UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI SCIENZE STATISTICHE

TESI DI LAUREA

L'EFFETTO DI FATTORI MACROECONOMICI NELLE CORRELAZIONI CONDIZIONALI DI ALCUNI TITOLI AZIONARI STATUNITENSI

Relatore: Prof. Guglielmo Weber

Correlatore: Dr. Massimiliano Caporin

Laureando:Ran Wei
Matr. N. 492481/SEF

Anno Accademico 2004/2005

INDICE

1. Introduzione……………………………………………………………………......4

2. Fattori macroeconomici e titoli considerati………………………………………..8

2.1 Fattori macroeconomici………...…………………………………………….…8

2.2 Alcuni titoli azionari statunitensi ……….…...……...………………………….9

2.3 Trattamento preliminare dei dati……..……….………………………………10

3. Il trattamento di media e varianza……………………………………………...18

3.1 Trattamento della media condizionale………….……………………………..22

3.2 Trattamento della varianze condizionale............………………………………25

3.3 Applicazione al caso considerato e risultati…….………………………………29

4. La stima delle correlazioni condizionali………………………………………….40

4.1 Applicazione al caso considerato.……………………………………………..42

5. Gli effetti dei fattori macroeconomici sulle correlazioni condizionali……………..48

5.1 Applicazione e risultati………………………………………………………..49

Conclusioni……………………………………………………………………… 52

Bibliografia……………………………………………………………………….62

1 Introduzione

Il presente studio è stato suggerito dalla lettura dell’articolo *Flexible Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH for Asset Allocation*, di Massimiliano Caporin, Monica Billio e Michele Gobbo nel marzo 2004. Si tratta di un lavoro riguardante il trattamento e la stima della correlazione condizionale in modelli GARCH multivariati. I modelli GARCH con correlazioni dinamiche sono stati sviluppati in due principali lavori:

1) Bollerslev(1990) introduce il modello CCC con correlazione costante. In realtà, è possibile verificare che le correlazioni condizionali non sono costanti. Il modello CCC è stato proposto per semplificare la stima di modelli MGARCH e ridurre i parametri da stimare.
2) Engle(2002) ha introdotto il modello DCC introducendo nel modello CCC una limitata dinamica nelle correlazioni. Ancora però non possiamo affermare che il modello DCC di Engle sia un modello ideale, perché Engle assume che i coefficienti stimati siano comuni a tutte le correlazioni condizionali. Questa affermazione è anche supportata dal fatto che correlazioni condizionali tra diversi settori geografici (o tra diversi paesi), generalmente hanno diverso andamento.

L’articolo dal titolo *Flexible Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH for Asset Allocation*, ha discusso e verificato questa caratteristica della dinamica di correlazione condizionale introducendo una matrice a blocchi diagonale per risolvere il problema delle correlazioni condizionali tra Paesi o aree geografiche differenti. Ogni blocco rappresenta un settore geografico e le dinamiche della correlazione condizionale si considerano uguali solo nello stesso gruppo di variabili (cioè nello stesso blocco). Con questo nuovo approccio al modello MGARCH, abbiamo deciso di considerare anche gli effetti che i fattori macroeconomici possono avere (se presi come variabili esogene) sulla dinamica della correlazione condizionale tra i mercati di diversi Paesi ed eventualmente individuare altre variabili che riescano a spiegare ulteriormente la loro dinamica.

La presente tesi è uno studio parziale e preliminare per confermare. Vogliamo dimostrare che nel mercato americano, i fattori macroeconomici possono avere effetti significativi sulle correlazioni dopo avere depurato gli effetti potenziali dei fattori macroeconomici sulla media condizionale e varianza condizionale dei rendimenti di alcuni titoli selezionati.

Questa tesi è suddivisa in quattro sezioni. Nella prima sezione viene considerato il trattamento dei dati originari per eliminare gli outlier, omogeneizzare la scala temporale, calcolare i rendimenti logaritmici. Nella seconda sezione viene affrontato il trattamento della media e della varianza per i rendimenti. In queste analisi, prendiamo i fattori macroeconomici come variabili esogene nel modello VAR e GARCH e depuriamo dai loro effetti potenziali la media condizionale e varianza condizionale dei rendimenti. Nella terza sezione calcoliamo le correlazioni condizionali tra le serie dei residui standardizzati dei rendimenti già depurati dagli effetti potenziali dei fattori macroeconomici attraverso l’influenza sulla media condizionale e varianza condizionale. Nella quarta sezione consideriamo delle regressioni lineari tra le serie di correlazioni condizionali appena stimate ed i quattro fattori macroeconomici come variabili esplicative; analizziamo nel seguito gli effetti di questi quattro fattori macroeconomici sulle correlazioni condizionali.

2. Fattori macroeconomici e titoli considerati

In questo capitolo presentiamo le variabili utilizzate nella tesi.

2.1 Fattori macroeconomici

Nel presente studio, dobbiamo analizzare gli effetti dei fattori macroeconomici su alcuni titoli azionari statunitensi, quindi per prima cosa bisogna scegliere i fattori macroeconomici e i titoli azionari più adatti alle nostre esigenze. Ci sono tanti fattori macroeconomici, per esempio PIL, tasso d'occupazione, tasso d'interesse, tasso di cambio etc.. Siccome stiamo studiando gli effetti sulle correlazioni condizionate dei rendimenti giornalieri, abbiamo bisogno dei fattori macroeconomici giornalieri che sono potenzialmente rilevanti. Abbiamo scelto i seguenti fattori macroeconomici, che sono disponibili come serie storiche giornaliere:

- i valori del tasso di cambio fra yen e dollaro (la serie storica è scaricabile dal sito di ***Federal Reserve Bank of ST.Louis***)
- i valori del tasso di cambio fra euro e dollaro (la serie storica è scaricabile dal sito d'***Eurostat***). Prima del gennaio 1999, non esisteva l'euro, quindi abbiamo sostituito il tasso di cambio Euro/Dollaro con Ecu/Dollaro.

- il prezzo del petrolio del Texas (la serie storica è scaricabile dal sito di ***Datastream***)
- i valori del tasso d'interesse. ***13-weeks treasury bills*** (la serie storica è scaricabile dallo ***Yahoo finance****).*

2.2 Alcuni titoli azionari statunitensi

Abbiamo scelto 5 titoli quotati nella borsa americana (NYSE, Nasdaq) e che entrano nel ***Dow Jones Industrial Average***, i codici dei titoli sono XOM, PFE, MSFT, JPM. MCD (le serie storiche dei prezzi di questi 5 titoli si possono scaricare liberamente da ***Yahoo finance****.).*

- XOM: l'Exxon Mobile Cp. è la più grossa società produttrice di petrolio in America. Nel 2001 era la prima fra le 500 aziende più ricche nel mondo. Quindi, si può affermare che Exxon Moblie è un buon rappresentate dell'industria petrolifera americana.
- PFE: Pfizer Inc. detiene la quota(10%) più grande nel mercato farmaceutico in America e perciò è la leader dell'industria farmaceutica americana.
- MSFT: Microsoft, non ha bisogno di presentazione e rappresenta l'industria d'IT in America.
- JPM: JP-Morgan Chase Cla. Nel 2004, *the Bank One* si è fusa con JP-Morgan Chase & Co e cosi è nata la seconda banca più grossa in America, JP-Morgan Chase Cla. Oggi, JP-Morgan offre una serie di servizi molto completi, dall'investimento fino alla carta di credito. Senza dubbio, JP Morgan è un buon simbolo del servizio finanziario statunitense.

- MCD: una delle catene di *fast food* più famose sia in america che nel mondo. Mcdonalds, rappresenta il servizio di ristorazione americana.

2.3 Trattamento preliminare dei dati

Adesso abbiamo in tutto 9 serie storiche: 5 sono i prezzi di chiusura dei titoli azionari statunitensi e 4 sono dei fattori macroeconomici. In sostanza, dobbiamo realizzare 2 tipi di trattamenti:

--- calcolare i log-rendimenti dei 5 titoli e dei 4 fattori macroeconomici

--- omogeneizzare la scala temporale.

.

2.3.1 Rendimento e Rendimento logaritmico:

Noi lavoriamo con i rendimenti perché la serie del livello di prezzo non è mai stazionaria e in finanza solo l'analisi tecnica lavora principalmente sui prezzi. Poi, dal punto di vista economico, i rendimenti rappresentano l'oggetto più interessante nell'analisi delle serie finanziarie in quanto misurano la redditività.

N.B. Dal punto di vista statistico, di solito il tasso di rendimento non è un *white noise* gaussiano ed esiste un componente μ_t come nella seguente formula:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t \text{, dove } \mu_t = E(r_t / I_{t-1}) \quad \text{e} \quad E(\varepsilon_t / I_{t-1}) = 0$$

dove μ_t è la media condizionale che può dipendere da fattori macroeconomici discussi in precedenza. Su questo ci discuteremo più concretamente nella prossima sezione.

Una formulazione dei rendimenti è data da

$$r_t = \log p_t - \log p_{t-1}$$

r_t si chiama rendimento logaritmico e in realtà è un rendimento composto a tempo continuo. Il rendimento logaritmico ha i seguenti caratteri interessanti:

- r_t non è limitato inferiormente e questo è compatibile con l'ipotesi di normalità dei rendimenti.
- Se rendimenti logaritmici hanno una distribuzione normale, allora, (LnN: log-normale, Rt: rendimento semplice).

$$R_t = \exp\{r_t\} - 1 \sim LnN(E(R_t), Var(R_t)) - 1$$

$$E(R_t) = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\} - 1$$

$$Var(R_t) = \exp\left\{2\mu + \sigma^2\right\} + \left[\exp\left\{\sigma^2\right\} - 1\right]$$

- Con i rendimenti logaritmici, il rendimento multiperiodale diventa una somma di rendimenti uniperiodali.

$$r_t(k) = \ln(1 + R_t(k)) = \ln \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j}) = \sum_{j=0}^{k-1} r_{t-j}$$

- Quando si considerano i rendimenti è possibile che sia più facile stabilizzare la varianza utilizzando il log-rendimento. Ad esempio se:

$$P_t = \mu_t + \varepsilon_t, \ \ \varepsilon_t \sim IND(0; h^2(\mu_t)\sigma_\varepsilon^2)$$

In altre parole, se la varianza della serie varia in funzione della media si cerca una trasformazione g(.) delle ***Pt*** che stabilizzi la varianza, cioè tale che la serie trasformata sia omoschedastica.

$$g(P_t) \cong g(\mu_t) + (P_t - \mu_t) g'(\mu_t)$$

$$Var\left[g(P_t)\right] \cong Var\left[g(\mu_t) + (P_t - \mu_t)g'(\mu_t)\right]$$
$$= g'(\mu_t)^2 Var\left[P_t\right] = g'(\mu_t)^2 h^2(\mu_t)\sigma_\varepsilon^2$$

Per avere la varianza della variabile trasformata costante occorre che

$$g'(\mu_t) = \frac{1}{h(\mu_t)}$$

Se $h(\mu_t)$ è approssimata da μ_t, cioè se la varianza varia proporzionalmente con la media, e se ***Pt*** è sempre positiva allora è possibile procedere con la trasformazione g(***Pt***)=Ln ***Pt*** per stabilizzare la varianza.

- Con uno sviluppo del secondo ordine di ln Pt intorno a Pt-1

$$\ln P_t \approx \ln P_{t-1} + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}\right)^2$$

$$r_t \approx R_t - \frac{R_t^2}{2}$$

Log-rendimenti sono sottostime dei "veri" rendimenti. Generalmente, usiamo log-rendimenti come approssimazione del rendimento semplice, quando i rendimenti sono misurati su intervalli molto piccoli.

N.B. Sui valori del tasso d'interesse, facciamo una semplice differenza $r_t - r_{t-1}$ perchè i valori del tasso d'interesse ***13-weeks treasury bills*** sono interessi alla scadenza. Vediamo la seguente spiegazione:

I prezzi all'istante 1 e 0 devono essere:

$$P_1 = \frac{cedola}{(1+r_1)^T} \quad , \quad P_0 = \frac{cedola}{(1+r_0)^T}$$

Allora,

$$\ln(p_1) - \ln(p_0) = -T\ln(1+r_1) + T\ln(1+r_0) = -T(r_1 - r_0)$$

Ovviamente, il log-rendimento reale deve essere $-T(r_1 - r_0)$ invece noi abbiamo solamente fatto la differenza $r_1 - r_0$. Questo non è un problema perché quando facciamo le regressioni, cioè il trattamento della media, varianza o l’analisi finale sull’effetto dei fattori macroeconomici, i coefficienti del fattore del tasso d’interesse possono riflettere l’assenza dell’effetto di $-T$.

2.3.2 Omogeneizzare la scala temporale

Le serie possono differire per motivi diversi (oltre che per la dimensione campionaria con la quale sono state scaricate): se appartengono a mercati diversi possono esserci festività differenti, i titoli azionari vengono a volte sospesi dalle contrattazioni in presenza di particolari eventi legati alle società e inoltre possono realizzarsi problemi tecnici nei mercati. Tali asimmetrie vanno corrette rendendo le serie omogenee rispetto alle date prima di procedere ad analisi multivariate. Abbiamo preso queste 9 serie storiche da diverse borse e diversi settori, quindi sicuramente ci sono i problemi di scala temporale. Per il trattamento, si usano due approcci:

---- mantenere solo i giorni dove tutte le serie sono trattate;

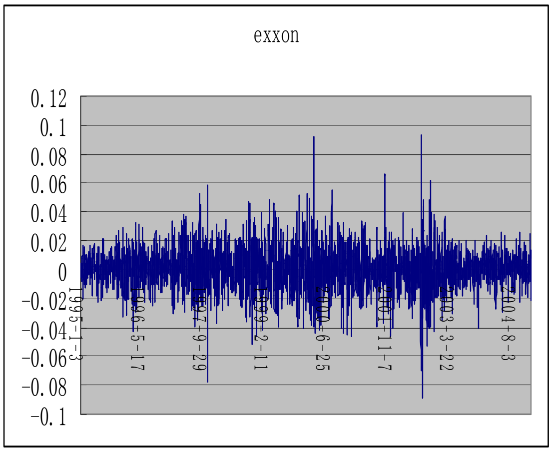
---- introdurre degli zeri nei giorni dove alcune serie non sono trattate;

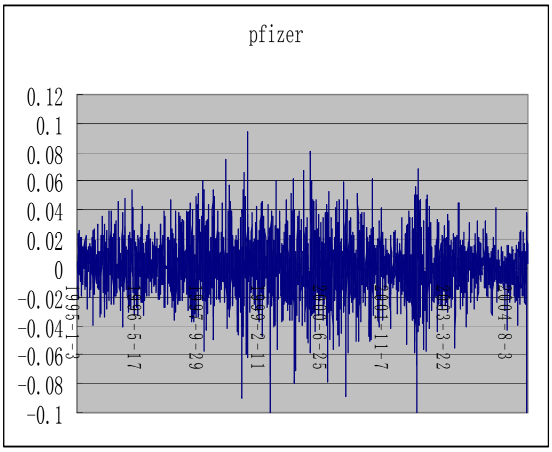
Nel primo caso si eliminano informazioni che possono essere rilevanti, nel secondo s'introducono valori non effettivi. Qui scegliamo il primo approccio.

2.3.3 Applicazione al caso considerato

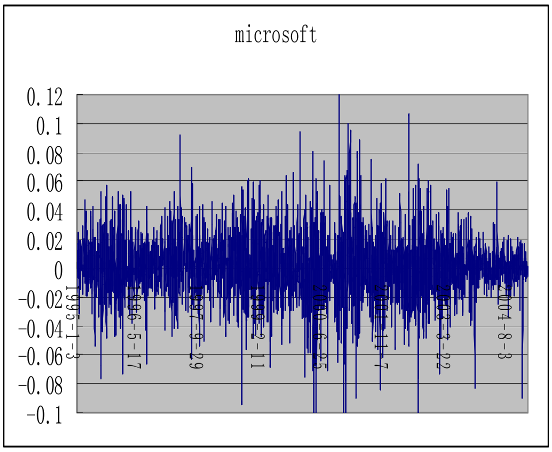
Su queste 9 serie storiche, abbiamo calcolato i log-rendimenti ed eliminato gli *outlier*, cioè i rendimenti standardizzati (calcolati con la varianza non condizionale) maggiori di dieci[1]. Dopo il nostro trattamento preliminare, la dimensione campionaria delle 9 serie è stata ridotta. Ora le nostre osservazioni partono dal 3 Gennaio 1995 fino al 27 Dicembre 2004 e per ogni serie ci sono 2465 osservazioni

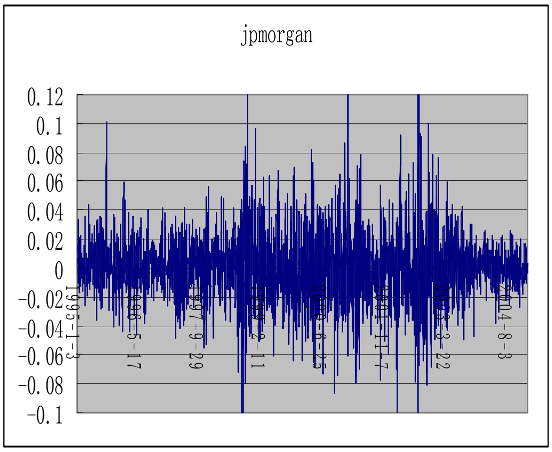
Mostriamo adesso i grafici dei log-rendimenti di 4 fattori macroeconomici e 5 titoli azionari statunitensi.

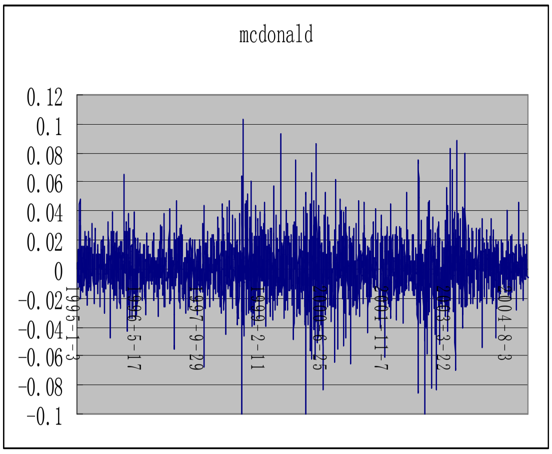


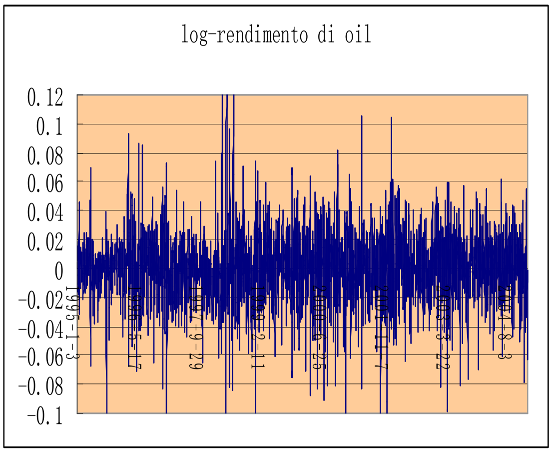


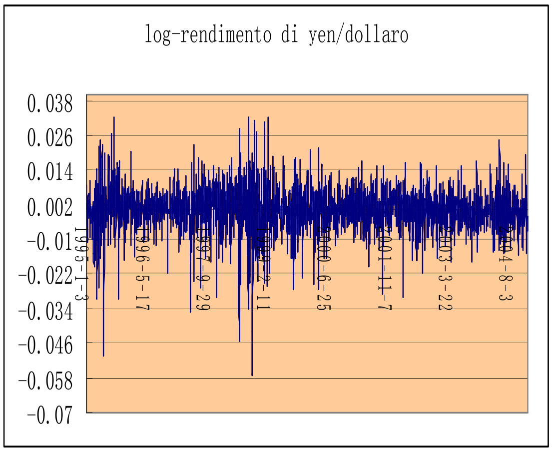
[1] Questa soglia si può scegliere liberamente, e per i log-rendimenti delle serie storiche finanziarie di solito si prende 10 come valore soglia.

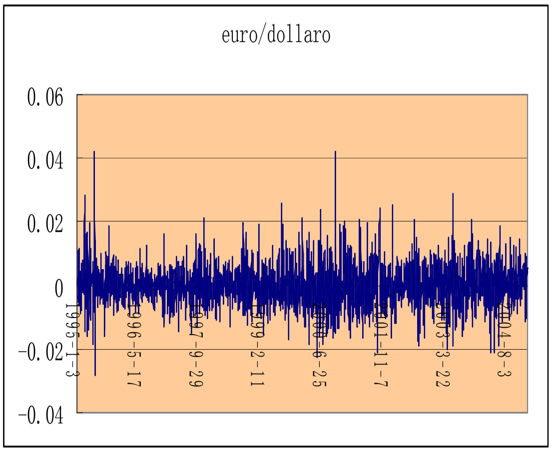

microsoft
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
-0.1
1995-1-3
1996-5-17
1997-9-29
1999-2-11
2000-6-25
2001-11-7
2003-3-22
2004-8-3

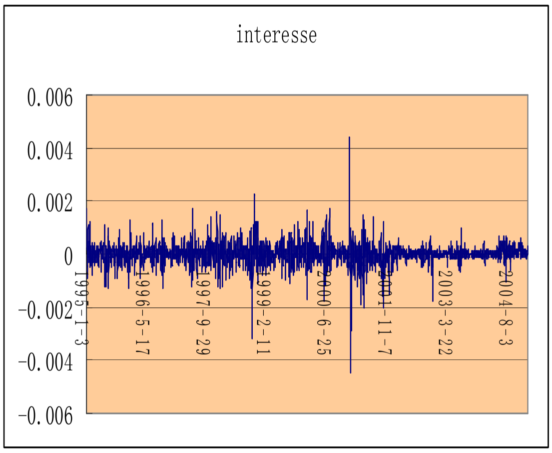

jpmorgan
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
-0.1
1995-1-3
1996-5-17
1997-9-29
1999-2-11
2000-6-25
2001-11-7
2003-3-22
2004-8-3


mcdonald
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
-0.1
1995-1-3
1996-5-17
1997-9-29
1999-2-11
2000-6-25
2001-11-7
2003-3-22
2004-8-3


log-rendimento di oil
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
-0.1
1995-1-3
1996-5-17
1997-9-29
1999-2-11
2000-6-25
2001-11-7
2003-3-22
2004-8-3


log-rendimento di yen/dollaro
0.038
0.026
0.014
0.002
-0.01
-0.022
-0.034
-0.046
-0.058
-0.07
1995-1-3
1996-5-17
1997-9-29
1999-2-11
2000-6-25
2001-11-7
2003-3-22
2004-8-3


euro/dollaro
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
1995-1-3
1996-5-17
1997-9-29
1999-2-11
2000-6-25
2001-11-7
2003-3-22
2004-8-3


interesse
0.006
0.004
0.002
0
-0.002
-0.004
-0.006
1995-1-3
1996-5-17
1997-9-29
1999-2-11
2000-6-25
2001-11-7
2003-3-22
2004-8-3

3. Il trattamento di media e varianza

In generale, la media e la varianza condizionali possono dipendere dai fattori macroeconomici. Quindi, quando analizziamo tali caratteristiche senza considerare questi fattori macroeconomici come variabili esogene, questi possono influire sulle correlazioni condizionali stimate (sia tra i residui della media che tra i residui standardizzati) attraverso la loro influenza potenziale sulla media e la varianza condizionali. Vediamo la seguente spiegazione:

- Tra i rendimenti di due titoli azionari: i residui della media dei rendimenti, i residui standardizzati dei rendimenti e le varianze condizionali(prendiamo titolo1 e titolo 2 come esempio) hanno le seguenti relazioni:

$$h_{i,t} = E_{t-1}(r^2_{i,t}), r_{i,t} = \sqrt{h_{i,t}}\varepsilon_{i,t}, i = 1,2 \qquad (3.1)$$

r_t = t-esimo residuo della media

ε_t = t-esimo residuo standardizzato con media 0 e varianza 1

h_t = t-esima varianza condizionale.

L' espressione della correlazione condizionale tra i residui della media è:

$$\rho_{12,t} = \frac{E_{t-1}(r_{1,t} r_{2,t})}{\sqrt{E_{t-1}(r_{1,t}^2) E_{t-1}(r_{2,t}^2)}} \qquad (3.2)$$

Visto che h_t e ε_t sono indipendenti, possiamo sostituire nella formula (3.2) $r_{i,t}$ della (3.1) e troviamo[2]:

$$\rho_{12,t} = \frac{E_{t-1}(\sqrt{h_{1,t}}\varepsilon_{1,t}\sqrt{h_{2,t}}\varepsilon_{2,t})}{\sqrt{E_{t-1}(h_{1,t}\varepsilon_{1,t}^2) E_{t-1}(h_{2,t}\varepsilon_{2,t}^2)}}$$

$$\rightarrow \qquad \rho_{12,t} = \frac{\sqrt{h_{1,t}}\sqrt{h_{2,t}}E_{t-1}(\varepsilon_{1,t}\varepsilon_{2,t})}{\sqrt{h_{1,t}}\sqrt{h_{2,t}}\sqrt{E_{t-1}(\varepsilon_{1,t}^2) E_{t-1}(\varepsilon_{2,t}^2)}}$$

$$\rightarrow \qquad \rho_{12,t} = \frac{E_{t-1}(\varepsilon_{1,t}\varepsilon_{2,t})}{\sqrt{E_{t-1}(\varepsilon_{1,t}^2) E_{t-1}(\varepsilon_{2,t}^2)}} \qquad (3.3)$$

E' ovvio che la correlazione condizionale tra $r_{1,t}$ e $r_{2,t}$ è la stessa di quella tra $\varepsilon_{1,t}$ e $\varepsilon_{2,t}$.

Poi, $\varepsilon_{i,t}$., i residui standardizzati dei rendimenti,

$$\varepsilon_{i,t} \sim iid(0,1)$$

$$E_{t-1}(\varepsilon_{i,t}^2) = \mathrm{var}(\varepsilon_{i,t} \mid \mathrm{I}_{t-1}) = \mathrm{var}(\varepsilon_{i,t}) = 1$$

[2] R. Engle *Dynamic Conditional correlation- A Simple Class of Multivariate GARCH Models*, July, 1999

allora, $\rho_{12,t} = E_{t-1}(\varepsilon_{1,t}\varepsilon_{2,t})$

Quindi, anche $\rho_{12,t}$ coincide con la covarianza tra $\varepsilon_{1,t}$ e $\varepsilon_{2,t}$.

- Per stimare la correlazione condizionale tra rendimenti a media nulla[3], esistono varie tecniche basato sull'uso di stimatori a finestra mobile. Per esempio si possono usare pesi costanti, ed es. come con il *rolling correlation estimator*[4]. Se applichiamo questo metodo per stimare la correlazione condizionale tra i residui delle medie dei rendimenti, troviamo la seguente formula:

.

$$\hat{\rho}_{12,t} = \frac{\sum_{s=t-n-1}^{t-1} r_{1,s} r_{2,s}}{\sqrt{\left(\sum_{s=t-n-1}^{t-1} r_{1,s}^2\right)\left(\sum_{s=t-n-1}^{t-1} r_{2,s}^2\right)}} \qquad (3.4)$$

Se applichiamo lo stesso metodo per stimare la correlazione condizionale tra i residui standardizzati dei rendimenti, troviamo la seguente formula:

[3] Ovviamente, sia residui delle medie dei rendimenti che i residui standardizzati dei rendimenti soddisfanno questa condizione

[4] Sui metodi di stima di correlazione condizionale, ci discutiamo più concretamente nella prossima sezione.

$$\hat{\rho}_{12,t} = \frac{\sum_{s=t-n-1}^{t-1} \varepsilon_{1,s}\varepsilon_{2,s}}{\sqrt{\left(\sum_{s=t-n-1}^{t-1} \varepsilon_{1,s}^2\right)\left(\sum_{s=t-n-1}^{t-1} \varepsilon_{2,s}^2\right)}} \qquad (3.5)$$

La formula (3.4) e la formula (3.5) devono essere uguali.

Visto che $r_{i,t} = \sqrt{h_{i,t}}\varepsilon_{i,t}$, $\varepsilon_{i,t} = \frac{r_{i,t}}{\sqrt{h_{i,t}}}$,

allora, possiamo sostituire liberamente sia $r_{i,t}$ con $\sqrt{h_{i,t}}\varepsilon_{i,t}$ in (3.4)

ed $\varepsilon_{i,t}$ con $\frac{r_{i,t}}{\sqrt{h_{i,t}}}$ nella formula (3.5).

Risulta allora indifferente calcolare le correlazioni condizionali tra i residui delle medie dei rendimenti o tra i residui standardizzati dei rendimenti se i fattori macroeconomici hanno qualche influenza sulla media condizionale, sulla varianza condizionale o su entrambi i valori. I fattori macroeconomici dopo aver influenzato media e varianza condizionale influenzeranno r_1, r_2 ed $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ che a loro volta, assieme alla varianza condizionale $h_{i,t}$, andranno a determinare la correlazione condizionale.

3.1 Trattamento della media condizionale

3.1.1 Modelli VAR

Per l'analisi della media condizionata, useremo i modelli VAR, cioè modelli autoregressioni vettoriali. I modelli VAR che sono generalizzazioni multivariate di modelli AR univariati, rappresentano in una forma speciale le relazioni simultanee tra variabili e quindi possono essere considerati come forme particolari dei tradizionali sistemi d'equazioni simultanee. In realtà, i modelli VAR sono nati proprio dalle critiche ai tradizionali sistemi d'equazioni simultanee. All'inizio degli anni ottanta, l'economista statunitense C.A.Sims, ha criticato i tradizionali sistemi d'equazioni simultanee con un semplice esempio di studio sul consumo, il reddito e l'investimento (Sims 1980). Le critiche di Sims principalmente erano due:

1) la suddivisione delle variabili in endogene ed esogene è arbitraria, e quindi, per eliminare quest'arbitrarietà, è necessario considerare tutte le variabili come endogene.

2) i modelli simultanei tradizionali sono costruiti aggregando diverse equazioni. Ciascuna equazione definisce una variabile (l'endogena) in funzione delle altre secondo una determinata teoria economica. Ogni equazione è quindi costruita separatamente in base a come si ritiene che l'economia sia strutturata. Quindi ogni equazione del sistema nella sua forma strutturale è costituita come modello d'equilibrio parziale in conformità ad ipotesi economiche che impongono una serie di vincoli. Questi vincoli, però, sono generalmente diversi da equazione ad equazione e quindi possono essere inconsistenti (cioè tra loro contraddittori) quando si considerano le equazioni simultanee (non possono essere costruiti aggregando equazioni che rappresentano modelli d'equilibrio parziale). Tali equazioni devono molto più semplicemente definire una variabile in

funzione di tutte le altre. Con le sue critiche, Sims ha proposto un modello che fa dipendere linearmente l'insieme (vettore) di variabili y_t al tempo t da se stesso ritardato di una, due,……P unità temporali. Il modello VAR a p ritardi si definisce come:

$$y_t = c + \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \cdots + \Phi_p y_{t-p} + r_t \qquad (3.6)$$

$$r_t \sim iidN(0, \Omega)$$

- $Y_t \in \mathbf{R}^n$ è il vettore di variabili all'istante t con dimensione $n \times 1$(cioè, ci sono n variabili endogene) e
- ***C*** è il vettore di intercetta.
- Ci sono pn^2 parametri(escludendo ***C***) visto che Φ_i è una matrice quadrata d'ordine n.

Sfruttando l'operatore di ritardo L, il modello può essere scritto nella forma compatta:

$$\Phi(L) y_t = c + r_t$$

$$\Phi(L) = \Phi_0 L^0 - \Phi_1 L^1 - \cdots - \Phi_P L^P$$

$$\Phi_0 = \mathrm{I}.$$

Si vede che modelli VAR sono generalizzazioni multivariate di modelli AR univariati. Per la stima dei coefficienti, si può usare il metodo dei minimi quadrati.

3.1.2 Modelli VARX

I modelli VARX sono modelli VAR in cui vengono introdotte delle variabili esogene. Essi sono definiti de

$$y_t = c + \Phi_1 y_{t-1} + \cdots + \Phi_p y_{t-p} + \Theta_1 X_{t-1} + \cdots + \Theta_q X_{t-q} + r_t \quad (3.7)$$

- $Y_t \in \mathbf{R}^n$ e come prima, è il vettore di variabili endogene all'istante t, con dimensione $n \times 1$.
- $X_t \in \mathbf{R}^k$, è il vettore di variabili esogene all'istante t con dimensione $k \times 1$, cioè, ci sono k variabili esogene.
- $C \in \mathbf{R}^n$, è il vettore delle intercette.
- Φ_i rappresenta una matrice di coefficienti delle variabili endogene con dimensione $n \times n$.
- Θ_j rappresenta una matrice di coefficienti delle variabili esogene con dimensione $n \times k$.
- $r_t \in \mathbf{R}^n$ è il vettore di residui con dimensione $n \times 1$.

Per la correttezza di questo modello, la seguente condizione deve essere soddisfatta

$$E\left[r_t \middle| \{Y_{t-j}\}_{j=1}^{\infty}, \{X_{t-i}\}_{i=1}^{\infty} \right] = 0 (\in \mathbf{R}^n) \quad (3.8)$$

Se inoltre, se X_t stesso è esprimibile come un modello VAR, cioè

$$X_t = a + A_1 X_{t-1} + \cdots A_r X_{t-r} + V_t, \quad (3.9)$$

$$E\left[Vt \middle| \left\{Y_{t-j}\right\}_{j=1}^{\infty}, \left\{X_{t-i}\right\}_{i=1}^{\infty}\right] = 0(\in \mathbf{R}^k)$$

Allora, per y_t, X_t è una variabile debolmente esogena . Inserendo X_t in (3.7) si avrà che

$$y_t = c + \Phi_1 y_{t-1} + \cdots + \Phi_p y_{t-p} + \Theta_0 X_t + \Theta_1 X_{t-1} + \cdots + \Theta_q X_{t-q} + r_t \quad (3.10)$$

Sostituendo l'espressione (3.9) nell' eq. (3.10) si ottiene:

$$y_t = c + \Theta_0 a + \Phi_1 y_{t-1} + \cdots + \Phi_p y_{t-p} + \Theta_0 \left(A_1 X_{t-1} + \cdots A_r X_{t-r}\right)$$
$$+ \Theta_1 X_{t-1} + \cdots + \Theta_q X_{t-q} + r_t + \Theta_0 V_t$$

che coincide con l'equazione (3.7). Quindi, sebbene senza una componente contemporanea X_t, la formula (3.7) non perde di generalità.

3.2 Trattamento della varianza condizionale

3.2.1 Modelli GARCH

I rendimenti di un'attività finanziaria sono generalmente incorrelati, ma certamente non sono indipendenti. In particolare questa dipendenza si manifesta soprattutto nei momenti secondi dei rendimenti che condizionatamente all'informazione disponibile, variano con t. Pertanto il modello a varianza condizionale costante non va bene. Per questo motivo Engle (1982) propone un modello a varianza condizionale non constate (ARCH).

L'idea alla base di un modello ARCH è che i residui della media dei rendimenti siano serialmente incorrelati ma dipendenti, e la dipendenza dei residui possa essere descritta da una semplice funzione quadratica dei suoi valori ritardati. Un modello ARCH(m) è costituito dalle seguenti equazioni:

$$y_t = \mu_t + r_t$$

$$r_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t$$

$$h_t = \mathrm{var}(r_t / I_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m r_{t-m}^2$$

in cui r_t rappresenta residui della media condizionate del rendimento. L'errore ε_t è una v.c iid(0,1). Per garantire la possibilità di h_t è necessario che valga che $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_i \geq 0$ per $i > 0$. I coefficienti α_i devono soddisfare alcuni vincoli per garantire che la varianza non condizionata di r_t sia finita.

Inoltre, nella pratica, si assume spesso che la distribuzione di ε_t sia normale o t di *student.*

Il modello GARCH(*Generalized Autoregressive conditional Heteroskedasticity*), dovuto a Bollerslev (1986) riguarda una generalizzazione del modello ARCH. L'idea di Bollerslev è stata quella di riprodurre la parsimonia del modello ARMA rispetto alle rappresentazioni AR o MA in termini del numero di parametri utilizzati. Rispetto al modello presentato di Engle, si introducono i valori ritardi della varianza condizionata, in modo da risparmiare parametri da stimare rispetto alla struttura ARCH. Il GARCH(m, s) è perciò un modello in cui la varianza condizionata al tempo t è una combinazione lineare di p ritardi dei residui al quadrato ricavati dall'equazione della media condizionata e di q ritardi della varianza condizionale. In sintesi, il modello GARCH(m,s) può essere espresso come

$$r_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j h_{t-j}$$

$$\alpha_0 > 0,\ \alpha_i \geq 0,\ \beta_j \geq 0, \text{ e } \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$$

L'ultima condizione implica che la varianza non condizionata di r_t sia finita (stazionarità di r_t). Chiaramente se $s = 0$ il modello si riduce ad un ARCH(m).

Consideriamo ora il problema delle previsione delle varianze condizionali. Prendiamo un GARCH(1,1) come esempio. Se T è l'ultimo periodo osservato, allora, possiamo scrivere

$$h_{T+1} = \alpha_0 + \alpha_1 r_T^2 + \beta_1 h_T$$

E quindi la previsione diventa

$$h_T(1) = \alpha_0 + \alpha_1 r_T^2 + \beta_1 h_T$$

perché r_T^2 e h_T sono note al tempo T.

Per previsioni a più passi in avanti, conviene riscrivere l'equazione per la volatilità, sfruttando che $r_t^2 = h_t \varepsilon_t^2$. Ne segue che

$$h_{T+2} = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) h_{T+1} + \alpha_1 h_{T+1} (\varepsilon_{T+1}^2 - 1)$$

Pertanto, dato che $E(\varepsilon_{T+1}^{2}-1/I_T)=0$, si ottiene

$$h_T(2)=\alpha_0+(\alpha_1+\beta_1)h_T(1)$$

In generale abbiamo che le previsione ad l passi in avanti

$$h_T(l)=\alpha_0+(\alpha_1+\beta_1)h_T(l-1), \quad \text{per } l>1.$$

e inoltre, se $l\rightarrow\infty$

$$h_T(l)\rightarrow\frac{\alpha_0}{1-(\alpha_1+\beta_1)}$$

che è la varianza non condizionata di r_t.

Per la stima dei parametri, in generale si usano metodi basati sulle funzione verosimiglianza. Le stime si ottengono da

$$\arg\max\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{T}\log h_t-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{T}\frac{r_t^2}{h_t}\right\}$$

$$s.t.\quad \omega+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i r_{t-i}^2+\sum_{j=1}^{q}\beta_i h_{t-j}=h_t \qquad \forall t=1,\cdots,T$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{\max\{p,q\}}\alpha_i+\beta_i\le 1\\ \omega\ge 0\\ \alpha_i\ge 0 \qquad \forall i=1,\cdots,p\\ \beta_i\ge 0 \qquad \forall i=1,\cdots,q\end{cases}$$

La costruzione di un modello GARCH è analoga a quella per un modello ARCH, tuttavia la specificazione dell'ordine di un modello GARCH non risulta semplice. Nella maggior parte delle applicazioni è sufficiente un GARCH di basso ordine, ad es.,GARCH(1,1) GARH(2,1), GARCH(1,2)

3.2.2 GARCH con variabili esogene

Cosi come per i modelli ARMA e VAR, anche ai modelli GARCH si possono aggiungere variabili esogene (Engle1996), perché le variabili esogene hanno qualche effetto potenziale sui residui GARCH. Una possibile espressione del modello GARCH con variabili esogene è:

$$y_t = \mu_t + r_t$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j h_{t-j} + \varphi X_{t-1}$$

X_{t-1} = variabili esogene con ritardo uno

In pratica, il volume d'affari, il tasso d'interesse e la volatilità d'altre serie storiche sono sempre trattate come variabili esogene di un modello GARCH.

3.3 Applicazioni e risultati

Trattamento della media condizionale: Usiamo modelli VARX per modellare la media condizionale. Le variabili endogene sono:

- Rexxon:log-rendimenti di Exxon
- Rjpmorgan:log-rendimenti di JP-Morgan

- Rmicrosoft:log-rendimenti di Microsoft
- Rpfizer:log-rendimenti di Pfizer
- Rmcdonalds:log-rendimenti di Mcdonald's

Le variabili esogene sono:

- Ryen:log-rendimenti di tasso di cambio yen/dollaro
- Recu:log-rendimenti di tasso di cambio euro/dollaro
- Roil:log-rendimento di petrolio di Texas
- Δ interesse: il tasso d'interesse(differenza prima)

La specificazione del VARX prevede un "lag" delle variabili sia endogene che esogene[5].

Il trattamento della varianza condizionale: Dopo il trattamento della media condizionale, prendiamo i residui di VARX, cioè i residui delle medie dei 5 titoli, e su ogni serie dei residui, stimiamo un modello GARCH con le stesse variabili esogene del modello VARX:

- Ryen
- Recu
- Roil
- Δ interesse

Poi, prendiamo i residui standardizzati dei rendimenti.

[5] Abbiamo preso ritardo uguale a 1 per semplificare l'analisi.

Risultati: Dal modello VARX che abbiamo stimato, si nota che come variabili esogene (se prediamo 95% come intervallo di confidenza), solo il log-rendimento del petrolio preso con ritardo uno, ha un'influenza significativa sulla media condizionale del log-rendimento Exxon. Questo risultato potevamo aspettarcelo visto che Exxon è un impresa petrolifera.

Invece dai modelli GARCH che abbiamo stimato (con 95% come intervallo di confidenza) si nota che come variabili esogene, il tasso d'interesse preso con ritardo uno ha un'influenza significativa sulla varianza condizionale dei residui della media del rendimento di JP-Morgan e il log-rendimento di petrolio preso con un ritardo ha un'influenza significativa sulla varianza condizionale dei residui della media del rendimento di Microsoft e McDonald's.

Nota: Abbiamo la seguente tabella d'output di E-views come una descrizione della statistica descrittiva dei residui standardizzati dei rendimenti:

	Exxon	JPmorgan	McDonald's	Microsoft	Pfizer
Mean	0.000890	0.002787	0.003386	0.001832	-0.003350
Median	0.017135	-0.005705	-0.023857	-0.033525	-0.020145
Maximum	3.749764	6.482616	5.254966	6.881661	3.348844
Minimum	-5.364471	-6.038424	-6.041834	-5.877176	-6.788008
Std. Dev.	1.000400	1.001542	1.001505	1.000121	1.000004
Skewness	-0.121297	-0.039719	-0.096464	0.023313	-0.219175
Kurtosis	3.712356	4.996050	5.754545	5.735416	4.556629
Jarque-Bera	58.11689	409.5278	782.4889	768.1145	268.3894
Probability	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Dall’esame delle statistiche descrittive di cui alla tabella emergono le seguenti considerazioni: innanzi tutto l’ipotesi nulla di distribuzione normale dei rendimenti è rifiutata in modo netto per tutti gli indici in quanto la statistica test di Jarque-Bera assume valori talmente elevati che il p-value corrispondente è nullo praticamente in tutti i casi. La causa principale di tale rifiuto risiede soprattutto nell’eccesso di curtosi che caratterizza tutte le serie e anche asimmetria. Sarebbe più giusto considerare i residui standardizzati con una distribuzione t-student.

Stime del modello VARX e dei modelli GARCH:

Date: 05/12/05 Time: 20:48					
Sample(adjusted): 3 2465					
Included observations: 2463 after adjusting endpoints					
Standard errors & t-statistics in parentheses					
	REXXON	RJPMORGAN	RMCDONALD	RMICROSOFT	RPFIZER
REXXON(-1)	-0.046467	0.010344	0.018706	0.023491	0.015721
	(0.02226)	(0.03482)	(0.02705)	(0.03477)	(0.02954)
	(-2.08728)	(0.29707)	(0.69151)	(0.67566)	(0.53219)
RJPMORGAN(-1)	-0.023036	-0.031531	-0.011833	-0.046610	0.001043
	(0.01464)	(0.02291)	(0.01780)	(0.02287)	(0.01943)
	(-1.57297)	(-1.37649)	(-0.66498)	(-2.03791)	(0.05367)
RMCDONALD(-1)	0.030638	0.095605	0.016604	0.018375	0.008638
	(0.01745)	(0.02730)	(0.02121)	(0.02726)	(0.02316)
	(1.75534)	(3.50192)	(0.78290)	(0.67408)	(0.37297)
RMICROSOFT(-1)	-0.032849	0.014503	-0.011401	-0.005471	-0.013729

	(0.01435)	(0.02245)	(0.01744)	(0.02241)	(0.01904)
	(-2.28891)	(0.64610)	(-0.65382)	(-0.24409)	(-0.72094)
RPFIZER(-1)	-0.015035	0.024801	0.012137	-0.025249	0.016744
	(0.01675)	(0.02619)	(0.02035)	(0.02615)	(0.02222)
	(-0.89785)	(0.94687)	(0.59650)	(-0.96547)	(0.75354)
C	0.000514	0.000436	0.000324	0.000682	0.000594
	(0.00031)	(0.00048)	(0.00037)	(0.00048)	(0.00041)
	(1.66761)	(0.90406)	(0.86466)	(1.41788)	(1.45262)
RECU(-1)	-0.030118	-0.016196	-0.042258	-0.044978	0.014080
	(0.04970)	(0.07773)	(0.06039)	(0.07762)	(0.06595)
	(-0.60602)	(-0.20835)	(-0.69978)	(-0.57950)	(0.21351)
RYEN(-1)	0.070945	0.008355	0.002971	0.057767	0.078761
	(0.04234)	(0.06623)	(0.05145)	(0.06613)	(0.05619)
	(1.67557)	(0.12615)	(0.05774)	(0.87359)	(1.40181)
ROIL(-1)	0.026653	0.033389	-0.018170	-0.000636	-0.012505
	(0.01274)	(0.01992)	(0.01548)	(0.01989)	(0.01690)
	(2.09242)	(1.67580)	(-1.17391)	(-0.03195)	(-0.73981)
Δ interesse (-1)	-0.332273	0.359185	0.285116	-1.799898	-0.374935
	(0.75611)	(1.18268)	(0.91876)	(1.18086)	(1.00334)
	(-0.43945)	(0.30370)	(0.31033)	(-1.52423)	(-0.37369)
R-squared	0.012892	0.008111	0.001715	0.004332	0.001832
Adj. R-squared	0.009270	0.004472	-0.001947	0.000679	-0.001830
Sum sq. resids	0.571802	1.398957	0.844257	1.394654	1.006850
S.E. equation	0.015268	0.023881	0.018552	0.023844	0.020260
F-statistic	3.559586	2.228754	0.468303	1.185937	0.500318
Log likelihood	6810.466	5708.657	6330.596	5712.451	6113.697
Akaike AIC	-5.522100	-4.627411	-5.132437	-4.630492	-4.956311
Schwarz SC	-5.498514	-4.603826	-5.108851	-4.606906	-4.932726

Mean dependent	0.000471	0.000489	0.000321	0.000673	0.000606
S.D. dependent	0.015339	0.023935	0.018534	0.023852	0.020241
Determinant Residual Covariance			6.19E-18		
Log Likelihood			31321.50		
Akaike Information Criteria			-25.39302		
Schwarz Criteria			-25.27509		

RESID01: residui della media del rendimento di Exxon

Dependent Variable: RESID01				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
	Variance Equation			
C	2.33E-06	6.57E-07	3.542548	0.0004
ARCH(1)	0.062200	0.007392	8.415069	0.0000
GARCH(1)	0.928879	0.008183	113.5155	0.0000
R-squared	0.000000	Mean dependent var		
Adjusted R-squared	-0.000813	S.D. dependent var		
S.E. of regression	0.015246	Akaike info criterion		
Sum squared resid	0.571802	Schwarz criterion		
Log likelihood	7006.883	Durbin-Watson stat		

RESID02: residui della media del rendimento di JP-morgan

Dependent Variable: RESID02				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
	Variance Equation			
C	2.69E-06	8.30E-07	3.236991	0.0012
ARCH(1)	0.050755	0.004692	10.81671	0.0000
GARCH(1)	0.945451	0.005446	173.5991	0.0000
Δinteresse (-1)	-0.018423	0.007479	-2.463303	0.0138
R-squared	0.000000	Mean dependent var		5.93E-19
Adjusted R-squared	-0.001220	S.D. dependent var		0.023837
S.E. of regression	0.023852	Akaike info criterion		-4.885202
Sum squared resid	1.398957	Schwarz criterion		-4.875768
Log likelihood	6020.127	Durbin-Watson stat		2.005216

RESID03: residui della media del rendimento di McDonald's

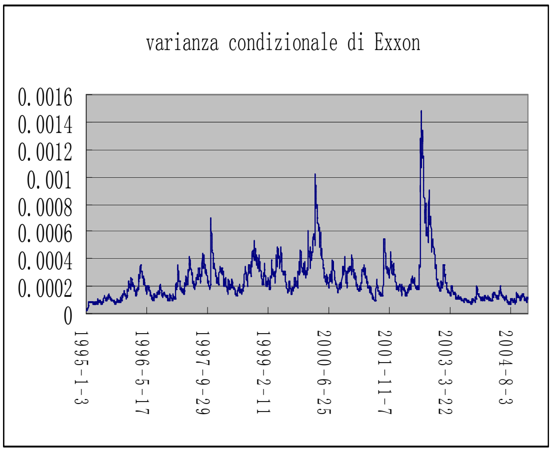
Dependent Variable: RESID03				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
	Variance Equation			
C	2.90E-06	6.80E-07	4.268885	0.0000
ARCH(1)	0.038716	0.004353	8.893157	0.0000
GARCH(1)	0.953339	0.005054	188.6377	0.0000
ROIL(-1)	0.000218	8.43E-05	2.591946	0.0095
R-squared	0.000000	Mean dependent var		3.30E-19
Adjusted R-squared	-0.001220	S.D. dependent var		0.018518
S.E. of regression	0.018529	Akaike info criterion		-5.238862
Sum squared resid	0.844257	Schwarz criterion		-5.229428
Log likelihood	6455.658	Durbin-Watson stat		1.997520

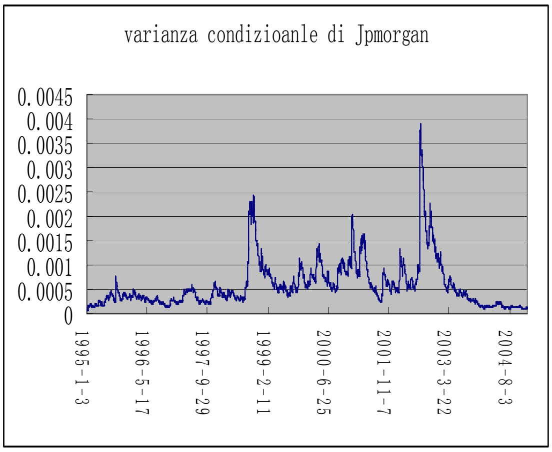
RESID04: residui della media del rendimento di Microsoft

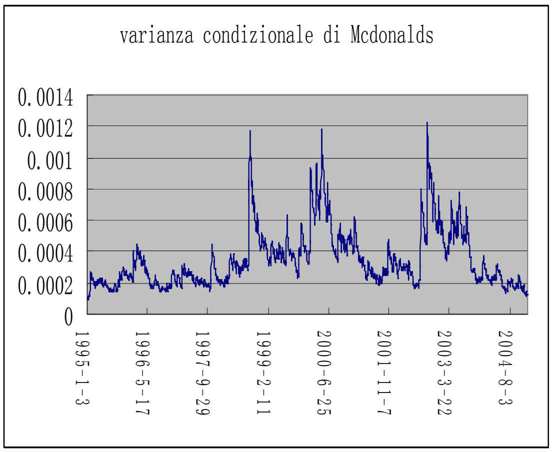
Dependent Variable: RESID04				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
	Variance Equation			
C	9.24E-06	1.48E-06	6.255826	0.0000
ARCH(1)	0.073731	0.006313	11.67965	0.0000
GARCH(1)	0.913484	0.007584	120.4548	0.0000
ROIL(-1)	-0.000633	0.000140	-4.526637	0.0000
R-squared	0.000000	Mean dependent var		-4.63E-19
Adjusted R-squared	-0.001220	S.D. dependent var		0.023801
S.E. of regression	0.023815	Akaike info criterion		-4.782533
Sum squared resid	1.394654	Schwarz criterion		-4.773098
Log likelihood	5893.689	Durbin-Watson stat		1.999310

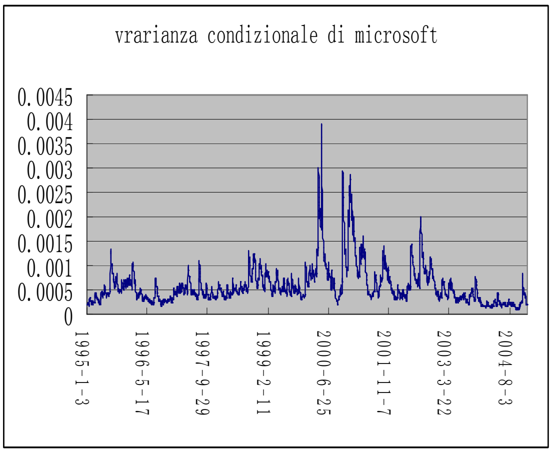
RESID05: residui della media del rendimento di Pfizer

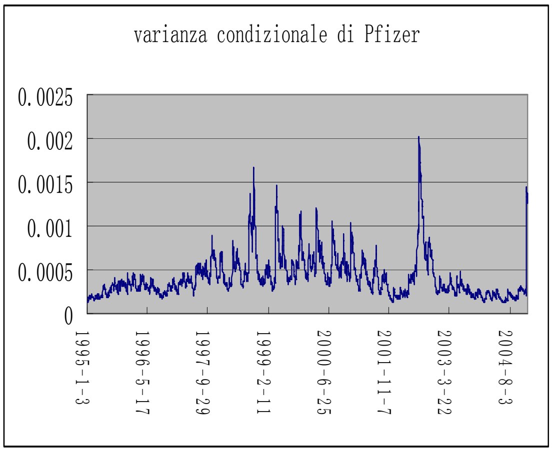
Dependent Variable: RESID05				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
	Variance Equation			
C	7.56E-06	1.68E-06	4.495567	0.0000
ARCH(1)	0.072727	0.007854	9.259363	0.0000
GARCH(1)	0.911099	0.010458	87.11764	0.0000
R-squared	0.000000	Mean dependent var		-1.53E-18
Adjusted R-squared	-0.000813	S.D. dependent var		0.020223
S.E. of regression	0.020231	Akaike info criterion		-5.081205
Sum squared resid	1.006850	Schwarz criterion		-5.074130
Log likelihood	6260.505	Durbin-Watson stat		1.995096

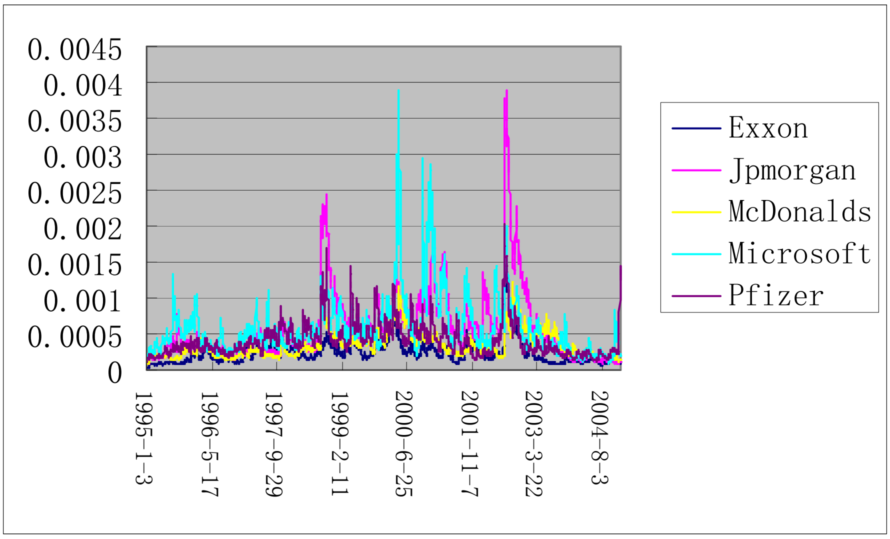

varianza condizionale di Exxon
0.0016
0.0014
0.0012
0.001
0.0008
0.0006
0.0004
0.0002
0
1995-1-3
1996-5-17
1997-9-29
1999-2-11
2000-6-25
2001-11-7
2003-3-22
2004-8-3


varianza condizioanle di Jpmorgan
0.0045
0.004
0.0035
0.003
0.0025
0.002
0.0015
0.001
0.0005
0
1995-1-3
1996-5-17
1997-9-29
1999-2-11
2000-6-25
2001-11-7
2003-3-22
2004-8-3


varianza condizionale di Mcdonalds
0.0014
0.0012
0.001
0.0008
0.0006
0.0004
0.0002
0
1995-1-3
1996-5-17
1997-9-29
1999-2-11
2000-6-25
2001-11-7
2003-3-22
2004-8-3


vrarianza condizionale di microsoft
0.0045
0.004
0.0035
0.003
0.0025
0.002
0.0015
0.001
0.0005
0
1995-1-3
1996-5-17
1997-9-29
1999-2-11
2000-6-25
2001-11-7
2003-3-22
2004-8-3


varianza condizionale di Pfizer
0.0025
0.002
0.0015
0.001
0.0005
0
1995-1-3
1996-5-17
1997-9-29
1999-2-11
2000-6-25
2001-11-7
2003-3-22
2004-8-3


0.0045
0.004
0.0035
0.003
0.0025
0.002
0.0015
0.001
0.0005
0
1995-1-3
1996-5-17
1997-9-29
1999-2-11
2000-6-25
2001-11-7
2003-3-22
2004-8-3
Exxon
Jpmorgan
McDonalds
Microsoft
Pfizer

4. La stima delle correlazioni condizionali tra i rendimenti dei 5 titoli

Se k_1 e k_2 sono 2 variabili stocastiche con media nulla, allora la correlazione tra 2 variabili è data da

$$\rho_{12} = \frac{E(k_1 k_2)}{\sqrt{E(k_1^2)E(k_2^2)}}$$

mentre la correlazione condizionale tra 2 variabili è:

$$\rho_{12,t} = \frac{E_{t-1}(k_{1,t} k_{2,t})}{\sqrt{E_{t-1}(k_{1,t}^2)E_{t-1}(k_{2,t}^2)}}$$

Ovviamente, i residui delle medie dei rendimenti ed i residui standardizzati dei rendimenti dei titoli azionari sono variabili stocastiche con media nulla ed è quindi possibile applicare queste 2 formule. Nella sezione precedente, abbiamo già dimostrato che la correlazione condizionale tra residui delle medie e residui standardizzati dei rendimenti di 2 titoli sono uguali, cioè:

$$\rho_{12,t} = \frac{E_{t-1}(r_{1,t} r_{2,t})}{\sqrt{E_{t-1}(r_{1,t}^2) E_{t-1}(r_{2,t}^2)}} = \frac{E_{t-1}(\varepsilon_{1,t} \varepsilon_{2,t})}{\sqrt{E_{t-1}(\varepsilon_{1,t}^2) E_{t-1}(\varepsilon_{2,t}^2)}}$$

dove, come prima, $r_{i,t}$ rappresenta i residui della media del rendimento e $\varepsilon_{i,t}$ rappresenta i residui standardizzati del rendimento.

Per stimare la correlazione condizionale $\rho_{12,t}$, l'idea è stimare i valori attesi condizionali di $(r_{1t} \cdot r_{2t}), (r_{1,t}^2), (r_{2,t}^2)$ o di .$(\varepsilon_{1,t} \varepsilon_{2,t}), (\varepsilon_{1,t}^2), (\varepsilon_{2,t}^2)$. Ci sono vari metodi per ottenere tali stima. La più popolare è la stima basata su finestre mobili a pesi uguali (prendiamo $r_{i,t}$, i residui della media del rendimento come esempio) :

$$\hat{\rho}_{12,t} = \frac{\sum_{s=t-n-1}^{t-1} r_{1,s} r_{2,s}}{\sqrt{\left(\sum_{s=t-n-1}^{t-1} r_{1,s}^2\right)\left(\sum_{s=t-n-1}^{t-1} r_{2,s}^2\right)}} \qquad (4.1)$$

Si vede che questa formula da lo stesso peso alle osservazioni negli n periodi. Lo stimatore sta sempre all'intervallo [-1，1], anche se non è chiaro sotto quali ipotesi, la stima è consistente.[6]

In alternativa al metodo descritto sopra è possibile usare lo smoother esponenziale. Questa stima si basa sull'uso di pesi decrescenti per le osservazioni più vecchie. Il peso

---

[6] R. Engle *Dynamic Conditional correlation- A Simple Class of Multivariate GARCH Models*, July, 1999.

dipende da un parametro λ. Il problema dello smoother esponenziale sta nello scegliere il valore ottimale per λ.

$$\hat{\rho}_{12,t} = \frac{\sum_{s=1}^{t-1} \lambda^{t-s-1} r_{1,s} r_{2,s}}{\sqrt{\left(\sum_{s=1}^{t-1} \lambda^{t-s-1} r_{1,s}^2\right)\left(\sum_{s=1}^{t-1} \lambda^{t-s-1} r_{2,s}^2\right)}}$$

Nota: Nelle recenti letture, ci si propone di stimare le correlazioni condizionali attraverso il modello GARCH ortogonale e multivariato, anche se nel presente studio, non li presentiamo.

4.1 Applicazione

Nel presente studio, stimiamo le correlazioni condizionali a due a due dei cinque rendimenti standardizzati dei titoli oggetti di studio con la seguente espressione[7]:

$$\hat{\rho}_{12,t} = \frac{\sum_{s=t-n}^{t} \varepsilon_{1,s} \varepsilon_{2,s}}{\sqrt{\left(\sum_{s=t-n}^{t} \varepsilon_{1,s}^2\right)\left(\sum_{s=t-n}^{t} \varepsilon_{2,s}^2\right)}} \qquad (4.2)$$

---

[7] Si vede che la dimensione della finestra è [t-n， t] diversamente dalla formula (1) [t-n-1, t-1], cioè s’include anche il rendimento standardizzato dell’istante t.

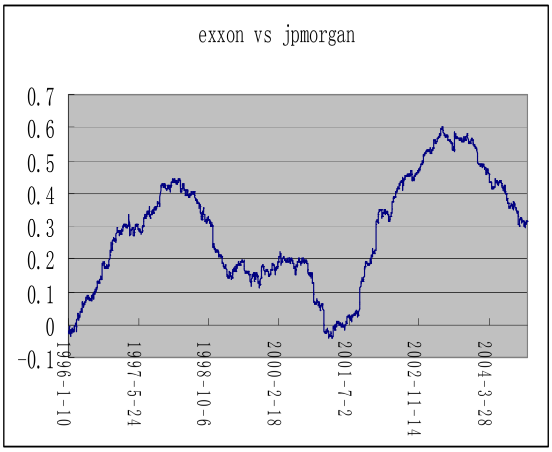
Abbiamo scelto una finestra mobile di dimensione 250 giorni.

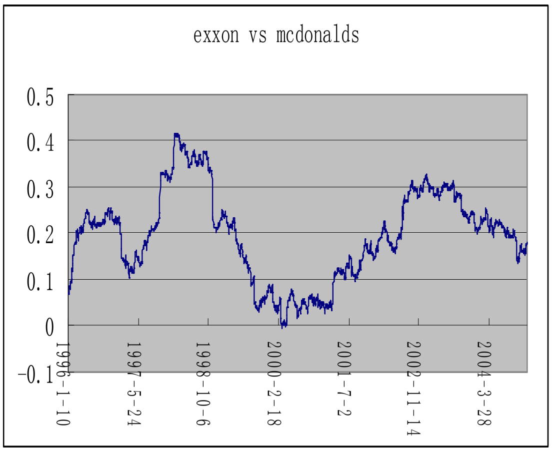
Per applicare la formula (4.2), usiamo un ciclo descritto da:

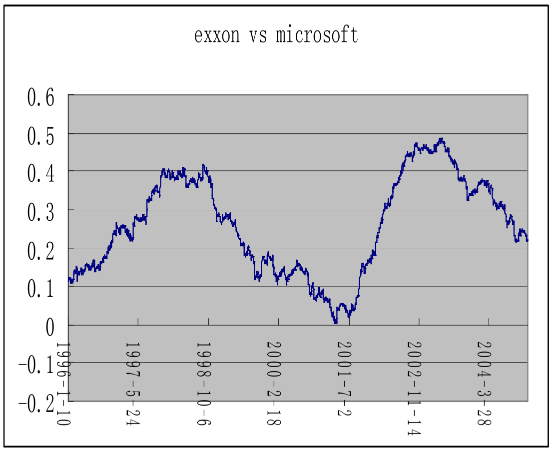
```
n=250
d=dim(serie1)
c=cor(serie1[1:n],serie2[1:n])
for (i in (n+1):d) {c1=cor(serie1[(i-n):i],serie2[(i-n):i]) c=rbind(c,c1)}
correlazioni condizionali=c
```

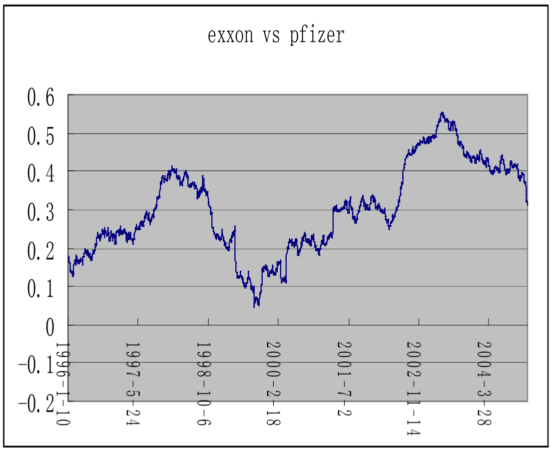
Con questo loop vogliamo stimare le correlazioni non condizionali delle serie storiche di diversi periodi. Ogni finestra è di 250 giorni e ogni periodo aggiungiamo un'osservazione mantenendo l'ampiezza della finestra invariata. La correlazione non condizionale tra due serie storiche è un'approssimazione della correlazione condizionale dell'ultima osservazione del periodo. Cioè, 1:250 è la stima di correlazione condizionale dell'istante 250, 2:251 è la stima dell'istante 251 e cosi via.

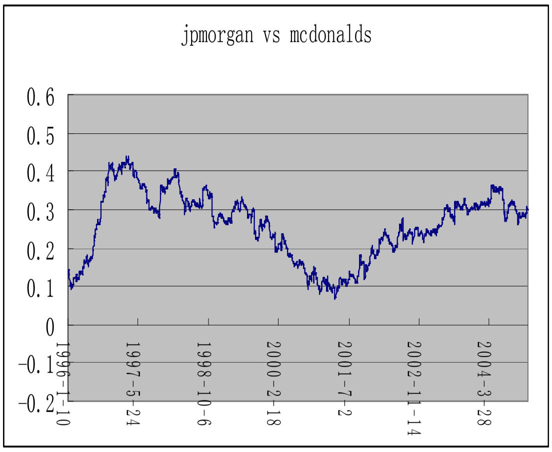
Adesso mostriamo i grafici di correlazioni condizionali stimate tra ogni 2 serie di rendimenti standardizzati:

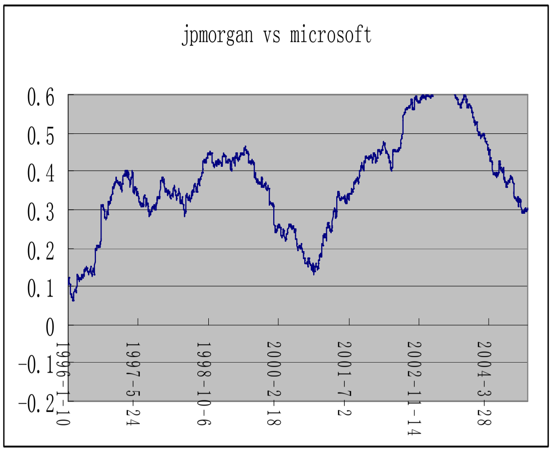


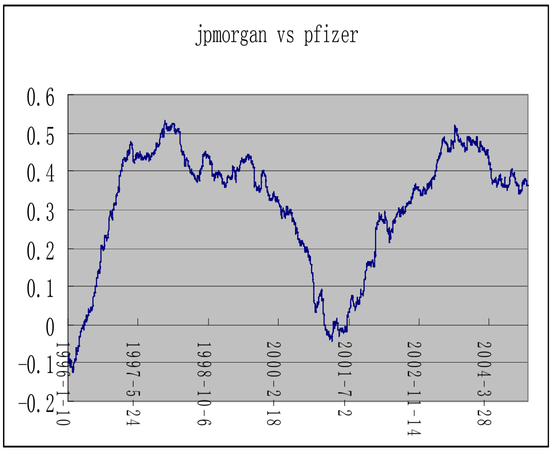


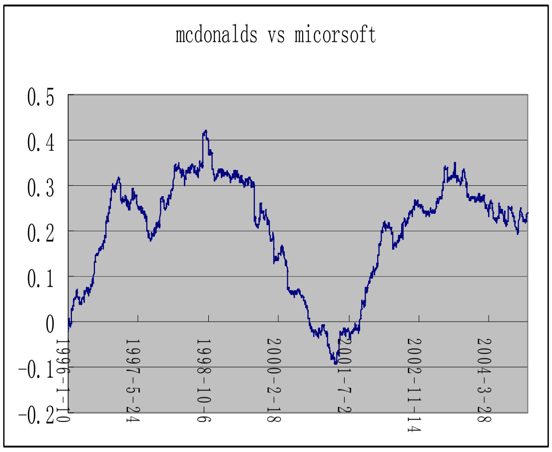


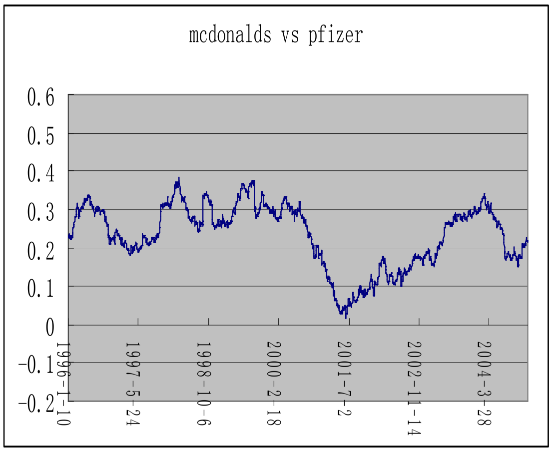


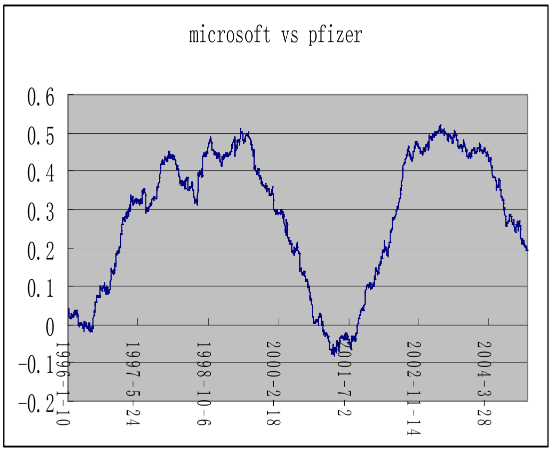

jpmorgan vs mcdonalds
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
1996-1-10
1997-5-24
1998-10-6
2000-2-18
2001-7-2
2002-11-14
2004-3-28


jpmorgan vs microsoft
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
1996-1-10
1997-5-24
1998-10-6
2000-2-18
2001-7-2
2002-11-14
2004-3-28


jpmorgan vs pfizer
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
1996-1-10
1997-5-24
1998-10-6
2000-2-18
2001-7-2
2002-11-14
2004-3-28


mcdonalds vs micorsoft
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
1996-1-10
1997-5-24
1998-10-6
2000-2-18
2001-7-2
2002-11-14
2004-3-28


mcdonalds vs pfizer
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
1996-1-10
1997-5-24
1998-10-6
2000-2-18
2001-7-2
2002-11-14
2004-3-28


microsoft vs pfizer
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
1996-1-10
1997-5-24
1998-10-6
2000-2-18
2001-7-2
2002-11-14
2004-3-28

5.Gli effetti dei fattori macro -economici sulle correlazioni condizionali

Per studiare gli effetti dei fattori macroeconomici sulle correlazioni condizionali tra i residui standardizzati dei rendimenti dobbiamo fare una regressione lineare per ogni correlazione condizionale su i fattori macroeconomici.

Indicando con $p-1$ il numero di variabili esplicative, l'assunzione di base del modello è:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_{p-1} X_{p-1} + \varepsilon,$$

dove

X_k = valore della k-esima variabile esplicativa

$\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{P-1}$ sono i parametri del modello

ε = la componente casuale

$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_{p-1} X_{,p-1}$ componente deterministica.

$V(Y) = \sigma^2 \quad E(\varepsilon) = 0, \quad V(\varepsilon) = \sigma^2$

Per la stima dei parametri, si usa il metodo dei minimi quadrati

$$\xi(\beta) = \left(Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_{p-1} X_{i,p-1})\right)^2$$

Il valore di β deve minimizzare $\xi(\beta)$

Nel caso specifico le Y sono le correlazioni condizionali tra i residui standardizzati dei rendimenti e le X sono i fattori macroeconomici.

5.1 Applicazione e risultati

Adesso abbiamo 10 serie di correlazioni condizionali e 4 serie di rendimenti dei fattori macroeconomici. Applichiamo la regressione lineare alle 10 serie di correlazioni condizionali, considerando come esplicative le 4 serie di rendimenti dei fattori macroeconomici ritardate di un periodo:

- Ryen(-1): log-rendimenti di tasso di cambio yen/dollaro di un ritardo
- Recu(-1): log-rendimenti di tasso di cambio euro/dollaro di un ritardo
- Roil(-1): log-rendimento di petrolio di Texas di un ritardo
- Δinteresse(-1) : il tasso d'interesse(differenza prima) di un ritardo

Usiamo E-views per stimare i coefficienti con il metodo dei minimi quadrati. Gli output sono i seguenti:

(1) Dependent Variable: Exxon vs Jpmorgan[8]				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.283439	0.003615	78.41666	0.0000
ROIL(-1)	0.001580	0.140989	0.011204	0.9911
RECU(-1)	1.181679	0.580364	2.036098	0.0419
RYEN(-1)	-0.422454	0.506709	-0.833721	0.4045
Δinteresse (-1)	18.69475	8.827410	2.117806	0.0343
R-squared	0.004416	Mean dependent var		0.283301
Adjusted R-squared	0.002612	S.D. dependent var		0.170169
S.E. of regression	0.169946	Akaike info criterion		-0.704409
Sum squared resid	63.74212	Schwarz criterion		-0.691521
Log likelihood	784.0762	F-statistic		2.447540
Durbin-Watson stat	0.009748	Prob(F-statistic)		0.044431

(2) Dependent Variable: Exxon vs McDonald's				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.195039	0.002058	94.76747	0.0000
RECU(-1)	0.599994	0.330455	1.815659	0.0696
ROIL(-1)	-0.014933	0.080278	-0.186018	0.8524
RYEN(-1)	-0.011257	0.288516	-0.039017	0.9689
Δ interesse (-1)	1.318803	5.026259	0.262383	0.7931
R-squared	0.001589	Mean dependent var		0.195030
Adjusted R-squared	-0.000220	S.D. dependent var		0.096756
S.E. of regression	0.096766	Akaike info criterion		-1.830780
Sum squared resid	20.66568	Schwarz criterion		-1.817892
Log likelihood	2029.843	F-statistic		0.878322
Durbin-Watson stat	0.006931	Prob(F-statistic)		0.476043

[8] Exxon vs JP-morgan rappresenta la correlazione condizionale tra i residui standardizzati dei rendimenti di Exxon e JP-morgan.

(3) Dependent Variable: Exxon vs Microsoft				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.259684	0.002679	96.94874	0.0000
RECU(-1)	0.822361	0.430084	1.912095	0.0560
ROIL(-1)	-0.008797	0.104481	-0.084194	0.9329
RYEN(-1)	-0.302163	0.375501	-0.804695	0.4211
Δ interesse (-1)	10.20218	6.541624	1.559579	0.1190
R-squared	0.003268	Mean dependent var		0.259608
Adjusted R-squared	0.001461	S.D. dependent var		0.126032
S.E. of regression	0.125940	Akaike info criterion		-1.303761
Sum squared resid	35.00508	Schwarz criterion		-1.290873
Log likelihood	1446.960	F-statistic		1.808767
Durbin-Watson stat	0.008217	Prob(F-statistic)		0.124392

(4) Dependent Variable: Exxon vs Pfizer				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.301643	0.002487	121.2859	0.0000
RECU(-1)	0.968043	0.399331	2.424161	0.0154
ROIL(-1)	-0.052714	0.097010	-0.543386	0.5869
RYEN(-1)	0.059010	0.348651	0.169252	0.8656
Δ interesse (-1)	-6.171871	6.073869	-1.016135	0.3097
R-squared	0.003352	Mean dependent var		0.301686
Adjusted R-squared	0.001546	S.D. dependent var		0.117025
S.E. of regression	0.116935	Akaike info criterion		-1.452140
Sum squared resid	30.17803	Schwarz criterion		-1.439252
Log likelihood	1611.067	F-statistic		1.855769
Durbin-Watson stat	0.009029	Prob(F-statistic)		0.115563

(5) Dependent Variable: JPmorgan vs McDonald's				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.257993	0.001867	138.1779	0.0000
RECU(-1)	-0.050849	0.299791	-0.169613	0.8653
ROIL(-1)	0.004851	0.072829	0.066609	0.9469
RYEN(-1)	-0.289719	0.261744	-1.106877	0.2685
Δinteresse (-1)	14.94071	4.559862	3.276570	0.0011
R-squared	0.005337	Mean dependent var		0.257872
Adjusted R-squared	0.003535	S.D. dependent var		0.087943
S.E. of regression	0.087787	Akaike info criterion		-2.025547
Sum squared resid	17.00840	Schwarz criterion		-2.012659
Log likelihood	2245.255	F-statistic		2.960756
Durbin-Watson stat	0.014116	Prob(F-statistic)		0.018768

(6) Dependent Variable: JP-morgan vs Pfizer				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.308798	0.003438	89.82029	0.0000
RECU(-1)	0.212805	0.552013	0.385507	0.6999
ROIL(-1)	0.030556	0.134101	0.227855	0.8198
RYEN(-1)	-0.725871	0.481956	-1.506094	0.1322
Δinteresse (-1)	29.73281	8.396187	3.541227	0.0004
R-squared	0.006747	Mean dependent var		0.308569
Adjusted R-squared	0.004947	S.D. dependent var		0.162046
S.E. of regression	0.161644	Akaike info criterion		-0.804577
Sum squared resid	57.66657	Schwarz criterion		-0.791689
Log likelihood	894.8621	F-statistic		3.748081
Durbin-Watson stat	0.013395	Prob(F-statistic)		0.004809

(7) Dependent Variable: McDonalds vs Microsoft				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.200099	0.002539	78.81769	0.0000
RECU(-1)	0.173366	0.407634	0.425297	0.6707
ROIL(-1)	0.052757	0.099027	0.532752	0.5943
RYEN(-1)	-0.688195	0.355900	-1.933672	0.0533
Δinteresse (-1)	21.79307	6.200164	3.514919	0.0004
R-squared	0.007485	Mean dependent var		0.199943
Adjusted R-squared	0.005686	S.D. dependent var		0.119707
S.E. of regression	0.119366	Akaike info criterion		-1.410981
Sum squared resid	31.44606	Schwarz criterion		-1.398093
Log likelihood	1565.545	F-statistic		4.160954
Durbin-Watson stat	0.015983	Prob(F-statistic)		0.002323

(8) Dependent Variable: JP-morgan vs Microsoft				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.376893	0.002829	133.2298	0.0000
RECU(-1)	0.681869	0.454220	1.501186	0.1335
ROIL(-1)	0.042016	0.110344	0.380771	0.7034
RYEN(-1)	-0.522777	0.396574	-1.318235	0.1876
Δ interesse (-1)	-0.150019	6.908739	-0.021714	0.9827
R-squared	0.002323	Mean dependent var		0.376921
Adjusted R-squared	0.000515	S.D. dependent var		0.133042
S.E. of regression	0.133008	Akaike info criterion		-1.194558
Sum squared resid	39.04429	Schwarz criterion		-1.181670
Log likelihood	1326.181	F-statistic		1.284722
Durbin-Watson stat	0.006321	Prob(F-statistic)		0.273700

(9) Dependent Variable: McDonald's vs Pfizer				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.233226	0.001751	133.1656	0.0000
RECU(-1)	-0.324338	0.281213	-1.153355	0.2489
ROIL(-1)	0.077107	0.068316	1.128682	0.2592
RYEN(-1)	-0.254260	0.245524	-1.035584	0.3005
Δinteresse (-1)	17.69272	4.277284	4.136439	0.0000
R-squared	0.009196	Mean dependent var		0.233105
Adjusted R-squared	0.007400	S.D. dependent var		0.082653
S.E. of regression	0.082347	Akaike info criterion		-2.153496
Sum squared resid	14.96566	Schwarz criterion		-2.140608
Log likelihood	2386.767	F-statistic		5.120786
Durbin-Watson stat	0.020810	Prob(F-statistic)		0.000417

(10) Dependent Variable: Microsoft vs Pfizer				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.282264	0.003755	75.16888	0.0000
RECU(-1)	0.251139	0.602931	0.416530	0.6771
ROIL(-1)	0.083365	0.146471	0.569155	0.5693
RYEN(-1)	-1.033244	0.526411	-1.962806	0.0498
Δinteresse (-1)	29.98552	9.170650	3.269727	0.0011
R-squared	0.006824	Mean dependent var		0.282055
Adjusted R-squared	0.005024	S.D. dependent var		0.177000
S.E. of regression	0.176555	Akaike info criterion		-0.628116
Sum squared resid	68.79553	Schwarz criterion		-0.615228
Log likelihood	699.6961	F-statistic		3.790895
Durbin-Watson stat	0.013817	Prob(F-statistic)		0.004462

Per veder chiaramente, gli effetti dei fattori macroeconomici sulle correlazioni condizionali tra i rendimenti standardizzati dei 5 titoli azionari, abbiamo inserito i risultati delle 10 regressioni nella seguente tabella (abbiamo inserito tutti fattori macroeconomici i cui coefficienti sono significativi con il livello di confidenza uguale a 95%). Sulla diagonale della tabella ci sono i fattori macroeconomici che hanno effetti significativi sulla varianza condizionale dei residui della media dei cinque titoli (come già descritto nella terza sezione). Si ricorda che per quanto riguarda gli effetti sulla media condizionale, solamente Roil(-1) ha influenza significativa sulla media condizionale di Exxon:

Exxon	JP-Morgan	Pfizer	Microsoft	McDonald's	
	Recu(-1) Δinteresse(-1)	Recu(-1)	Recu(-1)	Recu(-1)[9]	Exxon
	Δinteresse(-1)	Δinteresse(-1)		Δinteresse(-1)	JP-Morgan
			Ryen(-1) Δinteresse(-1)	Δinteresse(-1)	Pfizer
			Roil(-1)	Ryen(-1)[10] Δinteresse(-1)	Microsoft
				Roil(-1)	McDonald's

[9] Il p-value del coefficiente di Recu(-1) nella regressione stimata è 0.0696, lo abbiamo messo nella tabella perché nella stessa regressione, confrontando i p-value dei coefficienti degli altri fattori macroeconomici, Recu(-1) è abbastanza significativo.

[10] Stessa ragione come Recu(-1)

Dalla tabella, si vede chiaramente i seguenti risultati:

- Recu(-1), cioè il rendimento del tasso di cambio tra Euro e dollaro ha un'influenza significativa su tutte le correlazioni condizionali (tra i residui standardizzati del rendimento di Exxon e quelle degli altri titoli).
- Δ interesse (-1), cioè il tasso d'interesse di un ritardo ha influenza sulle correlazioni condizionali tra i rendimenti standardizzati di JP-Morgan con i rendimenti standardizzati di tutti altri titoli fatta eccezione per Microsoft. L'effetto della variabile Δ interesse (-1) su JP-Morgan è davvero forte, visto che era già stato tolto il suo effetto sulla media condizionale e sulla varianza condizionale dei rendimenti di JP-Morgan e ciò nonostante la variabile risulta ancora essere significativa.
- Roil(-1), cioè il rendimento del valore del petrolio ritardato di un periodo, non ha nessun effetto sulle correlazioni condizionali tra i rendimenti standardizzati dei cinque titoli, però, ha effetto significativo sulle varianze condizionali dei rendimenti corretti per la media di Microsoft e McDonald's. Nella seconda sezione, inoltre, abbiamo trovato che Roil(-1) ha un effetto molto significativo sulla media condizionale del rendimento di Exxon.
- Ren(-1), cioè il rendimento di tasso di cambio tra Yen e dollaro ha un effetto significativo sulla correlazione condizionale tra i rendimenti standardizzati di Microsoft e Pfizer.

N. B.: Il coefficiente di determinazione (R^2) per tutte e dieci le regressioni è molto vicino allo zero. Ciò sta a significare che i modelli stimati non si adattano bene alle osservazioni, cioè non spiegano bene i dati. Visto che abbiamo fatto regressione lineare sulle 10 serie delle correlazioni condizionali stimate sui 4 fattori macroeconomici solo per verificare gli effetti dei fattori macroeconomici, avere i coefficienti di determinazione basso non è molto grave, non influisce molto sulla nostra analisi.

Conclusioni

In questo studio si è voluto valutare l'effetto di quattro fattori macroeconomici presi con un ritardo sulle correlazioni condizionali di cinque titoli azionari statunitensi. Le quattro variabili considerate sono: il tasso di cambio yen/dollaro, il tasso di cambio euro/dollaro, il prezzo del petrolio del Texas e il tasso d'interesse (*13-weeks treasury bills*). I cinque titoli azionari considerati sono: Exxon, JP-Morgan, Microsoft, McDonald's, Pfizer. Abbiamo lavorato sul rendimento logaritmico delle osservazioni giornaliere dei primi tre fattori macroeconomici (petrolio, e tasso di cambio) e dei cinque titoli azionari, mentre il tasso di interesse è stato utilizzato nella sua differenza prima.

Il primo passo è stato quello di trattare la media e varianza dei rendimenti. Abbiamo considerato i quattro fattori macroeconomici come variabili esogene sia nel modello VAR che nel GARCH, poiché non sappiamo con esattezza se questi fattori macroeconomici hanno una qualche influenza sulla media condizionale e sulla varianza condizionale. Dopo avere eliminato gli effetti in media ed in varianza, utilizzando i coefficienti stimati sono stati così calcolati i residui standardizzati dei rendimenti dei cinque titoli.

Con la stima del modello VAR, abbiamo verificato che il log-rendimento del petrolio è l'unico fattore macroeconomico che ha influenza significativa sulla media condizionale della Exxon. Questo risultato era prevedibile visto che Exxon è una compagnia petrolifera.

La stima dei modelli GARCH, ha invece permesso di verificare che il tasso d'interesse influenza la varianza condizionale di JP-Morgan; inoltre il rendimento logaritmico del petrolio, ha un'influenza significativa sulle varianze condizionali di Microsoft e McDonald's.

Dopo il trattamento di media e varianza, abbiamo considerato le cinque serie dei residui standardizzati dei rendimenti (così depurati dagli effetti dei quattro fattori macroeconomici sulla media condizionale e varianza condizionale).

In un secondo passo sono state utilizzate le cinque serie dei residui standardizzati dei rendimenti per stimare la correlazione condizionale tra loro.

Al terzo passo abbiamo valutato gli effetti dei fattori macroeconomici sulle correlazioni condizionali stimate. Abbiamo fatto una regressione lineare per ogni correlazione condizionale sui quattro fattori macroeconomici. Abbiamo infine individuato un effetto significativo del tasso di cambio euro/dollaro su tutte le correlazioni condizionali ottenute tra i residui standardizzati del rendimento di Exxon e gli altri titoli. Il tasso di cambio tra Yen e dollaro, ha un effetto significativo sulle correlazioni condizionali tra i residui standardizzati dei rendimenti di Microsoft e Pfizer. Inoltre, il tasso d'interesse è un fattore macroeconomico abbastanza attivo, perché considerando le 10 serie di correlazioni condizionali tra i residui standardizzati dei rendimenti, ha effetto su ben 6 serie.

Il nostro studio conferma che nel mercato statunitense i fattori macroeconomici hanno qualche effetto potenziale sulle correlazioni condizionali tra i residui standardizzati dei rendimenti di titoli azionari: Infatti, dopo avere depurato la media condizionale e la varianza condizionale dei titoli dagli effetti dei fattori macroeconomici, questi ultimi ancora influenzano le correlazioni condizionali tra i residui standardizzati. Quindi, almeno per quanto riguarda il mercato statunitense, nei modelli GARCH multivariati con dinamica sulle correlazioni, è necessario aggiungere alcuni parametri per spiegare gli effetti delle variabili macroeconomiche sulla correlazione condizionale.

Bibliografia:

[1] M. Billio M. Caporin e M. Gobbo (2004) *Flexible Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH for asset allocation*

[2] Cappuccio N. e Orsi R.(2005) *Econometria* Milano, il Mulino

[3] Engle R. e Sheppard K.(2001), *Theoretical and Empirical properties of Dynamic Conditional correlation Multivariate GARCH*

[4] Engle R. (1999) "Dynamic Conditional correlation- A Simple Class of Multivariate GARCH Models", *Journal of Business & Economic statistics 2002*

[5] Gallo, G. M. e Pacini, B. (2002) *Metodi Quantitativi Per i Mercati Finanziari,* Carrocci Editore.

[6] Marno. Verbeek. (2000) *Guide to Modern Econometrics* Wiley Suns, LTD