

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA DELL' INFORMAZIONE

---

*TESI DI LAUREA TRIENNALE*

Progetto di un controllore per un sistema  
Ball and Beam

*Relatore:* Alessandro Beghi

*Laureando:* Luca Minetto  
610472-INF

ANNO ACCADEMICO: 2012-13



## SOMMARIO

---

In questo elaborato si considera un sistema Ball & Beam formato principalmente da una pallina che scorre su un'asta inclinata il cui movimento può essere controllato da un ingranaggio. Da uno studio iniziale il sistema in catena aperta risulta instabile e, quindi, ci si prefigge di progettare un controllore che permetta raggiungere la stabilità. Verranno ideati un controllore PID e altri due con l'utilizzo di tecniche di approccio differenti: luogo delle radici e reti correttive. Nel capitolo finale si trova un confronto tra i risultati ottenuti con le tre diverse tecniche.



## RINGRAZIAMENTI

---

Innanzitutto, vorrei ringraziare il Professor Beghi, relatore della mia tesi, per l'aiuto e il sostegno fornitomi durante la stesura del lavoro.

Ringrazio con affetto la mia famiglia: i miei genitori che mi hanno supportato moralmente, ma anche economicamente in questi anni e mio fratello che non si è risparmiato qualche suggerimento da esperto in materia.

Infine, vorrei ringraziare i miei amici e compagni di corso, in particolare Stefano, il "miglior vicino di alfabeto" che potessi trovare, Alessio, dispensatore di consigli e perle di saggezza, Irene e Laura, per essere riuscite a sopportarmi anche durante i già estenuanti viaggi in treno.

La buona riuscita di questa tesi è anche merito loro.

*Grazie, Luca.*



## INDICE

---

1	IL SISTEMA BALL AND BEAM	1
1.1	Descrizione del sistema	1
1.2	Specifiche di controllo	2
2	STUDIO DEL SISTEMA	3
2.1	Equazioni del moto	3
2.2	Funzione di trasferimento	4
2.3	Modello di stato	4
2.4	Sistema in catena aperta	5
2.5	Sistema in retroazione unitaria negativa	6
3	CONTROLLORE PID	9
3.1	Introduzione	9
3.2	Controllore P	10
3.3	Controllore PD	11
4	LUOGO DELLE RADICI	13
4.1	Introduzione	13
4.2	Luogo delle radici senza controllore	14
4.3	Luogo delle radici con controllore	14
5	RETI CORRETRICI	17
5.1	Introduzione	17
5.2	Ottimizzazione del controllore	19
6	CONCLUSIONI	23
6.1	Confronto tra controllori	23
	Bibliografia	27

## ELENCO DELLE FIGURE

---

Figura 1	Rappresentazione del sistema fisico.	1
Figura 2	Risposta al gradino di ampiezze diverse.	5
Figura 3	Risposta al gradino di ampiezza 0.25 rad.	6
Figura 4	Schema a blocchi del sistema con controllo- re.	9
Figura 5	Risposta al gradino al variare di $K_p$ .	10
Figura 6	Risposta al gradino al variare di $K_d$ , con $K_p =$ 15.	11
Figura 7	Risposta al gradino del sistema con controllore PD (19).	12
Figura 8	Regione dove devono giacere i poli della $W(s)$ .	13
Figura 9	Luogo delle radici.	14
Figura 10	Luogo delle radici con controllore.	15
Figura 11	Risposta al gradino del sistema con controllo- re.	15
Figura 12	Diagrammi di Bode del sistema Ball&Beam.	17
Figura 13	Esempio diagrammi di Bode di $C(s)G(s)$ con $K=1$ .	18
Figura 14	Risposta al gradino con $K$ variabile.	19
Figura 15	Risposta al gradino con $K = 2$ variabile e $m_\phi =$ $75^\circ$ .	20
Figura 16	Diagrammi di Bode per $C(s)G(s)$ .	20
Figura 17	Risposta al gradino del sistema a catena chiusa con controllore.	21
Figura 18	Sistema in catena chiusa, con in evidenza $u(t)$ .	23
Figura 19	Segnale $u(t)$ per il controllore PID.	24
Figura 20	Segnale $u(t)$ per il controllore Luogo delle ra- dici.	24
Figura 21	Segnale $u(t)$ per il controllore Reti correttrici.	25
Figura 22	Risposta al gradino.	25

## ELENCO DELLE TABELLE

---

Tabella 1	Grandezze del sistema	2
Tabella 2	Proprietà delle costanti del PID.	10



## IL SISTEMA BALL AND BEAM

---

### 1.1 DESCRIZIONE DEL SISTEMA

Il sistema è composto da un'asta sulla quale scorre una pallina, un perno e un ingranaggio. Un'estremità dell'asta è vincolata in modo che possa solo ruotare attorno al vincolo; l'altra estremità è collegata ad un perno che a sua volta si collega ad un ingranaggio. Inizialmente la pallina è posta all'estremità dell'asta agganciata al perno ( $r = 0$ ) e l'asta è perfettamente orizzontale ( $\alpha = 0$ ). L'ingranaggio muovendosi di un certo angolo  $\theta$  modifica l'inclinazione dell'asta di un angolo  $\alpha$  quindi la pallina comincia a scendere sotto la spinta delle forze in gioco: la forza di gravità, la forza di inerzia dovuta al moto rotatorio della pallina stessa e l'attrito. Il nostro obiettivo è controllare la posizione della pallina per evitarne la caduta dall'asta e riportare il sistema in equilibrio.

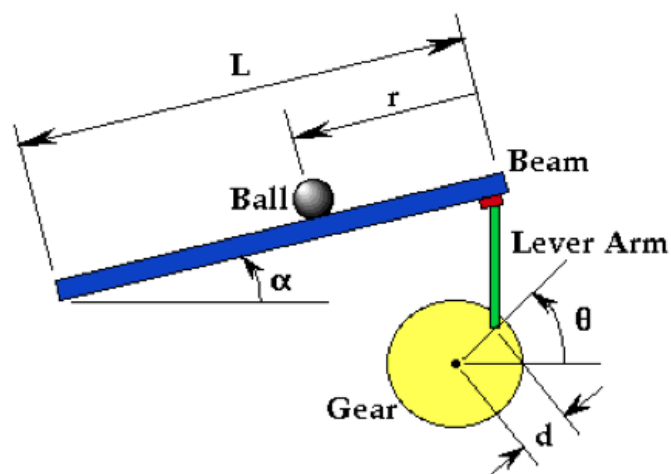


Figura 1: Rappresentazione del sistema fisico.

Nello svolgimento del problema l'attrito tra pallina e asta non verrà considerato, inoltre si assumerà che la pallina rotoli senza scivolare sull'asta.

Le caratteristiche del sistema sono definite come segue:

Simbolo	Descrizione	Valore
m	massa della pallina	0.11 Kg
R	raggio della pallina	0.015 m
d	offset del perno	0.03 m
g	accelerazione di gravità	9.8 m/s <sup>2</sup>
L	lunghezza dell'asta	1.0 m
J	momento di inerzia della pallina	$9.99 * 10^{-6}$ Kgm <sup>2</sup>
r	posizione della pallina	
$\alpha$	angolo di inclinazione dell'asta	
$\theta$	angolo dell'ingranaggio	

Tabella 1: Grandezze del sistema

## 1.2 SPECIFICHE DI CONTROLLO

Il nostro obiettivo è controllare la posizione della pallina per evitarne la caduta dall'asta e riportare il sistema in equilibrio, rispettando le specifiche di progettazione:

- tempo di assestamento minore di 3 secondi
- sovraelongazione minore del 5%
- valore uscita valido se rientra in un range del  $\pm 2\%$

Scegliendo un ingresso a gradino, la posizione finale della pallina sarà pari all'ampiezza del gradino stesso, ma convertita in metri. Appare subito evidente che un gradino di ampiezza superiore a 1 è da escludere a priori perché, avendo un'asta di un metro, la posizione finale della pallina sarebbe maggiore di un metro quindi implicherebbe una caduta della pallina. Nei capitoli successivi vedremo nel dettaglio la massima ampiezza dell'ingresso che permette il raggiungimento delle specifiche.

## STUDIO DEL SISTEMA

## 2.1 EQUAZIONI DEL MOTO

L'equazione del moto della pallina sull'asta è la seguente:

$$-\left(\frac{J}{R^2} + m\right) \ddot{r} + mg \sin \alpha + m(L-r)(\dot{\alpha})^2 = 0 \quad (1)$$

L'equazione è ricavata dalle forze in gioco quindi risulta così composta:

- primo termine: forza d'inerzia della pallina dovuta al moto del suo centro di massa e al movimento rotatorio attorno allo stesso.  $J$  è stato calcolato come momento di inerzia di una sfera di raggio  $R$ .
- secondo termine: componente della forza di gravità parallela all'asta, quindi la componente che effettivamente influenza il moto della pallina.
- terzo termine: forza centripeta data dalla rotazione dell'asta. Supponiamo trascurabile il suo contributo quindi non verrà preso in considerazione.

L'equilibrio del sistema si ottiene sia per  $\alpha = 0$  che per  $\alpha = \pi$ , ma la seconda soluzione è da escludere per motivi fisici e di realtà del modello. Si può quindi ricorrere ad una linearizzazione attorno al punto di equilibrio ( $\alpha = 0$ ) dalla quale risulta  $\sin \alpha = \alpha$ .

L'equazione (1) ora si presenta come:

$$\left(\frac{J}{R^2} + m\right) \ddot{r} = mg\alpha \quad (2)$$

Nell'equazione non sembra comparire l'angolo  $\theta$ , cioè quello che ci permetterebbe di controllare l'uscita, ma in realtà tra  $\alpha$  e  $\theta$  c'è la seguente relazione:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{d}{L} \sin \theta\right) \quad (3)$$

Per  $\alpha$  tendenti a zero anche  $\theta$  tende a zero quindi la relazione (3) può essere approssimata ottenendo:

$$\alpha = \frac{d}{L} \theta \quad (4)$$

Sostituendola nella (2) si ottiene l'equazione finale che tiene conto di tutte le approssimazioni:

$$\left(\frac{J}{R^2} + m\right) \ddot{r} = mg \frac{d}{L} \theta \quad (5)$$

In questa equazione sono presenti  $\theta$ , cioè l'ingresso del sistema, che date le assunzioni precedenti rappresenta anche, di quanto viene alzato il perno rispetto alle condizioni iniziali ( $\theta = 0$ ) e  $\ddot{r}$ , cioè la derivata seconda di  $r$ ;  $r$  è l'uscita del sistema.

## 2.2 FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Ricorrendo alla trasformata di Laplace nell'equazione (5), e considerando nulle le condizioni iniziali, si ottiene:

$$\left(\frac{J}{R^2} + m\right) R(s) s^2 = mg \frac{d}{L} \Theta(s) \quad (6)$$

Da questa si può facilmente ricavare la funzione di trasferimento sapendo che l'uscita è  $R(s)$  e l'ingresso  $\Theta(s)$

$$G(s) = \frac{R(s)}{\Theta(s)} = \frac{mgd}{L \left(\frac{J}{R^2} + m\right) s^2} \quad (7)$$

Si nota subito che la presenza di un polo doppio in 0 nella funzione di trasferimento compromette la stabilità BIBO, il sistema quindi non è BIBO-stabile e di conseguenza neanche asintoticamente stabile.

## 2.3 MODELLO DI STATO

Volendo rappresentare come modello di stato il sistema Ball and Beam in figura (1), si possono scegliere come variabili di stato la posizione ( $r$ ) e la velocità ( $\dot{r}$ ) della pallina, come ingresso l'angolo dell'ingranaggio ( $\theta$ ) e come uscita la posizione della pallina.

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \dot{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{mgd}{L \left(\frac{J}{R^2} + m\right)} \end{pmatrix} \theta$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \dot{r} \end{pmatrix}$$

## 2.4 SISTEMA IN CATENA APERTA

La funzione di trasferimento (7) si presenta con un termine costante che moltiplica un termine che dipende da  $s$ . Sostituendovi i dati riportati nella Tabella 1, la costante può essere calcolata ed il suo valore rappresenta la costante di Bode ( $K_b$ ) della f.d.t.:

$$K_b = \frac{mgd}{L \left( \frac{J}{R^2} + m \right)} = 0.2095 \quad (8)$$

Quindi, con i dati specifici del problema, la funzione di trasferimento vale:

$$G(s) = \frac{0.2095}{s^2} \quad (9)$$

Con il supporto di un programma di calcolo quale MATLAB, si può ottenere la risposta al gradino. Nello specifico dopo aver creato la funzione di trasferimento con l'istruzione `step()` viene visualizzato il grafico in Figura 2.

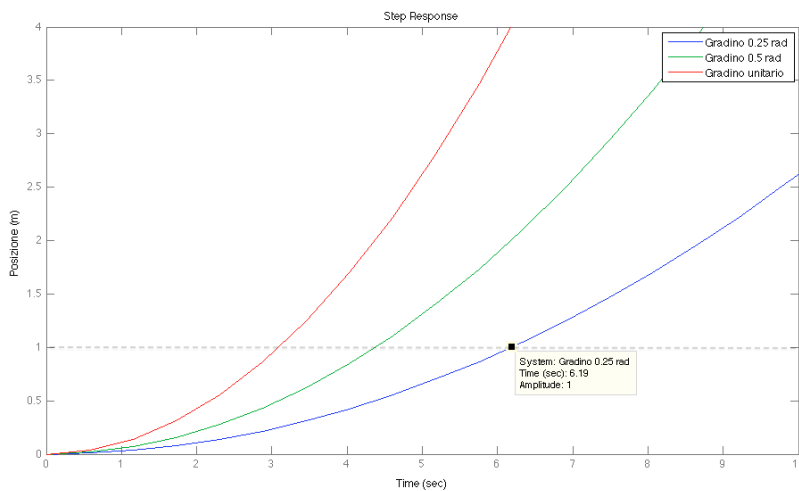


Figura 2: Risposta al gradino di ampiezze diverse.

Il grafico riporta la posizione della pallina, in funzione del tempo, per ingressi di ampiezza diversa. Come si può notare all'aumentare dell'ampiezza dell'ingresso la curva sale con maggiore velocità. In tutti i singoli casi, comunque, la pallina si allontana più o meno velocemente dalla posizione iniziale ( $r = 0$ ) per mezzo della componente parallela all'asta della forza di gravità. I limiti fisici del sistema, cioè la lunghezza dell'asta, impongono che raggiunto il metro la pallina cada abbandonando il moto descritto graficamente. Prendendo in considerazione il caso del gradino di ampiezza 0.25 rad, si può notare come la pallina dopo 6.19 sec si trovi in posizione 1 m, nell'istante successivo quindi cadrà dall'asta. Anche analizzando la risposta al gradino si può concludere che il sistema è instabile.

## 2.5 SISTEMA IN RETROAZIONE UNITARIA NEGATIVA

In un primo momento si può pensare di rendere BIBO-stabile il sistema introducendo una retroazione negativa unitaria. Formalmente la funzione di trasferimento ad anello chiuso  $W(s)$  può essere ottenuta con alcuni passaggi partendo dalla funzione di trasferimento ad anello aperto  $G(s)$ :

$$G(s) \Rightarrow W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (10)$$

In questo caso quindi, data la (9), si ottiene

$$W(s) = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{0.2095}} \quad (11)$$

Si può subito notare che  $W(s)$  ha due poli sull'asse immaginario e ciò implica l'instabilità, ma si ha comunque un sostanziale cambiamento nella risposta al gradino. Come evidenzia la figura 3 il sistema con la

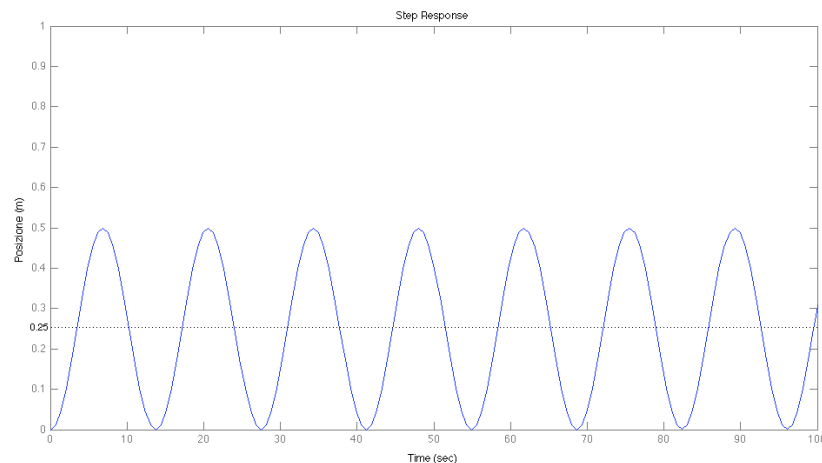


Figura 3: Risposta al gradino di ampiezza 0.25 rad.

retroazione unitaria negativa non è stabile in quanto continuerebbe a oscillare all'infinito attorno alla posizione 0.25 m senza mai assestarvisi. Da non sottovalutare è il fatto che un ingresso di ampiezza maggiore provocherebbe la caduta della pallina, precisamente l'ampiezza dell'oscillazione è, in metri, doppia rispetto a quella dell'ingresso. Questo sistema è quindi in grado di tenere la pallina sull'asta per alcune ampiezze di ingresso, ma non è mai in grado di fermarla. L'ingresso costante massimo ( $\theta_{max}$ ) consentito per non far cadere la pallina dall'asta è calcolabile come:

$$2\theta_{max} < L \Rightarrow \theta_{max} = \frac{L}{2} \quad (12)$$

Lo studio in retroazione unitaria negativa non porta a rispettare né i requisiti né le specifiche esposte nel paragrafo 1.2. Altre soluzioni verranno quindi valutate nei prossimi capitoli, dove verrà preso come riferimento sempre un ingresso a gradino di ampiezza 0.25 rad.





## CONTROLLORE PID

---

### 3.1 INTRODUZIONE

Come prima soluzione si può inserire un controllore PID (Proporzionale-Integrale-Derivativo). Questo tipo di controllori, come suggerisce il nome, si compone di tre parti fondamentali distinguibili nella sua funzione di trasferimento:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (13)$$

Modificando i valori delle costanti, si ottengono diversi risultati. Casi particolari di PID sono i controllori P ( $K_p \neq 0$  e  $K_i = K_d = 0$ ), controllori PI ( $K_p \neq 0$ ,  $K_i \neq 0$  e  $K_d = 0$ ) e controllori PD ( $K_p \neq 0$ ,  $K_d \neq 0$  e  $K_i = 0$ ).

Il controllore va inserito nella catena diretta del sistema ad anello chiuso, come sottolineato dal seguente schema a blocchi:

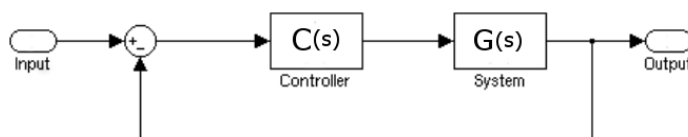


Figura 4: Schema a blocchi del sistema con controllore.

La funzione di trasferimento del sistema rappresentato nello schema di Figura 4 è ottenibile con passaggi simili a quelli per ottenere  $W(s)$  esposti nella (10)

$$C(s) G(s) \Rightarrow W(s) = \frac{C(s) G(s)}{1 + C(s) G(s)} \quad (14)$$

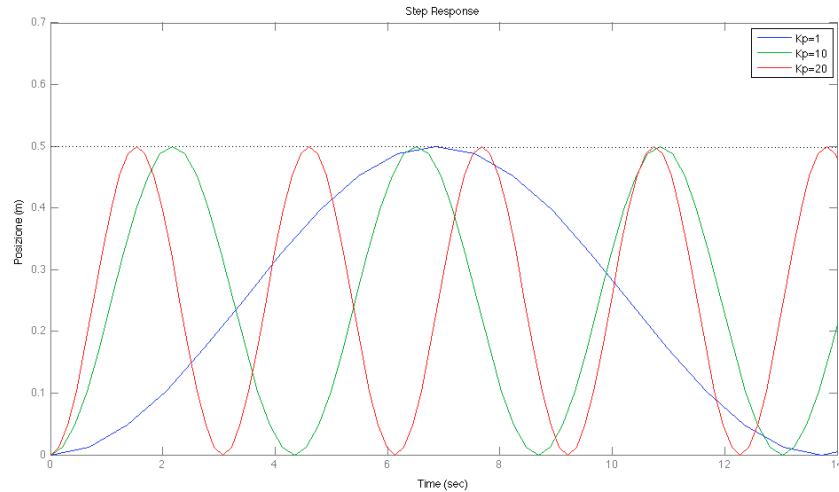
Di seguito verranno esposti i passaggi fatti per ottenere un controllore che permetta di rispettare le specifiche del problema. La sintesi di un controllore PID viene eseguita per tentativi, ma tenendo presenti gli effetti che le varie parti di controllo ( $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$ ) hanno sul sistema a catena chiusa; questi sono riportati nella seguente tabella riassuntiva

	Rise Time	Overshoot	Setting Time	SteadyState Error
K <sub>p</sub>	Decrease	Increase	Small Change	Decrease
K <sub>i</sub>	Decrease	Increase	Increase	Eliminate
K <sub>d</sub>	Small Change	Decrease	Decrease	No Change

Tabella 2: Proprietà delle costanti del PID.

### 3.2 CONTROLLORE P

Questo controllore dispone della sola costante  $K_p$  mentre gli altri due termini sono a 0. Dallo schema del controllore (Figura 4) è evidente che un controllore P con  $K_p = 1$  è equivalente alla retroazione unitaria negativa studiata nel paragrafo 2.5 che non risulta essere soddisfacente. Interessante, però, è capire come varia la risposta al gradino al variare di  $K_p$  (Figura 5).

Figura 5: Risposta al gradino al variare di  $K_p$ .

Dal grafico in Figura 5 si nota che l'ampiezza dell'oscillazione non cambia mentre all'aumentare di  $K_p$  aumenta la frequenza di oscillazione. Lo si può verificare anche analiticamente antitrasformando la risposta al gradino, gradino di ampiezza 0.25:

$$C(s) = K_p \Rightarrow W(s) = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{K_p K_b}} \quad (\text{per la (10)}) \quad (15)$$

$$R(s) = W(s) \Theta(s) = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{K_p K_b}} \frac{0.25}{s} = 0.25 \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{K_p K_b + s^2} \right)$$

$$r(t) = 0.25 (1 - \cos(\sqrt{K_p K_b} t)) \delta_{-1}(t) \quad (16)$$

Questo tipo di controllore non permette di avere stabilità, ma si nota che l'aumentare del guadagno proporzionale ( $K_p$ ) si riesce ad ottenere un tempo di salita migliore. Questa considerazione risulterà utile anche in seguito.

### 3.3 CONTROLLORE PD

Come evidenzia la Tabella 2 per diminuire la sovravelongazione e il tempo di assestamento stabilizzando l'uscita c'è bisogno di un'azione di tipo derivativo. A questo scopo può essere inserita una costante  $K_d$  diversa da 0. Il controllore che si ottiene è un PD con funzione di trasferimento:

$$C(s) = K_p + K_d s \quad (17)$$

Il grafico 6 mostra come cambia la risposta al gradino al variare di  $K_d$  con un  $K_p$  costante. Si può notare come l'uscita si stabilizzi per tutti i valori riportati di  $K_d$ , ma con andamenti diversi. La sovravelongazione deve rimanere al di sotto del valore limite di 0,2625 metri e la pallina si deve stabilizzare in una posizione interna all'intervallo che va da 0,245 a 0,255 metri in un tempo minore di 3 secondi come riportato nelle specifiche al paragrafo 1.2. Aumentare  $K_d$  porta ad una migliore risposta del sistema, ricordando che si può anche modificare leggermente il guadagno proporzionale per ridurre i tempi di salita a scapito dell'overshoot. Bisogna dunque trovare il giusto compromesso tra  $K_p$  e  $K_d$ .

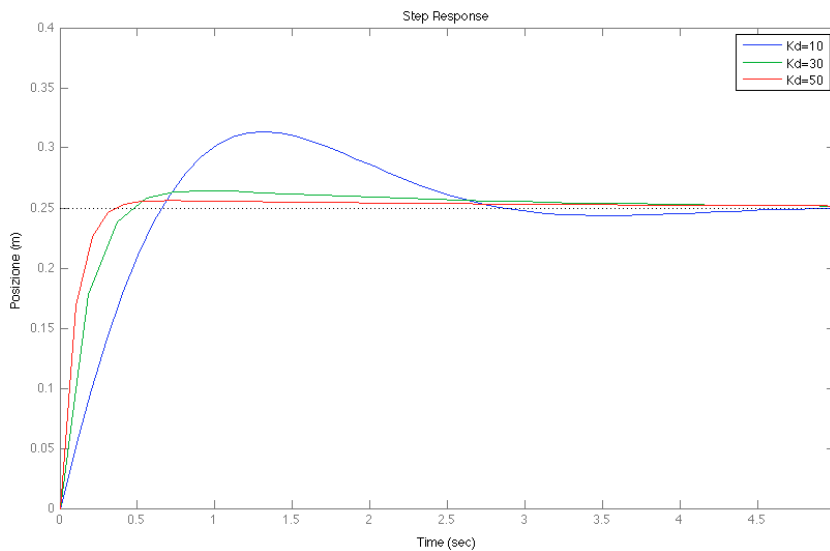


Figura 6: Risposta al gradino al variare di  $K_d$ , con  $K_p = 15$ .

Un controllore PID idoneo alle richieste del problema, infine, non ha bisogno della parte integrativa che andrebbe ad eliminare l'even-

tuale errore a regime, ma aumentando la sovraelongazione ed il tempo di assestamento. Un PD (in figura 7) che raggiunge le specifiche richieste è

$$C(s) = 15 + 40s \quad (18)$$

Al fine di rendere propria la funzione di trasferimento si aggiunge un polo in alta frequenza alla f.d.t. (18); questo cambiamento non modifica la risposta del sistema mantenendo valide tutte le considerazioni fatte in precedenza. La funzione di trasferimento propria è stata definita come segue

$$C(s) = \frac{15 + 40s}{1 + 0.0001s} \quad (19)$$

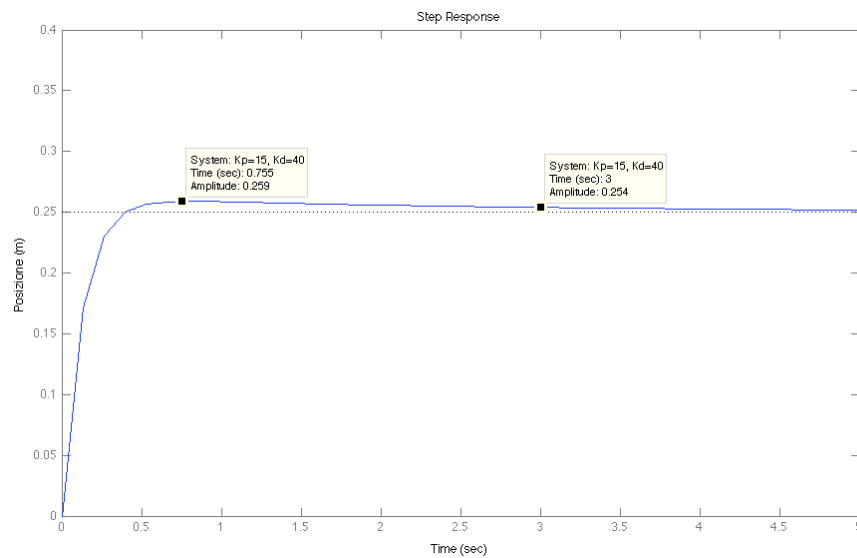


Figura 7: Risposta al gradino del sistema con controllore PD (19).

Questo controllore rende stabile il sistema, ottiene una sovraelongazione percentuale massima del 3.6% e l'uscita all'istante  $t = 3\text{ s}$  è già assestata nel range voluto.

## LUOGO DELLE RADICI

### 4.1 INTRODUZIONE

Un altro tipo di controllore si può trovare con il metodo del luogo delle radici. Il luogo delle radici è un metodo grafico che permette di studiare la posizione dei poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso al variare di un parametro  $K$ , nel caso in cui si abbia la piena conoscenza della funzione di trasferimento ad anello aperto. Esiste una relazione tra posizione dei poli della catena chiusa e la sovralongazione e tempo di assestamento, nello specifico la sovralongazione è legata al coefficiente di smorzamento mentre il tempo di assestamento sia al coefficiente di smorzamento che alla pulsazione naturale. Noti questi due parametri con il supporto di MATLAB è possibile delimitare una zona di piano dove devono giacere i poli in modo da rispettare le specifiche.

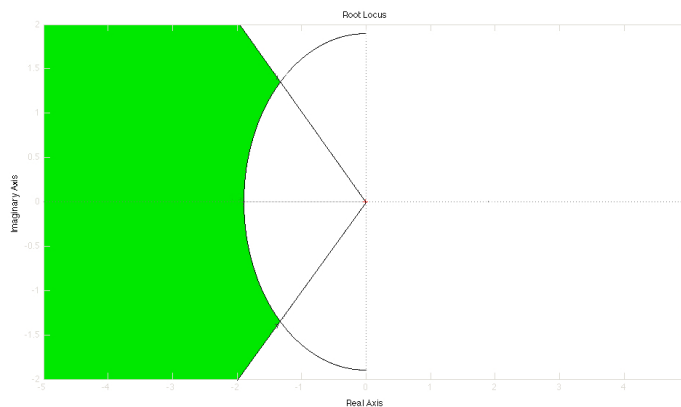


Figura 8: Regione dove devono giacere i poli della  $W(s)$ .

Fondamentale è quindi il calcolo dello smorzamento ( $\xi$ ) nota la sovralongazione percentuale del 5%:

$$S = e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (20)$$

Ne risulta un  $\xi = 0.7$  che sostituito alla (21) permette di calcolare  $\omega_n$  sapendo che il tempo di assestamento deve essere minore di 3 secondi:

$$T_a = \frac{4}{\xi \omega_n} \quad (21)$$

Risulta, quindi, un  $\xi = 0.7$  e un  $\omega_n = 1.92$  rad/s.

## 4.2 LUOGO DELLE RADICI SENZA CONTROLLORE

Tracciando il luogo delle radici si osserva come dai due poli nell'origine partano due rami che all'aumentare di  $K$  divergono all'infinito lungo l'asse immaginario. Nel grafico è anche stata delimitata la zona dove dovrebbero giacere i poli per rispettare le specifiche, ma si nota che i rami non passano in tale regione. Risultato atteso perché è già stato appurato che il sistema senza alcun tipo di controllo non è stabile.

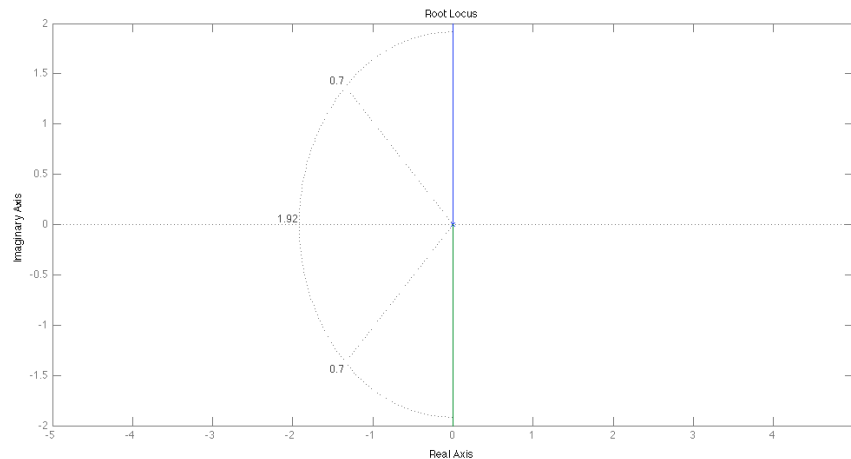


Figura 9: Luogo delle radici.

Si vuole che il controllore porti il luogo delle radici almeno parzialmente all'interno della regione che soddisfa le specifiche per poi scegliere il  $K$  ritenuto più opportuno alla risoluzione del problema.

## 4.3 LUOGO DELLE RADICI CON CONTROLLORE

Un controllore che sposti a sinistra il luogo delle radici del sistema Ball and Beam deve avere la forma

$$C(s) = K \frac{(s + z_0)}{(s + p_0)} \quad (22)$$

Nello specifico lo zero deve essere posizionato in modo da limitare l'influenza di uno dei due poli della (9) mentre il polo deve essere posizionato a sinistra dello zero in modo da portare nella zona giusta (esempio di figura 8) almeno parte del luogo delle radici. In termini di valore assoluto si vuole lo  $z_0$  molto minore di  $p_0$ , ma la soluzione non è univoca. In questo caso sono stati scelti  $z_0 = 0.01$  e  $p_0 = 7$ . Rimane ancora da stabilire il valore di  $K$ , ma il luogo delle radici del sistema con il controllore si trova, almeno in parte, nella zona voluta.

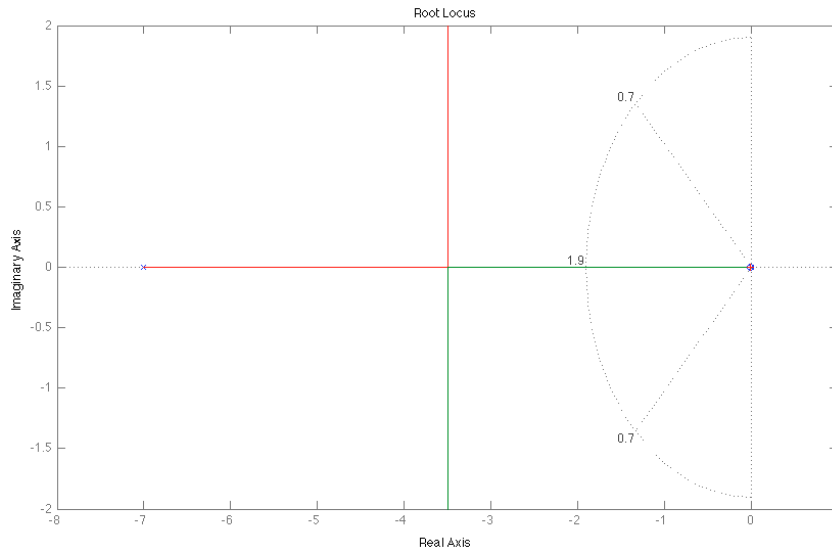


Figura 10: Luogo delle radici con controllore.

Ad ogni punto della curva è associato un valore di  $K$  e i poli della funzione di trasferimento del sistema a catena chiusa, scelto un punto nella zona indicata, come in figura 8, il controllore sarà pronto. Anche in questo caso la scelta di un valore di un punto non è univoca, ma dopo alcuni tentativi è stato scelto il punto con  $K = 60.046$  da cui risultano, nella funzione di trasferimento  $W(s)$  con controllore, i poli  $p_1 = -3.4950 + j 0.5403$ ,  $p_2 = -3.4950 - j 0.5403$  e  $p_3 = -0.0101$ . Ora il controllore assume la forma

$$C(s) = 60.046 \frac{(s + 0.01)}{(s + 7)} \quad (23)$$

e la risposta al gradino di ampiezza 0.25 rad (figura 11) rispetta le specifiche richieste.

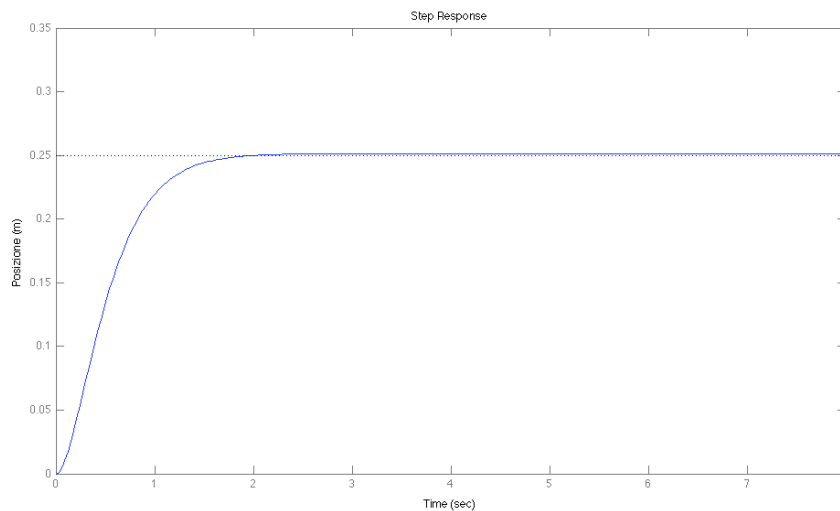


Figura 11: Risposta al gradino del sistema con controllore.





## RETI CORRETTRICI

## 5.1 INTRODUZIONE

Un terzo metodo per la sintesi di un controllore è l'utilizzo dei diagrammi di Bode. L'obiettivo è creare un controllore che permetta di raggiungere un margine di fase ( $m_\phi$ ) prossimo a 90 gradi ai fini di raggiungere la stabilità. Anche in questo caso sono presenti delle relazioni che legano delle caratteristiche deducibili dal diagramma di Bode con le specifiche del paragrafo 1.2.

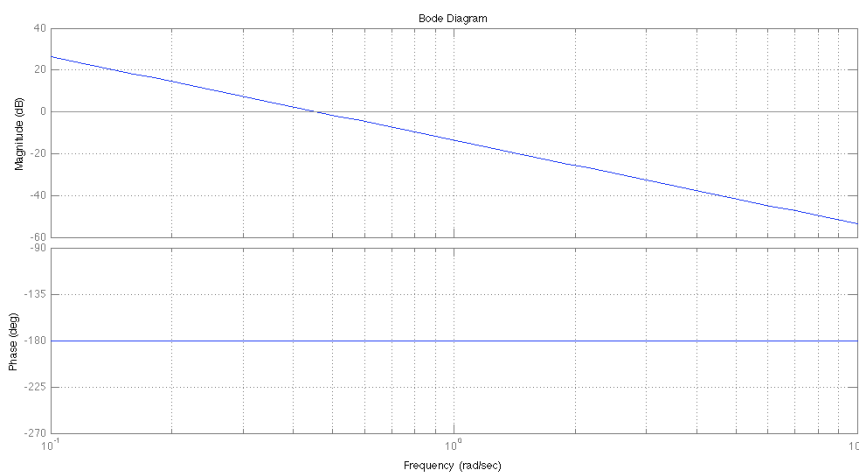


Figura 12: Diagrammi di Bode del sistema Ball&Beam.

Dal grafico 12 si può notare che il margine di fase alla frequenza di attraversamento è 0, quindi come verificato in precedenza, siamo in presenza di instabilità. Il margine di fase va alzato quindi si ricorre ad una rete anticipatrice. Le reti anticipatrici hanno la capacità di alzare la fase al più di 90 gradi per un certo range di frequenze.

$$C(s) = K \frac{1 + sT}{1 + s(\alpha T)} \quad \text{con } T > 0 \text{ e } 0 < \alpha < 1 \quad (24)$$

I valori di  $T$  e  $\alpha$  dipendono dalle specifiche, in generale però le frequenze in cui la fase viene modificata sono quelle del range che va da  $\frac{1}{T}$  a  $\frac{1}{\alpha T}$ . I valori di questi parametri dipendono dal tempo di assestamento e dalla sovraelongazione massima.

$$\alpha = \frac{1 - \sin m_\phi}{1 + \sin m_\phi} \quad T = \frac{1}{\omega \sqrt{\alpha}} \quad (25)$$

Con  $\omega$  si intende la pulsazione centrale, cioè quella a cui deve essere aggiunta fase. Per stimare questo parametro si usa la seguente for-

mula che tiene conto sia del coefficiente di smorzamento ( $\xi$  calcolato nella (20)) che del tempo di assestamento:

$$\omega_{bw} = \frac{4}{T_a \xi} \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}} \quad (26)$$

Da questa si ottiene una larghezza di banda ( $\omega_{bw}$ ) pari a 1.92rad/s. La pulsazione centrale, per rispettare le specifiche, deve essere posta prima di questa frequenza e per semplicità è stata scelta  $\omega = 1$ . Il margine di fase in un primo momento verrà scelto pari a  $70^\circ$  perché in prima approssimazione il margine di fase minimo del sistema ad anello chiuso deve essere almeno 100 volte il coefficiente di smorzamento che da calcoli riportati nei paragrafi precedenti risulta essere  $\xi = 0.7$ .

Sostituendo alle formule (25) si ottiene  $\alpha = 0.0311$ , quindi i valori di  $T$  e  $\alpha T$  diventano:

$$T = \frac{1}{\omega \sqrt{\alpha}} = 5.6713 \Rightarrow \alpha T = 0.1763 \quad (27)$$

Partendo da questi dati, la funzione di trasferimento del controllore risulta:

$$C(s) = K \frac{1 + 5.6713 s}{1 + 0.1763 s} \quad (28)$$

I diagrammi di Bode di  $C(s)G(s)$  in figura 13 sono simili al variare di  $K$ . Nel dettaglio, per quanto riguarda il Modulo, un aumento di  $K$  porta una traslazione verso l'alto della curva mentre il diagramma della fase non dipende da  $K$ .

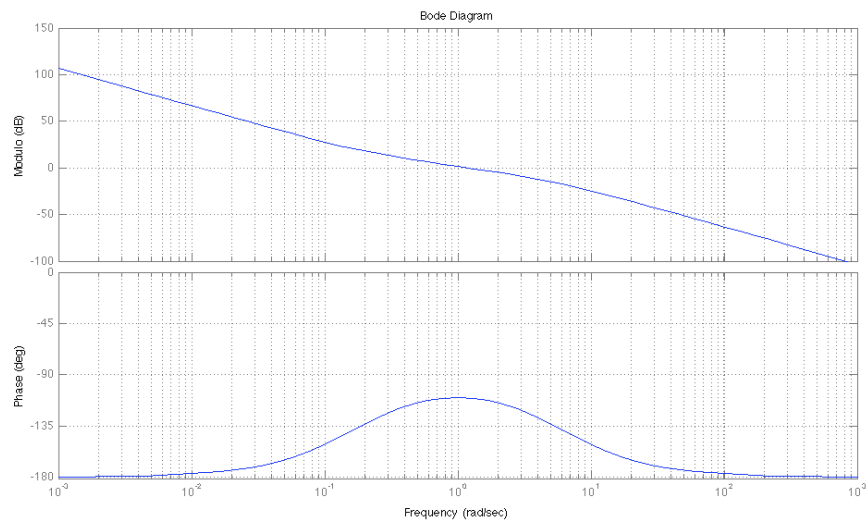


Figura 13: Esempio diagrammi di Bode di  $C(s)G(s)$  con  $K=1$ .

## 5.2 OTTIMIZZAZIONE DEL CONTROLLORE

Dalla figura 14 si nota come la risposta sia stabile, ma la sovraelongazione è superiore al 5% e il valore d'uscita si assesta nel range voluto, ma senza rispettare la specifica sul tempo di assestamento. Agendo sul guadagno, quindi, le cose migliorano di poco, bisogna agire sul margine di fase, aumentandolo, dato che la prima approssimazione (margine di fase 70 gradi) era la soluzione minima e non si è rivelata sufficiente a risolvere il problema.

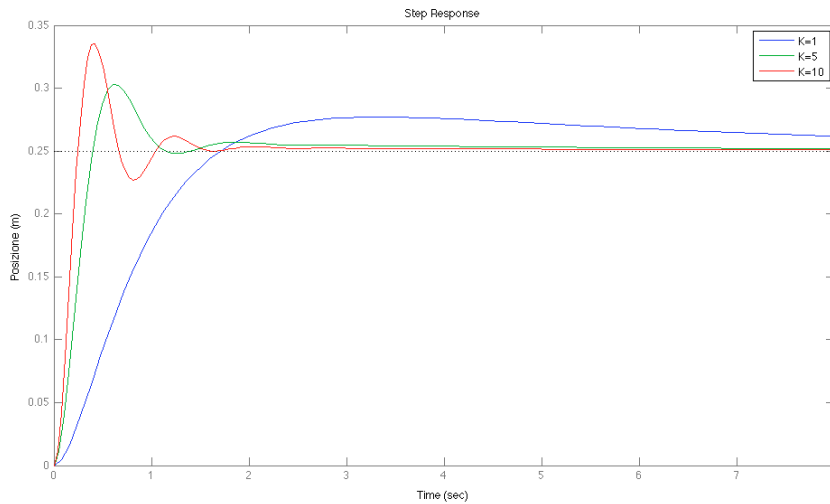


Figura 14: Risposta al gradino con K variabile.

Aumentando il margine di fase a  $m_\phi = 75^\circ$ , e mantenendo il  $K = 2$ , si ottengono dei nuovi valori di  $\alpha$  e  $T$  che danno luogo ad un nuovo controllore che porta dei miglioramenti, ma come si può notare in figura 15 la risposta al gradino soddisfa solo parzialmente le specifiche: l'overshoot è accettabile, anche se al limite, ma il tempo di assestamento non è inferiore a 3 secondi.

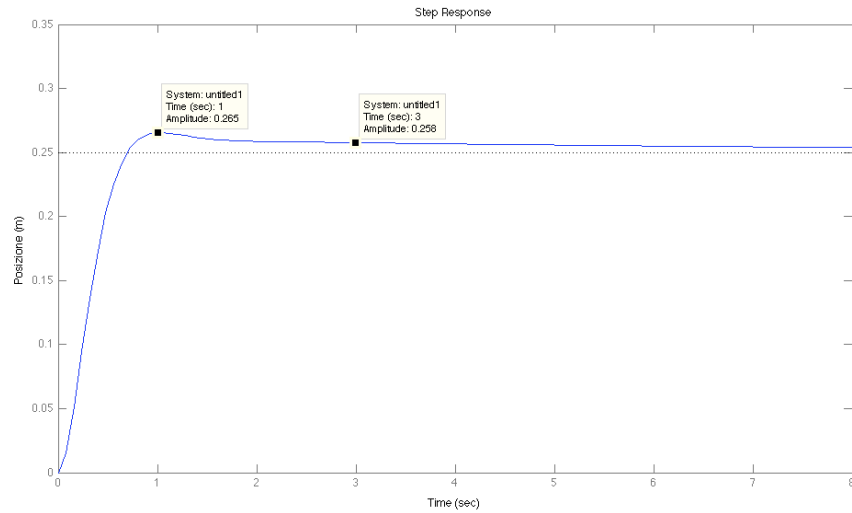


Figura 15: Risposta al gradino con  $K = 2$  variabile e  $m_\phi = 75^\circ$ .

Incrementando ulteriormente il margine di fase ( $m_\phi = 82^\circ$ ) si trovano  $\alpha = 0.049$  e  $T = 14.3$ , un nuovo controllore, quindi, avrà funzione di trasferimento pari a

$$C(s) = 2 \frac{1 + 14.3 s}{1 + 0.0699 s} \quad (29)$$

Il diagramma di Bode di  $C(s)G(s)$  è riportato in figura 16, così come la risposta al gradino di ampiezza 0.25 m. Per il criterio sulla stabilità di Bode: dato che il guadagno è positivo, il margine di fase  $m_\phi$  è positivo allora il sistema retroazionato  $W(s)$  sarà BIBO-stabile. Inoltre osservando la risposta al gradino di ampiezza 0.25 (figura 17) si può verificare che tutte le specifiche vengono rispettate con l'utilizzo del controllore con funzione di trasferimento (29).

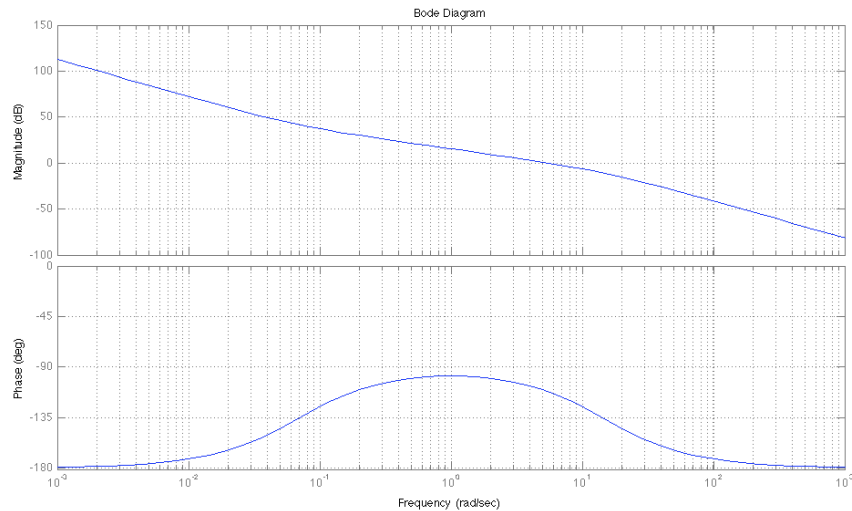


Figura 16: Diagrammi di Bode per  $C(s)G(s)$ .

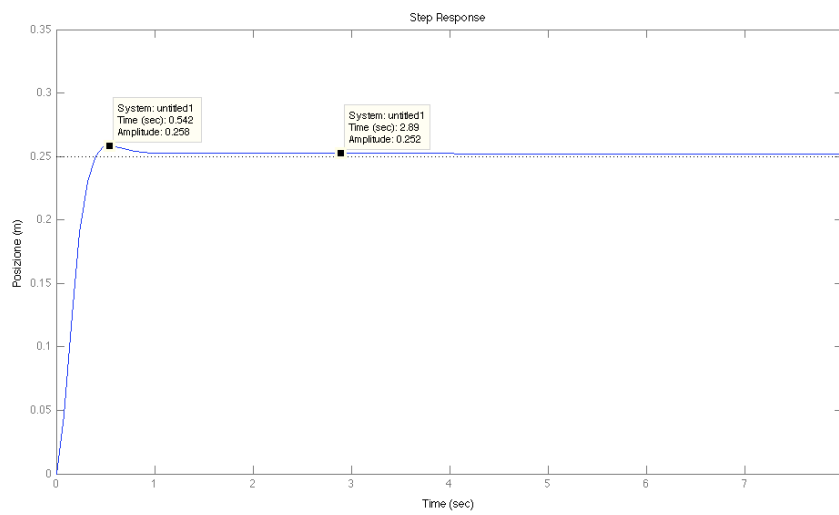


Figura 17: Risposta al gradino del sistema a catena chiusa con controllore.



## CONCLUSIONI

## 6.1 CONFRONTO TRA CONTROLLORI

Nello studio di un sistema stabilizzato è importante verificare l'uscita del controllore ( $u$  in figura 18) per poter valutare i diversi aspetti che caratterizzano i tre controllori progettati nei capitoli precedenti. Proprio nella fase di progettazione l'obiettivo era trovare un controllore che rispettasse le specifiche assegnate sulla base della risposta al gradino, senza prendere in considerazione il comportamento del controllo. L'andamento del segnale  $u(t)$  rispecchia il movimento che dovrà eseguire l'ingranaggio il quale, attraverso il perno, muoverà l'asta. Si vogliono quindi evitare brusche variazioni che potrebbero richiedere una meccanica più precisa. Il segnale  $u(t)$  è riportato nei grafici di figura 19, 20 e 21. Riassumendo i tre controllori progettati sono:

- Controllore PID  $\Rightarrow C(s) = \frac{15+40s}{1+0.0001s}$
- Controllore Luogo delle radici  $\Rightarrow C(s) = 60.046 \frac{(s+0.01)}{(s+7)}$
- Controllore Reti Corretrici  $\Rightarrow C(s) = 2 \frac{1+14.3s}{1+0.0699s}$

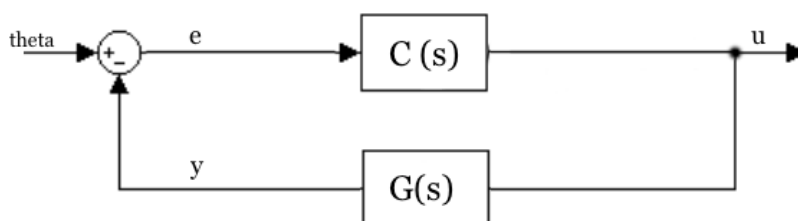


Figura 18: Sistema in catena chiusa, con in evidenza  $u(t)$ .

Tra i tre grafici si possono notare delle somiglianze nell'andamento della curva: all'istante  $t = 0$   $u(t)$  si porta da 0 ad un valore più o meno elevato a seconda del controllore in questione; dopo un periodo transitorio  $u(t)$  si assesta a 0. Nei grafici 20 e 21 si può notare anche una sottoelongazione, più o meno, ampia prima che il segnale si stabilizzi. Nonostante tutti e tre i controllori raggiungano le specifiche indicate, si può notare che il controllore ottenuto con il metodo del luogo delle radici è quello che da origine ad un segnale  $u(t)$  con salto iniziale minore mentre gli altri originano un salto rispettivamente di 1 e 4 ordini di grandezza superiore; volendo evitare brusche variazioni nel segnale  $u(t)$  che richiederebbero un maggior sforzo iniziale

del motore, la scelta cade sul controllore Luogo delle radici che, oltretutto, presenta anche la sottoelongazione minore. Il controllore PID è quello che esaurisce per primo la propria influenza sul sistema, ma questa caratteristica può non essere vista positivamente: è preferibile un movimento più lento con un maggior dispendio in termini di tempo, sempre nel rispetto delle specifiche, piuttosto che movimenti repentini che raggiungono la stabilità in minor tempo, ma possono creare maggiori difficoltà nella progettazione della meccanica che li deve effettuare. Dalle valutazioni fatte risulta preferibile il controllore progettato con il metodo del Luogo delle radici, sebbene anche gli altri risolvano il problema.

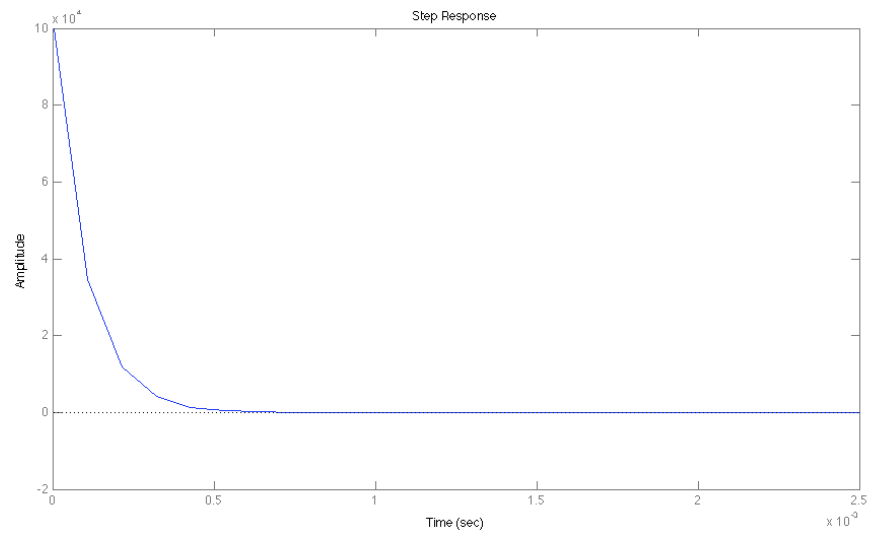


Figura 19: Segnale  $u(t)$  per il controllore PID.

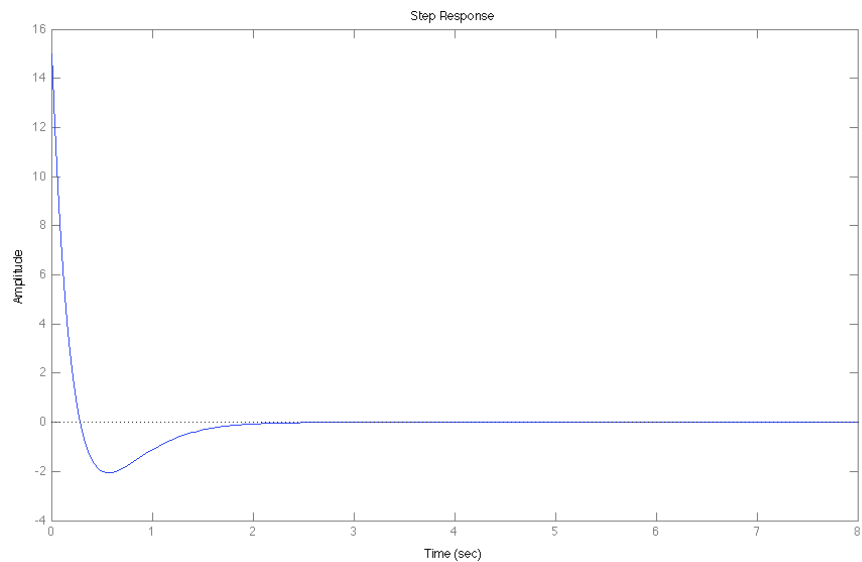


Figura 20: Segnale  $u(t)$  per il controllore Luogo delle radici.



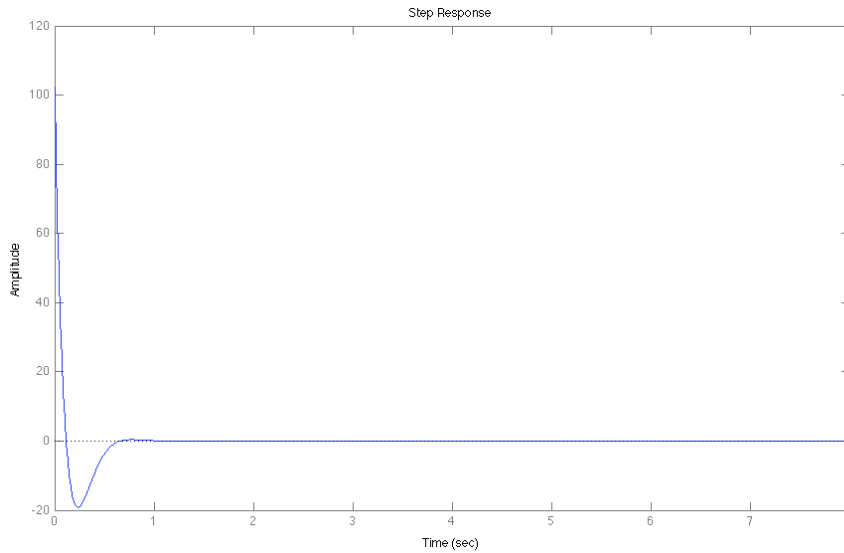


Figura 21: Segnale  $u(t)$  per il controllore Reti correttici.

Bisogna notare che lo studio teorico non considera limitazioni dal punto di vista meccanico per quanto riguarda il motore e quindi l'angolo  $\theta$ ; come evidenziato precedentemente i picchi iniziali sono molto elevati, anche questa è una considerazione teorica perché nella pratica non si potranno realizzare. L'angolo corrispondente a questi valori non sarà realizzabile bisogna invece pensare che il segnale  $u(t)$  possa raggiungere la saturazione. Un valore accettabile di saturazione potrebbe essere  $\theta = \frac{\pi}{2}$  rad. Tenendo in considerazione questo problema è stata valutata la risposta al gradino di ampiezza 0.25 per il sistema in catena chiusa con il controllore Luogo delle radici, che in precedenza era risultato il migliore (Figura 22). Come si può notare, il sistema è ancora stabile, e la pallina si fermerà in posizione 0.25 metri, tuttavia non rispetta la specifica riguardante il tempo di assestamento che risulta essere molto maggiore di 3 secondi.

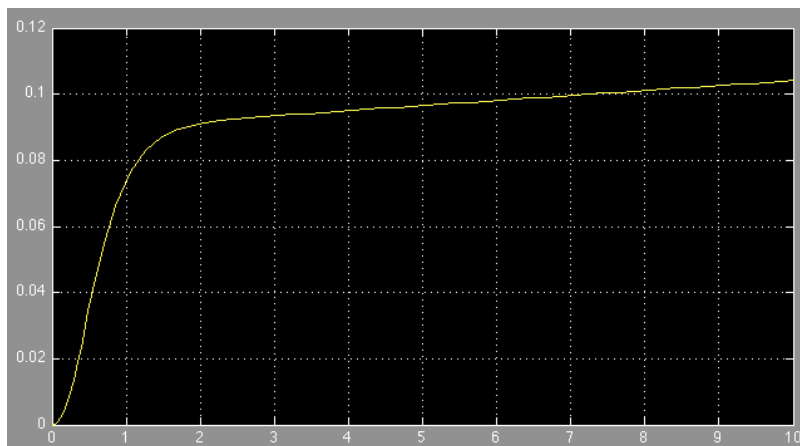


Figura 22: Risposta al gradino.



## BIBLIOGRAFIA

---

- Mauro Bisiacco e Maria Elena Valcher, *Controlli automatici*, libreria Progetto, Padova – 2008.
- Control tutorials for matlab and simulink reperibile al sito:  
<http://www.engin.umich.edu/class/ctms/index.htm>

