



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Ingegneria Industriale DII

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Curriculum Spaziale

**Modellazione di flussi multifase con Wall-Modeled  
Large Eddy Simulation all'interno di un canale  
turbolento**

**Relatore:**

Prof. Federico Dalla Barba

**Laureando:**

Raoul Peroni

Matricola 2123316

ANNO ACCADEMICO 2023/2024



# Abstract

La simulazione numerica di flussi multifase rappresentati da particelle solide trasportate da un flusso gassoso in un canale turbolento è il tema principale su cui si basa questo lavoro. La metodologia utilizzata è la LES, la quale si distingue perché permette di risolvere le strutture vorticosi più grandi, mentre approssima quelle più piccole. Le simulazioni che vengono effettuate si basano sul modello *Wall-Modeled Large Eddy Simulation* (WMLES), il quale riduce i costi computazionali modellando i fenomeni vicino a parete. Questo approccio consente di considerare due fasi distinte modellate in modo differente, ossia la fase continua rappresentata dal flusso e la fase dispersa rappresentata dalle particelle solide.

Il flusso, che rappresenta la fase che trasporta le particelle, viene modellato lontano da parete con il modello *Wall Adapting Local Eddy-Viscosity* (WALE), mentre vicino a parete il profilo di velocità viene calcolato e modellato mediante l'introduzione di una viscosità artificiale per correggere gli sforzi di parete. L'altra fase, rappresentata dalle particelle inerziali, fonda le proprie basi sull'equazione del moto delle particelle classica e adotta metodi differenti combinati tra loro, presenti all'interno del modello sviluppato.

L'implementazione del modello avviene utilizzando il codice adatto al calcolo parallelo e *open-source* CaNS. Il modello avanzato utilizza una combinazione data dal modello LES lontano da parete e dal modello stocastico (CRW) basato sulle equazioni di Langevin vicino a parete. Verrà definita una regione di transizione per il passaggio tra la zona vicina e quella lontana da parete, che porterà ad un miglioramento dei risultati ottenuti mediante l'introduzione di una funzione particolare.

Il modello viene testato a numeri di Reynolds d'attrito differenti:  $Re_\tau = 550, 1020, 2000$ . Per i primi due si cerca di validarlo, mentre per l'ultimo si mostra solamente un andamento qualitativo dei risultati. Le simulazioni sono effettuate con numeri di Stokes differenti, che influenzano l'inerzia delle particelle a seconda del numero di Reynolds considerato. I risultati, in termini di velocità medie, di fluttuazioni RMS lungo le tre direzioni e di concentrazioni normalizzate delle particelle sono confrontati con i dati DNS.

Si è cercato di fornire un modello tarato, generalizzato e robusto da poter impiegare in campi di applicazione più ampi, il quale offre un certo equilibrio tra accuratezza dei risultati e costi computazionali.



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teoria ed Equazioni fondamentali</b>	<b>4</b>
2.1	Equazioni di Navier-Stokes	4
2.1.1	Bilancio di massa	6
2.1.2	Bilancio quantità di moto	8
2.1.3	Equazioni di N-S incompressibili	12
2.2	Flussi turbolenti	14
2.2.1	Cascata di energia	16
2.2.2	Ipotesi di Kolmogorov	19
2.3	Canale turbolento	23
2.3.1	Bilancio delle forze medie	25
2.4	Metodi Numerici	33
2.4.1	Direct numerical simulation	35
2.4.2	Reynolds Averaged Navier Stokes	38
2.4.3	Large eddy simulation	43
2.4.4	Modello WALE	50
<b>3</b>	<b>Flussi Multifase</b>	<b>54</b>
3.1	Fluid-Particle flow	59
3.2	Turboforesi	62
3.3	Equazione del moto delle particelle	67
3.4	Modello stocastico	70
3.5	Equazione di Langevin	72
<b>4</b>	<b>Implementazione del Modello</b>	<b>77</b>
4.1	CaNS	77
4.2	Descrizione generale del canale	82
4.3	Inizializzazione	85
4.4	Modulo les	87
4.5	Modulo particelle	90
4.6	Statistiche del fluido	93
4.7	Correzione del modello	98
4.8	Evoluzione nel tempo	109
<b>5</b>	<b>Discussione dei Risultati</b>	<b>112</b>
5.1	Caso a): $Re_\tau = 1020$	112
5.2	Caso a): Errori	136
5.3	Caso b): $Re_\tau = 550$	142
5.4	Caso c): $Re_\tau = 2000$	153
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>164</b>



# 1 INTRODUZIONE

Lo studio dei flussi multifase costituisce uno dei temi più complessi e affascinanti nell'ambito della ricerca fluidodinamica. Quando, a queste dinamiche, si aggiunge la turbolenza, il livello di complessità cresce ulteriormente. Le interazioni tra le diverse fasi fluide e il comportamento caotico tipico della turbolenza rendono parecchio difficile l'applicazione di modelli tradizionali, spesso inadatti a catturare i dettagli di questi fenomeni.

La turbolenza si manifesta nei fluidi in moto a elevate velocità, specialmente in condizioni tridimensionali. Questo fenomeno, caratterizzato da moti irregolari e imprevedibili, dà origine a vortici di grandezze e intensità diverse. Il comportamento caotico associato alla turbolenza emerge quando le forze viscosive, che tendono a smorzare i moti del fluido, non riescono più a controbilanciare le forze inerziali, cioè quando le forze viscosive diventano trascurabili rispetto a queste ultime. Tale comportamento è particolarmente rilevante nel settore aerospaziale, dove la turbolenza influenza numerosi ambiti, come ad esempio l'efficienza dei motori a reazione alla stabilità atmosferica, o le problematiche connesse al rientro atmosferico dei veicoli spaziali. Padroneggiare questi fenomeni è dunque essenziale per migliorare la progettazione e garantire l'affidabilità dei sistemi aerospaziali.

Un ulteriore elemento di complessità è dato dalla presenza di particelle solide, liquide o gassose all'interno dei flussi, una condizione comune in ambienti non completamente sigillati. Questo porta alla necessità di studiare flussi multifase, il cui comportamento è determinato dalle interazioni tra le fasi presenti. Molti settori ingegneristici si basano sullo studio di tali flussi. Inoltre, modelli che rappresentino accuratamente questi fenomeni sono fondamentali anche per applicazioni ambientali, ad esempio nella simulazione della dispersione di inquinanti atmosferici o nell'analisi dell'impatto di oli dispersi negli oceani. Altre applicazioni, come l'ottimizzazione di sistemi di raffreddamento, le tecnologie energetiche avanzate e la modellazione di fenomeni biomedici, trovano anch'esse grande beneficio dallo studio dei flussi multifase.

Anche quando le particelle presenti nel flusso sono molto diluite, non è possibile ignorarne l'effetto sul sistema. La turboforesi, un fenomeno che porta le particelle sospese a spostarsi verso regioni a bassa intensità turbolenta, è un esempio di quanto possano essere significativi questi contributi. Tale fenomeno provoca, tra le altre cose, l'accumulo di particelle vicino alle pareti, causando modifiche geometriche che influenzano le prestazioni dei sistemi. Questo effetto è evidente, ad esempio, nei sistemi di propulsione, dove la distribuzione non uniforme delle particelle può alterare la combustione o modificare la sezione del condotto, cambiando la dinamica del flusso. Per affrontare tali problematiche, è essenziale sviluppare modelli avanzati capaci di rappresentare accuratamente flussi turbolenti delimitati da pareti (canale turbolento), un tema al centro di questa tesi.

I progressi della fluidodinamica computazionale negli ultimi anni hanno aperto nuove strade per lo studio dei flussi turbolenti e multifase. Tecniche come la Simulazione Numerica Diretta (DNS) e la Large Eddy Simulation (LES) permettono di ottenere una comprensione approfondita di questi fenomeni. La DNS consente di risolvere completamente le equazioni di Navier-Stokes, catturando ogni dettaglio della turbolenza, ma richiede risorse computazionali molto elevate, che ne limitano l'applicazione a geometrie semplici e a numeri di Reynolds moderati. La LES, invece, si concentra sulla risoluzione delle scale più grandi della turbolenza, modellando gli effetti di quelle più piccole. Tra le varianti della LES, si distinguono la Wall-Resolved LES (WRLES), che risolve completamente la regione di parete, e la Wall-Modeled LES (WMLES), che invece utilizza modelli per rappresentare questa zona, riducendo il costo computazionale pur mantenendo una buona accuratezza.

Nonostante l'efficacia di queste tecniche, il loro utilizzo su larga scala è ostacolato dagli alti costi computazionali, che aumentano con il numero di Reynolds. In questo contesto, i modelli stocastici si sono dimostrati strumenti promettenti per rappresentare il comportamento delle particelle in flussi turbolenti. Tra questi, i modelli di tipo Continuous Random Walk (CRW) si distinguono per la loro capacità di rappresentare in modo continuo le velocità istantanee percepite dalle particelle, migliorando la descrizione dei fenomeni di dispersione.

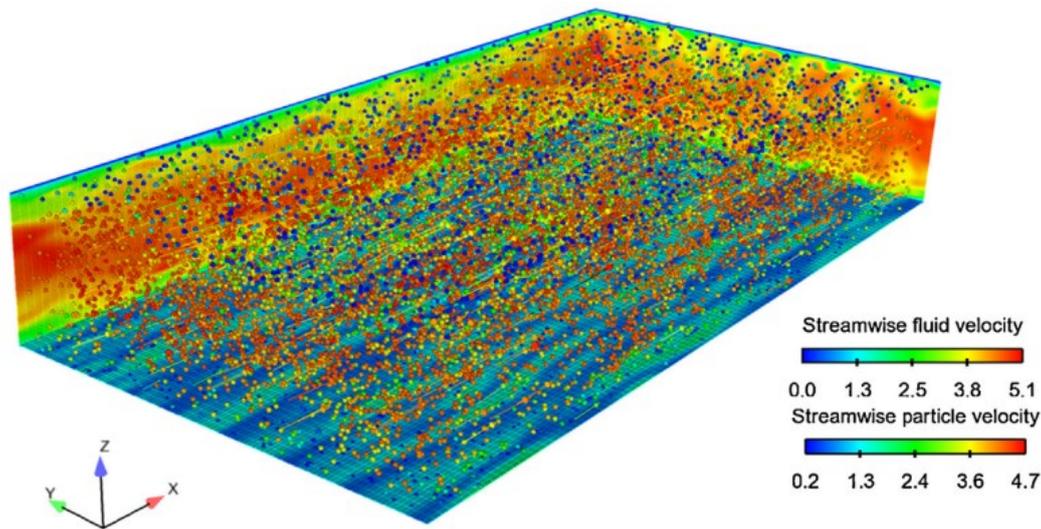


Figura 1. Esempio della velocità istantanea sia per il fluido che per le particelle previsti da un modello LES all'interno di un canale turbolento. [30]

In questo lavoro, l'obiettivo è sviluppare un modello avanzato che permetta di effettuare simulazioni fluidodinamiche di particelle solide trasportate da un flusso in un canale turbolento e che riesca a produrre risultati ottimali con una risoluzione della griglia tridimensionale molto bassa. Questo modello è basato sulla WMLES che verrà accoppiata ad un modello stocastico CRW fondato sulle equazioni di Langevin normalizzate. Questo approccio consente di rappresentare accuratamente la regione vicino a parete, mantenendo però una griglia computazionale meno onerosa. La validità del modello verrà verificata attraverso confronti con risultati ottenuti da simulazioni DNS. Il modello

proposto mira a prevedere il comportamento dei flussi multifase al variare del numero di Reynolds, mantenendo validità anche in regimi di turbolenza differente. Perciò, gli obiettivi consistono non solo nel migliorare e ottimizzare il modello implementato, ma anche nel validarlo ed ampliare il suo campo di applicazione, con l'intento di generalizzarlo il più possibile anche a numeri di Reynolds differenti.

## 2 TEORIA ED EQUAZIONI FONDAMENTALI

### 2.1 EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES

In fluidodinamica le equazioni di Navier-Stokes sono un sistema di tre equazioni di bilancio (equazioni alle derivate parziali) della meccanica del continuo, che descrivono un fluido viscoso lineare. Le equazioni di Navier-Stokes sono in grado di descrivere completamente qualsiasi flusso fluido, anche turbolento. Le equazioni vengono completate dalle condizioni al contorno e dalle condizioni iniziali (condizioni imposte all'inizio temporale del fenomeno da studiare). Possono inoltre essere integrate dall'equazione di stato dei gas perfetti e dalle equazioni di conservazione delle singole specie gassose nel caso di una miscela di gas. La soluzione delle equazioni fornisce il campo delle velocità del fluido. Da questo sarà poi possibile risalire a tutte le altre grandezze che caratterizzano il flusso.

Nel caso generale le equazioni di Navier-Stokes coinvolgono 5 equazioni scalari differenziali alle derivate parziali e 20 variabili. Il bilancio tra equazioni e incognite avviene con la definizione delle proprietà del fluido considerato, delle eventuali forze in gioco e con considerazioni matematiche. Inoltre, a causa della loro non linearità, le equazioni di Navier-Stokes non ammettono quasi mai una soluzione analitica (ovvero una soluzione esatta), ma esclusivamente numerica (una soluzione approssimata con un metodo numerico).

È possibile considerare un sistema costituito da  $N$  molecole: una determinata molecola, indicata con il suffisso  $i$ , è caratterizzata dalla sua massa  $m_i$  e anche dalla sua energia potenziale  $e_i$ , la quale sintetizza tutte le azioni di origine intermolecolare. Al contrario di quello che avviene in un solido, le molecole di un fluido possono muoversi piuttosto liberamente: la molecola  $i$ -esima deve quindi anche essere caratterizzata dalla sua velocità  $v_i$  (velocità microscopica).

Per un sistema meccanico isolato, sono valide le relazioni di conservazione delle grandezze meccaniche microscopiche rappresentate da massa, quantità di moto ed energia, che costituiscono un insieme di cinque relazioni scalari, le quali verranno calcolate in seguito.

Si consideri un sistema rappresentato da un elemento finito di volume  $v_s(t)$  e di massa  $m_s$ , con l'ipotesi di massa costante nel tempo.

Il teorema della divergenza afferma che il flusso di  $\mathbf{V}$  attraverso la superficie chiusa  $\partial v$  coincide con l'integrale della divergenza di  $\mathbf{V}$  svolto nel volume  $v$  di cui la superficie è frontiera. Il termine a sinistra è pertanto un integrale di volume su  $v$ , mentre quello a destra è un integrale di superficie. Il vettore  $n$  è il versore uscente normale alla superficie.

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{V} dv = \int_{\partial v} \mathbf{V} \cdot \hat{n} dS$$

È possibile considerare un sistema di particelle fluide, in cui ogni particella si muove e si trova ad ogni istante di tempo in una posizione diversa. Si considerino alcune grandezze estensive ed intensive (cioè per unità di massa):

	<i>B</i> (estensive)	<i>b</i> (intensive)
<b>Massa</b>	<i>m</i>	1
<b>Quantità di moto</b>	<i>Q</i>	<i>V</i>
<b>Energia totale</b>	<i>E</i>	<i>e</i>

Il Teorema del Trasporto di Reynolds (T.T.R.) permette di portare l'operazione di derivazione sotto il segno di integrale e consente di definire un volume di controllo  $v_c$  fisso nel tempo.

$$\frac{d}{dt} B_{SIS} = \frac{d}{dt} \int_{m_{SIS}} b dm = \frac{d}{dt} \int_{v_s(t)} \rho b dv = \frac{d}{dt} \int_{v_c} \rho b dv + \int_{\partial v_c} \rho b \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

Dopo aver introdotto questi due teoremi, è possibile passare all'analisi del primo bilancio: il bilancio di massa.

## 2.1.1 BILANCIO DI MASSA

Come precedentemente riportato, si considera un sistema caratterizzato da massa costante e quindi da una variazione di massa nel tempo nulla.

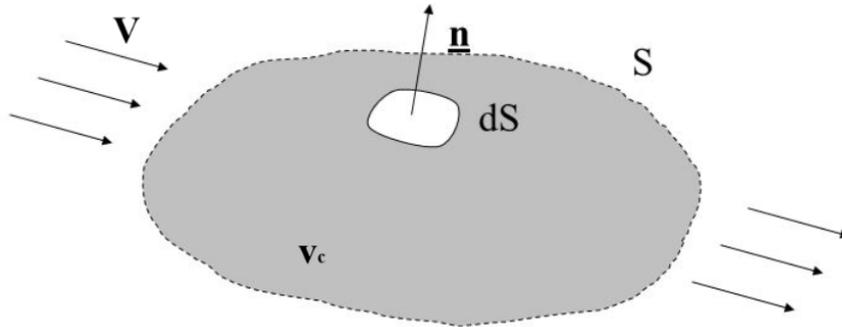


Figura 2. Esempio di sistema caratterizzato da un volume di controllo  $v_c$ , attraversato da un fluido con velocità  $V$  e racchiuso da una superficie  $S$

Si ha che  $\rho$  identifica la densità del fluido, mentre  $\mathbf{V}$  rappresenta il vettore velocità.

$$m_s = \int_{v_s(t)} \rho dv = \text{cost} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} m_s = 0$$

Applicando il Teorema del Trasporto di Reynolds:

$$\frac{d}{dt} m_s = \frac{d}{dt} \int_{v_s(t)} \rho dv = \frac{d}{dt} \int_{v_c} \rho dv + \int_{\partial v_c} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

Sfruttando il teorema della divergenza:

$$\int_{v_c} \frac{\partial}{\partial t} \rho dv + \int_{v_c} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) dv = 0$$

$$\int_{v_c} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] dv = 0 \quad \forall v_c$$

La forma conservativa del bilancio di massa è quindi la seguente. È chiamata anche equazione di continuità.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

È possibile riscrivere l'equazione differenziale in forma indiciale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_j) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial V_j}{\partial x_j} + V_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = 0$$

Che diventa riscrivendo in forma vettoriale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V}$$

Introducendo la derivata materiale si ottiene la forma primitiva del bilancio di massa:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V}$$

Se si considerasse un fluido incomprimibile, sarebbe possibile osservare due aspetti differenti:

- $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , quindi la densità di massa  $\rho$  non dipende dal tempo  $\rho(x, y, z)$ ;
- $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ , quindi la densità di massa  $\rho = cost$  lungo le traiettorie delle particelle fluide.

Questo significa che  $\rho$  è costante in tutti i punti del campo ed in ogni istante temporale; perciò, l'equazione del bilancio di massa diventa:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

Questo vale per un moto sia stazionario che non stazionario e significa che la velocità di dilatazione volumetrica è nulla, sempre considerando solamente fluidi incomprimibili.

Dopo aver concluso l'analisi del bilancio di massa, si ottiene un'equazione in quattro incognite ( $\rho, \mathbf{V}$ ).

## 2.1.2 BILANCIO QUANTITÀ DI MOTO

Si ricomincia dall'analisi del bilancio della quantità di moto utilizzando il 2° principio della dinamica, il quale viene applicato ad un sistema simile al precedente e afferma che la variazione nel tempo della quantità di moto di un sistema  $Q_{SIS}$  è uguale alla somma delle forze esterne agenti sullo stesso sistema considerato.

$$\frac{d}{dt} Q_{SIS} = \sum F_{EXT}$$

$$Q_{SIS} = \int_{m_s} \mathbf{V} dm = \int_{v_s(t)} \rho \mathbf{V} dv$$

Applicando anche in questo caso il Teorema del Trasporto di Reynolds si ottiene:

$$\frac{d}{dt} Q_{SIS} = \frac{d}{dt} \int_{v_s(t)} \rho \mathbf{V} dv = \frac{d}{dt} \int_{v_c} \rho \mathbf{V} dv + \int_{\partial v_c} \rho \mathbf{V} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \mathbf{F}_{EXT,v} + \mathbf{F}_{EXT,s}$$

Le forze esterne che agiscono sul sistema sono date dalla somma vettoriale tra le forze esterne che agiscono sul volume  $F_{EXT,v}$  e le forze esterne che agiscono sulla superficie  $F_{EXT,s}$ .

$$\mathbf{F}_{EXT} = \mathbf{F}_{EXT,v} + \mathbf{F}_{EXT,s}$$

$$\mathbf{F}_{EXT,v} = \rho \mathbf{g}$$

$$\mathbf{F}_{EXT,s} = \mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}})$$

È possibile riscrivere queste forze esterne in termini di integrale di forze infinitesime esterne:

$$\mathbf{F}_{EXT,v} = \int_{v_c} d\mathbf{F}_{EXT,v} = \int_{v_c} \mathbf{g} dm = \int_{v_c} \rho \mathbf{g} dv$$

$$\mathbf{F}_{EXT,s} = \int_{\partial v_c} d\mathbf{F}_{EXT,s} = \int_{\partial v_c} \mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) dS$$

Dove  $\mathbf{g}$  rappresenta l'accelerazione di gravità (che è per unità di massa), mentre  $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}})$  rappresenta il vettore delle tensioni che dipendono dalla direzione della normale alla superficie  $\hat{\mathbf{n}}$ .

Per esprimere in modo migliore  $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}})$  si sfrutta il teorema di Cauchy:

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \vec{\vec{T}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

Dove  $\vec{\vec{T}}$  rappresenta il tensore delle tensioni, il quale è simmetrico  $\vec{\vec{T}} = \vec{\vec{T}}^T$ , cioè  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ .

$$\vec{\vec{T}} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} = [\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}_1) \quad \mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}_2) \quad \mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}_3)]$$

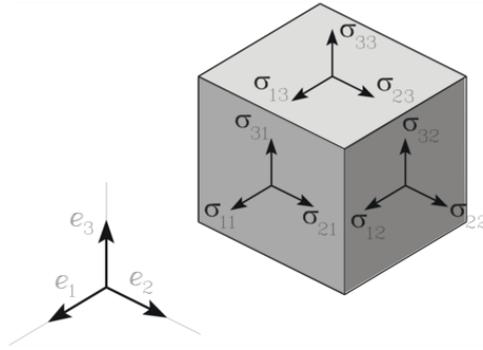


Figura 3. Esempio delle componenti della tensione agenti sulle facce di un cubetto elementare.

Riprendendo l'equazione e utilizzando il teorema della divergenza, è possibile sviluppare ulteriormente il bilancio della quantità di moto come segue:

$$\frac{d}{dt} \int_{v_c} \rho \mathbf{V} dv + \int_{\partial v_c} \rho \mathbf{V} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{v_c} \left[ \frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) - \rho \mathbf{g} \right] dv = \int_{\partial v_c} \vec{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{v_c} \nabla \cdot \vec{\mathbf{T}} dv$$

$$\int_{v_c} \left[ \frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) - \rho \mathbf{g} - \nabla \cdot \vec{\mathbf{T}} \right] dv = 0 \quad \forall v_c$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \vec{\mathbf{T}}$$

Quest'ultima equazione rappresenta la forma conservativa (differenziale) del bilancio della quantità di moto.

Inoltre, i termini a primo membro possono essere sviluppati nel modo seguente:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right)$$

Ed è possibile riscrivere il bilancio di quantità di moto come segue:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \vec{\mathbf{T}}$$

Successivamente, sono state definite le leggi costitutive del materiale, in modo tale da esprimere il tensore delle tensioni in funzione delle sue velocità. Si effettua un'ulteriore ipotesi, ossia si suppone che il flusso considerato sia un fluido newtoniano, il quale ha tensioni viscosive proporzionali alla rapidità di deformazione. Il legame costitutivo è il seguente:

$$\vec{\mathbf{T}} = -p \vec{\mathbf{I}} + 2\mu \vec{\mathbf{E}} + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{V}) \vec{\mathbf{I}}$$

Dove  $\vec{\mathbf{I}}$  è la matrice identità,  $\vec{\mathbf{E}}$  è il tensore di deformazione,  $p$  è la pressione in un punto (non dipende dalla viscosità),  $\mu$  è la viscosità dinamica (dipende dalla temperatura e dal tipo di fluido),  $\lambda$  è il coefficiente di viscosità.  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  rappresenta anche la labilità con cui il volume della particella sta aumentando il volume (deformazione volumetrica).

Il tensore di deformazione, il quale è anche simmetrico, viene definito nel seguente modo:

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) = \vec{\mathbf{E}}^T$$

In forma indiciale diventa:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{ii} & \varepsilon_{ij} & \varepsilon_{ik} \\ \varepsilon_{ji} & \varepsilon_{jj} & \varepsilon_{jk} \\ \varepsilon_{ki} & \varepsilon_{kj} & \varepsilon_{kk} \end{bmatrix} = E_{ji}$$

Inoltre, il tensore di deformazione considera deformazioni lineare lungo la diagonale e deformazioni angolari fuori dalla diagonale.

Un'ulteriore ipotesi viene effettuata al fine di togliere la dipendenza della viscosità dalla posizione.

Questa vale per i fluidi newtoniani e prende il nome di Ipotesi di Stokes:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

È possibile riprendere il legame costitutivo definito in precedenza e riscriverlo in forma indiciale:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu E_{ij} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} = -p\delta_{ij} + \Sigma_{ij}$$

Dove il tensore  $\Sigma_{ij}$  indica gli sforzi viscosi ed è proporzionale alla viscosità dinamica.

Riscrivendo in forma vettoriale il tensore delle tensioni e riprendendo il bilancio della quantità di moto, si sviluppa ulteriormente:

$$\begin{aligned} \vec{T} &= -p\vec{I} + \vec{\Sigma} \\ \frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) &= \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot (-p\vec{I} + \vec{\Sigma}) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \vec{\Sigma} \end{aligned}$$

Questa rappresenta sempre la forma conservativa del bilancio della quantità di moto.

In forma indiciale:

$$\frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho V_i V_j = \rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_i \frac{\partial}{\partial x_j} \rho V_j + \rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

Dal bilancio di massa si ha che:

$$V_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_i \frac{\partial}{\partial x_j} \rho V_j = V_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho V_j \right) = 0$$

Perciò si semplifica l'espressione del bilancio della quantità di moto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho V_i V_j &= \rho \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) = \rho \frac{D}{Dt} V_i \\ \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \vec{\Sigma} \end{aligned}$$

Quest'ultima espressione rappresenta la forma primitiva del bilancio della quantità di moto.

Da un punto di vista fisico, è possibile mostrare quali sono le forze che agiscono sulle particelle fluide:

$$\frac{m}{v} \mathbf{a}_p = \mathbf{f}_{vol} + \mathbf{f}_{press} + \mathbf{f}_{visc}$$

Dove  $v$  indica il volume della particella,  $a_p$  l'accelerazione della particella fluida,  $f_{vol}$  le forze di volume,  $f_{press}$  le forze di pressione,  $f_{visc}$  le forze di viscosità. Queste ultime tre forze sono tutte forze per unità di volume.

Ricapitolando, a partire dal bilancio di massa e di quantità di moto, si è giunti all'ottenimento di quattro equazioni (una dal bilancio di massa e tre dal bilancio di quantità di moto) in cinque incognite ( $\rho, \mathbf{V}, p$ ).

In modo tale da poter chiudere il sistema, viene effettuata l'ipotesi di gas perfetto e viene introdotta l'equazione di stato dei gas:

$$p = \rho RT$$

Dove  $R$  è la costante universale dei gas, mentre  $T$  è la temperatura.

In questo modo, si ottengono cinque equazioni in sei incognite ( $\rho, \mathbf{V}, p, T$ ).

### 2.1.3 EQUAZIONI DI N-S INCOMPRESSIBILI

Dopo aver concluso l'analisi sui bilanci di massa e di quantità di moto, si riportano le espressioni calcolate precedentemente che identificano le equazioni di N-S:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \\ \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \vec{\Sigma} \end{cases}$$

Finora sono state considerate le equazioni da un punto di vista più generale, considerando un fluido viscoso e comprimibile, la cui trattazione non è stata completata in quanto dovrebbe essere studiato anche il bilancio di energia visto che il sistema non è ancora chiuso (quattro equazioni in cinque incognite). Ma per lo studio che è stato effettuato e che verrà approfondito nei capitoli successivi, si è considerato solamente un fluido viscoso incompressibile, di nostro interesse. Perciò, riprendendo le espressioni definite in precedenza, è possibile semplificare ulteriormente considerando un fluido incompressibile la cui densità è  $\rho = \text{cost}$ . Dal bilancio di massa si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 &\Rightarrow \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \end{aligned}$$

La divergenza del campo di velocità è nulla. Questa espressione contribuisce a semplificare le espressioni del bilancio della quantità di moto a partire dalla definizione degli sforzi viscosi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) &= \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \vec{\Sigma} \\ \vec{\Sigma} &= 2\mu \vec{E} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{V}) \vec{I} = 2\mu \vec{E} = 2\mu \left( \frac{\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T}{2} \right) \end{aligned}$$

Si considera l'ipotesi di viscosità dinamica costante  $\mu = \text{cost}$ . In forma indiciale il bilancio della quantità di moto diventa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho V_i V_j &= \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ \rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_i \frac{\partial \rho V_j}{\partial x_j} + \rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} &= \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Semplificando alcuni termini:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) &= \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \end{aligned}$$

Si ottengono quattro equazioni in quattro incognite ( $\rho, \mathbf{V}$ ), nelle quali non è presente l'equazione di stato dei gas e quindi viene meno l'ipotesi di gas perfetto.

Perciò, le equazioni di N-S per un fluido viscoso incomprimibile sono:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \end{cases}$$

Oppure possono essere scritte anche nella forma:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \end{cases}$$

Questo sistema costituisce il modello matematico completo per lo studio del moto di un fluido incomprimibile newtoniano. Il problema risulta ben posto dal punto di vista matematico, una volta specificate le opportune condizioni iniziali ed al contorno. Purtroppo, le equazioni di N-S sono molto complesse da risolvere, in quanto si tratta di equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine, non lineari.

Ricapitolando, le ipotesi che sono state effettuate finora considerando un fluido viscoso sono:

- Massa del sistema costante  $m_s = cost$
- Fluido incomprimibile, cioè con densità costante  $\rho = cost$  e quindi  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$
- Fluido newtoniano ed ipotesi di Stokes, cioè si ha una relazione lineare tra deformazione e tensioni e si ha la viscosità costante  $\mu = cost$ .

## 2.2 FLUSSI TURBOLENTI

La maggior parte dei flussi incontrati nella pratica ingegneristica e in natura sono turbolenti. L'origine dei flussi turbolenti può essere di natura differente, in quanto ci sono molte opportunità di osservare questi nell'ambiente quotidiano, che si tratti ad esempio del fumo di un camino, dell'acqua di un fiume o di una cascata, di raffiche di un forte vento, del flusso sull'ala di un aereo o delle principali correnti oceaniche. Osservando una cascata, si nota subito che il flusso è instabile, irregolare, apparentemente casuale e caotico, e sicuramente il moto di ogni vortice o gocciolina è imprevedibile. Nel "plume" formato da un motore a razzo a propellente solido si possono osservare moti turbolenti su molte scale, a partire da vortici e rigonfiamenti paragonabili per dimensioni alla larghezza stessa del "plume", fino alle scale più piccole che la fotocamera può risolvere. Le caratteristiche menzionate in questi due esempi sono comuni a tutti i flussi turbolenti, con la presenza di un'ampia gamma di scale di lunghezza. Si può affermare che una caratteristica essenziale dei flussi turbolenti è che il campo di velocità del fluido varia in modo significativo e irregolare sia nella posizione che nel tempo. Il campo di velocità solitamente è indicato con  $U(x, t)$ , dove  $x$  è la posizione e  $t$  è il tempo.

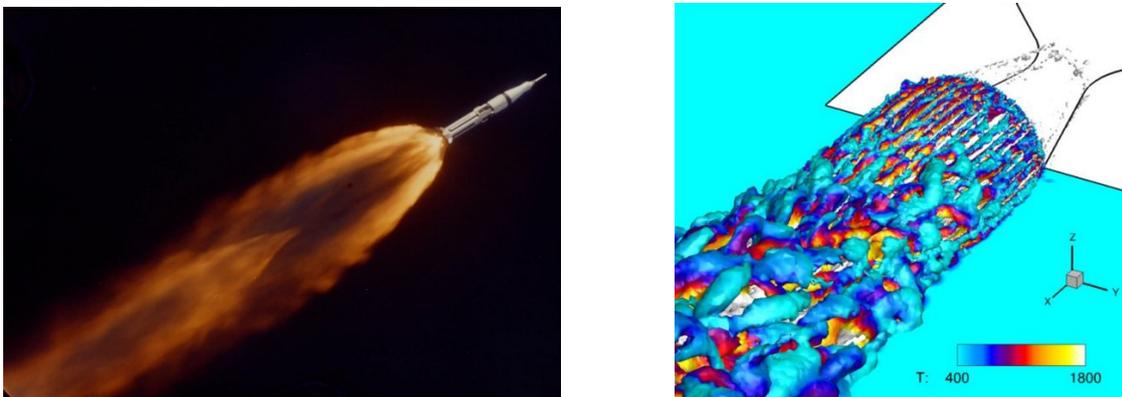


Figura 4. Flusso turbolento presente nel "plume" di un motore a razzo solido. [31][32]

Nelle applicazioni ingegneristiche i flussi turbolenti sono prevalenti, ma meno facilmente visibili. Nel trattamento di liquidi o gas con pompe, compressori, tubazioni, ecc., i flussi sono generalmente turbolenti. Allo stesso modo i flussi attorno ai veicoli (ad esempio aeroplani, automobili, navi e sottomarini) sono turbolenti. La miscelazione del combustibile e dell'aria nei motori, nelle caldaie e nei forni, e la miscelazione dei reagenti nei reattori chimici avvengono in flussi turbolenti.

Una caratteristica importante della turbolenza è la sua capacità di trasportare e mescolare i fluidi in modo molto più efficace rispetto ad un flusso laminare comparabile.

Ad esempio, considerando il flusso all'interno di un tubo, se Reynolds è inferiore a circa 2300, il flusso è laminare; se invece Reynolds supera circa 4000 allora il flusso è turbolento.

La motivazione principale per lo studio dei flussi turbolenti, quindi, è data dal fatto che:

- la stragrande maggioranza dei flussi è turbolenta;

- il trasporto e la miscelazione della materia, della quantità di moto e del calore nei flussi è di grande importanza pratica;
- la turbolenza aumenta notevolmente la velocità di vari processi.

Alcune caratteristiche dei flussi turbolenti sono le seguenti:

- **Casualità:** i flussi turbolenti sembrano irregolari, caotici e imprevedibili.
- **Non linearità:** i flussi turbolenti sono altamente non lineari. La non linearità ha due scopi: Innanzitutto, permette che il parametro di non linearità rilevante (ad esempio il numero di Reynolds  $Re$ , il numero di Rayleigh  $Ra$  o il numero di Richardson inverso  $Ri^{-1}$ ) superi un valore critico. In secondo luogo, la non linearità di un flusso turbolento provoca l'allungamento del vortice, un processo chiave attraverso il quale i flussi turbolenti tridimensionali mantengono la loro vorticità.
- **Diffusività:** a causa della miscelazione macroscopica delle particelle fluide, i flussi turbolenti sono caratterizzati da una rapida velocità di diffusione della quantità di moto e del calore.
- **Vorticità:** la turbolenza è caratterizzata da alti livelli di vorticità fluttuante, con la presenza di varie strutture vorticose identificabili che vengono chiamate "eddies". La visualizzazione dei flussi turbolenti mostra varie strutture che si uniscono, si dividono, si allungano e soprattutto ruotano. Inoltre, una caratteristica della turbolenza è l'esistenza di un'enorme gamma di dimensioni dei vortici. I grandi vortici hanno dimensioni dell'ordine dell'ampiezza della regione di flusso turbolento (ad esempio in uno strato limite questo è lo spessore dello strato) e contengono la maggior parte dell'energia, la quale viene tramandata dai vortici grandi a quelli piccoli mediante interazioni non lineari, fino a essere dissipata per diffusione viscosa nei vortici più piccoli (dimensione dell'ordine dei millimetri).
- **Dissipazione:** il meccanismo di allungamento del vortice trasferisce energia e vorticità su scale sempre più piccole, fino a quando i gradienti diventano così grandi da essere dissipati dalla viscosità. I flussi turbolenti richiedono quindi un apporto continuo di energia per compensare le perdite viscosive.

## 2.2.1 CASCATA DI ENERGIA

I moti turbolenti variano in dimensioni dall'ampiezza del flusso  $\delta$  a scale molto più piccole, che diventano progressivamente più piccole (rispetto a  $\delta$ ) all'aumentare del numero di Reynolds. L'idea della cascata di energia, introdotta da Richardson nel 1922, è che l'energia cinetica entra nella turbolenza attraverso il meccanismo di produzione alle scale del moto più grandi. Questa energia viene poi trasferita, mediante processi inviscidi, su scale sempre più piccole finché, alle scale più piccole, l'energia viene dissipata per azione viscosa. In particolare, nel 1941 Kolmogorov identificò le più piccole scale di turbolenza come quelle che ora portano il suo nome.

Si considera un flusso completamente turbolento ad alto numero di Reynolds con velocità caratteristica  $U_0$  e lunghezza caratteristica  $L_0$ . Si sottolinea che il numero di Reynolds  $Re = \frac{UL}{\nu}$  è grande, rendendo i concetti più facili da comprendere considerando appunto un numero di Reynolds molto alto.

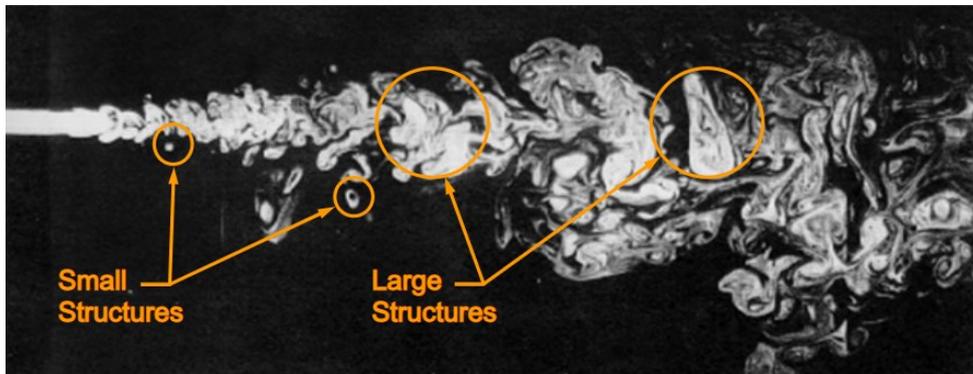


Figura 5. Esempio di strutture vorticosi di dimensioni differenti in un flusso turbolento. [33]

Il primo concetto nella visione di Richardson della cascata energetica è che la turbolenza può essere considerata composta da vortici (“*eddies*”) di differenti dimensioni. I vortici di dimensione  $l$  hanno una velocità caratteristica  $u(l)$  e una scala temporale  $\tau(l) \equiv l/u(l)$ . Un “*eddy*” sfugge ad una definizione precisa, ma è concepito come un moto turbolento, localizzato all’interno di una regione di dimensione  $l$ , che è almeno moderatamente coerente su questa regione. La regione occupata da un grande vortice può contenere anche vortici più piccoli.

I vortici nell'intervallo dimensionale più ampio sono caratterizzati dalla scala di lunghezza  $l_0$  che è paragonabile alla scala di flusso  $L_0$  ( $l_0 \sim L_0$ ), e la loro velocità caratteristica  $u_0 \equiv u(l_0)$  è dell'ordine dell'intensità di turbolenza RMS  $u' \equiv (\frac{2}{3}k)^{1/2}$  che è paragonabile a  $U_0$ . Inoltre, da risultati sperimentali è noto che  $u_0 \sim u'_{RMS} \cong (0.1 \div 0.3)U_0 \sim U_0$ . Si riporta la definizione dell'energia cinetica turbolenta  $k(x, t)$ , la quale è definita come metà della traccia del tensore degli sforzi di Reynolds:  $k = \frac{1}{2}\langle u \cdot u \rangle = \frac{1}{2}\langle u_i u_i \rangle$ . Questa rappresenta l'energia cinetica media per unità di massa nel campo di velocità fluttuante.

Il numero di Reynolds di questi vortici  $Re_0 = \frac{u_0 l_0}{\nu} \sim \frac{u'_{RMS} L_0}{\nu} \sim \frac{U_0 L_0}{\nu} \gg 1$  è quindi grande (cioè paragonabile a  $Re$ ), perciò gli effetti diretti della viscosità sono trascurabili, mentre gli effetti inerziali sono prevalenti.

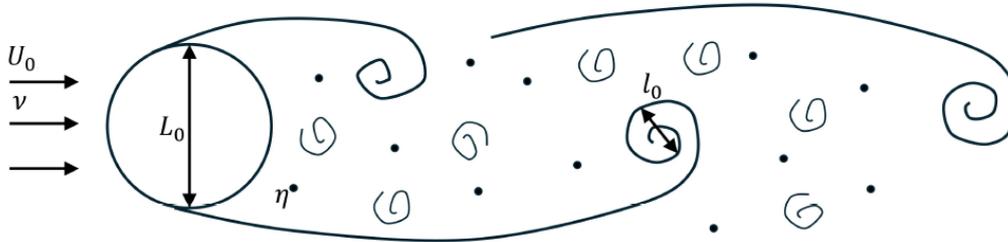


Figura 6. Rappresentazione schematica delle varie scale all'interno di un flusso turbolento. [34]

Richardson affermò che i grandi vortici sono instabili e si rompono, trasferendo la loro energia a vortici un po' più piccoli. Questi vortici più piccoli, a loro volta, subiscono un processo di disgregazione simile e trasferiscono la loro energia a vortici ancora più piccoli. Questa cascata di energia, in cui l'energia viene trasferita a vortici di dimensioni sempre più piccole, continua finché il numero di Reynolds  $Re(l) \equiv \frac{u(l)l}{\nu}$  è sufficientemente piccolo da rendere stabile il moto del vortice, e la viscosità molecolare è efficace nel dissipare l'energia cinetica.

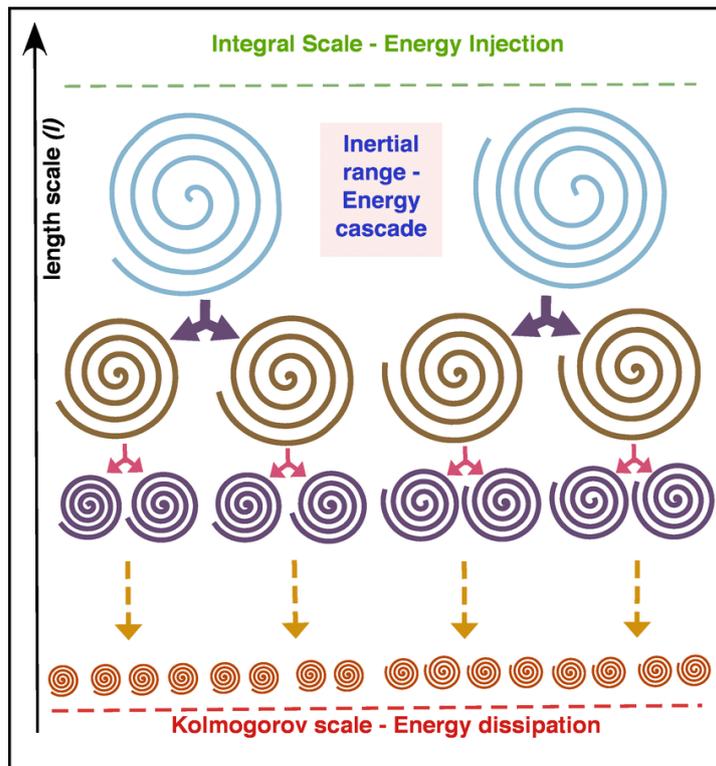


Figura 7. Schema della cascata energetica di Richardson in turbolenza mediante frammentazione vorticoso. [35]

Richardson (1922) riassunse brevemente la questione in questo modo:

*“Big whorls have little whorls,  
Which feed on their velocity;*

*And little whorls have lesser whorls,*

*And so on to viscosity”*

Questo è importante soprattutto per il fatto che pone la dissipazione alla fine di una sequenza di processi. La velocità di dissipazione  $\varepsilon$  è determinata, quindi, dal primo processo della sequenza, che è il trasferimento di energia dai vortici più grandi. Questi vortici hanno un'energia dell'ordine di  $u_0^2$  e una scala temporale  $\tau_0 = \frac{l_0}{u_0}$ , perciò si può supporre che la velocità di trasferimento dell'energia scali in modo proporzionale a  $u_0^2/\tau_0 = u_0^3/l_0$ . Di conseguenza, questa teoria della cascata di energia indica che  $\varepsilon$  scala come  $u_0^3/l_0$ , indipendentemente da  $\nu$  (agli alti numeri di Reynolds considerati), e quindi  $\varepsilon \sim \frac{u_0^3}{l_0} \sim \frac{u_{RMS}^3}{L_0} \sim \frac{U_0^3}{L_0}$ .

## 2.2.2 IPOTESI DI KOLMOGOROV

La teoria avanzata da Kolmogorov si presenta sotto forma di tre ipotesi. Una conseguenza della teoria, che Kolmogorov usò per motivare le ipotesi, è che sia la velocità  $u(l)$  che le scale temporali  $\tau(l)$  diminuiscono al diminuire di  $l$ . Kolmogorov sostenne che le distorsioni direzionali delle grandi scale si perdono nel caotico processo di riduzione delle scale, mediante il quale l'energia viene trasferita a vortici sempre più piccoli. Inoltre, in generale i grandi vortici sono anisotropi e sono influenzati dalle condizioni al contorno del flusso.

**Ipotesi “zero” (di isotropia locale) di Kolmogorov:** *Ad un numero di Reynolds sufficientemente elevato ( $Re \gg 1$ ), i moti turbolenti su piccola scala ( $l \ll l_0$ ) sono localmente omogenei ed isotropi.*

*Le statistiche sono universali e dipendono al più da  $\varepsilon$  e  $\nu$ .*

Il termine “isotropia locale” si riferisce all’isotropia solamente su piccola scala.

Per semplicità, viene introdotta una scala di lunghezza  $l_{EI}$ , approssimabile con  $l_{EI} \approx \frac{1}{6}l_0$ , come demarcazione tra i vortici grandi anisotropi ( $l > l_{EI}$ ) e i vortici piccoli isotropi ( $l < l_{EI}$ ).

Proprio come l’informazione direzionale delle grandi scale si perde quando l’energia passa lungo la cascata di energia, Kolmogorov sostenne che anche tutta l’informazione sulla geometria dei grandi vortici va perduta. Di conseguenza, le statistiche dei moti su piccola scala sono in un certo senso universali, cioè simili in ogni flusso turbolento ad alto numero di Reynolds.

Nella cascata energetica, per  $l < l_{EI}$ , i due processi dominanti sono il trasferimento di energia su scale via via più piccole e la dissipazione viscosa. I parametri importanti sono quindi la velocità  $T_{EI}$  con cui le piccole scale ricevono energia dalle grandi scale (trasferimento di energia), e la viscosità cinematica  $\nu$ . Inoltre, la velocità di dissipazione  $\varepsilon$  è determinata dalla velocità  $T_{EI}$ , e queste sono molto quasi uguali, cioè  $\varepsilon \approx T_{EI}$ . Di conseguenza viene enunciata la prima ipotesi.

**Prima ipotesi di similarità di Kolmogorov:** *In ogni flusso turbolento ad un numero di Reynolds sufficientemente alto ( $Re \gg 1$ ), la statistica dei moti su piccola scala ( $l < l_{EI}$ ) ha una forma universale determinata univocamente da  $\nu$  ed  $\varepsilon$ .*

L'intervallo  $l < l_{EI}$  viene definito “**intervallo di equilibrio universale**”. In questo intervallo, le scale temporali  $l/u(l)$  sono piccole rispetto a  $l_0/u_0$ , in modo tale che i piccoli vortici possano adattarsi rapidamente per mantenere un equilibrio dinamico con la velocità di trasferimento di energia  $T_{EI}$  imposta dai grandi vortici.

Dati i due parametri  $\varepsilon$  e  $\nu$ , si possono rappresentare delle scale di lunghezza, di velocità e temporali uniche, che identificano le cosiddette **scale di Kolmogorov**:

$$\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{\frac{1}{4}}$$

$$u_\eta = (\varepsilon\nu)^{\frac{1}{4}}$$

$$\tau_\eta = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$$

È possibile osservare che le scale di Kolmogorov caratterizzano i vortici più piccoli, grazie al calcolo del numero di Reynolds  $Re_\eta$  basato su queste scale che è unitario e grazie alla velocità di dissipazione  $\varepsilon$  che fornisce una caratterizzazione coerente dei gradienti di velocità dei vortici dissipativi.

$$Re_\eta = \frac{\eta u_\eta}{\nu} = 1$$

$$\varepsilon = \nu(u_\eta/\eta)^2 = \nu/\tau_\eta^2 \quad \text{con } u_\eta/\eta = 1/\tau_\eta$$

A scale così piccole si ha  $Re_\eta = 1$ , perciò si può affermare che la viscosità domina tanto quanto l'inerzia. Inoltre, valutando l'energia dissipata si può trovare che  $\varepsilon \sim \varepsilon_\eta$ , perciò tutta l'energia viene dissipata a queste piccole scale.

I rapporti tra la scala più piccola e quella più grande sono facilmente determinati dalle definizioni delle scale di Kolmogorov e dalla scala  $\varepsilon \sim u_0^3/l_0$ . I risultati sono:

$$\eta/l_0 \sim Re^{-3/4}$$

$$u_\eta/u_0 \sim Re^{-1/4}$$

$$\tau_\eta/\tau_0 \sim Re^{-1/2}$$

Ad un numero di Reynolds elevato, le scale di velocità e le scale temporali dei vortici più piccoli ( $u_\eta$  e  $\tau_\eta$ ) sono piccole rispetto a quelle dei vortici più grandi ( $u_0$  e  $\tau_0$ ). Inevitabilmente, il rapporto  $\eta/l_0$  diminuisce all'aumentare di  $Re$ . Di conseguenza, con un numero di Reynolds sufficientemente alto, esiste un intervallo di scale  $l$  che sono molto piccole rispetto a  $l_0$  e molto grandi rispetto a  $\eta$ , cioè si ha  $l_0 \gg l \gg \eta$ .

Poiché i vortici in questo intervallo sono molto più grandi dei vortici dissipativi, si può supporre che il loro numero di Reynolds  $Re(l) \equiv \frac{u(l)l}{\nu}$  sia grande, e di conseguenza che il loro moto sia poco influenzato dalla viscosità. Quindi, viene enunciata la seconda ipotesi.

**Seconda ipotesi di similarità di Kolmogorov:** *In ogni flusso turbolento ad un numero di Reynolds sufficientemente alto ( $Re \gg 1$ ), la statistica dei moti di scala  $l$  nell'intervallo  $l_0 \gg l \gg \eta$  ha una forma universale determinata univocamente da  $\varepsilon$ , indipendente da  $\nu$ .*

È conveniente introdurre una scala di lunghezza  $l_{DI}$ , ad esempio con  $l_{DI} = 60\eta$ , in modo tale che l'intervallo, nell'ipotesi precedente, sia  $l_{EI} > l > l_{DI}$ . Questa scala di lunghezza  $l_{DI}$  divide l'intervallo di equilibrio universale ( $l < l_{EI}$ ) in due sottointervalli: il sottointervallo inerziale (o *inertial subrange*, con  $l_{EI} > l > l_{DI}$ ) e l'intervallo di dissipazione (o *dissipation range*,  $l < l_{DI}$ ).

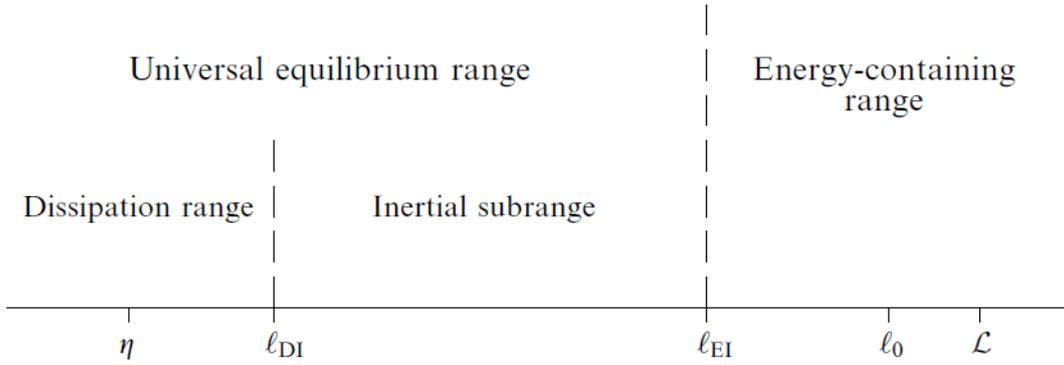


Figura 8. Schema che racchiude tutte le varie scale di lunghezza e rappresenta i diversi intervalli. [36]

I moti nell'*inertial subrange* sono determinati da effetti inerziali (gli effetti viscosi sono trascurabili), mentre solo i moti nell'intervallo di dissipazione subiscono effetti viscosi significativi e quindi sono responsabili essenzialmente di tutta la dissipazione. Le scale di lunghezza, di velocità e temporali non possono essere formate solamente a partire da  $\varepsilon$ . Tuttavia, data la dimensione del vortice  $l$  (nel sottointervallo inerziale), le scale di velocità e le scale temporali sono quelle formate da  $\varepsilon$  e  $l$ :

$$u(l) = (\varepsilon l)^{1/3} = u_\eta (l / \eta)^{1/3} \sim u_0 (l / l_0)^{1/3}$$

$$\tau(l) = (l^2 / \varepsilon)^{1/3} = \tau_\eta (l / \eta)^{2/3} \sim \tau_0 (l / l_0)^{2/3}$$

È possibile valutare anche il numero di Reynolds e la quantità di energia trasferita tra le scale:

$$Re_l = \frac{u_l l}{\nu} \sim \frac{(\varepsilon l)^{1/3} l}{\nu} = \frac{\varepsilon^{1/3} l^{4/3}}{\nu \eta^{4/3}} \eta^{4/3} = \left(\frac{l}{\eta}\right)^{4/3}$$

$$\varepsilon_l \sim \frac{k_l}{\tau_l} \sim \frac{u_l^3}{l} \sim \frac{[(\varepsilon l)^{1/3}]^3}{l} \sim \varepsilon$$

Dove quindi  $Re_l \sim \left(\frac{l}{\eta}\right)^{4/3}$  e l'inerzia è dominante, mentre  $\varepsilon_l \sim \varepsilon$  indica che tutta l'energia è trasportata dalle scale inerziali.

Una conseguenza della seconda ipotesi di similarità è che (nel sottointervallo inerziale) le scale di velocità e le scale temporali  $u(l)$  e  $\tau(l)$  diminuiscono al diminuire di  $l$ .

Nella concezione della cascata di energia,  $T(l)$  indica una quantità di importanza centrale ed è la velocità con cui l'energia viene trasferita dai vortici più grandi di  $l$  a quelli più piccoli di  $l$ . Se questo processo di trasferimento è compiuto principalmente da vortici di dimensioni paragonabili a  $l$ , allora ci si può aspettare che  $T(l) \sim u(l)^2 / \tau(l)$ . L'identità:

$$\frac{u(l)^2}{\tau(l)} = \frac{(\varepsilon l)^{2/3}}{(l^2 / \varepsilon)^{1/3}} = \varepsilon$$

è particolarmente rilevante, poiché suggerisce che  $T(l)$  sia indipendente da  $l$  (per  $l$  nel sottointervallo inerziale), oltre ad essere uguale ad  $\varepsilon$ . Quindi si ottiene:

$$T_{EI} = T(l_{EI}) = T(l) = T_{DI} = T(l_{DI}) = \varepsilon$$

Questo significa che la velocità di trasferimento di energia dalle grandi scale ( $T_{EI}$ ) determina la velocità costante di trasferimento di energia attraverso il sottointervallo inerziale ( $T(l)$ ); da qui la velocità con cui l'energia lascia il sottointervallo inerziale ed entra nell'intervallo di dissipazione  $T_{DI}$ ; e quindi il tasso di dissipazione  $\varepsilon$ .

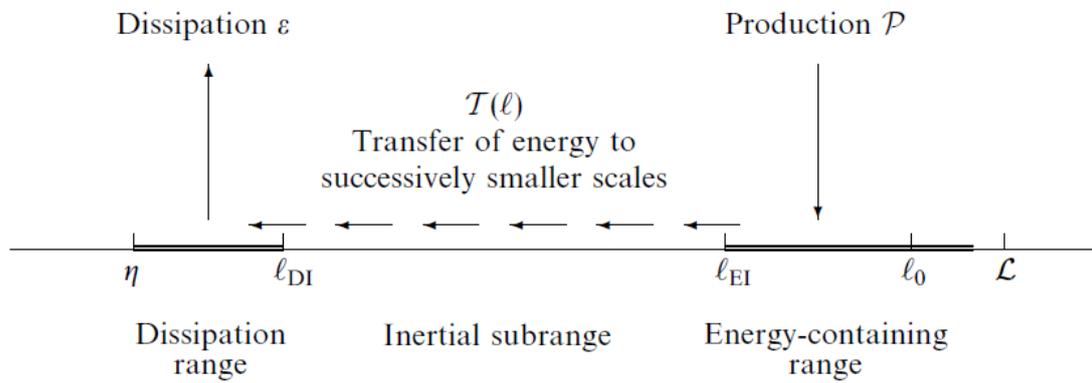


Figura 9. Schema della cascata di energia a varie scale. [37]

## 2.3 CANALE TURBOLENTO

La maggior parte dei flussi turbolenti sono delimitati (almeno in parte) da una o più superfici solide. Alcuni esempi possono includere flussi interni, come il flusso attraverso tubi e condotti; flussi esterni, come il flusso intorno agli aerei e agli scafi delle navi; flussi nell'ambiente come lo strato limite atmosferico. I flussi interni sono di importanza pratica e hanno svolto un ruolo di primo piano nello sviluppo storico dello studio dei flussi turbolenti.

Nella presente trattazione sarà considerato il flusso del canale turbolento completamente sviluppato. Dato un condotto rettangolare di altezza  $h = 2\delta$ , molto lungo ( $L/\delta \gg 1$ ) e con un elevato *aspect ratio* ( $b/\delta \gg 1$ ), dove  $\delta$  è definita come la semi-ampiezza del canale, si ha che il flusso medio è prevalentemente nella direzione assiale (*streamwise*, lungo  $x$ ), con la velocità media che varia principalmente nella direzione trasversale (*wall-normal*, lungo  $y$ ).

La parete inferiore e superiore si trova rispettivamente a  $y = 0$  e  $y = 2\delta$ . L'estensione del canale nella direzione trasversale (o *spanwise*, lungo  $z$ ) è grande rispetto a  $\delta$ , quindi, lontano dalle pareti, il flusso è statisticamente indipendente da  $z$ . Le velocità nelle tre direzioni sono  $(u, v, w)$ , con le componenti mediate  $(U, V, W) = (\langle u \rangle, \langle v \rangle, \langle w \rangle)$ , mentre la velocità media trasversale  $W$  è nulla.

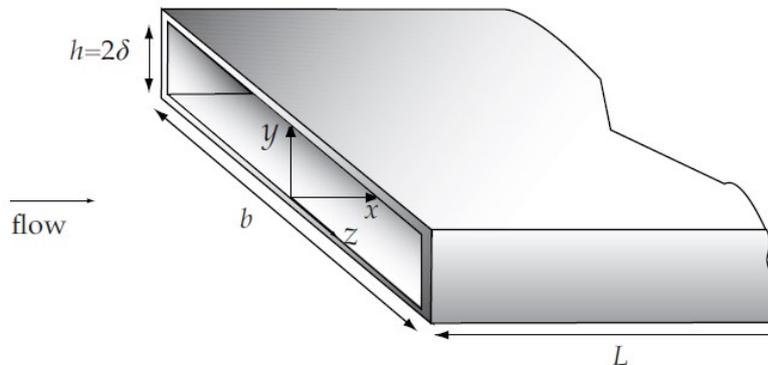


Figura 10. Schema geometrico di un canale turbolento. [38]

Si ha quindi che  $b \gg h$  e  $L \gg h$ .

Si limita lo studio alla regione del flusso completamente sviluppata, in cui le statistiche di velocità non variano più lungo  $x$ . Perciò, il flusso del canale completamente sviluppato è statisticamente stazionario e statisticamente monodimensionale, con le statistiche di velocità che dipendono solo da  $y$  e con il flusso che è statisticamente simmetrico rispetto al piano medio  $y = \delta$ . Questo significa che:

- $U = U(y), V = 0, W = 0$
- Flusso stazionario:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Due direzioni di omogeneità ( $x$  e  $z$ ):  $\frac{\partial}{\partial x} = 0, \frac{\partial}{\partial z} = 0$

I numeri di Reynolds utilizzati per caratterizzare il flusso sono:

$$Re_b = \frac{(2\delta)U_b}{\nu} = \frac{hU_b}{\nu}$$

$$Re_0 = \frac{\delta U_0}{\nu}$$

Dove  $Re_b$  indica il numero di Reynolds bulk, mentre  $Re_0$  è il numero di Reynolds al centro del canale ( $y = \delta$ ).

La velocità  $U_0$  è la velocità al centro del canale, mentre  $U_b$  è la velocità bulk:

$$U_0 = U|_{y=\delta}$$

$$U_b = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} U dy$$

Si ricorda che il flusso è laminare per  $Re < 1350$ , completamente turbolento per  $Re > 1800$ , anche se gli effetti della zona di transizione sono evidenti fino a  $Re = 3000$ .

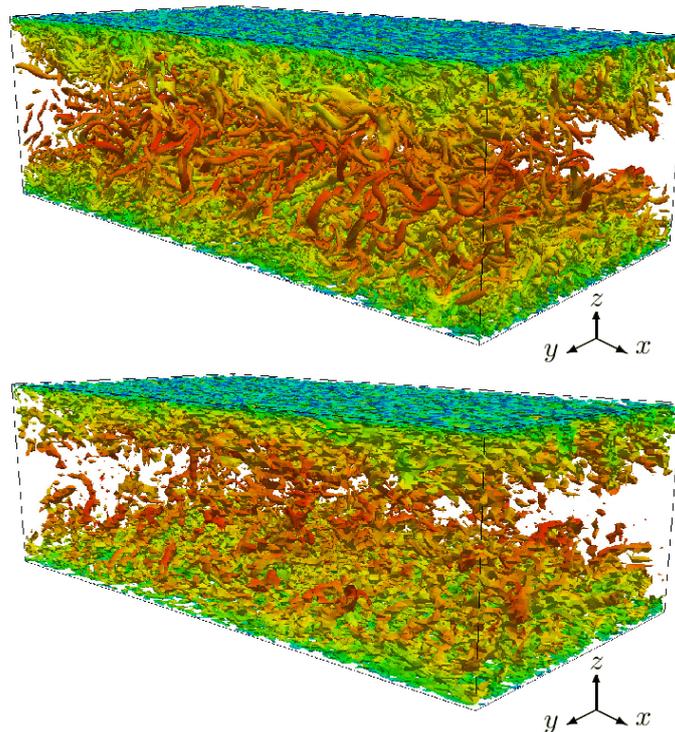


Figura 11. Esempio di una simulazione con strutture vorticosi di un flusso in un canale turbolento. [39]

### 2.3.1 BILANCIO DELLE FORZE MEDIE

Si riportano le equazioni mediate RANS descritte in precedenza:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle \end{cases}$$

Queste possono essere riscritte esplicitando le quattro equazioni scalari, semplificando già  $W = 0$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} \langle u'^2 \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle u'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle u'w' \rangle \right) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} \langle u'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle v'^2 \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle v'w' \rangle \right) \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \left( \frac{\partial}{\partial x} \langle u'w' \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle v'w' \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle w'^2 \rangle \right) \end{cases}$$

Applicando le simmetrie, visto che  $\partial U / \partial x = 0$ , per l'equazione di continuità si ottiene:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \Rightarrow V = \text{cost}, \quad V|_{y=0} = 0 \Rightarrow V = 0$$

Per impermeabilità si osserva che la velocità media trasversale  $V$  si annulla lungo tutto il canale.

Il vettore velocità  $\mathbf{U}(y)$  diventa:

$$\mathbf{U}(y) = (U(y), 0, 0)$$

Invece, per l'equazione della quantità di moto lungo la direzione  $y$  (*wall-normal*), applicando le simmetrie si ottiene quanto segue:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'^2 \rangle \\ 0 &= \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \langle v'^2 \rangle \\ \frac{\partial}{\partial y} (P + \rho \langle v'^2 \rangle) &= 0 \\ p_w(x) &= P + \rho \langle v'^2 \rangle \end{aligned}$$

Dove  $p_w = p_w(x)$  è la pressione media valutata a parete, la quale al più dipende da  $x$ .

Considerando  $y = 0$  e la condizione al contorno  $\langle v'^2 \rangle|_{y=0} = 0$ , si osserva che il gradiente di pressione assiale medio è uniforme attraverso il flusso:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dp_w}{dx}$$

Per quanto riguarda l'equazione della quantità di moto lungo la direzione  $x$  (*streamwise*), sempre applicando le simmetrie, si arriva ad ottenere:

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \langle u'v' \rangle \\
0 &= -\frac{dp_w}{dx} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial}{\partial y} \langle u'v' \rangle \\
0 &= -\frac{dp_w}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \rho \langle u'v' \rangle \\
\frac{dp_w}{dx} &= \frac{d}{dy} \left[ \mu \frac{\partial U}{\partial y} - \rho \langle u'v' \rangle \right] = \frac{d\tau(y)}{dy} \\
\tau(y) &= \mu \frac{\partial U}{\partial y} - \rho \langle u'v' \rangle
\end{aligned}$$

Dove  $\tau(y)$  indica lo sforzo di taglio medio, il quale è costituito dalla somma tra gli sforzi viscosi medi  $\mu \frac{\partial U}{\partial y}$  e gli sforzi turbolenti di Reynolds  $-\rho \langle u'v' \rangle$ . Poiché  $\tau$  è funzione solo di  $y$  e  $p_w$  è funzione solo di  $x$ , è evidente che sia  $d\tau/dy$  che  $dp_w/dx$  sono costanti. Le soluzioni per  $\tau(y)$  e  $dp_w/dx$  possono essere scritte esplicitamente in termini di sforzo di taglio a parete  $\tau_w$ :

$$\tau(y=0) = \mu \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = \tau_w \qquad \tau(y=2\delta) = \mu \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=2\delta} = -\tau_w$$

In cui  $\partial U/\partial y$  indica la pendenza del profilo di velocità.

Perciò, la soluzione può essere scritta come:

$$\begin{aligned}
\tau(y) &= \tau_w \left( 1 - \frac{y}{\delta} \right) \\
\tau_w &= -\frac{dp_w}{dx} \delta
\end{aligned}$$

Si nota che l'andamento di  $\tau(y)$  è lineare, il quale è nullo in mezzeria (per  $y = \delta$ ) ed è massimo a parete (per  $y = 0$ ).

È possibile osservare come, all'aumentare del numero di Reynolds  $Re$  del flusso, aumenti la pendenza del profilo di velocità  $\partial U/\partial y$  e quindi aumenti lo sforzo di taglio a parete  $\tau_w$ .

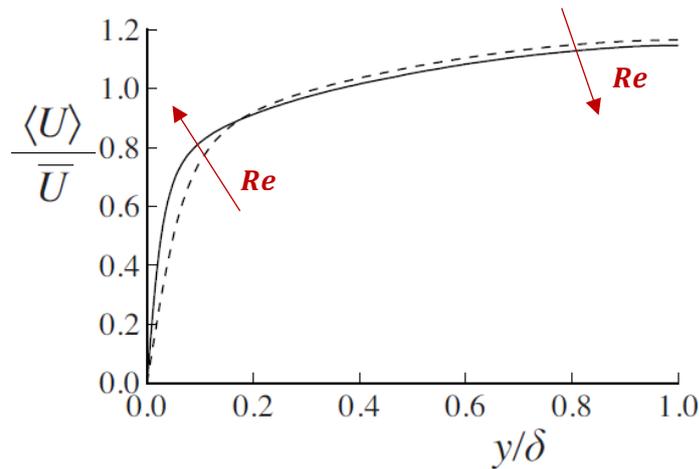


Figura 12. Profilo di velocità medio in un canale turbolento completamente sviluppato in funzione della distanza da parete. [36]

Vengono mostrati i profili degli sforzi viscosi e degli sforzi di Reynolds nei grafici seguenti. Gli sforzi viscosi dominano vicino a parete, mentre gli sforzi di Reynolds dominano lontano da parete la turbolenza. All'aumentare del numero di Reynolds, il contributo dato dagli sforzi viscosi diminuisce, confinandosi nella zona maggiormente vicina a parete, e diventa preponderante il contributo dato dagli sforzi di Reynolds, e viceversa. È evidente che, in prossimità della parete, la viscosità  $\nu$  e gli sforzi di taglio a parete  $\tau_w$  sono parametri importanti.

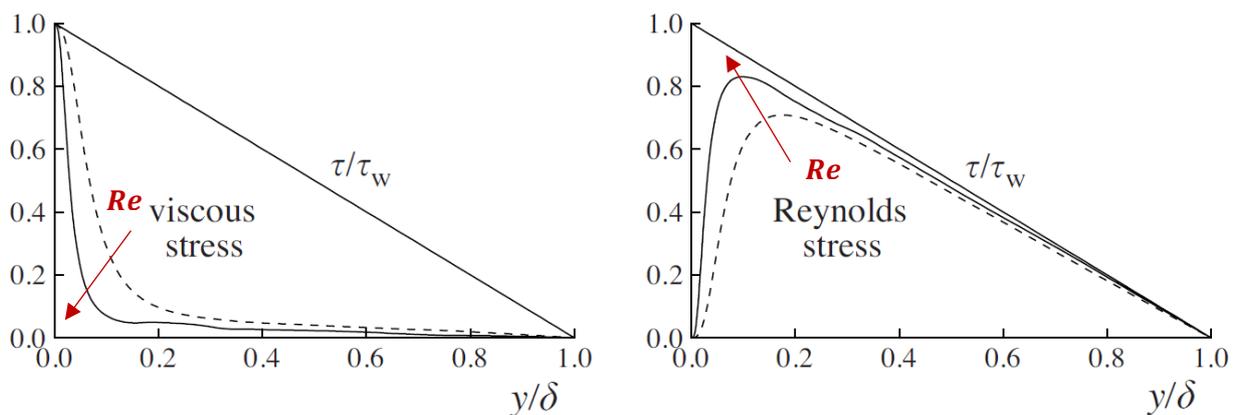


Figura 13. A sinistra, andamento degli sforzi viscosi in funzione della distanza da parete. A destra, andamento degli sforzi turbolenti di Reynolds in funzione della distanza da parete. Sono presenti curve che variano con il numero di Reynolds. [36]

Perciò, si possono distinguere due regioni differenti, caratterizzate in modo differente:

- Regione interna (*inner layer*): si tratta della zona vicino a parete, dove dominano gli sforzi viscosi, cioè dove domina l'effetto dato dalla viscosità;
- Regione esterna (*outer layer*): si tratta della zona lontana da parete, dove dominano gli sforzi di Reynolds, cioè dove domina l'effetto dato dalla turbolenza.

Si vuole studiare la velocità caratteristica e la lunghezza caratteristica che dominano il fenomeno, differenziando in base alla regione considerata:

- Nella regione interna si hanno la velocità d'attrito  $u_\tau$  e la lunghezza viscosa  $\delta_\nu$ , ossia:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad \delta_\nu = \frac{\nu}{u_\tau}$$

- Nella regione esterna si hanno la velocità d'attrito  $u_\tau$  e la lunghezza pari ad  $\delta$ , ossia:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{-\frac{\delta}{\rho} \frac{dp_w}{dx}}$$

Il numero di Reynolds basato sulle scale viscosi è identicamente unitario  $u_\tau \delta_\nu / \nu = 1$ , mentre il numero di Reynolds d'attrito è definito da:

$$Re_\tau = \frac{u_\tau \delta}{\nu} = \frac{\delta}{\delta_\nu}$$

$$Re_\tau \cong 0.09 Re_b^{0.88}$$

La seconda espressione è stata ricavata sperimentalmente e può essere usata per stimare  $Re_\tau$ .

La distanza da parete e la velocità possono essere misurate, anche attraverso la lunghezza viscosa, in unità di parete/interne:

$$y^+ = \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{u_\tau y}{\nu}$$

$$u^+ = \frac{U}{u_\tau}$$

Ci si aspetta che il valore di  $y^+$  determini l'importanza relativa dei processi viscosi e turbolenti. La figura mostra i contributi in frazione rispetto allo sforzo totale, derivanti dagli sforzi viscosi e di Reynolds nella regione vicino alla parete del canale turbolento. Quando questi vengono tracciati rispetto a  $y^+$ , i profili dei due numeri di Reynolds quasi collassano. Il contributo viscoso diminuisce dal 100% a parete ( $y^+ = 0$ ) al 50% per  $y^+ \approx 12$  ed arriva ad essere inferiore al 10% per  $y^+ = 50$ .

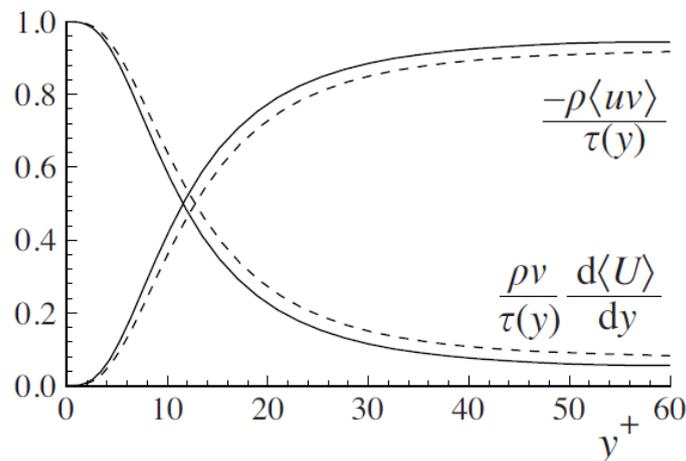


Figura 14. Profili dei contributi frazionari degli sforzi viscosi e di Reynolds rispetto a quelli totali, in funzione di  $y^+$ . [36]

Diverse regioni, o strati, nel flusso vicino alla parete sono definite sulla base di  $y^+$ . La regione interna (viscosa) si ha per  $y^+ < 50$ , dove c'è un effetto diretto della viscosità molecolare sullo sforzo di taglio; mentre, la regione esterna si ha per  $y^+ > 50$  e l'effetto diretto della viscosità è trascurabile. All'interno dell'*inner layer* o, meglio, nel *viscous sublayer*, definito per  $y^+ < 5$ , gli sforzi di Reynolds sono trascurabili rispetto a quelli viscosi.

A livello dimensionale,  $dU/dy$  dipende solo da due parametri adimensionali, per cui, senza fare alcuna assunzione, è possibile affermare quanto segue:

$$\frac{dU}{dy} = \frac{u_\tau}{y} \Phi\left(\frac{y}{\delta_v}, \frac{y}{\delta}\right)$$

Dove  $\Phi$  è una funzione adimensionale universale.

L'idea alla base della scelta di questi due parametri è che  $\delta_v$  è la scala di lunghezza appropriata nel layer interno (dove  $y/\delta_v \ll 1$ ), mentre  $\delta$  è la scala appropriata nel layer esterno (dove  $y/\delta_v \gg 1$ ). La relazione seguente, infatti, permette di comprendere che questi due parametri contengono le stesse informazioni di  $y/\delta$  e di  $Re_\tau$ :

$$Re_\tau = \frac{(y/\delta_v)}{(y/\delta)}$$

Considerando la regione interna, a partire dall'equazione precedente dove era presente anche  $\Phi$  e date le definizioni di  $y^+$  e  $u^+$ , si può riscrivere:

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{1}{y^+} \Phi_1(y^+)$$

L'integrale dell'equazione precedente, per la regione interna, rappresenta la legge della parete (*law of the wall*):

$$u^+ = f_w(y^+) = \int_0^{y^+} \frac{1}{y'} \Phi_1(y') dy'$$

Il punto più importante è rappresentato dal fatto che  $u^+$  dipende unicamente da  $y^+$  per  $y/\delta \ll 1$ .

La condizione di impermeabilità  $U|_{y=0} = 0$  corrisponde a  $f_w(0) = 0$ , mentre la legge degli sforzi viscosi a parete fornisce la derivata  $f_w'(0) = 1$  (semplicemente si ottiene come risultato della normalizzazione dalle scale viscosi). Quindi, l'espansione in serie di Taylor per  $f_w(y^+)$  per piccoli  $y^+$  è:

$$f_w(y^+) = y^+ + O(y^{+2})$$

Questa relazione lineare vale molto bene all'interno del *viscous sublayer*, in quanto gli scostamenti da questa relazione  $u^+ = y^+$  sono trascurabili (quindi per  $y^+ < 5$ ), ma sono significativi (maggiori del 25%) per  $y^+ > 12$ .

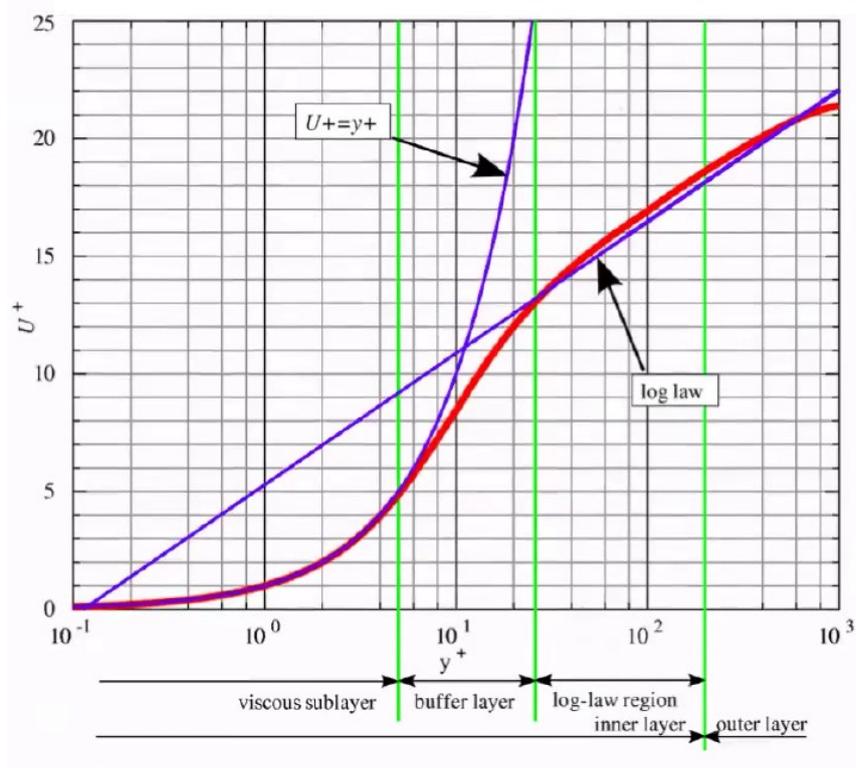


Figura 15. Andamento del profilo di velocità in funzione della distanza da parete, per le varie regioni. [38]

Si vuole riportare, in modo sintetico, una definizione delle differenti regioni/strati in cui è possibile suddividere il flusso del canale turbolento, in funzione di  $y^+$ . Per prima cosa, si considera la suddivisione all'interno della regione interna (*inner layer*):

- *Viscous Sublayer* ( $0 < y^+ < 5$ ), nella quale gli sforzi turbolenti di Reynolds sono trascurabili rispetto agli sforzi viscosi. Vale l'espressione lineare  $u^+ = y^+$ ;
- *Buffer layer* ( $5 < y^+ < 30$ ), che indica la zona di transizione tra il viscous sublayer e la regione log-law, cioè tra la regione dominata dalla viscosità e quella dominata dalla turbolenza;
- *Log-Law Region* ( $y^+ > 30$ ), nella quale la viscosità ha effetti molto piccoli. Viene descritta da una legge caratterizzata da un andamento logaritmico, ossia si ha:

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + B$$

Dove  $B$  è una costante di integrazione, mentre  $k$  è la costante di von Karman. In letteratura c'è qualche variazione nei valori attribuiti alle costanti della legge logaritmica, ma generalmente rientrano all'interno del 5% del valore seguente:  $B = 5.2$ ,  $k = 0.41$ .

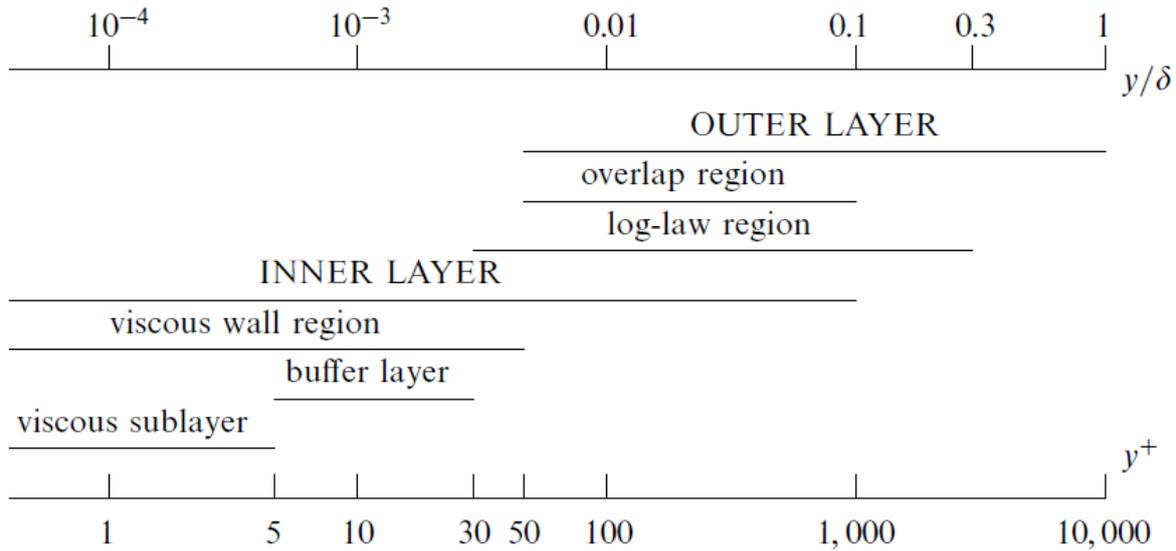


Figura 16. Schema rappresentante le varie regioni e i vari layer definiti in funzione della distanza  $y^+$  e di  $y/\delta$ . [36]

Invece, per quanto riguarda la regione esterna (outer layer), è possibile effettuare la seguente suddivisione:

- *Velocity-Defect Law* ( $y^+ > 50$ ), nella quale è stata fatta l'assunzione che  $\Phi(y/\delta_v, y/\delta)$  sia indipendente dalla viscosità  $\nu$  e questo implica che, per elevati  $y/\delta_v$ ,  $\Phi$  tende asintoticamente solo ad una funzione di  $y/\delta$ . La legge del difetto di velocità è la seguente:

$$\frac{U_c - U}{u_\tau} = -\frac{1}{k} \ln \frac{y}{\delta} - B_1$$

Dove  $U_c$  è la velocità media in mezzeria,  $U$  la velocità media,  $B_1$  una costante dipendente dal flusso. In questa regione, gli effetti diretti della viscosità su  $U$  si considerano trascurabili;

- *Bulk/Wake*, per la quale non ci sono leggi analitiche.

Region	Location	Defining property
Inner layer	$y/\delta < 0.1$	$\langle U \rangle$ determined by $u_\tau$ and $y^+$ , independent of $U_0$ and $\delta$
Viscous wall region	$y^+ < 50$	The viscous contribution to the shear stress is significant
Viscous sublayer	$y^+ < 5$	The Reynolds shear stress is negligible compared with the viscous stress
Outer layer	$y^+ > 50$	Direct effects of viscosity on $\langle U \rangle$ are negligible
Overlap region	$y^+ > 50, y/\delta < 0.1$	Region of overlap between inner and outer layers (at large Reynolds numbers)
Log-law region	$y^+ > 30, y/\delta < 0.3$	The log-law holds
Buffer layer	$5 < y^+ < 30$	The region between the viscous sublayer and the log-law region

Figura 17. Distanza da parete e proprietà delle differenti regioni analizzate. [38]

All'aumentare del numero di Reynolds, si ha una diminuzione del valore  $y/\delta$  che identifica la posizione delle regioni che caratterizzano l'*inner layer*, mentre si ha un aumento della grandezza della regione rappresentata dall'*outer layer*.

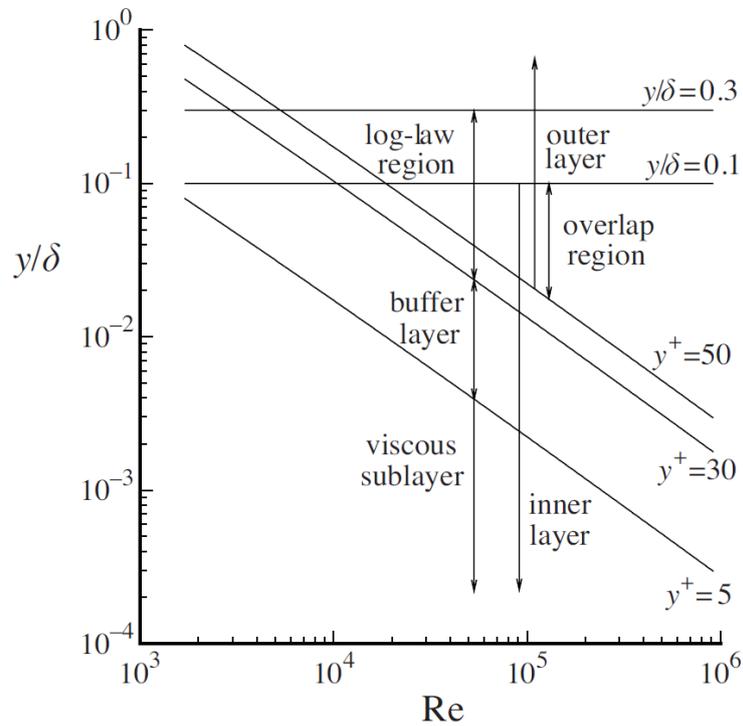


Figura 18. Differenti regioni la cui collocazione è funzione del numero di Reynolds, in un canale turbolento. [36]

## 2.4 METODI NUMERICI

In passato, l'approccio principale allo studio dei flussi turbolenti era sperimentale. Parametri complessivi come la resistenza aerodinamica mediata nel tempo o il trasferimento di calore sono relativamente facili da misurare, ma con l'aumento del livello tecnologico dei dispositivi ingegneristici, aumentano anche i livelli di dettaglio e precisione richiesti, così come i costi, le spese e la difficoltà di effettuare misurazioni. Per ottimizzare un progetto, solitamente è necessario comprendere l'origine degli effetti indesiderati: ciò richiede misurazioni dettagliate che sono costose e richiedono molto tempo. Alcuni tipi di misurazioni sono quasi impossibili da effettuare al momento, mentre altri non possono essere realizzati con la precisione richiesta. Di conseguenza, i metodi numerici hanno un ruolo importante da svolgere, soprattutto ad esempio nella progettazione e ottimizzazione di aerei e navi commerciali e militari, per consentire di effettuare analisi fluidodinamiche che diano ottimi risultati.

Nello studio dei flussi turbolenti l'obiettivo finale è ottenere una teoria quantitativa o un modello che possano essere trattati ed utilizzati per calcolare quantità di interesse e rilevanza pratica. Le metodologie che verranno descritte assumono la forma di set di equazioni alle derivate parziali, in alcuni casi integrate da altre equazioni algebriche, le quali rappresentano i principali approcci computazionali ai flussi turbolenti.

I principali criteri che possono essere utili per valutare quale tra i diversi modelli utilizzare sono:

- a) Livello di descrizione, come i campi istantanei o medi;
- b) Completezza, cioè ad esempio se i parametri della simulazione sono dipendenti o meno dal flusso;
- c) Costo e facilità d'uso;
- d) Campo di applicabilità;
- e) Accuratezza.

Prima di procedere alla discussione dei metodi numerici, è utile introdurre i diversi tipi di simulazione numerica nel seguente modo (si indica con  $\Delta$  la risoluzione spaziale della griglia,  $\eta$  la scala di Kolmogorov,  $L_0$  la dimensione caratteristica dell'oggetto):

- **DNS (Direct Numerical Simulation):** Si basa sul calcolo della soluzione diretta delle equazioni di N-S, cioè vengono calcolate le soluzioni esatte attraverso la risoluzione di tutta la fisica racchiusa all'interno. Poiché le equazioni di N-S sono tridimensionali e tempo-varianti, servirà una mesh tridimensionale e tempo-variante. La risoluzione della griglia dev'essere sufficientemente elevata da rappresentare le strutture turbolente del flusso a qualsiasi scala di lunghezza, al fine di cogliere le strutture vorticosi più piccole ( $\Delta \sim \eta$ ). Questo approccio riesce ad ottenere risultati simili a quelli sperimentali. Tuttavia, non si riesce

a simulare in campo ingegneristico, in quanto questa tecnica è caratterizzata da un costo computazionale molto elevato.

- **RANS (Reynolds-Averaged Navier Stokes):** Rappresenta un set di equazioni differenziali parziali, ottenute scomponendo le equazioni del moto in componenti medie e fluttuanti. Queste non riescono a formare insiemi di equazioni chiuse, quindi questi metodi richiedono l'introduzione di approssimazioni, attraverso l'utilizzo di un opportuno modello agli sforzi di Reynolds. Tuttavia, la risoluzione della griglia è tale da consentire di rappresentare solamente il campo medio, mentre l'accuratezza è scarsa e servono sempre dati sperimentali al fine di validare la soluzione ed effettuare un confronto ( $\Delta \gg \eta$ ). Un vantaggio di questo approccio è il fatto di consentire tempi di simulazione di ordini di grandezza inferiori rispetto alla DNS.
- **LES (Large Eddy Simulation):** Consente di risolvere le equazioni di N-S filtrate. La risoluzione della griglia è tale da consentire di rappresentare solamente le strutture turbolente con una scala di lunghezza maggiore della larghezza di banda del filtro, cioè si basa sulla simulazione delle grandi strutture vorticosi ( $L_0 \gg \Delta \gg \eta$ ) sulla griglia di calcolo del flusso, approssimando o modellando i moti su piccola scala. Questa tecnica può essere considerata come una sorta di compromesso tra RANS e DNS, sia in termini di accuratezza che di costo computazionale.

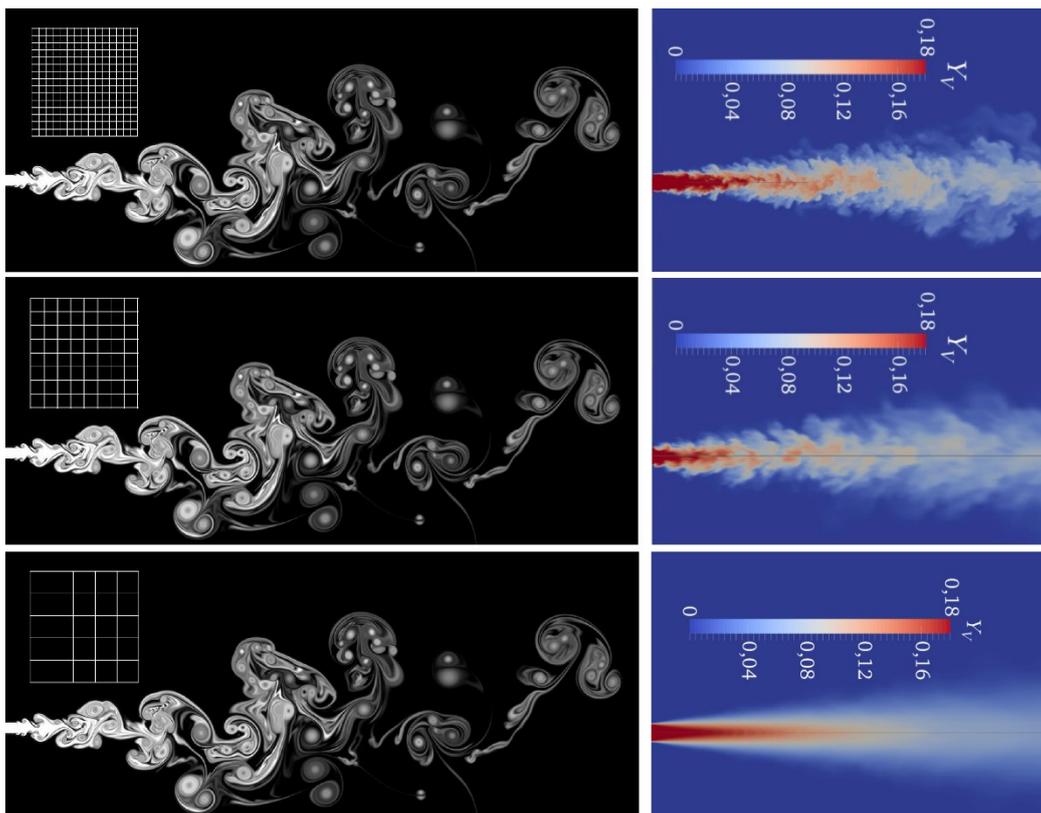


Figura 19. Esempio di confronto tra i diversi metodi, rispettivamente (dall'alto verso il basso) DNS, LES e RANS. A sinistra la dimensione della griglia è confrontata con campi reali. A destra si osservano i campi prodotti dalle simulazioni. [40]

### 2.4.1 DIRECT NUMERICAL SIMULATION

La turbolenza è un fenomeno caotico, non stazionario e multiscala ed è governato dalle equazioni di Navier-Stokes. L'approccio più accurato destinato alla simulazione della turbolenza consiste nel risolvere le equazioni di Navier-Stokes senza mediarle o approssimarle, attraverso la discretizzazione numerica di queste equazioni. È anche l'approccio più semplice dal punto di vista concettuale, il quale prende il nome di Simulazione Numerica Diretta (DNS). Nelle simulazioni effettuate è stato considerato un fluido viscoso incompressibile.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \end{cases}$$

Poiché tali equazioni racchiudono tutta la fisica dei flussi turbolenti, per una corretta evoluzione discreta risulta necessario catturare tutti i processi fisici presenti in turbolenza. Ciò comporta da un lato pesanti vincoli dal punto di vista del costo computazionale, ma dall'altro una riproduzione dettagliata ed accurata del flusso in esame tale che la simulazione acquista un valore paragonabile ad un esperimento. Infatti, in tali simulazioni, tutti i moti contenuti nel flusso vengono risolti, e per garantire che tutte le strutture significative della turbolenza vengano catturate, il dominio su cui viene eseguito il calcolo deve essere grande almeno quanto il dominio fisico da considerare o quanto il più grande vortice turbolento. Una simulazione valida deve anche catturare tutta la dissipazione dell'energia cinetica, che avviene sulle scale più piccole. Quindi, la dimensione della griglia deve essere dell'ordine della scala di Kolmogorov  $\eta$ . Perciò, dev'essere:

$$L_x \sim L_y \sim L_z \sim L_0$$

$$\Delta x \sim \Delta y \sim \Delta z \sim \eta$$

Dove  $L_0$  rappresenta la dimensione caratteristica dell'oggetto,  $L_{x,y,z}$  la dimensione del dominio nelle varie direzioni e  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  la dimensione della griglia nelle varie direzioni. Si ricorda che  $\varepsilon$  indica la dissipazione di energia cinetica turbolenta.

È possibile stimare il numero di punti in ogni direzione, il quale risulta proporzionale al rapporto tra la scala rappresentativa del fenomeno e la scala di Kolmogorov. Per la direzione x vale:

$$N_x = \frac{L_x}{\Delta x} \propto \frac{L_0}{\eta} \propto \frac{L_0 \varepsilon^{1/4}}{\nu^{3/4}} \propto \frac{L_0^{3/4} U_0^{3/4}}{\nu^{3/4}} = Re^{3/4}$$

Considerando  $\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}$  ed  $\varepsilon \propto \frac{U_0^3}{L_0}$ , quindi si ottiene  $N_x \propto Re^{3/4}$ . Estendendo questa espressione alle altre direzioni, è possibile ricavare la proporzionalità tra il numero di Reynolds e il numero totale di punti:

$$N_{tot} = N_x * N_y * N_z = N_x^3 \propto Re^{9/4}$$

Si può affermare che il numero totale di punti  $N_{tot}$  cresce più che quadraticamente con il numero di Reynolds  $Re$ . All'aumentare del numero totale di punti, e quindi all'aumentare del numero di Reynolds, si ha un aumento anche del costo computazionale, che diventa sempre più oneroso. Per dimostrare ciò, si effettua una discretizzazione temporale del problema, tenendo presente che il passo temporale da utilizzare  $\Delta t$  deve essere in grado di risolvere il tempo caratteristico di Kolmogorov  $\tau_\eta$ .  $T$  indica il tempo di simulazione,  $N_{\Delta t}$  il numero di passi temporali.

$$T \sim T_0 = \frac{L_0}{U_0}$$

$$\Delta t \sim \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}$$

$$N_{\Delta t} = \frac{T}{\Delta t} \propto \frac{T_0}{\tau_\eta} \propto \frac{L_0}{\tau_\eta U_0} = \frac{L_0 \varepsilon^{1/2}}{U_0 \nu^{1/2}} \propto \frac{L_0^{1/2} U_0^{1/2}}{\nu^{1/2}} = Re^{1/2}$$

Si può osservare come, all'aumentare del numero di Reynolds, aumentino il numero di passi temporali necessari per effettuare la simulazione.

Perciò, è possibile arrivare alla stima del costo computazionale della simulazione in termini temporali  $T_{tot}$ , che è uguale al prodotto tra il numero di punti totali e il numero di passi temporali:

$$T_{tot} = N_{tot} * N_{\Delta t} = Re^{9/4} * Re^{1/2} \propto Re^{11/4} \propto Re^3$$

Si può notare come il tempo totale della simulazione  $T_{tot}$  aumenti molto rapidamente all'aumentare del numero di Reynolds  $Re$  (al cubo). Tale vincolo restringe il campo di applicazione della DNS a bassi valori di tale numero per evitare costi computazionali eccessivi.

Infatti, poiché il numero di nodi della griglia che possono essere utilizzati in una simulazione è limitato dalla velocità di elaborazione e dalla memoria della macchina su cui viene eseguita, la DNS viene tipicamente eseguita in domini geometricamente semplici.

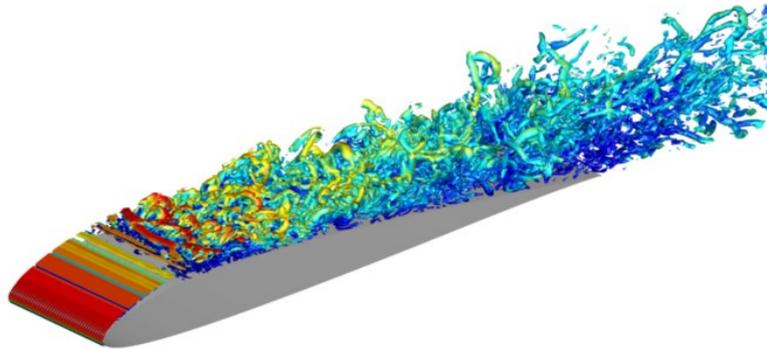


Figura 20. Esempio di simulazione DNS di un flusso turbolento su un profilo alare. [41]

Questo evidenzia chiaramente che, al momento, le simulazioni numeriche dirette di flussi complessi, rilevanti in ambito ingegneristico, non sono praticabili con le risorse computazionali attualmente disponibili e, con ogni probabilità, non lo saranno nemmeno nei prossimi decenni. Tuttavia, i principali vantaggi della simulazione numerica diretta risiedono nella qualità e nella ricchezza dei

dati che essa è in grado di generare. Poiché questa metodologia risolve direttamente le equazioni del moto senza ricorrere a modelli approssimativi, i risultati ottenuti sono di una precisione tale da essere comparabili a quelli sperimentali. Inoltre, questa tecnica fornisce, in tempo reale, l'intero campo vettoriale delle velocità in ogni punto del dominio simulato, una caratteristica estremamente difficile da ottenere con misurazioni sperimentali. Sulla base di queste considerazioni, si può concludere che la simulazione numerica diretta rappresenta una tecnica fondamentale per la ricerca sulla turbolenza. Tuttavia, il suo elevato costo computazionale limita il suo impiego a flussi con numeri di Reynolds relativamente bassi, rendendola poco adatta per analizzare flussi ad alta velocità, come quelli tipici delle applicazioni aerodinamiche.

## 2.4.2 REYNOLDS AVERAGED NAVIER STOKES

La simulazione DNS di flussi turbolenti ad alti numeri di Reynolds richiede risorse computazionali che superano le capacità attuali. Tuttavia, i flussi di interesse ingegneristico, in una prima approssimazione, richiedono solo la configurazione stazionaria dei campi di velocità mediati. Questa osservazione ci porta a considerare l'evoluzione del campo di velocità media anziché quella istantanea. Infatti, mentre i campi di velocità istantanei presentano fluttuazioni anche a piccole scale spaziali (dell'ordine di  $\eta$ ), che impongono restrizioni severe sul passo di griglia, i campi mediati risultano notevolmente più lisci. Di conseguenza, il passo di griglia è limitato principalmente dai gradienti del campo medio, anziché dalle fluttuazioni a piccola scala.

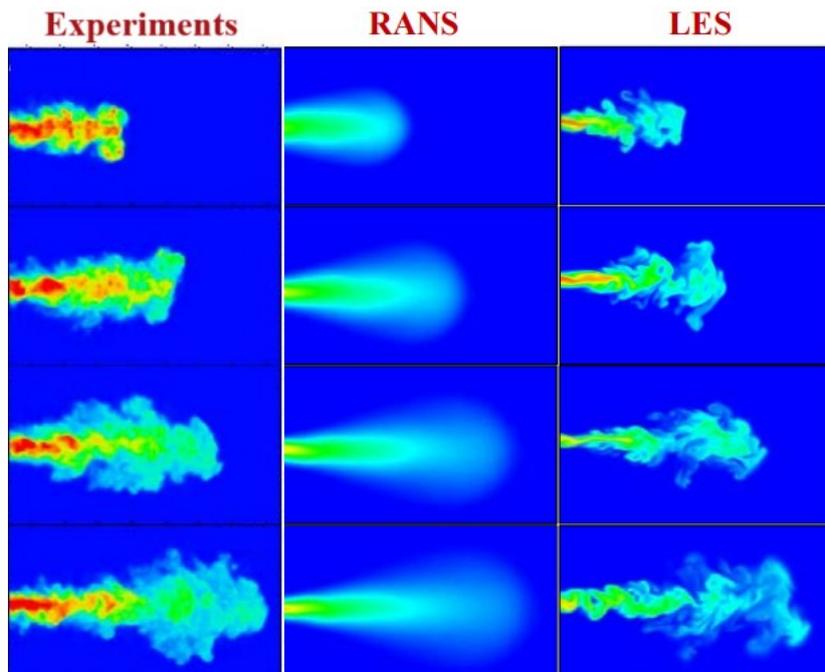


Figura 21. Esempio di simulazioni di flussi turbolenti per i modelli RANS e LES, confrontati con risultati sperimentali. [42]

Inoltre, una caratteristica interessante dei campi mediati è che recuperano le simmetrie legate alla geometria del problema. Ad esempio, in un flusso all'interno di un condotto assial-simmetrico, i campi di velocità istantanei sono tridimensionali e presentano fluttuazioni fino alla scala  $\eta$ , mentre i campi mediati diventano assial-simmetrici. Questa proprietà consente di utilizzare griglie bidimensionali per simulare flussi in geometrie simmetriche, come quelli in condotti o getti circolari.

Al fine di ricavare le equazioni mediate RANS, è necessario partire dalle equazioni di Navier-Stokes incomprimibili:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \end{cases}$$

In questo caso, si è indicato con  $\mathbf{u}$  il campo della velocità per garantire una maggiore comprensione. Espresse in notazione indiciale, le equazioni di N-S diventano:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{cases}$$

È necessario introdurre la cosiddetta media d'insieme o media alla Reynolds, la quale si applica a diverse realizzazioni di un flusso:

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \langle \mathbf{u}(x, y, z, t) \rangle = \sum_{k=1}^{N \gg 1} \mathbf{u}_k(x, y, z, t)$$

Anche la decomposizione alla Reynolds è necessaria:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{U}(x, y, z, t) + \mathbf{u}'(x, y, z, t)$$

In cui il campo istantaneo di velocità è uguale alla somma tra il campo medio e il campo fluttuante delle velocità.

Alcune proprietà che verranno applicate sono le seguenti:

- la media alla Reynolds è un operatore lineare, quindi commuta con tutti gli operatori derivativi lineari, ad esempio:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x} \langle \mathbf{u} \rangle = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \qquad \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{u} \rangle = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}$$

- la media alla Reynolds di una quantità media è la quantità media stessa:

$$\langle \mathbf{U} \rangle = \mathbf{U}$$

- la media alla Reynolds di una quantità fluttuante è nulla. Dalla decomposizione si ha:

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{U} \rangle + \langle \mathbf{u}' \rangle \Rightarrow \mathbf{U} = \mathbf{U} + \langle \mathbf{u}' \rangle \Rightarrow \langle \mathbf{u}' \rangle = \mathbf{0}$$

Ora è possibile iniziare a ricavare le equazioni mediate RANS.

Applicando la media alla Reynolds all'equazione di continuità, si ottiene:

$$\left\langle \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right\rangle = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_j \rangle = \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$$

Inoltre, si ha anche:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (U_j + u'_j) = 0$$

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0$$

Perciò, si può affermare che sia il campo di velocità media sia il campo delle fluttuazioni sono solenoidali, cioè la divergenza di questi campi è nulla.

Invece, applicando la media e la decomposizione alla Reynolds all'equazione del momento, si ha:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial(U_i + u'_i)}{\partial t} + (U_j + u'_j) \frac{\partial(U_i + u'_i)}{\partial x_j} \right\rangle &= \left\langle -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2(U_i + u'_i)}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle \\
\frac{\partial U_i}{\partial t} + \langle U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \rangle + \langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \rangle &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle p \rangle + v \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \\
\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \left\langle \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j} - u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} \right\rangle &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \\
\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}
\end{aligned}$$

Quest'ultima espressione rappresenta l'equazione del momento mediata. Il termine aggiuntivo  $-\langle u'_i u'_j \rangle$  prende il nome "stress di Reynolds" e ha la forma matematica di un termine di stress. In forma vettoriale, gli stress di Reynolds diventano  $-\langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle$  e rappresentano il tensore degli sforzi di Reynolds, il quale è simmetrico e dipende dalla media delle fluttuazioni di velocità al quadrato.

$$-\langle u'_i u'_j \rangle = -\langle u'_j u'_i \rangle = - \begin{bmatrix} \langle u'^2 \rangle & \langle uv' \rangle & \langle uw' \rangle \\ \langle uv' \rangle & \langle v'^2 \rangle & \langle vw' \rangle \\ \langle uw' \rangle & \langle vw' \rangle & \langle w'^2 \rangle \end{bmatrix}$$

Le equazioni mediate RANS sono le seguenti:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0, & \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle \end{cases}$$

In forma vettoriale diventano:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \\ \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\frac{\nabla P}{\rho} + v \nabla^2 \mathbf{U} - \nabla \cdot \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle \end{cases}$$

Il secondo membro dell'equazione del momento è costituito da tre termini differenti, i quali rappresentano rispettivamente gli stress di pressione, gli stress viscosi e gli stress di Reynolds.

Il termine relativo agli stress di Reynolds non è noto; quindi, rientra tra le incognite del problema. Il sistema è caratterizzato da 4 equazioni (una della continuità e tre del momento) in 10 incognite:  $P, U, V, W, \langle u'^2 \rangle, \langle v'^2 \rangle, \langle w'^2 \rangle, \langle u'v' \rangle, \langle u'w' \rangle, \langle v'w' \rangle$ .

In realtà, le incognite indipendenti del tensore degli sforzi di Reynolds sono 5, perché in generale è necessario conoscere solo la parte deviatorica di tale tensore, in quanto, data la natura della pressione nei flussi incomprimibili, quella sferica può essere inglobata in una sorta di pressione modificata. Quindi, in realtà le incognite totali da considerare sono 9.

Gli stress di Reynolds non possono essere trascurati: pur essendo costituiti da fluttuazioni di velocità del secondo ordine, sono di fondamentale importanza, in quanto queste sollecitazioni aggiuntive sul campo medio di un flusso turbolento possono essere molto maggiori del contributo viscoso.

Questo rappresenta il problema della chiusura per le RANS, in quanto non è possibile chiudere esattamente il problema. Perciò, è necessario procedere attraverso la modellazione della turbolenza, studiando in modo più approfondito gli sforzi di Reynolds.

Per definizione, l'energia cinetica turbolenta  $k$  associata alle fluttuazioni è pari a:

$$k = \frac{\langle u'_i u'_i \rangle}{2} = \frac{\langle u'^2 + v'^2 + w'^2 \rangle}{2}$$

Quindi, l'unica strada percorribile per la risoluzione delle equazioni RANS, appare una modellizzazione del tensore degli sforzi di Reynolds in funzione del campo di velocità mediato.

Una prima ipotesi semplificativa viene chiamata "Ipotesi di Boussinesq" e si basa sul concetto della viscosità turbolenta. Tale assunzione trae origine dalla constatazione che nei flussi turbolenti le proprietà di trasporto e di diffusione appaiono molto efficaci, in quanto le strutture turbolente più fini velocizzano i processi di trasporto e di diffusione delle stesse trasportando convettivamente massa, quantità di moto ed energia.

Boussinesq ipotizzò che il tensore degli sforzi di Reynolds (che è possibile chiamare  $\tau_{ij}$ ) avesse una struttura simile al tensore degli sforzi molecolari  $T_{ij}$ :

$$\frac{T_{ij}}{\rho} = -\frac{p}{\rho} \delta_{ij} + 2\nu e_{ij}$$

$$\tau_{ij} = -\langle u'_i u'_j \rangle = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + 2\nu_T E_{ij}$$

Dove con  $k$  si indica l'energia cinetica turbolenta, con  $E_{ij}$  il tensore di deformazione del campo medio, e con  $\nu_T$  la viscosità turbolenta, la quale è una proprietà del regime di moto del flusso (e non dal flusso considerato), ed è funzione dello spazio e del tempo.

È possibile definire la pressione modificata come:

$$p_m = \frac{p}{\rho} + \frac{2}{3} k$$

Questo permette di riscrivere le equazioni mediate RANS come segue:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0, & \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P_m}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [2(\nu + \nu_T)E_{ij}] \end{cases}$$

Ora si ottiene un sistema costituito da 4 equazioni e 5 incognite:  $U, V, W, \nu_T, p_m$ .

Bisogna fornire un'espressione opportuna per  $\nu_T$  in modo tale che il sistema risulti chiuso e risolvibile da un punto di vista numerico.

Esistono diversi modelli per la viscosità turbolenta:

- ❖ **Spalart-Allmaras (S-A)**: composto da una equazione. È un modello molto robusto e di facile implementazione, non occupa molta memoria ed è caratterizzato da ottime proprietà di

convergenza. Inoltre, permette di sfruttare griglie con risoluzioni basse per simulare i vari fenomeni. Tuttavia, la lunghezza della turbolenza e le scale temporali non sono così ben definite come in altri modelli, e non utilizza le “wall functions”.

- ❖  **$k - \varepsilon$** : composto da due equazioni. La viscosità turbolenta è definita come  $\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ , dove l'energia cinetica turbolenta è  $k = \frac{\langle u_i' u_i' \rangle}{2}$ , la dissipazione di energia è  $\varepsilon = 2\nu \langle e_{ij}' e_{ij}' \rangle$ , mentre  $C_\mu$  è il coefficiente che indica la prima costante di taratura del modello e subisce variazioni a seconda del flusso considerato.

Questo modello viene utilizzato lontano da parete, perché permette di ottenere risultati più accurati, in quanto è molto meno sensibile alle condizioni d'ingresso. Invece, vicino a parete varia in modo discontinuo, oltre a presentare prestazioni scadenti in caso di grandi gradienti di pressione avversi.

- ❖  **$k - \omega$** : composto da due equazioni. In questo caso,  $\varepsilon$  è stata sostituita dalla velocità di dissipazione specifica  $\omega = \frac{\varepsilon}{k}$  e dimensionalmente rappresenta una pulsazione (si misura in  $s^{-1}$ ). La viscosità turbolenta è definita come  $\nu_T = C_\mu \frac{k}{\omega}$ .

Questo modello viene utilizzato vicino a parete, perché permette di ottenere risultati più accurati in prossimità dello strato limite. Invece, lontano da parete dà risultati scadenti in quanto è più sensibile alle condizioni d'ingresso, oltre a presentare più problemi di convergenza rispetto al modello precedente.

- ❖  **$k - \omega - BSL$  o  $k - \omega - SST$** : composti da due equazioni. Si tratta di modelli ibridi che sfruttano i vantaggi dei modelli  $k - \varepsilon$  e  $k - \omega$ , perciò sono molto più efficienti. Utilizzano quindi una formulazione  $k - \omega$  vicino a parete e cambiano modello passando al  $k - \varepsilon$  lontano da parete, permettendo di risolvere i problemi che influenzano singolarmente questi due modelli. Inoltre, il modello  $k - \omega - SST$  può essere usato come modello di turbolenza a basso numero di Reynolds senza implementare ulteriori funzioni di smorzamento. Questo è considerato essere il miglior modello completo, basato sull'ipotesi di Boussinesq, sia in termini aerodinamici che di flussi turbolenti di canale (ad esempio camere di combustione).

### 2.4.3 LARGE EDDY SIMULATION

La tecnica RANS precedentemente descritta risolve le equazioni mediate utilizzando un modello che influisce in modo significativo sulla dinamica del flusso. Tuttavia, questo modello presenta delle caratteristiche non universali, poiché include costanti di taratura che variano in base alla specifica configurazione del flusso. Inoltre, un altro limite della RANS è l'incapacità di descrivere fenomeni non stazionari, che sono invece rilevanti in numerose applicazioni ingegneristiche. Ad esempio, nella previsione meteorologica, è fondamentale catturare i moti non stazionari delle strutture cicloniche (vorticoso) atmosferiche, un aspetto che non può essere simulato utilizzando le tecniche RANS. A causa di queste limitazioni, legate sia alla non universalità del modello che alla sua incapacità di trattare fenomeni non stazionari, è stata sviluppata una nuova classe di modelli: la Large Eddy Simulation (LES).

I flussi turbolenti contengono un'ampia gamma di scale di lunghezza e temporali, come è visibile nella figura seguente, con differenti dimensioni dei vortici che potrebbero essere presenti in un determinato flusso.

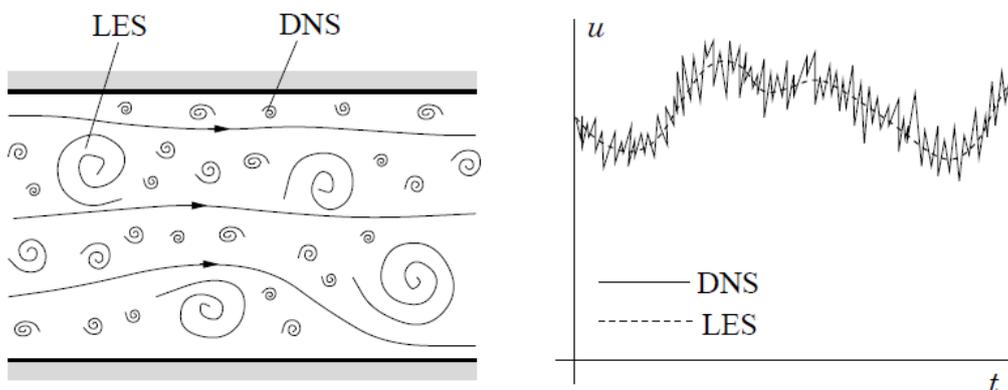


Figura 22. Rappresentazione schematica delle differenti dimensioni dei vortici in un flusso turbolento (a sinistra) e della dipendenza dal tempo della velocità in un punto del flusso (a destra). [43]

I moti su larga scala sono generalmente molto più energetici rispetto a quelli su piccola scala, grazie anche alle loro dimensioni e alla loro forza. Una simulazione che tratti i vortici grandi in modo più accurato di quelli piccoli può avere senso: la simulazione LES consiste proprio in un approccio di questo tipo. Queste simulazioni di grandi vortici sono tridimensionali e dipendenti dal tempo. Sebbene siano costose da un punto di vista computazionale, lo sono molto meno rispetto alla DNS per uno stesso flusso. In generale, la LES è il metodo preferito per i flussi in cui il numero di Reynolds è troppo alto o la geometria è troppo complessa per consentire l'applicazione della DNS.

Alcune applicazioni principali in cui la LES viene impiegata sono ad esempio non solo le scienze atmosferiche (nuvole, precipitazioni, trasporto dell'inquinamento, flusso del vento nelle valli, ecc.), ma anche soprattutto la progettazione di turbine a gas ad alta pressione e le simulazioni aeroacustiche.

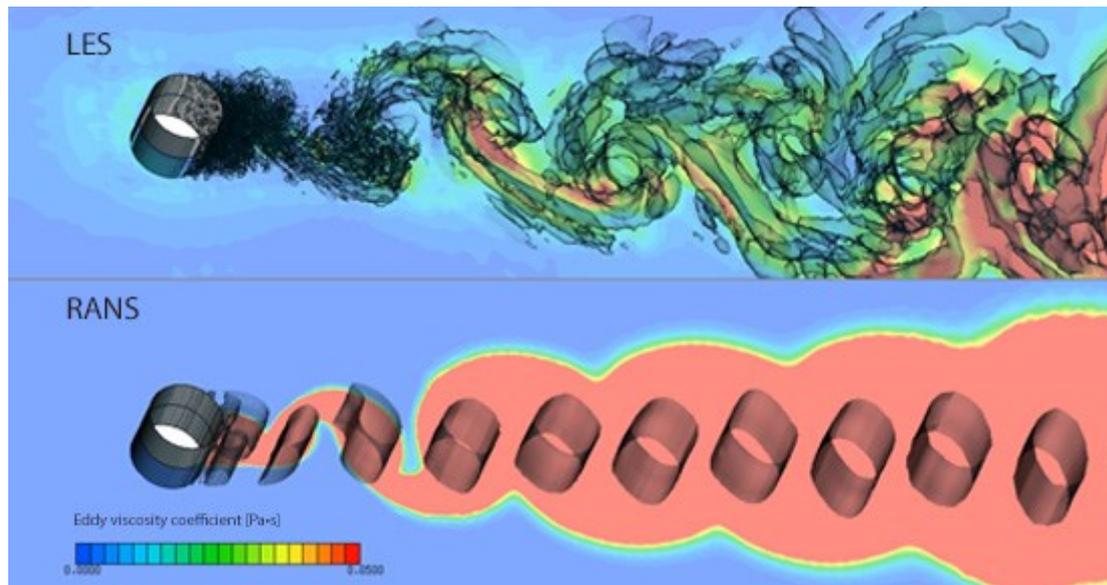


Figura 23. Confronto tra una simulazione LES e una RANS. [44]

La LES è una tecnica che affonda le sue radici nelle due ipotesi fondamentali di similarità e universalità presenti nella teoria di Kolmogorov. Da queste è noto che, mentre le grandi scale della turbolenza risentono della particolare geometria del flusso, le piccole scale della turbolenza mostrano delle caratteristiche universali che non dipendono dal particolare flusso in esame.

L'idea base della LES, perciò, è quello di simulare le grandi scale che dipendono dal particolare flusso in esame e di far intervenire il modello per stimare l'effetto delle piccole scale sulle grandi.

Le scale più piccole della turbolenza vengono ignorate applicando un filtro passa-basso delle equazioni di Navier-Stokes, il quale può essere visto come un operatore di media sia temporale che spaziale, perché rimuove le informazioni su piccola scala dalla soluzione numerica.

Data una certa scala di lunghezza  $l$  e una certa dimensione del filtro  $\Delta$  (ossia la lunghezza di riferimento al di sotto la quale il filtro taglia le fluttuazioni), è necessario separare le grandi dalle piccole scale:

- Se  $l \geq \Delta$ , allora si tratta di scale da simulare;
- Se  $\eta \leq l \leq \Delta$ , allora si tratta di scale da modellare, filtrando il contributo.

Al fine di effettuare una simulazione LES, è necessario seguire quattro passi:

- 1) Definire l'operatore di filtraggio  $G_\Delta$ , il quale separa la velocità relativa alle grandi scale  $\tilde{u}_i$  da quella residua delle piccole scale;
- 2) Calcolare e trovare le equazioni di N-S filtrate applicando l'operatore di filtraggio;
- 3) Creare dei modelli per i termini incogniti delle equazioni filtrate (Sub Grid Stress, SGS) attraverso la definizione di un modello di chiusura LES;
- 4) Risolvere numericamente le equazioni ricavate (filtrate e modellizzate).

Per prima cosa, si decompone la velocità istantanea nel seguente modo:

$$u = \tilde{u} + u''$$

La velocità istantanea  $u$  è data dalla somma della velocità filtrata  $\tilde{u}$  e della velocità residua o di sottogriglia  $u''$ , la quale contiene solo contributi ad elevata frequenza.

È possibile definire la velocità filtrata  $\tilde{u}$  attraverso l'operatore di filtraggio  $G_\Delta$ , ipotizzando prima di tutto che  $G_\Delta$  sia uniforme in tutte le direzioni, cioè  $G_\Delta(r, x) = G_\Delta(r)$ :

$$\tilde{u}_i(x, t) = G_\Delta[u_i] = \int_{\Omega} G_\Delta(r) u_i(x - r, t) dr^3$$

Dove  $x$  indica il punto in cui si vuole calcolare la grandezza filtrata, mentre  $r$  la distanza da tale punto.

Nelle simulazioni LES possono essere utilizzati filtri espliciti del campo dove  $\Delta x < \Delta$ , oppure si può assumere che il passo di griglia effettui un filtraggio implicito del campo con  $\Delta$  pari al passo stesso:

$$\Delta = \Delta x.$$

Per chiarezza e maggior comprensione, vengono riportare alcune proprietà dell'operatore di filtraggio  $G_\Delta$ :

- $\tilde{u}_i = G_\Delta[u_i]$ ,  $\tilde{\tilde{u}}_i = G_\Delta[\tilde{u}_i] = G_\Delta[G_\Delta[u_i]] = G_\Delta^2[u_i]$ ; quindi  $G_\Delta[u_i] \neq G_\Delta^2[u_i]$ ;
- $G_\Delta[u_i = \tilde{u}_i + u_i''] = \tilde{u}_i = \tilde{\tilde{u}}_i + \tilde{u}_i'' \Rightarrow \tilde{u}_i'' = \tilde{u}_i - \tilde{\tilde{u}}_i \neq 0$

Riprendendo le equazioni di N-S per un fluido viscoso incomprimibile, si vuole applicare l'operatore di filtraggio in modo tale da ricavare le equazioni filtrate.

A partire dall'equazione di continuità, si ottiene:

$$G_\Delta \left[ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} G_\Delta[u_j] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{u}_j = 0$$

Si ricava quindi che il campo della velocità filtrata è solenoidale, ossia a divergenza nulla.

Considerando invece l'equazione di Navier-Stokes per il momento, si ottiene:

$$G_\Delta \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = G_\Delta \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right]$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} 2\nu \tilde{e}_{ij}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{u}_i \tilde{u}_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} 2\nu \tilde{e}_{ij}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} 2\nu \tilde{e}_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j)$$

Dove si ha che  $\tau_{ij}^R = \tau_{ji}^R(\overline{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j)$ , il quale indica il tensore degli sforzi residui (è simmetrico).

Riscrivendo in modo migliore l'espressione precedentemente ricavata:

$$\frac{D\tilde{u}_i}{Dt} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i \rho} + \frac{\partial}{\partial x_j} 2\nu \tilde{e}_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}^R$$

Ricapitolando, si ottiene un sistema che rappresenta le equazioni di N-S filtrate:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{D\tilde{u}_i}{Dt} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i \rho} + \frac{\partial}{\partial x_j} 2\nu \tilde{e}_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}^R \end{cases}$$

Si possono osservare 4 equazioni in 10 incognite:  $\tilde{u}_i, \tilde{p}, \tau_{ij}^R$ .

Questo rappresenta un sistema che appare molto simile a quello RANS, ma in realtà è profondamente differente, in quanto i campi di velocità  $\tilde{u}_i$  e di pressione  $\tilde{p}$  sono sempre tridimensionali, non stazionari e caotici, ossia sono più simili a quelli che si ottengono tramite una DNS.

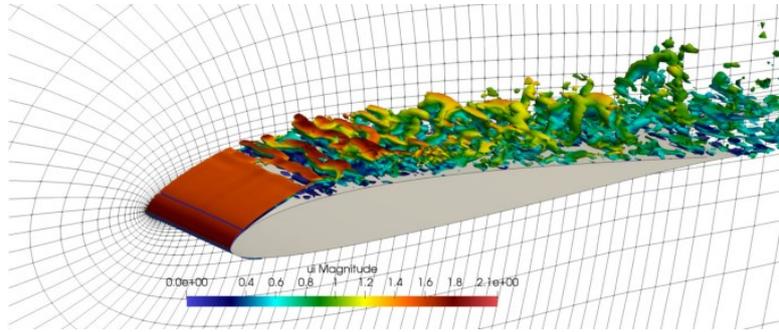


Figura 24. Esempio di una simulazione LES di un flusso turbolento su un profilo alare. [45]

Nella LES, è necessario effettuare la modellizzazione del tensore degli sforzi residui  $\tau_{ij}^R$ , il quale tiene conto solamente dell'effetto delle piccole scale non risolte sul campo evoluto. Per affrontare questa modellizzazione e risolvere il problema di chiusura LES, viene utilizzato il modello di Smagorinsky. Anche questo fa uso del concetto di *eddy-viscosity*, in modo analogo all'idea della viscosità turbolenta, ossia si modella l'effetto delle scale residue su quelle risolte come un incremento di viscosità.

Dal calcolo della traccia del tensore degli sforzi residui:

$$\tau_{ii}^R = \overline{u_i u_i} - \tilde{u}_i \tilde{u}_i = 2\tilde{k}_r$$

Dove l'energia cinetica residua  $\tilde{k}_r$  è calcolata come la differenza tra l'energia cinetica totale  $\overline{u_i u_i}$  e l'energia cinetica alle grandi scale  $\tilde{u}_i \tilde{u}_i$ . È possibile riscrivere come segue:

$$-\tau_{ij}^R = -\frac{2}{3}\tilde{k}_r \delta_{ij} - \tau_{ij}^r$$

Dove  $-\tau_{ij}^r$  indica la parte deviatorica del tensore degli sforzi residui (con  $\tau_{ii}^r = 0$ ).

Sostituendo nuovamente nelle equazioni di N-S filtrate, si prosegue nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\frac{D\tilde{u}_i}{Dt} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\tilde{p}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x_j} 2\nu\tilde{e}_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\frac{2}{3}\tilde{k}_r\delta_{ij} - \tau_{ij}^r \right) \\ \frac{D\tilde{u}_i}{Dt} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\tilde{p}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x_j} 2\nu\tilde{e}_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{2}{3}\tilde{k}_r - \frac{\partial \tau_{ij}^r}{\partial x_j} \\ \frac{D\tilde{u}_i}{Dt} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\tilde{p}}{\rho} + \frac{2}{3}\tilde{k}_r \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} 2\nu\tilde{e}_{ij} - \frac{\partial \tau_{ij}^r}{\partial x_j}\end{aligned}$$

Si arriva nuovamente ad un altro sistema, formato da 9 incognite indipendenti:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{D\tilde{u}_i}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\tilde{p}_M}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} 2\nu\tilde{e}_{ij} - \frac{\partial \tau_{ij}^r}{\partial x_j} \end{cases}$$

È stata definita la pressione modificata filtrata come  $\tilde{p}_M = \tilde{p} + \frac{2}{3}\rho\tilde{k}_r$ .

Ora, applicando l'ipotesi di Boussinesq, è possibile riscrivere l'espressione precedente relativa alla parte deviatorica del tensore degli sforzi residui  $\tau_{ij}^r$  nel modo seguente:

$$-\tau_{ij}^r = 2\nu_r\tilde{e}_{ij}$$

Dove  $\nu_r = \nu_r(x, t)$  indica la viscosità residua (o di sottogriglia).

Infine, riscrivendo il sistema per un'ultima volta considerando la viscosità residua, si ha:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{D\tilde{u}_i}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\tilde{p}_M}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} [2(\nu + \nu_r)\tilde{e}_{ij}] \end{cases}$$

Tale sistema è ancora non risolvibile, in quanto bisogna fornire un'espressione per  $\nu_r$ , che dipenderà da quantità che caratterizzano il livello di turbolenza sulla cella di filtraggio di ampiezza  $\Delta$ .

Per trovare un modello di  $\nu_r$  è necessario analizzare i fenomeni a scala  $\Delta$  e modellare il contributo di quello che accade a scale minori del filtro,  $\eta \leq l \leq \Delta$ . Quindi, il filtro deve essere posto nel range universale, a ridosso delle grandi scale.

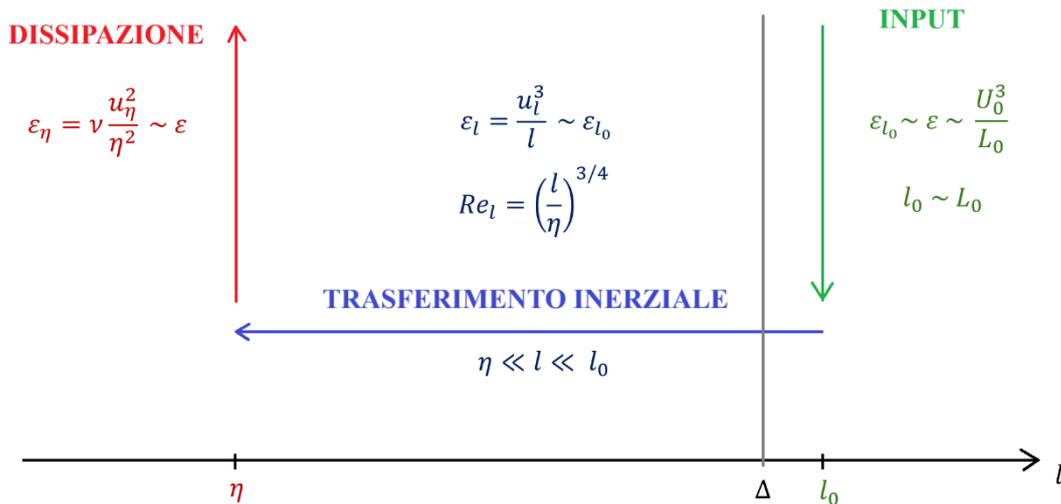


Figura 25. Processo di cascata di energia, dalle grandi scale (input) alle piccole scale (dissipazione), con il filtro  $\Delta$ .

È possibile calcolare l'energia trasferita a  $\Delta$  dalle grandi alle piccole scale, con  $l = \Delta$ , nell'intervallo inerziale, come:

$$\varepsilon_{\Delta}^T = \frac{u_{\Delta}^3}{\Delta}$$

Per quanto riguarda invece il calcolo della dissipazione “artificiale” a scala  $\Delta$  tramite modello sulla viscosità residua, si ottiene:

$$\varepsilon_{\Delta}^D = \nu_r \frac{u_{\Delta}^2}{\Delta^2}$$

Dalla teoria di Kolmogorov, si conosce già che tutta l'energia immessa dalle grandi scale  $\varepsilon_{L_0} \sim \varepsilon$  sarà uguale a quella che fluisce nel campo inerziale alla scala  $\Delta$ ,  $\varepsilon_{\Delta} = \varepsilon$ , che sarà uguale a quella dissipata alla scala  $\eta$ ,  $\varepsilon_{\eta} = \varepsilon$ . Quindi tutta l'energia che raggiunge la scala  $\Delta$  dovrebbe fluire verso scale più piccole per essere dissipata su scala  $\eta$ . È possibile affermare quindi che  $\varepsilon_{\Delta}^D \sim \varepsilon_{\Delta}^T$ .

Il flusso di energia che arriva a scala  $\Delta$  è:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\Delta}^D &= C_s^2 \varepsilon_{\Delta}^T \\ \nu_r \frac{u_{\Delta}^2}{\Delta^2} &= C_s^2 \frac{u_{\Delta}^3}{\Delta} \quad \Rightarrow \quad \nu_r = C_s^2 u_{\Delta} \Delta \end{aligned}$$

Dove  $C_s$  indica la costante di taratura. In questo modo, è possibile stimare la viscosità residua.

Per un calcolo più corretto, è necessario introdurre la media dell'incremento della velocità assiale a scala  $\Delta$ :  $u_{\Delta} = \langle \delta u |_{\Delta} \rangle = \langle \delta u |_{\Delta} \rangle^3 / \langle \delta u |_{\Delta} \rangle^2$ .

Per stimare  $\langle \delta u |_{\Delta} \rangle$  è possibile utilizzare il valore caratteristico del gradiente della velocità filtrata moltiplicato per  $\Delta$ ; considerando un problema monodimensionale, diventa:

$$u_{\Delta} = \langle \delta u |_{\Delta} \rangle = \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right|_{\Delta} \Delta$$

Invece, considerando un problema tridimensionale, è necessario approssimare la derivata con lo *strain rate*, cioè con il tasso di deformazione filtrato e successivamente calcolare la velocità:

$$\tilde{S} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \Big|_{\Delta} = \sqrt{2\tilde{e}_{ij}\tilde{e}_{ij}} = \sqrt{2\|\tilde{e}_{ij}\|^2}$$

$$u_{\Delta} = \tilde{S}\Delta$$

Perciò, il modello a viscosità residua si basa sul calcolo di  $v_r$  come segue:

$$v_r = C_s^2 u_{\Delta} \Delta = C_s^2 (\tilde{S}\Delta) \Delta = C_s^2 \tilde{S} \Delta^2$$

Dove la scala di lunghezza di Smagorinsky è definibile come  $l_s = C_s \Delta$ . Questo è un modello algebrico senza equazioni aggiuntive, il quale fornisce una stima chiusa per la viscosità residua e prende il nome seguente: *Smagorinsky*.

Una volta fornita la costante di taratura del modello  $C_s$ , il sistema diventa chiuso e quindi risolvibile numericamente. In letteratura, il valore di  $C_s$  varia tipicamente tra 0.06 e 0.2, con un valore ottimale a 0.12. Tuttavia, utilizzando l'ipotesi di omogeneità e isotropia della turbolenza, è stato determinato un valore di  $C_s$  pari a 0.17. Solitamente, viene preso un valore della costante di taratura  $C_s$  all'interno del seguente intervallo:  $C_s = 0.12 \pm 0.06$ .

In generale, il modello standard di Smagorinsky (SGS) presenta i seguenti problemi:

- La costante di taratura,  $C_s$ , rappresenta un input a priori e non è in grado di rappresentare correttamente i vari flussi turbolenti, soprattutto vicino a parete;
- La viscosità vorticoso non svanisce per i flussi laminari;
- Il modello di Smagorinsky introduce troppa diffusione nel flusso.

Al fine di mitigare questi problemi, è stata introdotta una modifica del modello di Smagorinsky, dove la costante  $C_s$  viene calcolata automaticamente e diventa una funzione dello spazio e del tempo  $C_s(x, t)$ . Questo modello prende il nome di modello di Smagorinsky dinamico (SGS dinamico).

Questo introduce un ulteriore operatore di filtraggio, indicato come filtro di test, il quale è di dimensioni maggiori rispetto al filtro LES e aggiunge un ulteriore filtraggio del campo di turbolenza rispetto ai campi già filtrati (quindi effettua un filtraggio aggiuntivo a scala più grande).

Il coefficiente di taratura dinamico  $C_s(x, t)$  si può scrivere come:

$$C_s(x, t) = -\frac{1}{2} \frac{L_{ij}L_{ij}}{M_{kl}M_{kl}}$$

Dove  $L_{ij} = -2C_s M_{ij}$  e  $M_{ij} = \widehat{\Delta}^2 \sqrt{\hat{S}_{ij}\hat{S}_{ij}\hat{S}_{ij}}$ , con  $\widehat{\Delta}^2$  che è la larghezza di banda del filtro.

## 2.4.4 MODELLO WALE

Si considera sempre un fluido viscoso incomprimibile.

Nell'approccio LES, le scale più piccole rispetto alla dimensione della griglia non vengono risolte, ma vengono esaminate attraverso il tensore della sottogriglia (o degli sforzi residui)  $\tau_{ij}^R$ , dato da:

$$\tau_{ij}^R = \overline{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j = \frac{2}{3} \tilde{k}_r \delta_{ij} + \tau_{ij}^r$$

Dove il simbolo sopra alle velocità indica il filtro applicato alle stesse.

Si ricorda che l'assunzione *eddy-viscosity* (di Boussinesq), sulla quale sono basati molti *subgrid scale models* (SGS), permette di affermare, per la parte residua  $\tau_{ij}^r$  del tensore  $\tau_{ij}^R$ :

$$-\tau_{ij}^r = 2\nu_r \tilde{e}_{ij}$$

Dove  $\nu_r(x, t)$  indica la viscosità residua o di sottogriglia.

Nel modello di Smagorinsky, in cui si ha  $\nu_r = (C_s \Delta)^2 \tilde{S}$ , la scelta dello *strain rate*  $\tilde{S}$  per definire la scala di velocità è piuttosto arbitraria.

Alcuni problemi relativi alla LES si ritrovano in alcuni modelli sviluppati e sono:

- 1) La viscosità  $\nu_r$  permette il trasferimento di energia dalle scale risolte a quelle di sottogriglia (più piccole) attraverso la dissipazione di sottogriglia. Tuttavia, definendo la viscosità dallo *strain rate*, si mette in relazione la dissipazione di sottogriglia con lo *strain rate* delle scale risolte più piccole. In realtà, l'energia è concentrata nei flussi e la dissipazione dell'energia nei vortici e nelle zone di convergenza, mentre il modello di Smagorinsky non tiene conto del contributo di queste ultime, le quali rappresentano regioni in cui la vorticità domina la deformazione irrotazionale (questa deformazione irrotazionale è dominante nelle zone di convergenza). Un modello migliore dovrebbe essere basato sia sullo *strain rate* che sulla velocità rotazionale.
- 2) Il comportamento della viscosità vicino a parete non è buono. Il modello di Smagorinsky fornisce un valore diverso da zero di  $\nu_r$  non appena esiste un gradiente di velocità, e vicino a parete tutte le fluttuazioni turbolente sono smorzate in modo tale che  $\nu_r$  sia nulla. A questo scopo, si potrebbe implementare delle funzioni di smorzamento, ma si può notare che, a seconda della funzione di smorzamento utilizzata, potrebbe non produrre il corretto ridimensionamento vicino a parete per la viscosità, in quanto alcuni modelli leggermente migliorati smorzano producendo  $\nu_r = O(y^2)$  invece di  $O(y^3)$ .
- 3) Una terza difficoltà nella LES è la necessità di gestire geometrie complesse senza direzione di omogeneità del flusso o con metodi numerici non strutturati. Il modello di Smagorinsky è abbastanza ben adattato a queste configurazioni, poiché solo i gradienti locali sono coinvolti nel calcolo della viscosità vorticoso.

Da un punto di vista più generale, è possibile scrivere la definizione di viscosità in forma generica, la quale può essere valida per molti modelli:

$$\nu_r = C_m \Delta^2 \overline{OP}(\mathbf{x}, t)$$

In cui  $C_m$  è la costante del modello che può essere adattato in modo dinamico,  $\Delta$  è la dimensione della griglia, e  $\overline{OP}(\mathbf{x}, t)$  indica un operatore nello spazio e nel tempo, omogeneo rispetto alla frequenza e definito a partire dai campi risolti. Questo operatore  $\overline{OP}(\mathbf{x}, t)$  è stato definito con le seguenti quattro proprietà:

- (1) È invariante a qualsiasi traslazione o rotazione delle coordinate;
- (2) Può essere facilmente valutato su qualsiasi tipo di griglia computazionale;
- (3) È funzione sia della deformazione che delle velocità di rotazione;
- (4) Va a zero avvicinandosi a parete in modo tale che né le funzioni di smorzamento né le procedure dinamiche siano necessarie per riprodurre l'effetto dato dalla condizione no-slip.

Questo caratterizza il modello che verrà utilizzato e implementato in questa trattazione: il modello WALE (*Wall-Adapting Local Eddy-Viscosity*). Il modello WALE si basa su un tensore invariante e riproduce il corretto ridimensionamento a parete, con  $\nu_r = O(y^3)$ . È adatto anche per simulazioni LES in geometrie complesse con metodi strutturati o non strutturati, perché non è necessario alcun filtraggio esplicito e sono necessarie solo informazioni locali per costruire la viscosità vorticoso. Infine, questo modello è sensibile sia alla deformazione che alla velocità di rotazione delle piccole strutture turbolente. Sebbene la procedura dinamica possa essere applicata anche al modello WALE, il parametro  $C_m$  è considerato una vera costante, valutata nel caso di turbolenza omogenea isotropa. In LES, la viscosità  $\nu_r$  non deve variare quando cambia il sistema di riferimento; perciò, l'operatore  $\overline{OP}$  dev'essere basato sugli invarianti di un tensore che dovrebbe essere rappresentativo dell'attività turbolenta. Il tensore del gradiente di velocità  $\bar{g}_{ij} = \partial \bar{u}_i / \partial x_j$  è un buon candidato per rappresentare le fluttuazioni di velocità alla scala di lunghezza  $\Delta$ .

Rispetto al modello di Smagorinsky, nel quale tutti gli operatori che si possono costruire a partire dai tensori  $\bar{g}_{ij}$  e  $\bar{S}_{ij}$  portano al comportamento non fisico  $\nu_r = O(1)$  a parete, nel modello WALE si riesce a costruire semplicemente l'operatore in modo migliore. Un modo per effettuare ciò è considerare la parte simmetrica del quadrato del tensore del gradiente di velocità, come segue:

$$S_{ij}^d = \frac{1}{2} (\bar{g}_{ij}^2 + \bar{g}_{ji}^2) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \bar{g}_{kk}^2$$

Dove  $\bar{g}_{ij}^2 = \bar{g}_{ik} \bar{g}_{kj}$ . È possibile definire la parte antisimmetrica di  $\bar{g}$  come  $\bar{\Omega}$ :

$$\bar{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

Il tensore  $S_{ij}^d$  può essere riscritto in termini di  $\bar{S}$  e  $\bar{\Omega}$ , come segue:

$$S_{ij}^d = \bar{S}_{ik}\bar{S}_{kj} + \bar{\Omega}_{ik}\bar{\Omega}_{kj} - \frac{1}{3}\delta_{ij}[\bar{S}_{mn}\bar{S}_{mn} + \bar{\Omega}_{mn}\bar{\Omega}_{mn}]$$

Come è possibile osservare dalla sua costruzione, la traccia di  $S^d$  è nulla e il suo secondo invariante rimane finito e proporzionale a  $S_{ij}^d S_{ij}^d$ . Date le notazioni riportate di seguito, è possibile riscrivere la precedente espressione utilizzando il teorema di Cayley-Hamilton:

$$S^2 = \bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}$$

$$\Omega^2 = \bar{\Omega}_{ij}\bar{\Omega}_{ij}$$

$$IV_{S\Omega} = \bar{S}_{ik}\bar{S}_{kj}\bar{\Omega}_{jl}\bar{\Omega}_{li}$$

$$S_{ij}^d S_{ij}^d = \frac{1}{6}(S^2 S^2 + \Omega^2 \Omega^2) + \frac{2}{3}S^2 \Omega^2 + 2IV_{S\Omega}$$

Grazie a quest'ultima espressione, un modello LES basato su  $S_{ij}^d S_{ij}^d$  rileverà strutture di turbolenza con velocità di deformazione o con velocità di rotazione, oppure con entrambe.

Nel caso di taglio puro (per esempio con  $\bar{g}_{ij} = 0$  eccetto  $\bar{g}_{12}$ ), si ottiene  $S^2 = \Omega^2 = 4\bar{S}_{12}$  e anche  $IV_{S\Omega} = -S^2 S^2 / 2$ , per cui l'invariante considerato è zero. Questo è in accordo con il fatto che le zone di taglio contribuiscono ad una dissipazione di energia inferiore rispetto alle zone di convergenza e ai vortici.

Inoltre, ciò significa che, nel caso di un flusso laminare delimitato da pareti, non verrebbe prodotta quasi nessuna viscosità vorticoso. In tal caso, l'entità della diffusione turbolenta sarebbe trascurabile e sarebbe possibile lo sviluppo di onde linearmente instabili. Questo è un grande vantaggio rispetto al modello di Smagorinsky, il quale non è in grado di riprodurre la transizione da laminare a turbolenta di tale flusso, poiché l'invariante  $\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}$  è elevata nel caso di taglio puro.

Nel limite di  $y \cong 0$ , si ha che  $S_{ij}^d S_{ij}^d$  si comporta come  $y^2$ . Perciò, un modo semplice per costruire un operatore  $\overline{OP}$  che si comporti come  $y^3$  vicino a parete è quello di prendere  $\overline{OP}$  proporzionale a  $\overline{OP}_1 = (S_{ij}^d S_{ij}^d)^{3/2}$ . Visto che  $\bar{g}$  dimensionalmente è una frequenza,  $\overline{OP}_1$  ha la dimensione di una frequenza elevata alla sesta potenza e quindi dev'essere ridimensionato in modo tale da essere  $O(1)$  in prossimità della parete, al fine di mantenere il comportamento proporzionale a  $y^3$ . Un modo è quello di ridimensionare  $\overline{OP}_1$  a  $\overline{OP}_2$ , come svolto di seguito:

$$\overline{OP}_2 = (\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{5/2} + (S_{ij}^d S_{ij}^d)^{5/4}$$

Il secondo termine in  $\overline{OP}_2$  è trascurabile vicino a parete, anche se questo termine evita instabilità numeriche, perché  $\overline{OP}_2$  non va a zero per puro taglio o per deformazione (ir)rotazionale.

Il modello *Wall-Adapting Local Eddy-Viscosity* (WALE) è basato sulla seguente espressione di viscosità:

$$v_r = (C_w \Delta)^2 \frac{\overline{OP}_1}{\overline{OP}_2} = (C_w \Delta)^2 \frac{(S_{ij}^d S_{ij}^d)^{3/2}}{(\overline{S}_{ij} \overline{S}_{ij})^{5/2} + (S_{ij}^d S_{ij}^d)^{5/4}}$$

Dove, come descritto in precedenza,  $C_w$  indica una costante reale (prima definita come  $C_m$ ).

Per determinare questa costante, è necessario assumere che il modello WALE fornisca la stessa dissipazione di energia cinetica media del classico modello di Smagorinsky. Si ottiene:

$$C_w^2 = C_s^2 \frac{\langle \sqrt{2} (\overline{S}_{ij} \overline{S}_{ij})^{3/2} \rangle}{\langle \overline{S}_{ij} \overline{S}_{ij} \overline{OP}_1 / \overline{OP}_2 \rangle}$$

Considerando la costante  $C_s = 0.18$ , un intervallo di valori all'interno dei quali ricade  $C_w$  è il seguente:  $0.55 \leq C_w \leq 0.60$ .

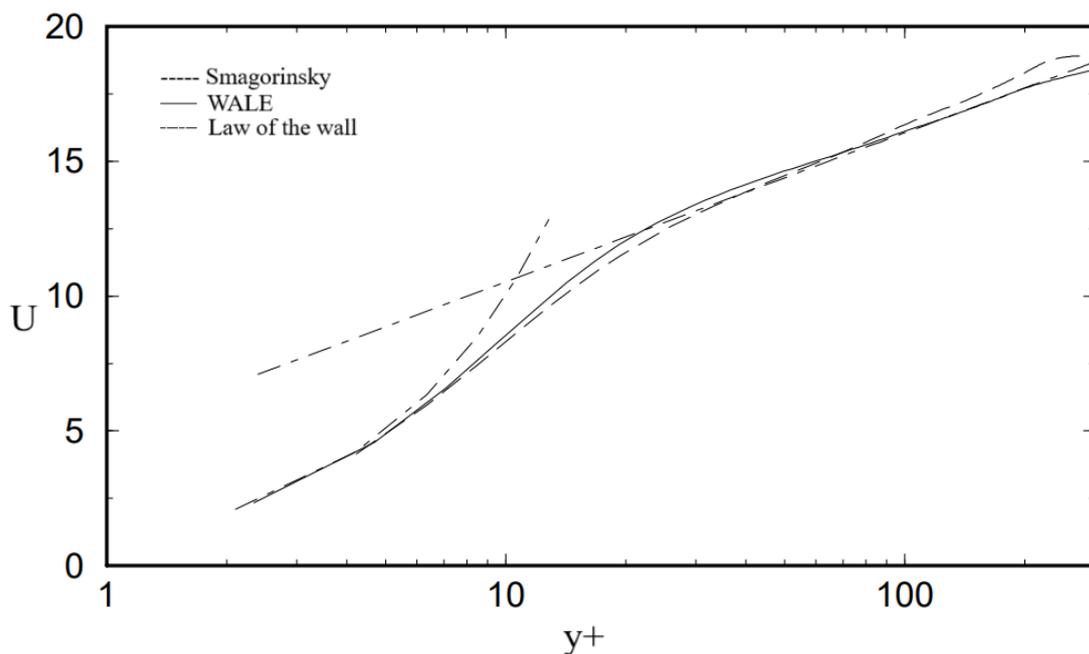


Figura 26. Profilo di velocità medio in funzione della distanza da parete. Confronto tra i modelli di Smagorinsky e WALE. [46]

In questa trattazione è stato utilizzato il modello WALE, il quale si basa sul quadrato del tensore del gradiente di velocità. I vantaggi che caratterizzano questo modello rispetto alla classica formulazione di Smagorinsky sono i seguenti:

- L'operatore esamina sia lo *strain rate* che le velocità di rotazione. Pertanto, tutte le strutture turbolente rilevanti per la dissipazione di energia cinetica vengono rilevate dal modello;
- La viscosità va naturalmente a zero in prossimità della parete, in modo che, per calcolare i flussi delimitati dalla parete, non sia necessaria né una regolazione costante né una funzione di smorzamento;
- Il modello produce viscosità vorticoso nulla in caso di taglio puro. Pertanto, è in grado di riprodurre il processo di transizione da laminare a turbolento attraverso la crescita di modi lineari instabili.

### 3 FLUSSI MULTIFASE

Un flusso multifase è composto da due o più fasi distinte, dove le tre possibili fasi sono solida, liquida e gassosa. In un flusso multifase, una fase può anche essere considerata un materiale identificabile nel flusso che ha una particolare risposta inerziale ad un'interazione con il flusso all'interno del quale è presente. Il flusso multifase è il flusso di una miscela di fasi, come ad esempio gas (bolle) all'interno di un liquido o liquido (goccioline) all'interno di un gas. Un altro esempio di flusso multifase può essere rappresentato da un flusso di goccioline d'olio nell'acqua.

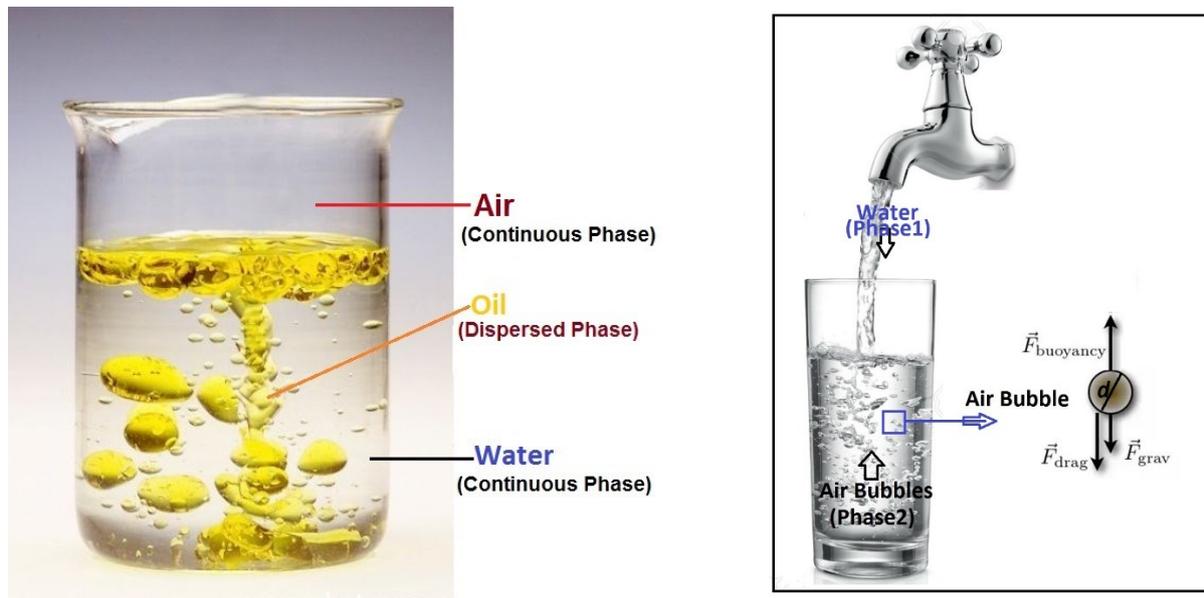


Figura 27. Esempi di flussi multifase, con una classificazione in base al tipo di fase. A sinistra, goccioline d'olio (fase dispersa) nell'acqua (fase continua). A destra, l'acqua (fase dispersa) scorre nell'aria (fase continua). [47][48]

Di seguito, vengono descritti nel dettaglio diversi tipi di sistemi di flussi multifase:

- **Fase dispersa e flussi separati:** i flussi in fase dispersa sono flussi in cui una delle fasi presenti è sotto forma di elementi singoli e distinti. Un tipo di flussi in fase dispersa è lo *slurry*, in cui le particelle solide vengono trasportate dal liquido. Un flusso in fase dispersa può essere osservato in tutti i tipi di flussi bifase: gas-liquido, gas-solido, liquido-liquido e solido-liquido. Invece, un flusso separato è un flusso in cui le due fasi sono separate da un piano di contatto. Un tipo di flusso separato è il flusso anulare, in cui è presente uno strato di liquido sulla parete del tubo attraverso il quale viaggia il flusso multifase, mentre il centro del flusso è un gas.
- **Flussi gas-liquido o liquido-liquido:** i flussi gas-liquido possono assumere la forma di un fluido continuo o di un flusso di gas con bolle di gas in un liquido o di goccioline di liquido in un gas (flusso di goccioline). I flussi liquido-liquido possono essere un flusso di bolle fluide in un fluido continuo. Alcuni esempi di flusso gas-liquido possono essere: le colonne a bolle (molto utilizzati nell'industria); l'atomizzazione utilizzata per generare piccole goccioline per la combustione (usata nei sistemi di generazione di energia); il controllo del processo di

formazione delle gocce e del loro impatto durante la formazione dello spray (importante nella lavorazione dei materiali); infine, anche il flusso di vapore acqueo generato (usato nei sistemi energetici).

- **Flussi gas-solido:** il flusso gas-solido si verifica quando le particelle solide sono sospese all'interno di un gas ed è chiamato *particle-laden flow* (flusso carico di particelle). Esempi di flussi gas-solido includono: le particelle dei gas di scarico, le quali vengono rimosse da dispositivi di controllo dell'inquinamento; la combustione del carbone nelle centrali elettriche, la quale dipende dalla dispersione e dalla combustione delle particelle di carbone; le particelle (di dimensioni dell'ordine del  $\mu m$ ) presenti negli scarichi dei razzi a propellente solido, le quali influiscono sulle prestazioni del razzo.
- **Flussi liquido-solido:** i flussi in cui la fase liquida trasporta particelle solide sono chiamati *slurry*. I flussi liquido-solido possono anche essere classificati come flussi in fase dispersa. Un esempio è il trasporto di carboni e minerali attraverso il fango.
- **Flussi trifase:** i flussi trifase sono combinazioni di altri regimi di flusso in determinate condizioni o circostanze.

Un sistema multifase, quindi, è caratterizzato dalla presenza contemporanea di più fasi, e il sistema bifase rappresenta il caso più semplice.

Un metodo per classificare i sistemi multifase considera la struttura delle interfacce. Perciò, i sistemi multifase possono essere classificati come:

- (1) Fase separata (*Separated phase*)
- (2) Fase mista (*Mixed phase*)
- (3) Fase dispersa (*Dispersed phase*)

La fase dispersa rappresenta la categoria dei flussi multifase che caratterizzerà le simulazioni inserite all'interno della presente trattazione.

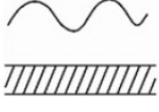
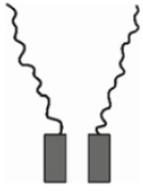
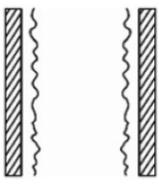
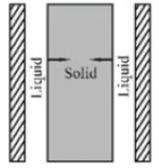
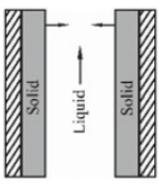
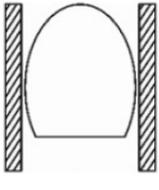
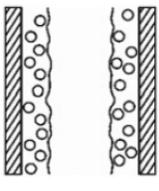
Type	Case	Typical regimes	Geometry	Configuration	Examples
Separated phases	A	Phase change on plane surface		(a) Liquid layer in vapor (b) Vapor layer in liquid (c) Solid layer in liquid (d) Liquid layer in solid (e) Solid layer in vapor	(a) Film condensation (b) Film boiling (c) Solidification (d) Melting (e) Sublimation and deposition
	B	Liquid-gas jet flow		(a) Liquid jet in gas (b) Gas jet in liquid	(a) Atomization (b) Jet condenser
	C	Liquid-vapor annular flow		(a) Liquid core and vapor film (b) Vapor core and liquid film	(a) Film boiling (b) Film condensation or evaporation
	D	Melting at a single melting point		Solid core and liquid annular layer	Melting of ice in a duct
	E	Solidification at a single melting point		Liquid core and solid annular layer	Freezing water in a duct
Mixed phases	F	Slug or plug flow		Large vapor bubbles in a continuous liquid	Pulsating heat pipes
	G	Bubbly annular flow		Vapor bubbles in liquid film with vapor core	Film evaporation with wall nucleation

Figura 28. Classificazione dei sistemi multifase nelle differenti fasi (separata, mista, dispersa). [49]

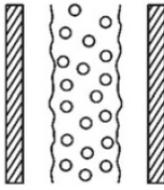
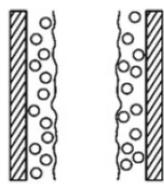
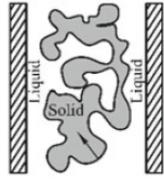
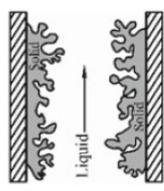
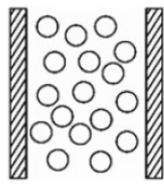
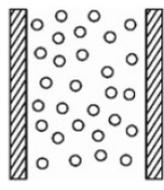
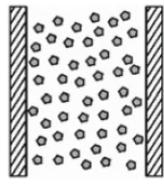
Type	Case	Typical regimes	Geometry	Configuration	Examples
Mixed phases (continued)	H	Droplet annular flow		Vapor core with liquid droplets and annular liquid film	Steam generator in boiler
	I	Bubbly droplet annular flow		Vapor bubbles in liquid film with vapor core	Boiling nuclear reactor channel
	J	Melting over a temperature range		Solid and mushy zone in liquid	Melting of binary solid
	K	Solidification over a temperature range		Liquid core with layer of solid and mushy zone	Freezing of binary solution
	L	Liquid-vapor (gas) bubbly flow		Discrete vapor bubbles in a liquid	Chemical reactors Absorbers Evaporators Separating devices
Dispersed phases	M	Liquid-vapor (gas) droplet flow		Discrete liquid droplets in a vapor	Spray cooling Atomizers Combustors
	N	Particulate flow		(a) Solid particles in liquid (slurry flow) (b) Discrete solid particles in gas (c) Fluidized beds	(a) Melting, solidification of PCM suspension in liquid (b) Combustion of solid fuels (c) Fluidized bed reactors

Figura 29. [Continua] Classificazione dei sistemi multifase nelle differenti fasi (separata, mista, dispersa). [49]

Il caso della fase separata ha due fasi immiscibili separate da un'interfaccia geometricamente semplice chiaramente definita. Il flusso del getto gas-liquido può coinvolgere un getto liquido all'interno di una fase gassosa o un getto di gas all'interno di una fase liquida.

Inoltre, sono presenti anche le fasi disperse, compreso il flusso con bolle gassose (discrete) in un fluido (continuo); flusso di goccioline (discrete) in un sistema liquido-vapore (continuo); flusso di particelle solide (discrete) in un liquido/gas (portante).

Il cambiamento dalla fase separata alla fase dispersa può avvenire gradualmente; di conseguenza, ci sono fasi miste in cui coesistono sia fasi separate che disperse. Per un flusso anulare liquido-vapore con un nucleo di vapore circondato da una pellicola liquida, l'evaporazione della pellicola si verifica quando viene applicato calore alla superficie esterna del tubo. Se la temperatura della parete viene aumentata ad un livello sufficiente, si possono generare bolle di vapore nello strato liquido (flusso anulare con bolle). Se la temperatura della parete viene ulteriormente aumentata, il flusso cambia in goccioline di vapore liquido.

Per quanto riguarda le caratteristiche della fase solida di un sistema multifase, questa può essere considerata incomprimibile, perché la densità della fase solida può essere trattata come costante nella maggior parte dei casi. Le caratteristiche del flusso dipendono fortemente dalla dimensione dei singoli elementi solidi e dal moto dei fluidi associati. In caso di flusso di particolato, la fase solida è discontinua, in quanto le particelle solide sono disperse all'interno della fase liquida o gassosa.

Molti flussi multifase contenenti gas possono essere trattati come essenzialmente incomprimibili, soprattutto se la pressione è ragionevolmente elevata e il numero di Mach per la fase gassosa è basso (solitamente inferiore a 0.3).

Si considererà solamente la categoria relativa ai flussi dispersi, intesi come quelli costituiti da particelle, goccioline o bolle (la cosiddetta fase dispersa o discreta, *dispersed/discrete phase*) distribuite e trasportate da un certo fluido che rappresenta la fase continua o portante (*continuous/carrier phase*), cioè la fase all'interno della quale sono disperse queste particelle, goccioline o bolle.

### 3.1 FLUID-PARTICLE FLOW

Il flusso disperso è un flusso multifase in cui una fase è dispersa all'interno di un'altra fase continua. La fase dispersa può essere costituita da goccioline, bolle o particelle solide, mentre la fase continua può essere liquida o gassosa.

Entrambe le fasi in un flusso gas-liquido disperso sono fluide; quindi, ciascuna fase può essere dispersa o continua, a seconda delle portate volumetriche. In altre parole, la fase dispersa ha una portata volumetrica inferiore, mentre la fase continua ha una portata volumetrica maggiore.

Dall'altra lato, la fase solida in un flusso bifase gas/liquido-solido è sempre una fase dispersa, mentre la fase continua può essere solo gassosa o liquida.

Ci si concentrerà sul caso in cui le particelle solide, rappresentanti la fase dispersa/discreta (*dispersed*), vengono trasportate da un flusso di gas, rappresentante la fase continua (*carrier*).

Esempi di questi flussi, chiamati anche *particle-laden flows* (letteralmente flussi carichi di particelle), possono essere riscontrati nella dispersione atmosferica di inquinanti, nel trasporto di sedimenti nei fiumi, nelle incrostazioni nelle pale dei compressori e delle turbine, nel trasporto di prodotti adibiti alla fissione nucleare.

Si studierà il trasporto di particelle solide in flussi turbolenti delimitati da pareti, dove lo strato limite si forma in prossimità delle pareti e la turbolenza è fortemente anisotropa (anche a causa delle fluttuazioni di velocità turbolenta, che non sono isotrope) e disomogenea. Il cuore del problema della dispersione di particelle risiede nella modellazione delle fluttuazioni casuali di velocità che le particelle incontrano lungo le loro traiettorie. Di particolare importanza è anche la comprensione dei meccanismi responsabili della concentrazione preferenziale delle particelle, la quale a sua volta permette di ottenere una stima delle velocità di deposizione delle particelle sulle pareti.

Esistono due approcci principali di metodi usati per trattare il trasporto di particelle solide nei flussi di fluidi: Euleriani e Lagrangiani.

Nell'approccio Euleriano, le particelle sono considerate come una fase continua per la quale le equazioni di conservazione mediate (continuità, quantità di moto ed energia) sono risolte in modo simile al campo di flusso del gas. L'approccio Euleriano è particolarmente adatto per sospensioni più dense quando le interazioni particella-particella sono importanti e l'effetto delle particelle sul flusso è troppo grande per essere ignorato. La sfida principale che deve affrontare l'approccio Euleriano risiede nel definire accuratamente i tassi di cambio interfase e le leggi di chiusura che emergono dalle procedure di media. Inoltre, il forte accoppiamento tra le fasi rende l'approccio Euleriano piuttosto delicato da gestire.

Nel secondo approccio, detto Lagrangiano, le particelle vengono trattate come una fase discreta costituita da particelle sferiche disperse nella fase continua. Il carico sul volume delle particelle è

solitamente considerato trascurabile, in modo che le particelle non abbiano alcun effetto sul gas di trasporto e le interazioni particella-particella vengano trascurate. Nell'ambito lagrangiano, i fenomeni di controllo della dispersione delle particelle nel campo vengono valutati utilizzando una trattazione rigorosa delle forze agenti sulla particella. In generale, viene prima calcolato il campo di flusso dettagliato, quindi un numero rappresentativo di particelle viene iniettato nel campo e le loro traiettorie determinate seguendo le singole particelle finché non vengono rimosse dal flusso di gas o lasciano il dominio computazionale. Il moto delle particelle è estratto dall'integrazione temporale della seconda legge di Newton, nella quale possono essere incorporate tutte le forze rilevanti (come resistenza, gravità, portanza, ecc.). L'approccio lagrangiano è intensivo dal punto di vista computazionale, poiché comporta il tracciamento di un gran numero di particelle fino al raggiungimento di condizioni stazionarie. D'altra parte, i risultati del tracciamento Lagrangiano delle particelle sono fisicamente più facili da interpretare.

Nella presente trattazione è stata utilizzata la metodologia ibrida Euleriana-Lagrangiana, al fine di simulare la dispersione delle particelle all'interno del flusso del canale turbolento. Questo approccio risolve le equazioni di Navier-Stokes per riprodurre la dinamica della fase portante, mentre le equazioni lagrangiane vengono utilizzate per riprodurre l'evoluzione temporale dello stato cinematico e termodinamico della fase dispersa.

Le fluttuazioni del fluido osservate dalle particelle sono determinate da equazioni differenziali stocastiche basate sul modello Continuous Random Walk (CRW) di Langevin.

Questo approccio ibrido si basa anche sull'assunzione di accoppiamento unidirezionale (*one-way coupling*), cioè la fase dispersa è sufficientemente diluita da non influenzare il campo di flusso continuo. Questo è dovuto al fatto che il volume e la massa della fase dispersa sono così piccoli che è possibile trascurare la mutua interazione tra le particelle; perciò, anche la fase dispersa non influenzerà la fase portante. Di conseguenza, nell'accoppiamento unidirezionale, solo la fase portante (gas) influenza la fase dispersa (particelle), mentre quest'ultima non influenza in alcun modo la prima.

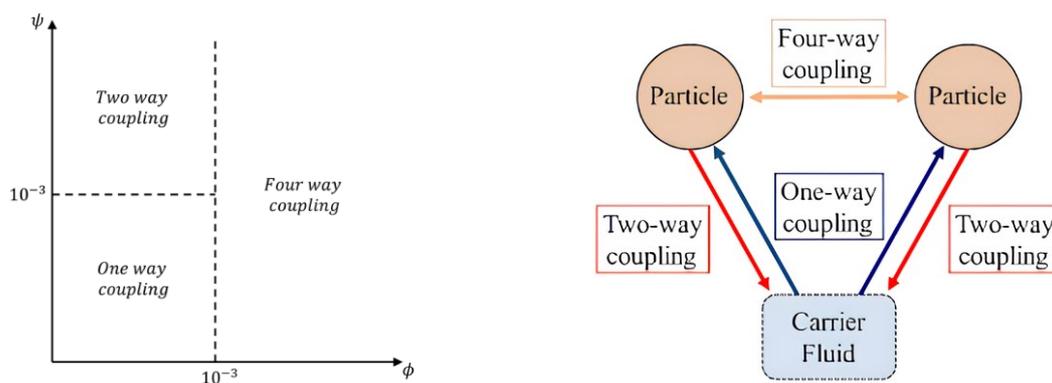


Figura 30. Differenti tipi di accoppiamento nei flussi multifase tra fase portante e fase dispersa, in funzione della frazione di massa  $\psi$  e della frazione di volume  $\phi$ . [49][50]

Oltre allo *one-way coupling*, che si verifica in condizioni molto diluite della fase dispersa, si vuole descrivere sinteticamente il significato degli altri due. Innanzitutto, si introducono i concetti relativi alla frazione di massa  $\psi$  e alla frazione di volume  $\phi$  della fase dispersa, necessari alla classificazione dei vari accoppiamenti.

$$\phi = \frac{V_d}{V} \qquad \psi = \frac{m_d}{m}$$

Dove  $V_d$  indica il volume occupato dalla fase dispersa,  $V = V_d + V_c$  il volume totale,  $m_d$  la massa della fase dispersa,  $m = m_d + m_c$  la massa totale.

Anche il *two-way coupling* si applica in condizioni diluite, dove la bassa frazione di volume rende le interazioni tra le particelle trascurabili, ma l'elevata frazione di massa implica la necessità di considerare l'effetto della fase dispersa (particelle) su quella portante (gas). Infine, il *four-way coupling* si applica in condizioni non più diluite, bensì a regimi densi, in cui la frazione di volume è abbastanza elevata da obbligare a considerare anche le mutue interazioni tra le particelle.

## 3.2 TURBOFORESI

Le particelle inerziali in un flusso turbolento delimitato da pareti si distribuiscono in modo disomogeneo, concentrandosi localmente vicino alle pareti. Questo fenomeno, noto come turboforesi, dipende da alcuni parametri, cioè dal numero di Stokes, dalla frazione volumetrica delle particelle, dalla rugosità superficiale, dal rapporto densità particella/fluido e dal numero di Reynolds del flusso. La turboforesi causa quindi una maggiore concentrazione di particelle nella regione vicino alla parete, come all'interno degli strati *viscous layer* e *buffer layer*, e generalmente è causata dall'intrappolamento di queste particelle nelle regioni a bassa intensità turbolenta.

Solitamente, quando il numero di Stokes è relativamente alto e la frazione di volume è piccola, si prevede un forte livello di accumulo di particelle nella regione vicino alla parete ( $y^+ < 10$ ).

La scala temporale richiesta per l'instaurarsi della turboforesi è molto più lunga rispetto alle scale temporali presenti nel flusso turbolento e, di conseguenza, la turboforesi può svilupparsi completamente solo in un condotto molto lungo dopo una quantità di tempo più elevata rispetto alle scale temporali del flusso.

È importante stabilire l'effetto del numero di Reynolds e delle collisioni tra le particelle sul fenomeno della turboforesi. Se si considerassero delle simulazioni effettuate con numeri di Reynolds diversi, e inizialmente con un flusso caratterizzato da un accoppiamento *one-way* e successivamente con un flusso caratterizzato da un accoppiamento *four-way*, nel quale sono studiate anche le collisioni tra le particelle, si otterrebbero risultati interessanti. Questi indicano chiaramente che sia la lunghezza che il tempo necessari per stabilire la turboforesi sono più brevi quando le collisioni vengono considerate e il numero di Reynolds viene aumentato. Tuttavia, è bene affermare che le collisioni hanno un effetto più forte sulla turboforesi rispetto al numero di Reynolds.

Quindi, se si ignorassero le mutue interazioni (collisioni) tra le particelle, anche considerando frazioni volumetriche molto piccole, si produrrebbe una sovrastima della concentrazione delle particelle vicino alla parete (turboforesi).

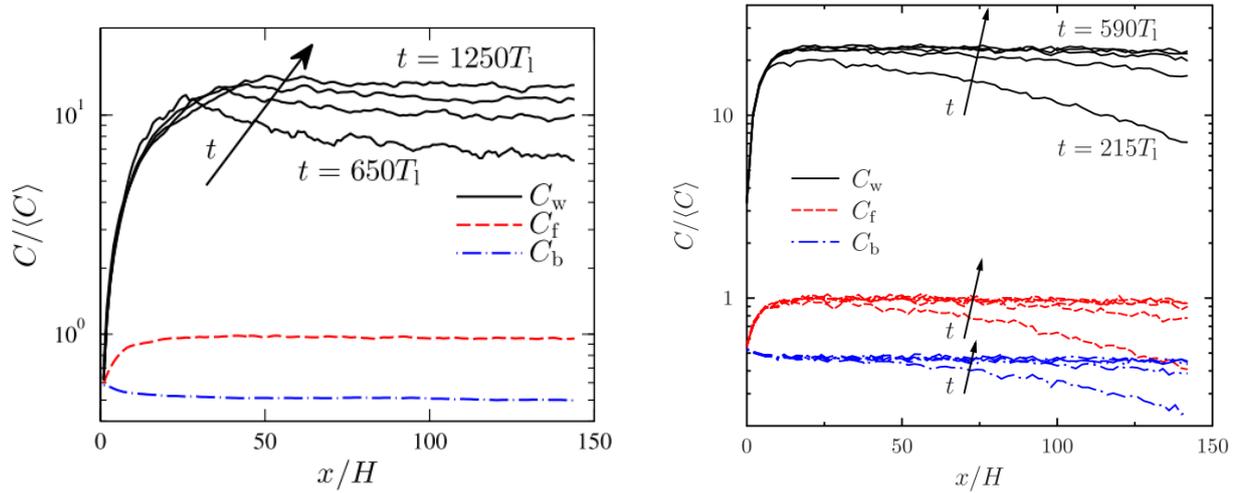


Figura 31. Concentrazione normalizzata della particella in funzione della distanza dall'inlet.  $C_w$  indica la concentrazione nel viscous sublayer ( $y^+ < 3$ ),  $C_f$  la concentrazione nel buffer layer ( $3 < y^+ < 30$ ),  $C_b$  la concentrazione nella maggior parte del flusso ( $y^+ > 30$ ),  $t$  i differenti istanti di tempo considerati. A sinistra, i risultati per una simulazione senza collisioni (one-way coupling) e con un  $Re$  più basso. A destra, i risultati per una simulazione con le collisioni (four-way coupling) e con un  $Re$  più alto. [51]

Perciò, si può affermare che le collisioni tra le particelle hanno un forte impatto sulla turboforesi, riducendo in modo significativo la disuniformità dei profili di concentrazione delle particelle all'aumentare della frazione volumetrica. L'aumento dei livelli di concentrazione delle particelle porta a tassi di collisione più elevati nella regione vicino alla parete.

Per dimostrare l'influenza del numero di Stokes sulla turboforesi, viene effettuata una breve analisi sulla fase dispersa.

Ogni particella può essere descritta dal suo centro di massa,  $\mathbf{x}(t)$ , e dalla sua velocità,  $\mathbf{v}(t)$ , che evolvono nel tempo. L'equazione che descrive l'evoluzione delle statistiche delle particelle è:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v}f) + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\langle \mathbf{a} | \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle f) = \dot{f}_{coll}$$

Dove  $f$  rappresenta la funzione di distribuzione della particella,  $\mathbf{a}$  l'accelerazione a causa delle forze che agiscono sul fluido,  $\dot{f}_{coll} = \dot{f}_{coll}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$  la variazione di velocità della particella causata dalle collisioni tra le stesse particelle.

È possibile definire anche la concentrazione delle particelle  $C(\mathbf{x}; t)$  e la concentrazione volumetrica delle particelle  $C_0$ :

$$C(\mathbf{x}; t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) d\mathbf{v}$$

$$C_0 = \frac{1}{V} \int C(\mathbf{x}; t) d\mathbf{x} = \frac{1}{V} \int \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) d\mathbf{v} d\mathbf{x}$$

È possibile ottenere un'equazione che rappresenti la conservazione del momento per la fase dispersa semplicemente moltiplicando per  $\mathbf{v}$  la precedente equazione dell'evoluzione delle statistiche delle particelle, ottenendo l'espressione seguente:

$$\frac{\partial(\langle \mathbf{v} | \mathbf{x} \rangle C)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\langle \mathbf{v} \times \mathbf{v} | \mathbf{x} \rangle C) - \langle \mathbf{a} | \mathbf{x} \rangle C = 0$$

In questa equazione il termine relativo alle collisioni sparisce, perché ogni collisione conserva individualmente la quantità di moto nella fase della particella. Per il flusso del canale in stato stazionario, l'espressione precedente implica:

$$\langle v_y^2 | y \rangle \frac{dC}{dy} = \left( \langle a_y | y \rangle - \frac{d\langle v_y^2 | y \rangle}{dy} \right) C$$

I due termini del lato destro rappresentano due cause di profili di concentrazione non uniformi nel flusso turbolento del canale. Il primo termine è la forza media normale alla parete su tutte le particelle ad una particolare distanza dalla parete, mentre il secondo termine indica la turboforesi. Si ha un campionamento distorto del flusso che porta ad una forza netta sulle particelle facendole allontanare dalla parete. La forza di campionamento distorta (*biased sampling*) contrasta la pseudo-forza della turboforesi, la quale spinge le particelle verso la parete.

L'espressione precedentemente ricavata può essere risolta per la concentrazione  $C(y)$ :

$$C(y) = N e^{\left( \int^y \frac{\langle a_y | \eta \rangle}{\langle v_y^2 | y \rangle} d\eta - \int^y \frac{d\langle v_y^2 | \eta \rangle}{d\eta} d\eta \right)}$$

Dove  $N$  è una costante di integrazione per la normalizzazione dell'integrale di  $C/C_0$ .

Il profilo di concentrazione può quindi essere scritto in termini di integrali di foresi per il campionamento distorto ( $I_{camp}$ ) e per la turboforesi ( $I_{turb}$ ).

$$I_{camp} = \int^y \frac{\langle a_y | \eta \rangle}{\langle v_y^2 | y \rangle} d\eta$$

$$I_{turb} = \int^y \frac{d\langle v_y^2 | \eta \rangle}{d\eta} d\eta$$

Questi integrali consentono una valutazione diretta della turboforesi e del campionamento distorto nella determinazione del profilo di concentrazione.

A partire da numeri di Stokes piccoli, la turboforesi inizia ad aumentare la concentrazione nella regione vicino alla parete fino a dieci volte rispetto alla concentrazione totale. Quando Stokes aumenta ulteriormente, la concentrazione vicino alla parete supera cento volte la concentrazione media. A piccoli numeri di Stokes, la forza di campionamento distorta è paragonabile come ordine di grandezza alla turboforesi, attenuando le grandi concentrazioni vicino alla parete. Se si considerasse Stokes tendente a zero, il termine di campionamento distorto annullerebbe completamente la turboforesi.

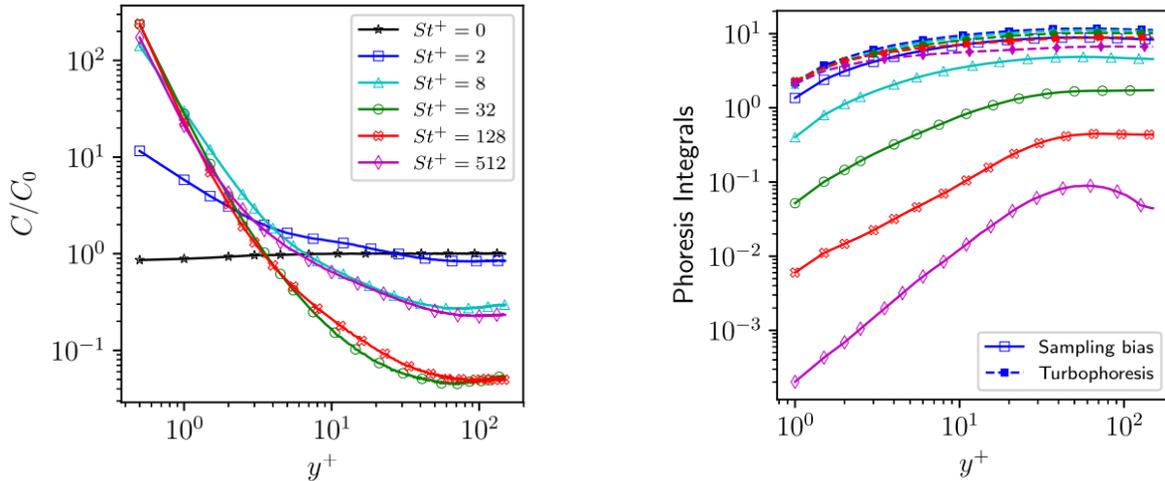


Figura 32. Variazione della concentrazione al variare dei numeri di Stokes. A sinistra, concentrazione relativa in funzione della distanza da parete. A destra, gli integrali di foresi delle particelle in funzione della distanza da parete. [51]

All'aumentare dello Stokes, sia la turboforesi che il campionamento distorto diminuiscono, sebbene la turboforesi diminuisca molto più lentamente. Il risultato è la predominanza della turboforesi rispetto al campionamento distorto a numeri di Stokes più elevati, che porta a:

$$C(y) \sim \frac{1}{\langle v_y^2 | y \rangle}$$

Perciò, si ha un impatto significativo sulla concentrazione delle particelle vicino alla parete, soprattutto per numeri di Stokes bassi e moderati, attraverso un effetto di campionamento distorto che fornisce una forza netta di allontanamento dalla parete sull'insieme di particelle, causata dalla tendenza delle particelle inerziali ad accumularsi nelle regioni di espulsione a bassa velocità. A numeri di Stokes più alti, tuttavia, questo campionamento distorto è di minima importanza e la concentrazione delle particelle diventa inversamente proporzionale alla variazione di velocità delle particelle in direzione normale a parete e ad una data distanza dalla parete stessa.

Di conseguenza, le simulazioni effettuate con la WMLES possono prevedere i profili di concentrazione con maggiore precisione nel caso di particelle aventi numeri di Stokes elevati rispetto ad altri più bassi, e questo semplicemente modificando lo schema di interpolazione per le particelle. Tuttavia, una rappresentazione accurata delle particelle con numeri di Stokes bassi e moderati dipende in modo critico da informazioni non presenti nelle simulazioni standard WMLES.

Due meccanismi attivi possono contrastare la turboforesi. L'espulsione del fluido vicino a parete può, nonostante sia un meccanismo debole, trascinare particelle che sono completamente immerse nel *viscous sublayer* verso la maggior parte del flusso restante. L'altro meccanismo è rappresentato dalla collisione tra particelle, la cui velocità è proporzionale alla frazione volumetrica delle particelle. A frazioni volumetriche pari a  $\varphi = O(10^{-5})$ , le collisioni tra particelle svolgono ancora un ruolo essenziale nello spingere le particelle lontano dalla parete. Se si assumesse che la velocità delle particelle vari proporzionalmente alla velocità del fluido, si troverebbe che le particelle, a distanze

dalla parete leggermente diverse nel *viscous sublayer*, possono avere velocità significativamente differenti.

### 3.3 EQUAZIONE DEL MOTO DELLE PARTICELLE

Nella presente trattazione, si è assunto che la fase dispersa sia sufficientemente diluita da rendere sufficiente un approccio di accoppiamento unidirezionale (*one-way coupling*) al fine di descrivere le interazioni particella-fluido e che le mutue interazioni particella-particella siano insignificanti e trascurabili. La fase dispersa si considera costituita da particelle sferiche puntiformi le quali sono trascinate in un flusso turbolento in condizioni isoterme. Si considera che l'unica forza che agisce sulla particella sia la resistenza (*drag*). La diffusione browniana viene ignorata e quindi trascurata, in quanto le particelle in questo studio hanno diametri maggiori di  $1 \mu m$ . Anche la forza di portanza (*lift*) viene trascurata, perché le particelle sono molto più pesanti del fluido che le trasporta. Si assume anche che l'accelerazione gravitazionale sia nulla.

Date tutte queste assunzioni semplificative, il bilancio delle forze vettoriali su una data particella sferica si riduce quindi a:

$$\frac{d\mathbf{U}_p}{dt} = \mathbf{a}_p = \frac{\mathbf{F}_D}{m_p} = K_D(\mathbf{U} - \mathbf{U}_p)$$

Dove  $\mathbf{F}_D$  indica la forza di drag,  $\mathbf{a}_p$  l'accelerazione della particella,  $\mathbf{U}$  la velocità del fluido,  $\mathbf{U}_p$  la velocità della particella. Il coefficiente  $K_D = [s^{-1}]$  può essere espresso come:

$$K_D = \frac{18\mu}{\rho_p d_p^2} C_D \frac{Re_p}{24}$$

In cui  $\mu$  è la viscosità molecolare (dinamica) del fluido,  $\rho_p$  la densità della particella,  $d_p$  il diametro geometrico della particella,  $C_D$  il coefficiente di resistenza (*drag*) e  $Re_p$  il numero di Reynolds della particella. Quest'ultimo viene a sua volta definito come segue:

$$Re_p = \frac{d_p |\mathbf{U} - \mathbf{U}_p|}{\nu}$$

Dove  $\nu = \mu/\rho$  indica la viscosità cinematica del fluido. A sua volta, il coefficiente di *drag* può essere calcolato nel seguente modo:

$$C_D = b_1 + \frac{b_2}{Re_p} + \frac{b_3}{Re_p^2}$$

Dove  $b_i$  rappresentano delle costanti che si applicano alle particelle sferiche per ampi intervalli di  $Re_p$ . Dalla legge di resistenza empirica, ricavata da Schiller and Naumann, si può riscrivere il coefficiente di resistenza come segue [1]:

$$C_D = \frac{24}{Re_p} (1 + 0.15 Re_p^{0.687})$$

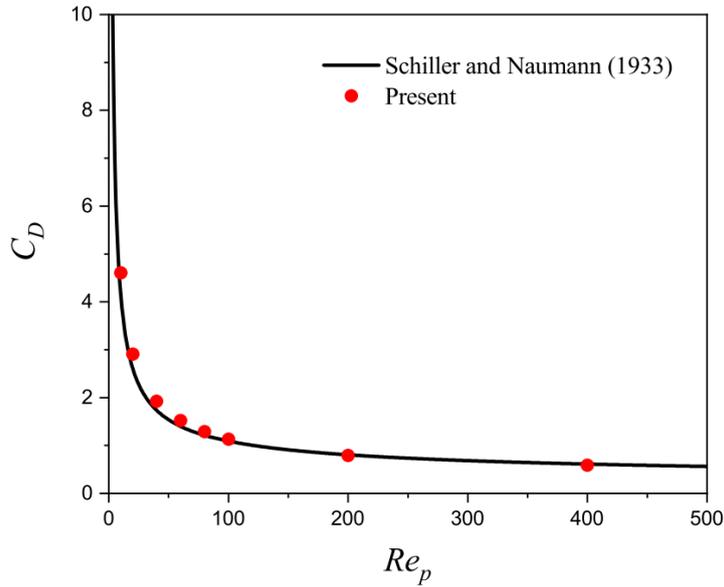


Figura 33. Variazione del coefficiente di resistenza in funzione del numero di Reynolds della particella, per una particella sferica in un flusso. [1]

In questo modo, è possibile riscrivere il coefficiente  $K_D$  calcolato prima:

$$K_D = \frac{18\mu}{\rho_p d_p^2} \frac{Re_p}{24} \frac{24}{Re_p} (1 + 0.15 Re_p^{0.687}) = \frac{18\mu}{\rho_p d_p^2} (1 + 0.15 Re_p^{0.687}) = \frac{1 + 0.15 Re_p^{0.687}}{\tau_p}$$

Dove  $\tau_p$  indica il tempo di rilassamento della particella, definito in funzione del numero di Reynolds locale della particella  $Re_p$ , valido per  $Re_p \leq 1$ :

$$\tau_p = \frac{\rho_p d_p^2}{18\mu}$$

Perciò, è possibile l'equazione del moto della particella nel seguente modo:

$$\frac{d\mathbf{U}_p}{dt} = \frac{1 + 0.15 Re_p^{0.687}}{\tau_p} (\mathbf{U} - \mathbf{U}_p) = f_p \frac{\mathbf{U} - \mathbf{U}_p}{\tau_p}$$

In cui  $f_p = 1 + 0.15 Re_p^{0.687}$ . Il termine  $d\mathbf{U}_p/dt$  indica la variazione di velocità della particella nel tempo, cioè, è l'accelerazione della particella.

La traiettoria  $\mathbf{x}(x, y, z, t)$  della particella si ottiene integrando la seguente equazione rappresentata dal vettore velocità rispetto al tempo:

$$\mathbf{U}_p = \frac{d\mathbf{x}_p}{dt}$$

In un flusso laminare, le relazioni descritte in precedenza sono sufficienti per calcolare la traiettoria delle singole particelle, poiché la velocità della particella  $\mathbf{U}_p$  è costante nel tempo per problemi di tipo stazionario. La concentrazione e la deposizione delle particelle sono quindi calcolate in modo lagrangiano deterministico, che produce risultati abbastanza accurati, come mostrato da Healy e Young [2].

Invece, quando nel flusso è presente la turbolenza, come nella presente trattazione, il calcolo del moto delle particelle diventa significativamente più complicato, in quanto le fluttuazioni casuali della velocità non consentono una conoscenza deterministica delle traiettorie delle particelle trasportate dal fluido. Si ricorre, quindi, a calcoli stocastici di un gran numero di traiettorie, con l'obiettivo di catturare la dispersione media delle particelle.

Non esiste un solo modo per risolvere questo problema; accanto ai metodi numerici visti in precedenza (DNS, RANS e LES), negli ultimi anni si sono sempre più sviluppati modelli stocastici.

### 3.4 MODELLO STOCASTICO

I modelli stocastici mirano a simulare la turbolenza attraverso l'utilizzo di equazioni complementari, per cui le velocità turbolente istantanee vengono calcolate sulla base di quantità locali, come l'energia cinetica turbolenta, il tempo caratteristico Euleriano e la distanza da parete.

Esempi di questi trattamenti sono rappresentati dai modelli cosiddetti modelli *random walk models*, i quali hanno guadagnato una forte popolarità nel campo della fluidodinamica computazionale, grazie alla loro relativa facilità di implementazione e al ragionevole costo computazionale. In particolare, è possibile identificare due modelli stocastici di interesse: i modelli *Discrete Random Walk* (DRW) e i modelli *Continuous Random Walk* (CRW).

Nei modelli *Discrete Random Walk* (DRW) [3], la dispersione turbolenta delle particelle è modellata come una successione di interazioni tra una particella e vortici caratterizzati da lunghezze e durate finite. Si assume che, al tempo  $t_0$ , una particella caratterizzata dalla velocità  $U_p$  venga catturata da un vortice che si muove con una velocità composta dalla velocità media del fluido, aumentata da una componente casuale "istantanea", la quale è costante a tratti nel tempo. Quando la durata del vortice termina oppure la particella attraversa il vortice, viene generata un'altra interazione con un vortice differente, e così via. Nel modello DRW, la turbolenza è assunta isotropa e il campo di velocità fluttuante, visto da una particella, è tratto da una distribuzione Gaussiana con media nulla e varianza pari a  $2k/3$ , dove  $k$  indica la energia cinetica turbolenta. Tuttavia, nei flussi delimitati da pareti, il modello DRW isotropo originale è stato migliorato, al fine di tenere conto della turbolenza anisotropa nelle regioni vicine alla parete [4]. È anche stata introdotta una correzione [5] per ridurre il *drift* causato dalle particelle spurie. Nonostante questi miglioramenti, il modello DRW ha mostrato gravi limitazioni dovute essenzialmente al trattamento discreto della turbolenza, la quale produce infinite accelerazioni della fase fluida al termine della durata del vortice.

Più promettenti sono i modelli CRW (*Continuous Random Walk*) [8], i quali forniscono un'immagine della turbolenza del fluido più realistica, rappresentando le velocità istantanee del fluido viste dalle particelle in modo continuo. I modelli CRW, solitamente basati sulle equazioni di Langevin, hanno dimostrato di fornire previsioni più realistiche della dispersione turbolenta delle particelle rispetto al modello DRW, in particolare nei flussi in cui gli effetti disomogenei sono importanti. I modelli CRW basati sulle equazioni di Langevin normalizzate (più adatte ad affrontare le disomogeneità della turbolenza) sono stati implementati con successo in un gran numero di configurazioni di flusso, come ad esempio la diffusione di particelle in uno strato limite turbolento [6] oppure lo studio di flussi anulari orizzontali turbolenti [7].

Il modello CRW è stato validato rispetto alle statistiche Euleriane DNS ed è stato utilizzato per prevedere la dispersione delle particelle in un flusso all'interno di un canale caratterizzato da

turbolenza anisotropa e disomogenea nella direzione normale a parete. In questo caso, il modello CRW ha incorporato una correzione della velocità di *drift* per particelle ad inerzia arbitraria e ha assicurato la validità del criterio stringente di miscelazione uniforme nel tempo delle particelle lungo tutto il dominio [8].

Prima di illustrare come viene implementato il modello, è fondamentale chiarire il concetto di base, ossia l'equazione di Langevin, la quale viene descritta di seguito.

### 3.5 EQUAZIONE DI LANGEVIN

La storia temporale delle fluttuazioni del fluido che una particella vede mentre si muove in un flusso determina, in larga misura, le sue caratteristiche di dispersione e di deposizione nei campi turbolenti. Nella turbolenza omogenea, uno dei modi più comuni per descrivere le fluttuazioni della velocità del fluido in modo continuo è attraverso la cosiddetta equazione di Langevin. Questa equazione fu proposta da Langevin agli inizi del 1900 per modellare il moto Browniano casuale di particelle molto piccole.

Si assume che la variazione della velocità delle particelle nel tempo sia composta da un termine di smorzamento proporzionale alla velocità, e da un termine *random* di una forzante con media nulla. Nel 1959, Obukhov ha esteso questo concetto ai campi di velocità del fluido caratterizzati da turbolenza omogenea [9] e, in questo contesto, l'equazione di Langevin diventa un'equazione differenziale stocastica e viene specificato un possibile incremento  $du_i$  nella fluttuazione della velocità del fluido:

$$du_i = -u_i(t) \frac{dt}{\tau_i} + \sigma_i \sqrt{\frac{2}{\tau_i}} d\xi_i$$

Per uniformità a livello matematico, si è definita  $U_i$  come la velocità istantanea del fluido,  $u_i$  la fluttuazione di velocità del fluido,  $\bar{U}_i$  la velocità media del fluido. La velocità istantanea si esprime come la somma delle altre due velocità appena descritte:

$$U_i = \bar{U}_i + u_i$$

Si ricorda che, per definizione, la media della fluttuazione della velocità è nulla  $\bar{u}_i = 0$ .

Invece, l'incremento nello spostamento  $dx_i$  in un tempo  $dt$  è:

$$dx_i = (U_i + u_i)dt$$

Si ha che  $\tau_i$  indica la scala temporale,  $\sigma_i$  la radice quadratica media (rms) della fluttuazione di velocità  $\sqrt{\bar{u}_i^2}$ ,  $x_i$  la coordinata  $i$ -esima,  $d\xi_i$  una successione di numeri casuali non correlati con media nulla e varianza  $dt$ . Si assume che  $\xi_i$  indichi una distribuzione Gaussiana.

L'equazione di Langevin è stata ampiamente utilizzata per modellare la turbolenza omogenea, nella quale i valori RMS e le scale temporali lagrangiane sono indipendenti dalla posizione. Nel flusso delimitato da pareti, tuttavia, la turbolenza è fortemente disomogenea e anisotropa all'interno dello strato limite, il che implica che siano necessarie alcune modifiche all'equazione di Langevin.

Diversi autori hanno tentato di tenere conto della disomogeneità della turbolenza. Ad esempio, Legg e Raupach (1982) hanno affermato che le fluttuazioni della velocità nella direzione normale a parete

che una particella fluida vede nello strato limite siano governate dalla seguente equazione, per flussi completamente sviluppati in un canale turbolento in regime stazionario [10]:

$$du_2 = -u_2 \frac{dt}{\tau_2} + \sigma_2 \sqrt{\frac{2}{\tau_2}} d\xi_2 + \frac{\partial \sigma_2^2}{\partial x_2} dt$$

Nella trattazione considerata, l'ultimo termine del secondo membro viene aggiunto come correzione del *drift* medio (*mean drift correction*), il quale garantisce che le particelle seguiranno, in media, linee di flusso in flussi disomogenei. Nelle simulazioni DRW o CRW, la mancata inclusione di questo termine di correzione si traduce in una diffusione non fisica delle particelle con errori anche fino al 550% per flussi semplici [11], mentre la sua inclusione diminuisce drasticamente l'errore per flussi disomogenei [12].

Questa correzione per le particelle si ritiene sia necessaria e molto importante; perciò, è stata riportata la seguente analisi [8]. Si parte dal calcolo dell'accelerazione istantanea  $a_i$  di una particella fluida:

$$a_i = U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

L'accelerazione media si ottiene applicando la definizione della velocità nell'espressione precedente e calcolando la media nel tempo. Si ottiene:

$$\bar{a}_i = \bar{a}_{i,media} + \bar{a}_{i,drift} = \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

È quindi possibile scomporre l'accelerazione media di una particella fluida in una componente dovuta al flusso medio  $\bar{a}_{i,media}$  e una componente dovuta a fluttuazioni turbolente casuali  $\bar{a}_{i,drift}$  in un campo di flusso disomogeneo. L'accelerazione di *drift* dà origine ad una velocità di *drift*  $\delta u_i$  che è necessario aggiungere nell'equazione di Langevin per tenere conto delle disomogeneità della turbolenza:

$$\delta u_i = \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} dt = \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} dt$$

Per arrivare alla seconda uguaglianza nella precedente espressione, è stato necessario applicare un campo di velocità fluttuante a divergenza nulla, e questo è stato ottenuto dal considerare flussi incomprimibili, affrontati proprio in questa trattazione.

La forma assunta dal termine di correzione dipende dalle particolari condizioni del flusso. Nella direzione normale a parete dello strato limite, l'ipotesi del canale completamente sviluppato permette che la derivata normale a parete di  $\sigma_2^2 = \overline{u_2 u_2}$  sia dominante nel secondo membro dell'espressione precedente. Grazie a questo, si è riusciti ad ottenere la forma del termine di correzione di drift nell'equazione di Langevin descritta in precedenza, per la direzione normale a parete.

Tuttavia, la velocità di *drift* calcolata precedentemente è applicabile solo alle particelle che seguono perfettamente le fluttuazioni del fluido. Un approccio seguito [13] è stato quello di ipotizzare che la velocità del fluido vista dalle particelle inerziali sia la stessa di quella vista dalle particelle fluide, e quindi la correzione del *drift* si applica anche alle particelle inerziali, in prima approssimazione.

Un'altra analisi più rigorosa [14] è rappresentata da una correzione del *drift* che si applica alle particelle con inerzia arbitraria. In questo caso, utilizzando l'accelerazione istantanea di una particella fluida lungo il percorso di una particella inerziale, si è dimostrato che la correzione del *drift* per una particella inerziale può essere ottenuta dalla correzione del *drift* di una particella fluida attraverso un fattore moltiplicativo, come segue:

$$\delta u_i = \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} \left( \frac{1}{1 + Stk} \right) dt$$

Per determinare il comportamento della particella a diverse scale di lunghezza (e scale temporali) del flusso è conveniente introdurre il rapporto tra il tempo di rilassamento della particella  $\tau_p$  e la scala temporale del flusso ad una determinata scala di lunghezza, chiamato numero di Stokes.

Il numero di Stokes fornisce una misura dell'inerzia delle particelle rispetto al flusso, nella scala temporale di interesse. Perciò, è possibile definire diversi tipi di numero di Stokes, a seconda della scala temporale del flusso scelta. In particolare, verranno utilizzate successivamente due definizioni differenti del numero di Stokes, le quali verranno indicate con due acronimi diversi. In questo caso, il numero di Stokes  $Stk$  viene definito utilizzando la scala temporale Lagrangiana  $\tau_L$ :

$$Stk = \frac{\tau_p}{\tau_L}$$

In cui  $\tau_p = \rho_p d_p^2 / (18\mu)$  si ricorda essere il tempo di rilassamento della particella, mentre  $\tau_L$  è la scala temporale Lagrangiana (definita nel capitolo successivo). Questo numero di Stokes  $Stk$  verrà utilizzato nel modello stocastico (Langevin).

Una seconda definizione del numero di Stokes viene ottenuta utilizzando la scala temporale viscosa del flusso  $t_\tau$ , la quale permette di calcolare  $St^+$  come segue:

$$St^+ = \frac{\tau_p}{t_\tau}$$

Dove  $St^+$  prende il nome di numero di Stokes viscoso, mentre  $t_\tau = \nu / u_\tau^2$ .  $St^+$  verrà utilizzato per definire l'inerzia delle particelle.

L'ultima espressione relativa alla velocità di *drift*  $\delta u_i$  è valida a condizione che la velocità di sedimentazione gravitazionale (*gravitational settling velocity*) delle particelle sia molto inferiore rispetto alle fluttuazioni di velocità del fluido. Inoltre, si può notare che la correzione del *drift* inerziale delle particelle si comporta correttamente agli estremi, ossia per numeri di Stokes molto elevati il

campo di flusso fluttuante e il moto delle particelle sono disaccoppiati; quindi, la correzione del *drift* tende a zero.

Pur fornendo risultati migliori nei flussi disomogenei rispetto ai modelli DRW, le previsioni del modello CRW basato sull'equazione di Langevin classica non sono completamente soddisfacenti. Un significativo passo avanti fu fatto attraverso la normalizzazione dell'equazione di Langevin, con lo scopo di tenere conto della turbolenza disomogenea nella direzione normale a parete dello strato limite. Perciò, l'equazione di Langevin normalizzata può essere scritta come [13]:

$$d\left(\frac{u_i}{\sigma_i}\right) = -\left(\frac{u_i}{\sigma_i}\right)\frac{dt}{\tau_L} + d\eta_i + A_i dt$$

Dove  $d\eta_i$  indica una successione di termini forzanti casuali non correlati,  $A_i$  il termine di correzione del *drift* medio, il quale garantisce il criterio di miscelamento uniforme delle particelle (*well-mixed criterion*), cioè il requisito che afferma che particelle con inerzia molto piccola, inizialmente ben miscelate nel dominio in un flusso turbolento disomogeneo, possano rimanere in modo tale anche con l'evolversi del tempo [15].

Nello strato limite, dove i pedici 1, 2 e 3 indicano rispettivamente la direzione assiale (*streamwise*), normale a parete (*wall-normal*) e trasversale (*spanwise*), si ha:

$$A_i = \frac{\partial\left(\frac{u_2 u_1}{\sigma_i}\right)}{\partial x_2}$$

Mentre, al primo ordine, è possibile esprimere anche i cosiddetti *forcing moments*:

$$\overline{d\eta_i d\eta_j} = \frac{\overline{u_i u_j}}{\sigma_i \sigma_j} \left[ \frac{1}{\tau_i} + \frac{1}{\tau_j} \right] dt$$

Questa equazione è stata ottenuta assumendo distribuzioni Gaussiane per i termini forzanti  $\eta_i$  [16].

Per la direzione normale a parete,  $A_2$  si riduce a  $\partial\sigma_2/\partial x_2$  e rappresenta la controparte del termine  $\partial\sigma_2^2/\partial x_2$  nell'equazione di Langevin classica. Il termine  $A_3$  è impostato a zero [7].

Nell'equazione di Langevin normalizzata, gli incrementi rappresentano la variazione del valore delle fluttuazioni attorno alla media, e non l'incremento della velocità istantanea [17]. Invece, per ottenere la variazione della velocità istantanea, è necessario includere il termine dovuto al gradiente di velocità media, ossia  $-u_j \partial \bar{U}_i / \partial x_j$ . Poiché in questo caso si sta considerando solamente il flusso dello strato limite, quest'ultimo termine è diverso da zero solo nella direzione 1 (*streamwise*) del flusso. Si dovrebbe, quindi, aggiungere il termine  $-u_2 (\partial \bar{U}_1 / \partial x_2) dt$  in quella direzione dopo che  $u_1$  è stato calcolato dall'equazione di Langevin normalizzata.

L'equazione di Langevin normalizzata con la correzione del *drift* inerziale delle particelle può essere scritta come segue, rispettivamente per le direzioni *streamwise*, *wall-normal* e *spanwise* dello strato limite:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\left(\frac{u_1}{\sigma_1}\right) = -\left(\frac{u_1}{\sigma_1}\right)\frac{dt}{\tau_L} + \sqrt{\frac{2}{\tau_L}}d\xi_1 + \frac{\partial\left(\frac{u_1 u_2}{\sigma_1}\right)}{\partial x_2} \frac{dt}{1 + Stk} \\ d\left(\frac{u_2}{\sigma_2}\right) = -\left(\frac{u_2}{\sigma_2}\right)\frac{dt}{\tau_L} + \sqrt{\frac{2}{\tau_L}}d\xi_2 + \frac{\partial\sigma_2}{\partial x_2} \frac{dt}{1 + Stk} \\ d\left(\frac{u_3}{\sigma_3}\right) = -\left(\frac{u_3}{\sigma_3}\right)\frac{dt}{\tau_L} + \sqrt{\frac{2}{\tau_L}}d\xi_3 \end{array} \right.$$

Queste espressioni rappresentano le equazioni di Langevin normalizzate, sulle quali fonda le basi il modello stocastico CRW.

In questa trattazione, verrà utilizzata una notazione differente in funzione della direzione considerata: rispettivamente, nelle direzioni *streamwise*, *wall-normal* e *spanwise* si sostituiscono i pedici 1, 2 e 3 con  $x$ ,  $z$  e  $y$ . La direzione normale a parete sarà indicata con  $z$ .

## 4 IMPLEMENTAZIONE DEL MODELLO

In questo capitolo verrà fornita una descrizione dettagliata del modello implementato, che si fonda sulla letteratura analizzata nei capitoli precedenti.

L'obiettivo di questo lavoro è definire e ottimizzare un modello WMLES in grado di simulare con efficacia il comportamento delle particelle all'interno di un flusso turbolento, mantenendo un costo computazionale contenuto. Le simulazioni sono state eseguite per diversi numeri di Reynolds, al fine di validare il modello e ampliare il suo campo di applicazione, con l'intento di generalizzarlo il più possibile. Per ridurre il costo computazionale e ottenere risultati soddisfacenti, è stata utilizzata una griglia a bassa risoluzione.

Per raggiungere questi scopi, è stato implementato un *tool open-source*, chiamato CaNS, che risolve le equazioni di Navier-Stokes e progettato per il calcolo parallelo. Questo strumento permette di risolvere il flusso e di applicare un modello per simulare il comportamento del flusso nella regione vicina alla parete.

### 4.1 CANS

I flussi turbolenti sono presenti sia in natura che nell'industria, e mostrano dinamiche instabili, tridimensionali, caotiche e multiscala. Le equazioni di Navier-Stokes che ne governano la dinamica sono altamente non lineari, rendendo spesso difficili le previsioni analitiche. Fortunatamente, il continuo incremento della potenza computazionale, insieme al progresso nello sviluppo di tecniche numeriche efficienti, hanno portato ad un cambiamento nella ricerca sulla turbolenza. È ora possibile condurre simulazioni numeriche dirette (DNS) che generano dati per l'intero spettro di scale, con miliardi o addirittura trilioni di gradi di libertà spaziali [19].

Molte intuizioni fondamentali sulla dinamica dei flussi turbolenti sono state rivelate con algoritmi standard alle differenze finite del secondo ordine, incorporati in uno schema di correzione della pressione rappresentato dall'equazione di Poisson, il quale è spesso la parte più impegnativa del risolutore di Navier–Stokes. In molti casi, per risolvere il sistema risultante vengono utilizzati solutori iterativi (ad esempio metodi multigriglia [20]). Questi metodi presentano eccellenti proprietà di scalabilità e sono versatili per quanto riguarda il tipo di condizioni al contorno che possono essere implementate. Tuttavia, è possibile utilizzare solutori diretti molto più efficienti per diverse combinazioni di condizioni al contorno. Il metodo delle espansioni delle autofunzioni (*eigenfunction expansions*) è un esempio, il quale analizza il fatto che il numero di diagonali nella matrice dei coefficienti può essere ridotto risolvendo un problema agli autovalori e utilizzando espansioni basate su Fourier. Se confrontati con i metodi multigriglia, i solutori diretti basati sulle FFT (*Fast Fourier*

*Transform*) per l'equazione di Poisson alle differenze finite del secondo ordine possono essere  $O(10)$  volte più veloci [21] e, per costruzione, soddisfano la soluzione alla precisione di macchina. La FFT viene utilizzata per trasformare il dominio spaziale nel dominio della frequenza, risolvendo l'equazione in modo più efficiente. Una volta trovata la soluzione nel dominio della frequenza, la FFT inversa viene utilizzata per trasformare nuovamente la soluzione nel dominio spaziale. Riducendo il costo computazionale, i solutori basati sulla FFT possono gestire set di dati di grandi dimensioni e griglie ad alta risoluzione in modo più efficace, e sono generalmente molto accurati per condizioni al contorno periodiche (comuni nelle simulazioni dei flussi).

La sfida intrinseca per una parallelizzazione efficiente è che l'algoritmo FFT richiede tutti i punti in una direzione. Di conseguenza, una parallelizzazione a memoria distribuita in più di una direzione non è semplice. Questa difficoltà ha limitato i progressi nella scalabilità di questi metodi ad un numero molto elevato di core (più di  $O(10^3)$ ).

C'è stato un cambiamento di tendenza da quando hanno iniziato ad apparire librerie altamente scalabili per la scomposizione di domini bidimensionali *pencil-like* [22]. Numerosi esempi recenti di implementazioni numeriche che utilizzano questo metodo diretto, combinato con una scomposizione del dominio 2D, hanno ottenuto prestazioni senza precedenti nelle dimensioni dei problemi con  $O(10^9)$  nodi. Esempi sono le simulazioni risolte all'interfaccia di flussi con bolle in turbolenza isotropa omogenea [23] e le simulazioni risolte all'interfaccia di particelle dense in flussi turbolenti delimitate da pareti [24].

Si presenta, di seguito, il metodo numerico che è stato utilizzato in questa trattazione, denominato CaNS (*Canonical Navier–Stokes*) [18]. Questo è un codice *open-source* sviluppato al fine di effettuare simulazioni numeriche veloci e parallele di una vasta gamma di flussi turbolenti, e rappresenta un'implementazione generale della DNS caratterizzata da un'ampia gamma di condizioni al contorno. Queste ultime possono essere gestite con un solutore del secondo ordine basato sulle FFT (*Fast Fourier Transform*) per la discretizzazione alle differenze finite dell'equazione di Poisson della pressione utilizzando una griglia tridimensionale, con ottime prestazioni sia in termini di scaling sia in termini di tempo effettivo.

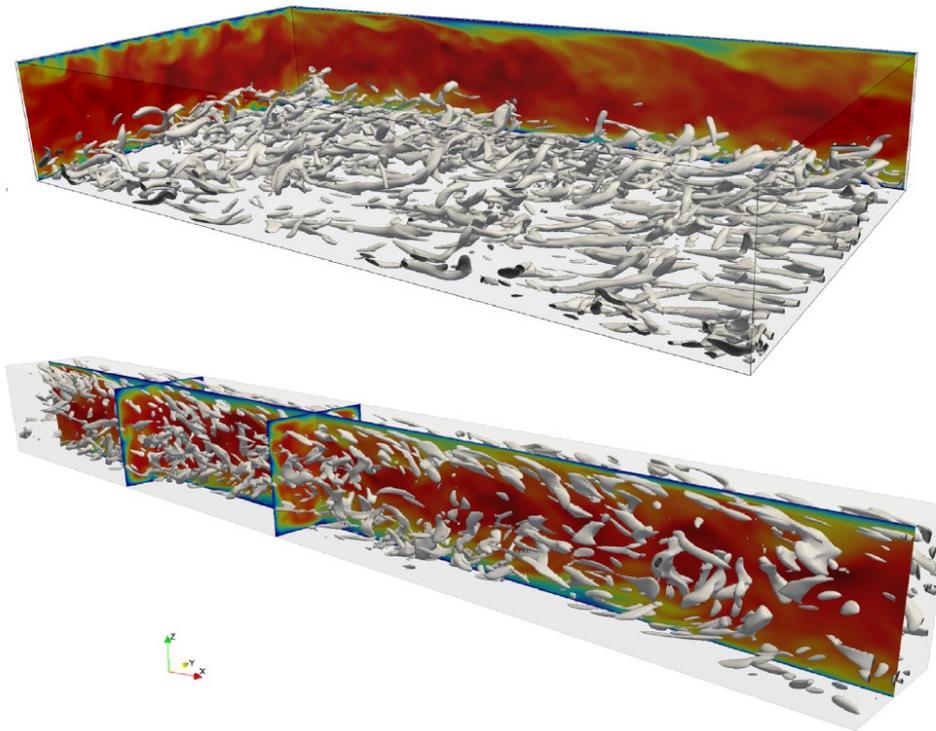


Figura 34. Simulazioni di un canale turbolento (sopra) e di un condotto (sotto) utilizzando CaNS. [18]

In due direzioni la griglia è regolare e il solutore supporta la seguente combinazione di condizioni al contorno omogenee:

- Neumann-Neumann
- Dirichlet-Dirichlet
- Neumann-Dirichlet
- Periodic

Nella terza direzione del dominio, il solutore è più flessibile poiché utilizza l'eliminazione di Gauss e, in questo caso, la griglia può anche essere non uniforme.

L'algoritmo numerico (CaNS) risolve le equazioni di Navier-Stokes per un fluido Newtoniano incomprimibile, caratterizzato da una densità  $\rho$  unitaria e da una viscosità cinematica  $\nu$ :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \end{cases}$$

Dove  $\mathbf{u}$  indica il vettore velocità del fluido, mentre  $p$  la pressione.

Queste equazioni vengono risolte in una griglia cartesiana strutturata, uniformemente distanziata in due direzioni. La discretizzazione spaziale viene eseguita utilizzando schemi alle differenze finite del secondo ordine con una disposizione sfalsata dei nodi della griglia. Le equazioni di N-S incomprimibili sono accoppiate attraverso un metodo di correzione della pressione (*pressure-correction method*) e integrate nel tempo con uno schema *Runge-Kutta* a tre step (RK3).

L'avanzamento ad ogni *substep*  $k$  è presentato di seguito (la notazione usata è  $k = 1, 2, 3$ ;  $k = 1$  corrisponde al livello temporale  $n$  e  $k = 3$  a  $n + 1$ ):

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^* &= \mathbf{u}^k + \Delta t(\alpha_k \mathbf{D}^k + \beta_k \mathbf{D}^{k-1} - \gamma_k \nabla p^{k-1/2}) \\ \nabla^2 \Phi &= \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\gamma_k \Delta t} \\ \mathbf{u}^k &= \mathbf{u}^* - \gamma_k \Delta t \nabla \Phi \\ p^{k+1/2} &= p^{k-1/2} + \Phi\end{aligned}$$

Dove  $\mathbf{D} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}^*$  è la velocità prevista,  $\Phi$  è la pressione di correzione. I coefficienti RK3 sono dati da  $\alpha_k = \{8/15, 5/12, 3/4\}$ ,  $\beta_k = \{0, -17/60, -5/12\}$  e  $\gamma_k = \alpha_k + \beta_k$ . Questo schema temporale si è dimostrato essere affidabile per la DNS dei flussi turbolenti, ottenendo una precisione temporale e spaziale complessiva del secondo ordine [25].

Inoltre, la restrizione del passo temporale dovuta agli effetti viscosi può essere rimossa utilizzando una discretizzazione implicita (come *Crank–Nicolson*) del termine di diffusione. Ciò comporta la soluzione di tre equazioni di Helmholtz, una per ciascuna componente della velocità  $\mathbf{u}^*$ . Il sovraccarico computazionale associato può ripagare in caso di flussi con un basso numero di Reynolds, ma non è necessario per i flussi dominati dall'inerzia, come nella presente trattazione. Infine, si può notare che le condizioni al contorno per la pressione di correzione e la velocità prevista/finale potrebbero non essere specificate in modo indipendente.

Spesso, la soluzione dell'equazione di Poisson per la pressione di correzione è la parte più impegnativa dal punto di vista computazionale di un solutore di N-S. Come già visto, è possibile utilizzare un metodo diretto veloce basato su FFT, anche se l'incognita non è periodica, attraverso il metodo degli sviluppi delle autofunzioni. Questo metodo viene applicato in due direzioni del dominio,  $x$  e  $y$ , richiedendo una spaziatura della griglia costante e condizioni al contorno omogenee.

Considerando l'equazione di Poisson a coefficienti costanti discretizzata con lo schema alle differenze finite centrato del secondo ordine nelle celle della griglia, si riduce questo sistema di equazioni con sette diagonali diverse da zero ad un sistema tridiagonale, che può essere risolto in modo molto efficiente con l'eliminazione di Gauss attraverso  $O(n)$  operazioni, in contrasto con le  $O(n \log n)$  richieste dall'algoritmo FFT, dove  $n$  è il numero di celle della griglia lungo la direzione  $z$ . Inoltre, con l'eliminazione di Gauss è possibile una spaziatura della griglia non uniforme in  $z$ .

Per quanto riguarda l'implementazione dell'algoritmo numerico, questa avviene in Fortran con un'estensione Message-Passing Interface (MPI) che consente la parallelizzazione della memoria distribuita, combinata con una parallelizzazione della memoria condivisa (hybrid MPI-OpenMP).

Alcune caratteristiche relative a CaNS e relative ad altre librerie utilizzate verranno sinteticamente descritte di seguito.

La libreria altamente scalabile *2DECOMP&FFT* fornisce una semplice interfaccia per eseguire trasposizioni di dati globali su processori (CPU) e alcuni dei dati input/output, ossia l'I/O parallelo è gestito da *2DECOMP&FFT*, il quale è basato su MPI-I/O.

Un'altra libreria, la cosiddetta *cuDecomp*, permette la scomposizione al fine di consentire calcoli sulla memoria distribuita che si adattino a differenti hardware su molte GPU (schede grafiche).

Le trasformate discrete sono calcolate con la libreria *FFTW3*. L'interfaccia della libreria calcola tutte le trasformate discrete semplicemente modificando un parametro corrispondente al tipo di trasformazione, consentendo un'implementazione parallela unica ed efficiente del solutore di Poisson, poiché è richiesto un solo layout di dati per le routine di trasposizione. Il sistema di equazioni tridiagonale risultante viene risolto con la libreria *LAPACK*.

Perciò, questo algoritmo consente diverse combinazioni di condizioni al contorno di pressione omogenee, le quali traggono vantaggio dal metodo degli sviluppi delle autofunzioni. Inoltre, questo approccio è in grado di scalare fino a circa  $10^4$  core per un problema caratterizzato da  $10^9$  gradi di libertà spaziali, raggiungendo un tempo della simulazione molto ridotto.

## 4.2 DESCRIZIONE GENERALE DEL CANALE

In questa trattazione, si è studiato il moto delle particelle disposte in maniera casuale all'interno di un flusso di gas in un canale turbolento.

La densità del gas (aria) all'interno del quale sono immerse le particelle è  $\rho_f = 1.3 \text{ kg/m}^3$ , mentre la densità delle particelle solide è molto più elevata, pari a  $\rho_p = 3510 \text{ kg/m}^3$  (come il diamante). Il loro rapporto è uguale a  $\rho_p/\rho_f = 2700$ .

Il flusso analizzato si sviluppa tra due piani paralleli che si estendono all'infinito, con l'origine del canale posta al centro del sistema. Gli assi x, y e z sono rispettivamente associati alla direzione *streamwise*, *spanwise* e *wall-normal* del flusso (CaNS utilizza la direzione z come direzione normale a parete, contrariamente alla direzione y che solitamente si utilizza).

Vengono adottate unità adimensionali al fine di permettere di ottenere soluzioni universali, lasciando una più ampia flessibilità in termini di risultati ottenuti. Perciò, nel file di input sono state definite le dimensioni del canale in unità:  $L_x \times L_y \times L_z = 3 \times 1.5 \times 1$ .  $L_x$  rappresenta la lunghezza,  $L_y$  la larghezza e  $L_z$  l'altezza. La semi-ampiezza è data da  $\delta = h/2 = 0.5$ .

Inoltre, tra i vari parametri iniziali è stata definita la risoluzione della griglia utilizzata nel modello, la quale viene suddivisa in 48 celle per ognuna delle tre direzioni:  $N_x \times N_y \times N_z = 48 \times 48 \times 48$ . Si è cercato di adottare la risoluzione più piccola possibile, in modo tale da minimizzare il costo computazionale e dimostrare di essere in grado di ottenere buoni risultati anche mediante l'utilizzo di una griglia non molto fitta. Visto che ogni direzione è caratterizzata da una lunghezza differenti, si avrà una spaziatura diversa per ogni direzione.

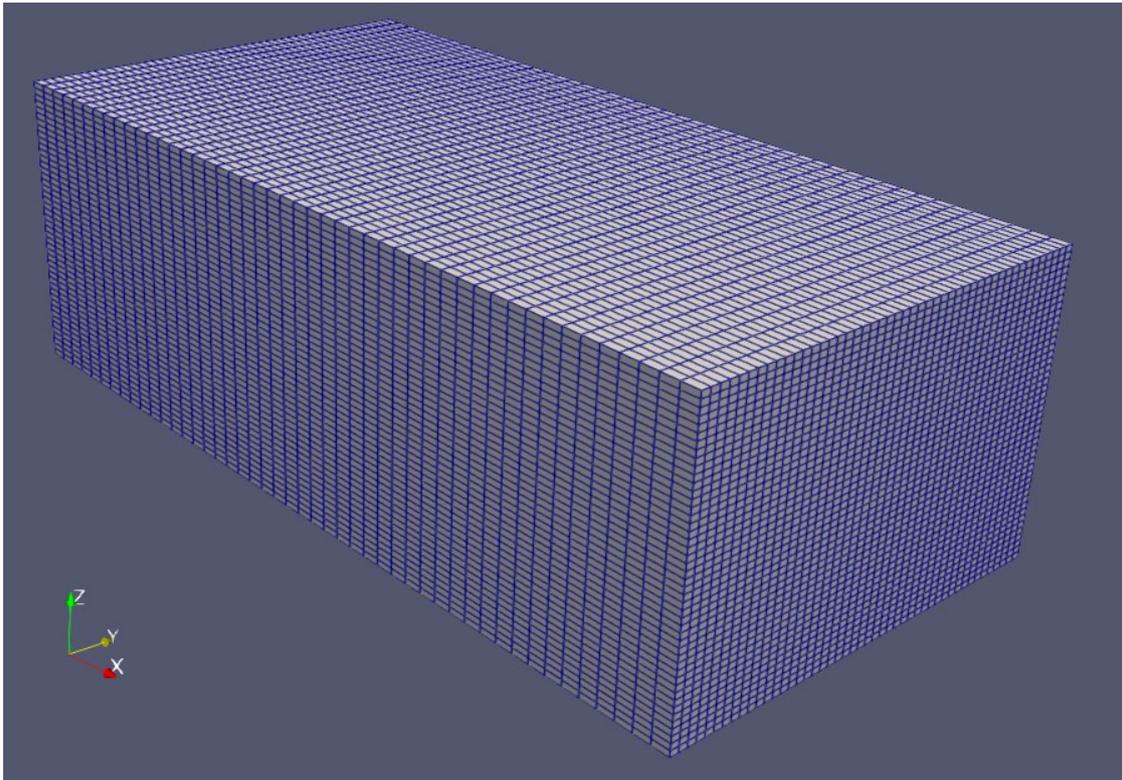


Figura 35. Visualizzazione in Paraview del dominio realizzato per il canale turbolento, caratterizzato da una griglia uniforme 48x48x48.

Una volta noti sia il numero di celle che caratterizzano la griglia sia la lunghezza delle dimensioni del canale, è possibile calcolare la risoluzione spaziale della griglia  $\Delta i = \frac{L_i}{N_i}$ , con  $i = x, y, z$ :

$$\Delta x = \frac{L_x}{N_x} = 0.0625, \quad \Delta y = \frac{L_y}{N_y} = 0.03125, \quad \Delta z = \frac{L_z}{N_z} = 0.02083$$

È possibile convertire la risoluzione spaziale appena calcolata in unità di parete, ma prima è necessario calcolare la velocità d'attrito e la viscosità cinematica del fluido.

In questa analisi, sono state effettuate simulazioni differenti raggruppabili in tre macroaree, ognuna identificata essenzialmente da un numero di Reynolds diverso, definito come parametro di input, come segue:

- A)  $Re_b = 40500$
- B)  $Re_b = 20063$
- C)  $Re_b = 87000$

Nel caso A) si è voluto procedere con lo sviluppo e l'ottimizzazione del modello WMLES, oltre che alla sua validazione, attraverso una variazione di alcuni parametri sperimentali e delle prove sulla zona di transizione, come verrà spiegato in modo più approfondito in seguito. Successivamente, con lo scopo di generalizzare il modello implementato anche per numeri di Reynolds differenti, sono stati studiati anche i casi B) e C). Nel secondo caso, così come fatto nel primo, si è cercato di migliorare e di validare il modello, attraverso il confronto con altri dati DNS ottenuti mediante simulazioni

fluidodinamiche effettuate con il supercomputer Leonardo, presso il centro di supercalcolo Cineca. Invece, nel terzo caso è stato riprodotto solamente un andamento qualitativo dei risultati ottenuti, a causa della mancanza dei dati in letteratura. Inoltre, come si potrà osservare in seguito, è stata effettuata un'analisi approfondita sugli errori per i casi B) e C), mentre per tutti i casi considerati è stato effettuato un confronto anche con le statistiche del fluido.

Per ognuna delle macroaree considerate, è stato mantenuto un numero di Reynolds costante, definito in input, per ogni simulazione svolta. A partire da questo parametro, è stato implementato nel modello il calcolo del numero di Reynolds d'attrito  $Re_\tau$  con l'espressione sperimentale:

$$Re_\tau = 0.09Re_b^{0.88}$$

Il numero di Reynolds d'attrito è anche definito come  $Re_\tau = U_\tau\delta/\nu$ , mentre  $Re_b = U_b2\delta/\nu$ . Si vuole ricavare la formula per la velocità d'attrito  $U_\tau$ , ipotizzando  $U_b = 1$  unitaria:

$$U_\tau = \frac{Re_\tau\nu}{\delta} = 2\frac{Re_\tau}{Re_b}$$

Vengono calcolati anche la viscosità cinematica  $\nu_f = 1/Re_b$  del fluido e la lunghezza d'attrito  $L_\tau = \nu/U_\tau$ .

CASO	$Re_b$	$Re_\tau$	$\nu_f$	$U_\tau$	$L_\tau$
A)	40500	1020	$2.4691 * 1e-5$	0.05037	$4.9019 * 1e-4$
B)	20063	550	$4.9843 * 1e-5$	0.05483	$9.0899 * 1e-4$
C)	87000	2000	$1.1494 * 1e-5$	0.04598	$2.4998 * 1e-4$

Ora è possibile convertire le risoluzioni della griglia in unità di parete:  $\Delta i^+ = U_\tau\Delta i/\nu_f$ . Si trova, rispettivamente, per il primo caso  $\Delta x^+ \times \Delta y^+ \times \Delta z^+ = 127.50 \times 63.75 \times 42.49$  (A), per il secondo  $\Delta x^+ \times \Delta y^+ \times \Delta z^+ = 68.75 \times 34.38 \times 22.91$  (B), per il terzo  $\Delta x^+ \times \Delta y^+ \times \Delta z^+ = 250.02 \times 125.01 \times 83.33$  (C). In tutti i casi è possibile notare una risoluzione spaziale migliore nella direzione normale a parete rispetto alle altre direzioni, proprio per il fatto che questa direzione rappresenta la più critica da analizzare.

In questo dominio, verranno applicate condizioni al contorno periodiche nelle direzioni assiale e trasversale (*streamwise* e *spanwise*), mentre a parete verranno applicate le condizioni al contorno *no-slip* (la velocità a parete del fluido è nulla, visto che la superficie del canale è ferma).

### 4.3 INIZIALIZZAZIONE

Nelle simulazioni che sono state effettuate per tutte le macroaree, è sempre stata utilizzata una griglia uniforme, impostata in questo modo nei parametri iniziali. Tra questi, è stato definito il parametro  $gr = 0$ , il quale permette di ottenere una griglia uniforme lungo tutte le direzioni.

Inizialmente, viene effettuata una inizializzazione della griglia lungo la direzione  $z$  (*wall-normal*) con lo scopo di determinare le coordinate delle facce delle varie celle, caratterizzate da nodi raggruppati tra le due estremità fino ad un massimo pari a  $N_z = 48$ . Sarebbe stato possibile utilizzata una funzione di allungamento della griglia "naturale" basata su un approccio fisico, il quale vale per la turbolenza delimitata da pareti. Successivamente, è stata determinata la spaziatura della griglia prima tra le facce e, in seguito, tra i centri delle facce, arrivando fino al calcolo delle coordinate dei centri delle celle. Tutto ciò è stato eseguito nella direzione  $z$ .

Attraverso altre *subroutines* sono state imposte e definite le condizioni al contorno della velocità e della pressione lungo le tre direzioni, le quali aggiornano l'*halo* (zona di confine tra sottodomini vicini) che memorizza le informazioni dai sottodomini computazionali adiacenti. Questo viene effettuato tramite una comunicazione in parallelo MPI tra alcuni processi, al fine di inviare e ricevere messaggi simultaneamente in una singola operazione. La definizione delle condizioni al contorno per la velocità avviene con una loro imposizione periodica, la quale presuppone che la *subroutine* venga chiamata solo per le direzioni non scomposte; lungo le direzioni scomposte, la periodicità è impostata naturalmente tramite lo scambio dell'*halo*. Questo è valido anche per le condizioni al contorno della pressione.

In un'altra subroutine viene effettuato il calcolo delle condizioni iniziali per il campo di velocità per l'inizializzazione del flusso, a partire dal profilo di velocità di Poiseuille piano normalizzato dalla velocità media, che è dato da  $U_{Poiseuille} = 6z(1 - z)U_b$ . Successivamente, il modello inizializza una coppia di vortici lungo la direzione *streamwise* per consentire una rapida transizione alla turbolenza in un canale guidato dalla pressione (*pressure-driven*). Questo viene effettuato attraverso il calcolo di  $\psi(x, y, z) = f(z) * g(x, y)$ , dove le due funzioni sono rispettivamente uguali a  $f(z) = (1 - z^2)^2$  e a  $g(x, y) = ye^{-(16x^2 - 4y^2)}$ . Le velocità lungo le direzioni  $y$  e  $z$  diventano rispettivamente  $v_{i,j,k} = -3/2 * g(x, y) * f'(z)U_b$  e  $w_{i,j,k} = 3/2 f(z) * g'(x, y)U_b$ .

Infine, una volta che il flusso è stato inizializzato, il dominio viene partizionato e suddiviso tra i diversi processori, utilizzando *subroutines* differenti.

Inoltre, è stata effettuata l'inizializzazione dell'interfaccia MPI al fine di permettere la comunicazione tra i processi in parallelo, mediante la descrizione della configurazione per il solutore di Poisson e per gli scambi *halo*, oltre che la definizione di alcuni parametri necessari alla scomposizione della griglia.

Un'ulteriore inizializzazione implementata nel modello è rappresentata da quella relativa ai solutori, come l'inizializzazione del solutore di Poisson/Helmholtz, la quale segue il seguente procedimento:

- Genera autovalori consistenti rispetto alle condizioni al contorno della pressione, definite come parametri iniziali a scelta dell'utente, ossia l'autovalore *i-esimo* viene calcolato come  $\lambda_i = -2 \left( 1 - \frac{\cos[2(i-1)\pi]}{1^n} \right)$ , dove  $i = [1, n]$  e  $n$  indica la risoluzione della griglia nelle direzioni x e y (in questo caso,  $n = 48$ );
- Gli autovalori vengono gestiti e vengono aggiunti tra di loro per calcolare un unico autovalore valido in entrambe le direzioni streamwise e spanwise;
- Vengono calcolati i coefficienti dei quali ha bisogno il solutore caratterizzato dalla matrice tridiagonale;
- Vengono calcolati i valori che devono essere aggiunti al secondo membro relativo alle condizioni al contorno della pressione;
- Viene preparata la FFT (*Fast Fourier Transform*), sempre in funzione delle condizioni al contorno.

## 4.4 MODULO LES

Nel modulo LES è stato implementato il modello WALE (*Wall-Adapting Local Eddy-Viscosity*) con lo scopo di inizializzare la viscosità turbolenta  $\nu_r$ . Questo è stato eseguito per tutte le tre direzioni del flusso, utilizzando le formule descritte nel relativo capitolo (WALE).

Utilizzando uno schema alle differenze finite centrato del secondo ordine per calcolare le derivate delle velocità nelle tre direzioni, è stato poi possibile procedere con il calcolo di  $\bar{S}_{ij}$  e  $\bar{\Omega}_{ij}$  (nel codice si identificano in  $S_{ij}$  e  $W_{ij}$ ), dove  $i, j = [x, y, z]$ , e del tensore  $S_{ij}^d$  nelle varie direzioni (nel codice  $G_{ij}$ ). Dopodiché, si è riusciti a calcolare il modulo di queste tre grandezze, attraverso i valori ottenuti in precedenza nelle varie direzioni, in modo tale da poterle implementare per il calcolo finale della viscosità turbolenta. Si ricorda la formula:

$$\nu_r = (C_w \Delta)^2 \frac{(S_{ij}^d S_{ij}^d)^{3/2}}{(\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{5/2} + (S_{ij}^d S_{ij}^d)^{5/4}}$$

In questa trattazione, è stato utilizzato un valore della costante  $C_w = 0.565$ . Questo procedimento è stato applicato lungo tutti i nodi della griglia in modo iterativo, nei quali si calcola la viscosità totale come somma dei contributi dati dalla viscosità e dalla viscosità turbolenta appena calcolata, in ogni punto della griglia:  $\nu_{tot i,j,k} = \nu + \nu_r$ .

Per completezza, si è deciso di riportare parte del codice in cui è implementato questo calcolo.

```

do k=1,nz
  do j=1,ny
    do i=1,nx
      !
      dudx=(u(i,j,k)-u(i-1,j,k))*dxi
      dudy=0.25_rp*(u(i,j+1,k)-u(i,j-1,k)+u(i-1,j+1,k)-u(i-1,j-1,k))*dyi
      dudz=0.50_rp*(u(i,j,k+1)-u(i,j,k-1)+u(i-1,j,k+1)-u(i-1,j,k-1))/(dzc(k-1)+dzc(k))
      !
      dvdx=0.25_rp*(v(i+1,j,k)-v(i-1,j,k)+v(i+1,j-1,k)-v(i-1,j-1,k))*dxi
      dvdy=(v(i,j,k)-v(i,j-1,k))*dyi
      dvdz=0.50_rp*(v(i,j,k+1)-v(i,j,k-1)+v(i,j-1,k+1)-v(i,j-1,k-1))/(dzc(k-1)+dzc(k))
      !
      dwdx=0.25_rp*(w(i+1,j,k)-w(i-1,j,k)+w(i+1,j,k-1)-w(i-1,j,k-1))*dxi
      dwdy=0.25_rp*(w(i,j+1,k)-w(i,j-1,k)+w(i,j+1,k-1)-w(i,j-1,k-1))*dyi
      dwdz=(w(i,j,k)-w(i,j,k-1))/dzf(k)
      !
      S_xx=dudx
      S_xy=0.5_rp*(dudy+dvdx)
      S_xz=0.5_rp*(dudz+dwdx)
      !
      S_yx=S_xy
      S_yy=dvdy
      S_yz=0.5_rp*(dvdz+dwdy)
      !
      S_zx=S_xz
      S_zy=S_yz
      S_zz=dwdz
      !

```

```

W_xx=0.0_rp
W_xy=0.5_rp*(dudy-dvdx)
W_xz=0.5_rp*(dudz-dwdx)
!
W_yx=-W_xy
W_yy=0.0_rp
W_yz=0.5_rp*(dvdz-dwdy)
!
W_zx=-W_xz
W_zy=-W_yz
W_zz=0.0_rp
!
SS=S_xx**2+S_xy**2+S_xz**2+S_yx**2+S_yy**2+S_yz**2+S_zx**2+S_zy**2+S_zz**2
WW=W_xx**2+W_xy**2+W_xz**2+W_yx**2+W_yy**2+W_yz**2+W_zx**2+W_zy**2+W_zz**2
!
G_xx=S_xx*S_xx+S_xy*S_yx+S_xz*S_zx+W_xx*W_xx+W_xy*W_yx+W_xz*W_zx-1.0_rp/3.0_rp*(SS-WW)
G_xy=S_xx*S_xy+S_xy*S_yy+S_xz*S_zy+W_xx*W_xy+W_xy*W_yy+W_xz*W_zy
G_xz=S_xx*S_xz+S_xy*S_yz+S_xz*S_zz+W_xx*W_xz+W_xy*W_yz+W_xz*W_zz
!
G_yx=S_yx*S_xx+S_yy*S_yx+S_yz*S_zx+W_yx*W_xx+W_yy*W_yx+W_yz*W_zx
G_yy=S_yx*S_xy+S_yy*S_yy+S_yz*S_zy+W_yx*W_xy+W_yy*W_yy+W_yz*W_zy-1.0_rp/3.0_rp*(SS-WW)
G_yz=S_yx*S_xz+S_yy*S_yz+S_yz*S_zz+W_yx*W_xz+W_yy*W_yz+W_yz*W_zz
!
G_zx=S_zx*S_xx+S_zy*S_yx+S_zz*S_zx+W_zx*W_xx+W_zy*W_yx+W_zz*W_zx
G_zy=S_zx*S_xy+S_zy*S_yy+S_zz*S_zy+W_zx*W_xy+W_zy*W_yy+W_zz*W_zy
G_zz=S_zx*S_xz+S_zy*S_yz+S_zz*S_zz+W_zx*W_xz+W_zy*W_yz+W_zz*W_zz-1.0_rp/3.0_rp*(SS-WW)
!
GG=G_xx**2+G_xy**2+G_xz**2+G_yx**2+G_yy**2+G_yz**2+G_zx**2+G_zy**2+G_zz**2
!
C_w=0.565_rp
!
delta=(dx*dy*dzf(k))**(1.0_rp/3.0_rp)
!
nu_t=(C_w*delta)**2*GG**1.5_rp/(SS**2.5_rp+GG**1.25_rp)
!
visc_tot(i,j,k)=visc_tot(i,j,k)+nu_t
!
end do
end do
end do

```

Grazie al calcolo della viscosità, è possibile definire in modo migliore la viscosità e le velocità nelle direzioni x e y lungo la parete del canale (per  $z = 0$  la parete inferiore, mentre per  $z = 2\delta$  quella superiore). I valori della viscosità calcolati devono consentire alla velocità di mantenere il corretto andamento. Viene utilizzato l'algoritmo di Newton-Raphson per stimare la velocità d'attrito attraverso l'implementazione della seguente funzione:

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{k} \log(1 + kz^+) + C_k \left( 1 - e^{-\frac{z^+}{11}} \right) - \frac{z^+}{11} e^{-0.33z^+}$$

Sono stati presi i valori delle costanti pari a quanto segue:  $k = 0.41$ ,  $C_k = 7.8$ . Questa espressione permette di effettuare l'interpolazione della legge logaritmica (*log-law*) lungo l'intero strato limite.

Questo consente di stimare il valore della velocità  $u_\tau$  attraverso il metodo iterativo seguente:  $u_{\tau,k+1} = u_{\tau,k} + f(u_{\tau,k})/f'(u_{\tau,k})$ . Questo algoritmo termina quando arriva a convergenza.

Successivamente, dopo aver stimato  $u_\tau$ , vengono ricalcolati i valori delle velocità lungo le direzioni x e y, al fine di consentire una stima della viscosità più corretta vicino a parete. A partire dalla definizione di  $\tau_w = \mu \partial u_{rel} / \partial z$  a parete, che, in questo caso, ha utilizzato la velocità relativa  $u_{rel}$  nelle direzioni x e y (rispetto alla direzione normale a parete z), si è riusciti a stimare la viscosità a parete come segue:

$$u_{rel} = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$v_{stimata} = \frac{u_\tau^2}{\frac{\partial u_{rel}}{\partial z}}$$

Infine, si è inizializzato il valore della viscosità a parete, a partire da quella calcolata precedentemente all'interno del modulo LES ( $v_{i,j,1}$ ), attraverso il calcolo seguente:

$$v_{i,j,0} = 2v_{stimata} - v_{i,j,1} \qquad v_{i,j,N_z+1} = 2v_{stimata} - v_{i,j,N_z}$$

Dove  $N_z$  indica la risoluzione lungo la direzione *wall-normal* (z),  $v_{i,j,0}$  la viscosità lungo la parete inferiore,  $v_{i,j,N_z+1}$  lungo la parete superiore.

Questo procedimento è stato svolto per ogni punto della griglia lungo entrambe le direzioni x e y, in modo tale da consentire l'applicazione di schemi alle differenze finite e di altri metodi utilizzando vettori che fuoriescono dalla dimensione normale della griglia per motivi numerici.

## 4.5 MODULO PARTICELLE

È stata effettuata un'analisi relativa alle particelle, la quale ha svariati moduli dedicati alla sua implementazione nel modello numerico.

Per quanto riguarda l'inizializzazione della fase discreta del flusso (particelle), è stata definita una variabile di tipo derivato (chiamata anche struttura) con lo scopo di contenere la maggior parte di variabili che compongono le proprietà e le caratteristiche della particella, come le dimensioni della particella, la loro posizione all'interno del canale, le loro varie velocità e altro. La notazione che contraddistingue questa struttura è  $prt(p)\%var$ , dove  $p$  indica l'indice della struttura, mentre  $var$  indica la variabile a cui si fa riferimento all'interno della struttura stessa.

In questa trattazione, sono stati considerati i numeri di Stokes delle particelle rispettivamente pari a  $St^+ = 1, 10, 100$ . Si sarebbe potuto analizzare anche altri numeri di Stokes differenti, ma si è voluto concentrarsi solamente su questi, che riescono ad offrire già una chiara visione della bontà del modello adottato senza aumentare ulteriormente il costo computazionale dovuto all'incremento dei casi considerati. Si è deciso di utilizzare un numero di particelle pari a 50000 per ogni numero di Stokes considerato; perciò, si analizzerà il moto di un totale di 150000 particelle all'interno di un fluido incompressibile in un canale turbolento.

Ogni numero di Stokes è caratterizzato da particelle aventi dimensioni del diametro differenti rispetto agli altri Stokes, in quanto il tempo di rilassamento della particella è proporzionale al quadrato del diametro della stessa (come descritto in precedenza):  $\tau_p \propto d_p^2$ . È stato implementato un algoritmo che è stato in grado di calcolare il raggio della particella in unità adimensionali, a partire dai parametri noti in input rappresentati dal numero di Reynolds d'attrito, dal numero di Stokes e dalle densità del fluido e delle particelle. Si è stimato il valore della scala temporale viscosa  $t_\tau$ , dalla quale si è ricavato il valore di  $\tau_p$  e, a sua volta, il raggio della particella  $r_p$ , e questo è stato svolto per ogni macroarea e per ogni caso considerato, come segue:

$$t_\tau = \frac{\nu}{U_\tau^2} \quad \Rightarrow \quad \tau_p = St^+ \cdot t_\tau \quad \Rightarrow \quad r_p = \sqrt{\frac{9\mu_f\tau_p}{2\rho_p}}$$

Sono stati ottenuti i seguenti risultati.

CASO	$Re_\tau$	$\nu$	$U_\tau$	$t_\tau$	$r_{p,St^+=1}$	$r_{p,St^+=10}$	$r_{p,St^+=100}$
A)	1020	$2.4691 \cdot 1e-5$	0.05037	$9.7314 \cdot 1e-3$	$2.0412 \cdot 1e-5$	$6.4550 \cdot 1e-5$	$2.0412 \cdot 1e-4$
B)	550	$4.9843 \cdot 1e-5$	0.05483	$1.6579 \cdot 1e-2$	$3.7113 \cdot 1e-5$	$1.1736 \cdot 1e-4$	$3.7113 \cdot 1e-4$
C)	2000	$1.1494 \cdot 1e-5$	0.04598	$5.4367 \cdot 1e-3$	$1.0206 \cdot 1e-5$	$3.2275 \cdot 1e-5$	$1.0206 \cdot 1e-4$

È possibile osservare come il raggio delle particelle aumenta, oltre che con il numero di Stokes, al diminuire del numero di Reynolds (visto che  $\nu$  aumenta maggiormente rispetto che a  $U_\tau^2$ ). Perciò, si ottengono inerzie delle particelle differenti in funzione del numero di Reynolds, ad esempio il caso C), se confrontato con gli altri Stokes delle altre macroaree studiate, presenta una dimensione delle particelle inferiore.

Oltre all'inerzia delle particelle, sono state definite le posizioni delle particelle all'istante iniziale in modo random. Questo è stato effettuato lungo tutto il dominio in ogni direzione, utilizzando la funzione *rand()* che restituisce un numero reale casuale compreso nell'intervallo [0,1), nel seguente modo:

```
prt(p)%p_x = (LG_x-1.0d-10)*rand()+0.5d-10
prt(p)%p_y = (LG_y-1.0d-10)*rand()+0.5d-10
prt(p)%p_z = (LG_z-1.0d-10)*rand()+0.5d-10
```

Dove  $LG_x, y, z$  indicano le dimensioni del dominio definite in precedenza, mentre  $p_x, y, z$  indicano la posizione della particella lungo una determinata direzione. La posizione delle particelle viene modificata leggermente in modo tale da non avere problemi a livello numerico e non fuoriuscire dal dominio.

Inizialmente, tutte le altre variabili sono inizializzate a zero, come ad esempio le velocità delle particelle lungo tutte le direzioni  $prt(p)\%v_x, y, z$ .

Inoltre, è stata effettuata l'inizializzazione dei parametri necessari ad effettuare il calcolo in parallelo, attraverso la suddivisione del numero di particelle e delle variabili associate che verranno prese in carico da ogni singolo processo, in modo da garantire una comunicazione tra i processi efficace e un tempo della simulazione inferiore.

Nel modulo delle particelle sono stati implementati due diversi interpolatori che vengono utilizzati in funzione dell'uniformità della griglia, i quali interpolano la velocità del fluido alla posizione della particella. L'interpolatore per griglie uniformi è il cosiddetto *Hermite3* (del terzo ordine), il quale è un tipo di interpolatore che utilizza le funzioni di base di Hermite per stimare i valori di una funzione tra due punti dati, in modo che siano soddisfatti non solo i valori della funzione, ma anche i suoi valori derivati (come le velocità o pendenze). La sua implementazione, però, è molto complessa.

In questa trattazione, si è sempre considerata una griglia uniforme, e, nonostante ciò, verrà utilizzato solamente l'interpolatore implementato per griglie non uniformi. Quest'ultimo risulta essere meno accurato rispetto al primo interpolatore, ma funziona fornendo la possibilità di considerare anche griglie non uniformi. In particolare, l'accuratezza inferiore di questo interpolatore si riscontra nei risultati relativi alla concentrazione in funzione della distanza da parete, la quale sarebbe più corretta se venisse utilizzato l'interpolatore *Hermite*.

Questo interpolatore, oltre che impostare inizialmente gli indici  $i, j, k$  e le coordinate nelle direzioni  $x$  e  $y$  ed effettuare un controllo sulla validità del valore della distanza da parete (in modo che i valori non siano errati e che non fuoriescano dal dominio precedentemente definito), ha il compito principale di calcolare l'interpolazione della velocità del fluido alla posizione della particella, che in termini di variabili viene espressa con  $pvt(p)\%iv_{x,y,z}$  ("iv" sta per *interpolated velocity*). Questo viene effettuato mediante la definizione di due coefficienti differenti per ogni direzione ( $C_1$  e  $C_2$ ), i quali a loro volta si ottengono da varie combinazioni di alcuni parametri calcolati in funzione delle coordinate impostate inizialmente. Questi coefficienti permettono di effettuare il calcolo delle velocità interpolate mediante il prodotto tra gli stessi coefficienti (relativi ad una certa direzione) e la velocità del fluido lungo una determinata direzione. Il calcolo dell'interpolazione viene suddiviso in funzione al fatto che la particella sia posizionata al di sopra o al di sotto rispetto alla metà del canale in direzione normale a parete ( $z$ ).

Una volta effettuato il calcolo delle velocità interpolate del fluido alla posizione della particella, si è implementata una subroutine che consente di calcolare il lato destro dell'equazione del moto delle particelle.

## 4.6 STATISTICHE DEL FLUIDO

Con riferimento al *paper* sulle statistiche di velocità di un flusso incomprimibile in un canale turbolento ricavate tramite DNS e disponibili fino ad un numero di Reynolds d'attrito  $Re_\tau = 4000$  [26], si sono organizzati e gestiti i dati in modo tale da renderli implementabili all'interno del modello generale.

È stato utilizzato un software in grado di digitalizzare dei grafici a partire dal loro formato iniziale: immagini. Si sono dovuto definire le coordinate che caratterizzano gli assi e specificare la scala utilizzata (lineare o logaritmica). In questo caso, si tratta sempre di grafici semilogaritmici, ossia lungo le ascisse logaritmico, mentre lungo le ordinate lineare. Per ogni grafico, si è digitalizzata la curva di interesse mediante l'inserimento di alcuni punti sulla curva, con lo scopo di permettere al software di creare dei fit sulla curva. Una volta completata la digitalizzazione, sono stati esportati i dati che rappresentano la curva, sia sulle ascisse che sulle ordinate, avendo definito un formato di output caratterizzato da valori equispaziati sulle ascisse al fine di ottenere un numero sufficiente di punti. Questo procedimento è stato svolto per ricavare sia le statistiche delle fluttuazioni di velocità (del secondo ordine) sia la velocità media, ed è stato eseguito per tutti i numeri di Reynolds d'attrito  $Re_\tau$  studiati in questa trattazione. Purtroppo, CaNS utilizza la convenzione della direzione normale a parete rappresentata da  $z$ , mentre questi dati sono caratterizzati dalla direzione  $y$  normale a parete. Questo significa che si dovranno scambiare le velocità lungo  $z$  con quelle lungo  $y$ . Perciò, sono stati scambiati i dati tra le fluttuazioni di velocità  $\bar{v}'^2/u_\tau^2$  e  $\bar{w}'^2/u_\tau^2$ , mentre le fluttuazioni  $\overline{u'v'}/u_\tau^2$  in realtà sono  $\overline{u'w'}/u_\tau^2$ . Invece, la fluttuazione di velocità  $\bar{u}'^2/u_\tau^2$  e la velocità media  $\bar{u}^+ = \bar{u}/u_\tau$  non cambiano. Queste rappresentano le cinque velocità che sono state digitalizzate, e questo è stato svolto per ogni  $Re_\tau$ , per un totale di quindici velocità esaminate.

Inoltre, un altro particolare al quale è necessario porre attenzione sulle fluttuazioni considerate, ossia  $\bar{u}'^2/u_\tau^2$ ,  $\bar{v}'^2/u_\tau^2$  e  $\bar{w}'^2/u_\tau^2$ , è rappresentato dalla radice quadratica media (RMS): i valori non sono sotto radice, perciò è stato necessario calcolare la radice quadrata del valore di ogni singolo punto precedentemente esportato, così una volta implementate le velocità nel modello sono pronte per essere usate. Infine, visto che i valori esportati dai grafici disponibili partono da  $z^+ = 1$ , è stata eseguita un'interpolazione di alcuni punti ricavati nell'intervallo  $0.01 \leq z^+ \leq 1$  per permettere una descrizione delle velocità vicino a parete più accurata.

Al termine della gestione di questi dati, è stato sviluppato un programma in grado di importare i dati rappresentativi di questi grafici da un file di testo esterno, e di produrre file di output contenenti la *subroutine* generata con la sintassi del linguaggio di programmazione e con vettori contenenti tutti i dati delle velocità, la quale dovrà essere implementata poi all'interno del modello generale.

In funzione della distanza da parete  $z^+$ , queste *subroutines* consentono di effettuare un'interpolazione lineare tra due valori presenti nel vettore delle velocità, determinando il coefficiente angolare della retta  $m = (y_{i+1} - y_i)/(x_{i+1} - x_i)$  e l'intercetta  $q = y_i - mx_i$ , dove  $i$  identifica la posizione nel vettore della distanza da parete tale per cui  $z^+ \in [x_i, x_{i+1}]$ . Nota la funzione lineare che descrive la retta e noto il valore reale della distanza dalla parete  $z^+$ , è possibile calcolare il valore corretto della velocità  $u = mz^+ + q$ , dove la velocità  $u$  è generica e può rappresentare sia la velocità media  $\bar{u}^+$ , sia la fluttuazione quadratica media  $\overline{u'w'}/u_\tau^2$ , sia le fluttuazioni di velocità RMS  $\sqrt{\overline{u'^2}}/u_\tau$ ,  $\sqrt{\overline{v'^2}}/u_\tau$  e  $\sqrt{\overline{w'^2}}/u_\tau$ .

Inoltre, è stato implementato anche il calcolo delle derivate per le velocità che influenzano la direzione  $z$ , ossia  $\sqrt{\overline{w'^2}}/u_\tau$  e  $\overline{u'w'}/u_\tau^2$ , semplicemente derivando l'equazione della retta rispetto alla direzione *wall-normal* e ottenendo un'espressione uguale al coefficiente angolare  $m$ , ossia:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\sqrt{\overline{w'^2}}}{u_\tau} \right) = m \qquad \frac{d}{dz} \left( \frac{\overline{u'w'}}{u_\tau^2} \right) = m$$

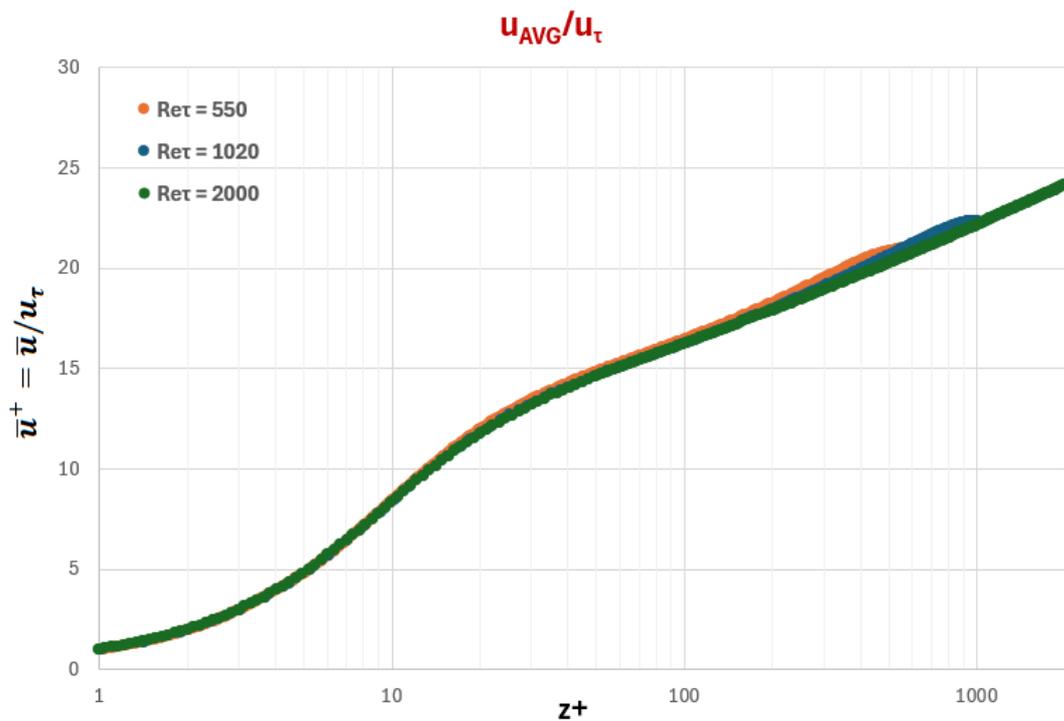


Figura 36. Andamento del profilo di velocità media streamwise in funzione della distanza da parete nella direzione *wall-normal*, in coordinate interne. Sono state ottenute differenti curve in funzione del numero di Reynolds d'attrito  $Re_\tau$ . Grafico log-linear.

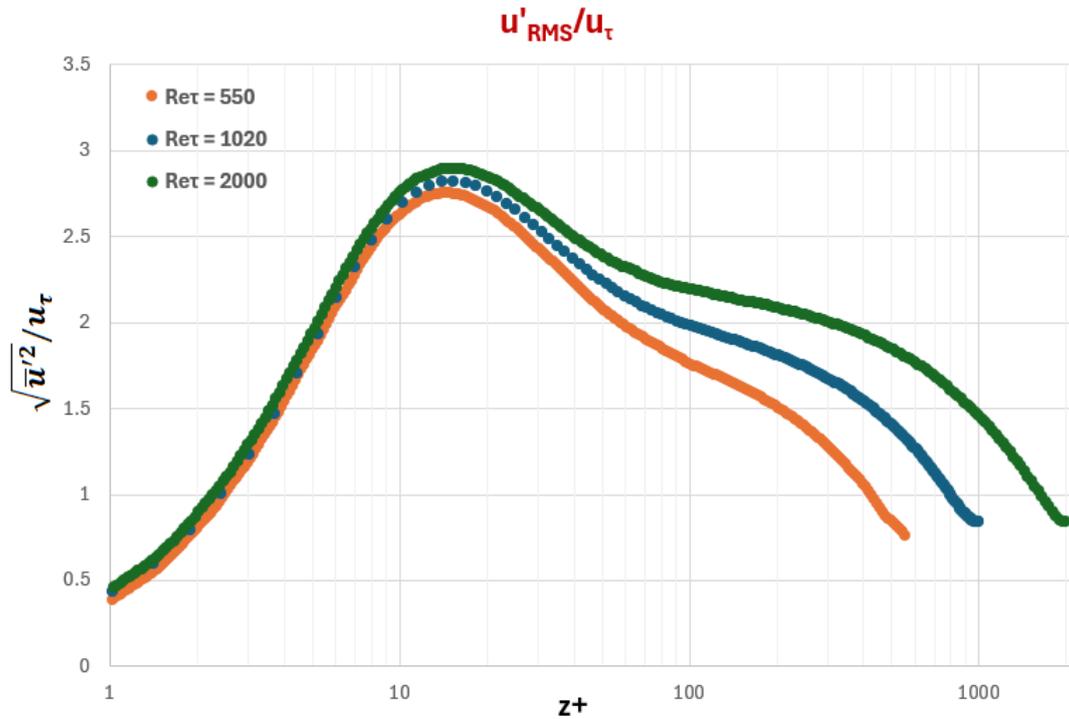


Figura 37. Andamento della radice quadratica media (RMS) delle fluttuazioni di velocità nella direzione streamwise in funzione della distanza da parete nella direzione wall-normal, in coordinate interne. Le curve variano in funzione del numero di Reynolds d'attrito  $Re_\tau$ . Grafico log-linear.

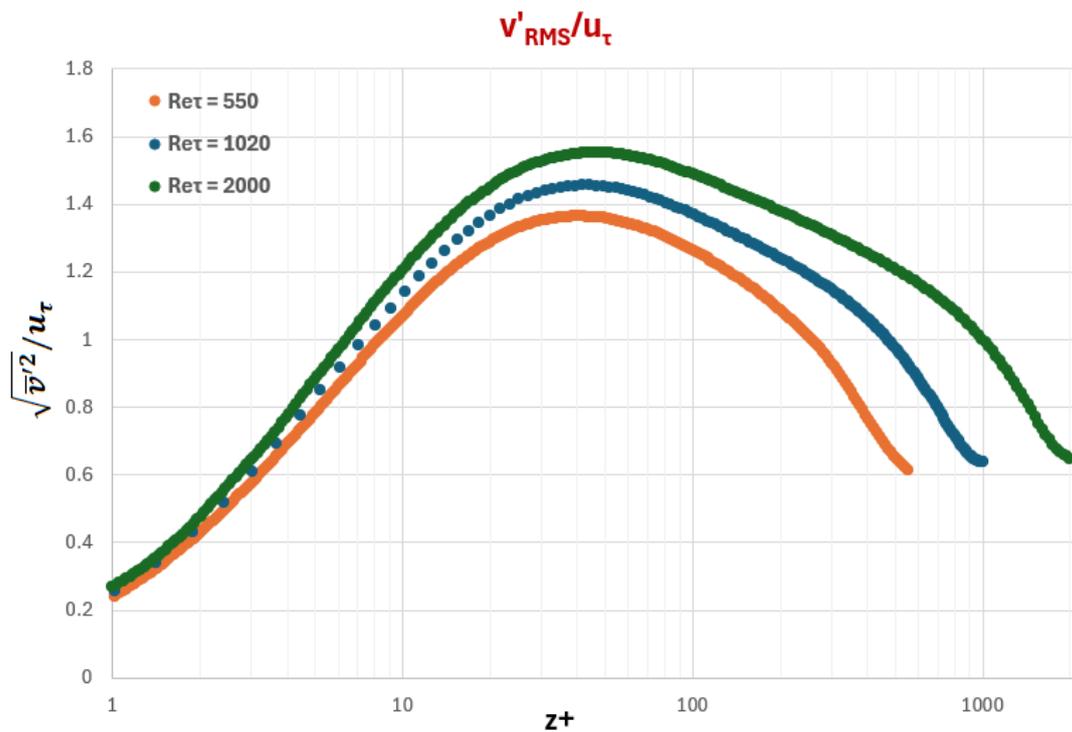


Figura 38. Andamento della radice quadratica media (RMS) delle fluttuazioni di velocità nella direzione spanwise in funzione della distanza da parete nella direzione wall-normal, in coordinate interne. Le curve variano in funzione del numero di Reynolds d'attrito  $Re_\tau$ . Grafico log-linear.

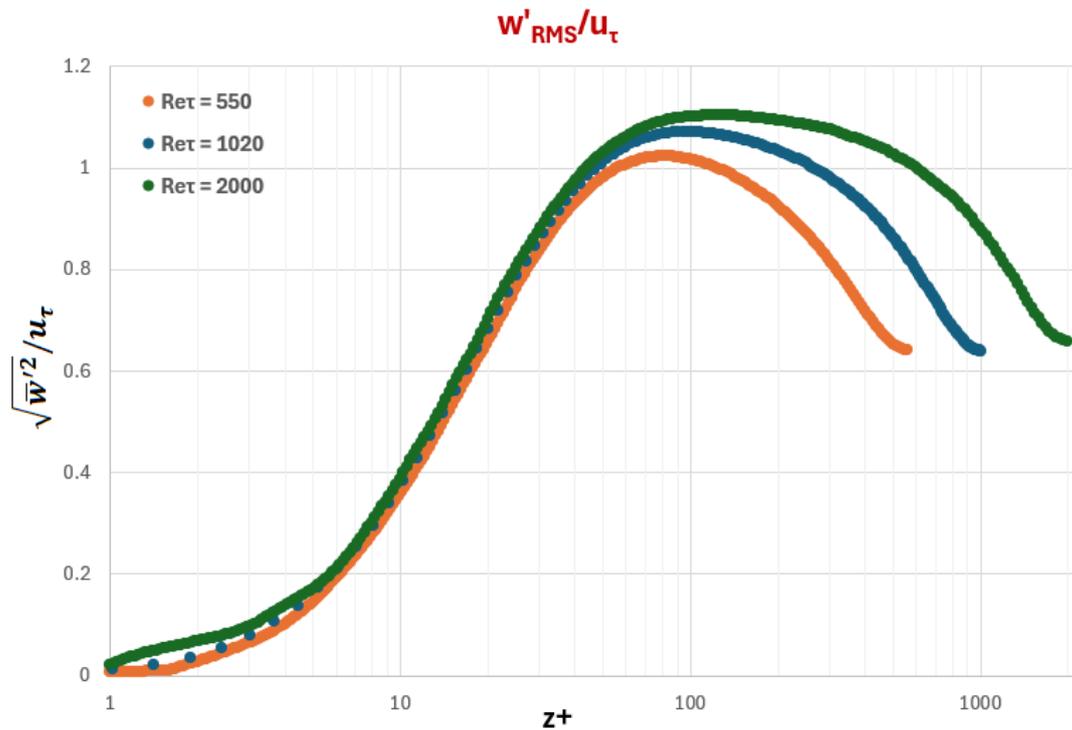


Figura 39. Andamento della radice quadratica media (RMS) delle fluttuazioni di velocità nella direzione wall-normal in funzione della distanza da parete nella direzione wall-normal, in coordinate interne. Le curve variano in funzione del numero di Reynolds d'attrito  $Re_\tau$ . Grafico log-linear.

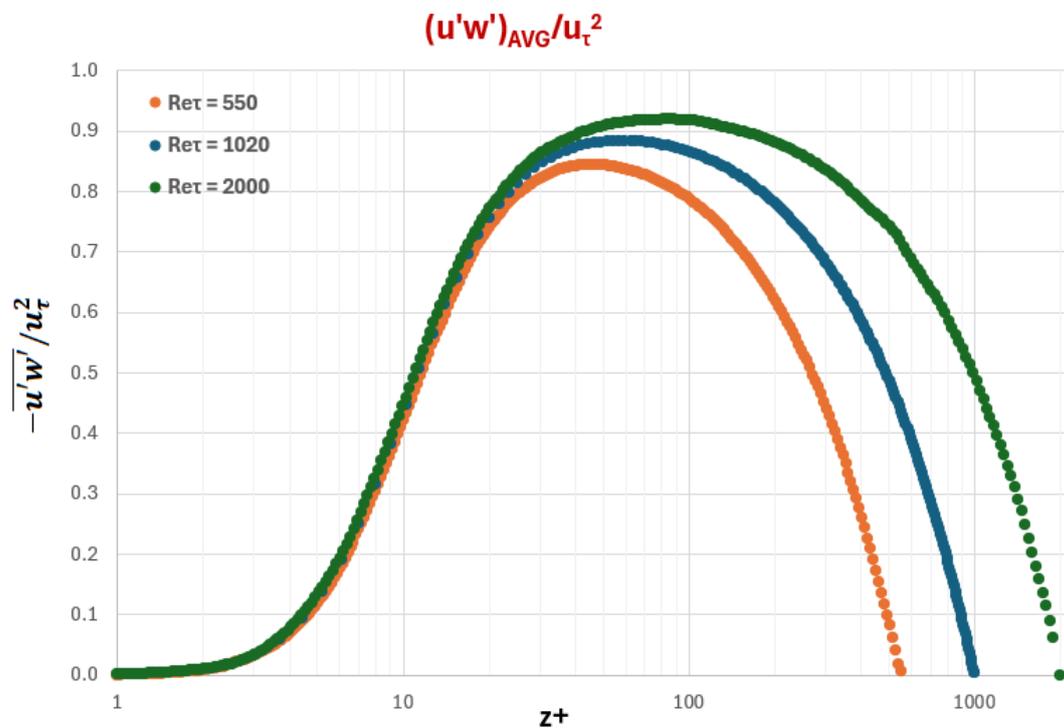


Figura 40. Andamento delle fluttuazioni di velocità nella direzione x-z mediate in funzione della distanza da parete nella direzione wall-normal, in coordinate interne. Le curve variano in funzione del numero di Reynolds d'attrito  $Re_\tau$ . Grafico log-linear.

Il primo grafico evidenzia una variazione della velocità media  $\bar{u}^+$  quasi logaritmica in funzione della distanza da parete  $z^+$ , la cui estensione lungo  $z$  aumenta visivamente all'aumentare di  $Re_\tau$ .

È possibile osservare come, nei grafici nei quali sono presenti le fluttuazioni RMS e anche le fluttuazioni mediate, all'aumentare del numero di Reynolds si ha un conseguente aumento dell'ampiezza delle fluttuazioni, oltre che della distanza da parete  $z^+$  massima che si estende fino alla mezzeria del canale.

Nei grafici precedenti, è possibile notare che  $z_{max}^+ = Re_\tau$  considerato. Questo è possibile dimostrarlo come segue:

$$Re_\tau = \frac{u_\tau h}{2\nu} \quad \Rightarrow \quad u_\tau = \frac{2\nu Re_\tau}{h}$$

$$L_\tau = \frac{\nu}{u_\tau} = \frac{\nu h}{2\nu Re_\tau} = \frac{h}{2Re_\tau}$$

$$z^+ = \frac{zu_\tau}{\nu} = \frac{z}{L_\tau} = \frac{z}{h} 2Re_\tau$$

Il parametro  $z$  può variare da 0 fino alla mezzeria del canale, in corrispondenza della quale assume il valore massimo  $z_{max} = h/2 = 0.5$ . Questo deriva dal fatto che nei casi studiati si ha sempre una dimensione dell'altezza del canale unitaria lungo  $z$  ( $h = 1$ ). Si ottiene:

$$z_{max}^+ = \frac{1/2}{1} 2Re_\tau = Re_\tau$$

Come si nota dai grafici precedenti, infatti, si ha che  $z_{max}^+(Re_\tau = 1020) = 1020$ ,  $z_{max}^+(Re_\tau = 550) = 550$  e che  $z_{max}^+(Re_\tau = 2000) = 2000$ .

## 4.7 CORREZIONE DEL MODELLO

Una volta implementate le tabelle relative alla velocità media  $\bar{u}^+$  e alle fluttuazioni di velocità  $\sqrt{\bar{u}'^2}/u_\tau$ ,  $\sqrt{\bar{v}'^2}/u_\tau$ ,  $\sqrt{\bar{w}'^2}/u_\tau$  e  $\overline{u'w'}/u_\tau^2$ , ci si è concentrati sul calcolo del lato destro dell'equazione del moto delle particelle.

Per prima cosa, è stata convertita la posizione della particella lungo la direzione *wall-normal* in unità interne (adimensionali), al fine di confrontare flussi che operano a scale diverse e consentire una maggiore flessibilità dei risultati, nel seguente modo:  $z^+ = z/L_\tau$ . È stato definito un coefficiente pari a  $s_p = \pm 1$  che identifica la posizione della particella lungo la direzione  $z$  e individua se è localizzata nella regione superiore ( $s_p = -1$ ) o inferiore ( $s_p = +1$ ) rispetto alla mezzeria del canale turbolento. Poiché le velocità implementate nelle tabelle precedenti sono normalizzate rispetto alla velocità d'attrito  $u_\tau$ , si è effettuata una riassegnazione del loro valore (e delle loro derivate, ove presenti) al fine di renderle utilizzabili all'interno delle varie equazioni:

$$\bar{u} = \frac{\bar{u}}{u_\tau} * u_\tau \quad \sqrt{\bar{u}'^2} = \frac{\sqrt{\bar{u}'^2}}{u_\tau} * u_\tau \quad \sqrt{\bar{v}'^2} = \frac{\sqrt{\bar{v}'^2}}{u_\tau} * u_\tau \quad \sqrt{\bar{w}'^2} = \frac{\sqrt{\bar{w}'^2}}{u_\tau} * u_\tau$$

$$\frac{d\sqrt{\bar{w}'^2}}{dz} = \frac{d}{dz} \left( \frac{\sqrt{\bar{w}'^2}}{u_\tau} \right) * \frac{u_\tau}{L_\tau} \quad \frac{d\overline{u'w'}}{dz} = \frac{d}{dz} \left( \frac{\overline{u'w'}}{u_\tau^2} \right) * \frac{u_\tau^2}{L_\tau}$$

Per quanto riguarda la scala temporale Lagrangiana del fluido vista dalla particella  $\tau_L$ , la quale viene utilizzata in seguito per calcolare il numero di Stokes che servirà nel modello di Langevin, viene definita in funzione della scala di integrazione temporale Lagrangiana del fluido  $T_L$ .

Da un punto di vista teorico,  $T_L$  potrebbe essere ricavata in termini di autocorrelazioni Lagrangiane della velocità del fluido  $R_i(\tau)$ , nella forma:

$$R_i(\tau) = \frac{\overline{u_i(t)u_i(t+\tau)}}{u_i(t)u_i(t)}$$

Dove il pedice  $i$  indica la direzione considerata del flusso, mentre  $R_i(\tau)$  viene valutato per ogni passo temporale mediante la media d'insieme su un gran numero di particelle.

Se si integrasse  $R_i(\tau)$  su un lungo periodo  $T$ , allora la scala  $T_L$  può essere definita come:

$$T_L = \int_0^T R_i(\tau) d\tau$$

Invece, dal punto di vista numerico di implementazione nel modello, è stato sfruttato un approccio sperimentale, ossia per la stima di  $T_L$  sono stati eseguiti calcoli mediante DNS nello strato limite [14], i quali hanno dimostrato che le scale di integrazione temporale Lagrangiane in tutte le direzioni sono circa uguali e abbastanza ben approssimate dai fit (ricavati in [27]) dati da:

$$\begin{cases} T_L^+ = 10 & \text{se } z^+ \leq 5 \\ T_L^+ = 7.122 + 0.5731z^+ - 0.00129z^{+2} & \text{se } 5 < z^+ < 200 \\ T_L^+ = 70.142 & \text{se } z^+ \geq 200 \end{cases}$$

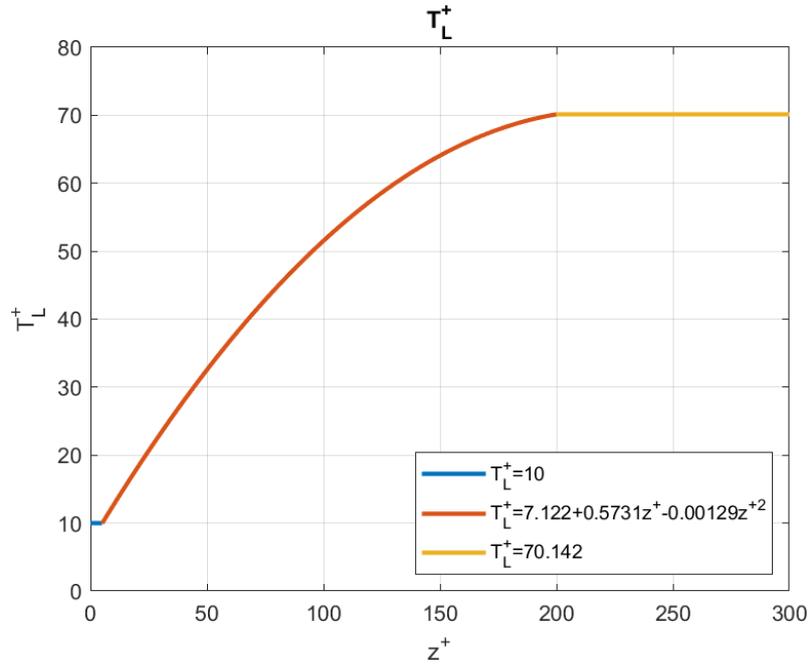


Figura 41. Andamento dei fit dati dal coefficiente  $T_L^+$  in funzione della distanza da parete  $z^+$ . Al fine di garantire una migliore visualizzazione, è stato limitato  $z^+$  al massimo a 300, ma la retta gialla continua a  $T_L^+ = 70.142$  per  $z^+ \geq 200$ .

Dove  $T_L$  si calcola in funzione di  $T_L^+$  come:

$$T_L = T_L^+ \frac{\nu}{u_\tau^2}$$

Infine, è possibile ricavare la scala temporale Lagrangiana del fluido vista dalla particella  $\tau_L$ , la quale dipende dalla sua inerzia e viene definita nel seguente modo [28]:

$$\tau_L = \frac{T_L}{\beta} \left[ 1 - (1 - \beta) \left( 1 + \frac{\tau_p}{T_E} \right)^{-0.4 \left( 1 + 0.01 \frac{\tau_p}{T_E} \right)} \right]$$

In cui  $\beta = T_L/T_E = 0.356$  è assunta come costante,  $T_E$  è la scala di integrazione temporale Euleriana del fluido e viene calcolata come  $T_E = T_L/\beta$ ,  $\tau_p$  è il tempo di rilassamento della particella descritto in precedenza.

In questo modo, si è reso possibile il calcolo del numero di Stokes  $Stk$  in funzione di  $\tau_p$  e  $\tau_L$ :

$$Stk = \frac{\tau_p}{\tau_L}$$

Per quanto riguarda, invece, le correzioni che sono state applicate al modello, è possibile considerare tre fasi di sviluppo differenti.

Nella prima fase, si è cercato di implementare il modello LES lontano da parete e il modello stocastico introdotto da Dehbi [8] basato sul modello CRW attraverso le equazioni di Langevin. Tuttavia, questo modello preliminare non ha previsto l'implementazione di una zona di transizione intermedia tra il

modello LES e quello stocastico. L'assenza della regione di transizione comporta un peggioramento a livello di accuratezza dei risultati ottenuti e quindi influenza l'accuratezza generale del modello. Questo ha portato all'assoluta necessità di introdurre una regione di interfaccia con l'obiettivo di migliorare l'accuratezza del modello generale.

La seconda fase è caratterizzata dall'implementazione della regione d'interfaccia tra la zona vicino a parete, sulla quale agisce il modello stocastico, e la zona lontana da parete, la quale rappresenta la zona più ampia dove avviene il moto delle particelle trasportate dal flusso.

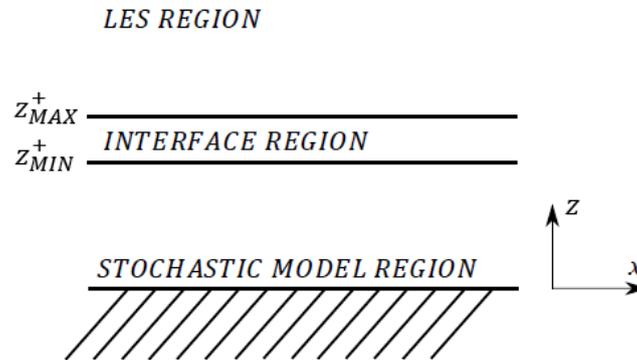


Figura 42. Regione di transizione tra il modello stocastico (vicino a parete) e la LES (applicata lontano da parete), in funzione della distanza da parete lungo la direzione wall-normal ( $z$ ).

Vengono introdotti due nuovi parametri  $z_{MIN}^+$  e  $z_{MAX}^+$  che consentono la definizione della zona di transizione e che, solitamente, vengono stimati mediante valori che rappresentano circa il 8/10% rispetto alla semiampiezza del canale  $\delta$ . Ad esempio, per la macroarea A), nella quale si ha  $Re_\tau = 1020$  e quindi una distanza da parete in mezzeria data da  $z^+ = Re_\tau = 1020$ , si potrebbe prendere un 8/10% di questo valore, definendo così  $z_{MIN}^+ = 80$  e  $z_{MAX}^+ = 100$ . La definizione e variazione dei parametri che influenzano la zona di transizione verrà approfondita in seguito.

La regione d'interfaccia è stata sviluppata con l'obiettivo di calcolare il vettore velocità del fluido, definito con la notazione  $\mathbf{u}_f$ , attraverso una nuova formulazione, la quale combina il modello stocastico con la LES cercando di migliorare l'accuratezza delle velocità ottenute e permette di ottenere il vettore della velocità combinate  $\mathbf{u}_{COMB}$  nella zona di transizione.

Si ricorda che l'equazione del moto delle particelle è definita come segue (si è utilizzata una notazione differente rispetto a quanto definito nei capitoli precedenti; si utilizza  $\mathbf{u}_p$  per indicare il vettore velocità della particella):

$$\frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = f_p \frac{(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p)}{\tau_p}$$

Il modello generale deve, quindi, calcolare il vettore velocità del fluido  $\mathbf{u}_f$  in funzione della distanza da parete  $z^+$ , cioè in funzione della zona in cui si trova la particella in quel determinato istante. Si possono distinguere tre zone caratterizzate da velocità differenti:

$$\mathbf{u}_f = \begin{cases} \mathbf{u}_{STO} & \text{se } z_p^+ < z_{MIN}^+ \\ \mathbf{u}_{COMB} & \text{se } z_{MIN}^+ \leq z_p^+ < z_{MAX}^+ \\ \mathbf{u}_{LES} & \text{se } z_p^+ \geq z_{MAX}^+ \end{cases}$$

Dove  $z_p^+$  indica la posizione della particella lungo la direzione *wall-normal* in unità di parete.

Si ricorda che il vettore velocità  $\mathbf{u}_{LES}$  viene calcolato attraverso l'utilizzo del modello WALE descritto in precedenza, così come il vettore velocità  $\mathbf{u}_{STO}$  si calcola per mezzo delle equazioni di Langevin. Per quanto riguarda il vettore delle velocità combinate  $\mathbf{u}_{COMB}$ , in questa seconda fase è stato calcolato in modo uniforme lungo le tre direzioni differenti, cioè utilizzando la stessa formulazione indipendentemente dalla componente di velocità considerata. Per permettere ciò, sono stati introdotti due nuovi coefficienti:  $t$  e  $\alpha$ .

$$t = 1 + \frac{z_p^+ - z_{MIN}^+ - z_{DEL}^+}{z_{DEL}^+}$$

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } z_p^+ \leq z_{MIN}^+ \\ 3t^2 - 2t^3 & \text{se } z_{MIN}^+ < z_p^+ \leq z_{MAX}^+ \\ 1 & \text{se } z_p^+ > z_{MAX}^+ \end{cases}$$

Dove  $z_{DEL}^+ = z_{MAX}^+ - z_{MIN}^+$ . È possibile notare come il valore di  $\alpha$  sia sempre compreso tra 0 e 1.

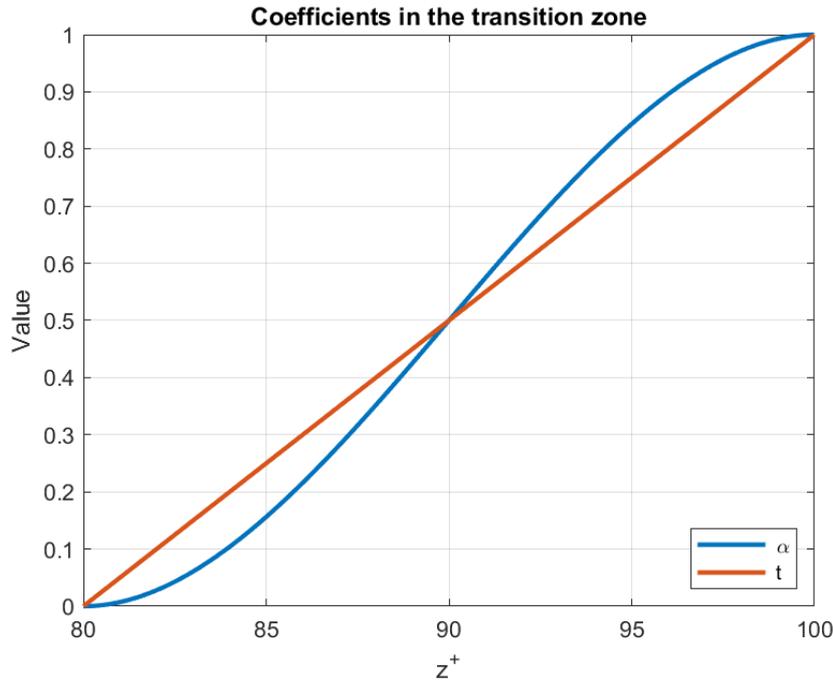


Figura 43. Andamento dei coefficienti  $\alpha$  e  $t$  in funzione di  $z^+$  nella zona di transizione. Come esempio, si sono definiti  $z_{MIN}^+ = 80$  e  $z_{MAX}^+ = 100$ .

Dopo aver definito i coefficienti, è finalmente possibile definire il vettore velocità  $\mathbf{u}_{COMB}$ :

$$\mathbf{u}_{COMB} = \mathbf{u}_{LES}\sqrt{\alpha} + \mathbf{u}_{AVG}(1 - \sqrt{\alpha}) + \mathbf{u}_{STO}\sqrt{1 - \alpha}$$

Il vettore velocità media  $\mathbf{u}_{AVG}$  è non nullo solamente lungo la direzione assiale. Il vettore velocità  $\mathbf{u}_{LES}$  viene calcolato dai campi di velocità LES e interpolato alla posizione della particella.

In questa seconda fase, si ottengono risultati discretamente migliori, in termini di statistiche di velocità, rispetto alla prima fase, ma ci sono parecchie problematiche che devono essere risolte.

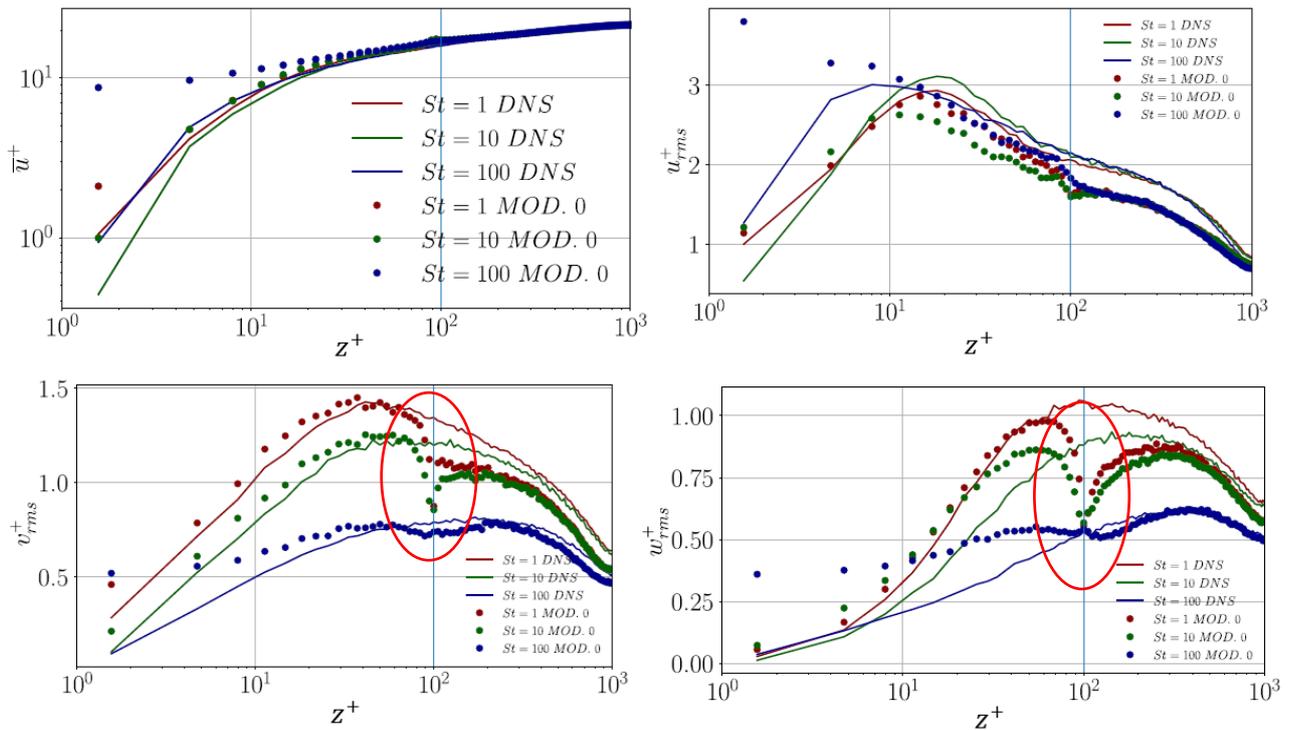


Figura 44. Andamento delle statistiche di velocità in funzione della distanza da parete. Si è effettuato un confronto tra le curve ottenute dalla DNS (continue) e le curve ottenute mediante il modello generale (puntini), al variare del numero di Stokes. [29]

Il modello generale utilizzato nella seconda fase permette di ottenere le statistiche di velocità caratterizzate dai seguenti problemi:

- Le velocità del modello non corrispondono a quelle ottenute tramite DNS vicino a parete, per tutti i numeri di Stokes;
- Le velocità lungo le direzioni *spanwise* ( $y$ ) e *wall-normal* ( $z$ ), ossia rispettivamente  $v_{rms}^+$  e  $w_{rms}^+$ , sono caratterizzate da valli (cerchiate in rosso) nella regione d'interfaccia che portano a risultati non corretti, per tutti i numeri di Stokes.

Oltre che in termini di velocità, si è analizzato il modello in termini di concentrazioni normalizzate al fine di comprendere la possibile presenza di ulteriori problematiche.

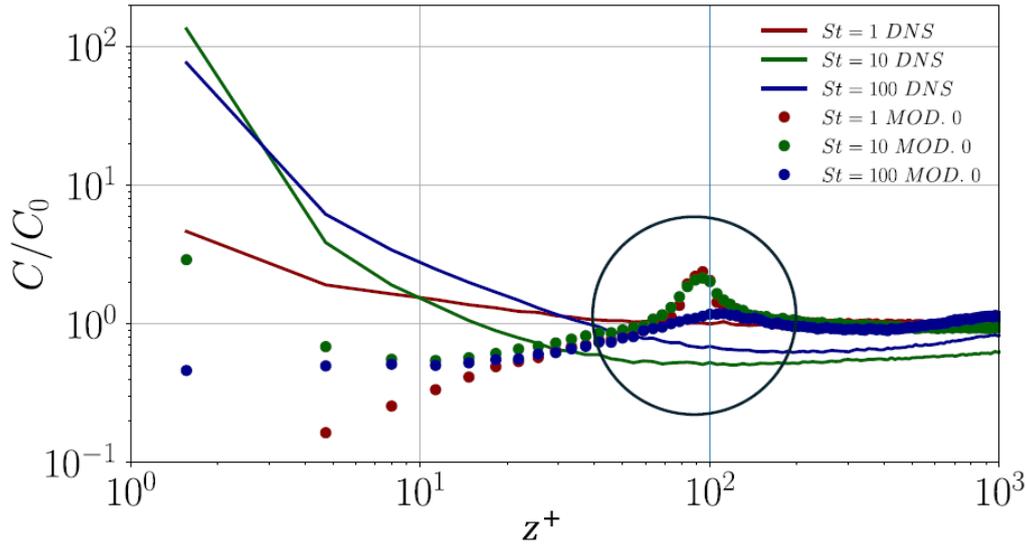


Figura 45. Concentrazioni normalizzate in funzione della distanza da parete. Confronto eseguito tra le curve ottenute dalla DNS (continue) e le curve ottenute mediante il modello generale (puntini), al variare del numero di Stokes. [29]

Anche in questo caso, si notano altre due problematiche:

- Fenomeno di distribuzione non uniforme delle particelle nella regione di interfaccia tra le zone considerate (*preferential segregation*), rappresentato da un picco, per tutti i numeri di Stokes;
- Deficit di concentrazioni normalizzate vicino a parete, per tutti i numeri di Stokes.

Le particelle che escono dall'interfaccia possono incontrare fluttuazioni di velocità del fluido caratterizzate da un segno opposto (in opposizione di fase), fermando così le particelle all'interfaccia per tempi più lunghi.

A causa di queste problematiche, si è reso necessario cercare di migliorare il modello e aumentarne l'accuratezza, perciò si è passati alla terza fase.

Anche in questo caso, come la seconda fase, si è effettuata la suddivisione in tre regioni, ma solo in alcune direzioni e non in tutte. Al fine di consentire un passaggio più *smooth* tra le varie zone e non avere discontinuità nelle varianze delle fluttuazioni, oltre che per migliorare l'andamento delle velocità nelle direzioni  $y$  e  $z$ , si è deciso di definire una formula specifica per ogni componente del vettore velocità del fluido, il quale è dato da  $\mathbf{u}_f = (u_f, v_f, w_f)$ . In particolare, l'idea è quella di definire un'equazione specifica per la componente del vettore velocità del fluido lungo la direzione *wall-normal* ( $z$ ). Per le altre due direzioni, ossia *streamwise* e *spanwise*, si è scelto di adattare lo stesso metodo applicato durante la seconda fase, come segue:

$$u_f = \begin{cases} u_{STO} & \text{se } z_p^+ < z_{MIN}^+ \\ u_{COMB} & \text{se } z_{MIN}^+ \leq z_p^+ < z_{MAX}^+ \\ u_{LES} & \text{se } z_p^+ \geq z_{MAX}^+ \end{cases}$$

$$v_f = \begin{cases} v_{STO} & \text{se } z_p^+ < z_{MIN}^+ \\ v_{COMB} & \text{se } z_{MIN}^+ \leq z_p^+ < z_{MAX}^+ \\ v_{LES} & \text{se } z_p^+ \geq z_{MAX}^+ \end{cases}$$

Ricordando che la velocità media non si annulla solamente lungo la direzione assiale (x), è possibile riscrivere la formulazione per  $u_{COMB}$  e  $v_{COMB}$  nel seguente modo (con  $v_{AVG} = 0$ ):

$$u_{COMB} = u_{LES}\sqrt{\alpha} + u_{AVG}(1 - \sqrt{\alpha}) + u_{STO}\sqrt{1 - \alpha}$$

$$v_{COMB} = v_{LES}\sqrt{\alpha} + v_{STO}\sqrt{1 - \alpha}$$

Dove  $u_{LES}$  e  $v_{LES}$  sono le velocità calcolate dai campi di velocità LES e interpolate alla posizione della particella, mentre  $u_{STO}$  e  $v_{STO}$  sono ottenuto dal modello stocastico.

Invece, per il calcolo della velocità del fluido sentita dalla particella nella direzione normale a parete  $w_f$ , è stato implementato un procedimento diverso dai precedenti. Lontano da parete, la velocità rimane  $w_f = w_{LES}$  utilizzando sempre il modello relativo alla LES, mentre avvicinandosi alla parete del canale, non vale più la suddivisione nelle regioni descritte prima. Questo perché si è deciso di introdurre una funzione ricavata in modo empirico, la quale dipende dalla distanza da parete della particella  $z_p^+$ , denominata  $f(z_p^+)$ .

Perciò, la velocità del fluido lungo la direzione z diventa:

$$w_f = \begin{cases} w_{LES} & \text{se } z_p^+ \geq z_{MAX}^+ \\ w_{FUN} & \text{se } z_p^+ < z_{MAX}^+ \end{cases}$$

Viene introdotta la nuova formulazione per la velocità  $w_{FUN}$  valida relativamente vicino a parete:

$$w_{FUN} = f_{NORM}(z_p^+)w_{LES,I} + kf_{NORM}(z_p^+) \left. \frac{df(z^+)}{dz^+} \right|_{z^+=z_p^+} \frac{\Delta t}{1 + St^+} + N$$

Dove  $w_{LES,I}$  rappresenta la velocità interpolata dal campo di velocità LES all'interfaccia tra la regione in cui agisce il modello LES e la regione in cui viene applicato il nuovo approccio, mentre  $f_{NORM}(z_p^+)$  indica la funzione normalizzata e verrà definita in seguito.

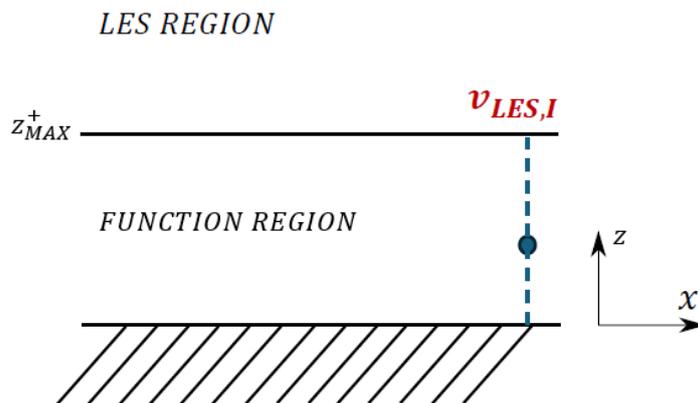


Figura 46. Regioni considerate per il calcolo della velocità  $w_{FUN}$ , in funzione della distanza da parete lungo la direzione wall-normal (z).

Inoltre, nella definizione della velocità  $w_{FUN}$  è stato utilizzato un coefficiente  $k$ , chiamato fattore di amplificazione, inizialmente impostato a  $k = 100$ , oltre che un rumore Gaussiano  $N$  proporzionale ad un valore inizialmente pari a  $u_\tau/50$ .

La funzione  $f_{NORM}(z_p^+)$  viene normalizzata utilizzando  $z_p^+ = z_{MAX}^+$ , come segue:

$$f_{NORM}(z_p^+) = \frac{f(z_p^+)}{f(z_{MAX}^+)}$$

Per quanto riguarda la funzione  $f_{NORM}(z_p^+)$ , è stata definita in modo tale che:

- $f_{NORM}(z_{MAX}^+) = 1$ ;
- Andamento quadratico in prossimità di  $z^+ = 0$ ;
- Derivata della funzione modulata dal numero di Stokes  $St^+$ .

La definizione  $f(z_p^+)$  è la seguente:

$$f(z_p^+) = B_v \sqrt{z_p^+ \left( 4 \left( 1 - e^{-\frac{C_1}{z_p^+ + C_2}} \right)^{C_3} \right)}$$

Dove i coefficienti utilizzati sono pari a:  $B_v = 0.01256980509$ ,  $C_1 = 2.536$ ,  $C_2 = 0.578$ ,  $C_3 = 0.403$ .

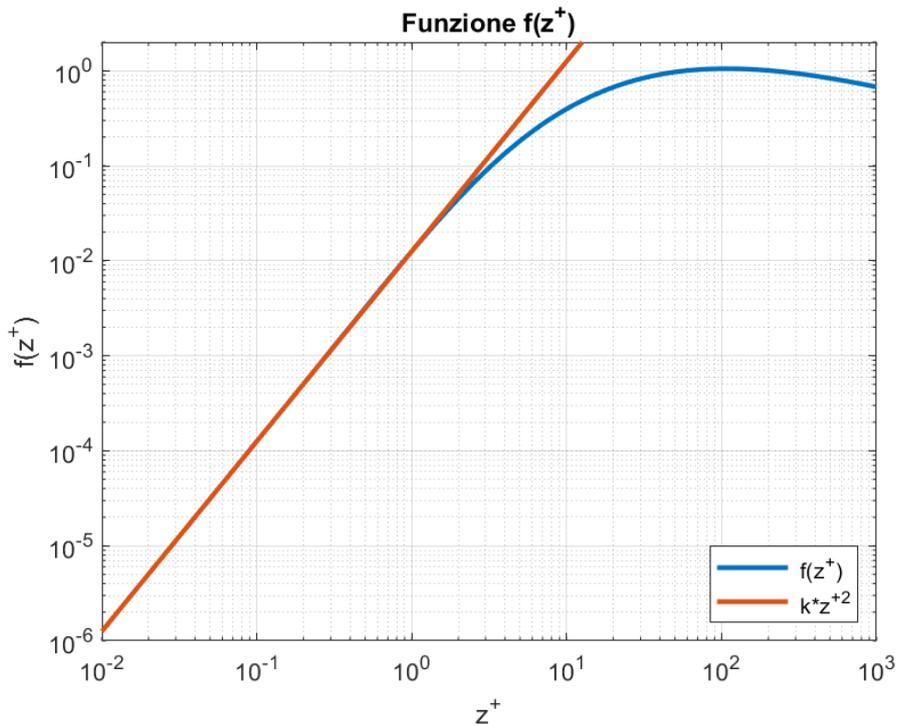


Figura 47. Andamento della funzione  $f(z_p^+)$  in funzione della distanza da parete. La funzione segue un andamento quadratico per piccoli valori di  $z^+$ , come mostrato nel grafico logaritmico:  $f(z^+) \propto kz^{+2}$ .

Inoltre, all'interno del codice sono state calcolate le equazioni differenziali di Langevin, per calcolare  $d(u_i/\sigma_i)$ , dove  $i = x, y, z$ . Questo termine  $d(u_i/\sigma_i)$  nel codice risulta essere `pvt(p)%rhs_vf_i`. Le velocità  $u_f$ ,  $v_f$  e  $w_f$  nel codice sono rispettivamente `vel_x`, `vel_y` e `vel_z`.

Infine, si è calcolata la velocità relativa data dalla differenza tra la velocità del fluido sentita dalla particella  $\mathbf{u}_f = (u_f, v_f, w_f)$  e la velocità stessa della particella  $\mathbf{u}_p = (u_p, v_p, w_p)$ . Quest'ultima ( $\mathbf{u}_p$ ) all'interno del codice evolve nel tempo ed è indicata come `prt(p)%v_x, y, z`.

La velocità relativa  $u_{rel}$  è data da:

$$u_{rel} = \sqrt{(u_f - u_p)^2 + (v_f - v_p)^2 + (w_f - w_p)^2}$$

Grazie al calcolo di  $u_{rel}$  si è reso possibile risolvere l'equazione del moto della particella ed ottenere  $du_{p,i}/dt$ , indicata nel codice come `prt(p)%rhs_v_x, y, z`.

Si riporta parte del codice per mostrare l'implementazione del calcolo di alcune velocità:

```
fv=0.01256980509_rp
C1=2.536_rp
C2=0.578_rp
C3=0.403_rp
!
do p=1,N_PRT
!
if(prt(p)%p_z>LG_z/2.0_rp) then
!
z_p=abs((LG_z-prt(p)%p_z)/l_tau)
!
s_p=-1.0_rp
!
else
!
z_p=abs(prt(p)%p_z/l_tau)
!
s_p=+1.0_rp
!
endif
!
call GenGaussian(sqrt(dt),0.0_rp,desi_x)
call GenGaussian(sqrt(dt),0.0_rp,desi_y)
call GenGaussian(sqrt(dt),0.0_rp,desi_z)
!
call CmptUavg(z_p,u_avg)
call CmptUrms(z_p,u_rms)
call CmptVrms(z_p,v_rms)
call CmptWrms(z_p,w_rms,dw_rms_dz)
call CmptUWrms(z_p,uw_rms,duw_rms_dz)
!
u_avg=u_avg*u_tau
u_rms=u_rms*u_tau
v_rms=v_rms*u_tau
w_rms=w_rms*u_tau
dw_rms_dz=dw_rms_dz*u_tau/l_tau
duw_rms_dz=duw_rms_dz*u_tau**2/l_tau
!
if(z_p<5.0_rp) then
!
T_l_p=10.0_rp
!
elseif((z_p>=5.0_rp).and.(z_p<200.0_rp)) then
!
T_l_p=7.122_rp+0.5731_rp*z_p-0.00129_rp*z_p**2
```

```

!
else
!
  T_l_p=70.142_rp
!
endif
!
T_l=T_l_p*t_tau
T_e=T_l/beta
!
tau_p=2.0_rp/9.0_rp*rho_r*prt(p)%rad**2/nu_f
!
tau_l=T_l/beta*(1.0_rp-(1.0_rp-beta)*(1.0_rp+tau_p/T_e)**(-0.4_rp*(1.0_rp+0.01_rp*tau_p/T_e)))
!
Stk=tau_p/tau_l
!
prt(p)%tau_l=tau_l
!
prt(p)%rhs_vf_x=sqrt(2.0_rp/tau_l)*dcsi_x+s_p*duw_rms_dz/u_rms*dt/(1.0_rp+Stk)
prt(p)%rhs_vf_y=sqrt(2.0_rp/tau_l)*dcsi_y
prt(p)%rhs_vf_z=sqrt(2.0_rp/tau_l)*dcsi_z+s_p*dw_rms_dz*dt/(1.0_rp+Stk)
!
t=1.0+(z_p-z_p_min-z_p_del)/z_p_del
!
if(z_p<=z_p_min) then
!
  alpha=0.0
!
elseif((z_p_min<z_p).and.(z_p<=z_p_max)) then
!
  alpha=3.0*t**2-2.0*t**3
!
else
!
  alpha=1.0
!
endif
!
alpha=max(alpha,0.0_rp)
alpha=min(alpha,1.0_rp)
!
if(.not.is_les) alpha=1.0_rp
!
vel_x=sqrt(alpha)*prt(p)%iv_x+(1.0_rp-sqrt(alpha))*u_avg+sqrt(1.0_rp-alpha)*prt(p)%vf_x*u_rms
vel_y=sqrt(alpha)*prt(p)%iv_y+sqrt(1.0_rp-alpha)*prt(p)%vf_y*v_rms
!
if(z_p<=z_p_min) then
!
  call GenGaussian(u_tau/50.0_rp,0.0_rp,noise)
!
  fun=fv*(z_p** (4.0_rp*(1.0_rp-exp(-C1/(z_p **C2)))*C3)**0.5_rp)
  fnr=fv*(z_p_min**(4.0_rp*(1.0_rp-exp(-C1/(z_p_min**C2)))*C3)**0.5_rp)
!
  dfun_dy=0.5_rp*fv*sqrt(z_p**(4.0_rp*(1.0_rp-exp(-C1*z_p**(-C2)))*C3))*((4.0_rp*(1.0_rp-exp(-C1*z_p**(-
C2)))*C3)/z_p&
-4.0_rp*C1*C3*C2*z_p**(-C2-1.0_rp)*log(z_p)*exp(-C1*z_p**(-C2))*(1.0_rp-exp(-C1*z_p**(-
C2)))*C3-1.0_rp))
!
  Stp=tau_p/t_tau
!
  vel_z=fun/fnr*prt(p)%ivi_z+s_p*fun_k*fun/fnr*dfun_dy/fnr*dt/(1.0_rp+Stp)+noise
!

```

```

else
!
vel_z=prt(p)%iv_z
!
endif
!
vel_r_x=vel_x-prt(p)%v_x
vel_r_y=vel_y-prt(p)%v_y
vel_r_z=vel_z-prt(p)%v_z
!
vel_r=sqrt(vel_r_x**2+vel_r_y**2+vel_r_z**2)
!
rey_p=2.0_rp*vel_r*prt(p)%rad/nu_f
!
f_p=1.0_rp+0.15_rp*rey_p**0.687_rp
!
prt(p)%rhs_v_x=f_p*vel_r_x/tau_p
prt(p)%rhs_v_y=f_p*vel_r_y/tau_p
prt(p)%rhs_v_z=f_p*vel_r_z/tau_p
!
prt(p)%rhs_p_x=prt(p)%v_x
prt(p)%rhs_p_y=prt(p)%v_y
prt(p)%rhs_p_z=prt(p)%v_z
!
enddo

```

## 4.8 EVOLUZIONE NEL TEMPO

Dopo aver calcolato il secondo membro (lato destro) delle equazioni del moto delle particelle e del modello stocastico, al fine di ricavare rispettivamente  $du_{p,i}/dt$  e  $d(u_i/\sigma_i)$ , si procede con la loro evoluzione nel tempo.

Questo è stato reso possibile grazie all'implementazione nel modello generale (sempre considerando la terza fase) di alcuni algoritmi di integrazione temporale numerici.

Innanzitutto, si è memorizzata la posizione delle particelle al passo precedente (o iterata precedente), la quale è stata utilizzata in seguito per il calcolo della posizione delle particelle al passo attuale (o iterata attuale). Il calcolo si è effettuato mediante l'algoritmo di Runge-Kutta del terzo ordine (RK3) Low Storage, il quale utilizza poca memoria e si basa su due fattori differenti  $\alpha_1$  e  $\beta_2$ , che sono definiti come frazioni del passo temporale  $\Delta t$  (time-step), come segue:

$$\alpha_1 = k_1 \Delta t \qquad \beta_2 = k_2 \Delta t$$

Dove i coefficienti  $k_1$  e  $k_2$  sono stati definiti all'interno di una matrice  $2 \times 3$  (due righe e tre colonne) chiamata  $RK_M$  e possono assumere un valore differente a seconda della colonna considerata, individuata con il pedice  $i = 1, 2, 3$  in questo caso:

$$RK_M = \begin{pmatrix} k_{1,i} \\ k_{2,i} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{32}{60} & \frac{25}{60} & \frac{45}{60} \\ 0 & -\frac{17}{60} & -\frac{25}{60} \end{bmatrix}$$

Si è effettuata questa implementazione in modo tale da poter utilizzare differenti valori dei fattori  $\alpha_1$  e  $\beta_2$  ad ogni passo temporale con un ciclo caratterizzato da tre iterazioni, al fine di garantire una maggiore stabilità numerica. Inoltre, grazie alla definizione di questi due fattori si è introdotto un terzo fattore  $\gamma_3$ :

$$\gamma_3 = \alpha_1 + \beta_2$$

Per quanto riguarda il time-step  $\Delta t$ , nel modello viene calcolato come il valore minimo tra due quantità differenti, ma generalmente viene presa la quantità pari al prodotto tra due termini: il numero di Courant-Friedrichs-Lewy ( $CFL$ ) e il  $\Delta t_{MAX}$ .

$$\Delta t = CFL \cdot \Delta t_{MAX}$$

Il  $CFL$  è stato definito come parametro di input noto e solitamente impostato ad un valore pari a  $CFL = 0.4$ , in modo tale da garantire la stabilità e quindi la convergenza numerica della soluzione mantenendo il passo temporale  $\Delta t$  ad un valore accettabile (altrimenti la simulazione produce risultati errati o non prosegue). Per definizione, il  $CFL$  è definito come segue:

$$CFL = \frac{u \Delta t}{\Delta x}$$

Dove  $u$  indica la velocità del flusso e  $\Delta x$  la dimensione della discretizzazione. Invece, per il calcolo del massimo passo temporale ammissibile  $\Delta t_{MAX}$ , viene ricavato a sua volta come il valore minimo tra due quantità differenti:

$$\Delta t_{MAX} = \min\left(\frac{1.65}{12\nu_{MAX}} \Delta l^2, \frac{\sqrt{3}}{\Delta ti}\right)$$

Dove  $\nu_{MAX}$  indica la viscosità cinematica massima tra quelle calcolate in precedenza, mentre  $\Delta l$  è calcolato come il minimo tra le due risoluzioni spaziali lungo le direzioni x, y e z:

$$\Delta l = \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z_f)$$

Dove  $\Delta x$  e  $\Delta y$  sono le risoluzioni spaziali già definite in precedenza, mentre  $\Delta z_f$  indica la risoluzione spaziale calcolata nella griglia tra le varie facce. Invece, il valore di  $\Delta ti$  è calcolato in funzione delle componenti di velocità del flusso e dell'inverso delle risoluzioni spaziali definite prima.

```

do k=1,n(3)
  do j=1,n(2)
    do i=1,n(1)
      ux = abs(u(i,j,k))
      vx = 0.25*abs( v(i,j,k)+v(i,j-1,k)+v(i+1,j,k)+v(i+1,j-1,k) )
      wx = 0.25*abs( w(i,j,k)+w(i,j,k-1)+w(i+1,j,k)+w(i+1,j,k-1) )
      dtix = ux*dxi+vx*dyi+wx*dzfi(k)
      uy = 0.25*abs( u(i,j,k)+u(i,j+1,k)+u(i-1,j+1,k)+u(i-1,j,k) )
      vy = abs(v(i,j,k))
      wy = 0.25*abs( w(i,j,k)+w(i,j+1,k)+w(i,j+1,k-1)+w(i,j,k-1) )
      dtiy = uy*dxi+vy*dyi+wy*dzfi(k)
      uz = 0.25*abs( u(i,j,k)+u(i-1,j,k)+u(i-1,j,k+1)+u(i,j,k+1) )
      vz = 0.25*abs( v(i,j,k)+v(i,j-1,k)+v(i,j-1,k+1)+v(i,j,k+1) )
      wz = abs(w(i,j,k))
      dtiz = uz*dxi+vz*dyi+wz*dzci(k)
      dti = max(dti,dtix,dtiy,dtiz)
    end do
  end do
end do

```

Ritornando a considerare la posizione delle particelle calcolata all'iterata attuale, con l'implementazione dell'algorithmo di Runge-Kutta si è riusciti a ricavare la posizione della particella lungo ogni direzione nel seguente modo:

$$\mathbf{x}_{p,k} = \mathbf{x}_{p,k-1} + \alpha_1 \frac{d\mathbf{x}_{RHS,k}}{dt} + \beta_2 \frac{d\mathbf{x}_{RHS,k-1}}{dt}$$

Dove  $\mathbf{x}_p$  indica la posizione della particella all'istante attuale e precedente, mentre  $d\mathbf{x}_{RHS}/dt$  indica la soluzione del lato destro dell'equazione del moto delle particelle in termini dimensionali di velocità (sarebbe  $\mathbf{u}_{RHS}$ ), all'istante attuale e precedente.

In analogia con il procedimento appena descritto, l'algorithmo di Runge-Kutta è stato implementato anche per il calcolo delle velocità delle particelle, lungo ogni direzione:

$$\mathbf{u}_{p,k} = \mathbf{u}_{p,k-1} + \alpha_1 \frac{d\mathbf{u}_{RHS,k}}{dt} + \beta_2 \frac{d\mathbf{u}_{RHS,k-1}}{dt}$$

In cui si ha  $\mathbf{u}_p$  che è la velocità della particella all'istante attuale e precedente,  $d\mathbf{u}_{RHS}/dt$  che è la soluzione dell'equazione del moto delle particelle (del lato destro) e corrisponde ad un'accelerazione in termini dimensionali.

Inoltre, mediante l'algoritmo di integrazione temporale rappresentato da Eulero Implicito in questo caso, e non da Runge-Kutta (in quanto quest'ultimo prevede un'implementazione più difficile e complessa), si sono risolte le equazioni differenziali del modello stocastico di Langevin, ricavando  $u_i/\sigma_i$  nel seguente modo:

$$\left(\frac{u_i}{\sigma_i}\right)_k = \frac{\left(\frac{u_i}{\sigma_i}\right)_{k-1} + \frac{d(u_i/\sigma_i)_{RHS}}{dt}}{1 + \frac{\gamma_3}{\tau_L}}$$

Dove  $u_i$  indica la fluttuazione di velocità del fluido,  $\sigma_i$  la radice quadratica media della velocità  $\sqrt{u_i^2}$ , mentre  $(u_i/\sigma_i)_{RHS}$  è il lato destro risolto precedentemente dell'equazione di Langevin. Il pedice  $k$  indica l'iterata alla quale si fa riferimento.

L'evoluzione temporale delle equazioni è stata implementata all'interno del modello generale come riportato di seguito.

```
do p=1,N_PRT
!
po_x=prt(p)%p_x
po_y=prt(p)%p_y
po_z=prt(p)%p_z
!
pn_x=po_x+fct_1*prt(p)%rhs_p_x+fct_2*prt(p)%orhs_p_x
pn_y=po_y+fct_1*prt(p)%rhs_p_y+fct_2*prt(p)%orhs_p_y
pn_z=po_z+fct_1*prt(p)%rhs_p_z+fct_2*prt(p)%orhs_p_z
!
prt(p)%p_x=pn_x
prt(p)%p_y=pn_y
prt(p)%p_z=pn_z
!
if((po_z>z_p_lim*l_tau).and.(pn_z<z_p_lim*l_tau)) call InitLangevin(p,l_tau)
if((po_z<LG_z-z_p_lim*l_tau).and.(pn_z>LG_z-z_p_lim*l_tau)) call InitLangevin(p,l_tau)
!
prt(p)%v_x=prt(p)%v_x+fct_1*prt(p)%rhs_v_x+fct_2*prt(p)%orhs_v_x
prt(p)%v_y=prt(p)%v_y+fct_1*prt(p)%rhs_v_y+fct_2*prt(p)%orhs_v_y
prt(p)%v_z=prt(p)%v_z+fct_1*prt(p)%rhs_v_z+fct_2*prt(p)%orhs_v_z
!
prt(p)%vf_x=(prt(p)%vf_x+prt(p)%rhs_vf_x)/(1.0_rp+fct_3/prt(p)%tau_l)
prt(p)%vf_y=(prt(p)%vf_y+prt(p)%rhs_vf_y)/(1.0_rp+fct_3/prt(p)%tau_l)
prt(p)%vf_z=(prt(p)%vf_z+prt(p)%rhs_vf_z)/(1.0_rp+fct_3/prt(p)%tau_l)
!
enddo
```

## 5 DISCUSSIONE DEI RISULTATI

Come descritto nel precedente capitolo, in questa trattazione si sono analizzate tre macroaree ognuna rappresentata da un numero di Reynolds differente.

Sono stati fatti variare alcuni parametri empirici che influenzano principalmente il rumore Gaussiano, la funzione necessaria al calcolo della velocità nella direzione normale a parete e la zona di transizione.

È stata effettuata un'analisi approfondita sugli errori, ricavati in funzione di un confronto eseguito tra i risultati ottenuti con il modello implementato e quelli ottenuti con una simulazione DNS.

### 5.1 CASO A): $Re_\tau = 1020$

Al fine di validare il modello generale implementato nella precedente terza fase, nella quale si è cercato di migliorare la formulazione delle componenti di velocità del fluido lungo le tre direzioni nella zona di transizione, in particolare lungo la direzione *wall-normal*, inizialmente sono state eseguite alcune simulazioni per  $Re_\tau = 1020$ . I risultati ottenuti dal modello sono stati confrontati con i risultati DNS, con numeri di Stokes viscosi rispettivamente pari a  $St^+ = 1, 10, 100$ , i quali corrispondono a dimensioni delle particelle differenti (all'aumentare dello Stokes, aumenta anche la dimensione della particella).

Sono stati fatti variare alcuni parametri empirici necessari alla corretta taratura del modello e dell'accuratezza dei risultati prodotti. Questi parametri sono dati dal coefficiente al denominatore presente in  $u_\tau/h$ , ossia  $h$ , il quale influenza il rumore Gaussiano  $N$ , e dal fattore di amplificazione  $k$ . Entrambi i parametri influenzano, a loro volta, il calcolo della velocità del fluido sentita dalla particella lungo la direzione  $z$  (*wall-normal*)  $w_{FUN}$ , la quale è di fondamentale importanza nel moto delle particelle trasportate da un fluido all'interno di un canale turbolento.

Per il primo caso analizzato, si è considerato  $h = 50$  e  $k = 100$ . La zona di transizione è stata definita tra due valori fissi che inizialmente non sono stati fatti variare:  $z_{MIN}^+ = 80$  e  $z_{MAX}^+ = 100$ .

Si osserva che il modello è migliorato rispetto ai precedenti, in quanto non è più caratterizzato da valli delle velocità nelle direzioni  $y$  e  $z$  all'interno della zona di transizione e, vicino a parete, le velocità risultano molto più accurate rispetto ai risultati DNS (in precedenza non corrispondevano). Inoltre, le concentrazioni normalizzate delle particelle sono migliorate notevolmente, poiché i picchi che erano presenti nella zona di transizione e il deficit vicino a parete sono stati risolti.

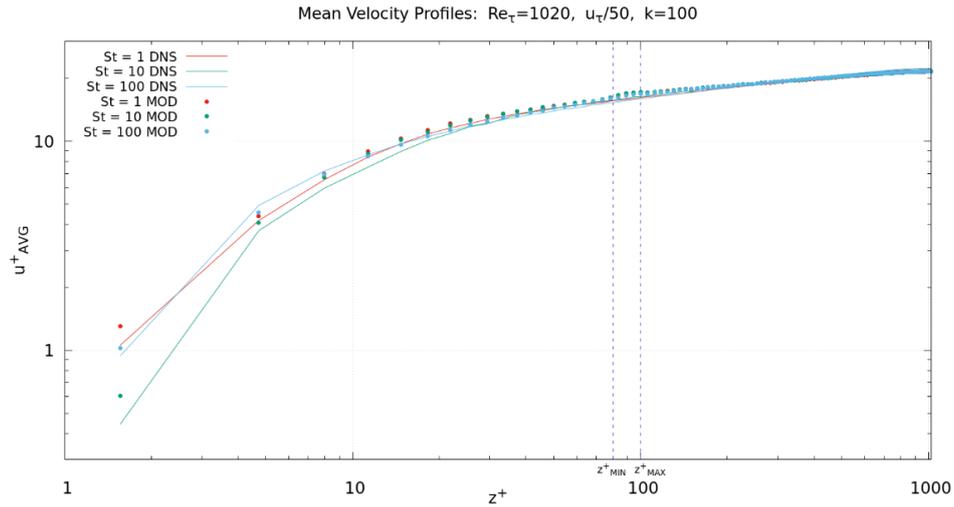


Figura 48. Caso 1: Velocità media delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 115000$ . Modello ottimizzato.

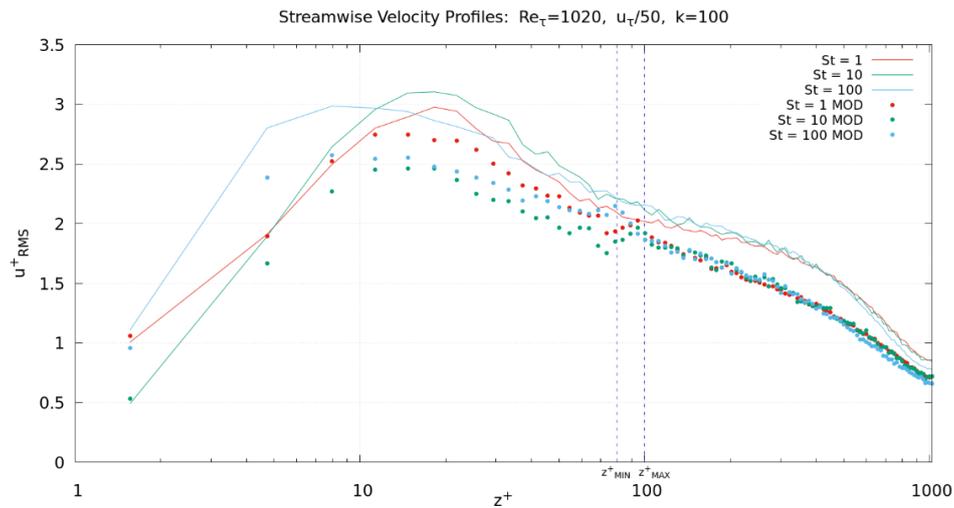


Figura 49. Caso 1: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione assiale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 115000$ . Modello ottimizzato.

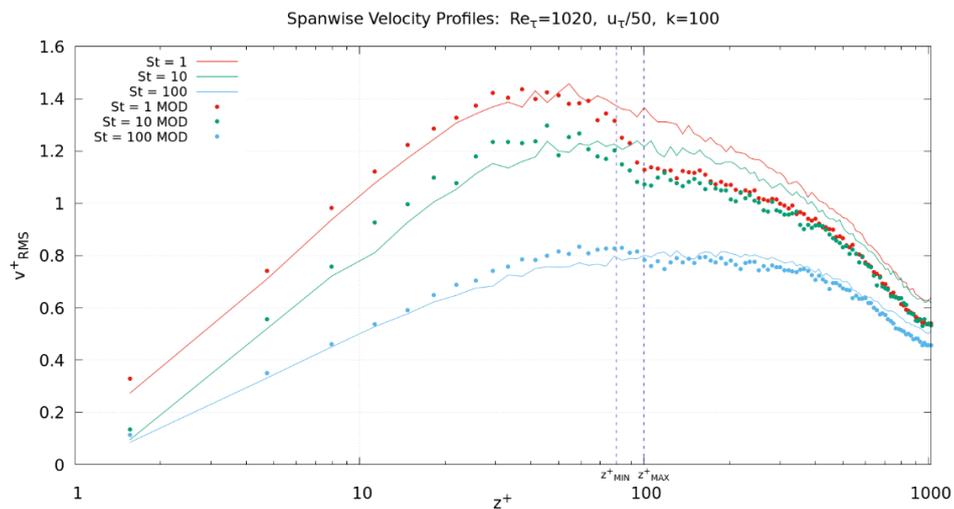


Figura 50. Caso 1: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione trasversale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 115000$ . Modello ottimizzato.

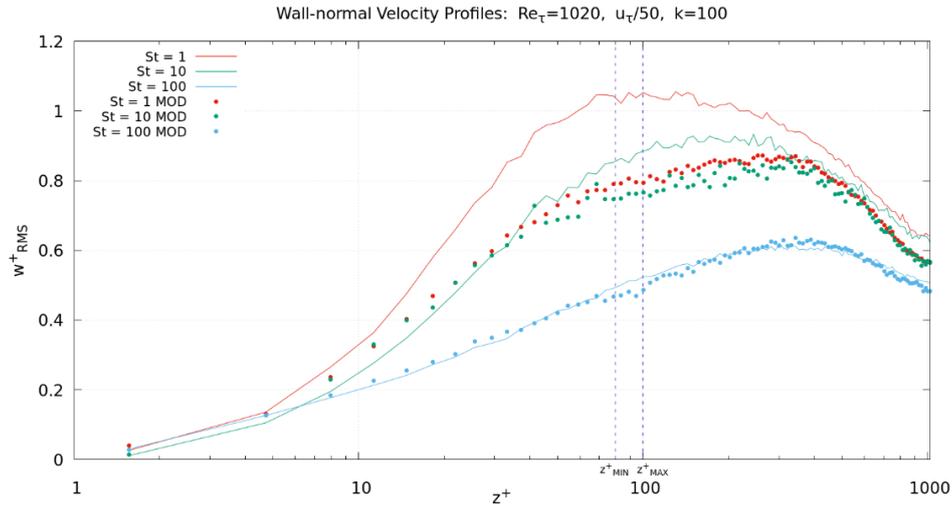


Figura 51. Caso 1: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione normale a parete, in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 115000$ . Modello ottimizzato.

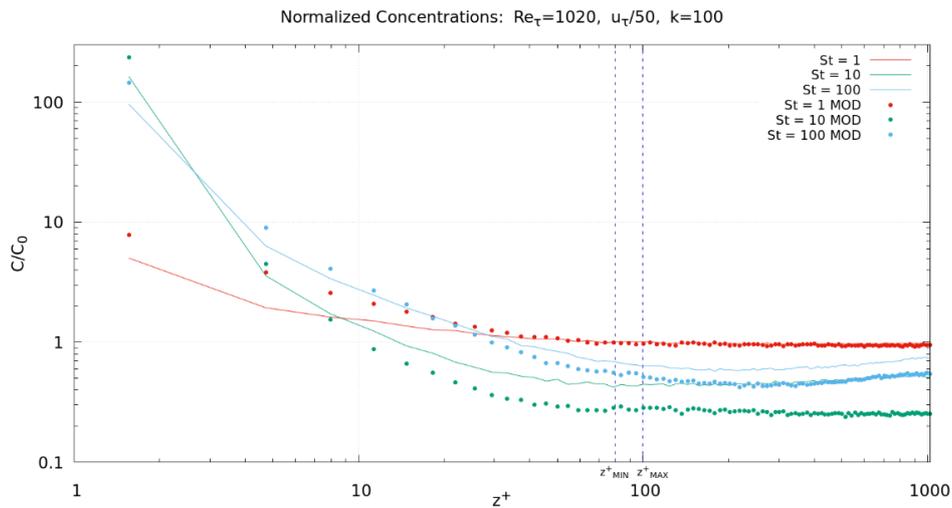


Figura 52. Caso 1: Concentrazioni normalizzate delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 115000$ . Modello ottimizzato.

In questo caso, è possibile quindi notare un netto miglioramento dei risultati ottenuto mediante l'implementazione dell'ultimo modello sviluppato, anche se ci potrebbero essere alcune possibilità per correggere piccole imperfezioni che caratterizzano il modello. Nel primo caso, si nota che le velocità *spanwise* e *wall-normal* non riescono a seguire la curva DNS per piccoli Stokes, in quanto la risoluzione scelta per rappresentare il modello è molto scarsa e, al diminuire del numero di Stokes e quindi al diminuire dell'inerzia della particella, la curva relativa alla velocità si alza, raggiungendo un certo limite definito, in questo caso, dalla bassa risoluzione adottata.

Successivamente, sono state effettuate varie simulazioni al variare di due parametri importanti:  $h$  e  $k$ . Nel secondo caso, si è analizzata la configurazione con  $h = 25$  (modificato) e  $k = 100$  (come prima).

In generale, mediante un confronto con il primo caso, si può affermare che le velocità sono molto simili, anche se per  $w_{RMS}^+$  si ha un leggero scostamento maggiore avvicinandosi alla mezzeria del canale, dove agisce il modello LES. Si può osservare, invece, un netto miglioramento dell'accuratezza delle concentrazioni, le quali approssimano meglio i risultati DNS.

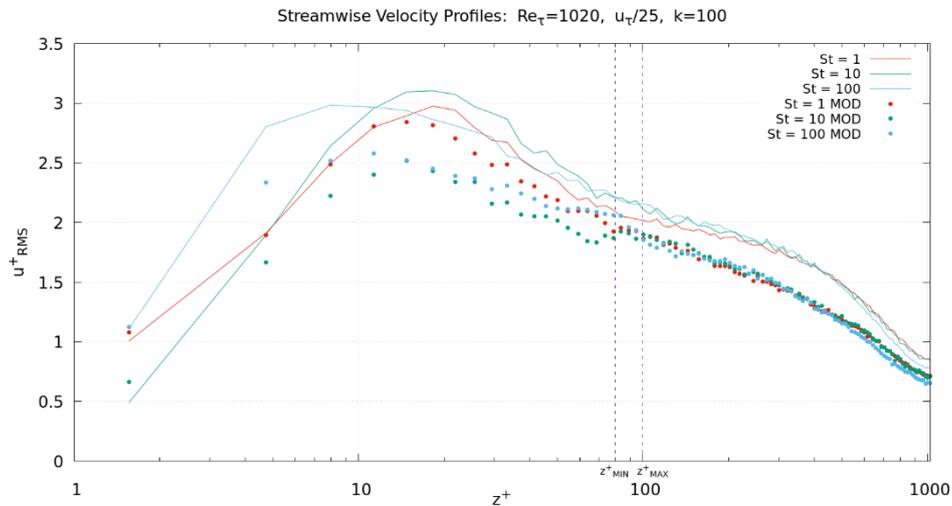


Figura 53. Caso 2: Velocità media delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 200000$ . Modello ottimizzato.

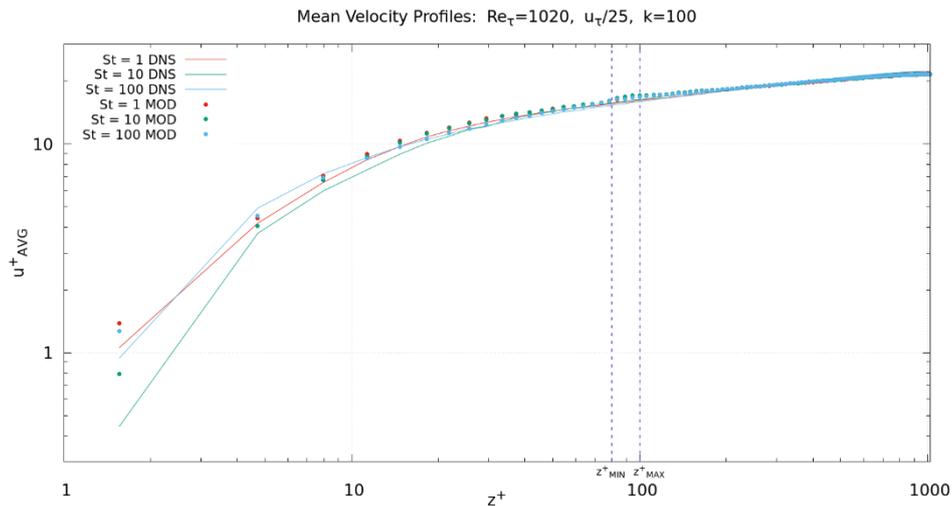


Figura 54. Caso 2: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione assiale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 200000$ . Modello ottimizzato.

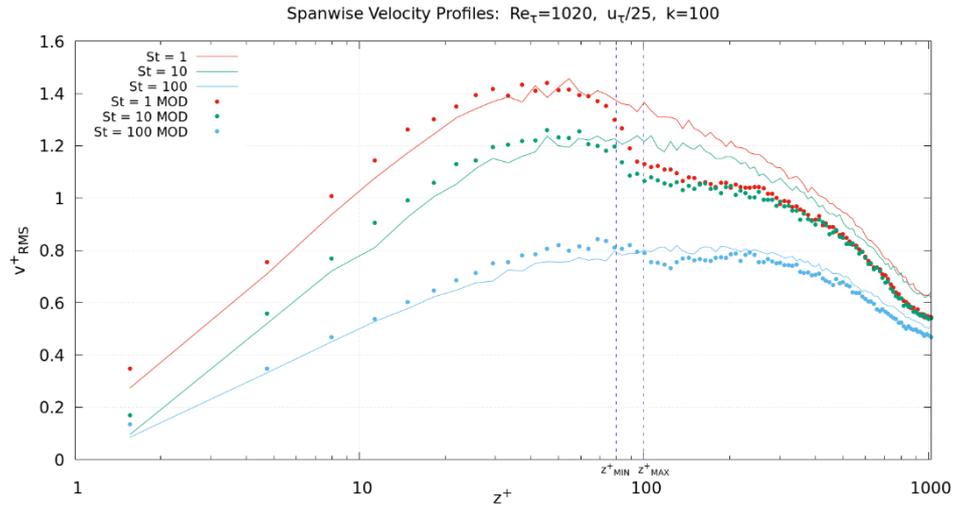


Figura 55. Caso 2: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione trasversale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 200000$ . Modello ottimizzato.

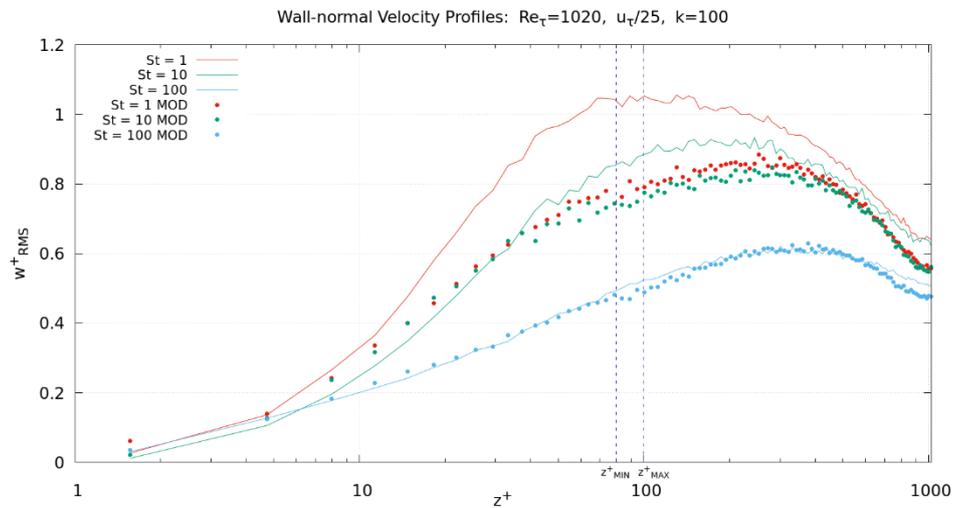


Figura 56. Caso 2: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione normale a parete, in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 200000$ . Modello ottimizzato.

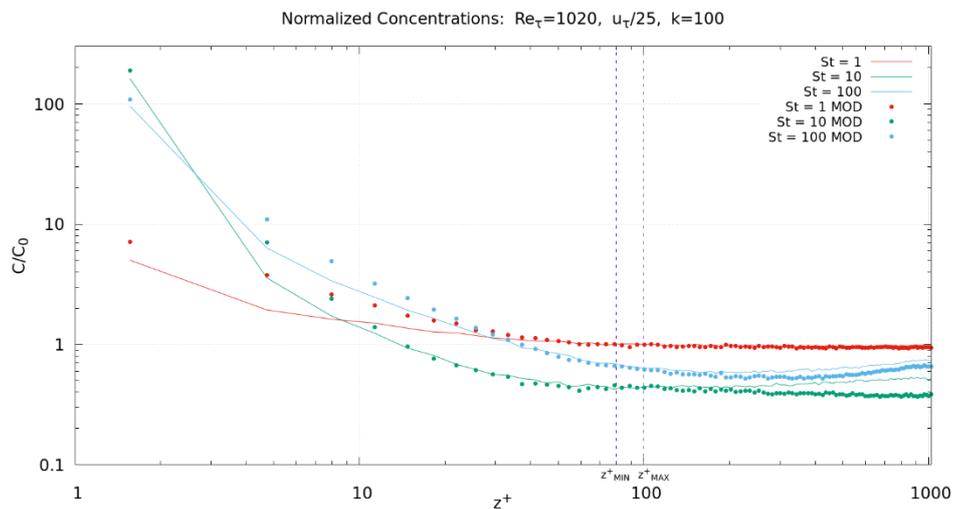


Figura 57. Caso 2: Concentrazioni normalizzate delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 200000$ . Modello ottimizzato.

In seguito, è stato considerato un terzo caso, nel quale si sono impostati i parametri  $h = 100$  (diverso) e  $k = 100$  (uguale ai casi precedenti). Rispetto ai casi precedenti, le velocità non sembrano seguire un andamento ottimale e sono più spaiate in alcuni punti, oltre che allontanarsi dai risultati DNS per valori di  $z^+$  che si avvicinano a 1020. Anche le concentrazioni peggiorano parecchio, sintomo di risultati non proprio accurati.

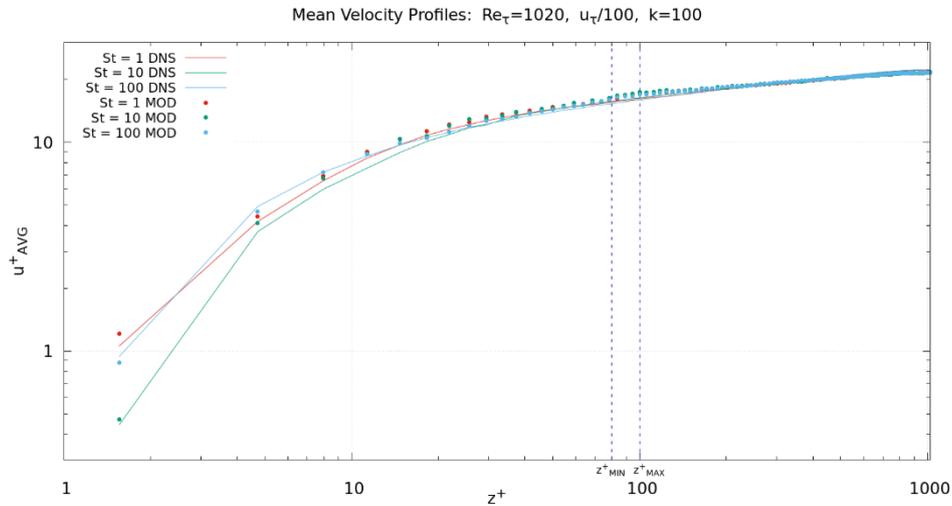


Figura 58. Caso 3: Velocità media delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 130000$ . Modello ottimizzato.

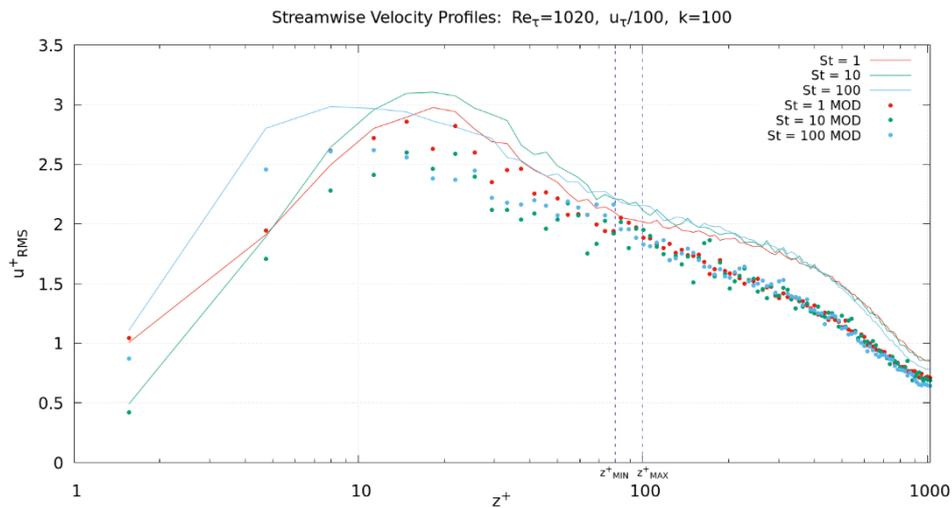


Figura 59. Caso 3: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione assiale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 130000$ . Modello ottimizzato.

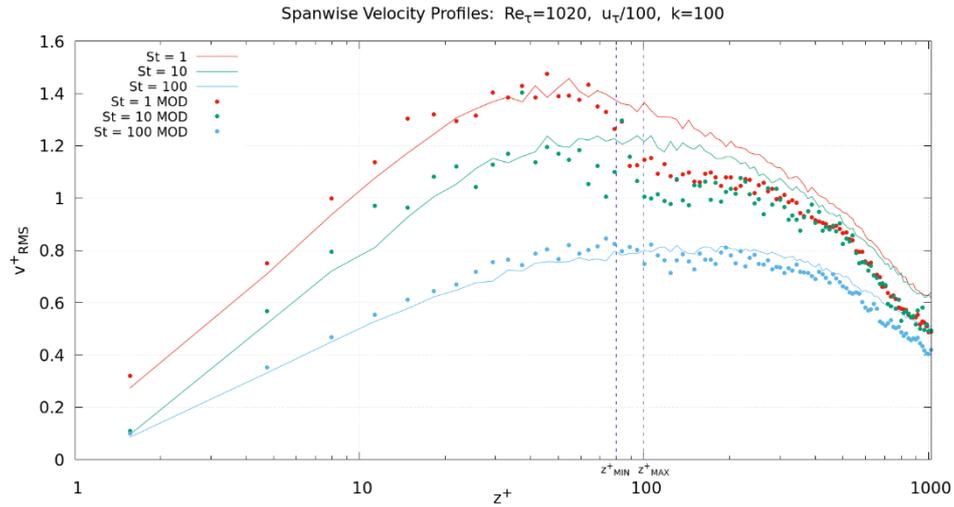


Figura 60. Caso 3: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione trasversale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 130000$ . Modello ottimizzato.

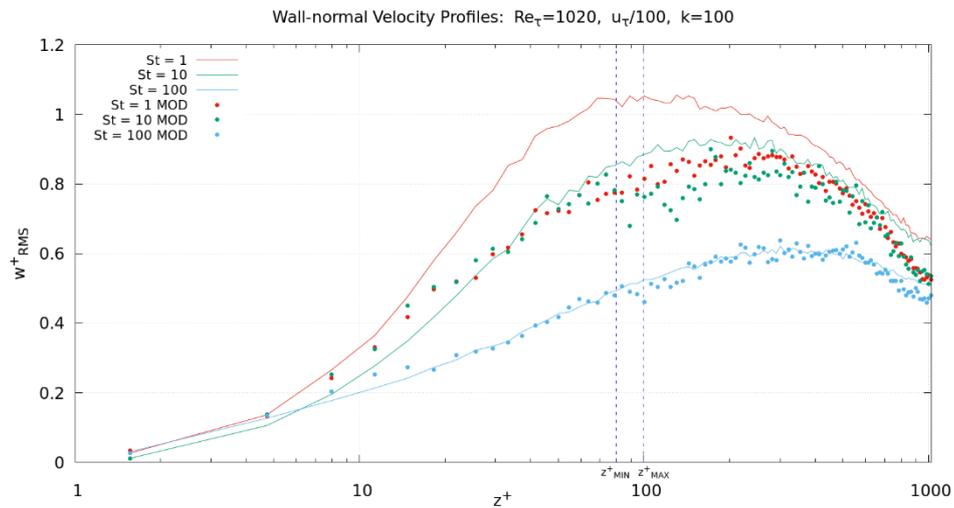


Figura 61. Caso 3: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione normale a parete, in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 130000$ . Modello ottimizzato.

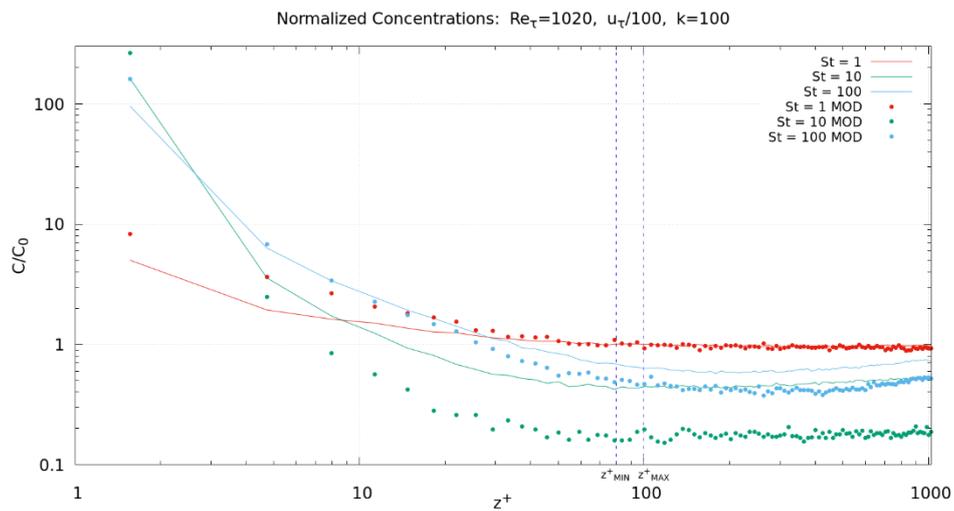


Figura 62. Caso 3: Concentrazioni normalizzate delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 130000$ . Modello ottimizzato.

Il quarto caso è stato esaminato facendo variare il secondo parametro e mantenendo fisso il primo:  $h = 50$  e  $k = 10$ . Tuttavia, dai risultati ottenuti è possibile osservare un andamento delle velocità che peggiora, in particolare questo accade nella zona di transizione per  $v_{RMS}^+$  oltre che essere rappresentato dal fatto di avere molti punti spaiati che si allontanano dai risultati DNS. Le concentrazioni sembrano essere abbastanza insensibili alla variazione del parametro  $k$ , in questo caso.

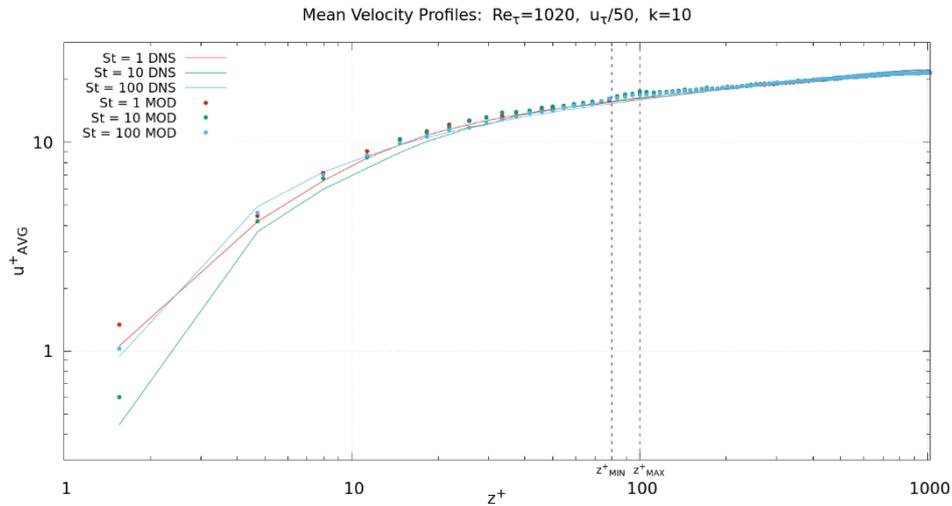


Figura 63. Caso 4: Velocità media delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 130000$ . Modello ottimizzato.

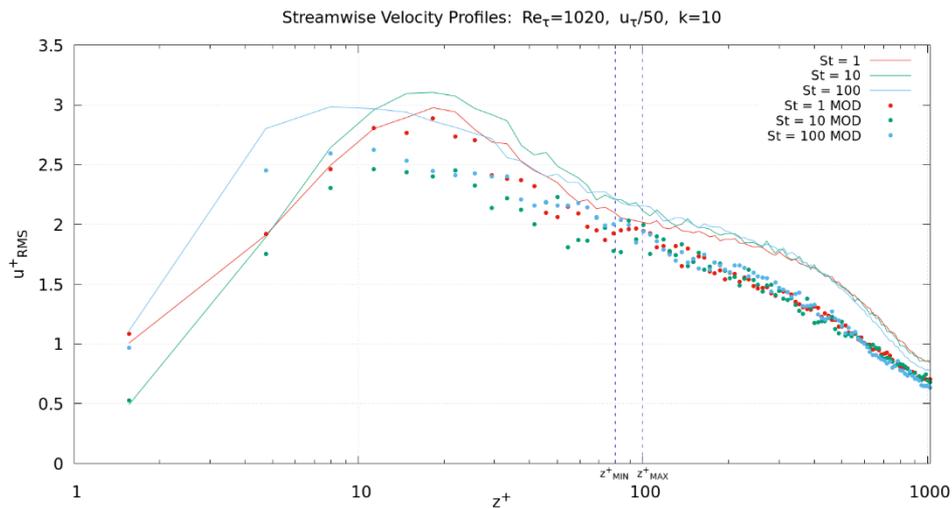


Figura 64. Caso 4: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione assiale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 130000$ . Modello ottimizzato.

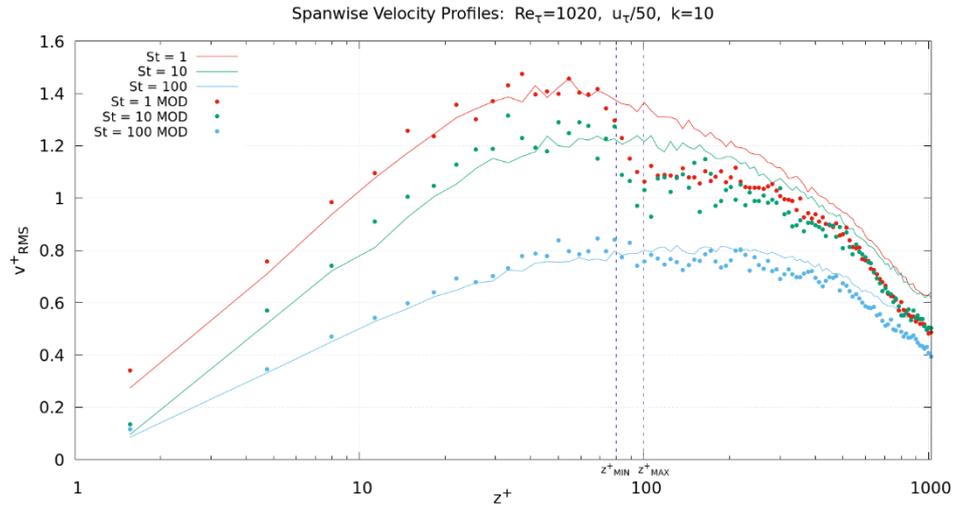


Figura 65. Caso 4: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione trasversale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 130000$ . Modello ottimizzato.

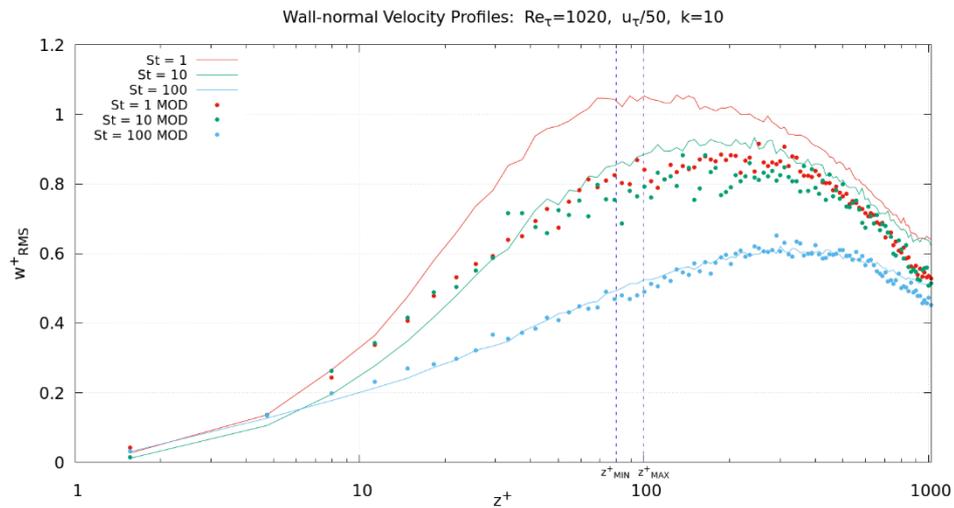


Figura 66. Caso 4: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione normale a parete, in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 130000$ . Modello ottimizzato.

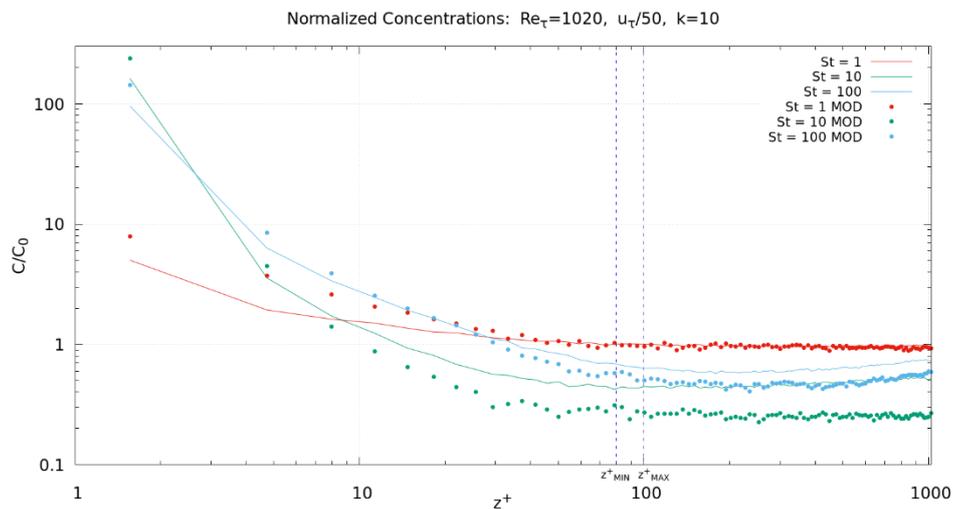


Figura 67. Caso 4: Concentrazioni normalizzate delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 130000$ . Modello ottimizzato.

Successivamente, anche per il quinto caso si è modificato solamente il secondo parametro, il quale viene raddoppiato rispetto al primo caso:  $h = 50$  e  $k = 200$ . Anche qui, come la situazione precedente, si ha un leggero peggioramento generale delle velocità, mentre le concentrazioni sembrano restare invariate al variare di  $k$ . Inoltre, al variare del fattore di amplificazione, i risultati che sono stati ottenuti tra il quarto e il quinto caso sembrano pressoché identici, individuando una presunta insensibilità del modello alla variazione di questo parametro.

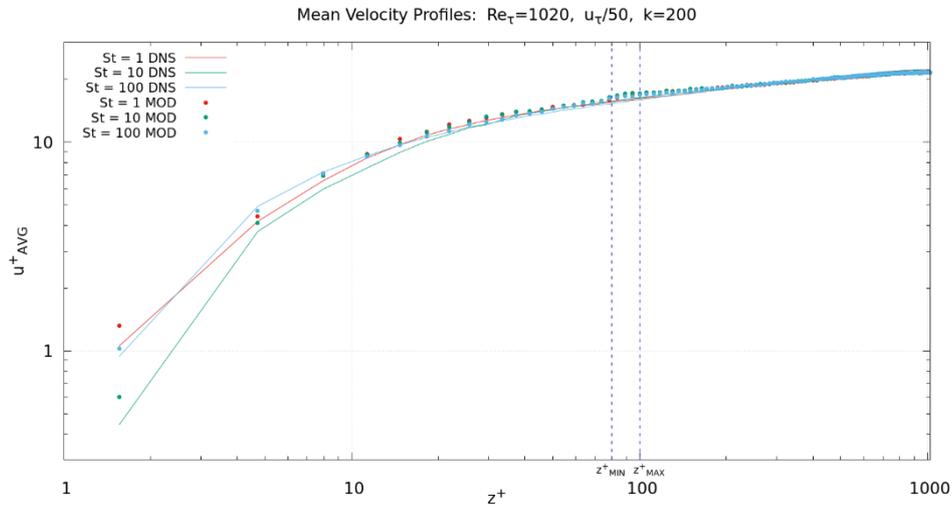


Figura 68. Caso 5: Velocità media delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 130000$ . Modello ottimizzato.

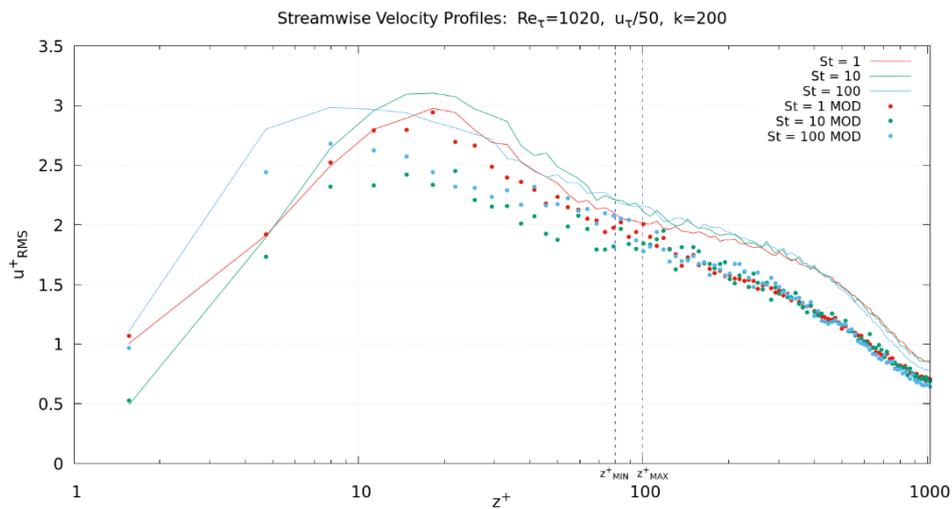


Figura 69. Caso 5: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione assiale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 130000$ . Modello ottimizzato.

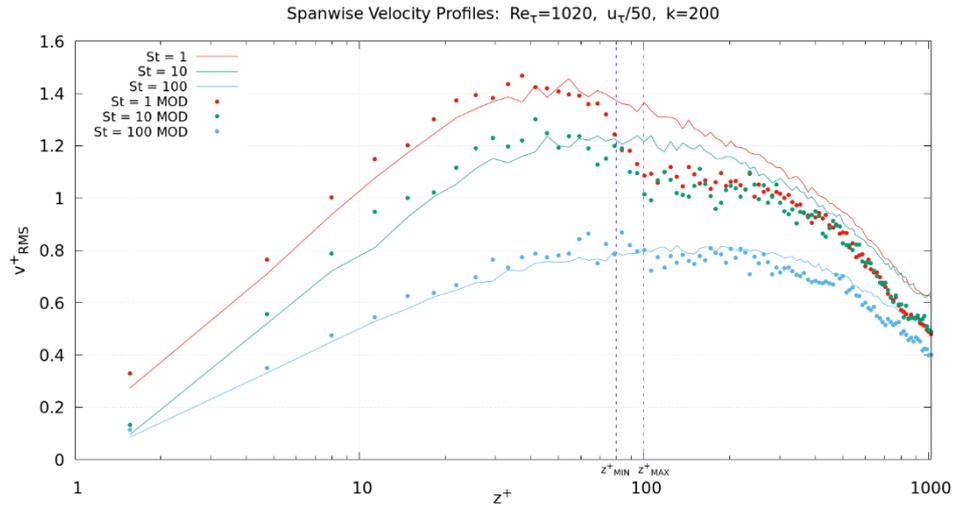


Figura 70. Caso 5: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione trasversale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 130000$ . Modello ottimizzato.

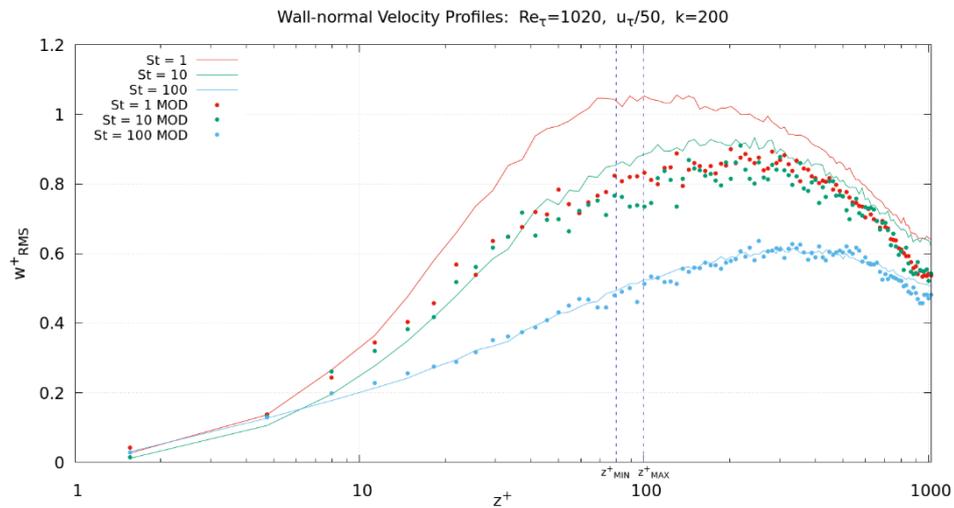


Figura 71. Caso 5: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione normale a parete, in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 130000$ . Modello ottimizzato.

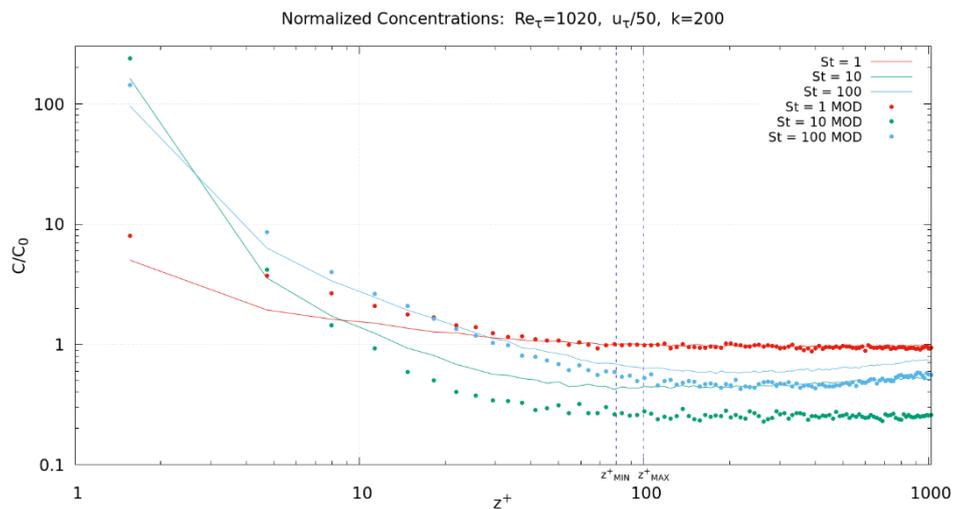


Figura 72. Caso 5: Concentrazioni normalizzate delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 130000$ . Modello ottimizzato.

Per il motivo che è stato spiegato precedentemente, relativo alla presunta insensibilità del modello alla variazione del fattore di amplificazione utilizzato per il calcolo di  $w_f$  vicino a parete, si è deciso di condurre un'ulteriore simulazione con lo scopo di verificare se effettivamente fosse possibile rimuovere la dipendenza del modello da questo parametro  $k$ . Questo sesto caso è stato configurato con  $h = 25$  e  $k = 1$ .

Confrontando questi risultati con quelli del secondo caso, nel quale  $h = 25$  e  $k = 100$ , si osserva un andamento delle velocità molto simile, caratterizzato da un leggero scostamento (quasi impercettibile) in corrispondenza della zona di transizione per la velocità  $v_{RMS}^+$ . Per quanto riguarda le concentrazioni, si hanno risultati pressoché uguali, con un netto miglioramento che è dovuto alla presenza di un valore di  $h$  più basso rispetto a quello del primo caso.

In questo modo, l'insensibilità del modello alla variazione del fattore di amplificazione sembra essere stata abbastanza consolidata; per consentire una maggiore semplicità di approccio al modello sviluppato, ora si potrebbe porre  $k$  unitario e quindi trascurarne la sua presenza. Si è deciso comunque di mantenere un valore di  $k = 100$  nelle simulazioni che verranno affrontate in seguito.

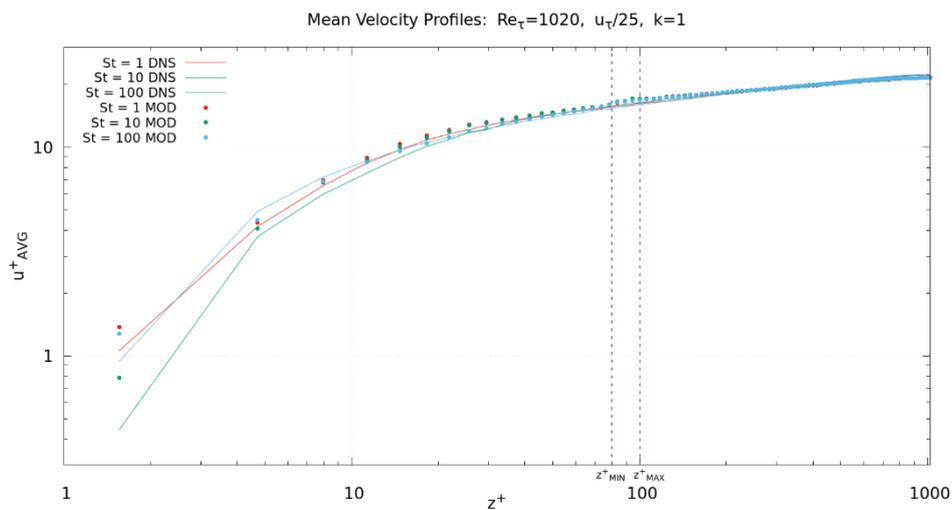


Figura 73. Caso 6: Velocità media delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 150000$ . Modello ottimizzato.

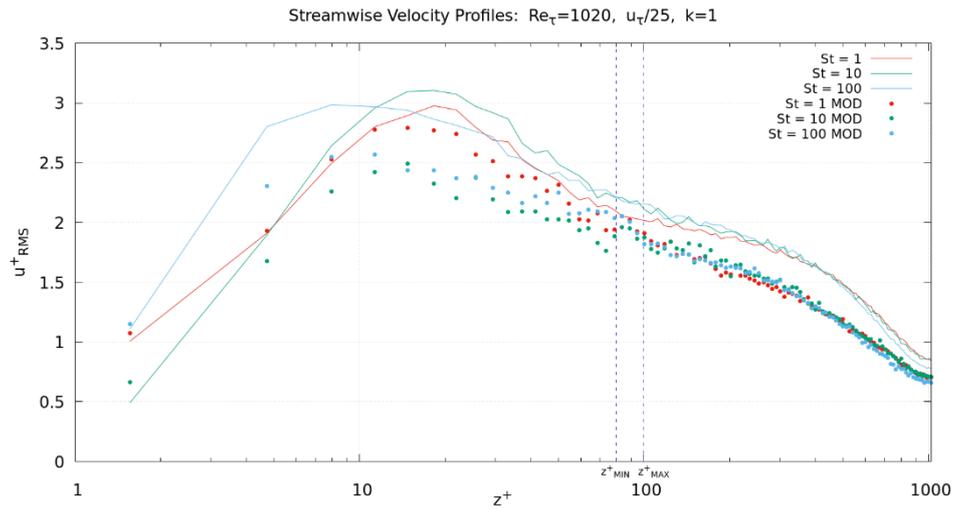


Figura 74. Caso 6: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione assiale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 150000$ . Modello ottimizzato.

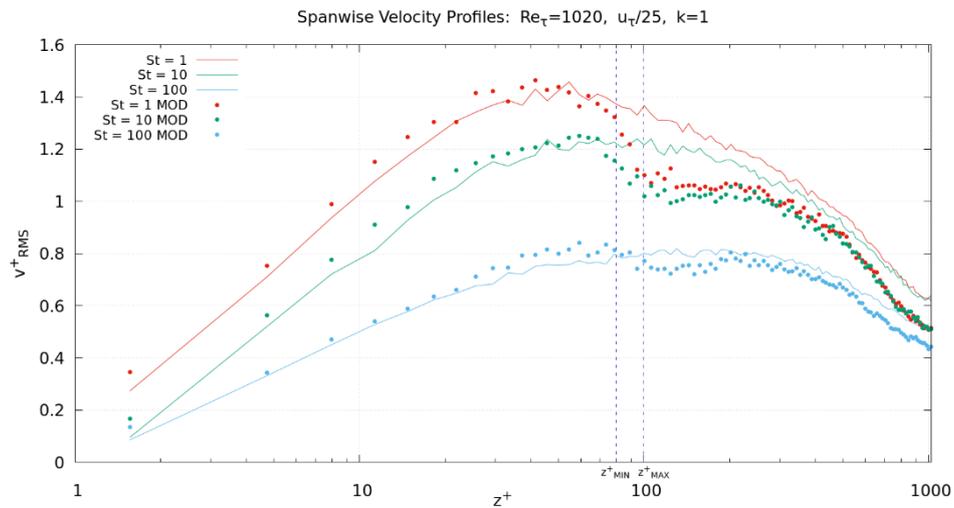


Figura 75. Caso 6: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione trasversale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 150000$ . Modello ottimizzato.

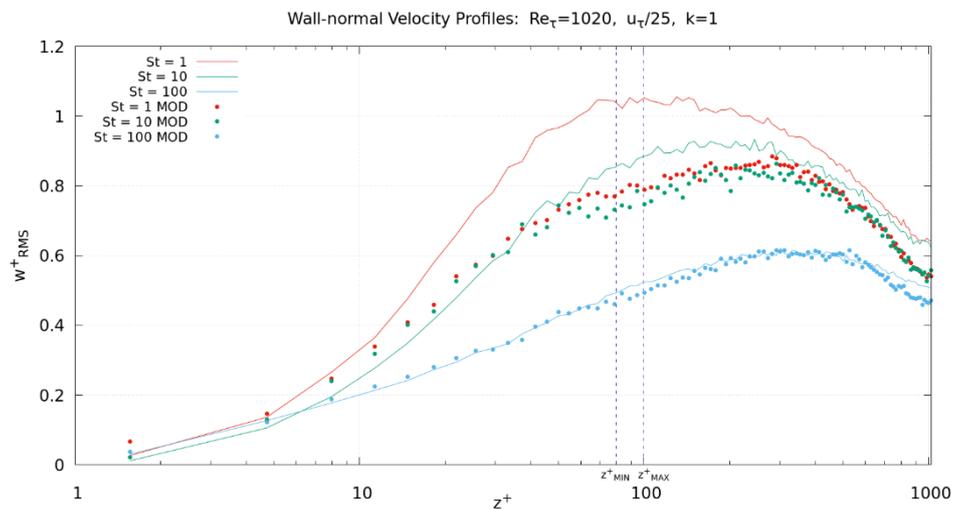


Figura 76. Caso 6: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione normale a parete, in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 150000$ . Modello ottimizzato.

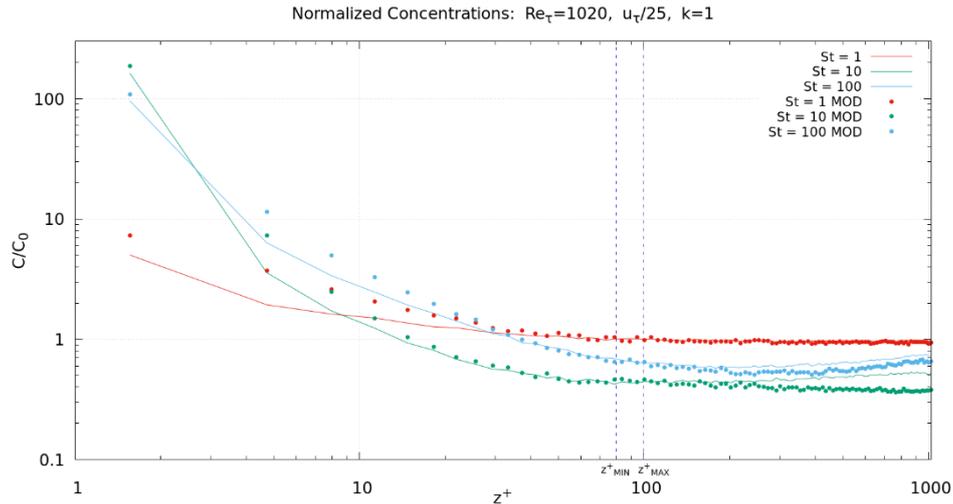


Figura 77. Caso 6: Concentrazioni normalizzate delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 150000$ . Modello ottimizzato.

Vista la bontà dei risultati ottenuti con il secondo caso, si è cercato di modificare ulteriormente il primo parametro. Nella settima configurazione si è definito  $h = 10$  e  $k = 100$ . Le velocità ottenute sono pressoché simili a quelle ottenute nel secondo caso ( $h = 25$ ), perciò peggiorano leggermente in alcuni punti rispetto al primo caso ( $h = 50$ ). Le concentrazioni, invece, variano maggiormente e si ottengono andamenti discordanti rispetto a quelli rappresentati dalla DNS.

La scelta ottimale sembra essere rappresentata dal secondo caso, nel quale si nota, rispetto a tutti gli altri casi, essenzialmente un andamento delle velocità tra i migliori e un netto miglioramento delle concentrazioni normalizzate, le quali si avvicinano molto a quelle ottenute tramite DNS.

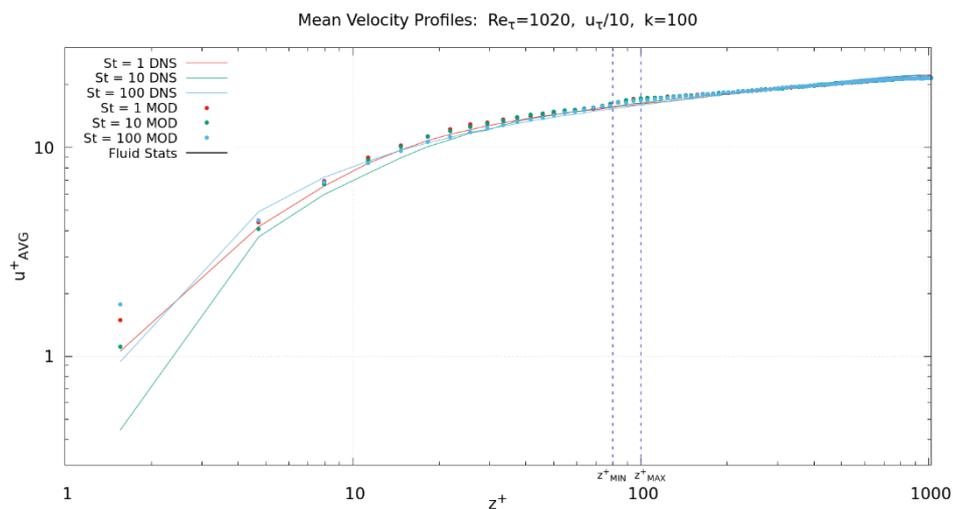


Figura 78. Caso 7: Velocità media delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 130000$ . Modello ottimizzato.

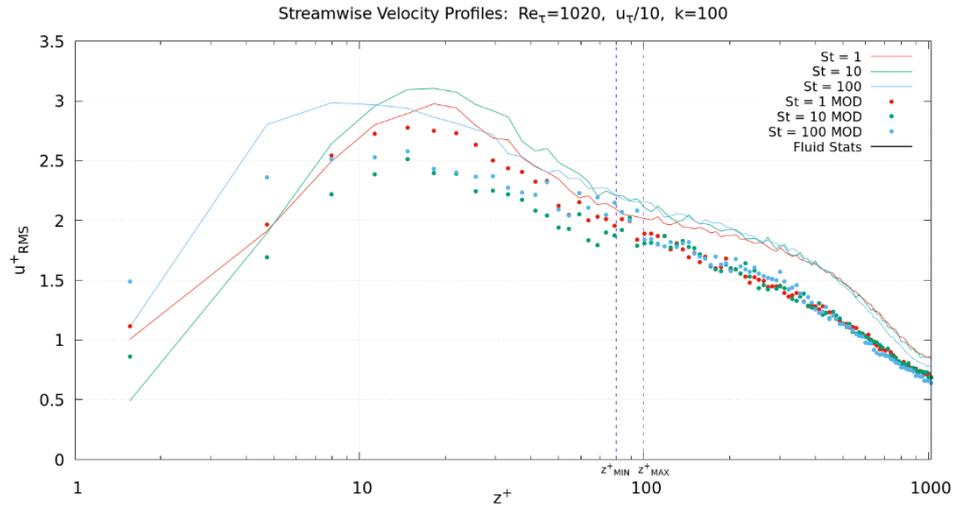


Figura 79. Caso 7: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione assiale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 130000$ . Modello ottimizzato.

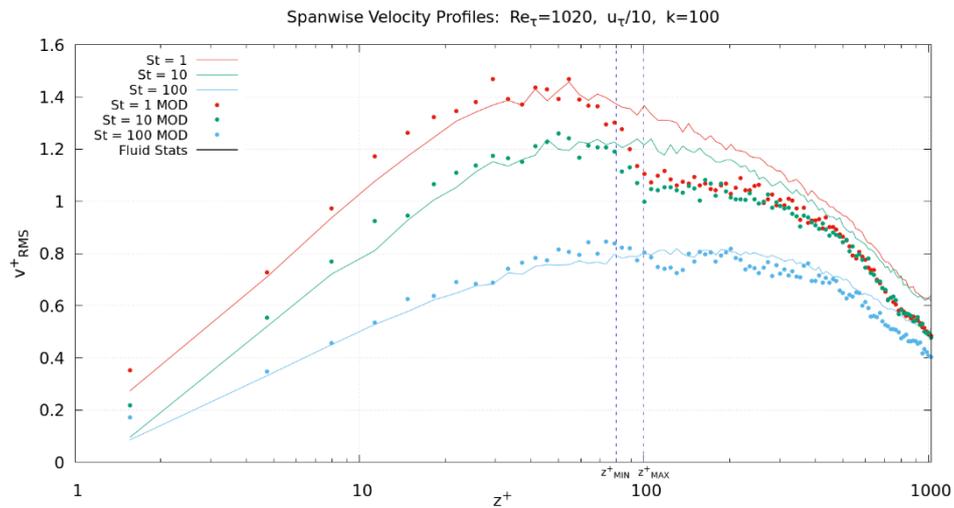


Figura 80. Caso 7: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione trasversale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 130000$ . Modello ottimizzato.

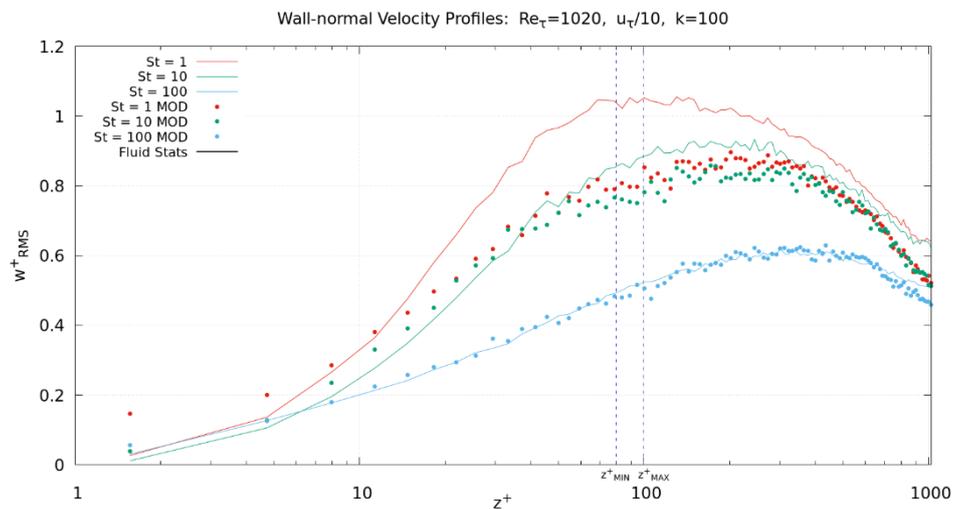


Figura 81. Caso 7: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione normale a parete, in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 130000$ . Modello ottimizzato.

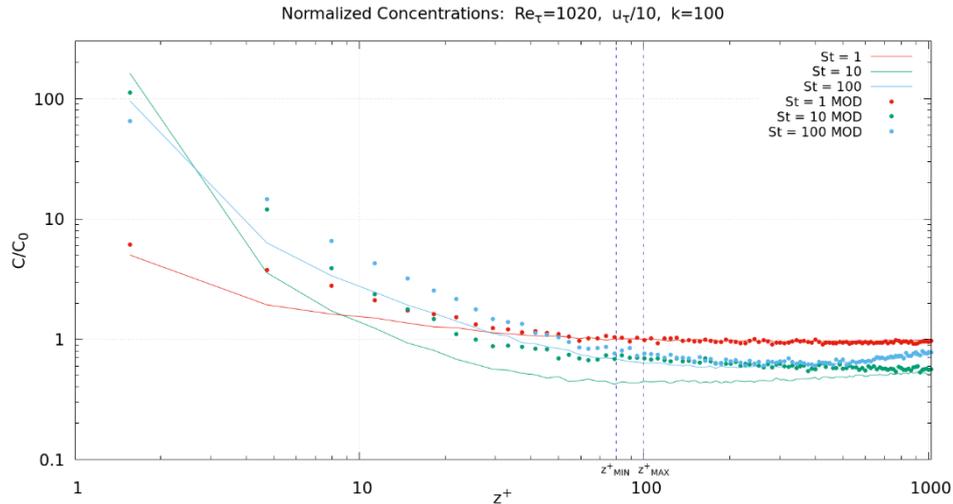


Figura 82. Caso 7: Concentrazioni normalizzate delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 130000$ . Modello ottimizzato.

Infine, si è voluta eseguire un'ultima simulazione, senza variare nessuno dei precedenti parametri e utilizzando come riferimento quello che è stato definito come “caso ottimale” (il secondo), in cui si ricorda che  $h = 25$  e  $k = 100$ . Per l'ottavo caso, quindi, non sono stati modificati i parametri precedenti, ma è stata configurata diversamente la risoluzione mediante la quale si discretizza il canale: si hanno un numero di celle pari a  $64 \times 64 \times 64$ , maggiore rispetto al precedente. Si vuole dimostrare che, aumentando la risoluzione, le curve (a Stokes piccoli) che non riuscivano a seguire in modo ottimale l'andamento delle velocità ricavate attraverso DNS, ora riescono ad aumentare la loro accuratezza.

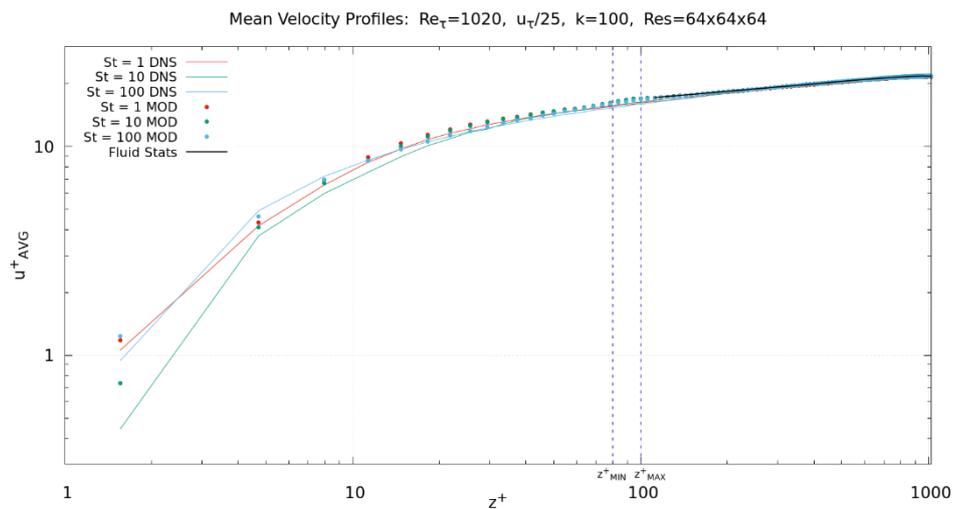


Figura 83. Caso 8: Velocità media delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

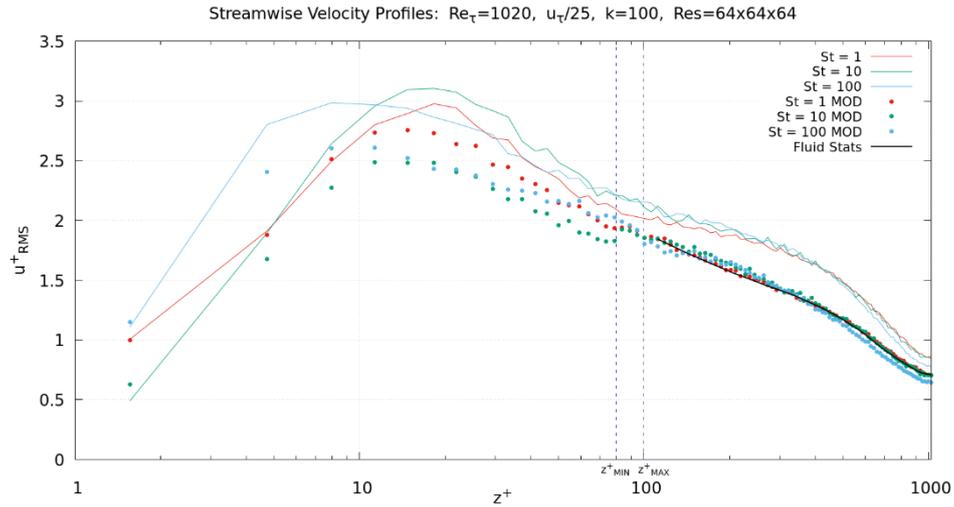


Figura 84. Caso 8: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione assiale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

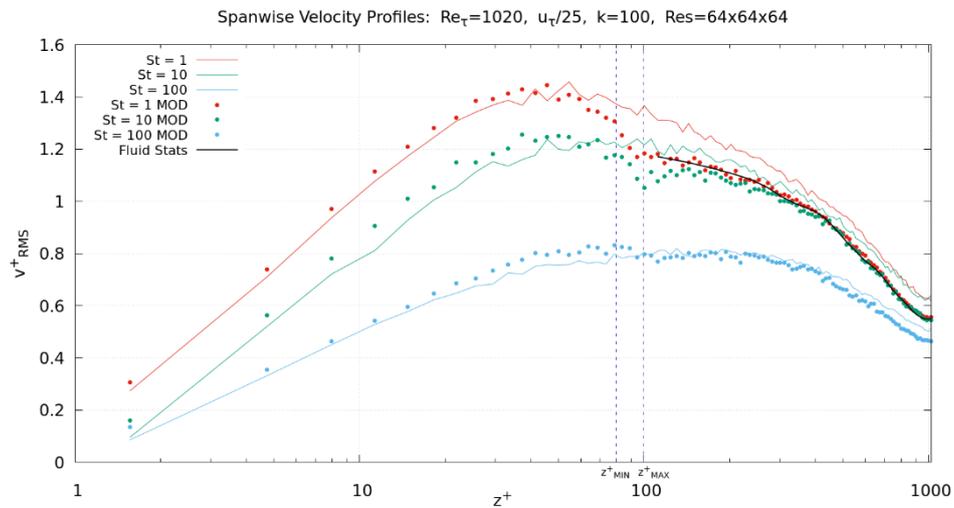


Figura 85. Caso 8: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione trasversale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

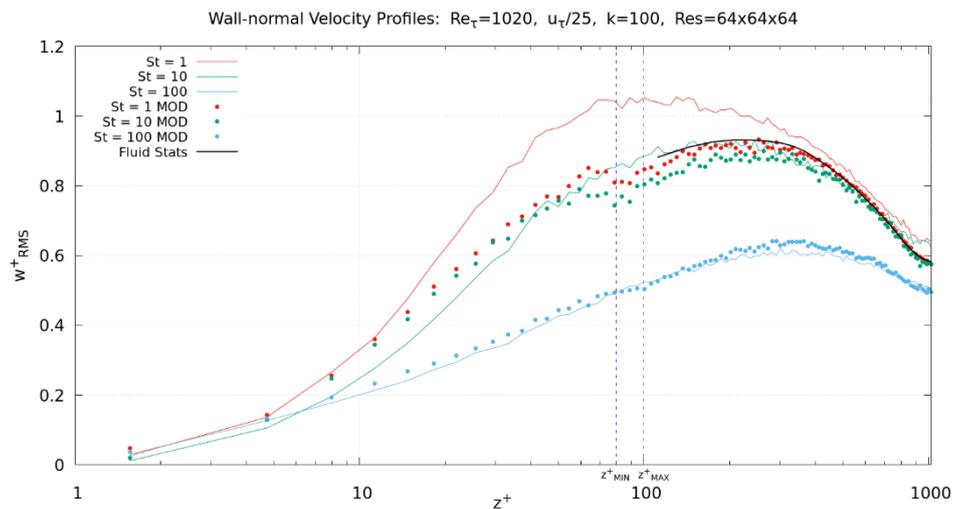


Figura 86. Caso 8: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione normale a parete, in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

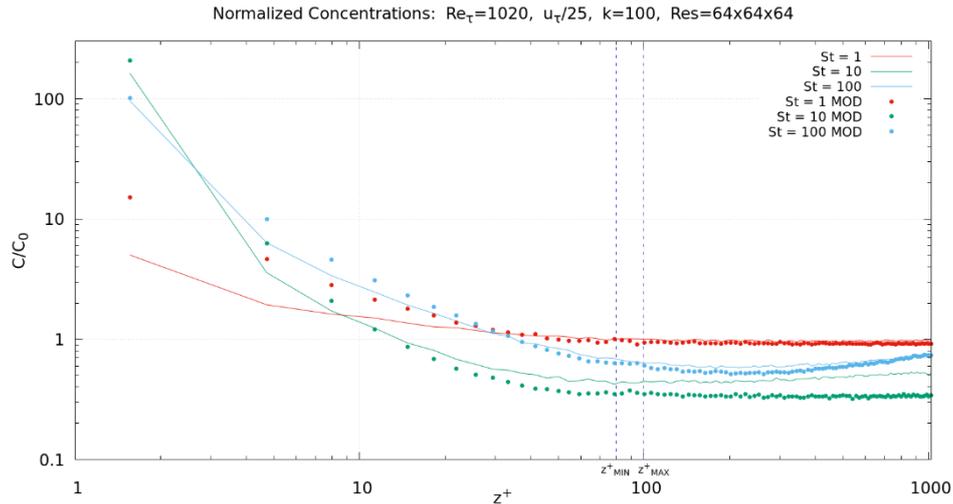


Figura 87. Caso 8: Concentrazioni normalizzate delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

In generale, le velocità ottenute dal modello sono più accurate rispetto alle precedenti, e soprattutto nella regione lontana da parete, in cui agisce il modello LES, si nota un netto miglioramento. Sono state calcolate anche le statistiche del fluido mediante il post-processor e sono state confrontate con i risultati del modello. Si può affermare che, all'aumentare della risoluzione definita in input, le statistiche del fluido migliorano, così come il modello LES, il quale al più riesce ad avvicinarsi a queste statistiche. All'aumentare delle statistiche del fluido, aumentano anche le fluttuazioni che le particelle possono sentire, fino ad un certo limite superiore rappresentato dalle fluttuazioni del fluido. Come detto in precedenza, a piccole inerzie delle particelle, cioè a Stokes bassi, si ottengono fluttuazioni più veloci. Inoltre, aumentando la risoluzione a 64 (invece di 48) si ha anche un importante aumento del costo computazione, il quale diventa circa  $(64/48)^3 = 2.37$  maggiore rispetto al tempo della simulazione precedente.

Ricapitolando, sono stati considerati otto differenti casi per la prima macroarea A) in cui vale  $Re_\tau = 1020$ , che si possono sintetizzare come segue.

CASO	$Re_\tau$	$h$	$k$	$Res$
1	1020	50	100	$48 \times 48 \times 48$
2	1020	25	100	$48 \times 48 \times 48$
3	1020	100	100	$48 \times 48 \times 48$
4	1020	50	10	$48 \times 48 \times 48$
5	1020	50	200	$48 \times 48 \times 48$
6	1020	25	1	$48 \times 48 \times 48$
7	1020	10	100	$48 \times 48 \times 48$
8	1020	25	100	$64 \times 64 \times 64$

Successivamente, vista l'elevata accuratezza dei risultati ottenuti nei primi due casi (considerando solamente i casi caratterizzati dalla risoluzione inferiore), si è deciso di concentrarsi esclusivamente su di essi, al fine di effettuare un confronto più uniforme. Perciò, sono state eseguite due nuove simulazioni, estendendo il passo temporale in modo uniforme fino a  $\Delta t = 100000$  per entrambi i casi, in modo da garantire un confronto più omogeneo e preciso.

I casi sono definiti come segue:

CASO	$Re_\tau$	$h$	$k$	Res	$\Delta t$
9	1020	50	100	$48 \times 48 \times 48$	100000
10	1020	25	100	$48 \times 48 \times 48$	100000

In questi due casi, ci si è concentrati solo sulla variazione del parametro  $h$ .

Nel nono caso, dove  $h = 50$ , le velocità ottenute dal modello seguono abbastanza bene l'andamento rappresentato dalla DNS, anche se per la velocità  $u_{RMS}^+$ , nella direzione *streamwise*, vicino a parete per Stokes elevati si ha un andamento buono, ma non ottimale tanto quanto per altri Stokes inferiori. Questo potrebbe essere dovuto ad una maggiore inerzia della particella, la quale vicino a parete è caratterizzata da una velocità maggiore nella direzione  $x$  e da velocità inferiori nelle altre due direzioni, rispetto a particelle con inerzia inferiore. Rispetto alla DNS, le concentrazioni sembrano essere ottime lontano da parete per Stokes più piccoli, mentre per Stokes più elevati il modello differisce maggiormente. Vicino a parete l'effetto è contrario, ossia sembra ci sia un comportamento migliore a Stokes più elevati e peggiore a Stokes più bassi.

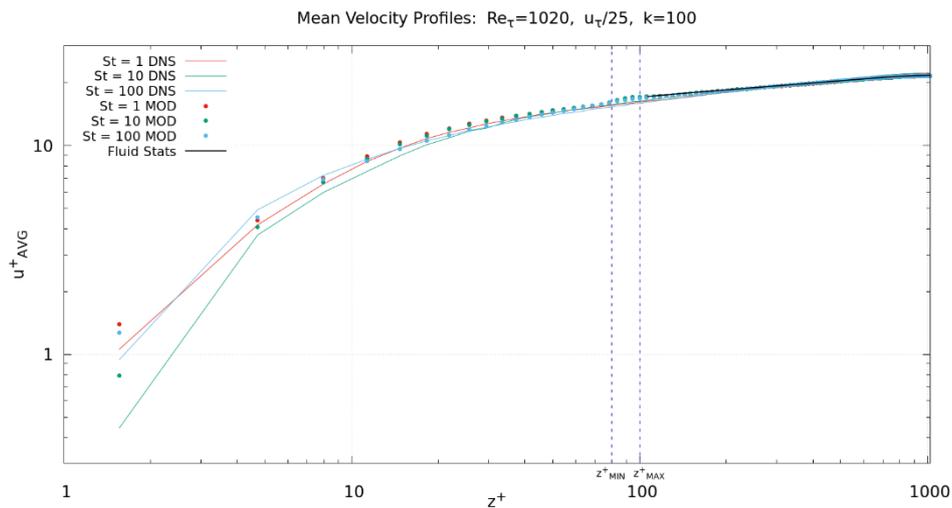


Figura 88. Caso 9: Velocità media delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 100000$ . Modello ottimizzato.

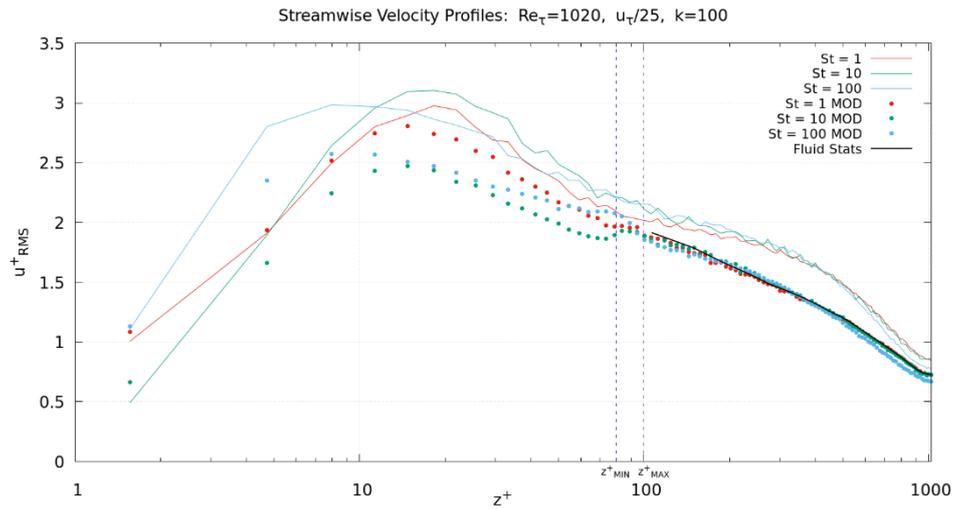


Figura 89. Caso 9: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione assiale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 100000$ . Modello ottimizzato.

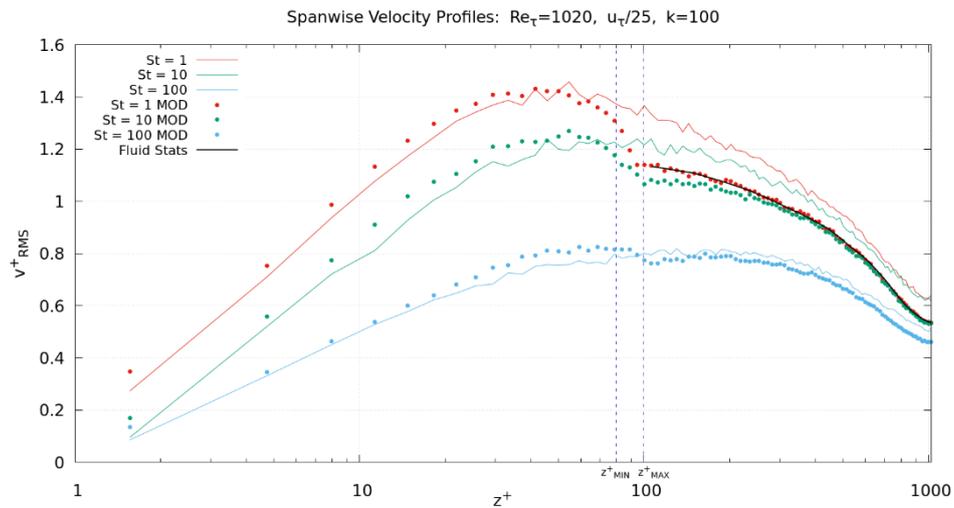


Figura 90. Caso 9: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione trasversale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 100000$ . Modello ottimizzato.

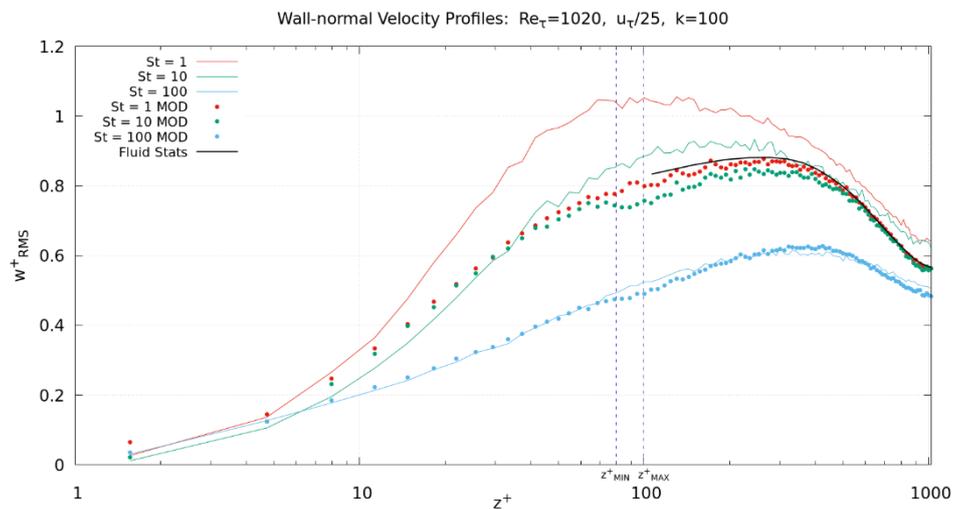


Figura 91. Caso 9: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione normale a parete, in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 100000$ . Modello ottimizzato.

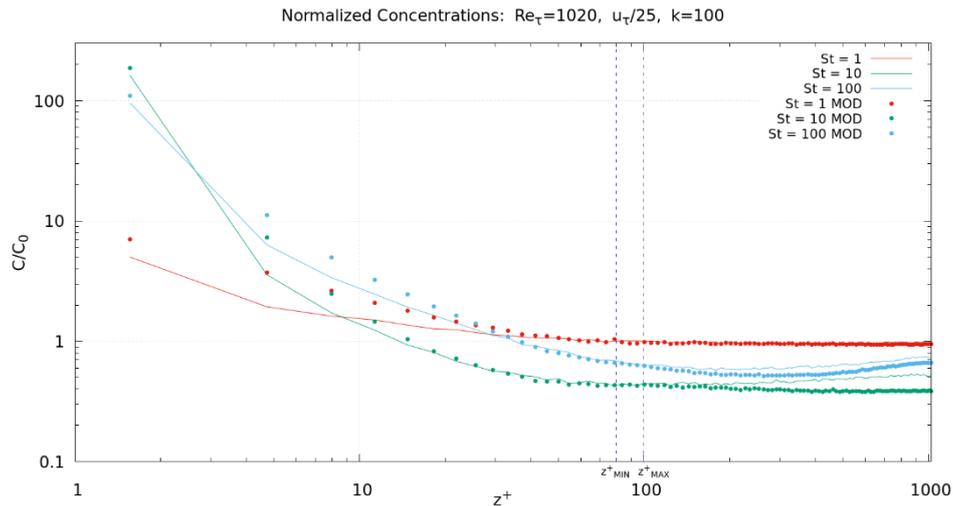


Figura 92. Caso 9: Concentrazioni normalizzate delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 100000$ . Modello ottimizzato.

Nell'ultimo caso considerato per la macroarea A), si ottengono risultati in termini di velocità pressoché identici al nono caso, con alcune piccolissime variazioni quasi impercettibili in alcuni punti, molto probabilmente dovute alla statistica. Anche in questo caso, la direzione assiale non presenta miglioramenti rispetto a quanto descritto per il caso precedente. Invece, le concentrazioni normalizzate hanno un andamento che differisce in modo notevole. In particolare, lontano da parete si ottengono risultati davvero migliori per numeri di Stokes più elevati, che sembrano seguire l'andamento rappresentato dalla DNS. Vicino a parete, per piccoli Stokes si nota un comportamento molto simile al precedente, in quanto le concentrazioni si allontanano leggermente dai valori ottimali.

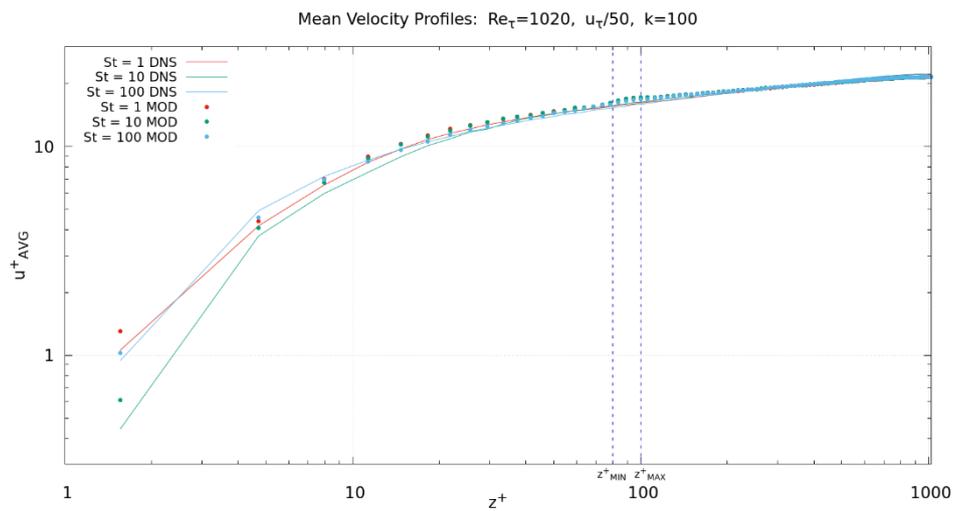


Figura 93. Caso 10: Velocità media delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 100000$ . Modello ottimizzato.

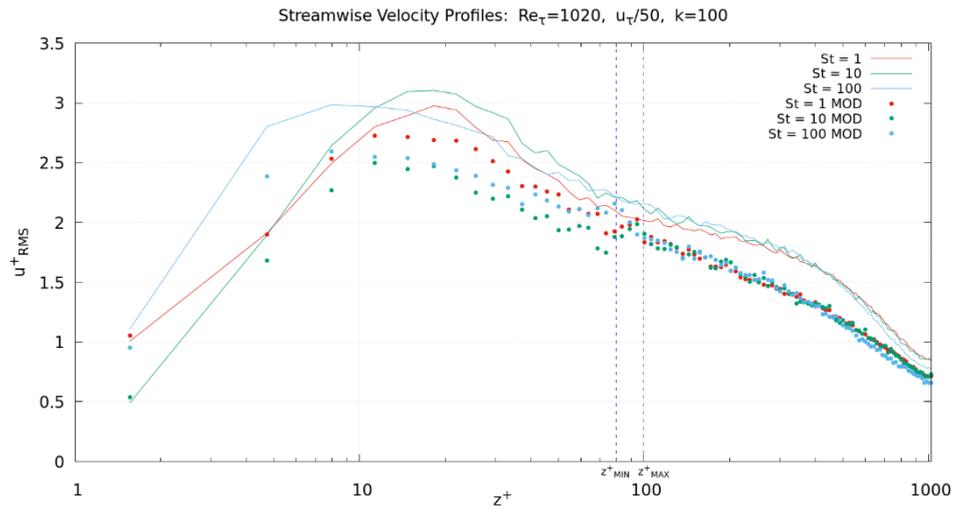


Figura 94. Caso 10: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione assiale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 100000$ . Modello ottimizzato.

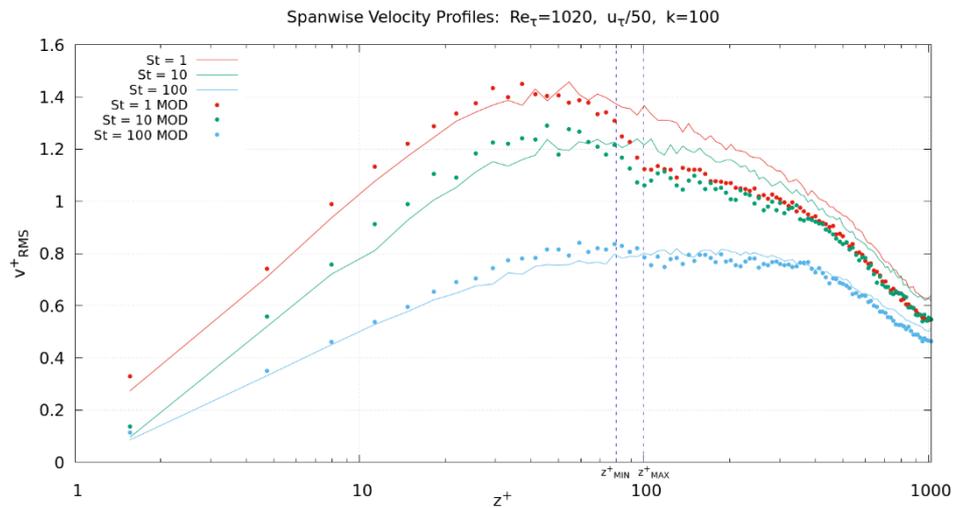


Figura 95. Caso 10: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione trasversale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 100000$ . Modello ottimizzato.

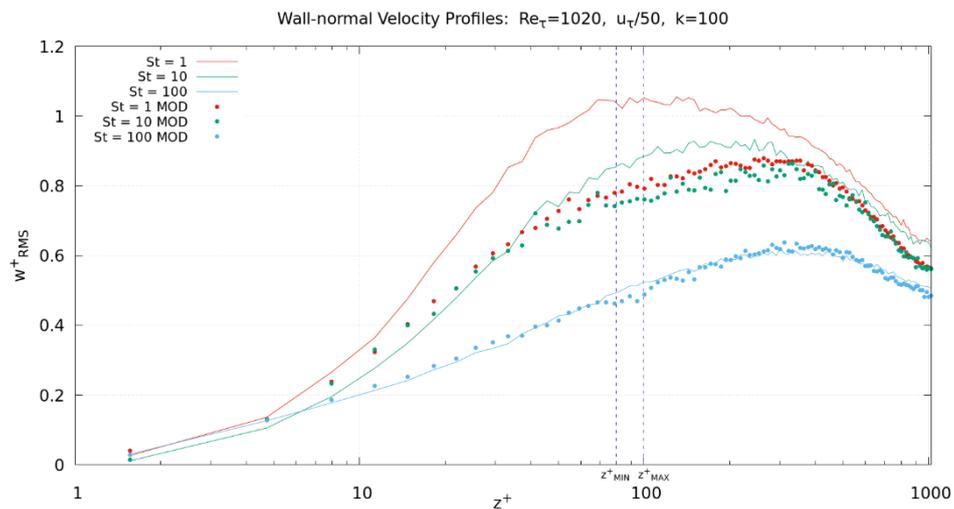


Figura 96. Caso 10: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione normale a parete, in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 100000$ . Modello ottimizzato.

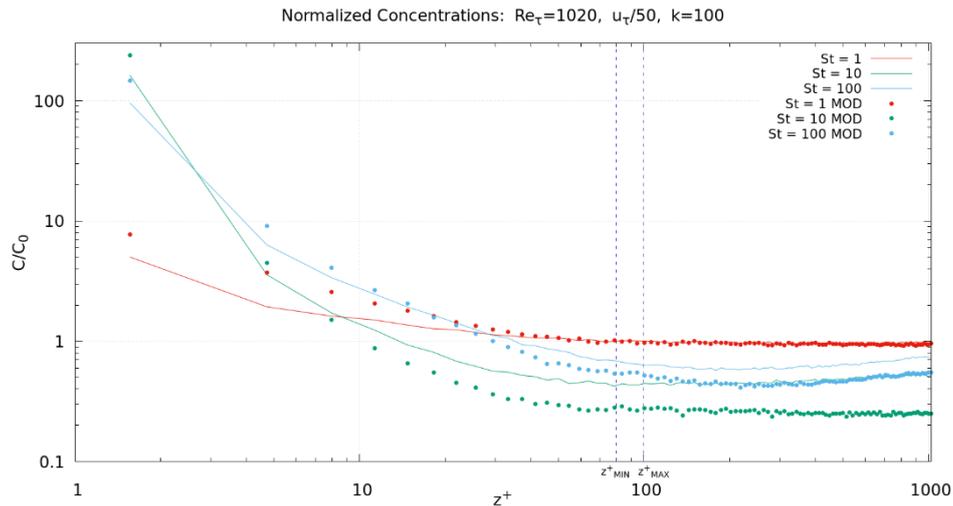


Figura 97. Caso 10: Concentrazioni normalizzate delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 100000$ . Modello ottimizzato.

In quest'ultimo caso, si è voluto utilizzare il post-processore al fine di ottenere alcune rappresentazioni realistiche delle particelle solide che vengono trasportate dal fluido all'interno del canale turbolento.

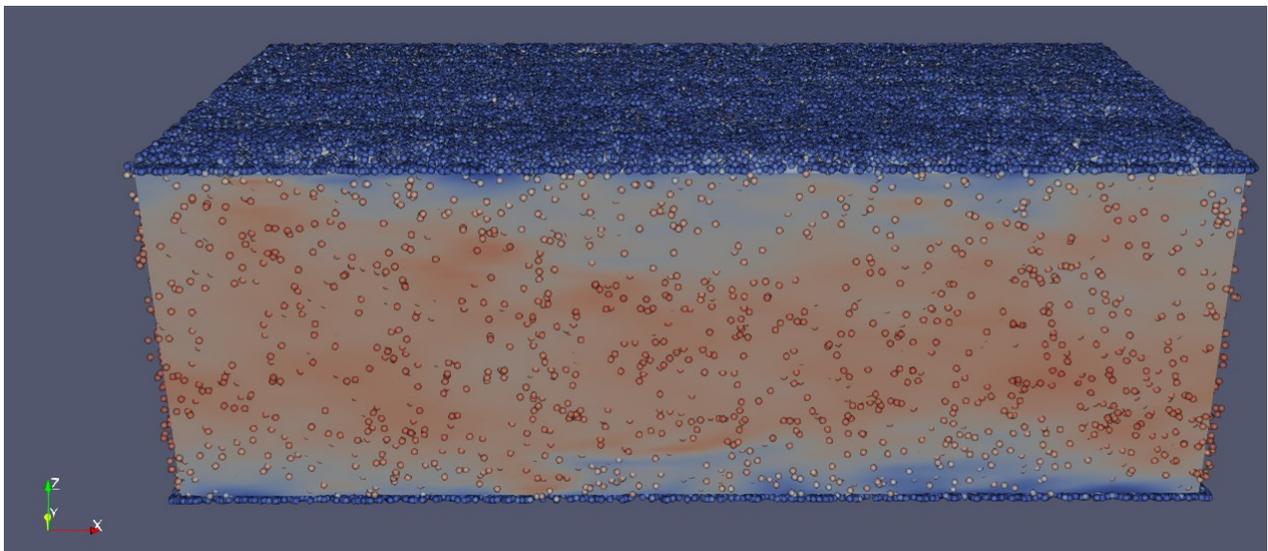


Figura 98. Rappresentazione grafica, mediante Paraview, del fenomeno simulato nella direzione x-z. Le particelle (piccole sfere) sono immerse in un flusso (gassoso) turbolento. In realtà, le particelle sono di dimensioni molto inferiori; per permettere una visualizzazione migliore, si è aumentato il loro diametro.

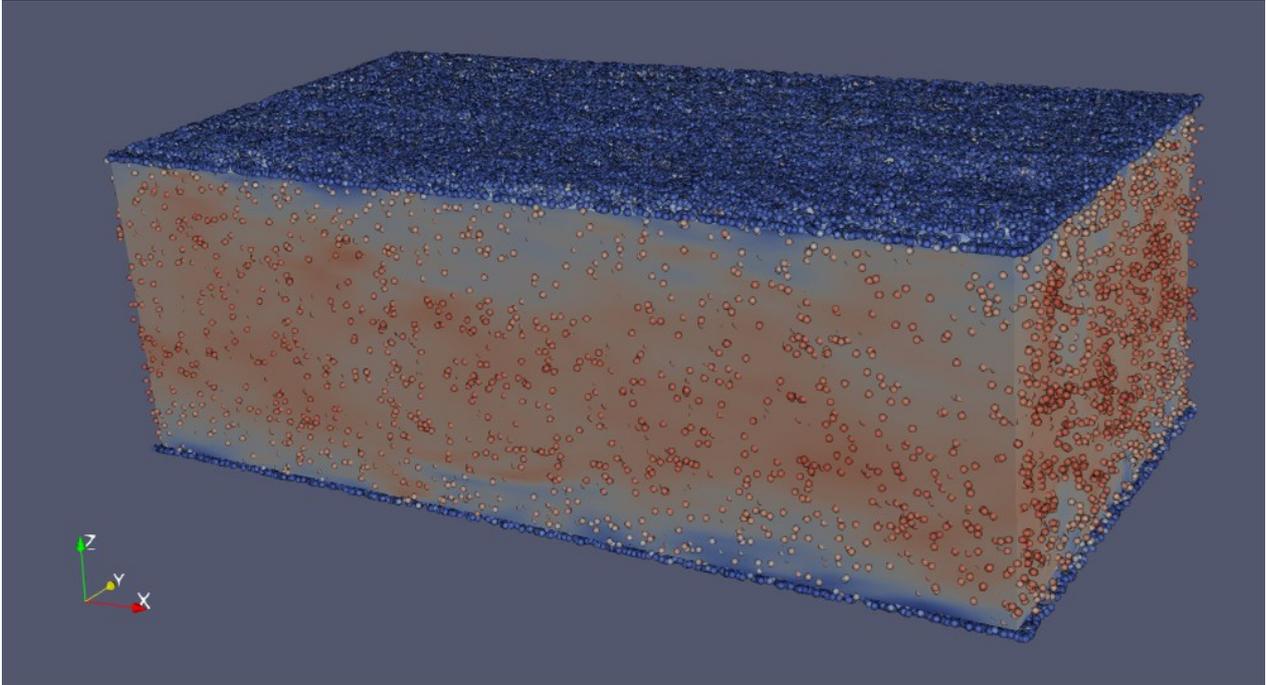


Figura 99. Rappresentazione grafica, mediante Paraview, del fenomeno simulato, in tutte le direzioni. Le particelle (piccole sfere) sono immerse in un flusso (gassoso) turbolento. In realtà, le particelle sono di dimensioni molto inferiori; per permettere una visualizzazione migliore, si è aumentato il loro diametro.

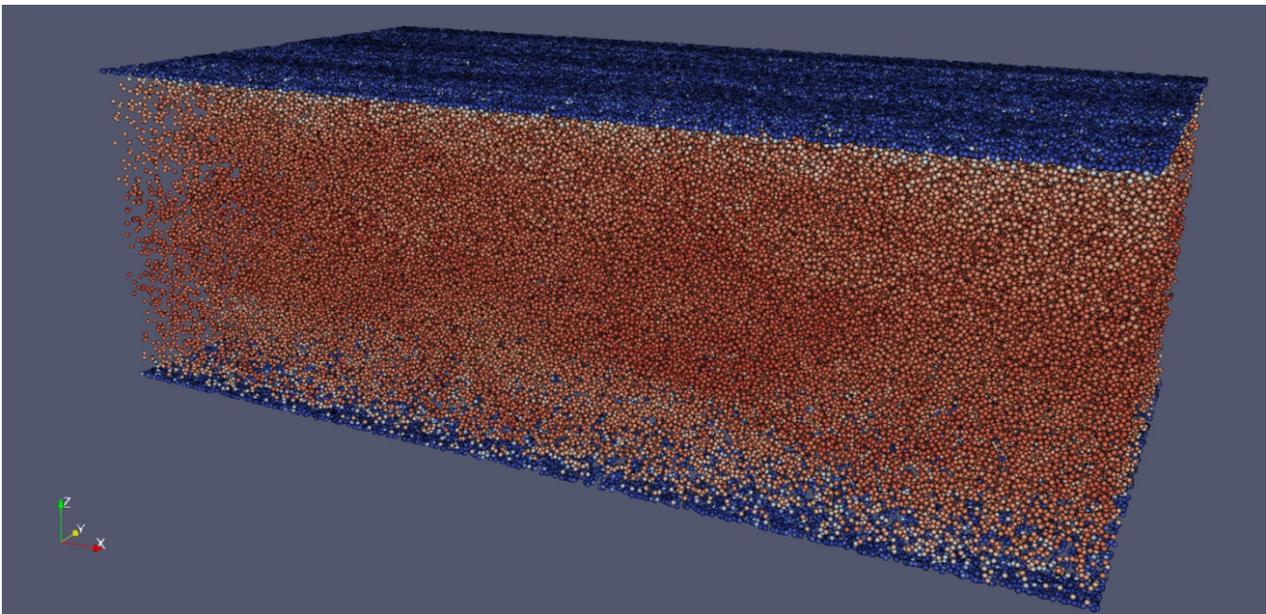


Figura 100. Rappresentazione grafica, mediante Paraview, delle sole particelle, in tutte le direzioni. In realtà, le particelle sono di dimensioni molto inferiori; per permettere una visualizzazione migliore, si è aumentato il loro diametro.

## 5.2 CASO A): ERRORI

Al fine di valutare in modo migliore le differenze tra i casi studiati in precedenza, è stata svolta un'analisi sugli errori medi percentuali relativi allo scostamento tra i risultati ottenuti dal modello implementato e quelli disponibili dalla DNS. Gli errori sono stati mediati lungo tutta la lunghezza del canale in direzione normale a parete, per ciascuna velocità e per ciascuno Stokes considerato. È stato sviluppato un algoritmo iterativo dinamico che calcolasse gli errori medi percentuali a partire dai file di output generati dal modello precedente, contenenti le velocità e le concentrazioni risultanti, e li confrontasse tra di loro, con lo scopo di restituire quale tra i casi considerati porta ai risultati migliori. L'errore percentuale  $\varepsilon$  è stato calcolato rispetto ai risultati DNS come segue:

$$\varepsilon = \frac{|var_{MOD} - var_{DNS}|}{var_{DNS}} \cdot 100$$

Dove  $var_{MOD}$  indica i risultati ottenuti dal modello in termini di velocità e concentrazioni, mentre  $var_{DNS}$  i dati disponibili dalla DNS.

<i>Casi</i>	<i>Stokes</i>	$\varepsilon(U^+)$ [%]	$\varepsilon(u_{RMS}^+)$ [%]	$\varepsilon(v_{RMS}^+)$ [%]	$\varepsilon(w_{RMS}^+)$ [%]	$\varepsilon(C/C_0)$ [%]
CASO 1	1	2.74	14.01	9.93	14.27	5.97
	10	3.32	17.04	9.11	8.58	43.30
	100	2.56	15.71	5.28	2.71	23.24
CASO 2	1	2.73	13.79	10.38	15.65	5.58
	10	3.67	16.83	9.46	9.82	16.15
	100	2.76	15.73	5.70	3.04	10.88
CASO 3	1	2.56	15.17	11.42	14.45	6.80
	10	3.15	18.30	11.14	9.90	61.93
	100	2.60	16.79	7.28	3.91	28.68
CASO 4	1	2.77	15.59	11.28	14.78	6.67
	10	3.49	18.74	10.95	10.12	44.13
	100	2.56	16.08	7.81	3.58	21.98
CASO 5	1	2.64	15.11	11.77	14.78	6.51
	10	3.37	18.40	10.10	9.46	44.54
	100	2.53	16.44	7.58	3.33	21.96
CASO 6	1	2.64	14.93	11.41	16.17	6.06
	10	3.62	17.57	10.58	9.94	16.43
	100	2.76	16.50	7.21	3.46	11.14
CASO 7	1	2.85	15.28	11.66	18.71	6.23
	10	4.53	19.00	10.96	11.33	36.57
	100	3.31	16.18	7.85	3.78	14.04

Gli errori percentuali più piccoli sono stati evidenziati nella precedente tabella, per ogni grandezza e per ogni numero di Stokes considerato. Si è voluto calcolare anche gli errori mediati non solo lungo

la lunghezza del canale, ma anche mediati tra i tre numeri di Stokes differenti, ottenendo un errore medio per ognuna delle cinque grandezze presenti:

<i>Casi</i>	$\epsilon_{St}(U^+)$ [%]	$\epsilon_{St}(u_{RMS}^+)$ [%]	$\epsilon_{St}(v_{RMS}^+)$ [%]	$\epsilon_{St}(w_{RMS}^+)$ [%]	$\epsilon_{St}(C/C_0)$ [%]
<b>CASO 1</b>	2.87	15.59	8.11	8.52	24.17
<b>CASO 2</b>	3.05	15.45	8.51	9.50	10.87
<b>CASO 3</b>	2.77	16.76	9.95	9.42	32.47
<b>CASO 4</b>	2.94	16.81	10.01	9.49	24.26
<b>CASO 5</b>	2.85	16.65	9.82	9.19	24.34
<b>CASO 6</b>	3.01	16.33	9.73	9.86	11.21
<b>CASO 7</b>	3.56	16.82	10.16	11.27	18.95

Anche in questo caso, sono stati evidenziati gli errori mediati più piccoli o che non si discostassero troppo dal valore minimo.

Infine, è stato effettuato un ultimo calcolo sugli errori, i quali sono stati nuovamente mediati, a partire da questi errori mediati sia lungo la lunghezza che per i vari Stokes, anche tra tutte le diverse grandezze che caratterizzano i risultati. In questo modo, si riesce a comprimere all'interno di un parametro un errore mediato che rappresenta l'errore generale mediato di un determinato caso. Il calcolo degli errori è stato effettuato sia considerando solamente le prime quattro grandezze (velocità) sia attraverso una media che coinvolge tutte le grandezze del problema.

<i>Casi</i>	$\epsilon_{St,AVG}$ ( Solo Velocità ) [%]	$\epsilon_{St,AVG}$ ( Tutte le grandezze ) [%]
<b>CASO 1</b>	8.77	11.85
<b>CASO 2</b>	9.13	9.48
<b>CASO 3</b>	9.72	14.27
<b>CASO 4</b>	9.81	12.70
<b>CASO 5</b>	9.63	12.57
<b>CASO 6</b>	9.73	10.03
<b>CASO 7</b>	10.45	12.15

Si osserva che il caso 1 e 2 danno luogo, in termini di velocità, agli errori inferiori, i quali sono molto simili se confrontati tra questi due casi. Invece, per quanto riguarda le concentrazioni, gli errori relativi ad esse sono davvero molto elevati per il primo caso, con un errore medio per  $St = 10$  che arriva fino al 43% circa. Anche per il caso numero 6 si ottengono errori, in termini di concentrazioni, molto ridotti, evidenziando l'insensibilità del modello a variazione del fattore di amplificazione  $k$ .

Per una maggior comprensione a livello visivo, si sono riportati gli errori mediati percentuali all'interno di un istogramma. Si nota la discordanza elevata soprattutto per le concentrazioni normalizzate, le quali mostrano un picco relativo all'errore calcolato per il terzo caso, il quale

permette di affermare che, all'aumentare del fattore  $h$  (da 25 a 100) presente a denominatore nel parametro  $u_\tau/h$  proporzionale al rumore Gaussiano, si ha un aumento dell'errore sulla concentrazione, il quale sembra diventare molto importante.

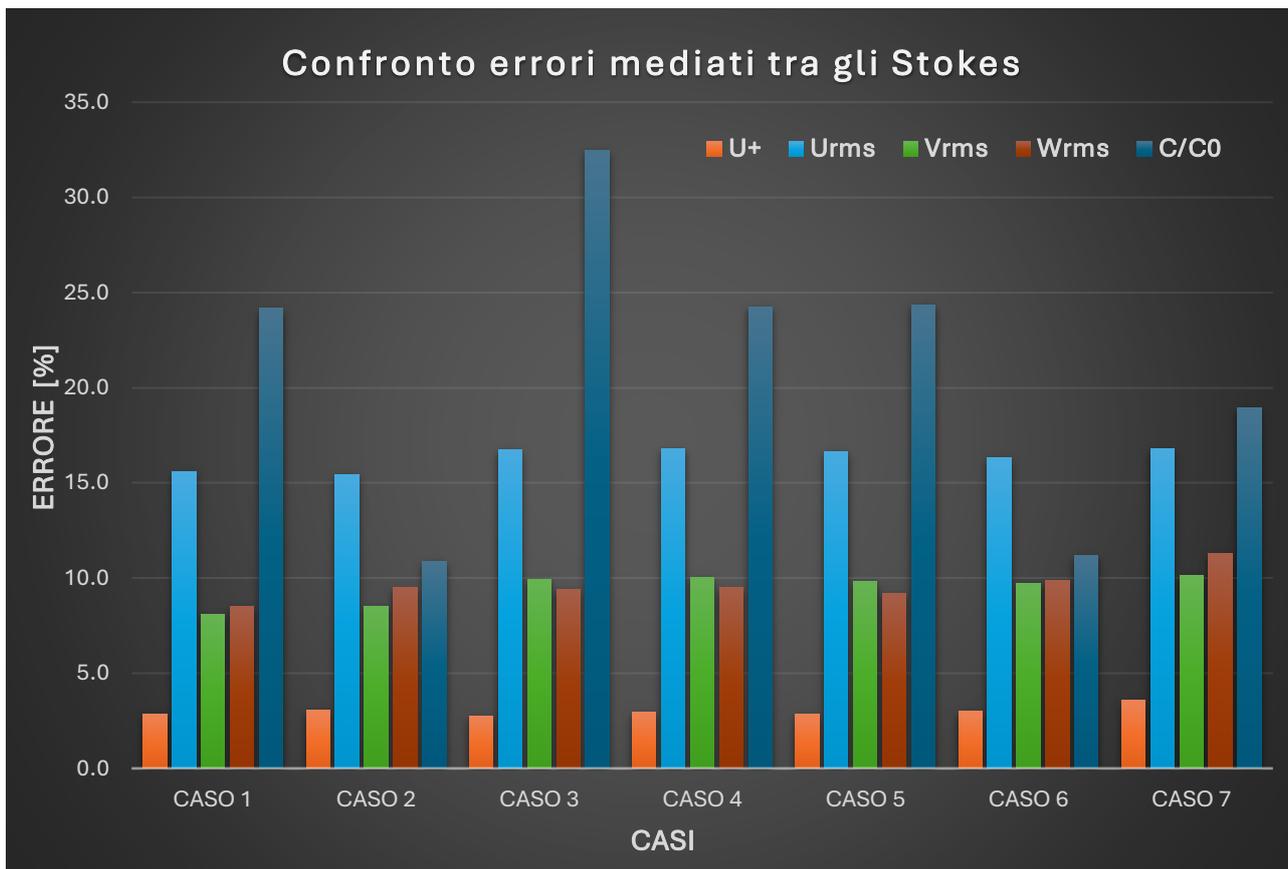


Figura 101. Confronto visivo, per i primi 7 casi, tra gli errori percentuali mediati prima lungo il canale e poi tra gli Stokes.

Si è riportato un secondo istogramma, al fine di osservare l'influenza delle concentrazioni nel calcolo degli errori e nell'accuratezza dei risultati ottenuti dal modello. Nonostante il primo caso mostri un errore mediato tra le velocità pari al più piccolo, se si considerasse anche l'errore dovuto alle concentrazioni si incrementerebbe notevolmente l'errore mediato generale. Nel secondo caso, invece, si può notare un andamento dell'errore che pare mostrare ottimi risultati in entrambi i casi, in quanto gli errori mediati rispettivamente senza e con le concentrazioni risultano essere molto simili tra loro. Anche il sesto caso presenta errori non troppo elevati come negli altri casi, in particolare in termini di concentrazioni.

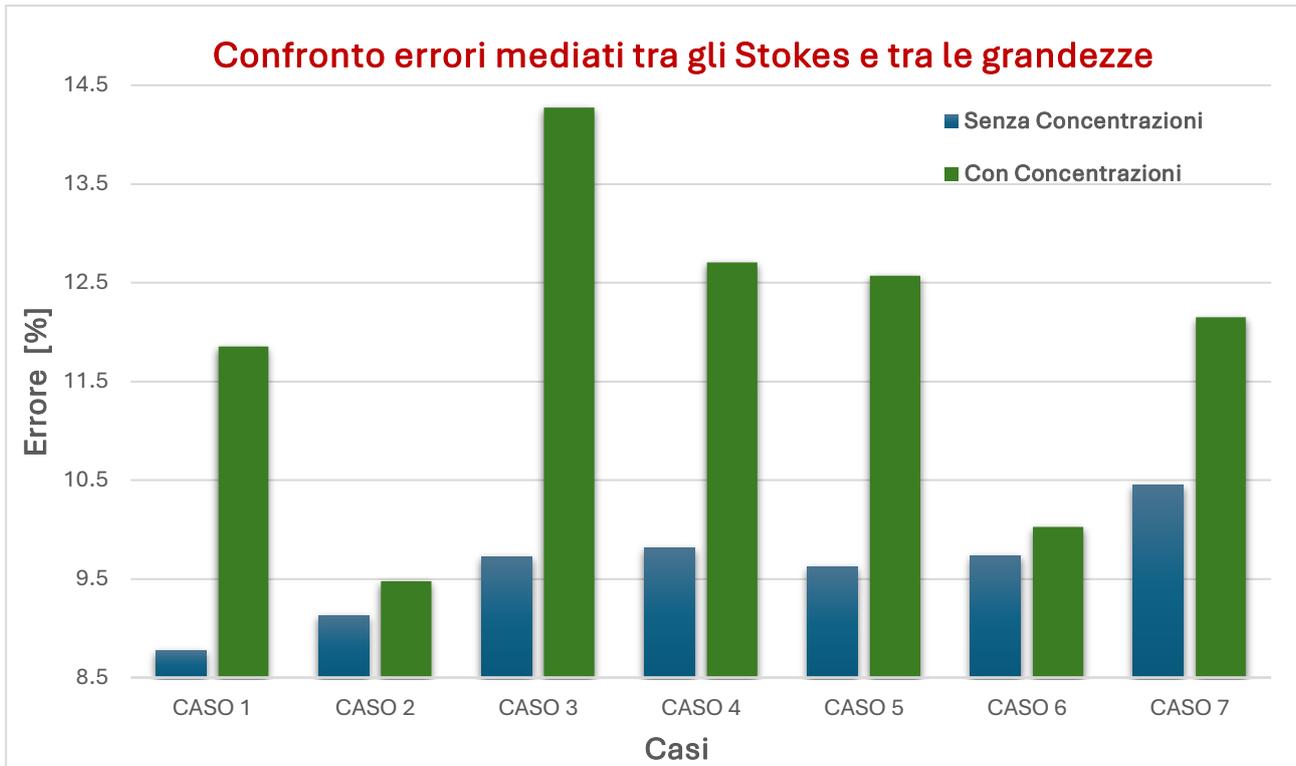


Figura 102. Istogramma che mostra l'andamento, per i primi 7 casi, degli errori percentuali mediati a partire da una media lungo il canale, seguita da una tra gli Stokes, fino ad una tra le stesse grandezze. Rispettivamente, il caso blu indica la media solo tra le velocità, mentre il verde considera anche le concentrazioni nella media.

Data la notevole accuratezza dei risultati ottenuti nei primi due casi, si è voluto concentrarsi solamente sui primi due e performare un confronto tra questi in termini di errori percentuali rispetto ai risultati DNS. Si sono effettuate due nuove simulazioni, fino ad arrivare ad un passo temporale pari a  $\Delta t = 100000$ , al fine di permettere un confronto più uniforme e corretto.

Casi	Stokes	$\epsilon(U^+)$ [%]	$\epsilon(u_{RMS}^+)$ [%]	$\epsilon(v_{RMS}^+)$ [%]	$\epsilon(w_{RMS}^+)$ [%]	$\epsilon(C/C_0)$ [%]	$\epsilon_{AVG}$ (Solo velocità) [%]	$\epsilon_{AVG}$ (Tutte grandezze) [%]
CASO 9	1	2.72	14.07	9.61	14.13	5.84	10.13	9.28
	10	3.35	17.21	8.69	8.57	44.01	9.45	16.36
	100	2.53	15.78	4.71	2.74	23.92	6.44	9.94
CASO 10	1	2.77	13.44	10.19	14.96	5.62	10.34	9.40
	10	3.64	16.61	9.46	8.99	15.84	9.68	10.91
	100	2.77	15.33	5.60	2.69	11.47	6.60	7.57

Nella tabella precedente sono stati evidenziati gli errori inferiori confrontati tra i due casi; all'interno di questa, gli errori sono stati mediati solamente lungo la direzione normale a parete del canale, considerando Stokes differenti. Le ultime due colonne indicano gli errori mediati, oltre che in lunghezza, anche in termini di grandezze, rispettivamente senza e con gli errori relativi alle concentrazioni normalizzate. Si può osservare una distribuzione degli errori mediati in percentuale abbastanza simile tra i due casi, senza una prevalenza netta di uno sull'altro, in quanto gli errori sulle

velocità differiscono di valori molto piccoli e il primo caso ne sembra trarre vantaggio, mentre sulle concentrazioni si ottengono errori molto differenti, soprattutto per gli Stokes più elevati, che avvantaggiano il secondo caso.

Come svolto in precedenza, si è voluto effettuare un confronto sugli errori mediati tra i diversi numeri di Stokes, mantenendo gli errori separati per ogni grandezza differente considerata.

Casi	$\epsilon_{St}(U^+)$ [%]	$\epsilon_{St}(u_{RMS}^+)$ [%]	$\epsilon_{St}(v_{RMS}^+)$ [%]	$\epsilon_{St}(w_{RMS}^+)$ [%]	$\epsilon_{St}(C/C_0)$ [%]	$\epsilon_{St,AVG}$ (Solo velocità) [%]	$\epsilon_{St,AVG}$ (Tutte grandezze) [%]
CASO 9	2.87	15.69	7.67	8.48	24.59	8.68	11.86
CASO 10	3.06	15.13	8.42	8.88	10.98	8.87	9.29

Nella tabella precedente, sono stati mediati prima gli errori tra i diversi Stokes e, in seguito, sono stati mediati ancora una volta gli errori tra le grandezze stesse (ultime due colonne), rispettivamente per i casi senza e con l'errore sulle concentrazioni.

Gli errori ottenuti sono rappresentabili, nuovamente, mediante colonne all'interno di un istogramma, come riportato di seguito.

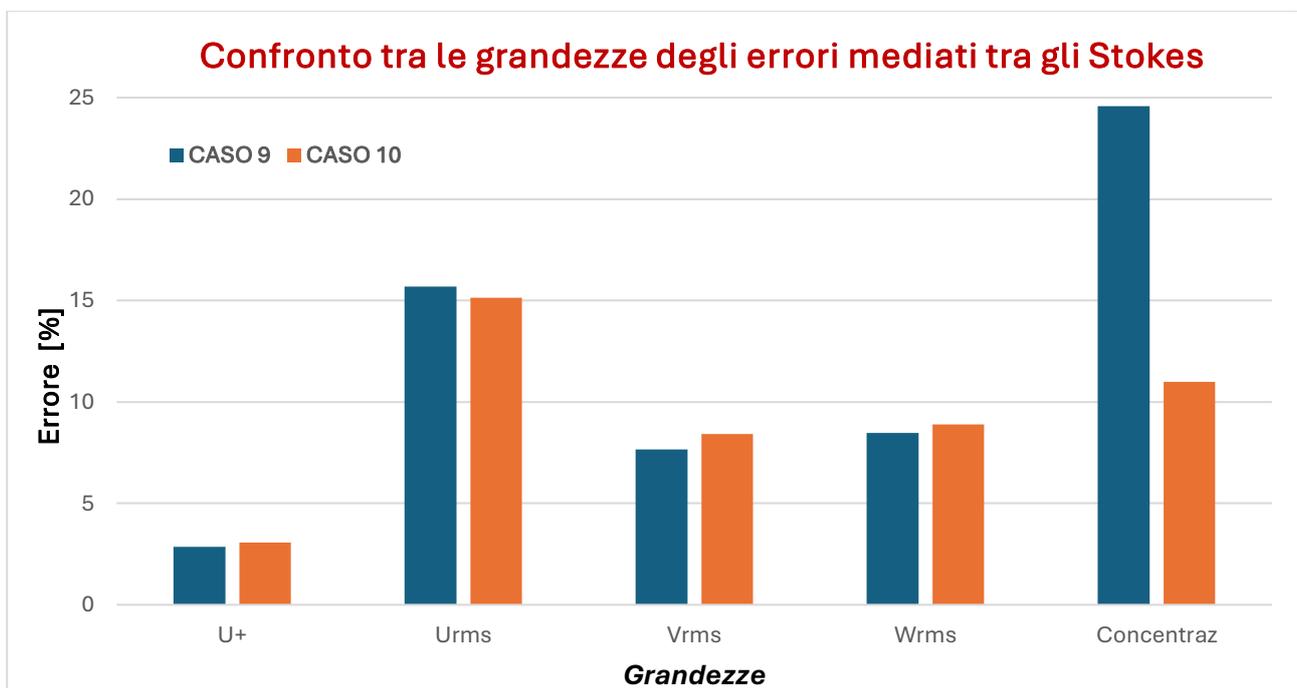


Figura 103. Confronto, in un istogramma, tra gli errori percentuali mediati prima lungo il canale e poi tra gli Stokes:  $\epsilon_{St}$ . A differenza dei casi precedenti, si sono raggruppate le colonne in funzione delle grandezze considerate.

È possibile osservare la differenza pressoché nulla tra gli errori percentuali mediati per le varie velocità tra i due casi, sintomo di un ottimo funzionamento del modello al variare del parametro  $h$ , il quale garantisce di ottenere risultati, in termini di velocità, ottimali. Per quanto riguarda le concentrazioni, si ottengono errori mediati tra gli Stokes parecchio differenti, in quanto al variare del

parametro  $h$ , al contrario di quanto affermato prima sulle velocità, i risultati sulle concentrazioni cambiano in modo consistente.

Ancora una volta, si sono riportati, all'interno di un istogramma, gli errori mediati lungo il canale, tra gli Stokes ed infine tra le grandezze stesse.

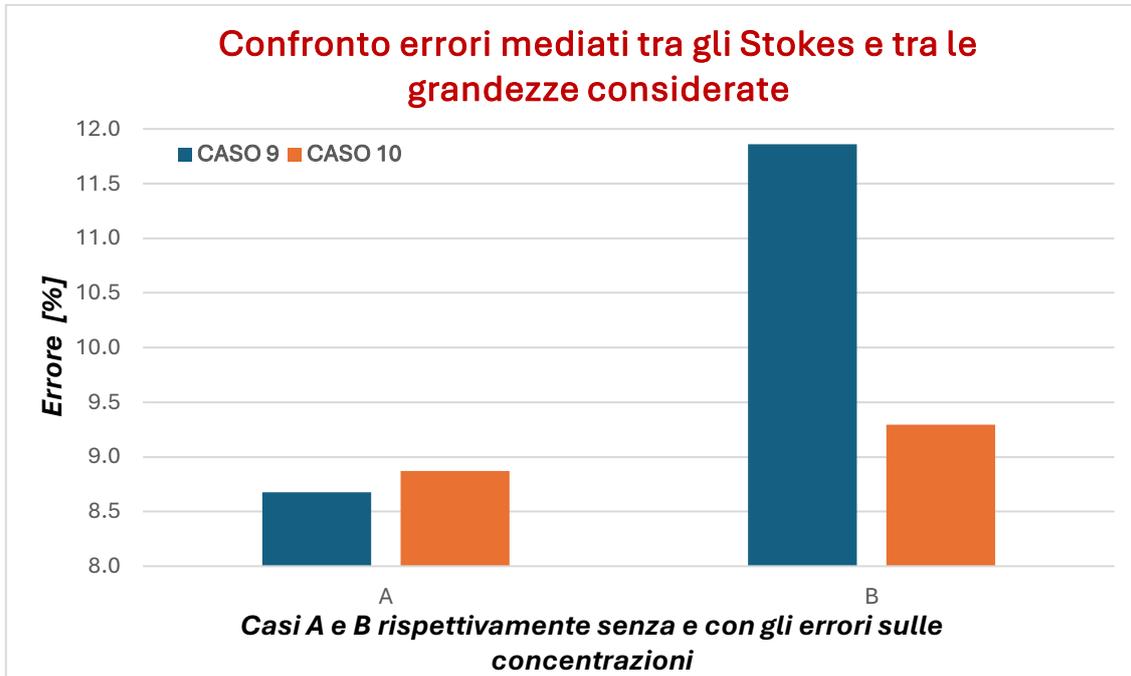


Figura 104. Istogramma che mostra l'andamento degli errori percentuali mediati a partire da una media lungo il canale, seguita da una tra gli Stokes, fino ad una tra le stesse grandezze. Rispettivamente, il caso A indica la media solo tra le velocità, mentre il caso B considera anche le concentrazioni nella media.

La differenza mostra, ancora una volta, l'influenza che il parametro  $h$  ha sull'accuratezza dei risultati del modello.

Per la macroarea A), nella quale è stato analizzato solamente  $Re_{\tau} = 1020$ , si può affermare che il modello è stato validato e tarato correttamente, e i risultati migliori sono stati ottenuti in corrispondenza al seguente valore dei parametri:  $h = 25$  e  $k = 100$ .

### 5.3 CASO B): $Re_\tau = 550$

Per la macroarea B), caratterizzata da un numero di Reynolds d'attrito differente pari a  $Re_\tau = 550$ , si è cercato di validare e tarare il modello implementato nella terza fase descritta in precedenza. Rispetto alla macroarea precedente, si è adottato un approccio leggermente diverso: è sempre stato fatto variare il parametro  $h$ , presente all'interno del fattore  $u_\tau/h$ , il quale è proporzionale al rumore Gaussiano e influenza la formula relativa alla velocità  $w_{FUN}$ ; gli altri parametri modificati sono rappresentati dai valori che definiscono la zona di transizione. Invece, il fattore di amplificazione si è mantenuto costante durante le simulazioni, in quanto la sua influenza, come dimostrato all'interno dei risultati ottenuti dalla macroarea A), sembra essere meno efficace nella taratura del modello. Si è assunto  $k = 100$ . I parametri sono stati fatti variare adottando differenti combinazioni tra loro stessi; perciò, diversi valori sono stati assegnati a  $h$ ,  $z_{MIN}^+$  e  $z_{MAX}^+$ .

Anche in questo caso, i risultati sono stati ottenuti per numeri di Stokes viscosi pari a  $St^+ = 1, 10, 100$ . Si ricorda che, per definizione, lo Stokes varia essenzialmente in funzione del diametro della particella e della scala temporale adottata. Sono stati mantenuti costanti i numeri di Stokes, mentre è stata modificata la dimensione della particella, la quale aumenta al diminuire del numero di Reynolds d'attrito. Questo rappresenta il caso in cui le particelle sono caratterizzate da un'inerzia più elevata rispetto alle altre due macroaree analizzate.

I risultati sono stati ottenuti in termini di velocità e di concentrazioni normalizzate, e sono stati confrontati con quelli ottenuti mediante simulazioni DNS.

La risoluzione adottata per il modello è stata mantenuta costante, con un numero di celle della griglia pari a  $48 \times 48 \times 48$ . Nonostante la risoluzione specificata sia molto bassa, in questo caso anche il numero di Reynolds considerato si abbassa (quasi si dimezza rispetto alla prima macroarea) e, di conseguenza, il costo computazionale dato dalla simulazione necessario per ottenere risultati accurati tanto quanto  $Re_\tau = 1020$  diventa più basso. Poiché la turbolenza è meno intensa a numeri di Reynolds più bassi, la simulazione può essere più accurata, in quanto la griglia non deve necessariamente risolvere tutte le piccole turbolenze (le cosiddette "scale fini" della turbolenza), perché queste sono meno importanti a numeri di Reynolds più bassi. Perciò, ci si aspetta di ottenere risultati più aderenti a quelli identificati dalla DNS.

Nel primo caso esaminato, sono stati utilizzati i valori dei parametri classici:  $h = 50$ ,  $z_{MIN}^+ = 80$  e  $z_{MAX}^+ = 100$ . Rispetto ai dati DNS, le velocità seguono abbastanza bene l'andamento, anche se per la velocità assiale si ha uno scostamento vicino a parete. Le concentrazioni non sembrano approssimare nel migliore dei modi i risultati, come dimostrato dalla DNS. È necessario far variare i parametri e cercare di tarare in modo più accurato il modello.

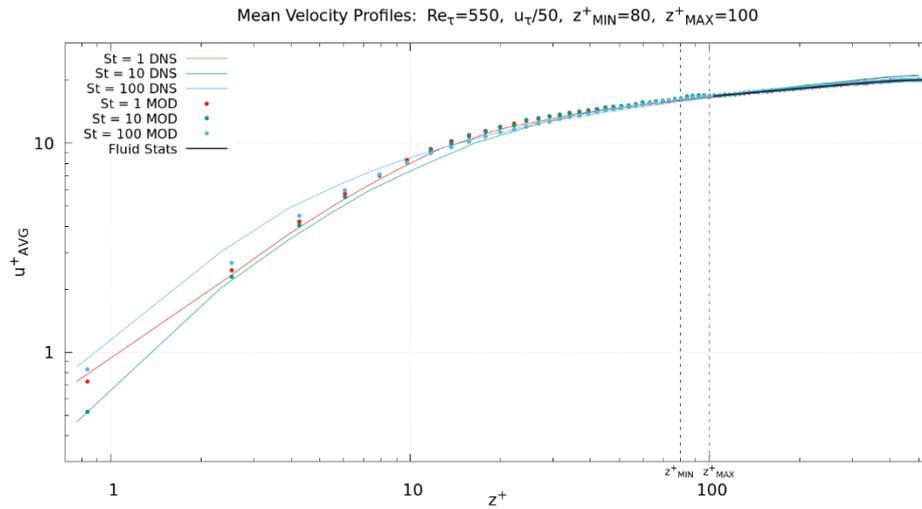


Figura 105. Caso 1: Velocità media delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

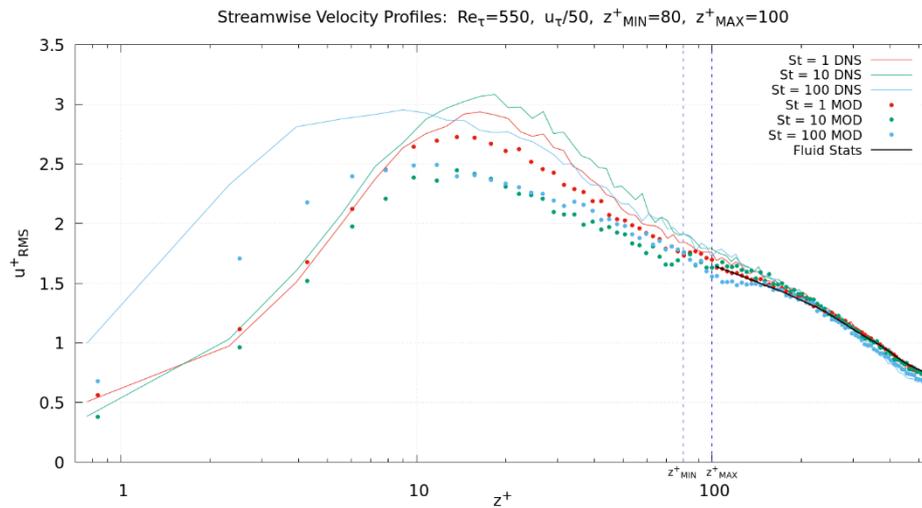


Figura 106. Caso 1: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione assiale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

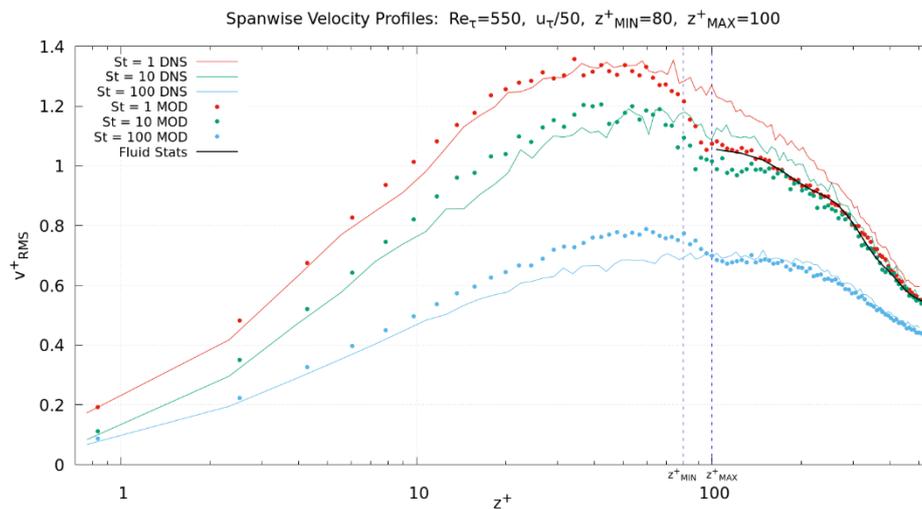


Figura 107. Caso 1: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione trasversale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

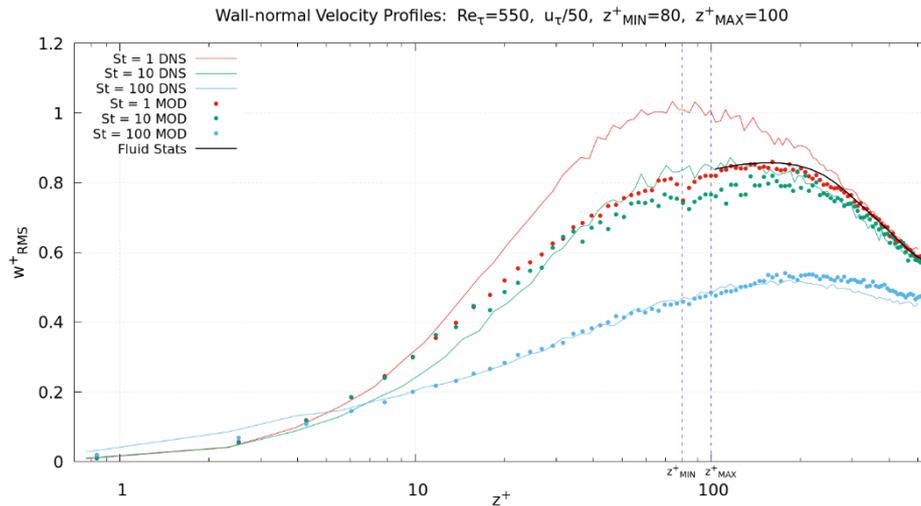


Figura 108. Caso 1: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione normale a parete, in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

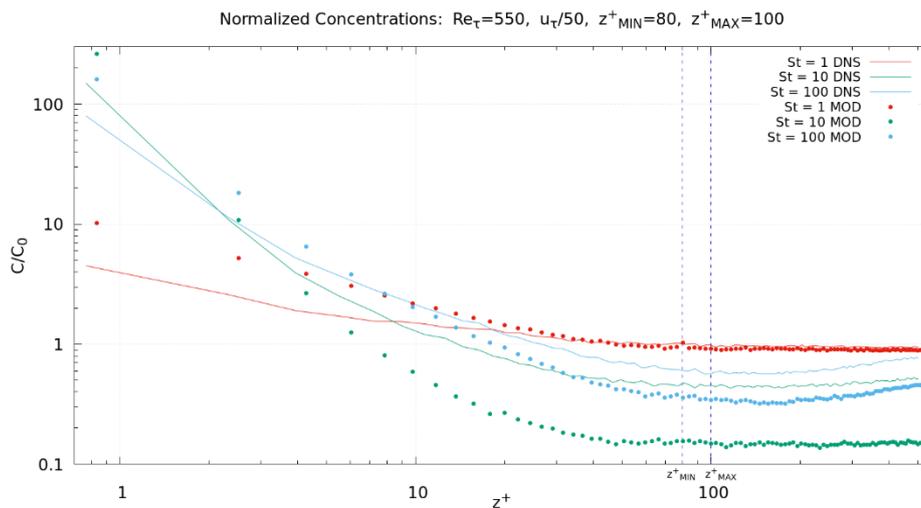


Figura 109. Caso 1: Concentrazioni normalizzate delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

Nel secondo caso, si ha  $h = 25$ ,  $z^+_{MIN} = 80$  e  $z^+_{MAX} = 100$ . Rispetto al caso precedente, le velocità rimangono pressoché identiche, cioè il modello sembra riportare risultati abbastanza buoni se confrontato con i dati DNS. Invece, le concentrazioni migliorano leggermente e si avvicinano ai risultati corretti. Questo è dovuto ad un abbassamento del parametro  $h$ , sul quale si potrà agire ulteriormente.

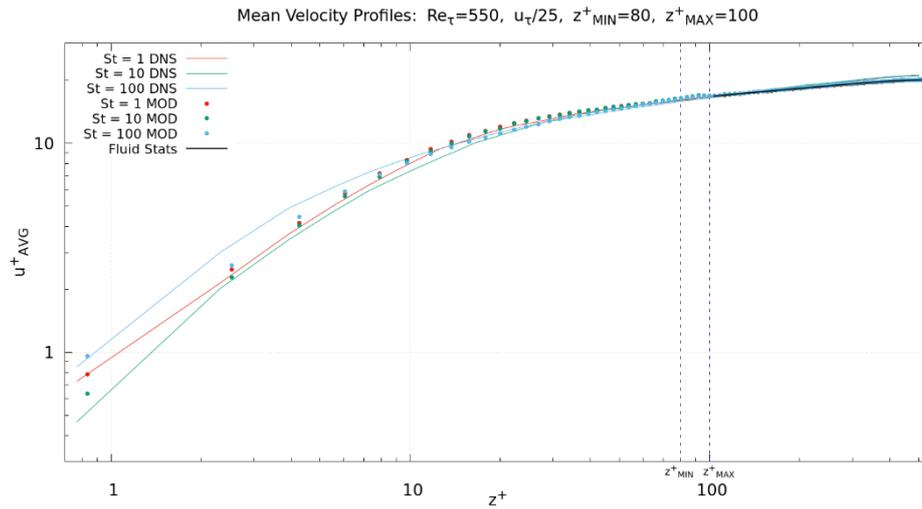


Figura 110. Caso 2: Velocità media delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

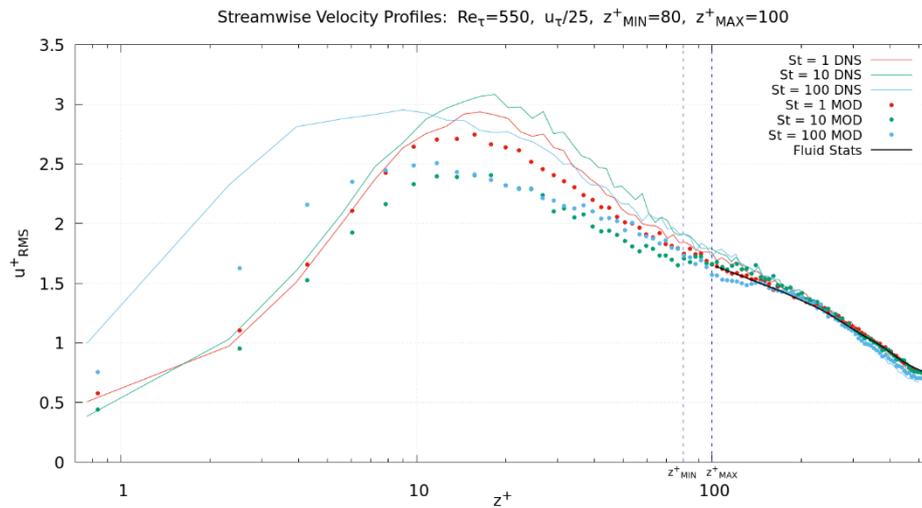


Figura 111. Caso 2: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione assiale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

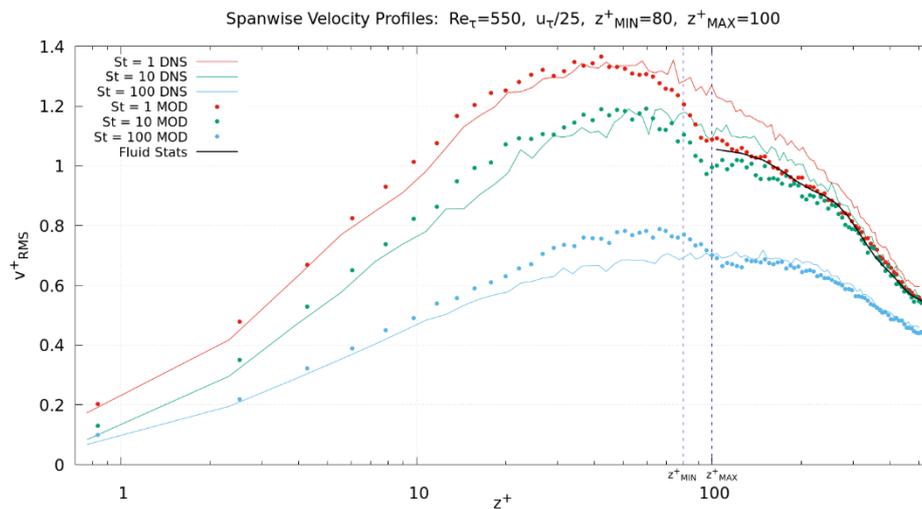


Figura 112. Caso 2: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione trasversale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

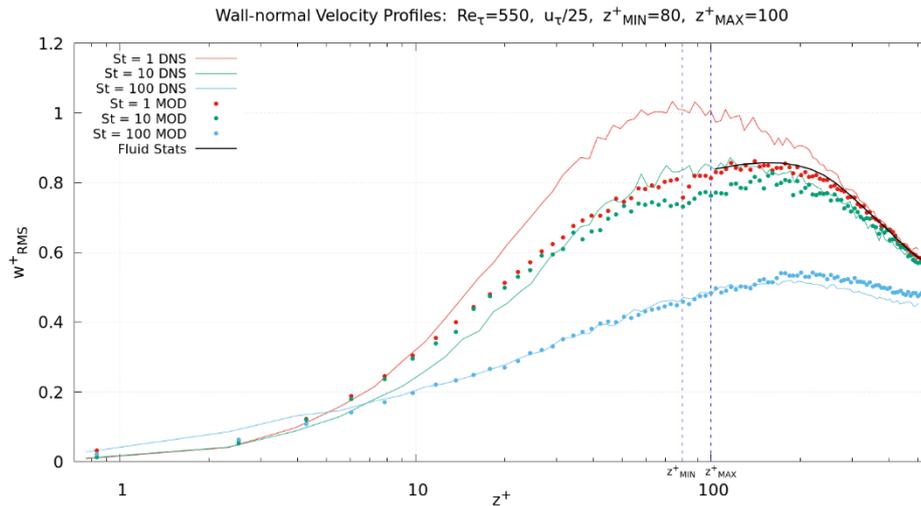


Figura 113. Caso 2: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione normale a parete, in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

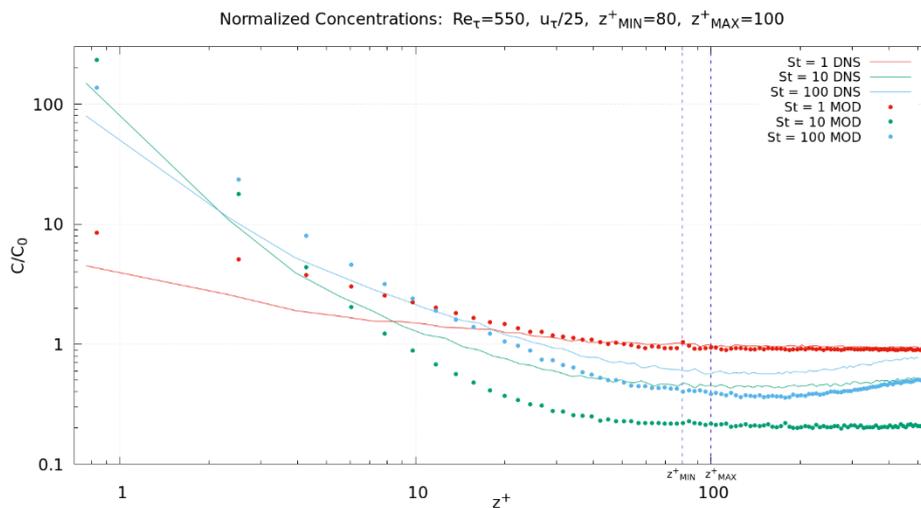


Figura 114. Caso 2: Concentrazioni normalizzate delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

Nel terzo caso, si ha  $h = 50$ ,  $z_{MIN}^+ = 44$  e  $z_{MAX}^+ = 55$ , nel quale la zona di transizione è stata circa dimezzata in modo proporzionale al numero di Reynolds  $Re_\tau$ .

Rispetto ai casi precedenti, le velocità variano in alcuni punti all'allontanamento delle particelle da parete, con un andamento a tratti leggermente peggiore e a tratti leggermente migliore. Tuttavia, si può notare che nella regione di transizione si ottiene un andamento non proprio ottimale, e questo vale in particolare per  $St^+ = 10$ . Le concentrazioni risultano essere praticamente simili al primo caso e quindi leggermente peggiori rispetto al secondo. Si è compreso che è necessario agire su  $h$ , mediante una sua riduzione per ottenere risultati più aderenti alla realtà.

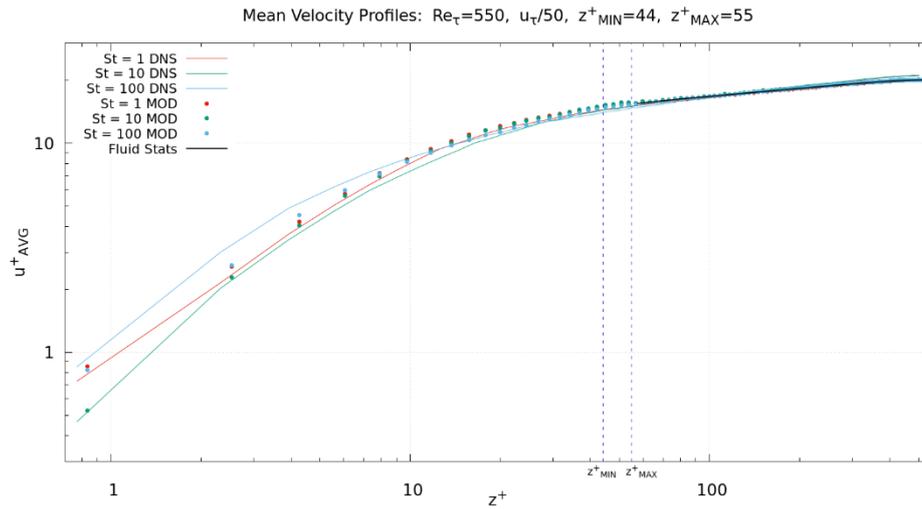


Figura 115. Caso 3: Velocità media delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

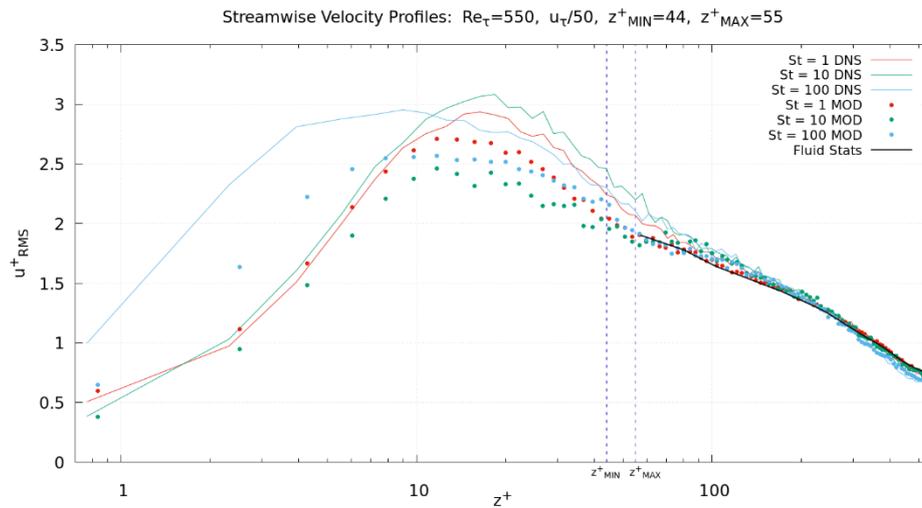


Figura 116. Caso 3: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione assiale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

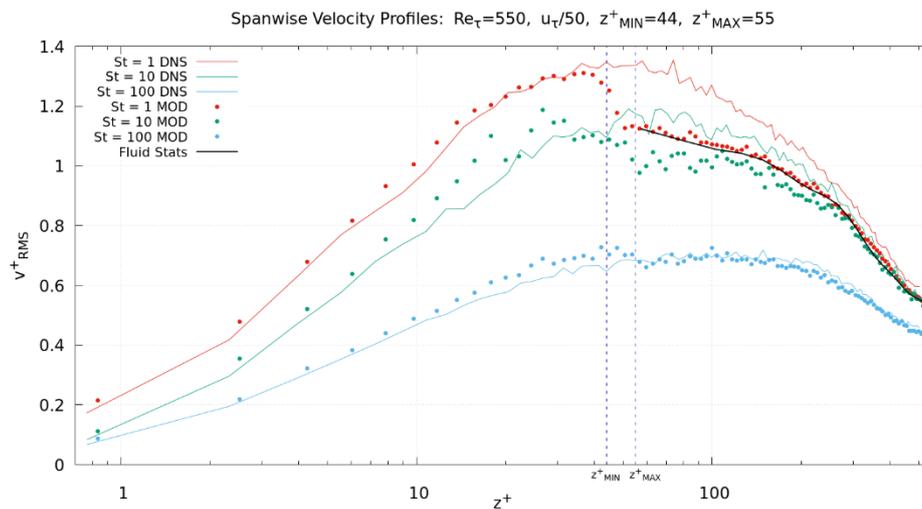


Figura 117. Caso 3: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione trasversale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

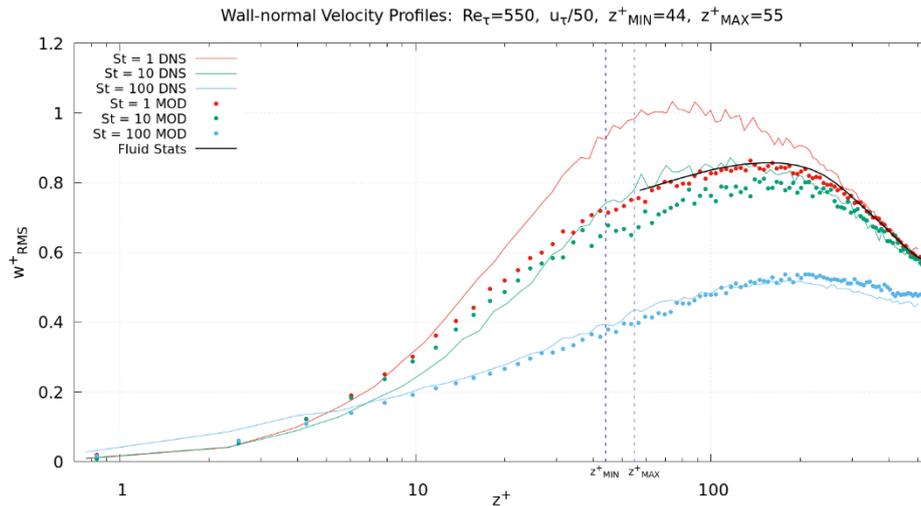


Figura 118. Caso 3: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione normale a parete, in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

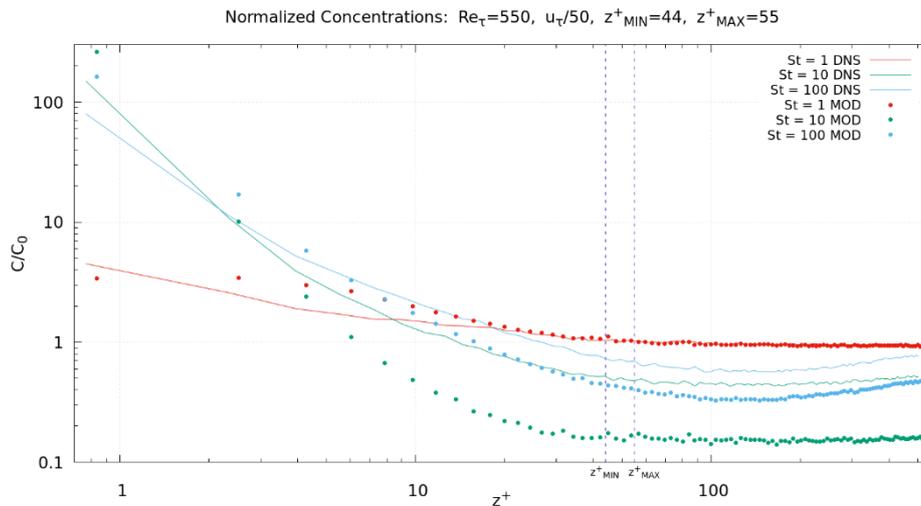


Figura 119. Caso 3: Concentrazioni normalizzate delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

Nel quarto caso, si mantiene la zona di transizione circa dimezzata e si riduce l'altro parametro:  $h = 25$ ,  $z^+_{MIN} = 44$  e  $z^+_{MAX} = 55$ . Le velocità sembrano restare molto simili al caso precedente. Per quanto riguarda le concentrazioni, invece, si ottiene un miglioramento notevole rispetto al primo e al terzo caso, in analogia circa con il secondo caso. Si è deciso di agire ulteriormente sul parametro  $h$  proporzionale al rumore Gaussiano, in quanto sembra necessaria un'ulteriore riduzione al fine di ottenere risultati più ottimali.

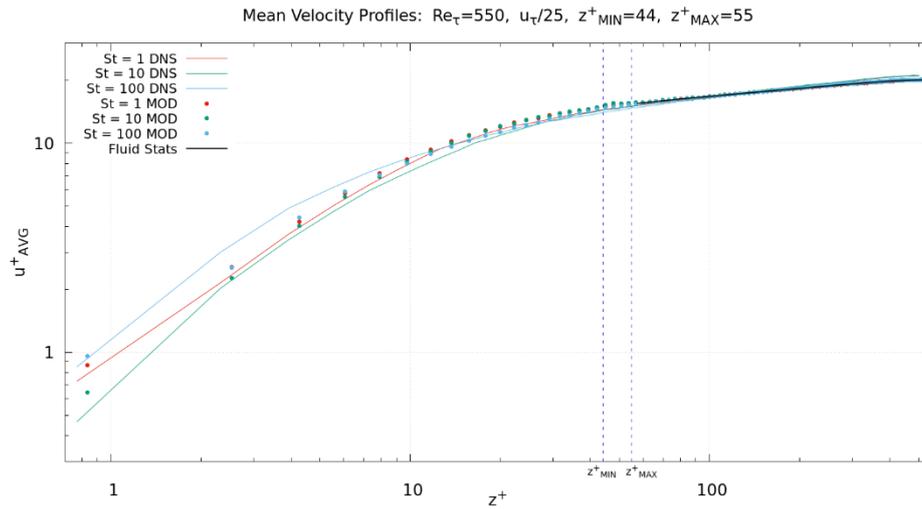


Figura 120. Caso 4: Velocità media delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

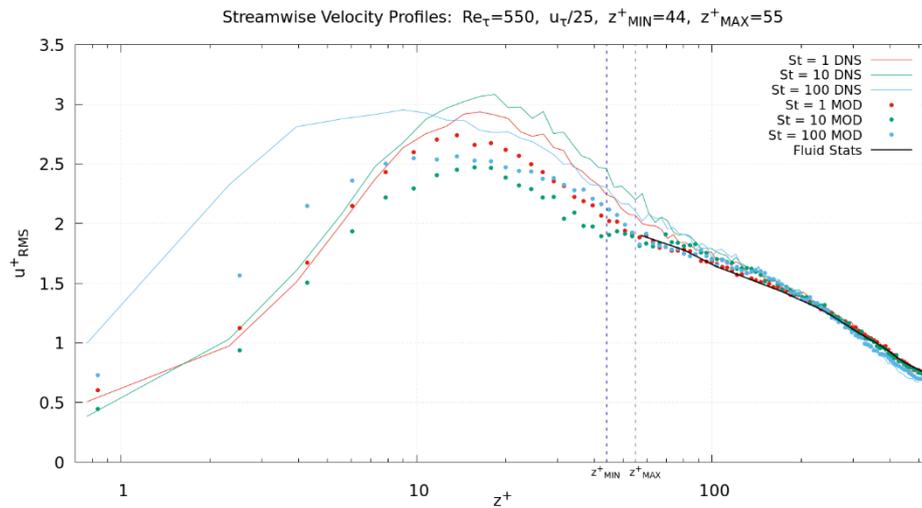


Figura 121. Caso 4: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione assiale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

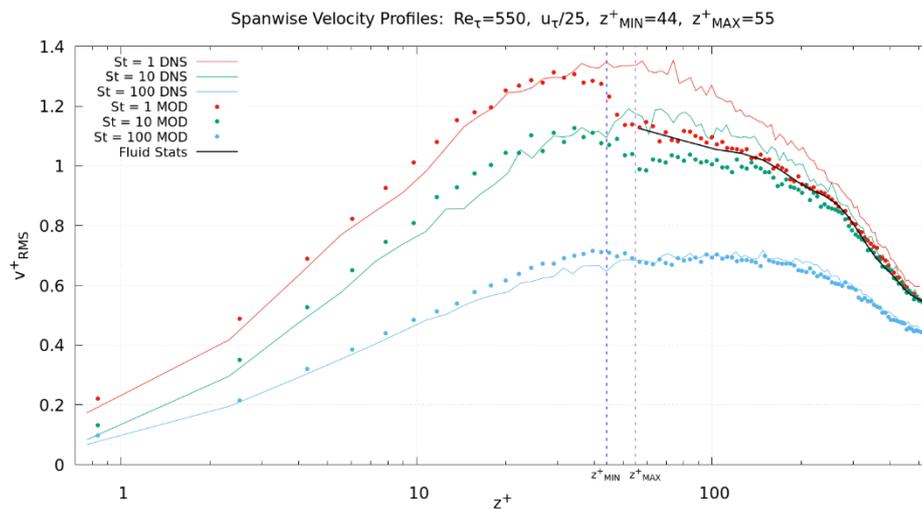


Figura 122. Caso 4: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione trasversale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

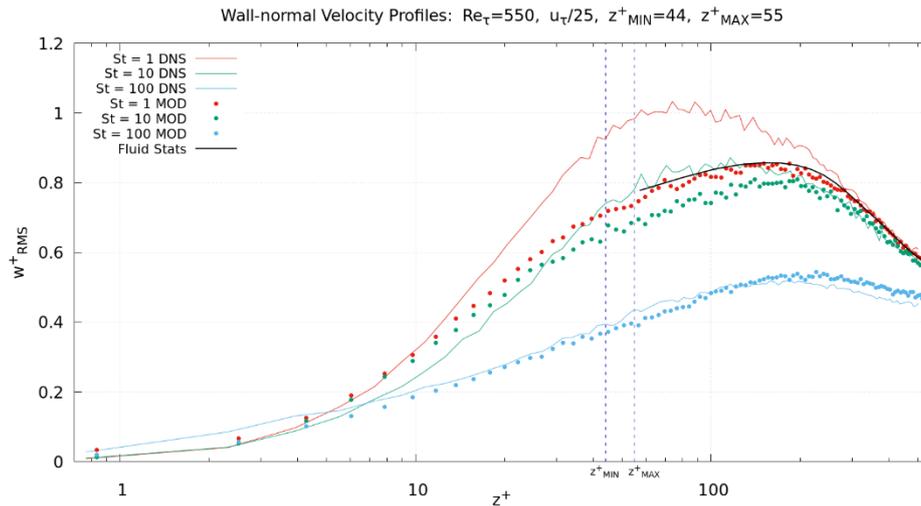


Figura 123. Caso 4: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione normale a parete, in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

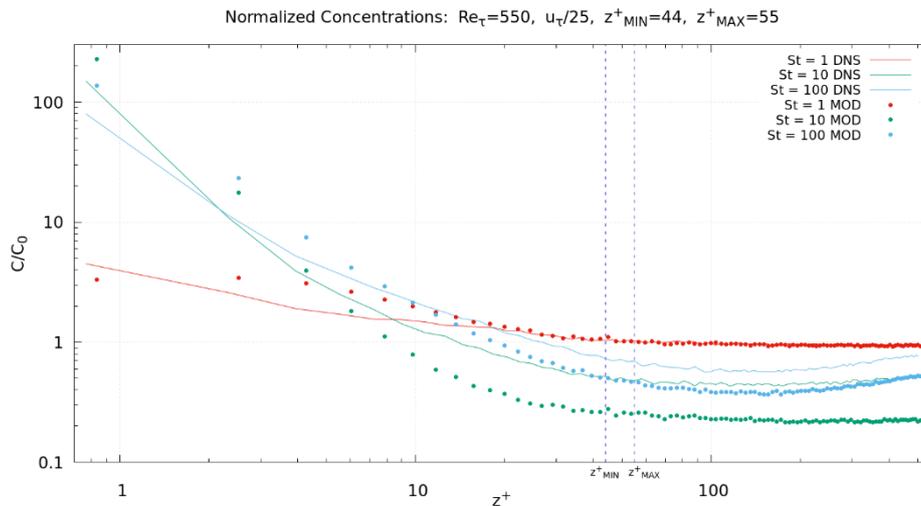


Figura 124. Caso 4: Concentrazioni normalizzate delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

Nel quinto ed ultimo caso, si sono impostati i parametri a  $h = 10$ ,  $z^+_{MIN} = 44$  e  $z^+_{MAX} = 55$ . Le velocità sono sempre molto simili alle precedenti, non essendo caratterizzate da variazioni importanti nel loro andamento. Mentre, per quanto riguarda le concentrazioni, queste migliorano notevolmente, se confrontate con tutti gli altri casi. Il loro andamento si avvicina molto a quello riportato dalla DNS, dimostrando la necessità di effettuare una riduzione del parametro  $h$  per ottenere una rappresentazione più realistica del fenomeno.

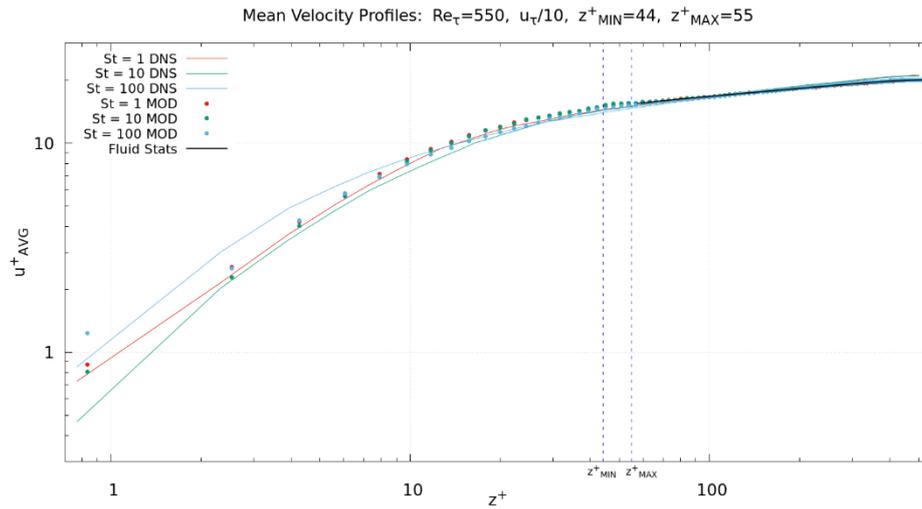


Figura 125. Caso 5: Velocità media delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

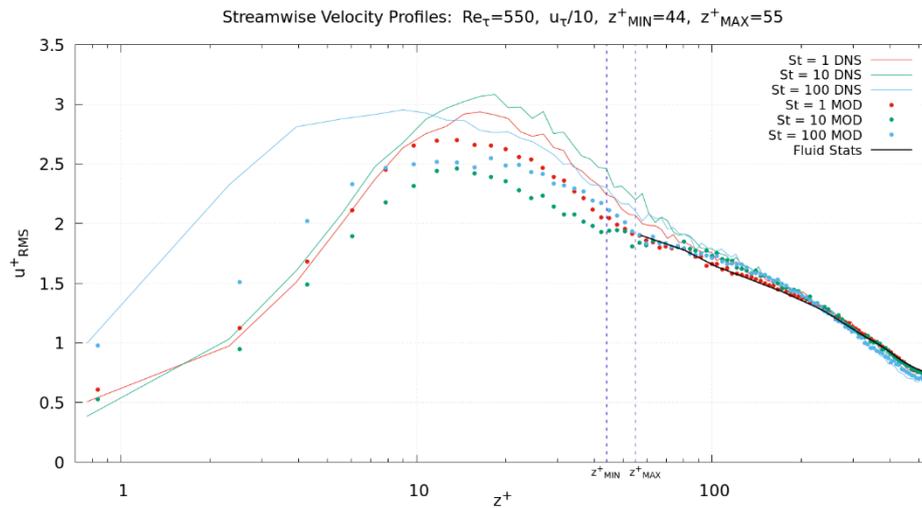


Figura 126. Caso 5: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione assiale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

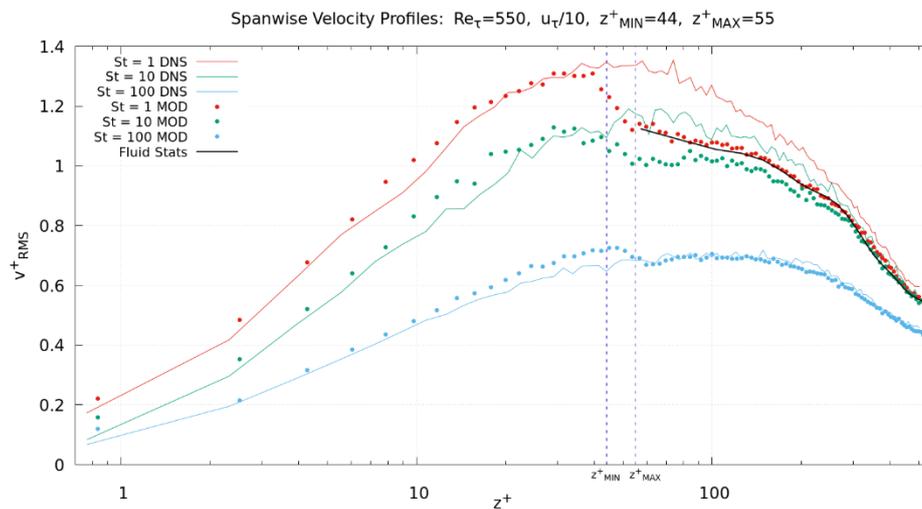


Figura 127. Caso 5: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione trasversale in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

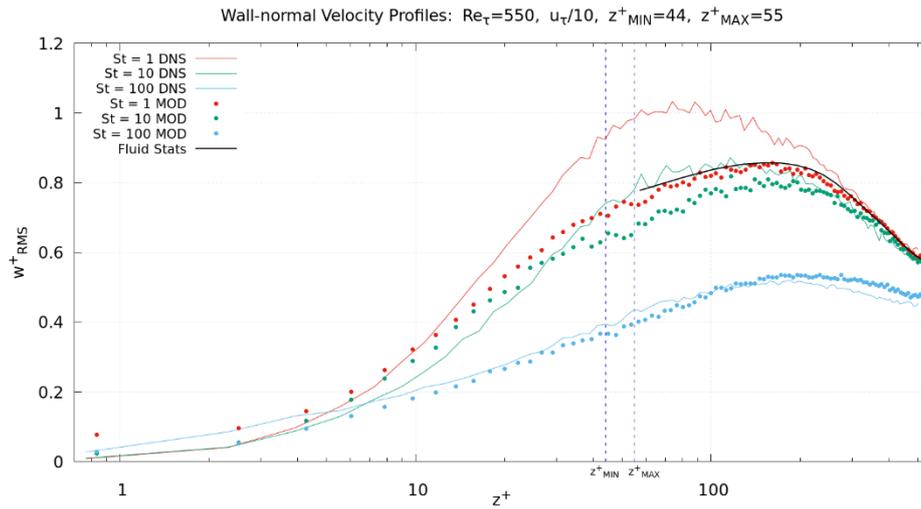


Figura 128. Caso 5: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione normale a parete, in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

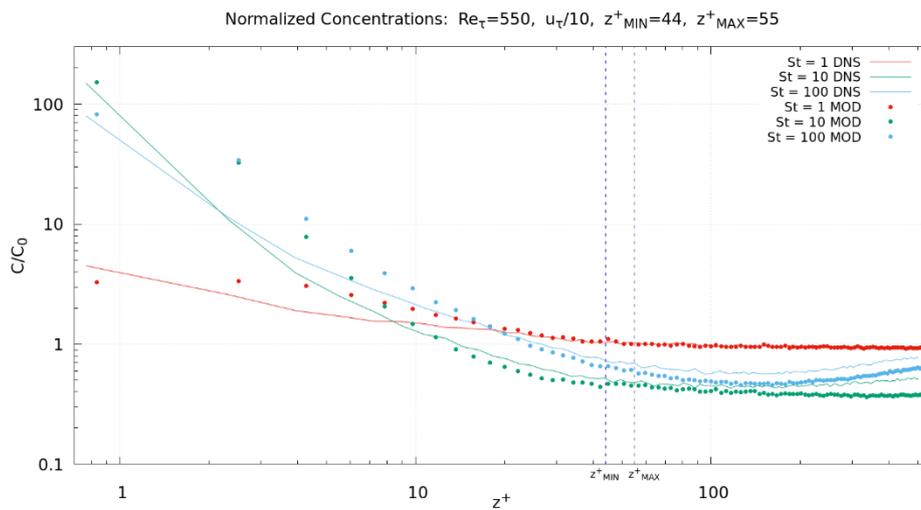


Figura 129. Caso 5: Concentrazioni normalizzate delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con i risultati DNS a Stokes differenti.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

## 5.4 CASO C): $Re_\tau = 2000$

L'ultima analisi effettuata si basa su un numero di Reynolds più elevato, pari a  $Re_\tau = 2000$ .

Come in B), i parametri che sono stati fatti variare includono quello che influenza il rumore Gaussiano, cioè  $h$ , e quelli che caratterizzano la zona di transizione del modello, ossia  $z_{MIN}^+$  e  $z_{MAX}^+$ . Rispetto alle macroree precedenti, si è solamente riportato un andamento qualitativo dei risultati ottenuti dal modello, i quali sono stati confrontati con le statistiche del fluido che caratterizzano la regione lontana da parete (LES).

Le simulazioni sono state eseguite a numeri di Stokes pari a  $St^+ = 1, 10, 100$  (sempre mantenuti fissi). Al contrario del caso in cui  $Re_\tau = 550$ , le particelle sono caratterizzate da un'inerzia ridotta e, quindi, da dimensioni inferiori, in quanto il numero di Reynolds è stato aumentato di circa il doppio rispetto alla prima macroarea considerata.

Il numero di Reynolds scelto per effettuare le simulazioni è elevato, il che comporterebbe un significativo aumento del costo computazionale al fine di mantenere la stessa accuratezza nei risultati ottenuti dal modello, poiché la turbolenza diventa più intensa e complessa e richiede alla griglia di risolvere strutture vorticosi di dimensioni più piccole. Tuttavia, visto che la risoluzione utilizzata nel modello è stata mantenuta fissa, con una griglia composta da  $48 \times 48 \times 48$  celle, la simulazione può diventare meno precisa, con una rappresentazione meno accurata del flusso rispetto alla realtà. Ci si aspetta di ottenere risultati peggiori rispetto ai casi precedenti.

A partire dal primo caso, nel quale si sono impostati i parametri a  $h = 50$ ,  $z_{MIN}^+ = 80$  e  $z_{MAX}^+ = 100$ , è stato ottenuto un andamento qualitativo delle velocità e delle concentrazioni normalizzate delle particelle. Sono state riportate anche le statistiche del fluido nella regione lontana dalla parete del canale.

La velocità media delle particelle sembra avere un andamento simile a quello dei casi precedenti. Le altre velocità non sembrano avere un andamento ottimale, in quanto si hanno degli scostamenti importanti nella zona di transizione, soprattutto lungo la direzione *streamwise* (a tutti gli Stokes) e lungo quella *spanwise* (agli Stokes più piccoli). Inoltre, la velocità in direzione normale a parete ( $w_{RMS}^+$ ) sembra presentare un andamento abbastanza buono, simile a quelli precedenti. Tuttavia, nella regione lontana da parete, si nota un accumulo delle velocità in corrispondenza delle statistiche del fluido: vale solamente per gli Stokes più bassi. Questo è dovuto al fatto che le particelle al più possono sentire solo le fluttuazioni del fluido stesso, e più aumenta l'inerzia delle particelle, meno intense diventano le loro fluttuazioni. Per migliorare il modello, sarebbe necessario aumentare la risoluzione della griglia, ma lo scopo di questo modello è proprio quello di ottenere risultati ottimali mediante l'utilizzo di risoluzioni scadenti. Le concentrazioni hanno un andamento simile ai casi precedenti, ma qui vengono presentate solo qualitativamente.

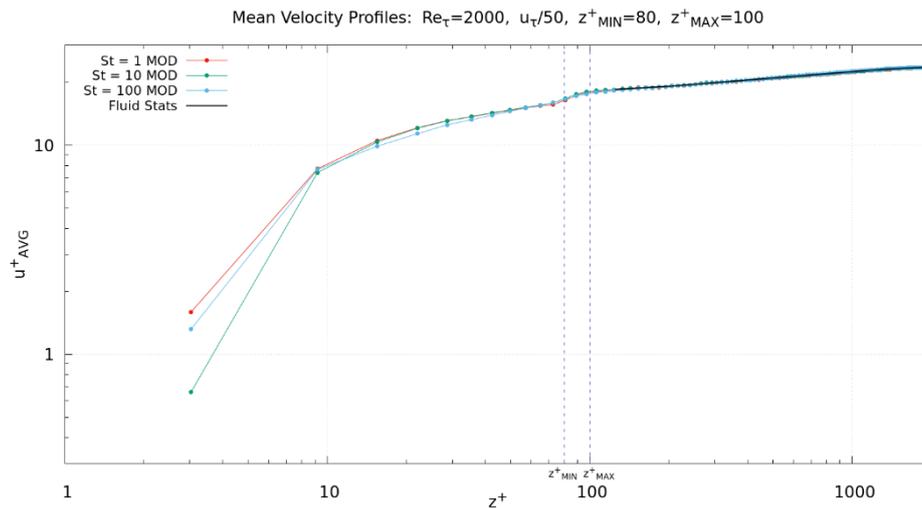


Figura 130. Caso 1: Velocità media delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

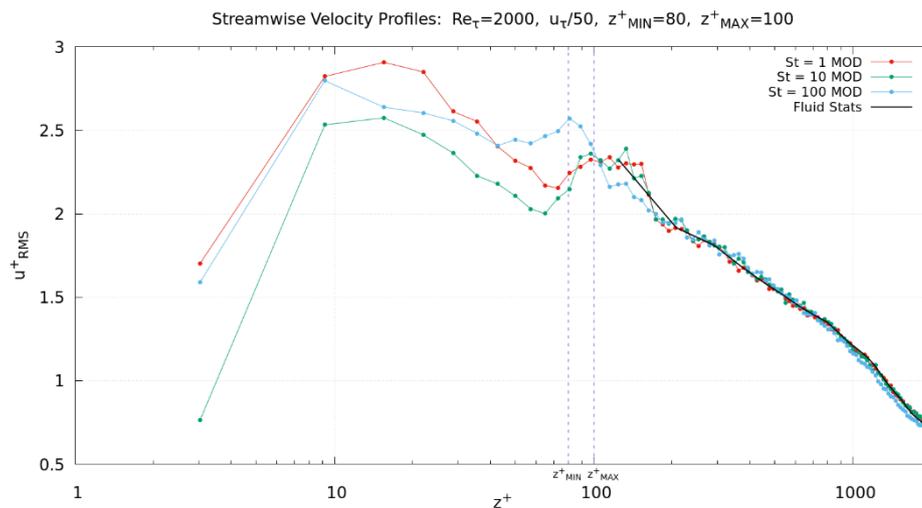


Figura 131. Caso 1: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione assiale in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

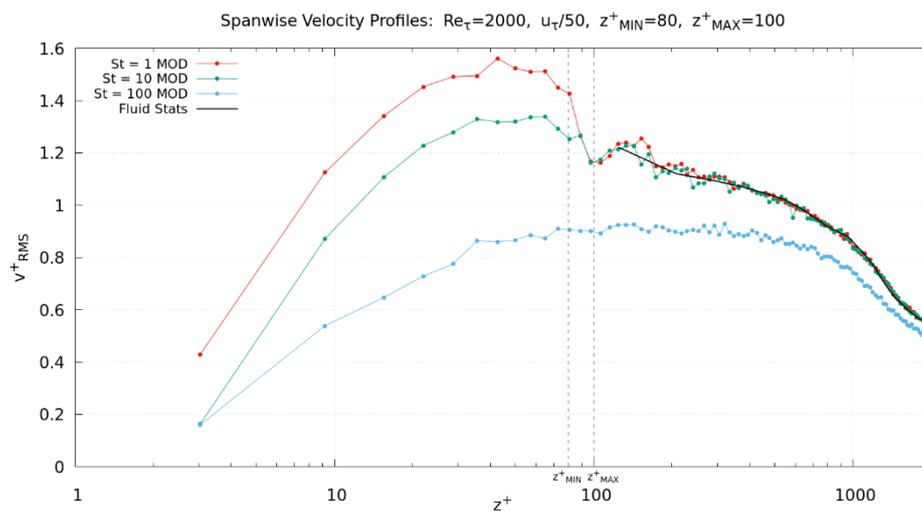


Figura 132. Caso 1: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione trasversale in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

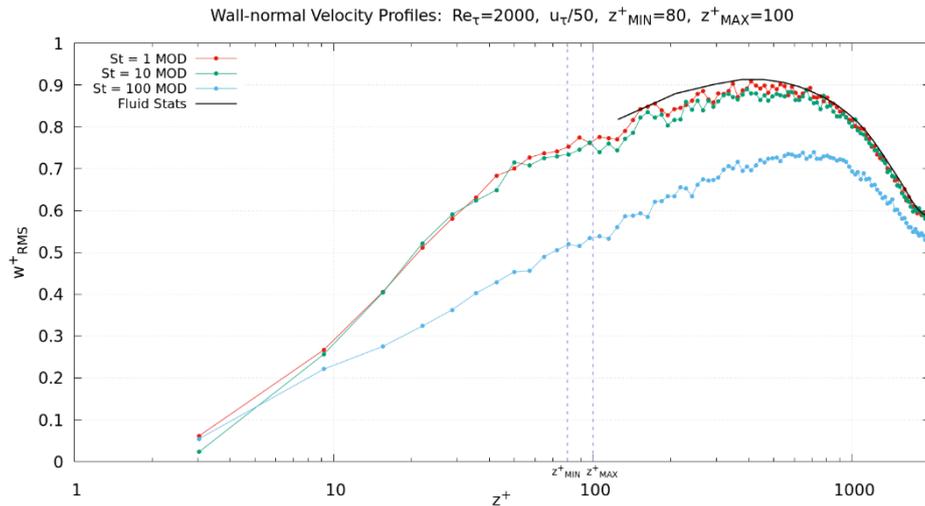


Figura 133. Caso 1: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione normale a parete, in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

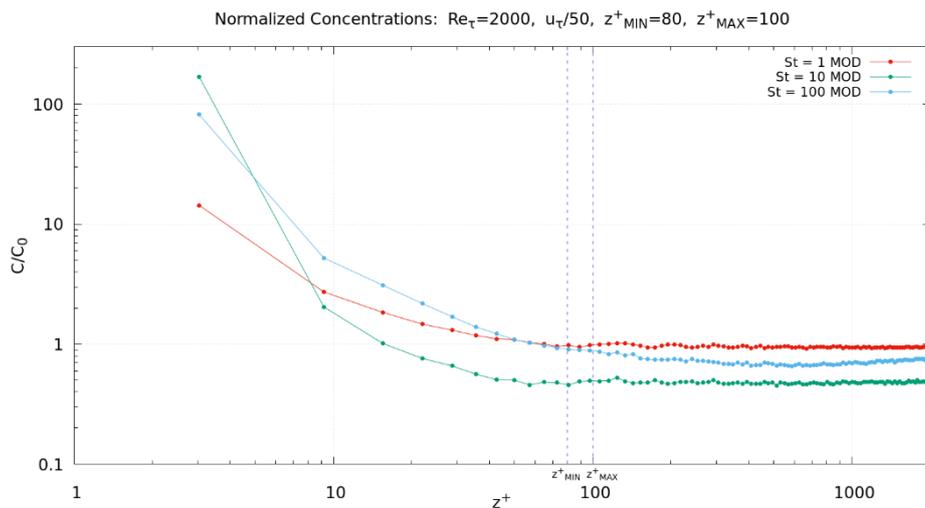


Figura 134. Caso 1: Concentrazioni normalizzate delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

Successivamente, nel secondo caso è stato modificato solamente il primo parametro:  $h = 25$ , mentre gli altri sono rimasti  $z^+_{MIN} = 80$  e  $z^+_{MAX} = 100$ . In termini di velocità, si ottengono risultati dal modello pressoché identici rispetto al primo caso. L'andamento delle concentrazioni si avvicina tra le stesse, dovuto alla diminuzione del parametro  $h$  e quindi dell'aumento di  $u_\tau/h$ , che è proporzionale al rumore Gaussiano.

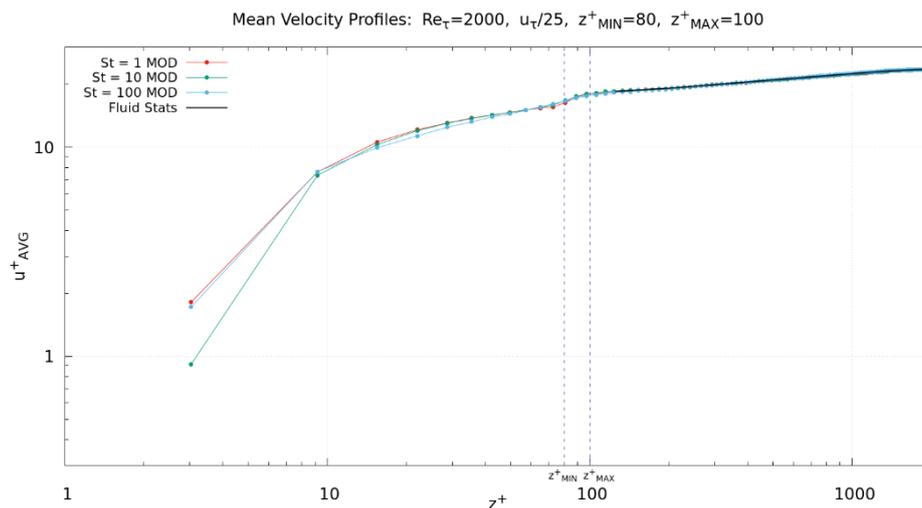


Figura 135. Caso 2: Velocità media delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

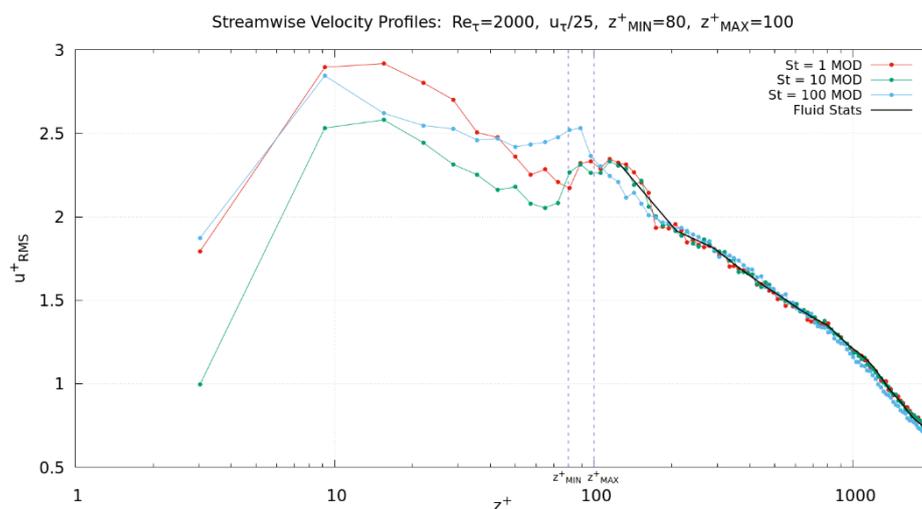


Figura 136. Caso 2: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione assiale in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

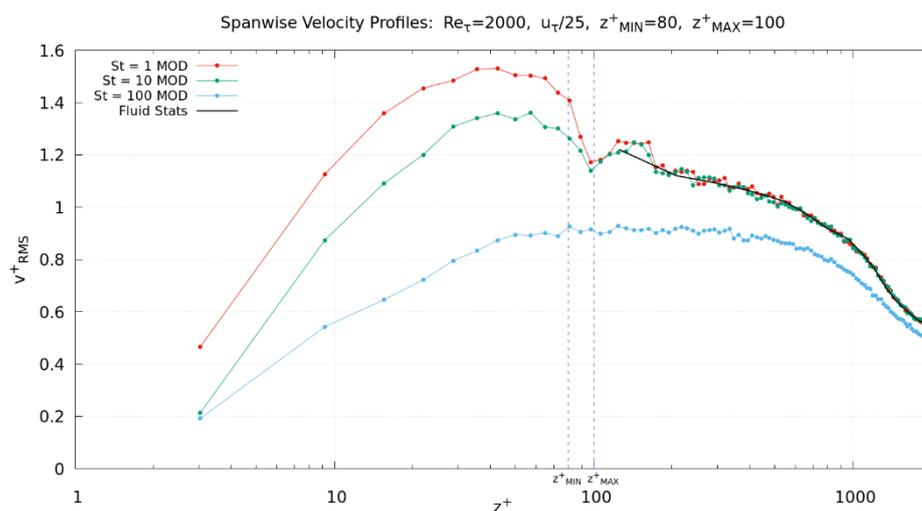


Figura 137. Caso 2: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione trasversale in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

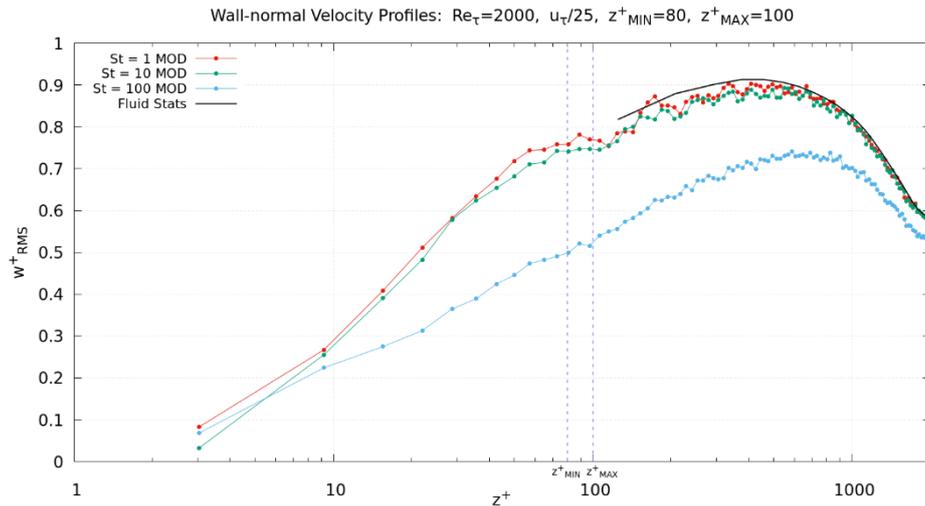


Figura 138. Caso 2: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione normale a parete, in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

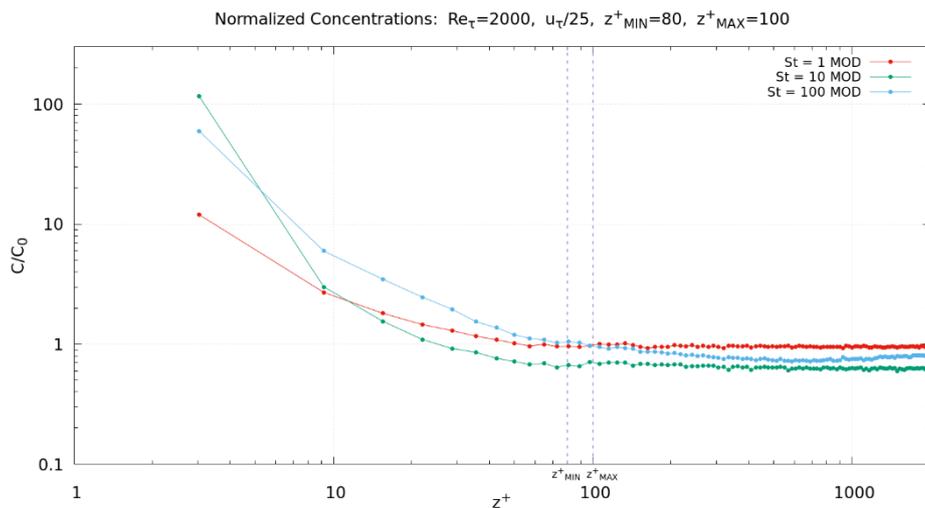


Figura 139. Caso 2: Concentrazioni normalizzate delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

Nel terzo caso, è stata fatta variare la zona di transizione (raddoppiata) e i parametri considerati diventano  $h = 50$ ,  $z^+_{MIN} = 160$  e  $z^+_{MAX} = 200$ . L'andamento delle velocità sembra migliorare rispetto ai primi due casi. In particolare, per la velocità assiale lo scostamento nella zona di transizione sembra sparire, mentre per la velocità trasversale il problema viene leggermente ridotto, ma non del tutto risolto. Questo è probabilmente dovuto alla risoluzione davvero bassa che caratterizza il modello, come si può osservare dal fatto che è lo Stokes più piccolo a rappresentare questo problema (piccole inerzie implicano fluttuazioni elevate), limitato dalle fluttuazioni del fluido. Le concentrazioni non sono molto influenzate dalla variazione della zona di transizione.

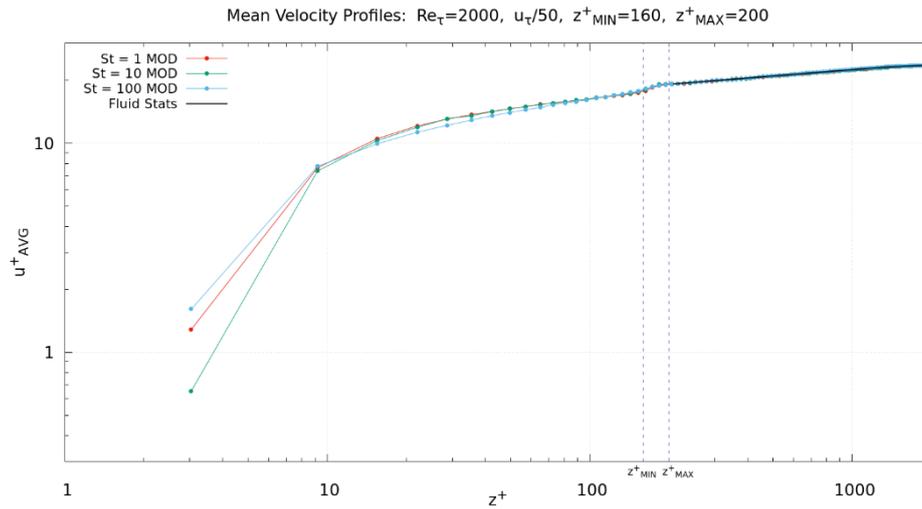


Figura 140. Caso 3: Velocità media delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

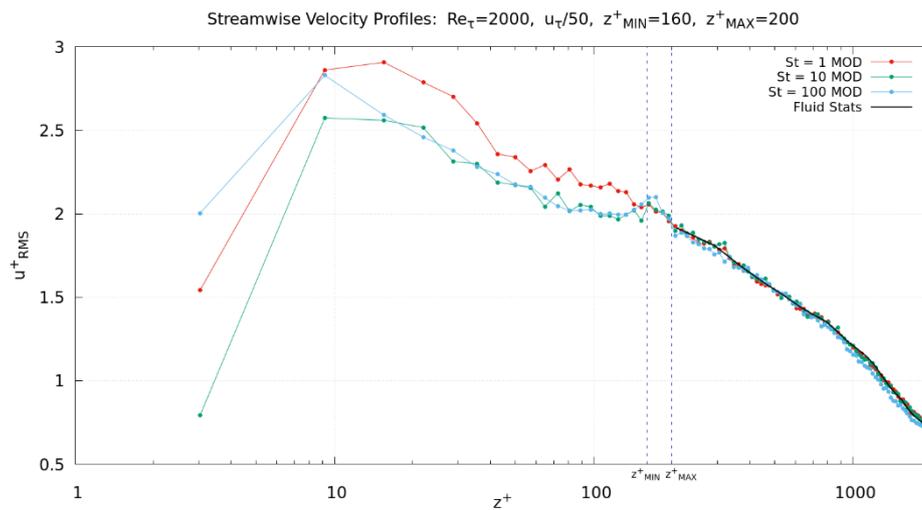


Figura 141. Caso 3: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione assiale in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

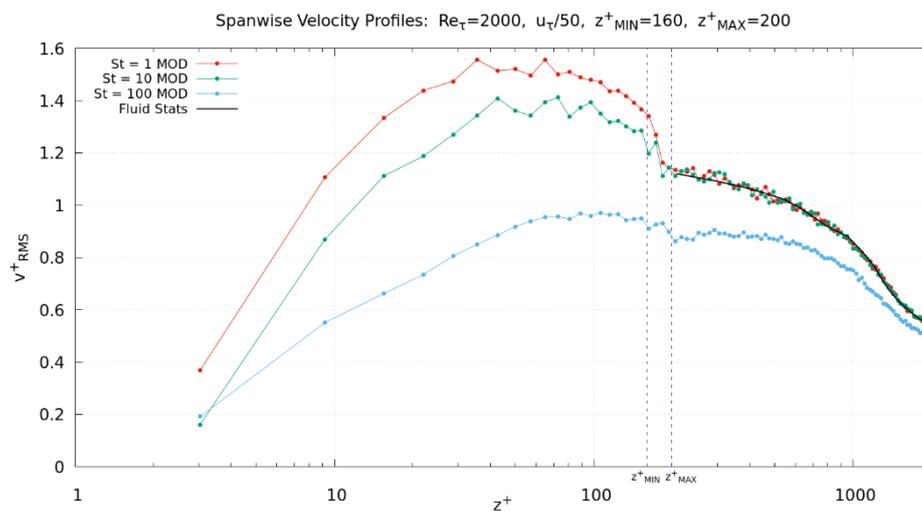


Figura 142. Caso 3: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione trasversale in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

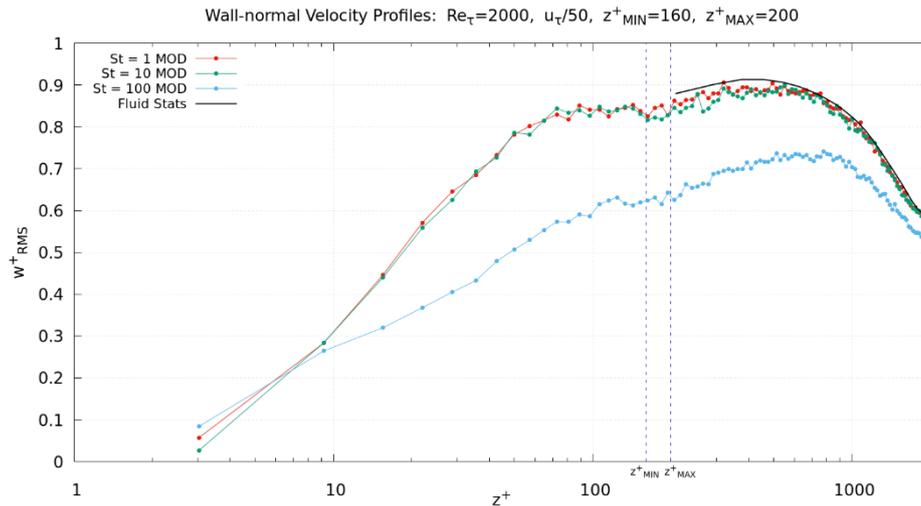


Figura 143. Caso 3: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione normale a parete, in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

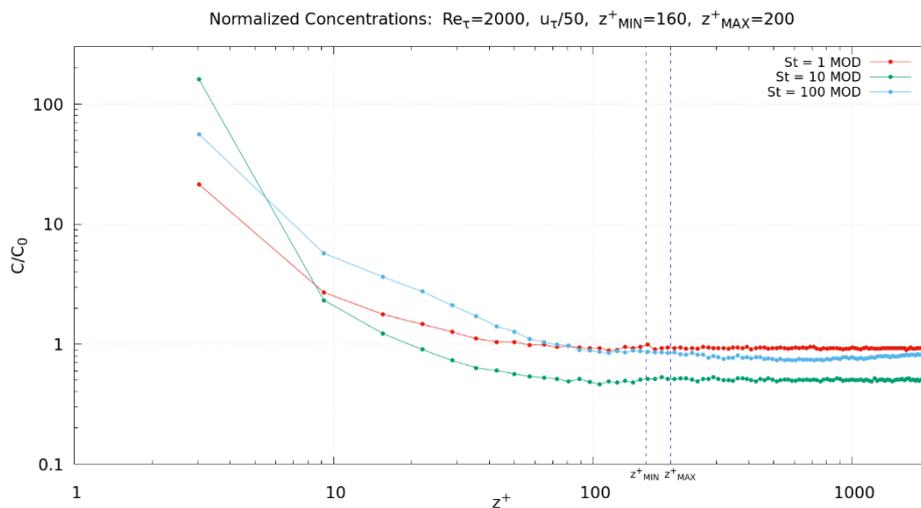


Figura 144. Caso 3: Concentrazioni normalizzate delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

Nel quarto caso, vengono utilizzati i parametri  $h = 25$ ,  $z_{MIN}^+ = 160$  e  $z_{MAX}^+ = 200$ . Poiché la zona di transizione raddoppiata sembra dar origine a risultati migliori, si è cercato di ridurre l'altro valore  $h$ . Le velocità ottenute sono molto simili, anche se in questo caso appaiono con un andamento leggermente peggiore e meno *smooth*, con un passaggio nella zona di transizione meno efficace. Le concentrazioni sono caratterizzate da un andamento che si avvicina sempre più, quasi sovrapponendosi.

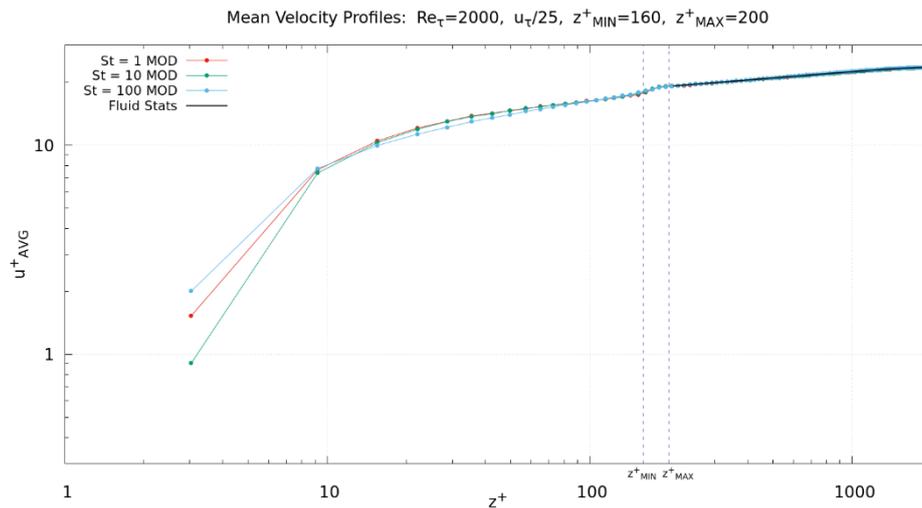


Figura 145. Caso 4: Velocità media delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

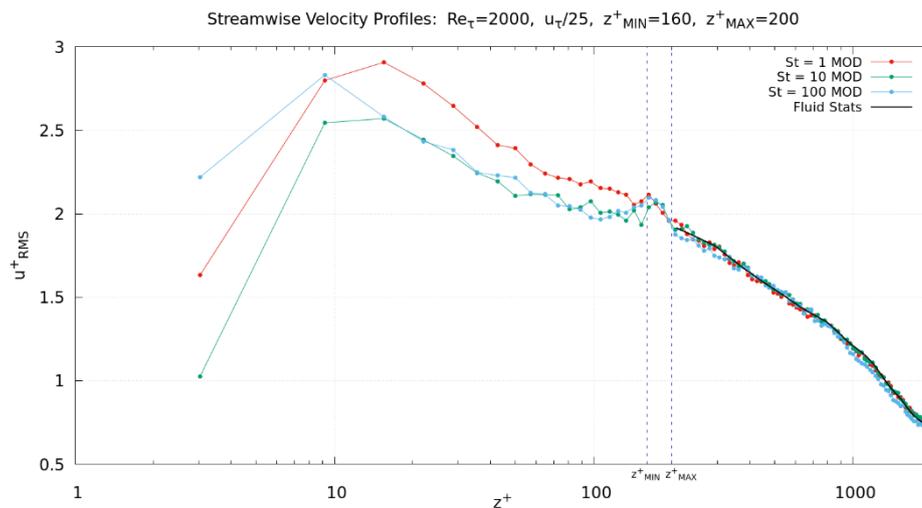


Figura 146. Caso 4: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione assiale in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

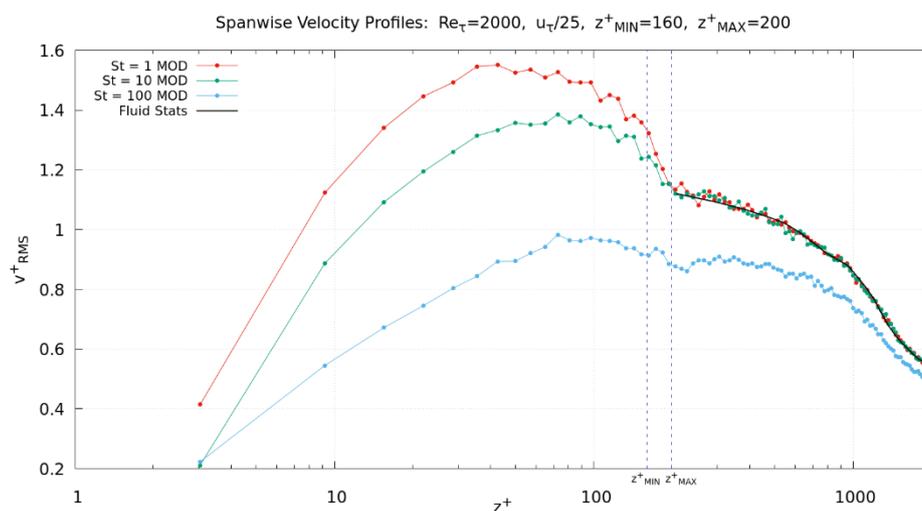


Figura 147. Caso 4: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione trasversale in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

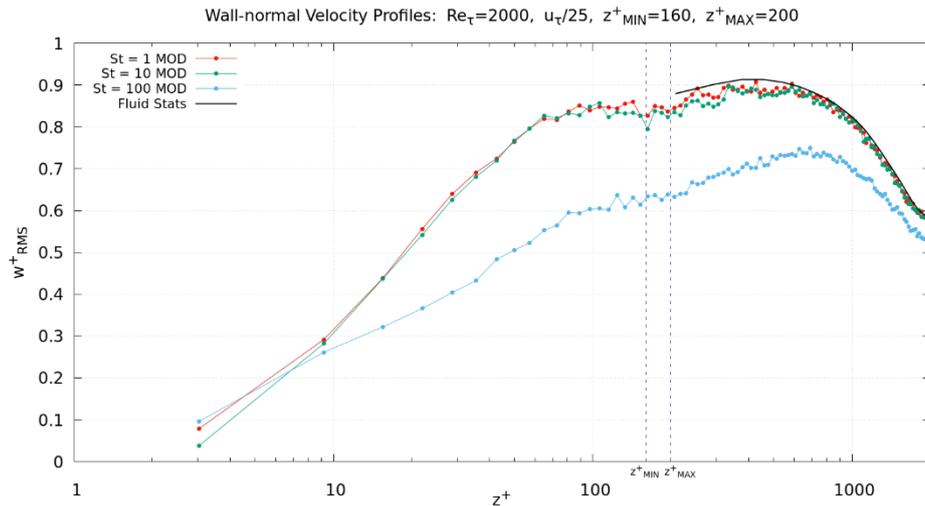


Figura 148. Caso 4: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione normale a parete, in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

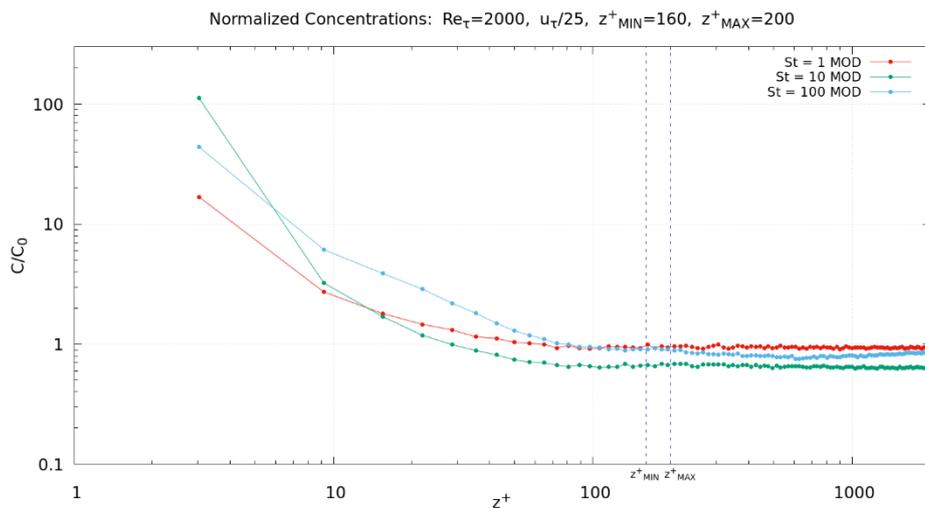


Figura 149. Caso 4: Concentrazioni normalizzate delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 30000$ . Modello ottimizzato.

Nel quinto ed ultimo caso della presente macroarea C), è stata raddoppiata la risoluzione della griglia lungo ogni direzione:  $96 \times 96 \times 96$ . Questo è stato effettuato al fine di osservare un possibile miglioramento dei risultati a inerzie ridotte delle particelle (cioè a bassi Stokes), alle quali corrispondono fluttuazioni più intense. All'aumentare della risoluzione della griglia si dovrebbero ottenere fluttuazioni del fluido più elevate. La simulazione è stata eseguita con  $h = 25$ ,  $z^+_{MIN} = 160$  e  $z^+_{MAX} = 200$ .

Lungo le direzioni *spanwise* e *wall-normal* è possibile notare un aumento delle statistiche del fluido e, di conseguenza, un incremento delle fluttuazioni delle particelle, le quali seguono le fluttuazioni del fluido a Stokes piccoli. Rispetto al quarto caso, caratterizzato dallo stesso valore dei parametri ma con risoluzione inferiore, si osserva un andamento delle concentrazioni differente, più ampio e meno sovrapposto.

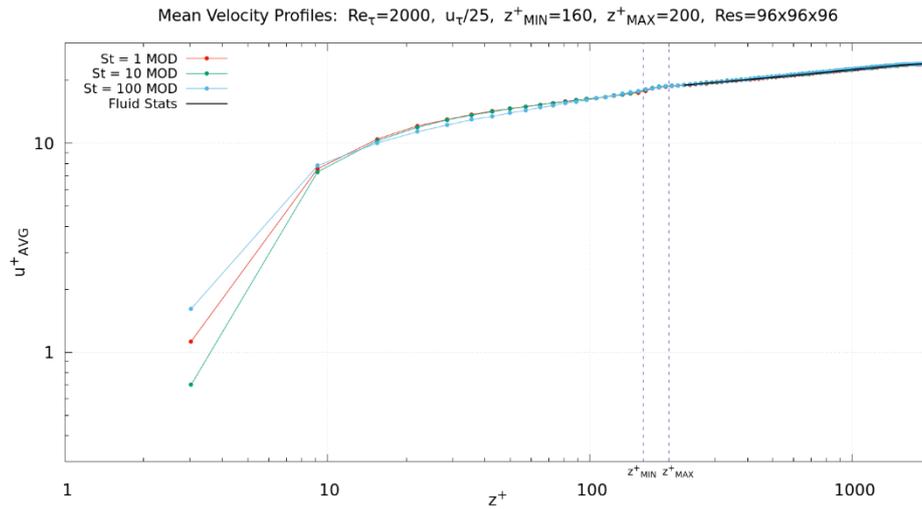


Figura 150. Caso 5: Velocità media delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 40000$ . Modello ottimizzato.

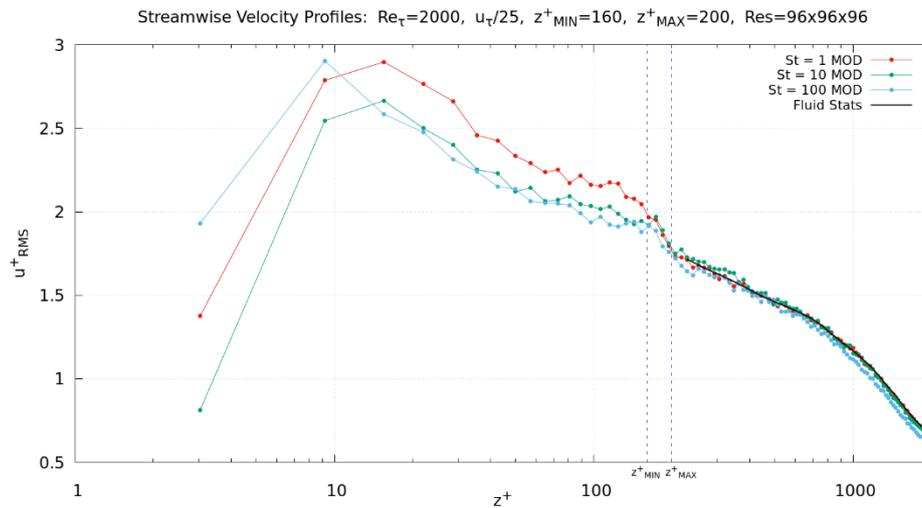


Figura 151. Caso 5: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione assiale in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 40000$ . Modello ottimizzato.

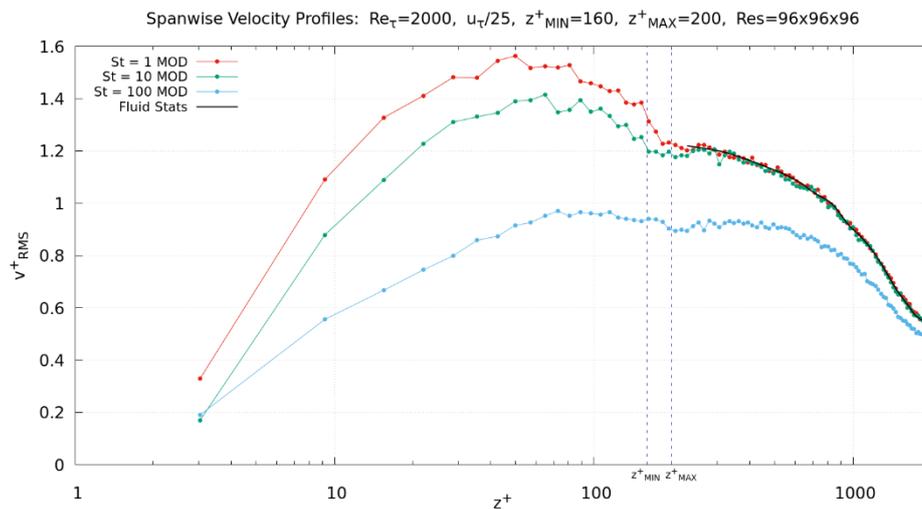


Figura 152. Caso 5: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione trasversale in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 40000$ . Modello ottimizzato.

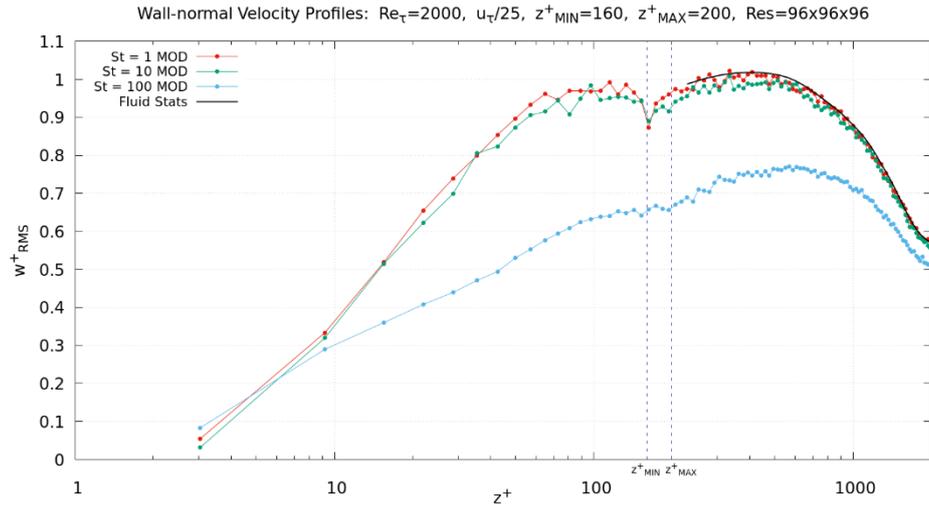


Figura 153. Caso 5: RMS delle fluttuazioni di velocità delle particelle in direzione normale a parete, in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 40000$ . Modello ottimizzato.

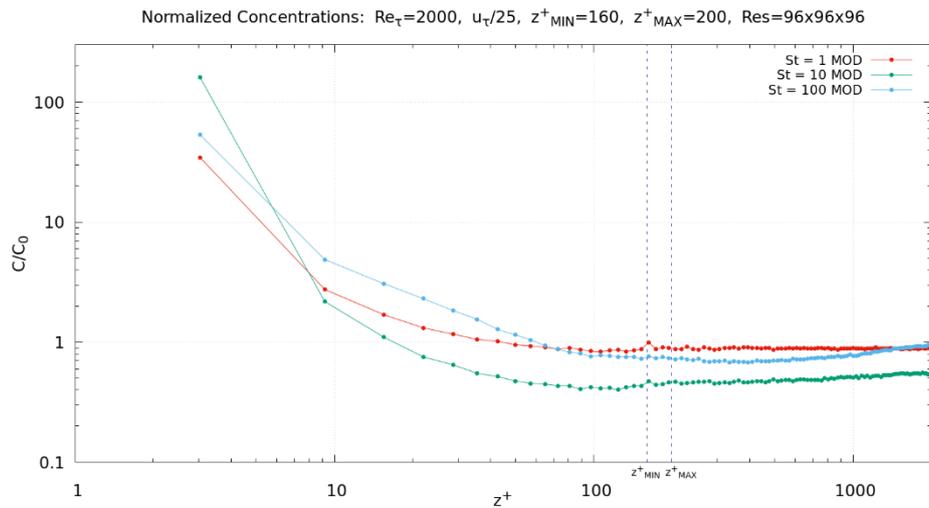


Figura 154. Caso 5: Concentrazioni normalizzate delle particelle in funzione della distanza da parete. Confronto con le statistiche del fluido.  $\Delta t = 40000$ . Modello ottimizzato.

## 6 CONCLUSIONI

Nel lavoro svolto è stato sviluppato e analizzato un modello avanzato basato sulla Wall-Modeled Large Eddy Simulation (WMLES) per la simulazione di flussi multifase in un canale turbolento.

Si sono rappresentate accuratamente le dinamiche e i complessi fenomeni di trasporto coinvolti, affrontando le sfide legate alla turbolenza e alla presenza di interazioni multifase.

Il modello proposto si è dimostrato un valido strumento di simulazione, capace di bilanciare in modo ottimale accuratezza e costi computazionali. Rispetto ad altre metodologie, come la RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes), il modello LES ha permesso una migliore rappresentazione delle strutture turbolente su larga scala, conservando al contempo la capacità di modellare l'effetto delle piccole scale attraverso adeguati modelli di sottogriglia. Questo approccio ha fornito risultati in linea rispetto a quelli ottenuti mediante simulazioni DNS, dimostrando la qualità del modello.

I miglioramenti apportati dal modello si riflettono non solo nella capacità di predire con maggiore precisione il comportamento delle particelle trasportate da un flusso in un canale turbolento, ma anche nella versatilità dello stesso.

L'utilizzo della metodologia ibrida Euleriana-Lagrangiana per il trattamento delle particelle solide ha consentito di ottenere informazioni dettagliate sulla dinamica della fase dispersa, considerando l'interazione anisotropa delle fluttuazioni turbolente e migliorando la comprensione dei meccanismi di trasporto e deposizione delle particelle. Questi risultati non solo rappresentano un progresso significativo rispetto agli approcci convenzionali, ma offrono anche un solido punto di partenza per ulteriori sviluppi.

L'adozione del modello stocastico *Continuous Random Walk* (CRW) per la descrizione delle fluttuazioni del fluido sentite dalle particelle ha garantito una rappresentazione ottimale delle traiettorie delle particelle e dei processi di dispersione vicino a parete, mantenendo al contempo il costo computazionale entro limiti accettabili.

Il modello implementato è stato migliorato e la versione attuale permette di simulare il trasporto di particelle solide da parte di un flusso in un canale turbolento per mezzo di tecniche differenti a seconda della zona in cui la particella si trova in un determinato istante. La tecnica LES ha permesso di agire sul calcolo effettuato lontano da parete, mentre vicino a parete è stato utilizzato un modello che ha consentito l'introduzione di una viscosità artificiale necessaria a correggere gli sforzi a parete e ricostruire il profilo di velocità del flusso (modello WALE). Il profilo di velocità è stato modellato a parete all'interno dello strato limite non risolto.

Per quanto riguarda le particelle, il loro moto all'interno del flusso è stato simulato a partire dall'equazione del moto delle particelle e combinando diversi modelli al fine di ottenere delle prestazioni migliori. L'adozione del modello stocastico vicino a parete e la presenza del modello LES

lontano da parete non è stata sufficiente a rappresentare accuratamente il fenomeno, a causa di stime errate in corrispondenza della regione d'interfaccia tra i due modelli, oltre che un deficit nella regione vicino a parete. A questo scopo, è stata introdotta una zona di transizione che ha permesso di combinare i due modelli precedenti mediante una formulazione differenti per ogni direzione considerata, garantendo un trasferimento più *smooth* nel passaggio tra le zone sulle quali agiscono questi modelli. L'ottimizzazione del modello è stata resa possibile grazie all'introduzione di una funzione di transizione che agisce lungo la direzione normale a parete, la quale viene tarata mediante alcuni parametri rappresentati dal fattore di amplificazione e da un fattore proporzionale al rumore Gaussiano. Questo modello ha permesso di correggere l'andamento delle velocità e delle fluttuazioni delle particelle al fine di ottenere risultati ottimali. In particolare, la formula delle velocità che si voleva utilizzare in tutte le direzioni durante la seconda fase, si è dovuta modificare attraverso l'introduzione di un'espressione personalizzata per la velocità lungo la direzione normale a parete, valida nel modello che rappresenta la terza fase.

È stata condotta un'analisi sulla variazione dei parametri che influenzano il calcolo delle velocità del fluido sentite dalle particelle e sulla definizione della zona di transizione, per rappresentare in modo più accurato il fenomeno delle particelle trasportate dal flusso. La variazione del fattore di amplificazione non ha portato cambiamenti notevoli in termini di accuratezza del modello implementato; perciò, si è focalizzata l'attenzione maggiormente sul parametro correlato al rumore Gaussiano. Il modello è stato testato e validato per  $Re_\tau = 1020$ , ed è stata individuata una configurazione ottimale che rappresenta un'accuratezza abbastanza elevata e un costo computazionale non eccessivo:  $h = 25$ ,  $k = 100$ ,  $z_{MIN}^+ = 80$  e  $z_{MAX}^+ = 100$ .

Si è voluto provare a generalizzare il modello implementato, in vista di un suo possibile utilizzo a numeri di Reynolds differenti, il quale è stato tarato e validato anche per  $Re_\tau = 550$  attraverso un'ulteriore analisi condotta sulla variazione della zona di transizione e del parametro che influenza il rumore Gaussiano. La configurazione ottimale si è trovata in corrispondenza di una zona di transizione circa dimezzata e del parametro  $h$  ridotto, al fine di garantire risultati più aderenti a quelli dati dalla DNS:  $h = 10$ ,  $z_{MIN}^+ = 44$  e  $z_{MAX}^+ = 55$ .

È stata eseguita un'ultima analisi di tipo qualitativo a  $Re_\tau = 2000$ , agendo sugli stessi parametri in modo tale da provare a raddoppiare la zona di transizione e aumentare il parametro  $h$  e osservando l'andamento dei risultati ottenuti.

Tra i principali vantaggi del modello implementato figura la sua adattabilità a scenari complessi e applicazioni ingegneristiche reali, i quali potrebbero essere implementati in futuro. Ad esempio, il modello potrà essere esteso per simulare geometrie più intricate e complesse.

In sintesi, il lavoro svolto ha messo in evidenza non solo la validità del modello proposto, ma anche il suo potenziale applicativo in ambito scientifico e industriale. La combinazione tra accuratezza e versatilità rappresenta un punto di forza che lo rende uno strumento promettente per l'analisi e la progettazione di sistemi complessi. Con ulteriori affinamenti e sviluppi, questo approccio potrebbe contribuire significativamente all'avanzamento delle conoscenze nel campo della fluidodinamica computazionale e delle sue applicazioni.

# BIBLIOGRAFIA

- [1] Schiller, L., Naumann, A., 1933. "Uber die grundlegenden berechnungen bei der schwerkraftaufbereitung. Z. Vereines Deutscher Inge. 77, 318–321.
- [2] Healy, D.P., Young, J.B., 2001. Calculation of inertial particle transport using the Osipov Lagrangian method. In: 4th International Conference on Multiphase Flow, New Orleans, Paper DJ4.
- [3] Gosman, A.D., Ioannides, E., 1983. Aspects of computer simulation of liquid fuelled combustors. J. Energy 7, 482–490.
- [4] G.A. Kallio, M.W. Reeks, A numerical simulation of particle deposition in turbulent boundary layers, International Journal of Multiphase Flow 3 (1989) 433–446.
- [5] T.L. Bocksell, E. Loth, Random walk models for particle diffusion in free shear flows, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal 39 (2001) 1086–1096.
- [6] T.L. Bocksell, E. Loth, Stochastic modeling of particle diffusion in a turbulent boundary layer, International Journal of Multiphase Flow 32 (2006) 1234–1253.
- [7] Y. Mito, T.J. Hanratty, A stochastic description of wall sources in a turbulent field: part 2. Calculation for a simplified model of horizontal annular flows, International Journal of Multiphase Flow 30 (2004) 803–825.
- [8] A. Dehbi, Validation against DNS statistics of the normalized Langevin model for particle transport in turbulent channel flows, Powder Technology (2010), Volume 200, 60-68.
- [9] Obukhov, A.M., 1959. Description of turbulence in terms of Lagrangian variables. Adv. Geophys., 113–116.
- [10] Legg, B.J., Raupach, M.R., 1982. Markov-chain simulation of particle dispersion in inhomogeneous flows: The mean drift velocity induced by a gradient in Eulerian velocity variance. Bound. Layer Meteorol. 24, 3–13.
- [11] MacInnes, J.M., Bracco, F.V., 1992. Stochastic particle dispersion modeling and the tracer particle limit. Phys. Fluids A 4, 2809–2824.
- [12] Bocksell, T.L., Loth, E., 2001. Random walk models for particle diffusion in free shear flows. AIAA J. 39, 1086–1096.
- [13] Iliopoulos, I., Mito, Y., Hanratty, T.J., 2003. A stochastic model for solid particle dispersion in a nonhomogeneous turbulent field. Int. J. Multiphase Flow 29, 375–394.
- [14] Bocksell, T.L., Loth, E., 2006. Stochastic modeling of particle diffusion in a turbulent boundary layer. Int. J. Multiphase Flow 32, 1234–1253.
- [15] D.J. Thomson, Random walk modeling of dispersion in inhomogeneous turbulence, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society 110 (1984) 1107–1120.
- [16] Mito, Y., Hanratty, T.J., 2002. Use of a modified Langevin equation to describe turbulent dispersion of fluid particles in a channel flow. Flow, Turbul. Combust. 68, 1–26.
- [17] I. Iliopoulos, T.J. Hanratty, Turbulent dispersion in a non-homogeneous field, Journal of Fluid Mechanics 293 (1999) 45–71.

- [18] P. Costa, A FFT-based finite-difference solver for massively-parallel direct numerical simulations of turbulent flows, *Comput. Math. Appl.* 76 (8) (2018) 1853–1862.
- [19] T. Ishihara, T. Gotoh, Y. Kaneda, Study of high-Reynolds number isotropic turbulence by direct numerical simulation, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 41 (2009) 165–180.
- [20] G.H. Golub, C.F. Van Loan, *Matrix computations*, vol. 3, JHU Press, 2012.
- [21] M.S. Dodd, A. Ferrante, A fast pressure-correction method for incompressible two-fluid flows, *J. Comput. Phys.* 273 (2014) 416–434.
- [22] N. Li, S. Laizet, 2decomp & fft-a highly scalable 2d decomposition library and fft interface, in: *Cray User Group 2010 Conference*, 2010, pp. 1–13.
- [23] M.S. Dodd, A. Ferrante, On the interaction of Taylor length scale size droplets and isotropic turbulence, *J. Fluid Mech.* 806 (2016) 356–412.
- [24] P. Costa, F. Picano, L. Brandt, W.P. Breugem, Universal scaling laws for dense particle suspensions in turbulent wall-bounded flows, *Phys. Rev. Lett.* 117 (13) (2016) 134501.
- [25] R. Verzicco, P. Orlandi, A finite-difference scheme for three-dimensional incompressible flows in cylindrical coordinates, *J. Comput. Phys.* 123 (2) (1996) 402–414.
- [26] M. Bernardini, S. Pirozzoli, and P. Orlandi, Velocity statistics in turbulent channel flow up to  $Re\tau = 4000$ , *J. Fluid Mech.* 758, 327 (2014).
- [27] G.A. Kallio, M.W. Reeks, A numerical simulation of particle deposition in turbulent boundary layers, *International Journal of Multiphase Flow* 3 (1989) 433–446.
- [28] L.P. Wang, D.E. Stock, Dispersion of heavy particles by turbulent motion, *Journal of Atmospheric Sciences* 50 (1993) 1897–1913.
- [29] F. Dalla Barba, F. Picano, Stochastic modeling for particles transport in wall-modeled Large Eddy Simulation, *INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUMERICAL METHODS IN MULTIPHASE FLOWS*.
- [30] Afkhami, M.; Hassanpour, A.; Fairweather, M.; Njobuenwu, D.O. Fully coupled LES-DEM of particle interaction and agglomeration in a turbulent channel flow. *Comput. Chem. Eng.* 2015, 78, 24–38.
- [31] A. Baglieri, "L'Apollo 7 e il primo ammutinamento nello spazio, colpa di un raffreddore", *Aerospace*.
- [32] A. Guy, B. Fromentin-Denoziere, H.-K. Phan, A. Cheraly, D. Gueyffier, V. Rialland, C. Erades, P. Elias Labaune, J. Jarrige, A. Ristori, C. Brossard, S. Rommeluere, Ionized solid propellant rocket exhaust plume: miles simulation and comparison to experiment, in: *7th European Conference for Aeronautics and Space Sciences (EUCA SS)*, EUCASS Association, Milan, Italy, 2017, pp. 1–19
- [33] Peiqing Liu, *Foundation of Fluid Mechanics, A General Theory of Fluid Mechanics*, pp. 1-7
- [34] L. Martinuzzo, Development of a particle tracking method for complex flow geometries
- [35] S. Banerjee, Compressible turbulence in space and astrophysical plasmas: Analytical approach and in-situ data analysis for the solar wind, *Theses, Université Paris Sud - Paris XI* (2014)
- [36] Pope SB (2000) *Turbulent flows*. Cambridge University Press, Cambridge

- [37] Tichenor, N. R., "Characterization of the influence of a favorable pressure gradient on the basic structure of a Mach 5.0 high Reynolds number supersonic turbulent boundary layer," Ph.D. thesis, Texas A&M University, College Station, Texas, 2010
- [38] F. Dalla Barba, The turbulent channel flow, Laboratorio di fluidodinamica computazionale, UniPD
- [39] A. Rasam, Anisotropy-resolving subgrid-scale modelling using explicit algebraic closures for large eddy simulation, Ph.D. thesis, KTH Royal institute of technology (2014).
- [40] F. Dalla Barba, Modulo di Modellistica e Simulazione Fluidodinamica, Laboratorio di fluidodinamica computazionale, UniPD
- [41] BD-SimuLab, "<https://www.bdsimulab.com/>"
- [42] Som, S.; Longman, D. E.; Luo, Z. Y.; Plomer, M.; Lu, T. F.; Senecal, P. K.; Pomraning, E. Simulating Flame Lift-off Characteristics of Diesel and Biodiesel Fuels using Detailed Chemical-Kinetic Mechanisms and Large Eddy Simulation Turbulence Model. *J. Energy Res. Tech. – Trans ASME*, 2012, 134, 032204.
- [43] Icardi, M., 2012. Computational models for the simulation of turbulent poly-dispersed flows: Large Eddy Simulation and Quadrature- Based Moment Method. Politecnico di Torino, Italy (Ph.D. thesis)
- [44] T. Itami, Basic Course on Turbulence and Turbulent Flow Modeling 13: 13.1 Analysis of a flow around a cylinder, 13.2 Calculation results of LES, 13.3 Comparison with RANS, Hexagon
- [45] N. Tonicello, G. Lodato, L. Vervisch, Analysis of high-order explicit LES dynamic modeling applied to airfoil flows, *Flow, Turbul. Combust.* 108 (1) (2022) 77–104.
- [46] A. Gibbs, LES of Turbulent Flows: Lecture 24, Department of Mechanical Engineering, University of Utah, 2016
- [47] Dr. Sharad. N. Pachpute, Basics of Multi-Phase Flow and its CFD Modeling, CFDFlowEngineering
- [48] C.E. Brennen, C.E. Brennen, Fundamentals of Multiphase Flow, Cambridge University Press, 2005
- [49] A. Faghri and Y. Zhang. Fundamentals of Multiphase Heat Transfer and Flow. Springer Cham, 2020.
- [50] A. Leonelli, L. G Bravo, E. Meiburg, Direct Numerical Simulation of Particle Transport and Dispersion in Wall-Bounded Turbulent Flows, DEVCOM Army Research Laboratory, 2022
- [51] ESMAILY, M., VILLAFANE, L., BANKO, A., IACCARINO, G., EATON, J. & MANI, A. 2020 A benchmark for particle-laden turbulent duct flow: A joint computational and experimental study. *Int. J. Multiph. Flow* 132, 103410.
- [52] Kundu PK, Cohen IM, Dowling DR. 2015. Fluid Mechanics. London: Academic
- [53] H. Arastoopour, D. Gidaspow, and R. W. Lyczkowski, Transport Phenomena in Multiphase System, Springer, Berlin, Germany, 2022.
- [54] E. Michaelides, C.T. Crowe, J.D. Schwarzkopf, Multiphase Flow Handbook, CRC Press, Boca Raton, 2016.
- [55] K. Hiltunen, A. Jasberg, S. Kallio, H. Karema, M. Kataja, A. Koponen, M. Manninen, V. Taivassalo, Multiphase flow dynamics: Theory and numerics, VTT Publications 722, VTT Technical Research Centre of Finland, 2009.

- [56] G. Graziani, *Aerodinamica (quarta edizione)*, vol. 2. Sapienza Università Editrice, 2010.
- [57] F. Picano, *Turbolenza, Corso di aerodinamica 2*, UniPD
- [58] A. Dehbi, 2008 Turbulent particle dispersion in arbitrary wall-bounded geometries: a coupled CFD-Langevin-equation based approach. *Intl J. Multiphase Flow* 34 (9), 819–828.
- [59] Dehbi A. A CFD model for particle dispersion in turbulent boundary layer flows. *Nuclear Engineering and Design* 2008; 238(3): 707-715.