nu)$ tra i controlli non anticipativi in $\mathcal{U}(s)$. Sia k l'esponente della condizione di crescita polinomiale. Siccome U è compatto, la condizione di crescita polinomiale e dal teorema di[5] (2, & 6 thm 4) implica che $\mathbb{E}_{sy}|\xi(t)|^k$ è limitato uniformemente rispetto a $s \in [0, T)$, $y \in B$, e $u \in \mathcal{U}(s)$. Segue che dalle condizione di crescita polinomiale $J(s, y, u, \nu)$ è uniformemente limitato. Per cui $|W(s, y)| \leq M_B$ per una costante M_B. Per dimostrare che la stima su

W_y, basta vedere che:

$$|W(s,y') - W(s,y)| \leq M_B|y' - y|$$

per ogni $s \in [0,T]$ e $y, y' \in B$. Questo è equivalente a dimostrare che , per tutte le s, y, y' e $u \in \mathcal{U}(s)$

$$(*) \qquad |J(s,y',u) - J(s,y,u)| \leq M_B|y' - y|,$$

per una costante M_B. dato un controllo $U \in \mathcal{U}(s)$, siano ξ, ξ' i corrispettivi processi con $\xi(s) = y$, $\xi' = y'$. Allora:

$$\xi'(t) - \xi(t) = y' - y$$

per cui:

$$(**) \qquad \mathbb{E}|\xi'(t) - \xi(t)^2 \leq |y' - y|, \qquad s \leq t \leq T.$$

Dal teorema del valor medio,

$$F[\xi'(T)] - F[\xi(T)] = \int_0^1 F_x[\xi_\lambda(T)] \cdot [\xi'(T) - \xi(T)]\mathrm{d}\lambda$$

$$\xi_\lambda = \lambda\xi + (1-\lambda)\xi'$$

Prendendo il valor atteso e usando Cauchy-Schwarz insieme a (**), otteniamo:

$$\mathbb{E}|F[\xi'(T)] - F[\xi(T)]|^2 \leq |y' - y|^2 \int_0^1 \mathbb{E}F_x^2[\xi_\lambda(T)]\mathrm{d}\lambda.$$

F_x per ipotesi soddisfa per constanti C_1, l:

$$|F_x| \leq C_1(1 + |x|)^l.$$

siccome $|\xi_\lambda| \leq |\xi| + |\xi'|$, $\mathbb{E}||\xi_\lambda(T)|^{2l}$ è limitato sempre per Gikhman-Skorokhod [5] da costanti che dipendono solo sulle costanti della crescita polinomiale, l'esponente l, e stime su $|y|$, $|y'|$. In questa maniera otteniamo per $y, y' \in B$

$$\mathbb{E}|F[\xi'(T)] - F[\xi(T)]| \leq M_{1B}|y' - y|$$

per qualche M_{1B}. nella stessa maniera otteniamo una stima per il costo corrente

$$\mathbb{E}\int_s^t |f(t,\xi'(t),u(t),\nu(t)) - f(t,\xi(t),u(t),\nu(t))| \leq M_{2B}|y' - y|.$$

Infine prendiamo $M_B = M_{1B} + M_{2B}$ □

Teorema 2.2.1. *Sia Q=Q^0,supponiamo (2.14) e (2.23). Allora il problema di Cauchy (2.9) con W(T,y) = $F(T,y)$ ha una unica soluzione W in $\mathcal{C}_p^{1,2}(Q)$ con W continua in $\bar{Q}$.*

Dimostrazione. per prima cosa supponiamo ulteriormente che f, F abbiano supporto compatto. Allora la stessa dimostrazione di (2.1.2) prova che esiste una funzione W di (2.9), con $\|W\|_{\lambda,Q^0}^{(2)} z\infty$. Per eliminare queste ipotesi aggiuntive, per l=1,2,..., sia α_l una funzione $\mathcal{C}^\infty$ con $\alpha_l \geq 0$,

$$\alpha_l(y) = 1 \quad \text{per } |y| \leq l \quad \alpha_l(y) = 0 \quad \text{per } |y| \geq l+1,$$

e $|\alpha_{ly}| \leq 2|$. Sia W_l la soluzione di

$$(*) \quad (W_l)_s + \frac{1}{2}\sigma^2 \Delta W_l + \alpha_l(y)\mathcal{H}(s, y, (W_l)_y) = 0$$

$$W_l(T, y) = \alpha_l(y)F(T, y).$$

Ora (*) ha la forma di (2.9), dove u e f sono sostituite con α_l u, α_l f. Dal Lemma (2.2), W_l e W_{ly} sono uniformemente limitati su ogni insieme compatto di $\bar{Q}^0$, in quanto la costante dipende unicamente dall'insieme scelto,dall'intervallo temporale e dalle stime di crescita dei coefficienti. Dai stimatori locali,$\|W_l\|^{(2)}_{\lambda,Q}$ è limitato per ogni insieme limitato $Q' \subset Q$. Per (2.19), $(W_l)_y$ soddisfa uniformemente la condizione di Hölder su ogni insieme Q'. Prendiamo $Q' = [0, T] \times (|y| \leq l_0)$. Per $l \geq l_0$, W_l è una soluzione di (2.9) in Q' con $W_l(T, y) = F(T, y)$ per $|y| \leq l_0$. Siccome H(s,y,p) e f_1 soddisfano localmente la condizione di Lipschitz, possiamo usare (2.20) e ottenere che anche $(W_l)_s$ e $(W_l)_{y_i y_j}$ soddisfano uniformemente la condizione di Hölder su ogni insieme compatto Q'. Ora usiamo il teorema di Ascoli-Arzelà per trovare una sottosuccessione di l in modo tale che W_l converga a W, uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di $\bar{Q}^0$, mentre $(W_l)_s$, $(W_l)_{y_i}$, $(W_l)_{y_i y_j}$ convergono a W_s, W_{y_i}, $W_{y_i y_j}$ uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di Q^0. La funzione limite W è la soluzione di (2.9) con dati di Cauchy $W(T, y) = F(T, y)$. Dalle stime di crescita polinomiale di f e F abbiamo che:

$$|W_l(s, y)| \leq J(s, y, u, \nu) \leq M(1 + |y|)^k$$

Per qualche M che non dipende da l. Quindi, W soddisfa le condizione di crescita polinomiale. Come nella dimostrazione del teorema 2.1.2, l'unicità della soluzione deriva dal fatto che W può anche essere definito come il costo minimo atteso, cioè come:

$$W(s, y) = \min_{\mathcal{U}(s)} J(s, y, u).$$

□

2.2.1 Esistenza di controlli feedback ottimali

Dall'esistenza di W dal teorema (2.1.2) o (2.2.1), si può dedurre l'esistenza di un controllo ottimale $u^\star$. Ricordiamo che, sotto le nostre ipotesi in questo capitolo, qualunque controllo u Borel misurabile con valore in un insieme limitato U è ammissibile.

Teorema 2.2.2. *Sotto le ipotesi del teorema* (2.1.2) *o* (2.2.1), *esiste una legge di controllo feedback ottimale ammissibile $u^\star$, che soddisfa* (2.12) *quasi ovunque in Q.*

Dimostrazione. Definiamo la funzione

$$\Theta(s, y, v) = W_y(s, y)g(s, y, v) + f_0(s, y, v)$$

che è continua su $Q \times U$, e U è compatto. Dal teorema di selezione esiste una funzione Borel misurabile $u^\star$ che

$$\Theta(s, y, u^\star(s, y)) = \min_{v \in U} \Theta(s, y, v).$$

Quando $Q \neq Q^0$ basta definire $u^\star(s, y)$ arbitrariamente al di fuori di Q in modo tale che sia Borel misurabile con valori U. Il teorema è vero per il Corollario (2.1.1). □

Sotto ipotesi più forti, possiamo provare la condizione locale di lipschitzianità per $u^\star$.

Lemma 2.3. *Sia U un insieme compatto e convesso; e $Q' = (T_0, T') \times G'$. Sia $\Theta(s, y, u)$ una funzione che soddisfa*

1. $\Theta(s, y, \cdot) \in \mathcal{C}^2$ *per ogni* $(s, y) \in \bar{Q}'$;
2. $\Theta_u(s, \cdot, u)$ *soddisfa in* $\bar{G}'$ *una condizione di Lipschitz, uniformemente rispetto a s e u,*
3. *Gli autovalori delle matrici* Θ_{uu} *sono limitati dal di sotto da una costante* $\gamma > 0$.

Sia $u^\star(s, y)$ l'unica $v \in U$ alla quale $\Theta(s, t, \cdot)$ raggiunge il minimo in U. Allora $u^\star(s, \cdot)$ soddisfa la condizione di Lipschitz su $\bar{G}'$, Uniformemente per $T_0 \leq s \leq T$.

Dimostrazione. La terza ipotesi implica che $\Theta(s, y, \cdot)$ è una funzione strettamente convessa; dunque ha un unico minimo in U. Dati s,y_1, $y_2 \in G'$, sia

$$v_1 = u^\star(s, y_1), \qquad v_2 = u^\star(s, y_2).$$

Dalla prima e dalla terza ipotesi e dalla formula di Taylor,

$$\Theta(s, y_1, v_2) - \Theta(s, y_1, v_1) \geq \Theta_u \cdot (v_2 - v_1) + \frac{\gamma}{2}|v_2 - v_1|^2.$$

Siccome $\Theta(s, y_1, \cdot)$ è il minimo sull'insieme convesso U usando v_1, il primo termine del lato destro è non negativo. Applichiamo il teorema del valore medio nella parte sinistra, per ottenere

$$(*) \ \int_0^1 \Theta_u(P_1(\lambda)) \cdot (v_2 - v_1) \mathrm{d}\lambda \geq \frac{\gamma}{2}|v_2 - v_1|^2$$

$$P_1(\lambda) = (s, y_1, v_1 + \lambda(v_2 - v_1)).$$

Nella stessa maniera, scambiando i ruoli di y_1 con y_2,

$$(**) \ -\int_0^1 \Theta_u(P_2(\lambda)) \cdot (v_2 - v_1) \mathrm{d}\lambda \geq \frac{\gamma}{2}|v_2 - v_1|^2$$

$$P_2(\lambda) = (s, y_2, v_1 + \lambda(v_2 - v_1)).$$

Ora sommando (*) e (**) otteniamo

$$\int_0^1 [\Theta_u(P_1(\lambda)) - \Theta_u(P_2(\lambda))] \cdot (v_2 - v_1) \mathrm{d}\lambda \geq \gamma|v_2 - v_1|^2$$

Usiamo la disuguaglianza di Cauchy dentro l'integrale per cancellare il fattore $|v_2 - v_1|$, ottenendo

$$\int_0^1 [\Theta_u(P_1(\lambda)) - \Theta_u(P_2(\lambda))] \mathrm{d}\lambda \geq \gamma|v_2 - v_1|$$

Per la seconda ipotesi, e $|\Theta_u(P_1(\lambda)) - \Theta_u(P_2(\lambda))| = |y_2 - y_1|$,

$$|\Theta_u(P_1(\lambda)) - \Theta_u(P_2(\lambda))| \leq M|y_2 - y_1|,$$

dove M è la costante di Lipschitz per $\Theta_u(s, \cdot, v)$. Allora $M|y_2 - y_1| \geq \gamma|v_2 - v_1|$; che implica

$$|u^\star(s, y_2) - u^\star(s, y_1)| \leq \gamma^{-1} M|y_2 - y_1|$$

per y_1,$y_2 \in G'$. Quindi $\gamma^{-1}M$ è la costante di Lipschitz per $u^{\star}(s,\cdot)$ su G′. $\square$

Capitolo 3

Equazioni di Fokker-Planck

il flusso di misure $m(t)$ del processo

$$d\,X(t) = u(t, X_t)dt + \sigma dW_t$$

risolvono in maniera debole l'equazione differenziale di Fokker-Planck:

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \partial_i \partial_j (a_{ij}\mu_t) - div(\mu_t u) \qquad \mu_0 = \mu_0. \tag{3.1}$$

dove $a = \sigma\sigma'$.
Infatti prendiamo una funzione Φ di classe $C_b^{1,2}([0,T]X\mathbb{R}^d)$. Dalla formula di Ito per $\Phi(t, X_t)$, abbiamo:

$$d\Phi(t, X_t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, X_t)dt + \nabla\Phi(t, X_t)\cdot X_t + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \partial_i\partial_j a_{ij}\Phi(t, X_t)$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, X_t)dt + \nabla\Phi(t, X_t)\cdot u(t, X_t)dt + +\nabla\Phi(t, X_t)\cdot \sigma dW_t + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \partial_i\partial_j a_{ij}\Phi(t, X_t)$$

abbiamo che siccome Φ è limitata e σ è una costante:

$$\mathbb{E}[\int_0^T |\nabla\sigma\Phi(t, X_t)|^2\, dt] < \infty$$

da cui abbiamo che:

$$\mathbb{E}[\int_0^t \nabla\sigma\Phi(s, X_s)\, dW_s] = 0.$$

applicando ad entrambi i membri la media otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Phi(t, X_t)] - \mathbb{E}[\Phi(0, X_0)] = \mathbb{E}\int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, X_t)dt + \mathbb{E}\int_0^t \nabla\Phi(t, X_t)\cdot u(t, X_t)dt \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\mathbb{E}\int_0^t \partial_i\partial_j a_{ij}\Phi(t, X_t)\end{aligned}$$

siccome $E[\Phi(t, X_t)] = \int_{\mathbb{R}^d}\Phi(t, y)dm(t, dy)$ otteniamo la formulazione debole dell'equazione di Fokker-Planck. Possiamo anche ottenere molto facilmente stime sulla mappa $t \to m(t)$ in $\mathcal{P}_2$

Lemma 3.1. *sia m come definita sopra. Esiste una costante $c_0 = c_0(T)$, tale che*

$$d_1(m(t), m(s)) \leq c_0(1 + \|u\|_\infty)|t-s|^{\frac{1}{2}} \qquad \forall s, t \in [0, T]$$

dove d_1 è una distanza definita come:

$$d_1(\mu, \nu) = \int_{\gamma \in \Gamma(\mu,\nu)} \left[\int_{\mathbb{R}^{2d}} |x - y| \mathrm{d}\gamma(x, y) \right]$$

dove $\Gamma(\mu, \nu)$ è l'insieme delle misure di probabilità Boreliane su $\mathbb{R}^{2d}$ tale che $\gamma(A \times \ R^d) = \mu(A)$ e $\gamma(\mathbb{R}^d \times \ A) = \nu(A)$ per qualunque insieme Boreliano $A \subset \mathbb{R}^d$.

Dimostrazione. Usando la definizione della distanza, possiamo osservare che se prendiamo la legge γ della coppia (X_t, X_s), questa appartiene a $\Gamma(m(t), m(s))$, cosi abbiamo che

$$d_1(m(t), m(s)) \leq \int_{\mathbb{R}^d} |x - y| \mathrm{d}\gamma(x, y) = \mathbb{E}[|X_t - X_s|].$$

Quindi, se prendiamo $s < t$,

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|] \leq \mathbb{E}\left[\int_s^t |u(\tau, X_\tau)| \mathrm{d}\tau + \sigma |W_t - W_s| \right] \leq \|u\|_\infty (t - s) + \sigma\sqrt{t - s}.$$

□

Inoltre otteniamo anche la seguente stima integrale:

Lemma 3.2. *Esiste una costante $c_0 = c_0(T)$ tale che*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 m(t, \mathrm{d}x) \leq c_0 \left(\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 m(0, \mathrm{d}x) + 1 + \|u\|_\infty \right) \qquad t \in [0, T].$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 m(t, \mathrm{d}x) = \mathbb{E}[|X_t|^2] &\leq 2\mathbb{E}\left[|X_0| + \left| \int_0^t u(\tau, X_\tau) \mathrm{d}\tau \right|^2 + 2|B_t|^2 \right] \\ &\leq 2 \left[\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 m_0(\mathrm{d}x) + t^2 \|u\|_\infty + 2t \right]. \end{aligned}$$

□

Capitolo 4

Giochi a campo medio

4.1 Definizione del problema

4.1.1 senza assorbimento

Un giocatore comune controlla la seguente equazione stocastica:

$$\mathrm{d}X = u(t, X(t))\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t) \tag{4.1}$$

dove *W(t)* è un processo di Wiener d-dimensionale, u è una strategia a valori in Γ e σ è una matrice d-dimensionale. Il costo associato ad un controllo u, a un flusso di probabilità m, e una distribuzione iniziale $\nu \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ è:

$$J(\nu, u, m) = \mathbb{E}[\int_0^T f(t, X(t), u(t, X(t)), m(t))\, \mathrm{d}t + F(X(t), m(t))]$$

dove X è soluzione a l'Eq (4.1) con controllo u e distribuzione iniziale ν. Sia

$$\mathcal{U}_{fb} = \{u : [0;T]\ x\ C([0;T]\ x\ \mathbb{R}^d \to \Gamma,\ \text{u è progressivamente misurabile}\}$$

l'insieme delle strategie tali che l'Eq (4.1) abbia una soluzione che sia unica in legge dato qualunque distribuzione iniziale.
Infine definiamo il costo minimale associato a un flusso di misure m e distribuzione iniziale $\nu \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ come:

$$V(\nu, m) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[\int_0^\tau f(s, X(s), m(s), \alpha(s))\mathrm{d}s + F(\tau, X(\tau))]$$

dove l'insieme $\mathcal{A}$ è l'insieme dei controlli ammissibili e X è soluzione dell'Eq (4.1) con controllo u e distribuzione iniziale ν.

Definizione 4.1.1. Una soluzione feedback del gioco a campo medio è una terna (ν, u, m) tale che:

I $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $u \in \mathcal{U}_{fb}$, m flusso di probabilità.

II proprietà di ottimalità: la strategia u è ottimale per m e per la distribuzione iniziale ν, cioè:
$$J(\nu, u; m) = V(\nu, m);$$

III proprietà del campo medio: il flusso di misure m è la legge al tempo t del processo X:
$$m(t) = \mathbf{Law}(X(t))$$

4.1.2 con assorbimento

Sia O l'insieme degli stati non assorbenti, e $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ l'insieme dei controlli. lo stato del giocatore evolve seguendo la seguente equazione:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t (u(s,X))\mathrm{d}s + \sigma W(t), t \in [0,T], \tag{4.2}$$

dove $X \in \mathbb{R}^d$, $m : [0,T] \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ è flusso di probabilità, u è una strategia feedback progressivamente misurabile a valori in Γ, e W è un processo di Wiener d-dimensionale.
Inoltre sia $\mathcal{U}_{fb}$ l'insieme delle strategie feedback tali che l'Eq (4.2) abbiano una soluzione che sia unica in legge dato qualunque distribuzione iniziale con supporto contenuto in O.
Il costo associato a una strategia u, a un flusso di probabilità m, e una distribuzione iniziale $\nu \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ con supporto in O:

$$J(\nu, u, m) = \mathbb{E}[\int_0^\tau f(s, X(s), m(s), u(s))\mathrm{d}s + F(\tau, X(\tau))] \tag{4.3}$$

Dove X è soluzione all'equazione (4.2) con controllo u e distribuzione iniziale ν, $\tau = \tau^X \wedge T$, dove T è l'orizzonte temporale e $\tau^X = \inf_{t\in[0,T]}\{X(t) \in \partial O\}$.
Misureremo il costo minimo rispetto alla classe delle strategie stocastiche open-loop. Quindi, chiamando $\mathcal{A}$ l'insieme di tutti l'insieme del tipo $((\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}), \xi, \alpha, W)$ in modo tale che $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ è uno spazio di probabilità con filtrazione che soddisfa le usuali ipotesi, ξ è una variabile aleatoria $\mathcal{F}_0$-misurabile con valori in O, α un processo $(\mathcal{F}_t)$-progressivamente misurabili a valori in Γ e W è un processo di Wiener d-dimensionale sulla filtrazione $\mathcal{F}_t$. Ogni strategia u $\in \mathcal{U}_{fb}$, insieme a una distribuzione iniziale, induce un elemento di $\mathcal{A}$.
Dato $((\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}), \xi, \alpha, W) \in \mathcal{A}$ e un flusso di probabilità $m(s)$, consideriamo il seguente equazione stocastica:

$$X(t) = \xi + \int_0^t (\alpha(s))\mathrm{d}s + \sigma W(t), t \in [0,T], \tag{4.4}$$

è determinata con **P**-probabilità 1. Il costo minimale associato a un flusso di misure m e distribuzione iniziale $\nu \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ con supporto in O è dato da:

$$V(\nu, m) = \inf_{((\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}), \xi, \alpha, W) \in \mathcal{A} : P \circ \xi^{-1} = \nu} \mathbb{E}[\int_0^\tau f(s, X(s), m(s), \alpha(s))\mathrm{d}s + F(\tau, X(\tau))]$$

Dove X è il processo determinato da $((\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}), \xi, \alpha, W)$ usando l'Eq (4.4) e $\tau = \tau^X \wedge T$ l'orizzonte temporale casuale e $\tau^X = \inf_{t\in[0,T]}\{X(t) \in \partial O\}$.

Definizione 4.1.2. Una soluzione feedback del gioco a campo medio è una terna (ν, u, m) tale che:

I $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ con $supp(\nu) \subset O$,, $u \in \mathcal{U}_{fb}$, m flusso di probabilità.

II proprietà di ottimalità: la strategia u è ottimale per m e per la distribuzione iniziale ν, cioè:
$$J(\nu, u; m) = V(\nu, m);$$

III proprietà del campo medio condizionato: se $((\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}), W, X)$ è una soluzione di (4.2) con il flusso di misure m, strategia u, e distribuzione iniziale ν, allora $m(t) = \mathbf{P}(X(t) \in \cdot | \tau^X > t)$ per ogni $t \in [0, T]$ tale che $\mathbf{P}(\tau^X > t) > 0$.

4.2 Sistema di equazioni differenziali per il gioco a campo medio

4.2.1 Senza assorbimento

Sia $O = \mathbb{R}^d$, con la dinamica:

$$\mathrm{d}X = u(t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t)$$

otteniamo:

$$-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 \Delta V + \mathcal{H}(t, x, \nabla V) = 0$$
$$\mathcal{H}(t, x, \nabla V) = \sup_{\gamma \in \Gamma} H(t, x, \gamma, \nabla V)$$
$$H(t, x, v, p) = -p \cdot v - f(t, x, v, \mu).$$
$$V(T, X(T)) = F(T, X(T))$$

dove $(t, x) \in Q = [0, T) \times O$. Se in particolare il costo corrente si può scrivere come:

$$f(t, x, v, \mu) = f_0(t, x, v) + f_1(t, x, \mu)$$

l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman si può riscrivere:

$$-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 \Delta V + \mathcal{H}(t, x, \nabla V) = -f_1(t, x, \mu)$$
$$\mathcal{H}(t, x, \nabla V) = \sup_{\gamma \in \Gamma} H(t, x, \gamma, \nabla V)$$
$$H(t, x, v, p) = -p \cdot v - f_0(t, x, v).$$
$$V(T, X(T)) = F(T, X(T))$$

dove $(t, x) \in Q = [0, T) \times O$.
La legge del processo X, m soddisfa la seguente equazione di Fokker-Planck:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 \Delta \mu - div(\mu(t, x) \cdot u(t, x)) \\ \mu(0, x) = m(0, x) \end{cases}$$

dove $u \in arg\max_{v \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(y, x, v, \nabla V)$, $(t, x) \in (0, T] \times O$.

4.2.2 Esempio

Nel caso $O = \mathbb{E}^d$ e:

$$dX_t = u(t, x(t))dt + \sqrt{2}\sigma dW$$

Con funzione costo:

$$J(u) = \mathbb{E}\{\int_0^T \frac{1}{2}|u(s, x(s))|^2 + F(X_s, m(s)) + G(T, X(T))\}$$

l'equazione del controllo ottimo diventa:

$$-\frac{\partial V}{\partial t} - \Delta V + \frac{1}{2}|D_x v|^2 = F(x, m(t))$$

$(t, x) \in Q$, con condizione finale:

$$V = G(T, X(T)).$$

mentre la legge del processo soddisfa:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 \Delta\mu - div(\mu(t, x) \cdot u(t, x))$$

con $u(t, x) = \nabla V$, con condizione iniziale:

$$\mu(0, x) = m(0, x)$$

dove m(0,x) è la distribuzione iniziale del processo.

4.2.3 Con assorbimento

Sia O un aperto di $\mathbb{R}^d$, con la dinamica:

$$\mathrm{d}X = u(t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t)$$

inoltre abbiamo sempre:

$$f(t, x, v, \mu) = f_0(t, x, v) + f_1(t, x, \mu)$$

otteniamo la stessa equazione di Hamilton-Jacobi:

$$-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 \Delta V + \mathcal{H}(t, x, \nabla V) = -f_1(t, x, \mathfrak{p})$$

$$\mathcal{H}(t, x, \nabla V) = \sup_{\gamma \in \Gamma} H(t, x, \gamma, \nabla V)$$

$$H(t, x, v, p) = -p \cdot v - f_0(t, x, v).$$

dove $(t, x) \in Q = [0, T] \times O$, mentre come condizione finale e di bordo avremo:

$$V(t, X(t)) = F(t, X(t))$$

dove $(t, x) \in \{T\} \times cl(O) \cup [0, T) \times O$.
Invece oltre all'equazione di Fokker-Planck:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 \Delta\mu - div(\mu(t, x) \cdot u(t, x)) & (t, x) \in (0, T] \times O \\ \mu(0, x) = m(0, x) & \\ \mu(t, x) = 0 & t \in [0, T],\ x \notin O \end{cases}$$

dove $u \in arg\max_{v \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(y, x, v, \nabla V)$ e m è la densità iniziale di X, si considera inoltre la condizione:

$$\mathfrak{p} = \frac{\mu(t, x)}{\int_O \mu(t, y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}x.$$

a questo punto $\mathfrak{p}$ sarà la misura di probabilità condizionata del processo X. La rinormalizzazione con il fattore $\int_O m(t,y)\mathrm{d}y$ è dovuta dal fatto che $m(t,\cdot)$ soluzione all'equazione di Fokker-Planck sarà la densità di una misura di sub-probabilità e non necessariamente una misura di probabilità se $t > 0$, in quanto avremmo della massa che uscirà dall'aperto O.

Capitolo 5

Esistenza

5.1 Senza assorbimento

A questo punto abbiamo il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}a\Delta V - \mathcal{H}(t,x,\nabla V) = f_1(t,x,m(t)) \\ V(T,X(T)) = F(T,X(T)) \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2\Delta\mu - div(\mu(t,x)\cdot u(t,x)) \\ \mu(0) = m(0). \end{cases}$$

dove nell'equazione di Fokker-Planck $u \in$ arg $\max_{\gamma\in\mathcal{U}}\{H(t,x,\nabla V,\gamma\}$, $(t,x) \in Q = [0,T] \times O$, con $O = \mathbb{R}^d$. Prendiamo una costante C_1 da scegliere successivamente e $\mathcal{C}$ l'insieme delle mappe $\mu \in \mathcal{C}^0([0,T],\mathcal{P}_1)$ in modo che:

$$\sup_{s\neq t} \frac{d_1(\mu(s),\mu(t))}{|t-s|^{\frac{1}{2}}} \leq C_1$$

e

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 dm(t)(x) \leq C_1.$$

Allora

Lemma 5.2. *$\mathcal{C}$ è un insieme convesso, chiuso e compatto di $\mathcal{C}^0([0,T],\mathcal{P}_1)$.*

Dimostrazione. per dimostrare la convessità prendiamo la combinazione convessa di due misure $\mu,\nu \in \mathcal{C}$:

$$\eta(t) = \alpha\mu(t) + (1-\alpha)\nu(t) \qquad \alpha \in [0,1]$$

in $\mathcal{C}$ abbiamo la distanza:

$$d_p(\mu,\nu) = \inf_{\gamma\in\Gamma(\mu,\nu)} \left(\int |x-y|^p \gamma(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) \right)^{\frac{1}{2}}$$

dove $\Gamma(\mu,\nu)$ è l'insieme delle misure di probabilità Boreliane su $\mathbb{R}^{2d}$ tale che $\gamma(A \times R^d) = \mu(A)$ e $\gamma(\mathbb{R}^d \times \ A) = \nu(A)$ per qualunque insieme Boreliano $A \subset \mathbb{R}^d$. Ora prendiamo X con distribuzione μ e Y con distribuzione ν, e prendiamo la coppia (X,y) nel opportuno insieme di probabilità. Abbiamo che:

$$d_p^p(\mu,\nu) \leq \mathcal{E}[|X-Y|^p]$$

e per $\epsilon > 0$ esiste una coppia (X,y) tale che $Law(x) = \mu$ e $Law(Y) = \nu$:

$$\mathbb{E}[|X - Y|^p] \leq d_p(\mu, \nu)^p + \epsilon.$$

fissiamo per comodità $\mu = \mu(s)$, $\tilde{\mu} = \mu(t)$, $\nu = \nu(s)$, $\tilde{\nu} = \nu(t)$, $\eta = \eta(s)$, $\tilde{\eta} = \eta(t)$. Ora prendiamo delle variabili aleatorie X, $\tilde{X}$, Y, $\tilde{Y}$, con legge μ, $\tilde{\mu}$, ν $\tilde{\nu}$ e che soddisfino:

$$\mathbb{E}|X - Y|^{p\frac{1}{p}} \leq d_p(\mu, \nu) + \epsilon$$
$$\mathbb{E}|\tilde{X} - \tilde{Y}|^{p\frac{1}{p}} \leq d_p(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}) + \epsilon$$

Definiamo a questo punto:

$$Z = \xi X + (1 - \xi)Y$$
$$\tilde{Z} = \xi \tilde{X} + (1 - \xi)\tilde{Y}$$

con η variabile indipendente a valore in $\{0, 1\}$ con $\mathbb{P}(\eta = 1)\alpha$ e $\mathbb{P}(\eta = 0) = 1 - \alpha$. Allora Z avrà come legge η e $\tilde{Z}$ avrà $\tilde{\eta}$. Quindi:

$$\begin{aligned} d_p(\eta, \tilde{\eta}) &\leq \mathbb{E}[|Z - \tilde{Z}|^p]^{\frac{1}{p}} = \mathbb{E}[|\xi(X - \tilde{X}) + (1 - \xi)(Y - \tilde{Y})|^p]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \alpha \mathbb{E}|X - \tilde{X}|^{p\frac{1}{p}} + (1 - \alpha)\mathbb{E}[|Y - \tilde{Y}|^p]^{\frac{1}{p}} \leq \alpha d_p(\mu, \tilde{\mu}) + (1 - \alpha) d_p(\nu, \tilde{\nu}) \end{aligned}$$

tenendo in considerazione l'indipendenza della variabile ξ.ora dividendo per $|t-s|^{\frac{1}{2}}$ otteniamo la prima proprietà dell'insieme $\mathcal{C}$. Per la seconda invece osserviamo che fissato l'istante t:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 \eta(t, \mathrm{d}x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 [(\alpha)\mu(t, \mathrm{d}x) + (1 - \alpha)\nu(t, \mathrm{d}x)] \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 \mu(t, \mathrm{d}x) + (1 - \alpha) \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 \nu(t, \mathrm{d}x) \leq C_1 \end{aligned}$$

per la proprietà di insieme chiuso prendiamo una successione di misure μ_n che converge a μ, vediamo se l'elemento $\mu \in \mathcal{C}$:

$$d_1(\mu(s), \mu(t)) \leq d_1(\mu(s), \mu_n(s)) + d_1(\mu_n(s), \mu_n(t)) + d_1(\mu_n(t), \mu(t))$$

$$< 2\epsilon + C_1 |s - t|^{\frac{1}{2}}$$

otteniamo la prima proprietà. Per la seconda invece abbiamo fissando l'istante t:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 \mu(t, \mathrm{d}x) \leq \liminf_{n \to \infty} \sup_{t \in [0,T]} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 \mu_n(t, \mathrm{d}x) \leq C_1$$

Per la compattezza usiamo il teorema di Ascoli-Arzelà. Supponiamo di avere una successione di misure $\mu_n \in \mathcal{C}$. Per la equilimitatezza osserviamo che fissato l'elemento $\tilde{\mu}(0)$:

$$d_1(\mu_i(t), \tilde{\mu}(0)) \leq \mathbb{E}[X(t) - \tilde{X}(0)] \leq \sqrt{\mathbb{E}[(X(t) - \tilde{X}(0))^2]} \leq \sqrt{2\mathbb{E}[X^2(t)] + \mathbb{E}[\tilde{X}^2(0)]} \leq$$

$$\sup_{t \in [0,T]} \sqrt{2\mathbb{E}[X^2(t)] + \mathbb{E}[\tilde{X}^2(0)]} \leq \sqrt{4C_1}$$

per la equicontinuità. fissiamo un $\epsilon > 0$ e prendiamo un qualunque $i \in \mathbb{N}$, allora abbiamo che:

$$d_1(\mu_i(s), \mu_i(t) \leq \sup_{t \neq s} d_1(\mu_i(s), \mu_i(t) \leq C_1|s-t|^{\frac{1}{2}} \leq C_1\delta$$

ora basta prendere $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{C_1}$ per ottenere la equicontinuità. Con il teorema di Ascoli-Arzelà otteniamo una sottosuccesione che converge uniformemente provando così la precompattezza. Essendo l'insieme chiuso abbiamo che questo è anche compatto. $\square$

A questo punto ad ogni $\mu \in \mathcal{C}$ associamo $m = \Psi(\mu) \in \mathcal{C}$ nella seguente maniera: sia V l'unica soluzione dell'equazione di Hamilton Jacobi, allora definiamo $m = \Psi(\mu)$ come la soluzione all'equazione di Fokker-Planck. Con l'ipotesi fatte abbiamo che l'equazione di Hamilton-Jacobi ha una soluzione unica V $\in H^{2+\frac{1}{2},1+\frac{1}{2}}$ con il gradiente spaziale limitato. Quindi inserendola nella equazione di Fokker-Planck troviamo un'unica soluzione che appartiene a $\mathcal{C}$, usando le stime del paragrafo precedente, e quindi Ψ è ben definita.
Ci rimane da provare che la mappa $\Psi : \mu \to m = \Psi(\mu)$ è continua per applicare il teorema del punto fisso. Sia $\mu_n \in (C)$ una successione che converge a μ. Siano (V_n, m_n) e (V, m) le corrispondenti soluzioni. Abbiamo che $(x, t) \to f(x, t, u_n, \mu_n(t))$ e $(x, t) \to F(x, \mu_n(T))$ convergono uniformemente a $(x, t) \to f(x, t, u_n, \mu(t))$ e $(x, t) \to F(x, \mu(T))$. Allora si ha la convergenza di V_n a V. Possiamo concludere come abbiamo già fatto nella dimostrazione dell'esistenza della sezione precedente che $\|V_n\|_{\lambda Q}^{(2)}$ è limitato per qualunque $\lambda > 1$. l'Operatore differenziale L_n è proprio, dipende da n attraverso la misura μ_n.Le V^n sono soluzioni classiche, quindi anche di viscosità. Per il lemma 6.1 di [7] pag 33 le V^n convergono a $\bar(V)$ dove $\bar{V}$ è soluzione del problema $\lim_{n\to\infty} L_n = 0$. Inoltre abbiamo già visto che in queste ipotesi anche (D_xV_n) convergono uniformemente a D_xV
Ora per ogni n inserisco μ_n nella equazione di Hamilton-Jacobi per un ottenere una soluzione V_n e un controllo che dipende da D_xV_n. Questo controllo viene usato nella equazione Fokker Planck per trovare la soluzione m_n. Questa soluzione come le V_n appartiene a $\mathcal{C}^{2+1/2}$, quindi Applicando Ascoli-Arzelà otteniamo che esiste una sottosuccessione che converge uniformemente a $\tilde{m}$. Siccome le m_n soddisfano una equazione parabolica come le V_n, abbiamo le stesse convergenze per m_n e le sue derivate. Quindi $\tilde{m}$ soddisfa la stessa equazione di differenziale di m. Essendo la soluzione unica abbiamo che $\tilde{m} = m$ dimostrando così la continuità di Ψ.
Applicando il teorema di punto fisso di Schauder possiamo concludere che la mappa continua $\mu \to m = \Psi(\mu)$ ha un punto fisso in $\mathcal{C}$ e questo punto fisso è soluzione del sistema del gioco a campo medio.

5.3 Con assorbimento

Nel caso con assorbimento con O aperto di $\mathbb{R}^d$, avremmo da risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}a\Delta V - \mathcal{H}(t,x,\nabla V) = f_1(t,x,\mathfrak{p}) & (t,x) \in Q = [0,T] \times O \\ V(t,X(t)) = F(t,X(t)) & (t,x) \in \{T\} \times cl(O) \cup [0,T) \times O \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 \Delta\mu - div(\mu(t,x) \cdot u(t,x)) & (t,x) \in (0,T] \times O \\ \mu(0,x) = m(0,x) & \\ \mu(t,x) = 0 & t \in [0,T]\, x \notin O \\ \mathfrak{p} = \frac{\mu(t,x)}{\int_O \mu(t,y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}x & \end{cases}$$

dove nell'equazione di Fokker-Planck $u \in$ arg $\max_{\gamma\in\mathcal{U}}$,ed m è la densità iniziale di X.

In questo caso non possiamo più definire la mappa Ψ come prima poiché dobbiamo tenere in considerazione la rinormalizzazione della misura m, soluzione all'equazione di Fokker-Planck. Inoltre un altro punto critico è la definizione dell'insieme $\mathcal{C}$ dove applicare il teorema di punto fisso di Schauder, poiché $\mathfrak{p}$ potrebbe non avere le stesse proprietà richieste precedentemente nella dimostrazione senza assorbimento.

Capitolo 6

Unicità

6.1 Senza Assorbimento

Supponiamo che il costo corrente si posso scrivere nella seguente maniera:

$$f(t,x,\alpha,\gamma) = f_0(t,x,\alpha) + f_1(t,x,\gamma)$$

e supponiamo inoltre che $f_1(t,x,\alpha)$ soddisfi $\forall t$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} [f_1(t,y,\tilde{\gamma}) - f_1(t,y,\gamma)](\tilde{\gamma}-\gamma)\mathrm{d}y > 0 \tag{6.1}$$

quando $\tilde{\gamma} \neq \gamma$.
Vediamo quindi se la coppia $(u(t), m(t))$ è unica, (dove u è il controllo e m è il flusso di misure). Supponiamo quindi che ci siano due coppie distinte $(u(t), m(t))$ e $(\tilde{u}(t), \tilde{m}(t))$, che minimizzano il costo. Ora vediamo che:

$$J(u(t), \tilde{m}(t)) - J(\tilde{u}(t), \tilde{m}(t)) \geq 0$$
$$J(\tilde{u}(t), m(t)) - J(u(t), m(t)) \geq 0$$

Ora sommando otteniamo:

$$\begin{aligned}
0 \leq J(u(t), \tilde{m}(t)) - J(\tilde{u}(t), \tilde{m}(t)) + J(\tilde{u}(t), m(t)) - J(u(t), m(t)) = \\
\mathbb{E}[\int_0^T f_0(t,X,u) + f_1(t,X,\tilde{m})\mathrm{d}t] - \mathbb{E}[\int_0^T f_0(t,\tilde{X},\tilde{u}) + f_1(t,\tilde{X},\tilde{m})\mathrm{d}t] \\
+\mathbb{E}[\int_0^T f_0(t,\tilde{X},\tilde{u}) + f_1(t,\tilde{X},m)\mathrm{d}t] - \mathbb{E}[\int_0^T f_0(t,X,u) + f_1(t,X,m)\mathrm{d}t] =
\end{aligned}$$

Dove X è il processo con il controllo $u(t)$ mentre $\tilde{X}$ è il processo con il controllo $\tilde{u}(t)$.
Applicando Fubini e dalla definizione di soluzione del problema che ci consente di scrivere:

$$\mathbb{E}[f(t,X,u)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(t,y,u)m(t,dy)$$

possiamo scrivere:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} [f_0(t,y,u) + f_1(t,y,\tilde{m})]m(t,\mathrm{d}y)\mathrm{d}t - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} [f_0(t,y,\tilde{u}) + f_1(t,y,\tilde{m})]\tilde{m}(t,\mathrm{d}y)\mathrm{d}t$$

$$+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} [f_0(t,y,\tilde{u}) + f_1(t,y,m)]\tilde{m}(t,\mathrm{d}y)\mathrm{d}t - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} [f_0(t,y,u) + f_1(t,y,m)]m(t,\mathrm{d}y)\mathrm{d}t =$$

Raccogliendo e eliminando il termine f_0 si ottiene:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} [f_1(t,y,\tilde{m}) - f_1(t,y,m)]m(t,\mathrm{d}y)\mathrm{d}t - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} [f_1(t,y,\tilde{m} - f_1(t,y,m))]\tilde{m}(t,\mathrm{d}y)\mathrm{d}t =$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} [f_1(t,y,\tilde{m}) - f_1(t,y,m)](m(t,\mathrm{d}y) - \tilde{m}(t,\mathrm{d}y))\mathrm{d}t$$

alla fine otteniamo un assurdo supponendo che $m \neq \tilde{m}$ in quanto andiamo contro la supposizione che vale (6.1). Quindi esiste un'unica misura che risolve il nostro problema. Ora inserendo questa soluzione nell'equazione di Hamilton Jacobi associato al problema, questo ci darà un'unica funzione valore e un controllo ottimo sotto le nostre ipotesi.

6.2 Con Assorbimento

Sia $O \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, cioè l'insieme degli stati non assorbenti. Lo stato del giocatore si evolve nella seguente maniera:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}s + W(t)$$

dove α è il controllo e W è un processo di Wiener. Supponiamo come nella sezione precedente che il costo corrente su può scrivere nella seguente forma:

$$f(t,x,\alpha,\gamma) = f_0(t,x,\alpha) + f_1(t,x,\gamma).$$

Se ora proviamo ad usare la stessa dimostrazione di prima per l'unicità, non riusciamo più concludere come prima. Infatti se supponiamo che (u,m) e $(\tilde{u},\tilde{m})$ due soluzioni del gioco otteniamo:

$$0 \leq J(u(t),\tilde{m}(t)) - J(\tilde{u}(t),\tilde{m}(t)) + J(\tilde{u}(t),m(t)) - J(u(t),m(t)) =$$
$$\mathbb{E}[= \int_0^\tau f_0(t,X,u) + f_1(t,X,\tilde{m})\mathrm{d}t] - \mathbb{E}[\int_0^\tau f_0(t,\tilde{X},\tilde{u}) + f_1(t,\tilde{X},\tilde{m})\mathrm{d}t]$$
$$+\mathbb{E}[\int_0^\tau f_0(t,\tilde{X},\tilde{u}) + f_1(t,\tilde{X},m)\mathrm{d}t] - \mathbb{E}[\int_0^\tau f_0(t,X,u) + f_1(t,X,m)\mathrm{d}t] =$$

dove $\tau = \tau^X \wedge T$, $\tau^X = \inf_t\{X(t) \in \partial O\}$. Ora ancora una volta i termini f_0 si eliminano:

$$= \mathbb{E}[\int_0^\tau (f_1(t,X,\tilde{m}) - f_1(t,\tilde{X},\tilde{m}))\mathrm{d}t] + \mathbb{E}[\int_0^\tau (f_1(t,\tilde{X},m) - f_1(t,X,m))\mathrm{d}t] \leq$$

$$\leq \mathbb{E}[\int_0^T 1_{\{\tau^X > T\}}(f_1(t,X,\tilde{m}) - f_1(t,\tilde{X},\tilde{m}))\mathrm{d}t] + \mathbb{E}[\int_0^T 1_{\{\tau^{\tilde{X}} > T\}}(f_1(t,\tilde{X},m) - f_1(t,X,m))\mathrm{d}t] =$$

Dove $1_{\{\tau^X > t\}}$ è la funzione indicatrice dell'evento. Ora usiamo Fubini e la proprietà della media condizionata:

$$\mathbb{E}[1_{\{\tau^X > T\}} f(x)] = \mathbb{P}(\{\tau^X > T\})\mathbb{E}[f(x)|\tau^X > T]$$

Così da ottenere:

$$= \int_0^T \mathbb{P}(\{\tau^X > T\})\mathbb{E}[(f_1(t, X, \tilde{m}) - f_1(t, \tilde{X}, \tilde{m}))|\tau^X > T]\mathrm{d}t$$

$$+ \int_0^T \mathbb{P}(\{\tau^{\tilde{X}} > T\})\mathbb{E}[(f_1(t, \tilde{X}, m) - f_1(t, X, m))|\tau^{\tilde{X}} > T]\mathrm{d}t$$

Ora a priori le due probabilità non sono uguali e perciò non si può andare oltre come nel caso precedente. Ora sapendo che:

$$\mathbb{E}[f(t, X, m)|\tau^X > T] = \int_O [f(t, y, m)\mathrm{d}m(t, dy)]$$

si può andare avanti in questa maniera:

$$=\mathbb{P}(\{\tau^X > T\}) \int_0^T \Bigg[\alpha\Bigg(\int_O f_1(t, y, \tilde{m})\mathrm{d}m - \int_O f_1(t, y, \tilde{m})\mathrm{d}\tilde{m}\Bigg) +$$

$$+ \int_O f_1(t, y, m)\mathrm{d}\tilde{m} - \int_O f_1(t, y, m)\mathrm{d}\tilde{m}\Bigg]\mathrm{d}t$$

dove $\alpha = \frac{\mathbb{P}(\{\tau^X > T\})}{\mathbb{P}(\{\tau^{\tilde{X}} > T\})}$.

$$\leq \int_0^T \int_O [\alpha f_1(t, y, \tilde{m}) - f_1(t, y, m)](m(t, \mathrm{d}y) - \tilde{m}(t, \mathrm{d}y))$$

se supponendo una condizione simile alla (6.1):

$$\int_{\mathbb{R}^d} [\alpha f_1(t, x, \tilde{\gamma}) - f_1(t, x, \gamma)](\tilde{\gamma} - \gamma])\mathrm{d}y > 0 \tag{6.2}$$

con $\alpha > 0$, si può ottenere l'unicità della soluzione. L'unico problema è che questa condizione è molto forte e rischia di non avere nessuna funzione che la soddisfi.

6.2.1 Esempio

il seguente esempio mostra che passando dal caso senza assorbimento al caso con assorbimento possiamo perdere delle soluzioni, dovuto al fatto che riusciamo a terminare prima del tempo finale T. L'aleatorietà del processo è presente unicamente nello stato iniziale in quanto prendiamo un processo in cui $\sigma = 0$.

- Dimensione: n=1;
- Orizzonte temporale: T=2;
- insieme dei controlli: $\Gamma = \{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma \in [-1, 1]\}$;
- insieme degli stati non assorbenti: $O = \{x \in \mathbb{R} : -4 < x < 1 + e^{t-1}\}$;
- $\sigma = 0$;
- costo corrente dipende in maniera separata dalla misura e dal controllo:

$$f(t, x, \alpha, \mu) = -\int_O y\mu(t, \mathrm{d}y) + 2(1 - \alpha^2) + 1;$$

- costo finale:
$$F(t,x) = 0$$

Inoltre sia ρ la distribuzione Rademacher su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, con $supp(\rho) = \{-1,1\}$ e $\rho(\{-1\}) = \frac{1}{2} = \rho(\{1\})$. Data una strategia stocastica open-loop $((\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}), \xi, \alpha, W) \in \mathcal{A}$ tale che $\mathbb{P} \circ \xi^{-1} = \nu$, la dinamica diventa:

$$X(t) = \xi + \int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}s$$

Siccome $\alpha \in [-1,1]$ e ξ ha valori in $\{-1,1\}$, abbiamo che $\mathbb{P}$-quasi sicuramente,

$$-1 - t \leq X(t) \leq 1 + t \quad \text{per ogni } t \in [0,2] \tag{6.3}$$

Per costruzione di O, segue che, per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$, $X(\cdot,\omega)$ lascia O prima di $T = 2$ se e solo se $\xi = 1$ e $\alpha(t,\omega) = 1$ per Lesbegue quasi ogni $t \in [0,1]$, allora $\tau_x = 1$. Se $\xi = -1$ e se per ogni controllo controllo abbiamo (6.3), il processo $X(\cdot,\omega)$ non lascerà mai O prima del tempo finale, allora in questo caso si ha $\tau_X = 2$. Nel caso senza assorbimento avremmo che $O = \mathbb{R}$, quindi $\tau_x = 2$ per ogni controllo che scegliamo. Inoltre se noi fissiamo una misura, abbiamo che il termine in cui compare la misura nel costo corrente è costante per ogni controllo che scegliamo. Il secondo termine invece fa preferire i controlli che prendono i valori in $\{-1,1\}$ e infine, l'ultimo termine non influisce sul costo finale in quanto tiene in considerazione il tempo di uscita del processo, ed essendo il problema senza assorbibento, tutti i processi terminano al tempo finale $T = 2$.
Dunque se noi prendiamo un controllo qualsiasi α a valori in $\{-1,1\}$ e prendiamo la legge m del processo da lui generato, allora questo sarà ottimale e quindi la coppia (α, m) è soluzione al gioco a campo medio. Ad esempio prendiamo il controllo:

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \xi(\omega) = 1 \\ 1 & \text{se} \quad \xi(\omega) = -1 \end{cases}$$

ora la legge del processo generato da α è la seguente:

$$m(t) = \frac{1}{2}\delta_{1+t} + \frac{1}{2}\delta_{-1+t}$$

ora calcoliamo:
$$\int_O x m(t, \mathrm{d}x) = t$$

ora il costo sarà:

$$J(\alpha, m, \nu) = \mathbb{E}[\int_0^2 (-\int_O x m(t,\mathrm{d}x) + 2(1-\alpha^2(s)) + 1)\mathrm{d}t] = \int_0^2 -t + 1 = -2 + 1 = -1$$

Invece nel caso con assorbimento ci sono delle differenze. Le soluzioni trovate nel caso precedente potrebbero non essere più soluzione al gioco a campo medio poichè i tempi di uscita potrebbero far cambiare il costo finale. Infatti nel nostro caso, in quanto la media del processo decresce nel tempo e quindi non ci conviene uscire prima del tempo finale. Il processo α, come osservato prima, porta il processo ad uscire al tempo 1 quando $\xi = 1$, quindi $\tau_x = 1$. La misura da considerare questa volta è:
$$m(t) = [\frac{1}{2}\delta_{1+t} + \frac{1}{2}\delta_{-1+t}]1_{t<1} + \delta_{-1+t}1_{t>1}$$

e quindi:

$$\int_O x m(t, \mathrm{d}x) = t 1_{t<1} + (-1+t) 1_{t>1}$$

Calcoliamo il costo:

$$J(\alpha, m, \nu) = \frac{1}{2}[\int_0^1 (-t+1)\mathrm{d}t] + \frac{1}{2}[\int_0^1 (-t+1)\mathrm{d}t + \int_1^2 (-t)\mathrm{d}t] = \frac{11}{4}.$$

Se invece prendiamo:

$$\beta(t) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad \xi(\omega) = 1 \\ -1 & \text{se} \quad \xi(\omega) = -1 \end{cases}$$

Il costo diventa:

$$J(\beta, m, \nu) = \int_0^1 (-t+1)\mathrm{d}t + \int_1^2 (-t)\mathrm{d}t = -1$$

che è minore quello con α. Quindi abbiamo visto la coppia (α, m) non può essere soluzione al gioco a campo medio in quanto α non è ottimale con la misura m.

6.2.2 Esempio

Nel seguente esempio, cambiando solo i costi correnti e aggiungendo un costo finale rispetto al caso precedente, mostriamo che nel caso con assorbimento troviamo una soluzione la quale non era soluzione nel caso senza assorbimento. Anche in questo caso l'aleatorietà del processo è presente unicamente nello stato iniziale in quanto prendiamo un processo in cui $\sigma = 0$.

- Dimensione: n=1;
- Orizzonte temporale: T=2;
- insieme dei controlli: $\Gamma = \{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma \in [-1, 1]\}$;
- insieme degli stati non assorbenti: $O = \{x \in \mathbb{R} : -4 < x < 1 + e^{t-1}\}$;
- σ = 0;
- costo corrente dipende in maniera separata dalla misura e dal controllo:

$$f(t, x, \alpha, \mu) = e^{-(x + \int_O x\mu(t,\mathrm{d}x) - 1)^2} + 2(1 - \alpha^2);$$

- costo finale:

$$F(t, x) = (x - 2) 1_{x>2}$$

Inoltre sia ρ la distribuzione Rademacher su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, con $supp(\rho) = \{-1, 1\}$ e $\rho(\{-1\}) = \frac{1}{2} = \rho(\{1\})$. Data una strategia stocastica open-loop $((\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}), \xi, \alpha, W) \in \mathcal{A}$ tale che $\mathbb{P} \circ \xi^{-1} = \nu$, la dinamica diventa:

$$X(t) = \xi + \int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}s$$

Per costruzione di O, segue che, per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$, $X(\cdot, \omega)$ lascia O prima di $T = 2$ se e solo se $\xi = 1$ e $\alpha(t, \omega) = 1$ per Lesbegue quasi ogni $t \in [0, 1]$, allora $\tau_x = 1$. Se $\xi = -1$ e se per ogni controllo controllo abbiamo (6.3), il processo $X(\cdot, \omega)$ non lascerà mai O prima del tempo finale, allora in questo caso si ha $\tau_X = 2$. Nel caso senza assorbimento avremmo che $O = \mathbb{R}$, quindi $\tau_x = 2$ per ogni controllo che scegliamo. Se fissiamo una misura che ha una media negativa, per il costo corrente in ogni caso ci conviene muoversi a sinistra sia per $\xi = -1$ e $\xi = 1$. Mentre se fissiamo una misura,e in particolare questa misura ha media 0, in quanto la funzione costo è una Gaussiana simmetrica rispetto all'asse $x = 1$, per minimizzare i costi correnti dovremmo portare il processo più a sinistra possibile quando inizia in $\xi = -1$, mentre è indifferente muoverci a destra o a sinistra quando $\xi = 1$. Quindi definiamo il controllo che ci fa muovere a sinistra sia per $\xi = \pm 1$:

$$\alpha(t) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad \xi(\omega) = 1 \quad \text{e} \quad t \in [0,2] \\ -1 & \text{se} \quad \xi(\omega) = -1 \quad \text{e} \quad t \in [0,2] \end{cases}$$

e la corrispondente legge del processo controllato:

$$m(t) = \frac{1}{2}\delta_{1-t} + \frac{1}{2}\delta_{-1-t}$$

abbiamo che:

$$\int_O ym(t,\mathrm{y}) = -t.$$

che è sempre negativa. Perciò per quanto detto prima questa è ottimale e la coppia (α, m) è soluzione al gioco a campo medio. Se ora definiamo il controllo che ci fa muovere a destra quando $\xi = 1$ e a sinistra quando $\xi = -1$:

$$\beta(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \xi(\omega) = 1 \\ -1 & \text{se} \quad \xi(\omega) = -1 \end{cases}$$

allora la misura generata dal processo sarà:

$$n(t) = [\frac{1}{2}\delta_{1+t} + \frac{1}{2}\delta_{-1-t}].$$

che ha come media:

$$\int_O yn(t,\mathrm{y}) = 0.$$

allora il costo corrente con β sarà uguale con quello con α in quanto sfruttiamo la simmetria in 1, però muovendoci a destra quando $\xi = 1$ ci fa incorre a costi finali, portando β a non essere ottimale.

Se ora consideriamo il problema con assorbimento, con $O = \{x \in \mathbb{R} : -4 < x < 1 + e^{t-1}\}$, abbiamo il vantaggio di uscire prima del tempo, così da diminuire il costo totale, perché possiamo evitare i costi finali. In questo caso ancora la coppia (α, m) rimane ottimale. Osserviamo che $J(\alpha, m, \nu)$ rimane invariato e perciò la coppia (α, m) rimane ancora ottimale. Se invece prendiamo il controllo β definito prima,questo farà uscire il processo al tempo $\tau_x = 1$ quando $\xi = 1$. In questo caso la misura cambia:

$$n(t) = [\frac{1}{2}\delta_{1+t} + \frac{1}{2}\delta_{-1-t}]1_{t<1} + \delta_{-1-t}1_{t>1}.$$

che avrà come media:

$$\int_O yn(t,\mathrm{d}y) = 0\, 1_{t\leq 1} + \frac{1}{2}(-1-t)1_{t>1}$$

per tempi t minori di 1, la situazione è identica a prima. Mentre per tempi t maggiori di uno, ora il controllo β porta a far uscire il processo prima del tempo fermandolo a X=2, in modo tale da non incorrere più a costi finale. Inoltre usando un controllo diverso da β, questi dovranno tenere in considerazione costi correnti aggiuntivi dovuti al fatto che rimangono fino al tempo 2. Perciò la coppia (β, n) è una ulteriore soluzione al gioco a campo medio a differenza del caso senza assorbimento.

Bibliografia

[1] L. Campi e M. Fischer. «u N-player games and mean field games with absorption». In: *Ann. Appl. Probab* (2017).

[2] Pierre Cardaliaguet. «Notes on Mean Field Games». In: *seminario tenuto nell'università Tor Vergata, Roma* (Aprile-Maggio 2010).

[3] A. Friedman. *Partial differential equation of parabolic type*. Englewood Cliffs:Prentice Hall, 1964.

[4] Fleming W.H. & Soner H.M. *Controlled Markov processes and viscosity solution*. Springer-Verlag, New-York, 1993.

[5] Anatoli V. Skorokhod Iosif I. Gikhman. *Introduction to the theory of random process*. Philadelphia: Saunders, 1969.

[6] Solonnikov V.A Ladyzenskaja O.A. e Ural'ceva N.N. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. American Mathematical Society, Providence, 1967.

[7] Pierre-Louis Lions Michael G. Crandall Hitoshi Ishii. «user's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations». In: *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 27* (1992).

[8] Fleming W.H. & Rishel R.W. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Springer-Verlag, New York, 1975.