

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI SCIENZE STATISTICHE

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN
SCIENZE STATISTICHE



Tesi di Laurea

VALUTAZIONE DI OPZIONI MEDIANTE
MODELLI GARCH

RELATORE: PROF. FRANCESCO LISI

DIPARTIMENTO DI SCIENZE STATISTICHE

LAUREANDO: GIUSEPPE CAMPAGNA

MATRICOLA N: 1013737

ANNO ACCADEMICO 2013-2014

Indice

Terminologia	1
Introduzione	3
1 Le Opzioni	7
1.1 Introduzione alle Opzioni	7
1.2 La Put-Call Parity	10
1.2.1 Effetto dei Dividendi	11
1.3 Valore di un'opzione alla scadenza	11
2 Modello Black e Scholes	15
2.1 La scelta del processo stocastico	15
2.1.1 Processi di Itô	16
2.1.2 Lemma di Itô	17
2.1.3 Proprietà lognormale dei prezzi	18
2.2 Modello Black e Scholes	19
2.2.1 Equazione differenziale di Black-Scholes-Merton	19
2.2.2 Stima della volatilità in base ai dati storici	22
2.2.3 La volatilità implicita	23
2.2.4 Dividendi	24
2.3 Volatility Smile	25
2.3.1 Simulazioni con il metodo Monte Carlo	26
3 Modelli GARCH	29
3.1 Processi GARCH(p,q)	29
3.2 Procedura di stima	31

3.2.1	Calcolo della log-verosimiglianza	31
3.3	Processi GARCH-M e TGARCH (GJR)	32
3.4	Prezzaggio di opzioni con modelli GARCH	33
3.4.1	Misura fisica P e Misura Neutrale al rischio Q	33
3.4.2	Modello di Duan	35
3.4.3	Confronto fra Black e Scholes e GARCH	39
3.4.4	Il modello Heston-Nandi	41
3.4.5	Modello di Duan et al. (GJR)	43
3.5	Least Squares Monte Carlo (LSM)	44
4	Analisi empirica	47
4.1	Introduzione all'analisi empirica	47
4.2	Analisi dei prezzi e dei log-rendimenti Fiat	49
4.3	Modello di Duan	51
4.3.1	Stime dei parametri con ML	53
4.4	Modello Heston-Nandi	54
4.4.1	Stime dei parametri con ML	56
4.5	Modello Duan et al.	57
4.5.1	Stime dei parametri con ML	57
4.6	Distribuzione del sottostante	60
4.7	Bontà dei modelli	63
4.8	Stime dei prezzi	65
4.9	Payoff realizzato	66
	Conclusioni	69
	Bibliografia	71

Terminologia

- c_t = prezzo di una call europea;
- C_t = prezzo di una call americana;
- D_t = dividendi attesi;
- K = prezzo d'esercizio;
- P_O = prezzo di un'opzione;
- p_t = prezzo di una put europea;
- P_t = prezzo di una put americana;
- r_f = tasso privo di rischio;
- $r_t = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1})$;
- σ = volatilità;
- $\hat{\sigma}_t^{implicita}$ = volatilità implicita;
- S_t = prezzo 'corretto' di un sottostante;
- S_t^{SIM} = prezzo 'corretto' di un sottostante simulato;
- $\tau = (T-t)$ = durata di un'opzione;
- $\varphi(S_T)$ = payoff;
- $\varphi(S_T) - P_O$ = payoff realizzato;
- VNRG = Valutazione Neutrale al Rischio Globale;
- VNRL = Valutazione Neutrale al Rischio Locale.

Introduzione

Questa tesi tratta di un tema molto importante e sempre più rilevante, riguardante la valutazione di opzioni. Le opzioni possono essere classificate in base alla data di scadenza in opzioni di tipo europeo e in opzioni di tipo americano. L'obiettivo della tesi è principalmente il prezzaggio di opzioni di tipo americano, tramite dei metodi, che verranno spiegati in seguito, inoltre cercheremo di valutare le opzioni di tipo europeo.

L'opzione scelta per il nostro lavoro ha come sottostante un titolo azionario che paga dividendi, tale titolo è il titolo azionario Fiat. La serie dei prezzi di tale azione va da Giugno 2006 a Giugno 2009 e vengono considerati gli stacchi dei dividendi, quindi i prezzi delle azioni saranno corretti dai dividendi, ovvero al netto dei dividendi.

Un modello classico e di molto utilizzo per quanto riguarda il prezzaggio di opzioni europee è quello di Black e Scholes. Questo modello ha il vantaggio di essere molto semplice da un punto di vista pratico ma ha lo svantaggio di utilizzare delle assunzioni poco realistiche quali omoschedasticità, normalità dei rendimenti, incorrelazione, ed inoltre non è utilizzabile per le opzioni americane.

Dei modelli che tengono conto dei problemi che presenta il modello di Black e Scholes, quindi dell'eteroschedasticità, non gaussianità dei log-rendimenti, e correlazione dei log-rendimenti al quadrato, sono i modelli ad eteroschedasticità condizionale, i processi GARCH.

Per quanto riguarda la valutazione delle opzioni, tra i modelli proposti in letteratura che trattano il prezzaggio delle opzioni, verranno utilizzati il GARCH in media proposto da Duan (1995), GARCH a soglia proposto da Duan et al.(2004), GARCH in media proposto da Heston-Nandi (2000), i cui articoli trattano la valutazione di opzioni di tipo europeo.

Questa tesi cerca di utilizzare tali modelli, anche per il prezzaggio di opzioni di tipo americano, combinandoli con l'approccio Least Squares Monte Carlo (LSM) di Longstaff e Schwartz (2001). Nel caso di opzioni americane il prezzo di un'opzione non dipende solo dal valore del sottostante alla scadenza ma anche da tutti i valori intermedi. Per valutarle infatti è necessario scegliere tra l'esercizio e il non esercizio dell'opzione in ogni istante di tempo in cui l'esercizio anticipato è possibile. In genere, il valore dell'opzione esercitata è facile da determinare, invece, a tal proposito, Longstaff e Schwartz (2001), hanno suggerito una procedura per determinare, con il Metodo Monte Carlo, il valore dell'opzione nel caso in cui non venga esercitata. Il loro approccio consiste nello stimare con i Minimi Quadrati (Least Squares) la relazione tra il valore dell'opzione non esercitata e il valore delle variabili rilevanti, in ogni istante in cui l'esercizio anticipato è possibile.

L'obiettivo del lavoro è quello di cercare di stimare il prezzo di opzioni di tipo americane utilizzando dei processi in cui la volatilità cambia nel tempo e valutare le opzioni europee confrontando il prezzo di mercato del sottostante alla scadenza con i prezzi simulati dai tre modelli GARCH.

A tale scopo per ottenere una stima puntuale più accurata del prezzo dell'opzione considereremo 10 opzioni americane diverse sullo stesso sottostante con medesima scadenza quindi ottenute le stime dei prezzi per ogni singola opzione, faremo una media ponderata di tali stime. Per verificare che la stima sia non distorta abbiamo considerato delle opzioni già scadute in modo da conoscere sia i prezzi del sottostante, sia i prezzi di mercato delle opzioni. Confronteremo quindi i prezzi delle opzioni che considerano l'eteroschedasticità condizionale con i prezzi di mercato vedendo quale dei tre modelli sia il migliore, ovvero il prezzo che si discosta meno dal prezzo di mercato. In seguito, verranno effettuati dei confronti tramite delle variazioni tra i prezzi stimati delle opzioni europee che assumono eteroschedasticità con i prezzi stimati dal modello di Black e Scholes, oltre che confrontare la distribuzione dei prezzi del sottostante (in quanto le opzioni considerate sono di tipo americano).

In ultima analisi calcoleremo i payoff realizzati che ci indicano quanto guadagna o perde realmente chi ha deciso di esercitare l'opzione e non, considerando anche il costo dell'opzione avuto al momento dell'acquisto della stessa. I confronti verranno svolti per i due tipi di opzioni: call e put.

La tesi è suddivisa in quattro capitoli, il primo capitolo tratta la descrizione delle opzioni e delle loro caratteristiche; il secondo del modello Black e Scholes; nel terzo capitolo vengono definiti i modelli GARCH e i modelli di Duan (1995), Heston Nandi (2000) e Duan et al.(2004), che assumono appunto che i log-rendimenti del sottostante seguano dei processi GARCH. Il quarto ed ultimo capitolo tratta l'analisi empirica di quanto descritto. Infine le conclusioni sulla tesi ed in particolare sull'analisi empirica svolta nel quarto capitolo.

Capitolo 1

Le Opzioni

1.1 Introduzione alle Opzioni

Le opzioni sono contratti finanziari che danno al compratore il diritto, ma non l'obbligo, di comprare o di vendere, una quantità determinata di un'attività finanziaria sottostante, ad un prezzo determinato, ad una data specifica (opzione di tipo europeo) oppure entro una data specifica (opzione di tipo americano). L'opzione call dà al possessore il diritto di comprare un'attività entro una certa data, a un certo prezzo. La put dà al possessore il diritto di vendere un'attività entro una certa data o data di scadenza (*maturity date*). Il prezzo specificato nel contratto viene chiamato prezzo di esercizio (*exercise price*) o prezzo base (*strike price*).

Negli ultimi decenni si è assistito alla crescita straordinaria di quest'importante insieme di strumenti finanziari: i contratti per l'acquisto o la vendita ad opzione di un dato titolo ad un dato prezzo, i contratti di opzione call e put per l'acquisto e la vendita di azioni. Un'opzione call è un'opzione di acquisto, un'opzione put è un'opzione di vendita.

Chi acquista una call spera che il prezzo dell'azione aumenti; mentre chi acquista una put spera che il prezzo dell'azione diminuisca. Le opzioni possono essere americane o europee, questa distinzione non ha nulla a che fare con le località geografiche, infatti le *opzioni americane* sono opzioni che possono essere esercitate in ogni momento prima della data di scadenza, mentre le *opzioni europee* sono opzioni che possono essere esercitate solo nella data di scadenza. In genere, le opzioni trattate in borsa sono americane. Tuttavia, le opzioni europee sono più facili

da analizzare rispetto alle opzioni americane e alcune delle proprietà delle opzioni americane vengono spesso dedotte da quelle delle corrispondenti opzioni europee. I principali elementi che caratterizzano sia i contratti call che quelli put sono:

- il titolo sottostante, cioè del titolo che può essere acquistato o venduto, il cui prezzo alla scadenza viene denominato S_T ;
- lo strike price o prezzo di esercizio dell'opzione (denominato K), cioè del prezzo al quale il titolo sottostante può essere acquistato o venduto;
- la data di scadenza di un'opzione (denominata T), cioè dell'ultima data valida per l'esercizio di un'opzione di acquisto o di vendita;
- la volatilità del sottostante, σ ;
- il tasso d'interesse privo di rischio, r_f , che rappresenta il tasso secondo il quale vengono attualizzati i payoff per ottenere i prezzi delle opzioni;
- dividendi attesi durante la vita dell'opzione, D_t , il valore che va decurtato al prezzo dell'azione nel caso in cui vengano pagati .

Come già menzionato il detentore di un'opzione call (o put) ha il diritto, ma non l'obbligo, di acquistare (vendere) il titolo sottostante, al prezzo di esercizio fissato alla data di scadenza o prima di questa; invece la parte che emette un'opzione call (put) ha l'obbligo ma non il diritto di vendere il titolo sottostante al prezzo di esercizio fissato, alla data di scadenza o prima di questa.

Sia S_T il prezzo del sottostante alla scadenza, e sia K il prezzo d'esercizio dell'opzione, il prezzo di una call (o di una put) alla scadenza dipende dal valore S_T e da K .

Infatti il prezzo di un'opzione aumenta se:

- S_T aumenta (diminuisce) se si tratta di una call (put);
- K diminuisce se una call e aumenta se una put.

Inoltre, il valore di un'opzione americana aumenta all'aumentare della vita residua, mentre per le opzioni di tipo europeo l'effetto della vita residua è incerto; per quanto riguarda la volatilità, se aumenta, aumenta anche il prezzo dell'opzione; all'aumentare del tasso privo di rischio aumenta la call ma diminuisce la put. Per quanto riguarda i dividendi essi hanno un effetto negativo sul sottostante, quindi il valore della call diminuisce all'aumentare dei dividendi, invece quello della put aumenta. A parità di altre condizioni il prezzo di un'opzione è tanto maggiore quanto più lontana è la data di scadenza. E' logico che con l'allungarsi della scadenza le opzioni valgono di più, in quanto aumentano sia i diritti riconosciuti ai detentori sia gli obblighi imposti agli emittenti. Vi è anche un'altra ragione per cui le opzioni con scadenze più lontane hanno prezzi più elevati di quelle con scadenze più prossime, la possibilità di realizzare dei profitti privi di rischio contrasta con le condizioni di equilibrio dei mercati. Ne segue che in condizioni di equilibrio e a parità di ogni altra condizione il prezzo di un'opzione deve essere tanto maggiore quanto più distante è la sua data di scadenza. A parità di altre condizioni quanto più elevato è il prezzo di esercizio di un'opzione tanto minore è il prezzo di un'opzione.

Il valore di una call europea è sempre inferiore o uguale a quella della call americana, ed entrambi sono inferiori o uguali al prezzo del sottostante, ovvero:

$$c_t \leq C_t \leq S_t$$

dove c_t rappresenta il prezzo di una call europea e C_t rappresenta il prezzo di una call americana, S_t è il prezzo del sottostante al tempo t .

Questo perché una call americana dà le stesse opportunità di una call europea, ma in più da la possibilità dell'esercizio anticipato, che da valore positivo, altrimenti non avrebbe senso esercitarla prima della scadenza. In più il prezzo deve essere inferiore a quello del sottostante per evitare di fare arbitraggio e fare in modo di non ottenere un profitto privo di rischio comprando l'azione e vendendo la call.

Il valore di una Put europea è inferiore o uguale a quella della Put americana, ed entrambi sono inferiori o uguali al prezzo d'esercizio, ovvero:

$$p_t \leq P_t \leq K$$

dove p_t rappresenta il prezzo di una put europea e P_t rappresenta il prezzo di una put americana, K il prezzo d'esercizio.

Per una Put europea vale la seguente disequazione $p_t \leq Ke^{-r_f(T-t)}$, nel caso contrario sarebbe possibile ottenere profitti vendendo una put e investendo il ricavato al tasso privo di rischio.

1.2 La Put-Call Parity

Il limite inferiore di una call di tipo europea che non paga dividendi è dato da:

$$c_t \geq S_t - Ke^{-r_f(T-t)}$$

mentre quello di una put europea è dato da:

$$p_t \geq Ke^{-r_f(T-t)} - S_t$$

Per un sottostante che non paga dividendi prima della scadenza vale la Put-Call Parity, ovvero:

$$c_t + Ke^{-r_f(T-t)} = S_t + p_t$$

per opzioni di tipo europee.

La Put-Call Parity non vale per le opzioni americane, per le quali diventa:

$$C_t + Ke^{-r_f(T-t)} \leq S_t + P_t$$

dove $C_t = c_t$, mentre $P_t \geq p_t$

Ciò avviene perché mentre per le Call americane, che non pagano dividendi, non è mai ottimale esercitarle anticipatamente e conviene esercitarle alla scadenza, quindi il prezzo di una call americana ed europea coincidono, per le put americane questo non vale e quindi hanno un valore superiore rispetto a quello europeo e quindi non si ha più un'uguaglianza, ma una disuguaglianza come si nota nella formula. Tuttavia è possibile ricavare alcune relazioni tra i prezzi delle opzioni

americane.

Quando l'azione sottostante non paga dividendi

$$S_t - K \leq C_t - P_t \leq S_t - K \exp(-r_f(T - t))$$

1.2.1 Effetto dei Dividendi

Di solito i dividendi che verranno pagati durante la vita dell'opzione possono essere previsti con ragionevole accuratezza. Useremo la lettera D_t per indicare il valore attuale dei dividendi al tempo t , che verranno distribuiti durante la vita dell'opzione. Nel calcolare D_t si assume che i dividendi vengano pagati nei giorni di stacco.

$$c_t \geq S_t - D_t - K \exp(-r_f(T - t))$$

$$p_t \geq D_t + K \exp(-r_f(T - t)) - S_t$$

Quando ci si attende che vengano distribuiti dividendi non è più possibile affermare che una call americana non verrà mai esercitata anticipatamente. Talvolta è ottimale esercitare una call americana immediatamente prima di una data di stacco dei dividendi. Non è mai ottimale esercitare la call in altri momenti.

Quando il titolo sottostante paga dividendi, la put-call parity diventa

$$c_t + D_t + K \exp(-r_f(T - t)) = p_t + S_t$$

mentre per le opzioni americane diventa:

$$S_t - D_t - K \leq C_t - P_t \leq S_t - K \exp(-r_f(T - t))$$

1.3 Valore di un'opzione alla scadenza

Alla data di scadenza il valore di un'opzione sarà uguale:

- $\varphi(S_T) = \max[0, S_T - K]$, per un'opzione call;

- $\varphi(S_T) = \max[0, K - S_T]$, per un'opzione put.

dove $\varphi(S_T)$ rappresenta il payoff dell'opzione.

Se il prezzo dell'azione è inferiore al prezzo di esercizio di un'opzione in scadenza l'opzione non ha alcun valore. Questo perché l'opzione è in scadenza e quindi deve essere esercitata immediatamente oppure lasciata scadere senza che il relativo diritto venga esercitato. Non sarebbe economico esercitare il diritto di opzione se il prezzo del titolo sottostante fosse inferiore a quello di esercizio di un'opzione call (viceversa per una put), perché in tal caso sarebbe possibile acquistare il titolo direttamente sul mercato, ad un prezzo inferiore a quello che si avrebbe esercitando il diritto di opzione. L'unica alternativa è quella di lasciare scadere l'opzione senza esercitarla. Poiché nessuno sarebbe disposto a comprare un'opzione destinata certamente a non essere esercitata, ne deriva che il prezzo di un'opzione alla data di scadenza è uguale a 0, se il prezzo del titolo sottostante è inferiore alla stessa data al prezzo di esercizio dell'opzione stessa.

L'espressione $\max[0, S_T - K]$ viene definita valore intrinseco dell'opzione call, mentre $\max[0, K - S_T]$ si definisce valore intrinseco dell'opzione put, indipendentemente dal fatto che l'opzione sia giunta o meno a scadenza.

In base al valore intrinseco l'opzione può essere in-the-money, at-the-money e out-of-the-money. Quindi quando il valore intrinseco è positivo l'opzione è detta in-the-money. Quindi sarà in-the-money se:

- per un'opzione call il prezzo di un titolo sottostante supera il prezzo di esercizio;
- per un'opzione put il prezzo di un titolo sottostante è inferiore al prezzo di esercizio.

Nel caso in cui il prezzo del sottostante e il prezzo di esercizio siano uguali, l'opzione si dice at-the-money e quindi sarà indifferente esercitarla o non esercitarla per il titolare. Quindi quando il valore intrinseco è pari a 0, l'opzione è detta out-of-the-money.

Quindi sarà out-of-the-money se:

- il prezzo del titolo sottostante è inferiore al prezzo di esercizio, per un'opzione call;

- il prezzo del titolo sottostante è superiore al prezzo di esercizio, per un'opzione put.

In sintesi avremo:

<i>Stato</i>	Call	Put
In-the-money	$S_T > K$	$S_T < K$
At-the-money	$S_T = K$	$S_T = K$
Out-of-the-money	$S_T < K$	$S_T > K$

Tabella 1.1: Opzioni in-the-money, at-the-money e out-of-the-money

In ogni contratto di opzione esistono due parti. Da un lato c'è l'investitore che ha assunto la posizione lunga (ossia chi ha comprato l'opzione), dall'altro lato c'è l'investitore che ha assunto la posizione corta (ovvero chi ha venduto o scritto l'opzione). Chi vende l'opzione ha un ricavo iniziale ma è soggetto ad una perdita potenziale ed il suo profitto (o la sua perdita) è pari alla perdita (o al profitto) di chi ha acquistato l'opzione. Esistono quattro tipi di posizioni su opzioni:

- Una posizione lunga su una call;
- Una posizione lunga su una put;
- Una posizione corta su una call;
- Una posizione corta su una put.

Spesso è utile caratterizzare le posizioni su opzioni europee in termini del loro valore finale (payoff) alla scadenza. In tal caso il costo iniziale dell'opzione non viene incluso nei calcoli. Se S_T è il prezzo finale dell'azione sottostante e K è il prezzo d'esercizio, il payoff di una posizione lunga su una call europea è pari a

$$\max(S_T - K, 0)$$

Questa formula riflette il fatto che l'opzione verrà esercitata se $S_T > K$ e non verrà esercitata se $S_T \leq K$.

Il payoff di una posizione corta su una call europea è pari a

$$-max(S_T - K, 0) = min(K - S_T, 0).$$

Il payoff di una posizione lunga su una put europea è pari a

$$max(K - S_T, 0)$$

e il payoff di una posizione corta su una put europea è pari a

$$-max(K - S_T, 0) = min(S_T - K, 0).$$

Capitolo 2

Modello Black e Scholes

2.1 La scelta del processo stocastico

La scelta del processo stocastico che meglio si adatta all'andamento dei prezzi, quindi che descrive meglio la performance dei prezzi degli titoli è una tematica molto importante. Una delle classi di processi stocastici che riveste un ruolo importante in finanza è quella dei Processi di Markov, in cui solo il valore corrente della variabile è rilevante per prevedere il futuro, di conseguenza la storia passata della variabile e il modo in cui il presente è emerso dal passato sono irrilevanti.

Ciò è coerente con una delle tre diverse forme di efficienza ovvero l'efficienza dei mercati in forma debole, nella quale l'insieme informativo include solo la storia passata dei prezzi. Se la forma debole dell'efficienza dei mercati non fosse valida i cultori dell'analisi tecnica potrebbero realizzare profitti superiori alla media interpretando i grafici che illustrano la storia passata dei prezzi azionari.

Tra i molti tipi di Processi di Markov uno dei più popolari è il Moto Geometrico Browniano (MGB), che è il caso base utilizzato per le opzioni finanziarie. Secondo questo processo il tasso di rendimento in un breve intervallo di tempo si distribuisce in modo Normale ed i tassi di rendimento per intervalli che non si sovrappongono sono indipendenti tra loro.

Un processo Geometrico Browniano (o Wiener generalizzato) è definito dalla seguente equazione:

$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

S_t è il prezzo dell'azione;
 μ è la componente di drift;
 σ è il parametro di volatilità;
 dW_t è un incremento di Wiener.

Un processo stocastico in tempo continuo W_t è detto Processo di Wiener se soddisfa le seguenti proprietà:

- $W_0 = 0$;
- W_t ha incrementi indipendenti;
- Se $t > s$, allora $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$;

I vantaggi di questo processo sono la sua semplicità matematica, un ridotto numero di parametri da stimare e una facilità ad ottenere soluzioni analitiche di valutazione dei titoli, ha però un rilevante svantaggio, ovvero che i prezzi tendono a divergere quando il tempo tende all'infinito creando così scenari irrealistici, in questi casi sono preferibili processi Mean Reverting (un caso di processo Mean Reverting sono i processi GARCH).

2.1.1 Processi di Itô

Un altro tipo di processo stocastico è conosciuto con il nome *Processo di Itô*. Si tratta di un processo di Wiener generalizzato in cui i parametri μ e σ sono funzioni del valore della variabile sottostante, S , e del tempo, t . I Processi di Itô sono del tipo:

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t$$

Nei Processi di Itô, sia il tasso di deriva atteso che il tasso di varianza possono cambiare con il passare del tempo. In un piccolo intervallo di tempo, da t a $t + \Delta t$, la variabile passa da S_t a $S_t + \Delta S$, dove:

$$\Delta S = \mu(t, S_t)\Delta t + \sigma(t, S_t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

I processi di Wiener generalizzati non sono appropriati per descrivere le dinamiche dei prezzi, poiché è poco plausibile supporre un drift atteso costante e un tasso di varianza costante. E' più ragionevole assumere che il tasso di deriva atteso in rapporto al prezzo dell'azione sia costante.

Il prezzo effettivo di un'azione è soggetto ad una certa variabilità, e quindi una sensata assunzione è quella di porre che la deviazione standard del tasso di rendimento in un breve periodo di tempo Δt sia la stessa, indipendentemente dal livello del prezzo dell'azione, quindi la deviazione standard della variazione del prezzo deve essere proporzionale al prezzo dell'azione.

Queste considerazioni portano a questo modello:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

dove μ è il tasso di rendimento atteso e σ è la volatilità.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

modello più appropriato per descrivere i prezzi, e in tempo discreto diventa:

$$\Delta S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

il tasso $\frac{\Delta S_t}{S_t}$ rappresenta il tasso di rendimento dell'azione e si distribuisce come una normale con media μ e varianza $\sigma^2 \sqrt{(\Delta t)}$.

I prezzi azionari dipendono da 2 parametri: μ è il tasso di rendimento annuo atteso dagli investitori (più aumenta il rischio più aumenta il rendimento richiesto dagli investitori) e σ è la volatilità.

2.1.2 Lemma di Itô

Se conosciamo il processo stocastico seguito da S , il lemma di Itô ci dice qual è il processo stocastico seguito da una certa funzione $G(S,t)$. Quindi tale lemma è molto utile per l'analisi dei derivati.

Se S_t segue il processo:

$$dS_t = \mu(t, S_t) dt + \sigma(t, S_t) dW_t$$

allora $G(t, S_t)$ seguirà questo processo:

$$dG(t, S_t) = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial S_t} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2} \sigma^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S_t} \sigma dW_t$$

dove $\mu = \mu(t, S_t)$ e $\sigma = \sigma(t, S_t)$

2.1.3 Proprietà lognormale dei prezzi

Implicazione del modello è che il prezzo dell'azione S_t al tempo t ha una distribuzione lognormale. Infatti, se consideriamo il logaritmo naturale del prezzo dell'azione possiamo vedere quale sia la dinamica di $\ln(S_t)$ applicando il lemma di Itô precedentemente enunciato. Siano

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

$$G = \ln S_t$$

$$\begin{aligned} d \ln S_t &= \left(\frac{\partial \ln S_t}{\partial t} + \frac{\partial \ln S_t}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln S_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial \ln S_t}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t \\ &= \left(\frac{1}{S_t} \mu S_t - \frac{1}{2 S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{1}{S_t} \sigma S_t dW_t \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

poiché

$$d \ln S_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t$$

si ha che

$$d \ln S_t \sim N \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt, \sigma^2 dt \right)$$

$$\ln S_T - \ln S_t \sim N \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma^2 (T - t) \right)$$

L'implicazione del modello è che il prezzo al tempo t ha una distribuzione lognormale, mentre il log-rendimento ha una distribuzione Normale.

2.2 Modello Black e Scholes

La valutazione neutrale può essere considerata lo strumento più importante per l'analisi dei derivati. Trae origine da una proprietà fondamentale dell'equazione differenziale di Black-Scholes-Merton nella quale non sono presenti variabili influenzate dalla propensione al rischio degli investitori. Le variabili che appaiono nell'equazione sono il prezzo corrente dell'azione, il tempo, la volatilità dell'azione e il tasso di interesse privo di rischio. L'equazione differenziale di Black-Scholes-Merton non sarebbe indipendente dalla propensione al rischio degli investitori se contenesse il tasso di rendimento atteso dell'azione μ . Il livello di μ dipende dalla propensione al rischio: maggiore è l'avversione al rischio degli investitori maggiore sarà il μ relativo ad ogni titolo; nel ricavare l'equazione, i termini in μ si elidono tra di loro. La propensione al rischio pertanto, non figurando nell'equazione differenziale, ne segue che essa non può influenzarne la soluzione. Di conseguenza, al fine di determinare il valore corrente, G , di un derivato, può essere fatta qualsiasi assunzione circa la propensione al rischio degli investitori, in particolar modo si può assumere che siano tutti neutrali verso il rischio. In un mondo di investitori neutrali verso il rischio, il tasso di rendimento atteso di tutti i titoli è uguale al tasso privo di rischio, r_f , inoltre, il valore attuale di ogni futuro pagamento si può ottenere attualizzando il valore atteso al tasso privo di rischio. Pertanto, l'assunzione che il mondo sia neutrale verso il rischio semplifica notevolmente l'analisi dei derivati.

2.2.1 Equazione differenziale di Black-Scholes-Merton

L'equazione differenziale di Black-Scholes-Merton è un'equazione che deve essere soddisfatta dal prezzo di ogni derivato che dipende dal prezzo di un titolo che non paga dividendi.

Si assuma che il prezzo dell'azione, S_t , segua il processo:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Sia ΔS_t la variazione del prezzo dell'azione in un intervallo Δt . Il tasso di rendimento in tale intervallo è $\frac{\Delta S_t}{S_t}$.

$\frac{\Delta S_t}{S_t}$ si distribuisce in modo normale e $\ln S_t$ in modo lognormale, quindi il valore atteso di S_t è $E(S_t) = S_0 \exp(\mu t)$

Nel modello:

- sono ammesse le vendite allo scoperto;
- non ci sono costi di transazione;
- non ci sono dividendi;
- non ci sono opportunità di arbitraggio non rischiose;
- il trading avviene in tempo continuo;
- il tasso di interesse privo di rischio è costante ed indipendente dal tempo;
- varianza del sottostante costante nel tempo;
- il sottostante segue un Moto Geometrico Browniano.

Sia G un derivato sull'azione, quindi il derivato è in funzione di S_t e di t . Per il lemma di Itô sopra enunciato:

$$dG(t, S_t) = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial S_t} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2} \sigma^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S_t} \sigma dW_t$$

Si vuole costruire un portafoglio composto da G e S_t in modo che il processo di Wiener possa essere eliminato. Il portafoglio appropriato è corto di 1 sul derivato e lungo di ammontare $\frac{\partial G}{\partial S_t}$ sull'azione. Quindi il valore del portafoglio sarà:

$$\Pi = -G + \frac{\partial G}{\partial S_t} S_t$$

La dinamica del portafoglio è data da:

$$d\Pi = -dG + \frac{\partial G}{\partial S_t} dS_t = \left(-\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2} \sigma^2 \right) dt$$

Poiché la volatilità del portafoglio è 0, quindi non dipende dal processo di Wiener, il suo rendimento deve essere pari a quello privo di rischio. Quindi:

$$d\Pi = r_f \Pi dt = r_f \left(-G + \frac{\partial G}{\partial S_t} S_t \right) dt$$

Eguagliando le due espressioni

$$\left(-\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2} \sigma^2 \right) dt = r_f \left(-G + \frac{\partial G}{\partial S_t} S_t \right) dt$$

si ottiene l'equazione differenziale di Black-Scholes-Merton:

$$\frac{\partial G}{\partial S_t} r_f S_t + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 = r_f G$$

La formula non dipende da parametri legati alle preferenze individuali nè dai rendimenti attesi, ma solo dal tasso di interesse privo di rischio. Ogni derivato negoziabile sul mercato deve soddisfare l'equazione differenziale Black-Scholes-Merton altrimenti esisterebbero opportunità di arbitraggio.

Nel caso di opzioni europee, è possibile risolvere l'equazione differenziale Black-Scholes-Merton per ottenere le formule per il prezzo di una call e di una put europea al tempo t , cioè:

$$c_t = S_t \Phi(d_1) - K \exp(-r_f(T-t)) \Phi(d_2)$$

$$p_t = K \exp(-r_f(T-t)) \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1)$$

dove $\Phi(-)$ è la funzione di ripartizione della Normale Standard e

$$d_1 = \frac{\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}$$

$\Phi(d_2)$ è la probabilità che una call europea viene esercitata in un mondo neutrale verso il rischio. Infatti la call viene esercitata se $S_T > K$, ovvero se $\ln(S_T) > \ln(K)$

$$\ln(S_T) \sim N \left(\ln(S_t) + \left(r_f - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t), \sigma^2 (T-t) \right)$$

$$\begin{aligned}
& \Pr(\ln(S_T) > \ln(K)) = \\
& = \Pr\left(\frac{\ln(S_T) - \ln(S_t) - (r_f - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{(\sigma\sqrt{T-t})} > \frac{\ln(K) - \ln(S_t) - (r_f - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{(\sigma\sqrt{T-t})}\right) \\
& = \Phi\left(\frac{\ln(S_t) - \ln(K) + (r_f - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{(\sigma\sqrt{T-t})}\right)
\end{aligned}$$

quando S_t è molto grande $\Phi(d_1)$ e $\Phi(d_2)$ tendono a 1, mentre $\Phi(-d_1)$ e $\Phi(-d_2)$ tendono a 0 e quindi:

$$\begin{aligned}
c_t &= S_t - K \exp(-r_f(T-t)) \\
p_t &= 0
\end{aligned}$$

e questo implica che quasi certamente la call verrà esercitata e la put no. Viceversa, quando S_t diventa molto basso:

$$\begin{aligned}
c_t &= 0 \\
p_t &= K \exp(-r_f(T-t)) - S_t
\end{aligned}$$

L'unico parametro della formula di Black e Scholes che non può essere osservato è la volatilità, due dei modi possibili per stimarla sono:

- il primo è sulla base dei prezzi della serie storica;
- il secondo utilizzando la volatilità implicita.

2.2.2 Stima della volatilità in base ai dati storici

Per stimare la volatilità del prezzo di un'azione si può utilizzare la serie storica dei suoi tassi di variazione. Sia:

T: il numero di osservazioni;

S_t : il prezzo dell'azione alla fine dell' t -esimo intervallo ($t=0, 1, 2, \dots, T$);

τ : la lunghezza dell'intervallo in anni;

e inoltre

$$r_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$$

per $t=1,..T$

La stima, s , della deviazione standard delle r_t è:

$$s = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2}$$

dove \bar{r} è la media di r_t .

La deviazione standard delle r_t in base al modello di Black e Scholes è $\sigma\sqrt{\tau}$. Pertanto, la variabile s è una stima di $\sigma\sqrt{\tau}$. Ne segue che σ può essere stimato con $\hat{\sigma}$, dove

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

L'errore standard di questa stima è approssimativamente pari a $\hat{\sigma}/\sqrt{2T}$. Scegliere un valore appropriato per n non è facile. Poiché σ cambia nel tempo e i dati troppo vecchi possono non essere rilevanti per prevedere il futuro, un compromesso che sembra funzionare bene è quello di utilizzare i prezzi di chiusura giornaliera degli ultimi 90-180 giorni. Una regola pratica che viene spesso adottata è quella di far corrispondere il periodo di tempo nel quale si misura la volatilità con il periodo di tempo al quale va applicata.

2.2.3 La volatilità implicita

La volatilità implicita è quel valore della volatilità che sostituito come input nel modello di Black e Scholes, restituisce esattamente il valore di mercato del derivato. Per calcolarla possiamo partire dal fatto che la volatilità implicita sia funzione del prezzo del sottostante, del prezzo di esercizio, del tasso di rendimento privo di rischio, del tempo alla scadenza e del prezzo dell'opzione:

$$\hat{\sigma}_t^{implicita} = \sigma(S_t, K, r_f, \tau, P_{Ot})$$

dove P_O rappresenta il prezzo dell'opzione in generale, non specificando appunto il tipo di opzione.

L'espressione analitica di tale formula non è disponibile in forma chiusa, ma può essere ottenuta in via numerica, uno dei modi più semplici può essere quello di

procedere mediante una ricerca a griglia calcolando n possibili soluzioni equispaziate all'interno di tale intervallo e scegliendo quella per la quale la differenza tra valore teorico ed effettivo dell'opzione si avvicina il più possibile allo zero. Un modo più efficiente di procedere è adottare un algoritmo di ricerca numerica di tipo Newton-Raphson. La volatilità implicita può essere utilizzata come indicatore delle aspettative del mercato relativamente al tempo di vita rimanente dell'opzione, cioè può essere utilizzata per verificare le opinioni del mercato circa la volatilità attesa per un particolare titolo. Spesso gli analisti calcolano le volatilità implicite nei prezzi delle opzioni, scritte su un certo titolo, che sono più attivamente negoziate per poi calcolare i prezzi di altre opzioni, scritte sullo stesso titolo, ma meno attivamente negoziate. Quindi per stimare i valori teorici delle opzioni call e put mediante la formula di Black e Scholes è necessario: conoscere il prezzo del bene sottostante S_t che è direttamente osservabile; il prezzo d'esercizio anch'esso osservabile; il tempo che manca alla scadenza $\tau = (T-t)$ che è direttamente osservabile; il tasso d'interesse risk-free che si può ottenere considerando il tasso di rendimento di un'obbligazione senza cedole la cui vita residua sia simile a quella dell'opzione in esame, quindi è quasi osservabile; la volatilità σ che deve essere effettivamente stimata. Il prezzo di un'opzione è molto sensibile a variazioni anche piccole di σ , pertanto è importante che la stima di σ sia più accurata possibile.

2.2.4 Dividendi

In questo paragrafo estenderemo il modello Black e Scholes tenendo conto che l'opzione su cui è scritta l'opzione paghi dei dividendi. Per quanto riguarda le opzioni europee possono essere analizzate assumendo che il prezzo dell'azione sia la somma di due componenti: una componente priva di rischio, che verrà utilizzata per pagare dividendi distribuiti durante la vita dell'opzione, e una componente rischiosa. La componente priva di rischio è pari alla somma dei dividendi che verranno pagati durante la vita dell'opzione, attualizzati dalle date di stacco in base al tasso di interesse privo di rischio. Alla data di scadenza dell'opzione, i dividendi saranno già stati pagati e la componente priva di rischio non esisterà più. Pertanto, la formula di Black e Scholes è corretta se S_t è uguale alla componente rischiosa e σ è la volatilità del processo seguito dalla componente rischiosa. La formula Black

e Scholes può essere quindi utilizzata se dal prezzo dell'azione vengono dedotti i dividendi che verranno distribuiti durante la vita dell'opzione, attualizzati in base al tasso di interesse privo di rischio. Vanno inclusi nei calcoli solo i dividendi il cui stacco avviene durante la vita dell'opzione. Per quanto riguarda le call americane, non è mai ottimale esercitarle anticipatamente su un titolo che non paga dividendi. L'esercizio anticipato di una call su un titolo che paga dividendi può essere conveniente solo immediatamente prima di una data di stacco dei dividendi. Assumiamo che siano n le date di stacco attese dei dividendi e che t_1, t_2, \dots, t_n siano gli istanti di tempo immediatamente precedenti ai loro stacchi. I dividendi a tali date verranno indicati rispettivamente con D_1, D_2, \dots, D_n .

2.3 Volatility Smile

I traders utilizzano il modello di Black e Scholes, non nello stesso modo inteso dagli autori in quanto fanno dipendere la volatilità dal prezzo d'esercizio (K) e dalla scadenza delle opzioni (T). Questo introduce i cosiddetti 'sorriso di volatilità' (volatility smile) che sono grafici che rappresentano le volatilità implicite delle opzioni in funzione dei prezzi d'esercizio. Il sorriso di volatilità delle opzioni su azioni è stato studiato da Rubinstein e Jackwerth (1996). Prima del 1987 non c'erano sorrisi di volatilità accentuati. La volatilità diminuisce al crescere del prezzo d'esercizio. Le opzioni con prezzi di esercizio bassi (deep out of the money puts o deep in the money calls) tendono ad avere volatilità implicite maggiori delle opzioni con prezzi di esercizio alti (deep in the money puts o deep out of the money calls). Una possibile spiegazione del sorriso nelle opzioni su azioni riguarda l'effetto leva. Se il valore delle azioni di una società diminuisce, l'effetto leva aumenta. Ne segue che le azioni diventano più rischiose e la loro volatilità aumenta. Se il valore delle azioni aumenta, l'effetto leva diminuisce. Ne segue che le azioni diventano meno rischiose e la loro volatilità diminuisce. Oltre ai sorrisi di volatilità, i traders utilizzano la struttura a termine delle volatilità. In altri termini, le volatilità utilizzate per valutare le opzioni at the money dipendono dalla scadenza. Le volatilità tendono a ritornare verso una media di lungo periodo. Se la volatilità corrente è storicamente bassa, e quindi ci si aspetta che aumenti, le strutture a termine delle volatilità utilizzate per valutare le opzioni saranno

incline positivamente. Se la volatilità corrente è storicamente alta, e quindi ci si aspetta che diminuisca, le strutture a termine della volatilità saranno inclinate negativamente. Le superfici della volatilità' (volatility surfaces), che combinano sorrisi di volatilità e strutture a termine della volatilità, definiscono le volatilità appropriate per la valutazione di opzioni con diversi prezzi di esercizio e diverse scadenze.

2.3.1 Simulazioni con il metodo Monte Carlo

Quando viene utilizzato per valutare le opzioni, il Metodo Monte Carlo adotta il principio della valutazione neutrale verso il rischio. Con una procedura di campionamento, viene calcolato il valore atteso dell'opzione in un modo neutrale verso il rischio e lo si attualizza in base al tasso d'interesse privo di rischio. Si consideri un derivato, con scadenza in T , che dipende da una sola variabile di mercato, S_t . Se i tassi di interesse sono costanti, il derivato si può valutare in questo modo:

- si simula un sentiero temporale per S_t in un mondo neutrale verso il rischio;
- viene calcolato il valore finale del derivato;
- i passi 1 e 2 vengono ripetuti, per ottenere una serie di valori finali campionari in un mondo neutrale verso il rischio;
- si stima il valore atteso finale del derivato, in un mondo neutrale verso il rischio, come media aritmetica dei valori finali campionari;
- viene determinato il valore corrente del derivato attualizzando al tasso privo di rischio il valore finale atteso.

Supponiamo che, in un mondo neutrale verso il rischio, il processo seguito dalla variabile di mercato sottostante sia

$$dS_t = \hat{\mu}S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

dove dW_t è un processo di Wiener, $\hat{\mu}$ è il tasso di rendimento atteso in un mondo neutrale verso il rischio e σ è la volatilità. Per simulare il sentiero seguito da S_t ,

dividiamo la vita del derivato in n piccoli intervalli, ciascuno di lunghezza Δt , e approssimiamo l'equazione con

$$S_{t+\Delta t} - S_t = \hat{\mu}S_t\Delta t + \sigma S_t\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

dove S_t è il valore di S al tempo t ed ε è un'estrazione casuale da una distribuzione normale standardizzata. Quest'equazione consente di determinare il valore di S al tempo Δt in base al valore di S al tempo zero, il valore al tempo $2\Delta t$ in base al valore al tempo Δt , e così via. Ogni simulazione comporta la costruzione di un intero sentiero temporale per S_t sulla base di n estrazioni casuali da una distribuzione normale. In pratica, è di solito più accurato simulare $\ln S_t$ piuttosto che S_t . In base al lemma di Itô, il processo seguito da $\ln S$ è

$$d \ln S_t = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t$$

Capitolo 3

Modelli GARCH

3.1 Processi GARCH(p,q)

Vari studi empirici hanno mostrato che l'assunzione di volatilità costante nel tempo e la gaussianità del modello di Black e Scholes sono spesso violate.

Engel (1982) introduce un modello ARCH(p) (Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity), nel quale la varianza condizionata è una funzione lineare delle innovazioni al quadrato ritardate di p periodi ε_t . Bollerslev (1986) propone un altro modello, un'estensione dei processi ARCH, i processi GARCH(p,q) che tengono conto della persistenza senza dover avere tanti ritardi.

La serie storica dei log-rendimenti è data dalla differenza dei logaritmi naturali dei prezzi.

I log-rendimenti generalmente presentano una media prossima allo zero, stazionarietà in media, eteroschedasticità, effetti di clustering cioè piccole e grandi variazioni in valore assoluto tendono a susseguirsi.

La distribuzione marginale dei log-rendimenti ha delle code più pesanti rispetto a quella della Gaussiana, e i log-rendimenti sono leptocurtici, infatti i rendimenti piccoli e grandi in valore assoluto si presentano con una frequenza maggiore che nel caso normale.

La volatilità non è una quantità osservabile.

Una prima possibilità per misurare la volatilità è la varianza della serie dei rendimenti. Tuttavia, questo significa assumere omoschedasticità, che è un'assunzione poco realistica.

Sotto ipotesi di stazionarietà, se le serie dei log-rendimenti al quadrato sono generalmente correlate, questo vuol dire che:

- i log-rendimenti non sono indipendenti stocasticamente;
- la volatilità di oggi dipende dalla volatilità di ieri;
- mediante la volatilità di oggi si può prevedere quella di domani.

Nel caso in cui ci sia correlazione tra la serie dei log-rendimenti e la serie dei log-rendimenti al quadrato può essere dovuto al fatto che ci sia un esplicito trade-off tra rischio e rendimento atteso: il *premio al rischio*, rispetto ad un titolo meno rischioso.

La volatilità aumenta di più in corrispondenza di shock negativi che in corrispondenza di shock positivi. Questo comportamento asimmetrico è chiamato *effetto leva*. I log-rendimenti sono incorrelati nei livelli e quindi non si possono utilizzare modelli per la media condizionata, come i modelli ARMA, ma poiché i log-rendimenti al quadrato sono correlati, si possono utilizzare modelli per la varianza condizionata.

Alcuni modelli molto importanti per quanto riguarda i log-rendimenti che presentano le caratteristiche sopra descritte sono i modelli GARCH.

Un processo GARCH(p,q) forte.

Definizione 3.1: Se z_t è una sequenza iid con distribuzione Normale Standard (anche se non necessaria), il processo ε_t è detto un GARCH(p,q) forte se:

$$\begin{aligned}\varepsilon_t | I_{t-1} &\sim N(0, \sigma_t^2) \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2\end{aligned}$$

Per garantire la positività della varianza condizionata, si deve assumere che $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$ e $\beta_j \geq 0$. Condizione necessaria e sufficiente affinché il processo GARCH(p,q) sia stazionario in covarianza o in senso debole è che:

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$$

quindi, se vale questa condizione, il processo è debolmente stazionario e la soluzione del processo è unica. La stazionarietà in covarianza implica la stazionarietà in senso stretto e rappresenta la condizione tale per cui ci assicura che i primi due momenti esistono:

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$Var(\varepsilon_t) = \sigma^2 = \frac{\omega}{1 - (\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j)}$$

3.2 Procedura di stima

3.2.1 Calcolo della log-verosimiglianza

Si utilizza il metodo della massima verosimiglianza per stimare il modello e i parametri.

Essendo i dati dipendenti, la funzione di verosimiglianza si può fattorizzare nel seguente modo:

$$L(\theta) = f(r_1, r_2, \dots, r_n | \theta) = f(r_p, r_{p-1}, \dots, r_1; \theta) \prod_{t=p+1}^n f(r_t | I_{t-1}; \theta) \quad (3.1)$$

dove θ è il vettore di parametri dato da ω , α_i , β_j con $i=1, \dots, p$ e $j=1, \dots, q$ per un GARCH(p,q).

Il primo fattore rappresenta la distribuzione marginale del modello e il secondo la distribuzione condizionata, il termine p indica un certo numero di variabili casuali riferite ai periodi iniziali.

Non sempre si riesce ad ottenere la verosimiglianza esatta poiché la distribuzione marginale può essere non nota, quindi, con n sufficientemente grande, $L(\theta)$ può essere approssimata solo al secondo fattore. Linearizzando la (3.1), tramite la trasformazione logaritmica, si ottiene la funzione di log-verosimiglianza $l(\theta)$:

$$l(\theta) = \ln f(r_p, r_{p-1}, \dots, r_1; \theta) + \sum_{t=p+1}^n \ln f(r_t | I_{t-1}; \theta) \quad (3.2)$$

e approssimando al secondo addendo perchè non conosciamo la distribuzione marginale:

$$l(\theta) \propto \sum_{t=p+1}^n \ln f(r_t | I_{t-1}; \theta) \quad (3.3)$$

nello specifico di un modello GARCH(1,1) con $\mu = 0$ diventa:

$$\begin{aligned} l(\theta) \propto & - \frac{(n-p)}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^n \ln(\omega + \alpha(r_{t-1})^2 + \beta\sigma_{t-1}^2) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^n \frac{(r_t)^2}{\omega + \alpha(r_{t-1})^2 + \beta\sigma_{t-1}^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

con $\theta = (\omega, \alpha, \beta)$.

Per identificare p è necessario guardare l'equazione della varianza condizionata, che se consideriamo un GARCH(1,1) con $\mu=0$ è data da:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \\ \varepsilon_{t-1} &= r_{t-1} \end{aligned}$$

3.3 Processi GARCH-M e TGARCH (GJR)

Due varianti di processi GARCH molto importanti ai fini della nostra analisi sono i modelli GARCH-M (o GARCH in media) e TGARCH (o GARCH a soglia o GJR).

I modelli GARCH-M (GARCH in Media), vengono utilizzati quando si vuol far dipendere i log-rendimenti dalla volatilità e sono del tipo:

$$r_t = \mu + \delta g(\sigma_t^2) + \varepsilon_t \quad z_t \sim n.i.d.(0, 1)$$

$$\varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

dove $\delta g(\sigma_t^2)$ rappresenta il *Premio al Rischio*, ovvero l'incremento nel rendimento atteso a fronte di un aumento della varianza del rendimento. E' ragionevole attendersi $\delta > 0$, ovvero una correlazione positiva tra rendimento e volatilità. Di solito vengono utilizzate come funzioni di σ_t^2 :

$$g(\sigma_t^2) = \sigma_t^2 \quad g(\sigma_t^2) = \sqrt{\sigma_t^2} \quad g(\sigma_t^2) = \ln(\sigma_t^2)$$

I modelli TGARCH sono quei modelli in cui la volatilità reagisce in modo diverso a seconda che le news siano positive o negative e sono del tipo:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t \quad z_t \sim n.i.d.(0, 1)$$

$$\varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma \max(0, -\varepsilon_{t-1}^2)$$

dove γ :

- se maggiore di 0, si ha effetto leva e quindi un impatto asimmetrico;
- se uguale a 0, non si ha effetto leva e quindi un impatto simmetrico.

3.4 Prezzaggio di opzioni con modelli GARCH

3.4.1 Misura fisica P e Misura Neutrale al rischio Q

Sia $\varphi(S_T)$ il payoff dell'opzione, dato dal valore intrinseco dell'opzione. Un modo di valutare il valore di un'opzione è quello tramite la valutazione neutrale al rischio. Il

valore S_T dell'asset alla maturità non è certo, e può essere trattato come il risultato di una variabile casuale, di conseguenza anche il *Payoff*, $\varphi(S_T)$ è una variabile casuale, e dipende dalla probabilità che $S_T > K$ per una call ($S_T < K$ per una put). A causa di questa casualità è ragionevole prezzare le opzioni mediante il suo valore atteso (ovvero la media di tutti gli scenari possibili pesati per le rispettive probabilità).

In un mondo di investitori avversi al rischio deve essere:

$$S_t < \exp(-r_f(T-t))E_P[S_T]$$

dove il valore atteso è legato alla rischiosità del titolo. La misura di probabilità indotta da tale processo viene detta *misura fisica o naturale* perché è la vera distribuzione in base alla quale, in genere, i titoli caratterizzati da maggiore rischiosità hanno un rendimento atteso più elevato (premio al rischio positivo). Nonostante il calcolo di $E_P[S_T]$ non sia scontato è possibile calcolarlo sotto alcune ipotesi, quali la lognormalità del sottostante. Ma poiché nella formula vi è una disuguaglianza tale formula è di scarsa utilità ai fini della valutazione dell'opzione.

Per la valutazione si usa allora l'ipotesi dell'assenza di arbitraggio, sotto questa ipotesi esiste almeno un processo con relativa misura Q equivalente a P tale che

$$S_t = \exp(-r_f(T-t))E_P[S_T]$$

La misura Q viene detta *misura neutrale al rischio o misura martingala equivalente*, e se il mercato è completo questa misura è unica. Il cambio di misura di probabilità, dalla misura P alla misura Q , in termini matematici, avviene tramite il Teorema di Girsanov. Il valore di un contratto call è dato da

$$c_t = \exp(-r_f(T-t))E_Q[\varphi(S_T)]$$

mentre il valore di un contratto put è dato da

$$p_t = \exp(-r_f(T-t))E_Q[\varphi(S_T)]$$

Dunque se viene fornito il processo corrispondente alla misura fisica P e il corrispondente processo martingala equivalente Q , stimando i parametri ignoti del processo fisico P e sostituendoli nel processo neutro al rischio, è possibile stimare

il valore atteso nella formula per mezzo di una media aritmetica di payoff simulati dal processo Q.

3.4.2 Modello di Duan

Se consideriamo un'economia a tempo discreto e si indica con S_t il prezzo del sottostante al tempo t , il suo tasso di rendimento in un periodo di tempo è assunto essere condizionatamente distribuito lognormale sotto una misura di probabilità P , quindi:

$$r_t = r_f + \lambda\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \varepsilon_t$$

dove ε_t ha media 0 e varianza condizionata σ_t^2 sotto la misura P , r_f è il tasso di rendimento di un titolo privo di rischio, λ è il premio al rischio. Se si assume che ε_t segua un processo GARCH(p,q) sotto misura di probabilità P si ottiene

$$\varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

con $p \geq 0$, $q \geq 0$, $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, p$ $\beta_j \geq 0$, $\forall j = 1, \dots, q$

Quindi la varianza condizionata è determinata da una funzione lineare degli epsilon passati al quadrato e dal passato della varianza condizionata. Il processo GARCH(p,q) si riduce a un processo lognormale omoschedastico nel modello standard di Black e Scholes se $p = 0$ e $q = 0$. Questo assicura che il modello Black e Scholes sia un caso particolare del modello precedentemente specificato.

Si è visto in precedenza come nel modello Black e Scholes la propensione al rischio degli investitori non abbia alcun ruolo nel determinare la valutazione delle opzioni. Infatti i termini che dipendono dal tasso di rendimento atteso del titolo, il cui livello a sua volta dipende dalla propensione al rischio, non compaiono nell'equazione differenziale di Black e Scholes. Nella soluzione di questa si può ottenere la neutralità al rischio di tutti gli operatori, imponendo che il tasso di rendimento atteso di tutti i titoli siano uguali al risk-free, cioè $E[S_t/S_{t-1}] = \exp(r_f)$, cioè $E[S_t/S_{t-1}] = \exp(r_f)$ A causa dell'eteroschedasticità, il modello Black e Scholes

non è più valido, poiché evidentemente occorre tener conto della presenza di varianza non costante.

Duan definisce la misura di probabilità neutrale al rischio in modo tale che il modello di volatilità rimanga qualitativamente lo stesso.

Definizione 3.2 Si dice che una misura Q per la determinazione del prezzo soddisfa LRNVR(Locally risk neutrally valuation relationship) o la Valutazione Neutrale al Rischio Locale (VNRL) se la Misura Q è mutuamente e assolutamente continua rispetto alla misura P e $S_t/S_{t-1}|I_{t-1}$ si distribuisce in maniera lognormale sotto la misura Q

$$E^Q[S_t/S_{t-1}|I_{t-1}] = \exp(r_f)$$

$$Var^Q(\ln(S_t/S_{t-1})|I_{t-1}) = Var^P(\ln(S_t/S_{t-1})|I_{t-1})$$

quasi certamente rispetto alla misura P . Nella *definizione 3.2* le varianze condizionate sotto le due misure sono richieste essere uguali. Questo è desiderabile perché si può osservare e quindi stimare la varianza condizionata sotto misura P . Questa proprietà e il fatto che la media condizionata può essere sostituita dal tasso privo di rischio produce un modello ben specificato che non dipende localmente dalle preferenze. La Valutazione Neutrale al Rischio Locale (VNRL) è comunque insufficiente per eliminare i parametri di preferenza. Tuttavia, il modello aggiustato è abbastanza per ridurre ogni considerazione di preferenza verso il premio al rischio λ . Questa asserzione sarà verificata più tardi nel *teorema 3.2*.

Nel *teorema 3.1* l'uguaglianza delle varianze condizionate è una relazione quasi certa. Fin quando Q è assolutamente continua rispetto a P , la relazione quasi certa sotto P rimarrà valida anche sotto Q . Duan prova che sotto opportune condizioni per le preferenze dell'investitore la VNRL è valida.

Teorema 3.1 Se l'agente rappresentativo è colui che massimizza l'utilità attesa e la funzione d'utilità è separabile nel tempo e additiva, allora la VNRL resiste sotto le tre seguenti condizioni:

- La funzione di utilità è *absolute risk aversion* e i cambiamenti logaritmici del processo aggregato sono distribuiti normalmente con media costante e varianza sotto misura P;
- La funzione di utilità è *relative risk aversion* e i cambiamenti logaritmici del processo aggregato sono distribuiti normalmente con media costante e varianza sotto misura P;
- La funzione di utilità è lineare.

La media costante e la varianza assunta per il processo in 1 e 2 del teorema assicura che il tasso d'interesse impiegato sia costante. Quindi questo garantisce la consistenza con l'assunzione del tasso d'interesse costante fatta in precedenza. Sebbene sia possibile sviluppare il modello con tassi d'interesse stocastici, il modello risultante diventerebbe considerevolmente complicato. L'assunzione del tasso d'interesse costante permette il confronto con il modello di Black e Scholes solamente nella dimensione dell'eteroschedasticità.

Duan presenta il seguente teorema che descrive l'implicazione del VNRL.

Teorema 3.2 La VNRL implica che sotto la misura Q:

$$z_t \sim n.i.d.(0, 1)$$

$$\xi_t | I_{t-1} \sim N(0, \tilde{\sigma}_t^2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_t^2 &= \omega + \alpha(\xi_{t-1} - \lambda \tilde{\sigma}_{t-1})^2 + \beta \tilde{\sigma}_{t-1}^2 = \\ &= \omega + \alpha(r_{t-1} - r_f + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_{t-1}^2 - \lambda \tilde{\sigma}_{t-1})^2 + \beta \tilde{\sigma}_{t-1}^2 \end{aligned}$$

Il teorema 3.2 implica che la forma del processo GARCH(p,q) rimane valida rispetto a VNRL. L'innovazione della varianza è governata da p variabili casuali chi-quadrato non centrali ognuna con un grado di libertà, mentre il processo GARCH, sotto misura di probabilità P, può essere visto come un processo governato da p innovazioni chi quadrato centrali. Il parametro di non centralità comune per il processo di varianza condizionata sotto misura Q è il premio per il rischio, λ . Per

vedere ciò si necessita di portare fuori il fattore σ_{t-i} dai termini entro le parentesi e ammettere che ξ_{t-i}/σ_{t-i} è una variabile casuale normale standard sotto la misura \mathbb{Q} .

Il *teorema 3.2* suggerisce che il premio per il rischio, λ influenza il processo di variabilità condizionata sebbene il rischio sia stato localmente neutralizzato sotto la misura \mathbb{Q} per la determinazione del prezzo. In altre parole, VNRL, è non equivalente a RNVR, dove l'RNVR equivale alla Valutazione Neutrale al Rischio Globale (VNRG). La necessità di distinguere tra Valutazione Neutrale al Rischio Locale e Globale scompare quando i coefficienti che governano la varianza dell'errore sono uguali a zero, e quindi si assume omoschedasticità.

Per calcolare i payoff sui derivati, si richiede l'aggregazione dei rendimenti sul sottostante per giungere ad un possibile prezzo finale riferito ad un futuro istante nel tempo T .

Il prezzo finale del sottostante è derivato nel seguente corollario:

Corollario 3.1

$$S_T = S_t \exp \left((T-t)r_f - \frac{1}{2} \sum_{s=t+1}^T \sigma_s^2 + \sum_{s=t+1}^T \varepsilon_s^2 \right)$$

Il prezzo del sottostante, attualizzato al tasso privo di rischio, possiede delle proprietà tipiche di un processo Martingala. Harrison e Kreps stabilirono per primi l'importanza di questa proprietà per la teoria della determinazione del prezzo dell'opzione. L'approccio della valutazione neutrale verso il rischio viene a volte chiamato 'misura equivalente martingala' (equivalent martingale measure). Sotto la specificazione GARCH(p,q) una opzione call di tipo europeo con prezzo d'esercizio K e con scadenza T ha valore al tempo t uguale a:

Corollario 3.2

$$C_t = \exp(-(T-t)r_f) E^{\mathbb{Q}}[\max(S_T - K, 0) | I_t]$$

Sotto la specificazione GARCH(p,q), I_t è la sigma-algebra generata da $S_t, \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_{t-p+1}, \sigma_t^2, \dots, \sigma_{t-q+1}^2$. Una semplificazione sostanziale con riferimento I_t , può essere ottenuta adottando il modello più popolare, ovvero un GARCH(1,1):

$$\ln(S_t/S_{t-1}) = r_t = r_f - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \epsilon_t = r_f - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \sigma_t z_t \quad z_t \sim n.i.d.(0, 1)$$

$$\epsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega + \alpha(\epsilon - \lambda\sigma_{t-1})^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 = \\ &= \omega + \alpha(r_{t-1} - r_f + \frac{1}{2} \sigma_{t-1}^2 - \lambda\sigma_{t-1})^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \end{aligned}$$

Per un modello GARCH(1,1), S_T e σ_t^2 assieme servono come statistica sufficiente per I_t . In altre parole il GARCH(1,1) non un processo di Markov univariato, ma può essere inteso come un processo di Markov bivariato. Il modello per la determinazione del prezzo dell'opzione GARCH(1,1) esplicitamente riflette lo stato del prezzo del sottostante in due dimensioni: livello di prezzo e volatilità condizionata. Questa dimensione aggiuntiva permette al prezzo del modello di riflettere un'alta o una bassa varianza del sottostante quando lo stato dell'economia cambia.

Purtroppo però quando non sono disponibili formule chiuse per la valutazione dei derivati si deve ricorrere a delle procedure numeriche. Questo perché il prezzo dell'opzione è il valore del payoff atteso, dove il valore atteso è calcolato in riferimento alla distribuzione di probabilità del prezzo a termine del sottostante.

3.4.3 Confronto fra Black e Scholes e GARCH

Sebbene il processo omoschedastico usato da Black e Scholes sia un caso speciale del processo GARCH per la determinazione del prezzo dell'opzione, l'interpretazione del modello Black e Scholes nella struttura GARCH è complicata. Ipotizzando che i rendimenti subordinati al passato siano governati da un processo GARCH; l'idea potrebbe essere quella di applicare il modello Black e Scholes utilizzando la distribuzione marginale dei rendimenti come distribuzione di riferimento. Quindi la varianza da utilizzare nel modello Black e Scholes è pari a:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - (\alpha + \beta)}$$

Si ricorda però che la formula analitica di Black e Scholes richiede una valutazione neutrale al rischio; quindi sotto l'assunzione incorretta di omoschedasticità quando il processo che governa la realtà è eteroschedastico si deve ricorrere non alla

neutralizzazione del rischio di natura globale, ma bensì alla Valutazione Neutrale al Rischio Locale (VNRL) per mantenere la consistenza del modello.

Duan dimostra alcune proprietà del processo GARCH(1,1) dopo aver assunto VNRL. Esso suggerisce che un uso corretto del VNRL modificherà alcune caratteristiche chiave del processo GARCH:

Teorema 3.3: Sotto misura di probabilità Q , se $|\lambda| < \sqrt{(1 - \alpha - \beta)/\alpha}$ allora:

- la varianza marginale stazionaria del processo GARCH è uguale a $\omega[1 - (1 + \lambda^2)\alpha - \beta]^{-1}$;
- il processo è leptocurtico;
- $Cov^Q(\xi|\sigma_t, \sigma_{t+1}^2) = -2\lambda\omega\alpha[1 - (1 + \lambda^2)\alpha - \beta]^{-1}$.

La varianza marginale dei rendimenti GARCH sotto la misura di probabilità originale P è $[\omega(1 - \alpha - \beta)]^{-1}$. E' anche vero che la varianza condizionata è incorrelata con i rendimenti del sottostante ritardati sotto la misura P . Dal teorema 3.3 l'assunzione di VNRL induce un incremento nella varianza marginale $\frac{\omega}{1 - (1 + \lambda^2)\alpha - \beta}$. Ciò comporta anche che la varianza condizionata può essere negativamente (positivamente) correlata con i rendimenti del sottostante ritardati se il premio per il rischio è positivo (negativo).

Come affermato in precedenza, il prezzo dell'opzione Black e Scholes nella struttura GARCH dovrebbe essere interpretato usando un'assunzione incorretta di omoschedasticità e quindi un'incorretta deviazione standard. Dal momento che il processo GARCH sotto assunzione di VNRL è ancora leptocurtico, sarà più probabile per le opzioni out-the-money finire in in-the-money. Questo implica che il prezzo dell'opzione GARCH sarà più elevato di quello Black e Scholes. La leptocurtosi rende più probabile anche il processo inverso, ovvero che un'opzione in-the-money finisca out-the-money; questo comunque non implica prezzi minori per le opzioni in-the-money rispetto ai prezzi Black e Scholes. Ciò è vero perché ci deve essere una compensazione in aumento nella probabilità nel valore più elevato per far sì che le opzioni in-the-money raggiungano uguali valori. Oltre che a queste osservazioni generali, può essere solamente fatto per via numerica.

3.4.4 Il modello Heston-Nandi

Heston-Nandi sviluppano una forma chiusa per i prezzi delle opzioni che seguono un modello GARCH che tiene conto di correlazioni tra rendimento dei prezzi degli assets e varianza così come dei molteplici ritardi. Nel modello di Black e Scholes i prezzi sono funzione prezzo corrente, mentre nel modello GARCH i prezzi sono funzione dei prezzi correnti e ritardati. Test empirici mostrano che il modello GARCH commette sostanzialmente errore inferiore rispetto al modello di Black e Scholes.

Il modello si basa su due assunzioni.

Assunzione(1) Il prezzo S_t segue il seguente processo con intervallo $\Delta=t-(t-1)$:

$$z_t \sim n.i.d.(0, 1) \quad \varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i (z_{t-i} - \gamma \sigma_{t-i})^2 + \sum_{j=1}^q \beta \sigma_{t-j}^2$$

dove r_f è il tasso privo di rischio, z_t si distribuisce come una Normale Standard, σ_t^2 è la varianza condizionata. Heston Nandi si focalizzano su $p = 1$ e $q = 1$, quindi considerando

$$r_t = r_f + \lambda \sigma_t^2 + \varepsilon_t = r_f + \lambda \sigma_t^2 + \sigma_t z_t$$

$$z_t \sim n.i.d.(0, 1) \quad \varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha (z_{t-1} - \gamma \sigma_{t-1})^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

Il processo è stazionario con media e varianza finita se:

$$\beta + \alpha \gamma^2 < 1$$

In generale la varianza del processo e il log-prezzo sono correlati:

$$\text{Cov}(\sigma_{t+1}^2, \log(S_t)) = -2\alpha\gamma\sigma_t^2$$

Un valore positivo di γ risulta una correlazione negativa tra log-prezzo e la varianza. Questo è coerente con l'*effetto leva*. Il parametro γ controlla l'asimmetria della distribuzione dei log-rendimenti e la distribuzione è simmetrica se γ è uguale a 0, α determina la curtosi della distribuzione e se uguale a 0 implica una varianza deterministica.

Il parametro γ risulta influenza asimmetrica di shocks. Un grande shock positivo, z_t , colpisce diversamente che un grande shock negativo, quindi determina il contributo di uno shock negativo dei rendimenti sulla varianza condizionata.

Quindi questa generalizzazione del modello GARCH permette agli shock negativi sui rendimenti di incrementare maggiormente la volatilità. Questa asimmetria è chiamata *Leverage o effetto leva*.

Assunzione (2) Il valore di un'opzione call osserva la formula Black e Scholes e Rubinstein.

Sotto la misura Q diventa:

$$\begin{aligned} r_t &= r_f - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \varepsilon_t = r_f - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \sigma_t z_t \\ z_t &\sim n.i.d.(0, 1) \quad \varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega + \alpha(z_{t-1} - (\gamma + \lambda + \frac{1}{2})\sigma_{t-1})^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \\ &= \omega + \alpha(((r_{t-1} - r_f - \frac{1}{2}\sigma_{t-1}^2)/\sigma_{t-1}) - (\gamma + \lambda + \frac{1}{2})\sigma_{t-1})^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \end{aligned}$$

Per ottenere il modello sotto la misura Q , quindi, basta sostituire λ con $\lambda^* = -0.5$ e γ con $\gamma^* = \gamma + \lambda + 0.5$. Quindi, la prima assunzione è che i log-prezzi seguano un particolare processo di tipo GARCH, mentre la seconda assunzione del modello implica che il modello interessa il prezzaggio di opzioni e altri derivati sicuri. Il prezzo ha una distribuzione condizionata log-normale su un periodo. Visto che la varianza è non stocastica su questo intervallo assumiamo la formula chiusa di Black-Scholes-Rubinstein.

3.4.5 Modello di Duan et al. (GJR)

Duan et al (2004) estendono le formule per la valutazione delle opzioni europee tramite altre 2 nuove specificazioni di modelli GARCH, il GJR e l'EGARCH, ma ai fini della nostra analisi quello che considereremo è il GJR o GARCH a soglia o TGARCH. La scelta di questi due modelli sta nel fatto che viene considerato *l'effetto leva*.

Il modello:

$$r_t = r_f + \lambda\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \varepsilon_t = r_f + \lambda\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \sigma_t z_t$$

$$z_t \sim n.i.d.(0, 1) \quad \varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 + \gamma \max(0, -\varepsilon_{t-1}) \\ &= \omega + \alpha(r_{t-1} - r_f - \lambda\sigma_{t-1} + \frac{1}{2}\sigma_{t-1}^2)^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 + \gamma \max(0, -\varepsilon_{t-1})^2 \end{aligned}$$

Il T-Garch impone come restrizioni: $\omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$ per garantire la positività della varianza condizionata. Il parametro γ determina come l'effetto leva viene incorporato nel modello. E' importante notare come la varianza condizionata sia un processo predittivo sotto queste assunzioni perchè σ_t^2 è espresso solo in termini di variabili che sono conosciute fino al tempo t-1.

Duan dimostra che sotto la Valutazione Neutrale al Rischio Locale (VNRL), quindi sotto la misura \mathbb{Q} , i log-rendimenti sono dati da

$$r_t = r_f - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \varepsilon_t = r_f - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \sigma_t z_t$$

$$z_t^* \sim n.i.d.(0, 1) \quad \varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_t^2 &= \omega + \alpha \sigma_{t-1}^2 (z_{t-1}^* - \lambda)^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma \max(0, -\varepsilon_{t-1}^2) \\
&= \omega + \alpha \left(r_{t-1} - r_f + \frac{\sigma_{t-1}^2}{2} \right)^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\
&\quad + \gamma \sigma_{t-1}^2 \max \left(0, - \left(\frac{r_{t-1} - r_f + \frac{\sigma_{t-1}^2}{2}}{\sigma_{t-1}} \right) + \lambda \right)^2
\end{aligned}$$

L'innovazione casuale $z_t^* = z_t + \lambda$ è una variabile casuale normale standard con rispetto per la misura Q. La varianza condizionata è stazionaria se $\beta + (\alpha + \gamma N(\lambda))(1 + \lambda^2) + \gamma \lambda n(\lambda) < 1$,

dove $N(\cdot)$, $n(\cdot)$ stanno rispettivamente per la distribuzione Normale Standard e la funzione di densità.

La condizione di stazionarietà sotto misura Q è diversa da quella sotto misura P che è $\alpha + \beta + \gamma/2 < 1$, la differenza emerge dal parametro premio al rischio λ .

3.5 Least Squares Monte Carlo (LSM)

Per valutare le opzioni americane è necessario scegliere tra l'esercizio e il non esercizio, in ogni istante in cui l'esercizio anticipato è possibile. In genere, il valore dell'opzione esercitata è facile da determinare ma il valore nel caso in cui non venga esercitata invece è più complicato, infatti soltanto con il metodo Monte Carlo non si è in grado di stimare il prezzo di un'opzione americana, come invece è possibile per le opzioni europee, in quanto subentra il problema della necessità di determinare simultaneamente la strategia d'esercizio ottimale.

Alcuni ricercatori Longstaff e Schwartz (2001), hanno suggerito una procedura per determinare, con il Metodo Monte Carlo, il valore dell'opzione non esercitata. Il loro approccio consiste nello stimare con i Minimi Quadrati (Least Squares) la relazione tra il valore dell'opzione non esercitata e il valore delle variabili rilevanti, in ogni istante in cui l'esercizio anticipato è possibile.

Uno dei problemi più importanti nel prezzaggio delle opzioni è la valutazione dell'esercizio anticipato di derivati di tipo americano. Questo tipo di derivati si trovano in tutti i maggiori mercati finanziari. Longstaff e Schwartz (2001) presentano un

semplice ma potente approccio per approssimare il valore delle opzioni americane tramite simulazioni.

Quindi possiamo stimare i parametri sotto misura la P dei tre modelli sopra proposti, trovare la misura Q , come già fatto, e sostituire i parametri stimati sotto misura P nel modello sotto la misura Q e simulare con il metodo Monte Carlo MC sentieri di lunghezza $(T-t)$. Adesso si può applicare il metodo LSM.

Si inizia con il calcolo dei payoff al tempo T che sono identici sia per quanto riguarda le opzioni europee che quelle americane. Si procede con il calcolo dei payoff al tempo $T-1$.

Sia

$$\varphi(S_T)exp(-r_f) = a + bS_{T-1} + cS_{T-1}^2 + \varepsilon$$

dove a , b , c sono i parametri da stimare con il metodo dei minimi quadrati. Se poniamo

$$\varphi(S_T)exp(-r_f) = Y$$

allora la precedente regressione può essere scritta come:

$$Y = a + bS_{T-1} + cS_{T-1}^2 + \varepsilon = E[Y|S_{T-1}] + \varepsilon$$

Per decidere se conviene esercitare l'opzione anticipatamente o meno, si calcolano innanzitutto i payoff al tempo $T-1$ nel caso di non esercizio, si vedono i payoff in-the-money al tempo $T-1$, si prendono i corrispondenti payoff al tempo T , e si attualizzano di un periodo con un tasso d'interesse privo di rischio e si applica la capitalizzazione continua, cioè e^{r_f} . Il payoff al tempo T attualizzato di un periodo corrisponde a Y della regressione (della formula sopra citata) che si fa regredire rispetto ad una costante, al prezzo simulato del sottostante S al tempo $T-1$ e al prezzo simulato del sottostante al quadrato (S^2) al tempo $T-1$. Si stima il modello con i minimi quadrati (Least Squares), le stime dei parametri si sostituiscono nel modello di regressione e si ottiene così la stima del seguente valore atteso condizionato

$$\hat{E}[Y|S_{T-1}] = \hat{a} + \hat{b}S_{T-1} + \hat{c}S_{T-1}^2$$

Per decidere se esercitare o non anticipatamente l'opzione, confrontiamo il valore ottenuto dal valore atteso condizionato stimato $\hat{E}[Y|S_{T-1}]$, con i payoff al tempo T-1. Se il valore atteso condizionato stimato è maggiore del payoff al tempo T-1 allora l'opzione non si esercita anticipatamente. Si fa questo procedimento fino al tempo t=1, e una volta trovati tutti i payoff per i quali è conveniente esercitare l'opzione in ogni istante di tempo, si fa la media di tali payoff attualizzati per istanti diversi a seconda che sia più conveniente esercitare l'opzione alla scadenza (al tempo T) o in altri istanti prima, e si trova così il prezzo dell'opzione di tipo americano.

Lars Stentoft(2004) mostra come i metodi di simulazione possono essere usati per prezzare le opzioni americane in una struttura GARCH usando il modello di Duan (1995) unito al metodo Least Squares Monte Carlo (LSM), metodo di Longstaff Schwartz (2001).

Capitolo 4

Analisi empirica

4.1 Introduzione all'analisi empirica

In questo capitolo affronteremo praticamente tutto ciò che è stato proposto fino ad adesso nella teoria. Obiettivo del lavoro è cercare di valutare più accuratamente possibile le opzioni di tipo europeo e americano.

Innanzitutto, ci soffermeremo sul prezzaggio di opzioni americane, in particolare modo, sul metodo per valutarle, proposto da Longstaff e Schwartz (2001), che combina il metodo Monte Carlo, simulando i prezzi del sottostante, con il Metodo dei Minimi Quadrati. Quello che cercheremo di fare è mettere insieme i modelli per il prezzaggio di opzioni europee mediante i modelli GARCH, quindi i modelli di Duan (1995), Heston-Nandi (2000), Duan et al. (2004) con l'approccio LSM Longstaff e Schwartz (2001), metodo specifico per il calcolo delle opzioni americane, e verificheremo quale dei tre modelli sia più accurato.

Una volta ottenute le stime dei prezzi delle opzioni dai nostri modelli, ne verificheremo la correttezza con degli indici costruiti mettendo a confronto i prezzi stimati con i prezzi osservati (o di mercato). I confronti verranno effettuati tra i modelli GARCH, che assumono ipotesi di eteroschedasticità e non gaussianità per le opzioni americane.

Successivamente poiché i prezzi delle opzioni vengono calcolati dai prezzi dell'azione simulati, quindi i prezzi simulati S al tempo T assumono una distribuzione, verificheremo che il prezzo del sottostante osservato al tempo T non sia presente nelle code.

Vedremo se la valutazione di opzioni europee mediante l'utilizzo dei modelli GARCH sia più accurata di quella del modello Black e Scholes (che assume ipotesi di omoschedasticità e di gaussianità) verificando quanto variano rispetto ai prezzi stimati con Black e Scholes, dopo esserci soffermati sul confronto della distribuzione dei prezzi del sottostante simulati al tempo T con il prezzo del sottostante di mercato (poiché le opzioni considerate sono di tipo americano, e quindi non abbiamo prezzi di mercato per opzioni europee).

Altro punto che cercheremo di ottenere è quello di calcolare i payoff realizzati, ovvero quanto sia convenuto esercitare l'opzione a chi l'ha acquistata, considerando anche il costo iniziale della stessa, quindi a prescindere che il payoff, dato dalla differenza tra il prezzo d'esercizio e il prezzo del sottostante per una put e viceversa per una call, sia positivo.

Per cercare di fare quanto appena descritto, considereremo 10 opzioni americane call e 10 opzioni americane put da Datastream, sullo stesso sottostante (il titolo azionario Fiat), tutte con la stessa scadenza, ma con durata diversa e con prezzo di esercizio diverso. Il motivo per il quale abbiamo considerato più opzioni per lo stesso sottostante è quello di cercare di ottenere una stima dei prezzi delle opzioni non distorta, facendo una media pesata delle stime dei prezzi ottenute da tutte le opzioni, procedura ottenuta per ogni modello.

Quindi utilizzando la serie dei prezzi del titolo azionario Fiat con periodo che va dal 21 Giugno 2006 al 21 Giugno 2009 (con frequenza giornaliera), e verificando che la serie dei log-rendimenti segua un processo GARCH, possiamo stimare i log-rendimenti sotto la misura P delle 10 opzioni caricate, ottenendo così le stime dei parametri del GARCH sotto misura P , e simulare i prezzi $(T-t)$ passi in avanti sotto la misura Q (utilizzando le stime dei parametri sotto la misura P). La serie dei prezzi considera gli stacchi dei dividendi che, nel periodo in cui le opzioni possono essere esercitate, avvengono il 19 Aprile 2010 e 18 Aprile 2011.

I prezzi delle opzioni europee vengono ottenuti facendo una media dei payoff al tempo T , attualizzandoli fino al tempo t , ad un tasso d'interesse r_f , pari al tasso privo di rischio, dove noi considereremo, il tasso Euribor. I prezzi delle opzioni americane possono essere esercitate in ogni istante a differenza di quelle europee, quindi occorre verificare se per ogni periodo è conveniente esercitarle oppure no, e questo avviene tramite il metodo LSM di Longstaff e Schwartz (2001) come già

detto.

Le analisi dei residui e dei residui standardizzati mostrate per i tre modelli sono state svolte per tutte le opzioni ma presentate per un'unica opzione, poiché sostanzialmente non cambiava nulla.

4.2 Analisi dei prezzi e dei log-rendimenti Fiat

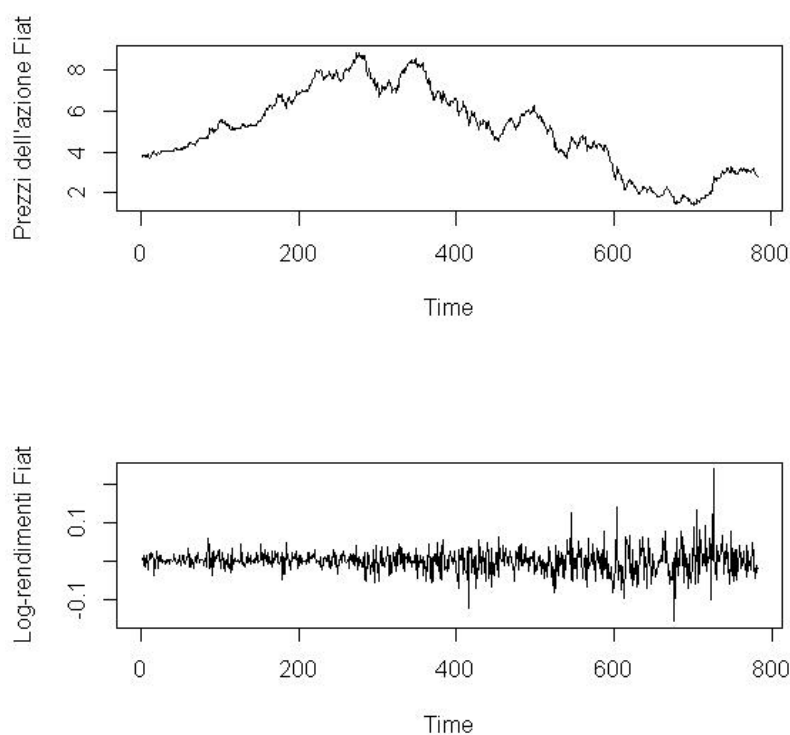


Figura 4.1: Grafici della serie dei prezzi e dei log-rendimenti dell'azione Fiat

I prezzi dell'azione Fiat seguono un processo martingala, processo per la quale si può fare una previsione sulla varianza condizionata, a differenza di quanto accade con il processo Random Walk in cui si assumono errori indipendenti; entrambi i processi sono processi integrati di ordine 1, che si indicano con la sigla $I(1)$, in quanto occorre differenziarli una sola volta per ottenere un processo stazionario. Infatti come si vede dalla seguente figura 4.1 possiamo notare che dopo aver diffe-

renziato la serie dei prezzi, i log-rendimenti sono stazionari e presentano circa una media pari a 0.

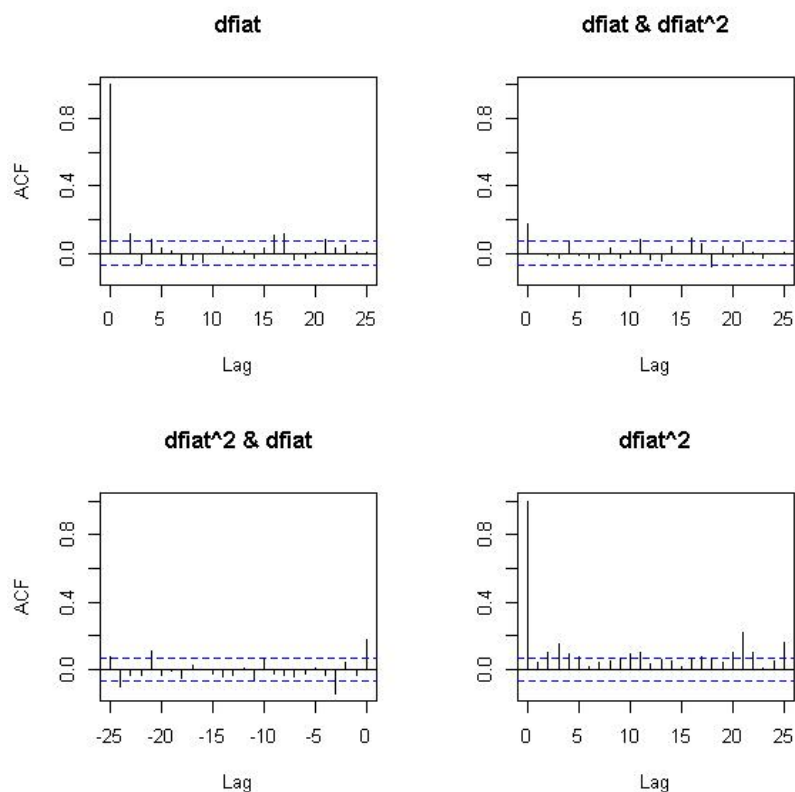


Figura 4.2: CCF della serie dei log-rendimenti sui livelli e al quadrato dell'azione Fiat

I log-rendimenti del titolo azionario Fiat presentano circa una media pari a zero (come già si poteva notare dal grafico), sono leptocurtici in quanto presentano indice di Kurtosi maggiore di tre e presentano un'asimmetria positiva in quanto l'indice di asimmetria non è pari a zero ma è maggiore. Quindi non presentano una distribuzione normale e questo viene confermato anche dal test di Jarque-Bera con p-value pari a $< 2.2e-16$, quindi rifiutiamo l'ipotesi nulla che i log-rendimenti abbiano distribuzione normale. Ciò può essere confermato anche dal qqnorm. Inoltre possiamo notare dalla funzione correlazione incrociata (CCF) che vi è una certa relazione fra i log-rendimenti ed i log-rendimenti al quadrato, i log-rendimenti al quadrato sono correlati, mentre quelli sui livelli non sono correlati.

<i>Statistiche</i>	Log-rendimenti Fiat
Numero osservazioni	782
Media	-3.9e-04
Varianza	0.001
Dev.St.	0.031
Asimmetria	0.553
Curtosi	6.786
Jarque-Bera	1551.814
p-value JB	< 2.2e-16

Tabella 4.1: Statistiche sui log-rendimenti dell'azione Fiat

Si può notare anche dal test di Ljung-Box che vi è incorrelazione sui livelli e correlazione sulla serie al quadrato, in quanto nel primo caso accettiamo l'ipotesi nulla ad un livello di significatività del 5%, mentre nel secondo caso la rifiutiamo ad un livello di significatività del 5%.

<i>Ljung-Box</i>	Serie Fiat	P-value	Serie Fiat al quadrato	P-value
lag 1	0.52	0.47	12.64	<0.01
lag 10	13.00	0.22	118.26	<0.01
lag 20	29.29	0.08	245.64	<0.01

Tabella 4.2: Statistica Ljung-Box sui log-rendimenti dell'azione Fiat

4.3 Modello di Duan

Il modello di Duan come visto nel precedente capitolo è dato da:

$$r_t = r_f + \lambda \sigma_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \varepsilon_t$$

dove ε_t ha media 0 e varianza condizionata σ_t^2 sotto la misura P, r_f è il tasso di rendimento di un titolo privo di rischio, λ è il premio al rischio.

Se si assume che ε_t segua un processo GARCH(p,q) sotto misura di probabilità P si ottiene:

$$\varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

i residui stimati sono dati da

$$\hat{\varepsilon}_t = r_t - r_f - \hat{\lambda} \sigma_t + \frac{1}{2} \sigma_t^2$$

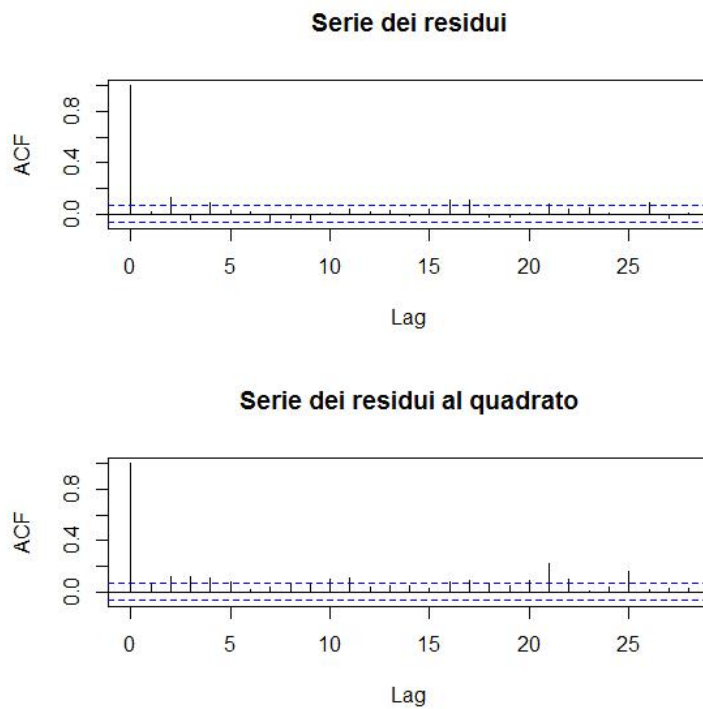


Figura 4.3: ACF residui e residui al quadrato modello Duan dei log-rendimenti Fiat

mentre i residui standardizzati stimati da

$$\hat{z}_t = \left(\frac{r_t - r_f - \hat{\lambda} \sigma_t + \frac{1}{2} \sigma_t^2}{\sigma_t} \right)$$

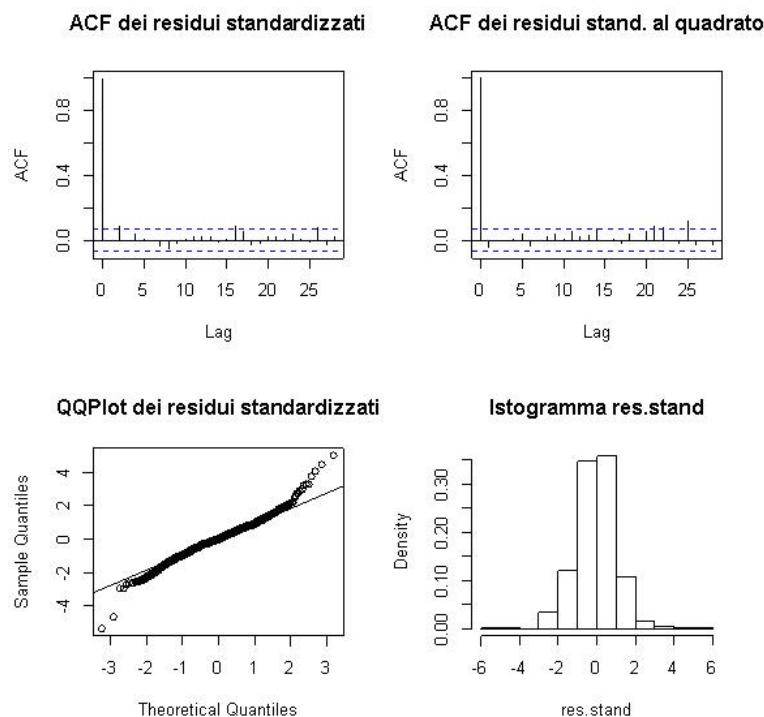


Figura 4.4: Analisi di normalità dei res.standardizzati del modello Duan dei log-rendimenti Fiat

Possiamo notare dalla funzione di autocorrelazione (ACF) dei residui stimati del modello di Duan che appaiono incorrelati sui livelli, e correlati sui quadrati, mentre per quanto riguarda i residui standardizzati possiamo notare che sono incorrelati sia sui livelli che al quadrato, ma non hanno una distribuzione Normale, ciò si può notare dal qqnorm e dall'istogramma dei residui standardizzati sui livelli.

4.3.1 Stime dei parametri con ML

La tabella 4.3 mostra le stime dei parametri, gli standard error, la statistica t ed il P-value relativamente alla stima del modello di Duan, e possiamo notare che i parametri stimati sono significativamente diversi da zero ad un livello di significatività del 5%.

<i>Parametri</i>	Coefficiente	Standard Error	t-stat	P-value
ω	4.8e-05	2.7e-09	17951.387	< 0.01
α	1.7e-01	4.1e-03	44.025	< 0.01
β	7.4e-01	1.6e-02	45.168	< 0.01
λ	-3.1e-01	1.1e-02	-27.686	< 0.01

Tabella 4.3: Stime dei parametri del modello di Duan per l'opzione sull'azione Fiat

4.4 Modello Heston-Nandi

Il modello che viene utilizzato da Heston-Nandi è

$$r_t = r_f + \lambda\sigma_t^2 + \varepsilon_t = r_f + \lambda\sigma_t^2 + \sigma_t z_t$$

$$z_t \sim n.i.d.(0, 1) \quad \varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(z_{t-1} - \gamma\sigma_{t-1})^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

dove r_f è il tasso privo di rischio, z_t si distribuisce come una Normale Standard, σ_t^2 è la varianza condizionata.

i residui stimati sono dati da:

$$\hat{\varepsilon}_t = r_t - r_f - \hat{\lambda}\sigma_t^2$$

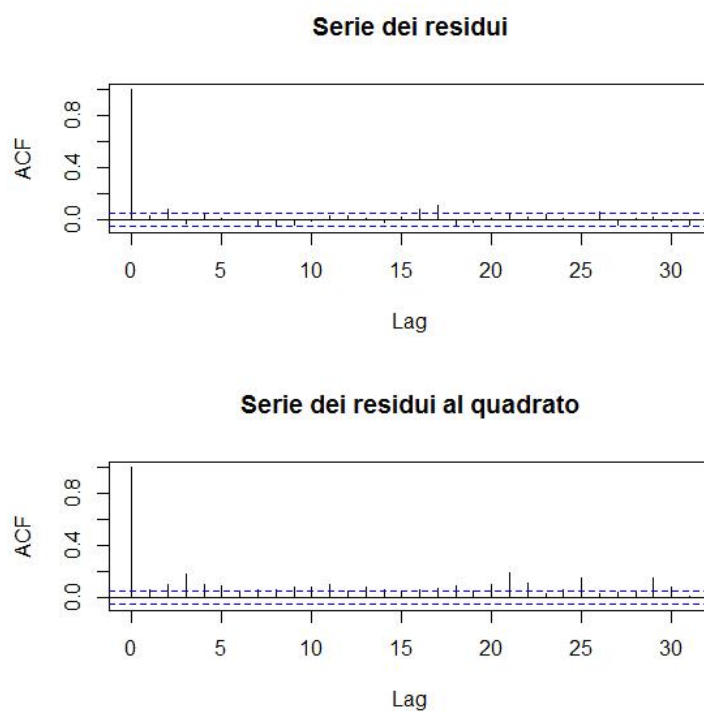


Figura 4.5: ACF residui e residui al quadrato modello Heston-Nandi dei log-rendimenti Fiat

Possiamo notare dalla funzione di autocorrelazione (ACF) dei residui stimati del modello di Heston-Nandi che appaiono incorrelati sui livelli, e correlati sui quadrati, mentre per quanto riguarda i residui standardizzati possiamo notare che sono incorrelati sia sui livelli che al quadrato, ma non hanno una distribuzione Normale, ciò si può notare dal qqnorm e dall'istogramma dei residui standardizzati sui livelli.

mentre i residui standardizzati stimati sono dati da

$$\hat{z}_t = \frac{r_t - r_f - \hat{\lambda}\sigma_t^2}{\sigma_t}$$

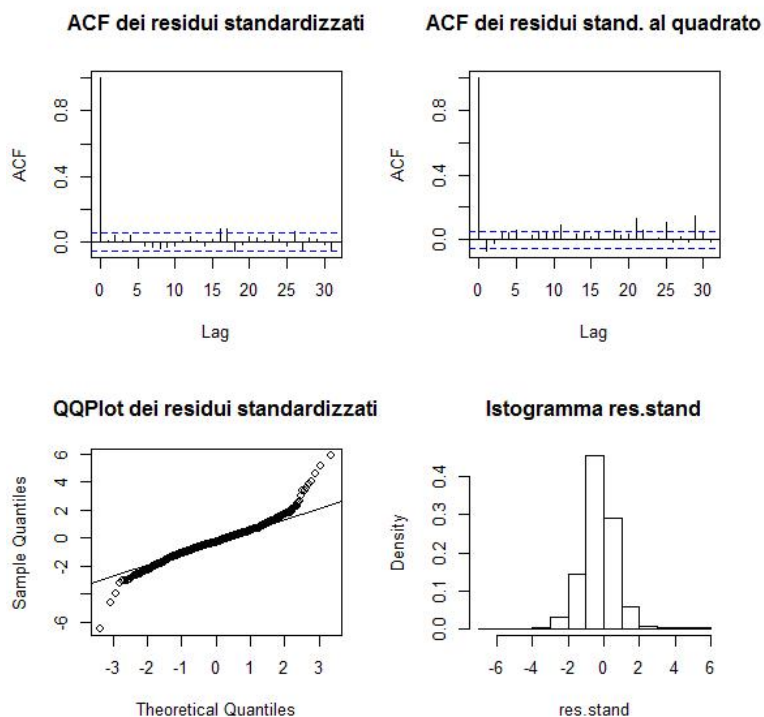


Figura 4.6: Analisi di normalità dei res.standardizzati del modello Heston-Nandi dei log-rendimenti Fiat

4.4.1 Stime dei parametri con ML

<i>Parametri</i>	Coefficiente	Standard Error	t-stat	P-value
ω	1.3e-04	7.6e-09	16864.415	<0.01
α	3.4e-04	3.7e-08	9060.646	<0.01
β	0.558	1.8e-02	3.1e+01	<0.01
λ	-0.02	2.7e-03	-7.407	<0.01
γ	0.095	5.7e-01	1.6e-01	<0.01

Tabella 4.4: Stime dei parametri del modello di Heston-Nandi per l'opzione sull'azione Fiat

La tabella 4.4 mostra le stime dei parametri, gli standard error, la statistica t ed

il pvalue relativamente alla stima del modello di Heston-Nandi, e possiamo notare che i parametri stimati sono significativamente diversi da zero ad un livello di significatività del 5%.

4.5 Modello Duan et al.

Il modello utilizzato dagli autori

$$r_t = r_f + \lambda\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \varepsilon_t = r_f + \lambda\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \sigma_t z_t$$

$$z_t \sim n.i.d.(0, 1) \quad \varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 + \gamma \max(0, -\varepsilon_{t-1}^2) \\ &= \omega + \alpha(r_{t-1} - r_f - \lambda\sigma_{t-1} + \frac{1}{2}\sigma_{t-1}^2)^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 + \gamma \max(0, -\varepsilon_{t-1})^2 \end{aligned}$$

i residui stimati sono dati da

$$\hat{\varepsilon}_t = r_t - r_f - \hat{\lambda}\sigma_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2$$

e i residui standardizzati stimati

$$\hat{z}_t = \frac{r_t - r_f - \hat{\lambda}\sigma_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2}{\sigma_t}$$

Possiamo notare dalla funzione di autocorrelazione (ACF) dei residui stimati del modello di Duan et al. che appaiono incorrelati sui livelli, e correlati sui quadrati, mentre per quanto riguarda i residui standardizzati possiamo notare che sono incorrelati sia sui livelli che al quadrato, ma non hanno una distribuzione Normale, ciò si può notare dal qqnorm e dall'istogramma dei residui standardizzati sui livelli.

4.5.1 Stime dei parametri con ML

La tabella 4.5 mostra le stime dei parametri, gli standard error, la statistica t ed il P-value relativamente alla stima del modello di Duan et al., e possiamo notare che i parametri stimati sono significativamente diversi da zero ad un livello di significatività del 5%.

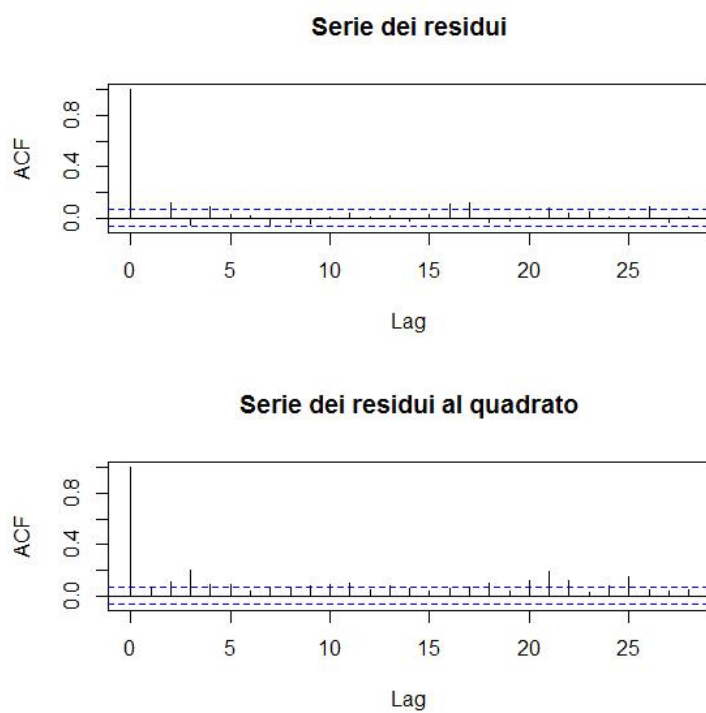


Figura 4.7: ACF residui e residui al quadrato modello Duan et al. dei log-rendimenti Fiat

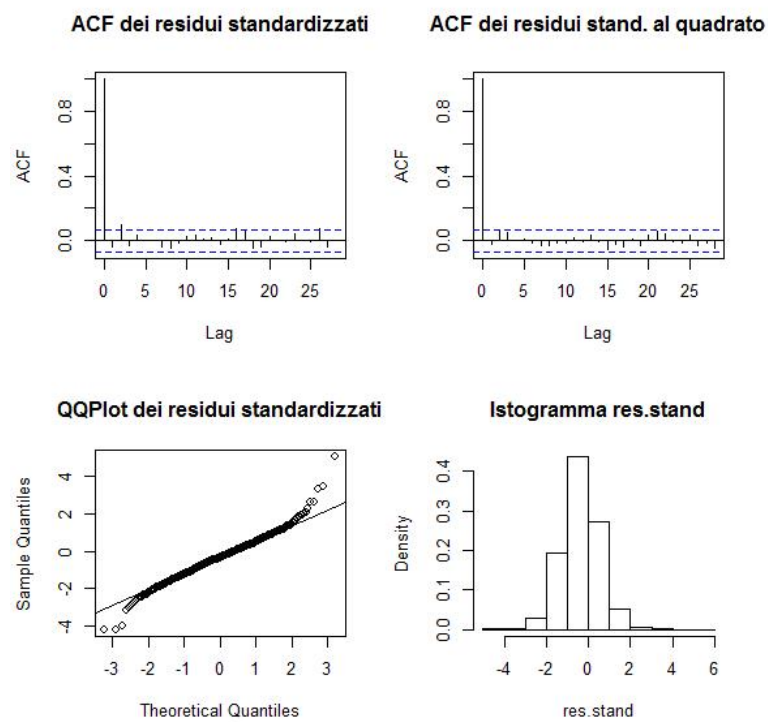


Figura 4.8: Analisi di normalità dei res.standardizzati del modello Duan et al. dei log-rendimenti Fiat

<i>Parametri</i>	Coefficiente	Standard Error	t-stat	P-value
ω	2.1e-03	4.684670e-07	4501.796	<0.01
α	0.016	4.790350e-05	335.976	<0.01
β	0.969	2.805937e-03	345.626	<0.01
λ	0.086	2.378599e-03	36.159	<0.01
γ	4.5e-04	3.9e-07	1129.221	<0.01

Tabella 4.5: Stime dei parametri del modello di Duan et al. per l'opzione sull'azione Fiat

4.6 Distribuzione del sottostante

Vogliamo vedere, conoscendo i prezzi di mercato del sottostante, ed avendo simulato 10000 prezzi al tempo T , S_T (che hanno una distribuzione asimmetrica, in quanto i prezzi sono positivi), se il vero valore del sottostante S_T si trovi nella coda destra, quindi nella probabilità d'errore, e ciò lo facciamo per tutti e tre i modelli.

	Opzioni	P-value osservati	Opzioni	P-value osservati
Opz1	22/06/2009	0.999	22/06/2009	0.875
Opz2	22/07/2009	0.999	15/03/2011	0.949
Opz3	04/08/2009	0.949	21/05/2012	0.900
Opz4	14/09/2009	0.938	15/05/2012	0.759
Opz5	13/10/2009	0.934	24/11/2011	0.946
Opz6	13/10/2010	0.939	14/09/2011	0.949
Opz7	05/11/2010	0.949	06/09/2011	0.948
Opz8	15/03/2011	0.919	09/07/2009	0.858
Opz9	03/08/2011	0.949	23/08/2011	0.848
Opz10	20/06/2011	0.936	11/08/2011	0.939

Tabella 4.6: Distribuzione dei prezzi del sottostante simulati dal modello Duan

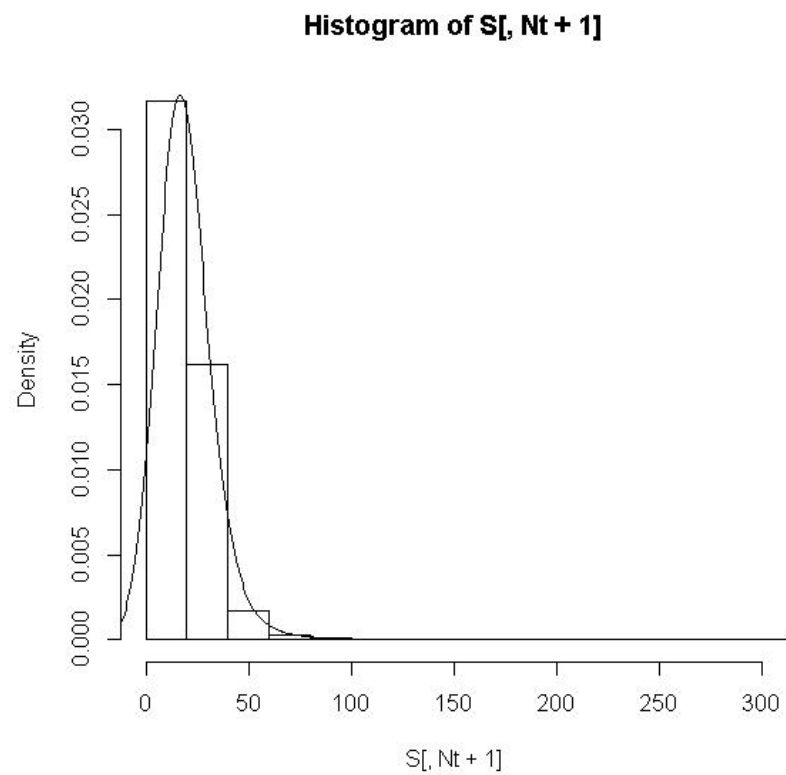


Figura 4.9: Distribuzione dei prezzi simulati del Sottostante al tempo T

	Opzioni	P-value osservati	Opzioni	P-value osservati
Opz1	22/06/2009	0.939	22/06/2009	0.901
Opz2	22/07/2009	0.929	15/03/2011	0.8489
Opz3	04/08/2009	0.949	21/05/2012	0.8688
Opz4	14/09/2009	0.939	15/05/2012	0.8062
Opz5	13/10/2009	0.949	24/11/2011	0.9499
Opz6	13/10/2010	0.939	14/09/2011	0.9499
Opz7	05/11/2010	0.949	06/09/2011	0.9499
Opz8	15/03/2011	0.949	09/07/2009	0.875
Opz9	03/08/2011	0.953	23/08/2011	0.939
Opz10	20/06/2011	0.946	11/08/2011	0.909

Tabella 4.7: Distribuzione dei prezzi del sottostante simulati dal modello Heston-Nandi

	Opzioni	P-value osservati	Opzioni	P-value osservati
Opz1	22/06/2009	0.929	22/06/2009	0.844
Opz2	22/07/2009	0.949	15/03/2011	0.949
Opz3	04/08/2009	0.949	21/05/2012	0.786
Opz4	14/09/2009	0.939	15/05/2012	0.832
Opz5	13/10/2009	0.938	24/11/2011	0.937
Opz6	13/10/2010	0.919	14/09/2011	0.949
Opz7	05/11/2010	0.901	06/09/2011	0.884
Opz8	15/03/2011	0.939	09/07/2009	0.874
Opz9	03/08/2011	0.945	23/08/2011	0.915
Opz10	20/06/2011	0.943	11/08/2011	0.848

Tabella 4.8: Distribuzione dei prezzi del sottostante simulati dal modello Duan et al.

I P-value osservati sono la $P(S_T^{SIM} > S_T)$ quindi rappresentano la probabilità che i prezzi simulati siano maggiori del prezzo di mercato.

4.7 Bontà dei modelli

Sia il prezzo dell'opzione stimato e sia p_k il prezzo dell'opzione osservato, allora gli indici considerati per la verifica delle stime dei prezzi sono:

- la distorsione in media;

$$BIAS = K^{-1} \sum_{k=1}^K (\hat{p}_k - p_k)$$

- la media degli errori assoluti;

$$AE = K^{-1} \sum_{k=1}^K |\hat{p}_k - p_k|$$

- la media degli errori quadratici;

$$SE = K^{-1} \sum_{k=1}^K (\hat{p}_k - p_k)^2$$

- la distorsione media relativa;

$$RBIAS = K^{-1} \sum_{k=1}^K \left(\frac{\hat{p}_k - p_k}{p_k} \right)$$

- la media degli errori relativi in valore assoluto;

$$RAE = K^{-1} \sum_{k=1}^K \left(\frac{|\hat{p}_k - p_k|}{p_k} \right)$$

- la media degli errori quadratici medi.

<i>Modelli</i>	BIAS	AE	SE
Duan	7.26	7.26	61.54
Heston-Nandi	5	5	28.74
Duan et al.	4.89	5.093	31.31759

Tabella 4.9: Performance dei vari modelli per il prezzaggio di opzioni americane put

<i>Modelli</i>	RBIAS	RAE	RSE
Duan	6.16	6.16	24.31
Heston-Nandi	4.05	4.05	10.63
Duan et al.	3.806564	4.006564	10.50929

Tabella 4.10: Performance dei vari modelli per il prezzaggio di opzioni americane put

<i>Modelli</i>	BIAS	AE	SE
Duan	1.23	1.47	2.69
Heston-Nandi	1.77	2	5.99
Duan et al.	2.44	2.436	8.53

Tabella 4.11: Performance dei vari modelli per il prezzaggio di opzioni americane call

<i>Modelli</i>	RBIAS	RAE	RSE
Duan	0.98	1.04	1.85
Heston-Nandi	1.45	1.51	4.90
Duan et al.	1.96	1.96	10.51

Tabella 4.12: Performance dei vari modelli per il prezzaggio di opzioni americane call

$$RSE = K^{-1} \sum_{k=1}^K \left(\frac{(\hat{p}_k - p_k)^2}{p_k} \right)$$

Di seguito vengono inserite nella tabella gli indici ottenuti per i vari modelli, verificando quale dei modelli ha ottenuto delle stime migliori, ovvero più vicine ai

prezzi osservati.

Notiamo che presentano una distorsione media abbastanza elevata, ciò può essere dovuto dal fatto che si sono utilizzate poche opzioni.

Le distorsioni relative al prezzaggio di opzioni call presentano una distorsione inferiore rispetto a quello per le opzioni put. Per quanto riguarda la valutazione di opzioni put il modello che presenta una minor distorsione è quello di Duan et al. (2004) che stimano le opzioni con un TGARCH o GARCH a soglia. Per la valutazione di opzioni call il modello che presenta una minor distorsione è dato dal modello di Duan (1995) che stima le opzioni con un GARCH in media.

4.8 Stime dei prezzi

<i>Modelli</i>	Prezzi Stimati Call	Prezzi di mercato Call
Duan	3.230	2.177
Heston-Nandi	3.298	2.177
Duan et al.	3.317	2.177

Tabella 4.13: Stime dei prezzi per opzioni call americane

Il prezzo di mercato medio ponderato delle 10 opzioni americane call è 2.177, il modello che ha stimato il prezzo che si discosta meno al prezzo di mercato è quello di Duan.

<i>Modelli</i>	Prezzi stimati Put	Prezzi di mercato Put
Duan	15.711	8.319
Heston-Nandi	13.508	8.319
Duan et al.	13.893	8.319

Tabella 4.14: Stime dei prezzi per opzioni put americane

Il prezzo di mercato medio ponderato delle 10 opzioni americane put è 8.319, il modello che ha stimato il prezzo che si avvicina di più al prezzo di mercato è quello di Heston-Nandi.

<i>Modelli</i>	Prezzi stimati Put	Prezzi stimati Call
Duan	-94.15%	-8.61%
Heston-Nandi	-94.25%	-27.92%
Duan et al.	-95.77%	-15.73%

Tabella 4.15: Variazioni relative di Black e Scholes rispetto ai modelli GARCH

Le variazioni percentuali delle stime dei prezzi delle opzioni europee rispetto a quelle di Black e Scholes sono considerevoli, e notando che i confronti effettuati con i prezzi simulati con il prezzo di mercato favoriscono i processi GARCH, possiamo dire che i prezzi stimati con Black e Scholes sono distorti perché si discostano da quelli GARCH.

4.9 Payoff realizzato

Il Payoff realizzato rappresenta quanto realmente la persona che ha acquistato una call o una put ha ottenuto un ricavo, ovvero considerando oltre ad un valore alla scadenza positivo, anche il costo dell'opzione in sè.

Quindi abbiamo ottenuto il payoff realizzato per l'opzione_i nel seguente modo

$$E[(\varphi(S_T) - P_{opt})exp(-r_f * (T - t))]$$

dove $\varphi(S_T)$ sarà uguale a

- $\max(S_T - K, 0)$ per un'opzione call;
- $\max(K - S_T, 0)$ per un'opzione put;

Abbiamo calcolato i payoff realizzati per ogni singola opzione, quindi in totale abbiamo stimato 20 payoff realizzati, ottenuti da 10 opzioni call e 10 opzioni put. Per ognuna di essa abbiamo visto quanto in realtà gli sia convenuto all'acquirente acquistarla e facendone una media abbiamo stimato il payoff realizzato medio per l'opzione con sottostante il titolo azionario Fiat, prima solo delle 10 put e delle 10 call, e poi di entrambi.

Essi sono stati calcolati dalla differenza dei payoff delle opzioni e dei prezzi di mercato.

	Opzioni	Payoff Realizzati put	Opzioni	Payoff Realizzati call
Opz1	22/06/2009	0.003	22/06/2009	-0.013
Opz2	22/07/2009	0.008	15/03/2011	-0.157
Opz3	04/08/2009	0.010	21/05/2012	0.008
Opz4	14/09/2009	0.014	15/05/2012	0.222
Opz5	13/10/2009	0.022	24/11/2011	-0.021
Opz6	13/10/2010	0.224	14/09/2011	-0.091
Opz7	05/11/2010	0.287	06/09/2011	-0.081
Opz8	15/03/2011	-0.049	09/07/2009	-0.006
Opz9	03/08/2011	0.125	23/08/2011	-0.119
Opz10	20/06/2011	0.279	11/08/2011	-0.280
	Media Put	0.092	Media Call	-0.054
	Media*	0.019		

Tabella 4.16: Payoff realizzati sia per le call che per le put americane

Le date della colonna Opzioni, rappresentano le date a partire da quando inizia la vita dell'opzione, quindi rappresenta l'istante in cui si sostiene un costo per acquistare l'opzione.

Nella penultima riga vengono considerate le medie dei payoff differenziati per il tipo d'opzione, quindi call e put, mentre nell'ultima riga Media*, la media dei payoff realizzati di tutte le opzioni, sia call che put.

Quindi notiamo che i payoff realizzati per le opzioni put sono tutti positivi tranne l' Opz8, ma sono in media positivi, mentre per quanto riguarda i payoff realizzati dalle opzioni call sono tutti negativi tranne l'Opz3 e l'Opz4 e sono in media negativi, ma considerando i payoff realizzati di tutte le opzioni, quindi sia call che put, otteniamo un payoff realizzato positivo. Quindi possiamo affermare che acquistare un'opzione su un titolo azionario fiat dà in media un utile, ma soprattutto possiamo affermare che è più conveniente acquistare un'opzione put che un'opzione call, infatti le prime danno in media un utile, le seconde in media una perdita.

Conclusioni

Le analisi effettuate sono state svolte considerando che la varianza dei log-rendimenti (con frequenza giornaliera) possa cambiare nel tempo, quindi eteroschedasticità, e che la loro distribuzione marginale sia non gaussiana.

I prezzi delle opzioni europee sono stati valutati su un piano diverso rispetto ai prezzi delle opzioni americane, in quanto le opzioni considerate sono di tipo americano, quindi i prezzi di mercato e il prezzo d'esercizio sono valutati in base al fatto che l'opzione possa essere esercitata in qualsiasi istante.

Confrontando le opzioni sulla base dei sottostanti e quindi vedendo quanto si discostano i prezzi simulati al tempo T per ogni modello con il prezzo di mercato dell'azione al tempo T , tramite il P-value osservato, possiamo dire che la probabilità è compresa fra il 5% e il 95%, quindi accettiamo l'ipotesi che i prezzi del sottostante simulati non si discostano dal prezzo osservato.

Possiamo dire dunque che, per quanto riguarda le opzioni europee, stimare i prezzi con dei modelli GARCH sia più corretto rispetto a quella di Black e Scholes in quanto le variazioni fra le stime ottenute fra le due tipologie di modelli è considerevole.

Per quanto riguarda le stime dei prezzi delle opzioni americane i confronti sono stati effettuati fra i tre modelli GARCH rispetto al prezzo di mercato, ed il modello che ha stimato il miglior prezzo dell'opzione, cioè quello che si discosta meno dal prezzo di mercato è il modello di Duan nel caso di opzioni call, mentre quello di Heston-Nandi al. nel caso di opzioni put.

Inoltre, calcolando i payoff realizzati notiamo che conviene acquistare le opzioni put americane piuttosto che le opzioni call americane in quanto il payoff medio realizzato delle opzioni call è negativo, mentre quello delle opzioni put è positivo. Da queste analisi si evince che i prezzi stimati con i modelli GARCH sono più

realistici e attendibili rispetto a quelli stimati con il modello Black e Scholes.

Bibliografia

- [1] Black F., Scholes M. (1973), *The pricing of Options and Corporate Liabilities*, The Journal of Political Economy, Volume 81, 637-654.
- [2] Duan J. (1995), *The GARCH option pricing model*, Mathematical Finance, 5, 13-32.
- [3] Duan et al. (2004), *Approximating the GJR-GARCH and EGARCH Option Pricing Models Analytically*.
- [4] Gallo G.M., Pacini B. (2002), *Metodi quantitativi per i mercati finanziari*, Carocci.
- [5] Heston S. e Nandi S. (2000), *A closed-form GARCH option valuation model*, Review of Financial Studies, 13, 585-625.
- [6] Hsieh K. C, Ritchken P. (2000), *An Empirical Comparison of GARCH Option Pricing Models*.
- [7] Hull J. (2006), *Opzioni, futures e altri derivati*, Pearson Prentice Hall.
- [8] Iacus S. M.(2011), *Option Pricing and Estimation of Financial Models with R*, First Edition, Wiley.
- [9] Iacus S. M., Masarotto G. (2003), *Laboratorio di Statistica con R*, McGrawHill.
- [10] Longstaff, F. A. e Schwartz E.S. (2001), *Valuing American Options by Simulation: A Simple Least Squares Approach*, Review of Financial Studies, 14, 1, 113-147.
- [11] Pastorello S. (2001), *Rischio e Rendimento*, il Mulino.

- [12] Stentoft L. (2004), *Pricing American Options when the Underlying Asset follows GARCH processes*, School of Economics & Management, University of Aarhus, 322 University Park, DK-8000 Aarhus C, Denmark.