

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA CHIMICA E DEI PROCESSI INDUSTRIALI

**Tesi di Laurea Magistrale in
Ingegneria Chimica e dei Processi Industriali**

**STUDIO NUMERICO DELLA SEGREGAZIONE
DI MATERIALI GRANULARI IN SILI
CON DIVERSI REGIMI DI SCARICO**

Relatore: Prof. Andrea Claudio Santomaso

Correlatore: Ing. Silvia Volpato

Laureando: DAVIDE BERTUOLA

ANNO ACCADEMICO 2014 - 2015

Riassunto

In questo lavoro di tesi si è cercato un metodo per descrivere numericamente il meccanismo di segregazione, fenomeno del quale si sono compiuti molti studi sperimentali ma che è stato poco trattato da un punto di vista numerico con un approccio continuo. Si è analizzato quindi un sistema bifasico in cui una delle fasi fosse un materiale granulare trattato come un pseudo-fluido con una determinata reologia, e al quale è stata applicata un'equazione del trasporto di materia, sviluppata opportunamente per modellare la segregazione.

Per raggiungere questo obiettivo sono state effettuate delle simulazioni, utilizzando il simulatore *COMSOL Multiphysics 4.3*, il quale si serve di un approccio continuo, più adatto per questa trattazione. I risultati ricavati dalle simulazioni sono stati poi confrontati con dei dati sperimentali ottenuti in condizioni simili a quelle imposte nelle simulazioni stesse, con l'obiettivo di verificare la validità del modello di segregazione scelto.

Indice

INTRODUZIONE	1
CAPITOLO 1 – La segregazione nei materiali granulari	3
1.1 TIPI DI MISCELA.....	3
1.2 LA SEGREGAZIONE ED ALCUNI SUOI MECCANISMI.....	4
1.2.1 Meccanismi di segregazione.....	4
1.2.2 Fattori che influenzano la segregazione.....	7
1.3 STUDI PRELIMINARI DI BRIDGWATER (1994).....	8
1.3.1 Percolazione interparticellare.....	8
1.3.2 Migrazione delle particelle.....	8
1.3.3 Segregazione sulla superficie libera.....	9
1.4 STUDI EFFETTUATI SU PIANI INCLINATI.....	9
1.4.1 Modellazione della segregazione: studi di Savage e Lun (1988).....	10
1.4.2 Modellazione della segregazione: studi di Dolgunin <i>et al.</i> (1998).....	10
1.4.3 Modellazione della segregazione: studi di Gray e Thornton (2005).....	11
1.4.4 Modellazione della segregazione: studi di Marks <i>et al.</i> (2011).....	11
1.5 STUDI EFFETTUATI SU SILI.....	12
1.5.1 Modellazione continua: studi di Christakis <i>et al.</i> (2002).....	12
1.5.2 Modellazione discreta: studi di Ketterhagen <i>et al.</i> (2007).....	13
1.6 STUDI EFFETTUATI SU ALTRE GEOMETRIE.....	13
1.6.1 Cumulo di materiale granulare.....	13
1.6.2 Tamburo rotante.....	14
1.6.3 Sistemi vibrati.....	15
1.6.4 Cuvetta anulare.....	15
1.6.5 Scivolo a zig-zag.....	16
CAPITOLO 2 – Modelli numerici per la segregazione	19
2.1 APPROCCIO DISCRETO ED APPROCCIO CONTINUO.....	19
2.1.1 Modello idrodinamico e temperatura granulare.....	19
2.2 MOTO LAMINARE IN UN SISTEMA BIFASICO: LEVEL SET.....	20
2.2.1 Metodo “ <i>Level Set</i> ” e metodo “ <i>Phase Field</i> ”.....	20
2.2.2 Metodo “ <i>Level Set</i> ” conservativo: formulazione matematica.....	21
2.3 MODELLO REOLOGICO DEL MATERIALE GRANULARE.....	23
2.3.1 Bilancio d'energia generale e in funzione dello stato del materiale.....	23

2.3.2	Parametri e variabili del modello reologico.....	24
2.4	MODELLO DELLA SEGREGAZIONE: CHRISTAKIS <i>ET AL.</i> (2002).....	25
2.4.1	Velocità di “deriva” dovuta alla diffusione.....	26
2.4.2	Velocità di “deriva” dovuta allo sforzo di taglio.....	27
2.4.3	Velocità di “deriva” dovuta alla percolazione.....	27
2.5	MODELLO DELLA SEGREGAZIONE: FAN <i>ET AL.</i> (2014).....	28
2.5.1	Velocità di percolazione.....	28
2.5.2	Diffusione.....	29
2.5.3	Bilancio finale.....	29
2.6	MODELLO DELLA SEGREGAZIONE: HAJRA <i>ET AL.</i> (2012).....	30
2.6.1	Velocità e flusso di segregazione.....	30
2.6.2	Equazione del trasporto per le particelle grossolane.....	31
2.7	MODELLO DEFINITIVO DA TESTARE.....	32
2.7.1	Vantaggi e svantaggi dei modelli trattati.....	32
2.7.2	Analisi dimensionale.....	32
2.7.3	Velocità di segregazione definitiva.....	33
CAPITOLO 3	– Geometrie del sistema e studi sperimentali.....	35
3.1	SISTEMA DI SPERIMENTAZIONE.....	35
3.1.1	Geometria dei sili.....	35
3.1.2	Riempimento dei sili.....	37
3.1.3	Scarico dei sili.....	38
3.2	RISULTATI DEGLI STUDI SPERIMENTALI.....	39
3.2.1	Caso 1: angolo di 55° e rapporto dei diametri pari a 1,9.....	39
3.2.2	Caso 1: angolo di 15° e rapporto dei diametri pari a 1,9.....	40
3.2.3	Caso 1: angolo di 55° e rapporto dei diametri pari a 4,3.....	41
3.2.4	Caso 1: angolo di 15° e rapporto dei diametri pari a 4,3.....	42
3.2.5	Conclusioni sull'indagine sui dati sperimentali.....	43
CAPITOLO 4	– Implementazione dei modelli nel simulatore.....	45
4.1	FASE PRELIMINARE: STUDIO EFFETTUATO E GEOMETRIA DEL SISTEMA.....	45
4.1.1	Operazioni iniziali.....	45
4.1.2	Geometria del sistema e griglia computazionale.....	46
4.2	PARAMETRI E VARIABILI PRELIMINARI E ASSOCIATI ALLE FISICHE.....	47
4.2.1	Scorrimento alla parete e lunghezza di scivolamento.....	47
4.2.2	<i>Soft start</i>	48
4.3	IMPLEMENTAZIONE DEI MODELLI BIFASICO E REOLOGICO.....	48
4.3.1	Implementazione del modello reologico.....	49
4.3.2	Parametri del modello bifasico e del modello reologico.....	49
4.3.3	Variabili del modello bifasico e del modello reologico.....	50

4.3.4	Condizioni iniziali e al contorno nel modello bifasico.....	51
4.3.5	Condizioni iniziali e al contorno nel modello reologico.....	52
4.4	IMPLEMENTAZIONE DEL MODELLO DI SEGREGAZIONE.....	53
4.4.1	Trasporto di specie diluite.....	53
4.4.2	Trasporto di specie concentrate.....	54
4.4.3	La PDE: forma generale e forma per un sistema binario.....	55
4.4.4	Confronto tra la PDE e il modello di segregazione.....	57
4.4.5	Parametri del modello di segregazione.....	58
4.4.6	Variabili del modello di segregazione.....	58
4.4.7	Inserimento dei parametri, delle variabili e delle condizioni.....	60
	CAPITOLO 5 – Risultati numerici e confronto con i dati sperimentali.....	61
5.1	SCORRIMENTO DEL MATERIALE GRANULARE.....	61
5.1.1	Profili di frazione volumetrica di solido.....	61
5.1.2	Profili di velocità e di gradiente di velocità.....	63
5.2	METODO D'ANALISI DELLA SEGREGAZIONE.....	66
5.2.1	Effetto dello <i>shear rate</i> . Valori delle grandezze del modello.....	66
5.2.2	Profili di frazione massiva di fini.....	66
5.2.3	Misurazione della frazione massiva dei fini.....	68
5.2.4	Procedura per la misurazione della frazione massiva dei fini.....	69
5.3	RISULTATI DELLE SIMULAZIONI: CASO DI <i>K</i> COSTANTE.....	71
5.3.1	Caso 1 con <i>K</i> costante.....	71
5.3.2	Caso 2 con <i>K</i> costante.....	73
5.3.3	Caso 3 con <i>K</i> costante.....	75
5.3.4	Caso 4 con <i>K</i> costante.....	77
5.3.5	Conclusioni riguardo le prove con <i>K</i> costante.....	79
5.4	RISULTATI DELLE SIMULAZIONI: CASO DI <i>K</i> VARIABILE.....	80
5.4.1	Prima modellazione della variabile <i>K</i>	80
5.4.2	Caso 1 con <i>K</i> variabile.....	81
5.4.3	Caso 2 con <i>K</i> variabile.....	83
5.4.4	Caso 3 con <i>K</i> variabile.....	85
5.4.5	Caso 4 con <i>K</i> variabile.....	87
5.4.6	Conclusioni riguardo le prove con <i>K</i> variabile.....	89
5.5	SEGREGAZIONE IN SILI CON PARTE CILINDRICA ALLUNGATA.....	90
5.5.1	Prove sperimentali.....	90
5.5.2	Geometria dei silii con parte cilindrica allungata.....	92
5.5.3	Risultati numerici.....	93
5.6	PROSPETTIVE FUTURE.....	95
5.6.1	Sviluppo della costante di segregazione <i>K</i>	95

5.6.2	Scelta del parametro m	95
5.6.3	Gradiente di velocità.....	95
5.6.4	Altre geometrie.....	95
CAPITOLO 6 – Riempimento dei sili		97
6.1	SEGREGAZIONE DURANTE IL RIEMPIMENTO DEI SILI. PIANO INCLINATO.....	97
6.1.1	Studio del cumulo di materiale.....	97
6.2	IMPLEMENTAZIONE IN <i>COMSOL MULTIPHYSICS 4.3</i>	98
6.2.1	Operazioni iniziali.....	98
6.2.2	Geometria del sistema e griglia computazionale.....	98
6.2.3	Parametri e variabili dei modelli.....	100
6.2.4	Condizioni iniziali e al contorno.....	100
6.3	RISULTATI OTTENUTI.....	101
6.3.1	Verifica dello scorrimento del materiale granulare.....	101
6.3.2	Segregazione.....	103
CONCLUSIONI		107
NOMENCLATURA		109
RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI		113

Introduzione

Nell'industria chimica l'utilizzo di materiali costituiti da particelle solide di dimensioni più o meno estese, genericamente definiti materiali granulari, è molto comune. Infatti, tra materie prime, prodotti intermedi e prodotti finiti, la quasi totalità dei processi chimici, soprattutto quelli riguardanti l'industria alimentare e farmaceutica, prevede l'utilizzo di sostanze solide o granulari.

Generalmente, queste sostanze sono miscele di materiali granulari, le cui particelle hanno proprietà fisiche (distribuzione della dimensione, forma, densità) differenti tra le particelle stesse. Ciò comporta che, se queste miscele sono in movimento, i granuli aventi certi valori delle proprietà tendano ad andare in zone specifiche del dominio in cui sono state poste, mentre i granuli che hanno altri valori delle proprietà si trasferiscano in altre zone dello stesso dominio.

Si verifica così il fenomeno della segregazione. Salvo eccezioni in cui la separazione è voluta, come ad esempio nell'industria mineraria, è bene che essa sia limitata il più possibile, perché in molti processi chimici dell'industria alimentare e farmaceutica è necessario lavorare con miscele di composizione omogenea, quindi con le particelle più distribuite possibili all'interno del dominio, senza zone di posizionamento preferenziali.

È importante quindi prevedere, controllare e quindi minimizzare all'interno dei processi industriali l'eventuale insorgenza di questo fenomeno. In questo lavoro di tesi si è così cercato di implementare un modello matematico per la previsione della segregazione nel simulatore *COMSOL Multiphysics 4.3*, studiandone poi i vari meccanismi che lo originano dalle simulazioni effettuate. Il modello studiato è continuo, e anche se viene applicato in un sistema intrinsecamente discreto come il materiale granulare, può essere utilizzato in quanto le simulazioni di questa tesi sono state su scala industriale.

Questa tesi, la quale è costituita da sei capitoli, inizia illustrando il fenomeno della segregazione nei suoi meccanismi e nei fattori che la influenzano, facendo poi una panoramica di alcuni studi effettuati per modellarla da un punto di vista matematico (capitolo 1). Prosegue poi trattando i modelli numerici che descrivono il flusso del materiale, ai quali si aggiunge l'equazione del trasporto di materia formulata opportunamente e utilizzata per modellare la segregazione (capitolo 2). Segue una rapida panoramica sulle geometrie e sui dati sperimentali utilizzati per testare la validità del modello della segregazione (capitolo 3), per poi illustrare come i modelli numerici sono stati implementati nel simulatore *COMSOL Multiphysics 4.3* (capitolo 4). Dalle simulazioni ottenute con l'implementazione dei modelli nel simulatore, si sono ricavati dei risultati numerici, analizzati, confrontati con i dati sperimentali e poi commentati come mostrato nel capitolo 5, in cui inoltre vengono proposti

degli studi da effettuare in trattazioni successive a questa. Infine, il lavoro di questa tesi non si è limitato allo scarico dei silo, ma si è trattato anche il riempimento degli stessi, cercando un metodo per descrivere questa operazione ed eseguendo delle prove che potranno essere utilizzate come punto di partenza di studi da compiere in futuro, e questo viene illustrato nel capitolo 6.

Capitolo 1

La segregazione nei materiali granulari

Quando una miscela di materiali granulari aventi tra loro differenti proprietà fondamentali, quali distribuzione delle dimensioni, forma e densità, subisce delle sollecitazioni, le particelle più grossolane di tale miscela tendono ad andare in zone preferenziali, mentre le particelle più fini tendono a recarsi in altre zone a loro preferenziali. Si verifica così la segregazione, un fenomeno spontaneo che deve essere limitato in processi dove si richiede un buon mescolamento delle polveri.

1.1 Tipi di miscela

Nei materiali granulari la miscela ideale sarebbe quella in cui, nel caso si analizzasse una porzione della miscela stessa, la composizione in tale porzione è pari a quella della miscela globale, indipendentemente dalla porzione analizzata. Ovviamente, questo tipo di miscela non esiste in natura, né è possibile ottenerla.

Generalmente, l'obiettivo è quello di ottenere una miscela *random*, cioè quel tipo di miscela in cui la probabilità di trovare una particella di un dato componente sia la stessa in ogni punto della miscela, e abbia valore pari alla frazione di tale componente nella miscela globale. La miscela casuale (*random*) è quella di miglior qualità tra le miscele ottenibili realmente: infatti in essa non vi è segregazione, la quale però si verifica quando le particelle da miscelare hanno differenti proprietà fisiche. In quel caso le particelle di un dato componente avranno elevata probabilità di essere trovate in una determinata zona della miscela, la quale non potrà più essere casuale.

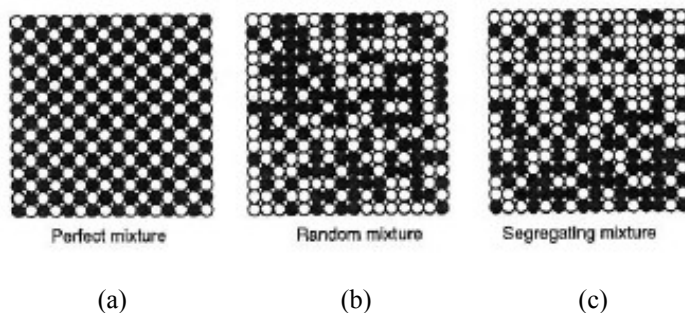


Figura 1.1. *Tipi di miscela : (a) miscela ideale, (b) miscela perfettamente casuale, (c) miscela segregata (Rhodes, 2008)*

In Figura 1.1 sono schematizzati i tipi di miscela di materiali granulari appena illustrati. Si tenga conto che non sono gli unici tipi di miscela: ad esempio vi sono anche le miscele “ordinate” o “interattive”, di qualità superiore a quelle *random*, in quanto ottenute sfruttando le forze d'attrazione tra le particelle.

1.2 La segregazione ed alcuni suoi meccanismi

Quando le particelle da miscelare hanno simili proprietà fondamentali, quali distribuzione delle dimensioni, forma e densità, è possibile ottenere una miscela casuale, ma questo nella maggior parte dei sistemi non si verifica, perché in essi le particelle hanno proprietà differenti e quindi tendono a segregare. Le particelle che hanno simili proprietà fisiche tendono quindi a disporsi in una zona specifica della miscela e, anche se miscelate assieme alle altre particelle, tendono comunque a separarsi da queste quando la miscela viene maneggiata.

Se in una miscela di polveri si verifica segregazione, in essa la densità di *bulk* si modifica, dando così problemi nel *packaging*. Inoltre, ancor più grave, il prodotto granulare interessato può avere una composizione chimica fuori specifica.

1.2.1 Meccanismi di segregazione

Le cause della segregazione sono molteplici. Infatti, come è già stato detto, questa è influenzata da vari fattori, ai quali si possono collegare numerosi meccanismi. Tra questi, de Silva *et al.* (2000) ne riassumono tredici, elencati qui di seguito:

1. **traiettorie**: il trascinamento dell'aria riduce maggiormente la velocità delle particelle più fini rispetto a quanto faccia per quella delle particelle più grosse, e si ha così la “segregazione per inerzia” (Figura 1.2), secondo l'equazione ricavata dalla legge di Stokes (Rhodes, 2008)

$$L = \frac{|\mathbf{u}| \rho_p d_p^2}{18 \eta_m} \quad , \quad (1.1)$$

dove L è la distanza raggiunta dalla particella, $|\mathbf{u}|$ è il modulo della velocità, ρ_p è la densità della particella, d_p è la dimensione caratteristica della particella (in genere un diametro) e η_m è la viscosità del mezzo;



Figura 1.2. Segregazione dovuta alla traiettoria delle particelle (Rhodes, 2008)

2. **corrente d'aria**: se si forma una circolazione d'aria, dovuta ad esempio dalla caduta del materiale granulare in un riempimento di un silo, le particelle più fini tendono ad essere trasportate maggiormente da tale corrente, e nel caso del silo tendono a depositarsi lungo le pareti;
3. **rotolamento**: in un cumulo le particelle più grandi e quelle più arrotondate tendono ad andare verso la valle dello stesso;
4. **vagliatura**: le particelle più fini scendono attraverso uno strato scorrevole di particelle grossolane;
5. **impatto o rimbalzo**: le particelle rimbalzano sulla superficie del cumulo di materiale granulare in modo più o meno intenso a seconda del loro coefficiente di restituzione, quindi più questo è alto più rimbalzano e più lontano dal centro del mucchio tendono a depositarsi;
6. **incastro**: meccanismo inerziale per cui le particelle più grandi e quelle più dense penetrano uno strato della superficie del cumulo di materiale in corrispondenza del suo apice, e lì rimangono bloccate;
7. **angolo di riposo**: il componente con più basso angolo di riposo scorre sopra a quello con angolo di riposo più elevato, andando verso i lati del cumulo di materiale;
8. **allontanamento per spinta**: se vi sono particelle di eguali dimensioni ma diversa densità, e quelle più pesanti cadono in corrispondenza dell'apice del cumulo di materiale, queste spingono le particelle più leggere verso i lati del mucchio;
9. **dislocamento**: se il materiale granulare viene fatto vibrare, le particelle di dimensione più elevata tendono a salire a causa delle ampiezze verticali delle

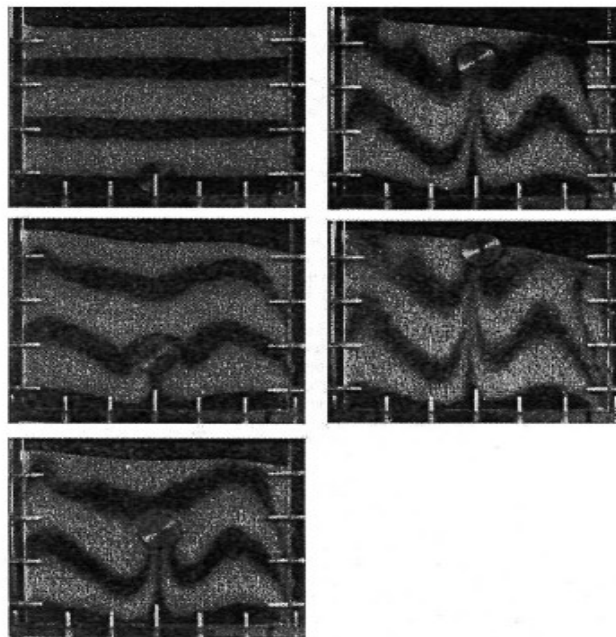


Figura 1.3. Segregazione dovuta al dislocamento: esempio della sfera d'acciaio immersa in un letto di sabbia (Rhodes, 2008)

vibrazioni, mentre le particelle a dimensione più bassa percolano attraverso i vuoti lasciati dalle prime, bloccandone la caduta, come nell'esempio illustrato in Figura 1.3 della sfera d'acciaio immersa in un letto di sabbia;

- 10. percolazione:** le particelle più piccole scendono attraverso i vuoti lasciati dalle particelle più grandi, vuoti formati a causa dello sforzo di taglio localizzato, come mostrato in Figura 1.4.



Figura 1.4. Segregazione dovuta alla percolazione (Rhodes, 2008)

A differenza della vagliatura, non è richiesta la presenza delle particelle più grandi in uno strato scorrevole, e il meccanismo può essere attivato con vibrazioni o con piani di sforzi di taglio localizzati; è dovuta quindi a sollecitazioni che causano il riarrangiamento della distribuzione delle particelle, quali agitazione, scuotimento, vibrazione del materiale (sollecitazioni che nei gas e nei liquidi, al contrario, favoriscono il mescolamento), oppure quando questo viene versato in un cumulo di altro materiale, come mostrato in Figura 1.5.

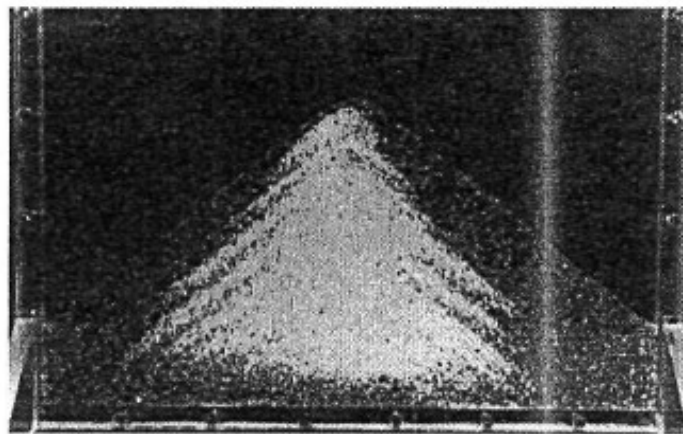


Figura 1.5. Segregazione dovuta alla percolazione in un cumulo di materiale (Rhodes, 2008)

- 11. fluidizzazione o elutriazione:** le particelle più piccole o quelle più leggere vengono trascinate e fluidizzate dall'aria (Figura 1.6), ad esempio nel riempimento di un silo, disponendosi poi sulla superficie del materiale granulare, con la velocità di caduta delle particelle che è dell'ordine di pochi cm/s e che cresce con il quadrato della dimensione della particella (Rhodes, 2008);

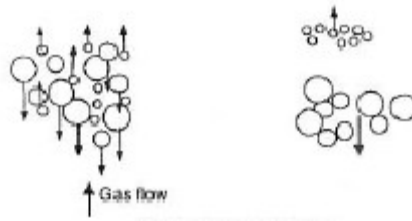


Figura 1.6. Segregazione dovuta alla fluidizzazione (Rhodes, 2008)

12. agglomerazione: le particelle più piccole possono aggregarsi formandone di più grandi e con maggiore mobilità;

13. spostamento guidato dalla concentrazione: nei sistemi rotanti come i tamburi la mobilità delle particelle più fini è maggiore di quella delle particelle grossolane, e quindi le prime si concentrano in zone preferenziali.

Analizzando tutti questi meccanismi, si scopre che tra le proprietà fondamentali che influenzano la segregazione, la forma e la densità non sono fattori relativamente importanti, anche se la densità può avere un ruolo significativo nella fluidizzazione e nell'allontanamento per spinta, mentre il fattore che influenza di più la segregazione è la dimensione delle particelle, presente in quasi tutti gli altri meccanismi.

1.2.2 Fattori che influenzano la segregazione

Detto già della forma, della densità e delle dimensioni delle particelle, vi sono poi altre variabili che possono influenzare la segregazione. Una tra queste è il regime di scarico in un silo, che può essere *mass-flow* (il materiale caricato per primo viene scaricato per primo e non vi è presenza di zone stagnanti) o *funnel-flow* (il materiale caricato per primo viene scaricato per ultimo, con la formazione di zone stagnanti), con il secondo che favorisce la segregazione, come dimostrato da Sleppy e Puri (1996) in prove sperimentali su miscele di zucchero.

Un altro fattore è la frazione massiva di particelle fini, per la quale vi è un limite massimo oltre il quale non vi è segregazione significativa: il limite è stato determinato, per materiale scorrevole formato da particelle relativamente grandi e approssimativamente sferiche, dalla relazione di Arteaga e Tüzün (1990)

$$\omega_{f,L} = \frac{4}{4 + \frac{d_2}{d_1}}, \quad (1.2)$$

dove $\omega_{f,L}$ è la frazione massiva limite di fini mentre d_1 e d_2 sono i diametri della particella più fine e di quella più grossa rispettivamente.

1.3 Studi preliminari di Bridgwater (1994)

Dal punto di vista sperimentale, uno degli studi più importanti effettuato è quello di Bridgwater (1994). Egli ha sostenuto che la segregazione è causata fondamentalmente da tre meccanismi: due agenti sul *bulk*, cioè la percolazione interparticellare e la migrazione delle particelle; e una agente in prossimità della superficie libera. Il modo in cui ognuno avviene può essere dedotto da osservazioni fisiche macroscopiche.

1.3.1 Percolazione interparticellare

Quando viene fatto agire uno sforzo attraverso la zona di cedimento, le particelle vengono mescolate, e quelle più grandi lasciano degli spazi nei quali le particelle più piccole si infilano, e si ha percolazione interparticellare. Se la differenza di dimensione è elevata, inoltre, questo meccanismo può avvenire anche senza l'azione di sforzi. Nello stato stazionario del moto delle particelle fini, Bridgwater (1994) ha constatato che la velocità adimensionale è pari allo spostamento adimensionale, ed entrambi sono funzioni di fattori di dimensione particellare, di forma, di sforzo, di deformazione, di densità, di gravità e d'attrito.

Si è poi determinato che la velocità adimensionale di percolazione varia notevolmente con il rapporto tra il diametro delle particelle percolanti e quello delle particelle di *bulk*, ed è influenzata anche dalla forma delle particelle, in maniera però meno notevole, come è stato dimostrato in esperimenti effettuati su particelle sferiche e cubiche. La densità influenza la velocità di percolazione, aumentandola significativamente, mentre le proprietà superficiali hanno effetti trascurabili, soprattutto per sforzi elevati.

Si è verificato poi l'effetto del fluido interstiziale e si è ricavato un coefficiente di autodiffusione per ogni direzione. Tutti i meccanismi sono stati poi riassunti in una legge di tipo diffusivo:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \quad , \quad (1.3)$$

dove P indica la probabilità di trovare una particella al punto z nell'istante t e D indica il coefficiente di diffusione.

Infine, è stata fatta una valutazione del fenomeno dal punto di vista della meccanica statistica.

1.3.2 Migrazione delle particelle

Le particelle non possono penetrare nei vuoti, se la loro dimensione è troppo elevata. Se però questi vuoti si formano con maggior frequenza in una direzione, le particelle più grosse tendono ad andare in quella direzione, con una velocità di migrazione proporzionale alla derivata del gradiente di velocità lungo la stessa direzione. Le particelle più grosse, quindi, si

muovono verso le zone in cui le particelle più fini sono più mobili, cioè dove le velocità di sforzo di taglio sono crescenti. Non vi è inoltre alcuna influenza da parte della densità.

1.3.3 Segregazione sulla superficie libera

Questo meccanismo è stato testato sperimentalmente su un piano inclinato. In questo sistema, il materiale granulare si muove più per un moto a valanga che per rotolamento delle particelle. Per prima cosa è stata determinata la distribuzione lungo il piano di particelle che avevano la funzione di tracciante. Da questa distribuzione è stata poi svolta un'analisi dimensionale per determinare la posizione media del tracciante in funzione delle densità e delle dimensioni delle particelle di tracciante e di *bulk*, nonché della posizione delle stesse lungo lo spessore del letto e della lunghezza di discesa. In particolar modo, si è studiata la variazione di concentrazione in funzione di quest'ultima.

Si è ricavato che la segregazione avviene per moto a valanga, percolazione interparticellare e migrazione delle particelle, e che se la velocità cresce si ha un'influenza sulla distribuzione controllata dal diametro ma non dalla densità. Si ha inoltre un'influenza della posizione del tracciante da parte della concentrazione immessa di tracciante stesso.

Infine, la segregazione è influenzata dal rapporto tra i diametri (le particelle fini percolano e rimangono nei pressi dell'alimentazione, mentre le particelle grosse migrano lontano dall'alimentazione) e dal rapporto delle densità dei grani, che più è alta più vicino all'alimentazione si trovano le particelle, mentre la forma e la rugosità del tracciante hanno un effetto trascurabile.

1.4 Studi effettuati su piani inclinati

Nel tentativo di illustrare la segregazione nei suoi meccanismi, sono state analizzate varie geometrie. Gli studi più numerosi sono stati svolti su piani inclinati, in quanto questi sono semplici da costruire e da osservare nella loro completezza.

Uno dei primi tentativi di spiegare il fenomeno è stato eseguito da Brown (1939), testandolo sulla superficie libera durante lo scorrimento del materiale su un piano inclinato. In questo sistema si è considerato che il fattore principale della segregazione fosse la collisione interparticellare. Brown suppose che quando le particelle più piccole collidevano con quelle più grandi le prime decelerassero fino ad essere portate allo stato di riposo, quindi che si concentrassero nei pressi del punto d'alimentazione, mentre le particelle più grosse scendessero più facilmente.

Secondo Williams (1963), invece, il fattore principale che influenza la segregazione è la percolazione interparticellare. Considerava, infatti, che il sistema fosse simile ad un setaccio, in cui le particelle più piccole penetrano nei vuoti formati durante il flusso del materiale,

mentre le particelle più grandi, non trovando vuoti abbastanza ampi, tendono a scendere più velocemente.

Altri studi, illustrati successivamente, consistevano non solo nell'analizzare i vari meccanismi di segregazione, ma anche nello sviluppare un modello che descrivesse la stessa.

1.4.1 Modellazione della segregazione: studi di Savage e Lun (1988)

Per descrivere il moto del materiale granulare, Savage e Lun (1988) lo hanno considerato come formato da vari strati che si muovono interagendo l'un l'altro tramite lo sforzo di taglio medio sviluppato nel bordo inferiore del piano inclinato. Essi hanno proposto, per flussi non molto veloci e dove le fluttuazioni delle velocità delle particelle dovute alle collisioni interparticellari non sono molto energiche, due meccanismi che generano segregazione (anche se pensano che ve ne siano molti altri): il primo dato dalla penetrazione delle particelle più fini nei vuoti, i quali variano in maniera casuale e continua; il secondo, meno rilevante, dato dalla migrazione di una particella da uno strato di materiale a quello adiacente, nel caso in cui le forze agenti in essa fossero sufficientemente sbilanciate, senza una direzione né una dimensione delle particelle preferenziali.

Sono stati testati due concentrazioni diverse di miscela a due diverse inclinazioni del piano. Sono stati determinati inoltre due strati limite: uno sopra il quale non vi è presenza di particelle fini e uno sotto il quale non vi è presenza di particelle grossolane; all'intersezione di questi strati si ha la distanza minima dall'alimentazione oltre la quale vi è completa separazione dei due componenti.

1.4.2 Modellazione della segregazione: studi di Dolgunin et al. (1998)

Dolgunin e Ukolov (1995) hanno sviluppato un modello che descrivesse la dinamica della segregazione riguardante flussi discendenti per gravità, basato sull'equazione del trasferimento di massa. Esso descrive la distribuzione delle particelle lungo lo spessore del letto di materiale granulare, secondo l'equazione

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{\partial(u\omega)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} [K \omega (1-\omega)] \quad , \quad (1.4)$$

dove ω indica la frazione massiva, u la componente lungo x della velocità del materiale granulare e K il coefficiente di segregazione. Il modello è quindi una somma di tre addendi, nell'ordine: termine convettivo, mescolamento quasi-diffusivo e segregazione idromeccanica, il cui coefficiente è una funzione lineare del parametro di non uniformità $\Delta \mathbf{M} = \mathbf{M} - \mathbf{M}_0$, con \mathbf{M} somma dei momenti dovuti a forze gravitazionali, d'attrito e d'impatto sulla specie nel

flusso reale, e \mathbf{M}_0 dato da una somma di momenti analoghi ma riguardante un mezzo uniforme.

Un'ulteriore investigazione viene poi descritta in Dolgunin *et al.* (1998), in cui viene testato un materiale granulare in scorrimento dovuto a taglio. Il modello descritto nella (1.4) è stato poi ulteriormente sviluppato. Si è constatata la presenza di una concentrazione massima nella parte centrale del letto, soprattutto per miscele formate da particelle con densità più o meno differenti, in cui il fenomeno è più marcato. Questo non è stato previsto nel modello descritto nella (1.4), perciò questo è stato modificato, ottenendo:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{\partial(u\omega)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \omega}{\partial y} - D_r \frac{\partial \ln \dot{\gamma}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} [K \omega (1 - \omega)] \quad (1.5)$$

in cui $\dot{\gamma}$ è la distanza media tra le particelle e D_r il coefficiente di diffusione riferito ad essa. Il modello così ottenuto approssima meglio i dati sperimentali, a testimonianza che l'influenza del contributo aggiunto, che indica la migrazione delle particelle, è risultata considerevole.

1.4.3 Modellazione della segregazione: studi di Gray e Thornton (2005)

Uno dei limiti del modello di Savage e Lun (1988) è quello di non considerare la segregazione dipendente dalla gravità nel caso di un meccanismo di vagliatura cinetica. Secondo Gray e Thornton (2005), però, in questo tipo di vagliatura la segregazione è guidata anche dalla gravità, quindi essi hanno modificato la teoria di Savage e Lun (1988) introducendo tale termine all'interno del modello, determinando poi la distribuzione spaziale e temporale della dimensione delle particelle in sistemi incomprimibili tridimensionali.

Il comportamento del materiale granulare è stato verificato sia per regimi stazionari sia per regimi dipendenti dal tempo, confrontando poi i risultati con quelli ricavati dal modello di Savage e Lun (1988). Il modello ricavato è espresso come un'equazione di conservazione quasi-lineare e del primo ordine, opportunamente adimensionalizzata. Sono stati testati inoltre i regimi di flusso a pistone, di sforzo di taglio semplice e di sforzo di taglio lineare con scorrimento basale. Si è così scoperto, in ogni caso trattato, che vi è una distanza minima dall'alimentazione oltre la quale vi è segregazione completa, analogamente a quanto dimostrato da Savage e Lun (1988) in maniera sperimentale.

1.4.4 Modellazione della segregazione: studi di Marks *et al.* (2011)

Molti altri modelli sono stati sviluppati esprimendo in essi la velocità di percolazione, come ad esempio quello appena illustrato di Gray e Thornton (2005) e quello di May *et al.* (2010), il quale è dato dalla combinazione del modello di Gray e Thornton e da quello appena illustrato

di Savage e Lun (1988), ed esprime la velocità di percolazione come proporzionale alla velocità di sforzo di taglio (cfr §1.6.4).

Queste teorie, però, sono limitate alle miscele i cui granuli hanno differenze di dimensioni limitate, e trascurano la percolazione spontanea, per cui le particelle molto piccole tendono a depositarsi sul fondo del sistema: la differenza di dimensioni delle particelle non è considerata. Marks *et al.* (2011), quindi, hanno sviluppato le teorie precedenti inserendo una dipendenza dal tempo per la velocità di sforzo di taglio, la quale influenza la velocità di formazione dei vuoti che permettono la percolazione, e può essere assunta come proporzionale al termine $\sqrt{H-z}$, dove H è l'altezza del letto e z è la coordinata dell'altezza del letto. Sono stati infine eseguiti dei confronti riguardo al tempo di segregazione completa: si è osservato che con il modello di Gray e Thornton questo tempo rimane costante indipendentemente dalla concentrazione iniziale di particelle grossolane, mentre con quello di May *et al.* si riduce all'aumentare della concentrazione di grossolani; con il modello di Marks *et al.*, infine, si ha un andamento del tempo di segregazione completa simile a quello constatato con il modello di May *et al.* (2010), ma tale tempo si riduce in maniera tanto più significativa quanto più bassa è la concentrazione iniziale di particelle grandi.

1.5 Studi effettuati su sili

I sistemi riguardanti i materiali granulari che sono più presenti a livello industriale sono sicuramente i sili, per questo risulta importante testare la segregazione in tali sistemi. Data la loro complessità e le loro dimensioni, però, risulta complicato eseguire prove sperimentali in essi, perciò queste sono in quantità modesta rispetto ad altri sistemi come i piani inclinati.

1.5.1 Modellazione continua: studi di Christakis *et al.* (2002)

Quando si effettuano delle simulazioni riguardanti i materiali granulari, indipendentemente dal fenomeno fisico trattato, l'approccio scelto è spesso quello discreto. Industrialmente, però, conviene utilizzare un approccio continuo (cfr §2.1). Per questo motivo tornano utili al fine di indagare sulla segregazione gli studi svolti da Christakis *et al.* (2002), in cui si sostiene che il fenomeno è dato da tre contributi, quali diffusione, sforzo di taglio e percolazione, con il secondo che genera il primo. I tre termini vengono inseriti nell'equazione di trasporto, espressa come funzione della frazione volumetrica. Dopo una prova di consistenza, è stata testata una miscela binaria in un silo di piccole dimensioni, considerando trascurabile il termine di percolazione e mantenendo lo scarico in regime di *mass-flow*.

Ulteriori analisi sono state eseguite in geometrie a scala più elevata (Christakis *et al.* (2006)), per miscele non solo binarie ma anche ternarie. In questo caso si è studiata invece la segregazione in regime di *funnel-flow*, modellando il flusso di scarico tramite l'analisi di

Nedderman (1995). Si è ricavato che il modello approssima in maniera adeguata i dati sperimentali, anche se è sorta una limitazione riguardante la determinazione delle condizioni iniziali.

1.5.2 Modellazione discreta: studi di Ketterhagen et al. (2007)

L'approccio discreto viene utilizzato invece in molti più casi. Uno di questi è quello presente in Ketterhagen *et al.* (2007), in cui vengono testati due silo a geometria cilindrica con parte conica a diverso angolo, sia dal punto di vista sperimentale sia dal punto di vista numerico, variando:

- il regime di scarico: continuo o discontinuo;
- il tipo di miscela caricata nel silo: stratificata o ben mescolata;
- il rapporto tra i diametri delle particelle;
- la frazione in massa iniziale di particelle fini;

Inoltre sono stati effettuati test su un silo a sezione rettangolare, per confrontarne i risultati con quelli ottenuti per i silo cilindrici.

Si è concluso infine che il modello discreto utilizzato è risultato valido, anche se in alcuni casi tende a sottostimare leggermente la segregazione. Ciò è dovuto probabilmente a leggere differenze con il caso reale, riguardanti il coefficiente d'attrito, la forma della particella e l'omogeneità del riempimento iniziale, che a sua volta è difficile da ottenere in quanto durante il riempimento il materiale tende a segregare spontaneamente.

1.6 Studi effettuati su altre geometrie

Oltre ai piani inclinati e ai silo, la segregazione è stata testata in altre geometrie. Data la complessità di alcune di queste, però, gli studi svolti in esse sono in quantità molto limitata.

1.6.1 Cumulo di materiale granulare

Quando si ha un cumulo di materiale granulare, esso tende ad assumere una forma “conica”, con angolo pari al suo angolo di riposo. L'inclinazione della superficie formata è assimilabile inoltre ad un piano inclinato, come mostrato in Figura 1.7.

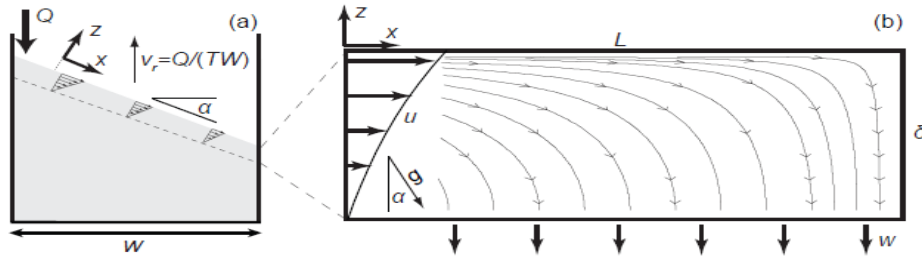


Figura 1.7. (a) Cumulo di materiale granulare e sua similitudine ad un piano inclinato. Il profilo di velocità viene schematizzato nell'immagine ingrandita e ruotata (b) (Fan *et al.*, 2014)

Da questa assunzione sono partiti gli studi di Fan *et al.* (2014), secondo cui la segregazione è data dalla somma dei meccanismi di avvezione, diffusione e percolazione, con quest'ultima funzione del gradiente di velocità. Essi hanno analizzato questi tre contributi in un sistema quasi-2D, esprimendoli nell'equazione di trasporto

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial(uf_i)}{\partial x} + \frac{\partial(wf_i)}{\partial z} + \frac{\partial(w_{p,i}f_i)}{\partial z} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial f_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial f_i}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (1.6)$$

con x coordinata della lunghezza del piano, z coordinata dello spessore del letto, u e w componenti della velocità rispettivamente lungo x e z e $w_{p,i}$ indica la velocità di percolazione, esprimibile a sua volta dalle

$$w_{p,1} = -S \dot{\gamma} (1 - f_1) \quad w_{p,2} = S \dot{\gamma} (1 - f_2) \quad (1.7)$$

con 1 che indica la particella più fine, 2 la particella più grossolana, $\dot{\gamma}$ che indica il gradiente di velocità e S che indica una sorta di lunghezza di scala, dipendente dai diametri delle particelle e dal loro rapporto.

Dopo aver inserito la (1.7) nella (1.6), l'equazione di trasporto può essere opportunamente adimensionalizzata, rendendola così funzione di due parametri: il primo, indicato con Λ , indica il rapporto tra la scala temporale d'avvezione e quella di segregazione; il secondo, corrispondente al numero di Peclet (Pe), indica il rapporto tra la scala temporale di diffusione e quella d'avvezione. Entrambi i parametri dipendono solamente dalle proprietà delle particelle e del flusso.

1.6.2 Tamburo rotante

Vari studi sono stati effettuati sulla segregazione nei tamburi rotanti. Uno di questi è stato compiuto da Taberlet *et al.* (2006), sia dal punto di vista sperimentale sia dal punto di vista

numerico (discreto). Si dimostra in esso che per esserci segregazione assiale basta che le particelle abbiano differenti dimensioni. Inoltre si è cercato una relazione tra la segregazione assiale e quella radiale, ricavando in seguito che mentre la prima induce ad elevati gradienti di velocità sulla superficie superiore, la seconda non mostra salti improvvisi di velocità e dei suoi gradienti. Si è ricavato poi che, se la miscela è segregata assialmente alle condizioni iniziali, essa sarà segregata radialmente allo stazionario se la frazione iniziale di fini è bassa. Il moto medio delle particelle fini è stato poi correlato a un'equazione di diffusione, e si è verificato che l'allargamento delle bande assiali coinvolge i flussi delle particelle più piccole attraverso il nucleo radiale: se questo però non viene considerato, la modellazione della segregazione assiale diviene meno grezza. Similmente, le oscillazioni della larghezza delle bande di particelle fini può essere data dal flusso particellare attraverso il nucleo. Si ha così che l'evoluzione temporale del modello di segregazione assiale è influenzata fortemente dalla segregazione radiale.

1.6.3 Sistemi vibrati

Le polveri in sistemi vibranti sono state studiate, tra gli altri, da Barker e Mehta (1993), i quali hanno sviluppato un modello che considera lo scuotimento come un processo periodico e che considera una dinamica di moto casuale, descritta da un algoritmo tipo Monte Carlo. Essi suppongono che la segregazione sia dovuta sia a fenomeni convettivi sia a fenomeni diffusivi. Un altro studio invece è stato effettuato da Knight *et al.* (1993), che considerano fondamentale per questa il meccanismo di convezione. Si è visto in questo caso come le particelle grosse tendano a muoversi verso il basso per penetrazione dello strato superiore, per poi essere respinte verso l'alto dalle particelle fini. Ma se si hanno geometrie particolari, come ad esempio un cono, e le particelle grosse sono al centro di esso, queste scenderanno perché solo alle pareti sono possibili moti ascensionali. Si dimostra quindi, in questi studi, che i grani del materiale si muovono seguendo le linee di velocità.

1.6.4 Cuvetta anulare

Questa geometria è stata utilizzata da May *et al.* (2010) per testare la segregazione dovuta a sforzi di taglio. Essi sono partiti da un sistema stratificato, con i fini posti nella parte superiore e i grossi posti nella parte inferiore, come mostrato in Figura 1.8.

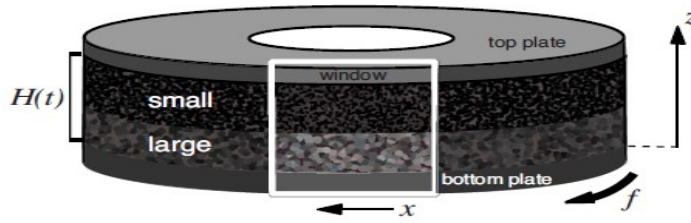


Figura 1.8. Cuvetta anulare utilizzata da May *et al.*, alimentata in maniera stratificata, con i fini posti nella parte superiore e i grossi posti nella parte inferiore (May *et al.*, 2010)

È stata misurata quindi la velocità in funzione dell'altezza della cuvetta, quindi è stata modellata matematicamente e poi è stata differenziata per ricavare analiticamente il gradiente di velocità. Infine, proporzionale a quest'ultima, è stata ricavata la velocità di segregazione.

Gli studi su cuvetta sono stati eseguiti per verificare la segregazione in sistemi dove lo sforzo di taglio non è uniforme. Infatti, il modello di May *et al.* è un'estensione del modello di Gray e Thornton, che è stato ricavato per sistemi a sforzo di taglio uniforme, come le valanghe.

1.6.5 Scivolo a zig-zag

Allo scopo di limitare la segregazione, Shi *et al.* (2007) hanno dimostrato che un'inversione del flusso, manuale o tramite setti, può essere un metodo valido, dato che così si può eliminare la segregazione dovuta a densità o alle dimensioni delle particelle. Hanno quindi sviluppato un modello che descrive la segregazione dovuta alla densità.

Hajra *et al.* (2012) hanno invece ricavato un modello basato sulla velocità di segregazione guidata dalle dimensioni particellari. Si ha quindi un bilancio della specie più fine del tipo

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \omega_1}{\partial y} - J_{s,1} \right) \quad (1.8)$$

dove u e v sono le componenti della velocità e $J_{s,1}$ il flusso di segregazione, a sua volta espresso da

$$J_{s,1} = v_{s,1} \omega_1 \quad \text{con} \quad v_{s,1} = -K d_2 (1 - \omega_1) \left(\frac{d_1}{d_2} - 1 \right) \quad (1.9)$$

con K costante di segregazione, d_1 diametro della particella più piccola e d_2 diametro della particella più grande.

Sperimentalmente, è stato utilizzato sia lo scivolo a zig-zag sia uno scivolo oscillato e ruotato che ne approssimava i moti, geometrie illustrate in Figura 1.9. I risultati sono stati poi verificati numericamente.

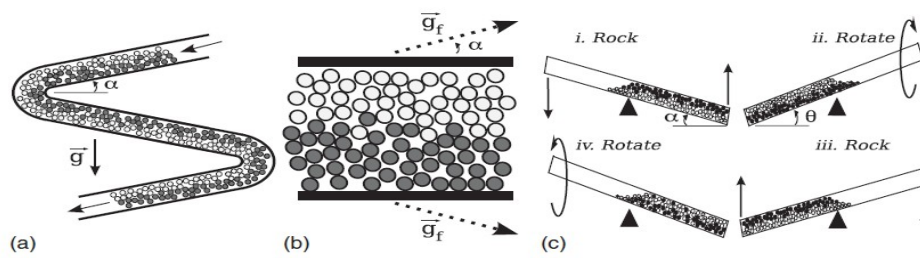


Figura 1.9. Scivolo a zig-zag (a): un dettaglio è mostrato in (b), mentre in (c) viene mostrato il metodo per simulare sperimentalmente il comportamento dello scivolo, tramite rotazione e oscillazione di uno scivolo semplice (Hajra et al., 2012)

Si è dimostrato che per tubi sufficientemente lunghi vi è segregazione, mentre se il tubo è corto il risultato è di miscelazione. Questi studi, infine, possono essere estesi a sistemi dove vi è sia segregazione per gravità sia segregazione per dimensione, dove le particelle sono completamente separate per effetti di riempimento dei vuoti e di galleggiabilità.

Capitolo 2

Modelli numerici per le simulazioni

Il sistema che verrà trattato in questa tesi prevede un materiale granulare generico in moto. Perciò, prima di studiare il fenomeno della segregazione, il flusso del materiale verrà descritto tramite un modello idrodinamico che tratterà sia la sua distribuzione spaziale nel dominio sia il suo comportamento reologico, una volta scelto l'approccio di modellazione più adatto. Solo in seguito si inserirà l'equazione del trasporto che descrive la segregazione, analizzando alcuni modelli di letteratura e scegliendo tra questi, eventualmente dopo un'opportuna modifica.

2.1 Approccio discreto ed approccio continuo

Quando si intende modellare il comportamento di un materiale granulare, ed in particolare il suo flusso, lo si può fare utilizzando un approccio discreto oppure uno continuo. Il primo, identificabile anche con la sigla DEM (*Discrete Element Method*), consiste nell'applicare il bilancio di forze ad ogni singola particella, in modo da poter tenere conto di fattori come l'attrito tra le particelle, gli urti anelastici, le particelle non sferiche e quelle coesive. Si ottengono quindi informazioni più precise, soprattutto a livello microscopico. Tuttavia, le particelle trattate non rappresentano in maniera corretta il sistema reale, ma vengono considerate come delle sfere con dimensioni molto superiori a quelle reali. Inoltre, il peso computazionale rimane ragionevole solo se le particelle sono in numero limitato, cosa che non avviene a livello industriale.

Perciò, qualora l'obiettivo sia lo studio del materiale granulare su scala industriale, come in questo lavoro di tesi, è meglio utilizzare un approccio continuo. Ciò consiste nel considerare il materiale granulare come uno pseudo-fluido con un caratteristico comportamento reologico, ignorando quindi ogni distribuzione granulometrica e modellando il comportamento del materiale stesso con un codice fluidodinamico (Volpato, 2013).

2.1.1 Modello idrodinamico e temperatura granulare

Per i motivi appena citati, l'approccio scelto è quello continuo. In particolare, in questa trattazione il modello fluidodinamico che descrive la reologia del materiale è riportato in Artoni *et al.* (2009). Il modello, formulato per materiali secchi e non coesivi, e quindi molto comuni nei processi industriali, assume il flusso del materiale granulare come un flusso denso

con dissipazione di energia meccanica dovuta alle forze d'attrito, e considera le fluttuazioni del campo di velocità quantificandole nelle equazioni di bilancio e in quelle costitutive tramite una grandezza denominata temperatura granulare, esprimibile dalla relazione di Jenkins e Savage (1983) come:

$$\theta = \frac{\langle \tilde{u}^2 \rangle}{3} \quad (2.1)$$

dove \tilde{u} indica la componente fluttuante della velocità, che non può essere trascurata, nemmeno in flussi lenti e densi di materiale granulare. La temperatura granulare, quindi, può essere considerata come una misura locale della mobilità dello pseudo-fluido.

2.2 Moto laminare in un sistema bifasico: Level Set

Il sistema trattato prevede due fasi macroscopicamente immiscibili tra loro, una costituita dal materiale granulare e l'altra costituita da aria. Il materiale scorre in moto laminare, e con esso si muove anche l'interfaccia tra le due fasi. Serve quindi un modello che descriva l'evoluzione dell'interfaccia nel tempo, e per far ciò sono possibili due approcci: il primo, Lagrangiano, si basa sull'inseguimento dell'interfaccia, cioè sulla sua rappresentazione utilizzando delle particelle traccianti distribuite su di essa; il secondo, Euleriano, si basa sulla cattura dell'interfaccia, cioè nel tracciarla definendo una funzione scalare.

2.2.1 Metodo "Level Set" e metodo "Phase Field"

In questa trattazione si utilizzerà l'approccio Euleriano. Per questo approccio vi sono due possibili modelli matematici: il "Level Set" e il "Phase Field". Il primo utilizza un metodo di reinizializzazione per rappresentare l'interfaccia, mentre il secondo si basa sull'equazione di Cahn-Hilliard, che include un potenziale chimico per rappresentare l'interfaccia. In entrambi i casi, si ricorre ad una variabile ausiliaria adimensionale, ϕ , che nel "Level Set" varia da 0 a 1, mentre nel "Phase Field" varia da -1 a 1. Entrambi sfruttano poi l'equazione di Navier-Stokes per la descrizione del trasporto di quantità di moto, includendo in essa la tensione superficiale, e utilizzano l'equazione di conservazione di massa.

Anche se in questa trattazione non verrà illustrata, bisogna però sapere che l'equazione di Cahn-Hilliard, richiede di specificare, oltre allo spessore dell'interfaccia, anche il parametro di mobilità e la densità di energia di mescolamento, cose non richieste nel "Level Set", dove basta specificare lo spessore dell'interfaccia e il parametro di reinizializzazione. Inoltre nel "Phase Field" bisogna ricorrere ad un'altra variabile d'aiuto dipendente da ϕ . Per questo lavoro di tesi non è risultato necessario ricorrere ad un metodo più preciso ma più complesso

e meno diffuso come il “*Phase Field*”, ma è risultato sufficiente applicare il metodo “*Level Set*”.

2.2.2 Metodo *Level Set* conservativo: formulazione matematica

Il metodo “*Level Set*” che inizialmente è stato sviluppato da Osher e Sethian (1988) prevede che la funzione ausiliaria ϕ sia nulla in corrispondenza dell'interfaccia Γ , positiva all'interno di essa e negativa all'esterno, di valore assoluto $d(x,t)$, dove

$$d(x) = \min_{x_\Gamma \in \Gamma} (|x - x_\Gamma|) \quad (2.2)$$

e l'evoluzione della variabile ϕ in un campo di velocità $\mathbf{u}(x,t)$ è data da

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (2.3)$$

Questa forma del *Level Set* è però non conservativa: infatti, con essa si possono verificare perdite o guadagni non corretti di area (o di volume nel caso tridimensionale), specialmente nelle regioni dove l'interfaccia ha ampia curvatura. Per ovviare a questo problema si può quindi ricorrere ad una forma conservativa, sviluppata da Olsson e Kreiss (2005). In questa forma, la funzione ausiliaria è rappresentata da una funzione tipo Heaviside $H_{sm}(\phi_{sd})$ anziché dalla distanza dall'interfaccia x_Γ , quindi il suo valore assume valori che vanno da 0 a 1, con l'interfaccia assunta al valore $\phi=0,5$.

$$\phi = H_{sm}(\phi_{sd}) = \begin{cases} 0 & \phi_{sd} < -\varepsilon \\ \frac{1}{2} + \frac{\phi_{sd}}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\pi} \sin\left(\pi \frac{\phi_{sd}}{\varepsilon}\right) & -\varepsilon \leq \phi_{sd} \leq \varepsilon \\ 1 & \phi_{sd} > \varepsilon \end{cases} \quad (2.4)$$

dove

$$|\phi_{sd}(x)| = d(x) = \min_{x_\Gamma \in \Gamma} (|x - x_\Gamma|) \quad (2.5)$$

e con ε che indica lo spessore della regione di transizione dove la funzione ausiliaria va da 0 a 1, di dimensioni simili a quelle delle celle della mesh.

Come si può notare, inoltre, l'equazione (2.3) presenta solo il termine d'avvezione, mentre non vi è alcun termine di diffusione: ciò comporta che il bilancio è instabile da risolvere numericamente. Si ricorre quindi ad un'espressione alternativa per stabilizzare l'equazione

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = \gamma_{LS} \left[\nabla \cdot \left(\varepsilon \nabla \phi - \phi(1-\phi) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \right], \quad (2.6)$$

dove γ_{LS} è un parametro di reinizializzazione o stabilizzazione, il cui valore incide molto sulla risoluzione del modello: se γ_{LS} è troppo basso, lo spessore dell'interfaccia può non rimanere costante, e vi possono essere instabilità (oscillazioni di ϕ); se invece γ_{LS} è troppo alto, l'interfaccia non si sposta correttamente.

Si può poi presentare il caso di flussi bifasici incomprimibili, dove sono inclusi gli effetti della gravità e della tensione superficiale. Quest'assunzione è possibile solo se la variazione di frazione volumetrica del materiale è inferiore del 10%, altrimenti vi possono essere problemi di consistenza del modello. Peraltro, in questa trattazione l'assunzione può essere considerata valida. Si ha quindi l'equazione di continuità:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.7)$$

e quindi il volume (o la superficie nel caso bidimensionale) delimitato dall'interfaccia si conserva se non vi sono entrate o uscite.

L'equazione (2.6) può essere espressa poi nella forma conservativa

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \phi) = \gamma_{LS} \left[\nabla \cdot \left(\varepsilon \nabla \phi - \phi(1-\phi) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \right] \quad (2.8)$$

per ottenere così l'esatta conservazione numerica dell'integrale di ϕ .

La (2.8) può essere accoppiata con l'equazione di Navier-Stokes

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (\eta (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)) + \rho \mathbf{g} + \mathbf{F}_{st} + \mathbf{F}, \quad (2.9)$$

dove \mathbf{g} è l'accelerazione di gravità, \mathbf{F}_{st} è la forza dovuta alla tensione superficiale, \mathbf{F} è la forza di volume, ρ è la densità, p è la pressione e η è la viscosità. Queste ultime due sono pesate sulla frazione dei due fluidi in ogni singolo punto, secondo le relazioni

$$\rho = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) \phi, \quad (2.10)$$

$$\eta = \eta_1 + (\eta_2 - \eta_1)\phi \quad , \quad (2.11)$$

dove ρ_1 , ρ_2 , η_1 e η_2 indicano le densità e le viscosità dei due fluidi.

Prima di risolvere le equazioni (2.10) e (2.11), però, la funzione ausiliaria va inizializzata per farla variare in un campo di valori tra 0 e 1 attraverso l'interfaccia. Ponendo inizialmente $\phi=0$ all'interno dell'interfaccia e $\phi=1$ al suo esterno, si risolve l'equazione

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau_{LS}} = \gamma_{LS} \left[\nabla \cdot \left(\varepsilon \nabla \phi - \phi(1-\phi) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \right] \quad , \quad (2.12)$$

nella quale τ_{LS} indica una sorta di tempo artificiale.

2.3 Modello reologico del materiale granulare

Il modello reologico presente in Artoni *et al.* (2009), già utilizzato in alcune trattazioni (ad esempio: Volpato *et al.*, 2014), è costituito da un sistema di equazioni che comprende l'equazione di continuità, la conservazione della quantità di moto e un bilancio d'energia. Nel riassumerlo qui di seguito, non verrà illustrato in maniera dettagliata, ma saranno riportati solo i passaggi più importanti.

2.3.1 Bilancio d'energia generale e in funzione dello stato del materiale

Si esprima il bilancio d'energia cinetica traslazionale. Considerando il fluido incomprimibile, lo si può scrivere combinandolo con l'equazione di continuità. Così facendo esso diventa

$$\frac{3}{2} \rho \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{3}{2} \rho \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \theta = -\Pi : \nabla \bar{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \mathbf{q}^T - z^T \quad , \quad (2.13)$$

dove θ indica la temperatura granulare del materiale, $\bar{\mathbf{u}}$ il vettore della componente media della velocità, Π la componente deviatorica del tensore degli sforzi, \mathbf{q}^T il flusso diffusivo dell'energia fluttuante e z^T il termine di dissipazione dell'energia fluttuante.

Per poter risolvere il bilancio, sono necessarie delle equazioni costitutive. La prima equazione riguarda il flusso diffusivo dell'energia fluttuante: considerando questo fenomeno isotropico, esso può essere espresso dalla legge

$$\mathbf{q}^T = -k \nabla \theta \quad , \quad (2.14)$$

con k che sta ad indicare il coefficiente costitutivo dell'energia fluttuante, simile ad una conduttività termica.

La produzione di energia dovuta allo sforzo di taglio, che è funzione della parte deviatorica del tensore degli sforzi, e la dissipazione possono essere inglobati in un unico termine, quindi

$$\dot{Q} = -\Pi : \nabla \bar{\mathbf{u}} - z^T . \quad (2.15)$$

Il termine di produzione è esprimibile in termini cartesiani come

$$-\Pi : \nabla \bar{\mathbf{u}} = \eta |\dot{\gamma}|^2 , \quad (2.16)$$

con $\dot{\gamma}$ velocità di deformazione. Il termine di dissipazione può essere descritto invece dalla relazione

$$z^T = \mu p |\dot{\gamma}| , \quad (2.17)$$

con μ che indica il fattore d'attrito e p che indica la pressione, la quale rappresenta la parte sferica del tensore degli sforzi. Combinando la (2.16) e la (2.17) si ha infine:

$$\dot{Q} = |\dot{\gamma}| (\eta |\dot{\gamma}| - \mu p) = |\dot{\gamma}| (|\tau| - \mu p) , \quad (2.18)$$

che può essere sostituita nella (2.13). τ indica lo sforzo di taglio, in base al cui valore si può capire lo stato di scorrevolezza del materiale: esso aumenta se $|\tau| > \mu p$ o diminuisce se $|\tau| < \mu p$. Se invece si è nella condizione $\tau = \mu p$, si è in condizioni analoghe a quelle dello stato critico del materiale granulare senza alcuna variazione di volume, quindi l'energia prodotta \dot{Q} è nulla e la temperatura granulare θ è pari al valore iniziale. Se infine il materiale non è sottoposto ad alcun tipo di sforzo non si ha influenza sulla sua mobilità, perché il materiale non si muove, perciò si hanno $\dot{\gamma}, \dot{Q}, \theta$ tutti nulli (Volpato, 2013).

2.3.2 Parametri e variabili del modello reologico

Le relazioni costitutive definite nel paragrafo precedente contengono al loro interno delle variabili che a loro volta sono funzioni di vari parametri. Ad esempio, il coefficiente costitutivo dell'energia fluttuante è assunto proporzionale alla densità e al quadrato del diametro della particella, secondo la relazione

$$k = \rho d_p^2 k' , \quad (2.19)$$

dove d_p il diametro medio delle particelle e k' il parametro del coefficiente costitutivo dell'energia fluttuante, assunto con buona approssimazione costante.

Anche la viscosità può essere espressa in funzione della densità e del diametro della particella, in maniera simile al coefficiente costitutivo dell'energia fluttuante:

$$\eta = \rho d_p^2 \eta' \quad , \quad (2.20)$$

in cui η' è il coefficiente di viscosità, a sua volta definito dalla legge

$$\eta' = \eta_0 \exp\left(\frac{\theta^*}{\theta}\right) \quad , \quad (2.21)$$

dove η_0 è il parametro del coefficiente di viscosità e θ^* la scala di temperatura. Nella (2.21) è stata trascurata la dipendenza dalla storia della deformazione: ciò semplifica il modello e restringe il campo di validità dello stesso ai processi stazionari. Risulta comunque una buona approssimazione per questa trattazione.

La scala di temperatura può essere assunta proporzionale al diametro della particella, secondo la relazione (Artoni *et al.*, 2011)

$$\theta^* \approx k_\theta g d_p \quad , \quad (2.22)$$

con k_θ parametro adimensionale della scala di temperatura e g modulo dell'accelerazione di gravità.

Infine, per materiali non coesivi il fattore d'attrito può essere assunto costante, anche se in realtà sarebbe funzione della velocità di deformazione, della pressione e della temperatura granulare; esso viene espresso come

$$\mu = \tan \varphi_e \quad , \quad (2.23)$$

con φ_e angolo d'attrito interno alla parete del materiale, determinabile da prove sperimentali.

2.4 Modello della segregazione: Christakis *et al.* (2002)

Il passo successivo è quello di cercare il modello della segregazione più adatto a descrivere il fenomeno dal punto di vista numerico. Il primo modello analizzato è quello di Christakis *et al.* (2002). In questo modello la quantità di ogni singola specie i presente nel dominio viene espressa in frazione volumetrica f_i , che assume valori nel campo $0 \leq f_i < 1$ e la cui loro somma è pari all'impaccamento massimo del materiale, inferiore a 1. Questo modello, che ha il

vantaggio di essere stato testato su un silo con un approccio continuo, esprime il bilancio di materia, in assenza di immissioni o di fuoriuscite di materiale, secondo l'equazione

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \nabla \cdot (f_i \mathbf{u} + \mathbf{J}_{s,i}) = 0 \quad , \quad (2.24)$$

dove \mathbf{u} è il vettore della velocità del bulk e $\mathbf{J}_{s,i}$ è il flusso di “deriva” che rappresenta la segregazione, il quale indica il moto di ogni specie nel *bulk* e determina il livello di segregazione nella miscela.

Il flusso di segregazione, analizzato in un contesto microscopico secondo i principi dell'energia cinetica, è stato ottenuto ricavando innanzitutto un'equazione generalizzata di Boltzmann che include gli effetti di collisione anelastica, partendo dall'equazione di Liouville in forma ridotta e considerando il moto caotico delle particelle. Si determina poi successivamente, per ogni dimensione della particella, le funzioni di distribuzione della velocità di non equilibrio. In definitiva, il flusso di segregazione può essere espresso come somma di velocità di “deriva”, secondo l'equazione

$$\mathbf{J}_{s,i} = f_i (\mathbf{u}_{D,i} + \mathbf{u}_{S,i} + \mathbf{u}_{P,i}) \quad , \quad (2.25)$$

dove $\mathbf{u}_{D,i}$ è la velocità di “deriva” del componente i dovuta alla diffusione, $\mathbf{u}_{S,i}$ è la velocità di “deriva” del componente i dovuta alla segregazione indotta dallo sforzo di taglio e $\mathbf{u}_{P,i}$ è la velocità di “deriva” del componente i dovuta alla percolazione spontanea delle particelle fini attraverso i vuoti lasciati dalle particelle grossolane, fenomeno causato dalla gravità.

2.4.1 Velocità di “deriva” dovuta alla diffusione

Ogni velocità di “deriva” può essere scritta in funzione delle variabili che esprimono i fenomeni appena citati. Quindi, ad esempio, la velocità di “deriva” dovuta alla diffusione è pari a

$$\mathbf{u}_{D,i} = -D_i \nabla f_i \quad , \quad (2.26)$$

con D_i coefficiente di diffusione: si osserva come in questo caso il moto dovuto alla diffusione è opposto alla direzione dei gradienti di frazione volumetrica. Si vedrà in seguito come la diffusione sia un meccanismo “attivato” e non “d'innescò”, e come sia conseguenza del moto del materiale (cfr §2.4.2).

2.4.2 Velocità di “deriva” dovuta allo sforzo di taglio

La velocità di “deriva” dovuta allo sforzo di taglio è considerata funzione del gradiente di velocità del *bulk*, cioè

$$\mathbf{u}_{S,i} = \frac{\psi_i}{|\mathbf{u}|} (\nabla u + \nabla v + \nabla w), \quad (2.27)$$

dove ψ_i è il coefficiente di trasporto nella segregazione da sforzi di taglio per il componente i e $|\mathbf{u}|$ è il modulo della velocità del materiale granulare. Non vi sono contributi negativi nella (2.27), dato che la segregazione data dalla deformazione provoca il moto del materiale concordemente al gradiente di deformazione nel *bulk*.

La segregazione da gradiente di velocità è anche un meccanismo d'attivazione della segregazione dovuta alla diffusione: infatti, i gradienti di velocità provocano la separazione delle specie e quindi generano dei gradienti di concentrazione, con le particelle grossolane che si concentrano nelle regioni ad alto sforzo di taglio. Perciò, la diffusione è un meccanismo di risposta, che provoca l'allontanamento delle particelle fini dalle zone ad alto sforzo di taglio.

2.4.3 Velocità di “deriva” dovuta alla percolazione

La velocità di “deriva” dovuta alla percolazione, contrariamente alle altre due studiate precedentemente, dipende secondo Christakis *et al.* (2002) solamente da forze volumetriche (come la gravità) e non è funzione delle proprietà termodinamiche della miscela granulare, ma è funzione solo della composizione di questa e delle dimensioni delle particelle (o meglio, dal rapporto tra queste). Per una miscela binaria si ha

$$\mathbf{v}_{P,i} = \xi_i \chi \left(1 - \frac{d_1}{d_2} \right) \mathbf{g}, \quad (2.28)$$

dove ξ_i è il coefficiente di percolazione, χ è il vuoto accessibile nel volume di controllo, dato da $(\chi = 1 - \sum f_i)$, d_1 è il diametro delle particelle fini, d_2 è il diametro delle particelle grossolane e \mathbf{g} è il vettore della gravità. Ciò significa che la percolazione agisce solo se due volumi vicini sono sotto l'azione della gravità. Il meccanismo di percolazione è però considerevole solo per le particelle fini, quindi il coefficiente di percolazione ξ_i per la fase grossolana è da considerarsi nullo in tutto il dominio computazionale.

2.5 Modello della segregazione: Fan *et al.* (2014)

Il secondo modello analizzato è quello di Fan *et al.* (2014). Testato su un cumulo di materiale granulare, è di tipo quasi-bidimensionale (cfr. Figura 1.7 §1.6.1), dato che si trascura il trasporto di specie nella direzione ortogonale a quella di discesa delle particelle sul piano di scorrimento (direzione indicata con y). Le componenti della velocità hanno lo stesso valore per i fini e per i grossi, sia nella direzione x sia nella direzione z . L'equazione del trasporto di specie viene espressa come

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial(uf_i)}{\partial x} + \frac{\partial(wf_i)}{\partial z} + \frac{\partial(w_{p,i}f_i)}{\partial z} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial f_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial f_i}{\partial z} \right) \right] = 0, \quad (2.29)$$

con f_i frazione volumetrica della specie i , questa volta espressa come rapporto tra la frazione volumetrica della specie i nel solido e la somma delle frazioni volumetriche di tutti i componenti. Vi è inoltre la velocità di percolazione $w_{p,i}$, descritta successivamente.

2.5.1 Velocità di percolazione

Questa variabile, che esprime il moto relativo tra le specie di una miscela di materiale granulare lungo la direzione z , dipende da grandezze come il rapporto tra le dimensioni delle particelle, il gradiente di velocità e lo sforzo normale, anche se quest'ultimo ha un effetto trascurabile per uno strato sottile di materiale granulare. Alcuni modelli inoltre, come quelli di Savage e Lun (1988), Dolgunin *et al.* (1998) e Hajra *et al.* (2012), hanno proposto che la velocità di percolazione della specie i in una miscela binaria sia proporzionale alla concentrazione dell'altra specie in gioco. Nel caso in esame, si hanno le velocità di percolazione delle particelle fini e grossolane approssimate con le espressioni

$$w_{p,1} = -S \dot{\gamma} (1 - f_1) \quad w_{p,2} = S \dot{\gamma} (1 - f_2) \quad , \quad (2.30)$$

quindi esse dipendono dalla concentrazione dell'altra specie in gioco ($1-f_i$), dal gradiente di velocità ($\dot{\gamma}$) e da una variabile S ottenuta dalla regressione lineare dei dati in Figura 2.1, in cui è espresso l'andamento della velocità di percolazione netta di una specie rispetto alla concentrazione dell'altra specie della miscela binaria. Questi dati sono stati ottenuti da simulazioni DEM, e la regressione lineare è stata ottenuta considerando solo i dati in cui $1-f_i < 0,9$, in quanto per l'altro campo di valori il flusso, dato da $c_i w_{p,i}$ è da considerarsi molto basso e quindi trascurabile.

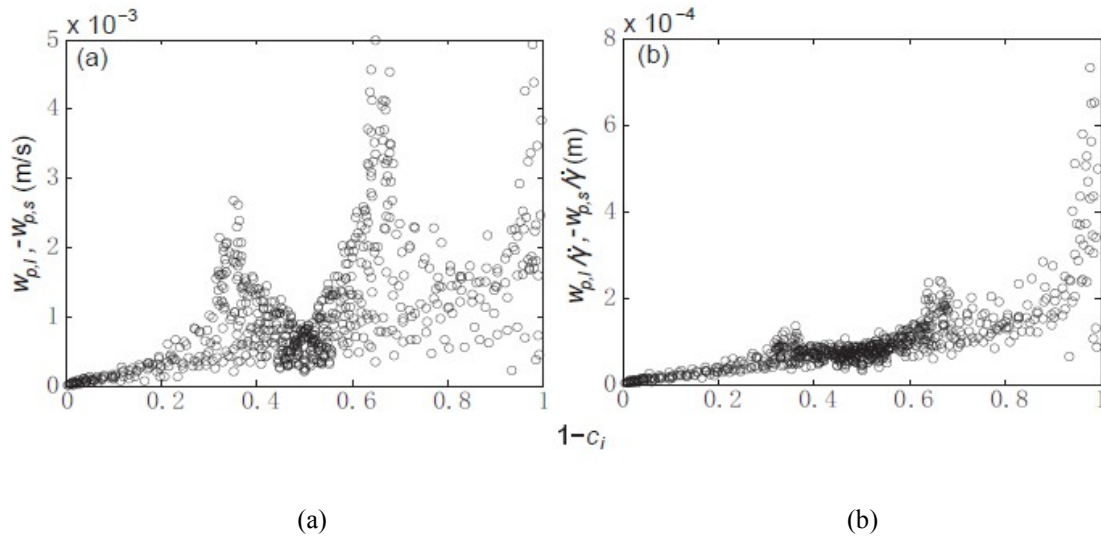


Figura 2.1. Velocità netta di percolazione della specie i (a) assoluta e (b) rapportata al gradiente di velocità, entrambe funzione della concentrazione dell'altra specie della miscela binaria. Per $1-c_i < 0,9$ la regressione dei dati porta ad una retta di pendenza S .

S quindi rappresenta la lunghezza di scala di percolazione, e dipende dalle dimensioni delle particelle e dal rapporto di queste dimensioni.

2.5.2 Diffusione

La diffusione delle particelle di materiale granulare è dovuta a collisioni tra le particelle stesse, con moti generati analoghi ai moti Browniani che avvengono tra le molecole e tra le particelle colloidali. La diffusione nei materiali granulari dà come risultato il rimescolamento delle particelle segregate. Il coefficiente di diffusione è dato dall'espressione $D \sim \dot{\gamma} d_p^2$, ma solo per flussi densi di materiale granulare dove le particelle differiscono per densità ma non per dimensione: in questo caso, perciò, si utilizza un coefficiente di diffusione costante.

2.5.3 Bilancio finale

La velocità di percolazione e il coefficiente di diffusione possono essere quindi inseriti nel bilancio (2.29). In quest'ultimo, però, bisogna tener conto anche dell'equazione di continuità. Perciò esso risulta

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + u \frac{\partial f_i}{\partial x} + w \frac{\partial f_i}{\partial z} + S \frac{\partial}{\partial z} (\dot{\gamma} f_i (1 - f_i)) - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial f_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial f_i}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (2.31)$$

Quest'equazione può inoltre essere adimensionalizzata. Tralasciando le operazioni di adimensionalizzazione (che esulano da questa tesi e al cui sviluppo si rimanda all'articolo

originale), si rileva solo che il bilancio risulta così funzione di due parametri, i quali dipendono solamente dalle proprietà delle particelle e dal flusso: essi sono Λ , rapporto tra la scala temporale d'avvezione e quella di segregazione, e il numero di Peclet (Pe), rapporto tra la scala temporale di diffusione e quella d'avvezione.

2.6 Modello della segregazione: Hajra *et al.* (2012)

Trattando sempre una miscela binaria, si può esprimere l'equazione del trasporto in funzione della frazione massiva delle particelle fini: è quello che viene svolto in questo modello, testato su uno scivolo a zig-zag e preso in considerazione per questa trattazione. Sapendo che la frazione massiva delle particelle fini ω_1 è data dal rapporto tra la concentrazione massiva dei fini stessi e quella totale della miscela, si ha il bilancio

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial y} - J_{s,1} \right). \quad (2.32)$$

L'equazione tiene quindi conto della continuità (le componenti della velocità u e v sono fuori dell'integrale) e del fatto che la diffusione è trascurabile lungo la direzione x , cioè quella del flusso. $J_{s,1}$ rappresenta invece il flusso di segregazione, dovuto a differenze di densità e di dimensioni delle particelle, e pari al prodotto tra la velocità di segregazione e la frazione massiva della specie più piccola.

2.6.1 Velocità e flusso di segregazione

Vari modi sono stati utilizzati per esprimere la velocità di segregazione. Un primo metodo consiste nell'esprimerla come funzione della dimensione delle particelle ponderata sulla concentrazione massiva. Per semplificarla ulteriormente, però, la si può sviluppare ottenendo

$$v_{s,1} = -K d_2 (1 - \omega_1) \left(\frac{d_1}{d_2} - 1 \right), \quad (2.33)$$

dove d_2 il diametro delle particelle grossolane e K una costante che ha una componente intrinseca e una dipendente dalla concentrazione. Queste componenti sono considerate come funzioni complesse di variabili come ad esempio temperatura granulare, frazione di vuoto locale, gravità, dimensioni delle particelle, densità, forma, rugosità, coefficiente di attrito e coefficiente di restituzione. Esse poi sono considerate, in questo caso, costanti di correlazione ottenibili, caso per caso, da approcci sperimentali e computazionali.

2.6.2 Equazione del trasporto per le particelle grossolane

In Hajra *et al.* (2012) è presente l'equazione del trasporto solo per le particelle fini. In maniera analoga, però, si può ricavare il bilancio di materia per le particelle grossolane di concentrazione $(1-\omega)$, esprimibile come

$$\frac{\partial(1-\omega_1)}{\partial t} + u \frac{\partial(1-\omega_1)}{\partial x} + v \frac{\partial(1-\omega_1)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D_2 \frac{\partial(1-\omega_1)}{\partial y} - J_{s,2} \right) \quad , \quad (2.34)$$

e quindi

$$-\frac{\partial \omega_1}{\partial t} - u \frac{\partial \omega_1}{\partial x} - v \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-D_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial y} - J_{s,2} \right) \quad . \quad (2.35)$$

Portando a destra il termine a sinistra e uguagliando successivamente alla (2.32), in cui il termine a destra viene portato a sinistra, si ha infine

$$-D_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial y} + J_{s,1} = -D_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial y} - J_{s,2} \quad . \quad (2.36)$$

Perché quest'uguaglianza sia verificata basta porre $D_1 = D_2$ e $J_{s,1} = -J_{s,2}$. Riprendendo la (3.10) e moltiplicandola per la frazione di fini si ha

$$J_{s,1} = -K d_2 (1-\omega_1) \left(\frac{d_1}{d_2} - 1 \right) \omega_1 \quad J_{s,2} = K d_2 (1-\omega_1) \left(\frac{d_1}{d_2} - 1 \right) \omega_1 \quad , \quad (2.37)$$

e si può infine ricavare la velocità di segregazione del materiale grossolano

$$v_{s,2} = K d_2 \omega_1 \left(\frac{d_1}{d_2} - 1 \right) \quad , \quad (2.38)$$

che è quindi analoga a quella del materiale fine, a meno del segno.

2.7 Modello definitivo da testare

Nessuno dei tre modelli appena trattati è stato utilizzato, dato che questi, di per sé semplici, presentano comunque delle carenze riguardo le variabili dalle quali dipendono le velocità di segregazione. Per arrivare al modello definitivo, combinazione di quelli illustrati, sono state seguite varie fasi.

2.7.1 Vantaggi e svantaggi dei modelli trattati

Si analizzi innanzitutto il modello di Christakis *et al.* (2002). Detto del vantaggio di essere stato testato su un silo e con un approccio continuo, questo modello però è più complesso degli altri, dato che esprime la segregazione come somma di tre contributi in forma vettoriale. Il primo contributo, quello di diffusione, in realtà sembra necessario solamente a stabilizzare il modello dal punto di vista numerico, analogamente a ciò che viene fatto nel caso del “*Level Set*” (cfr. §2.2.2), più che esprimere un vero e proprio trasporto di materia. Peraltro, ciò vale per tutti i modelli, perciò il trasporto diffusivo verrà comunque considerato. Il problema principale, però, riguarda il terzo contributo, quello della percolazione per gravità: oltre al fatto di essere basso e valido solo per le particelle fini, sembra esprimere un grado di percolazione anche se il materiale rimane fermo. Si è quindi scartata l'ipotesi di implementare il modello di Christakis *et al.* (2002).

I modelli di Fan *et al.* (2014) e di Hajra *et al.* (2012) invece sono più semplici, perché vi è solo un termine (scalare) che esprime la velocità di percolazione. Nel primo caso, però, non è esplicitato il rapporto dei diametri e la dimensione degli stessi, cosa necessaria allo scopo di questa tesi. Nel secondo caso, invece, non vi è la presenza del gradiente di velocità, considerata fondamentale per l'avvenire della percolazione. Una soluzione a questi problemi può essere data da una combinazione di questi due modelli per descrivere il flusso di percolazione.

2.7.2 Analisi dimensionale

Per verificare la possibilità di combinare i due modelli, viene effettuata un'analisi dimensionale, partendo da quella di Bridgwater (1994), che considera la velocità di percolazione u (poi adimensionalizzata) come una funzione del tipo

$$\frac{w_p}{\dot{\gamma} d_2} = f \left(\frac{d_1}{d_2}, X_1, X_2, \frac{\sigma}{E_2}, \frac{E_1}{E_2}, \frac{d_2 \rho_{p,2} g}{E_2}, \frac{d_2 \dot{\gamma}^2}{g}, \frac{\rho_{p,1}}{\rho_{p,2}}, \mu_1, \mu_2 \right), \quad (2.39)$$

dove i pedici 1 e 2 indicano rispettivamente la specie fine e quella grossolana, d indica il diametro delle particelle, X il fattore di forma, σ lo sforzo normale, E il modulo di Young, ρ_p

la densità delle particelle, g l'accelerazione di gravità, $\dot{\gamma}$ il gradiente di velocità e μ il coefficiente d'attrito.

In questa trattazione, si considerano particelle sferiche dello stesso materiale ma di dimensioni diverse, e si considera trascurabile il contributo alla segregazione da parte degli sforzi normali. Per semplificare ulteriormente il flusso, non si tiene conto dei fattori d'attrito tra le particelle. Perciò si prendono in esame solo i numeri adimensionali in cui non vi sono le grandezze riguardanti queste variabili: per il rapporto tra i diametri, si assume una correlazione tipo $(1-d_1/d_2)$, mentre il numero $d_2 \dot{\gamma}^2 / g$ può essere elevato per un esponente “ b ”. Si ha così una correlazione tipo

$$w_p = v_s = \dot{\gamma} d_2 a \left(1 - \frac{d_1}{d_2}\right) \left(d_2 \frac{\dot{\gamma}^2}{g}\right)^b, \quad (2.40)$$

con a e b parametri da fissare in base al modello e al sistema.

2.7.3 Velocità di segregazione definitiva

Se si raggruppa il gradiente di velocità, la si può esprimere elevandola per un esponente “ m ”, mentre il termine con il rapporto tra i diametri lo si può assumere tal quale a meno del segno. Gli altri termini (tranne il diametro dei grossolani) possono essere inglobati in un coefficiente K , il quale può considerare anche altri fenomeni che possono indurre a segregazione. Può essere inoltre inserita la concentrazione dei grossolani $\omega_2 = (1-\omega_1)$. In definitiva, la velocità di segregazione diventa

$$v_s = -K d_2 (1-\omega_1) \left(\frac{d_1}{d_2} - 1\right) \dot{\gamma}^m, \quad (2.41)$$

simile quindi a quella in Hajra *et al.* (2012).

Capitolo 3

Geometrie del sistema e studi sperimentali

I modelli matematici illustrati nei capitoli precedenti sono stati successivamente applicati in domini le cui geometrie verranno di seguito descritte. Su queste geometrie sono stati trovati dei dati sperimentali reperiti in letteratura, che verranno poi confrontati con i risultati numerici.

Questi dati sperimentali sono stati reperiti nell'articolo di Ketterhagen *et al.* (2007), dove dapprima si è testato lo scarico di sfere di vetro da due tipi di sili, poi si è correlato i dati ottenuti con delle simulazioni discrete. Questa trattazione si occuperà solo della parte sperimentale, analizzando i dati ottenuti.

3.1 Sistema di sperimentazione

Negli studi di Ketterhagen *et al.* (2007) sono stati trattati due sili a diverse geometrie, in modo da avere entrambi i regimi di scarico: *mass-flow* e *funnel flow*. Infatti, si è verificato anche come il regime di scarico possa influenzare la segregazione. Entrambi i sili sono stati riempiti con sfere di vetro di diverso diametro, in modo da ottenere una miscela binaria.

3.1.1 Geometria dei sili

Per gli esperimenti sono stati utilizzati due tipi di sili di materiale acrilico, entrambi a geometria cilindrica con tramoggia inferiore conica. Nella parte inferiore del silo, vi è un'appendice cilindrica attraverso la quale il materiale viene scaricato. Lo scarico viene permesso o meno tramite un pannello d'acciaio, che chiude l'uscita durante il riempimento. I sili sono stati puliti con etanolo, posti in una superficie in cui viene impedito ogni tipo di vibrazione e riempiti al livello desiderato, il quale è diverso a seconda del silo trattato ma con valori tali che vi sia la stessa quantità di materiale nei due sili. Non è stato controllato infine se l'umidità relativa rispettava i valori standard di laboratorio, i quali sono compresi tra il 20% e il 60% di umidità relativa.

In Figura 3.1 è rappresentata la schematica dei sili, mentre le dimensioni di questi sono riportate in Tabella 3.1.

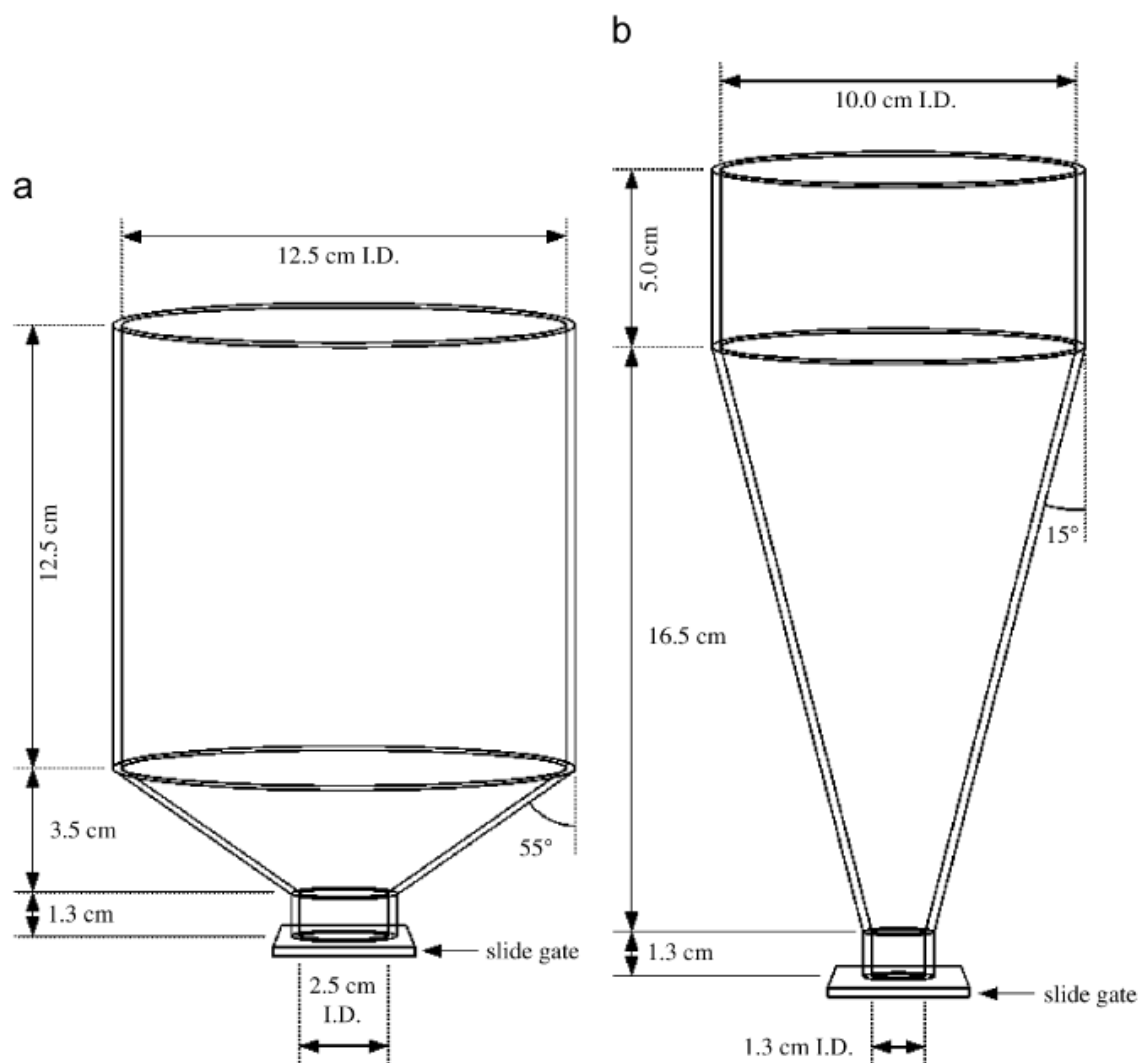


Figura 3.1. Schematizzazione dei silo utilizzati per le prove sperimentali (a) angolo di tramoggia 55° , scarico funnel-flow (b) angolo di tramoggia 15° , scarico mass-flow. (Ketterhagen et al., 2007)

Tabella 3.1. Dimensioni dei silo utilizzati per le prove sperimentali (Ketterhagen et al., 2007)

	Silo (a)	Silo (b)
Diametro sezione cilindrica [cm]	12.5	10.0
Altezza sezione cilindrica [cm]	12.5	5.0
Angolo della tramoggia conica [$^\circ$]	55.0	15.0
Altezza della tramoggia conica [cm]	3.5	16.5
Diametro appendice cilindrica [cm]	2.5	1.3
Altezza appendice cilindrica [cm]	1.3	1.3
Altezza zona riempita [cm]	10.5	21.0

3.1.2 Riempimento dei silii

I silii utilizzati sono stati riempiti con sfere di vetro di diversa dimensione, rappresentate in Figura 3.2. Con esse è stata formata una miscela contenente sfere di due diverse dimensioni, con quantità e diametri diversi a seconda delle prove da effettuare. Le sfere sono state mescolate con una polvere antistatica, in modo che non venissero caricate elettricamente per attrito con la parete del silio.

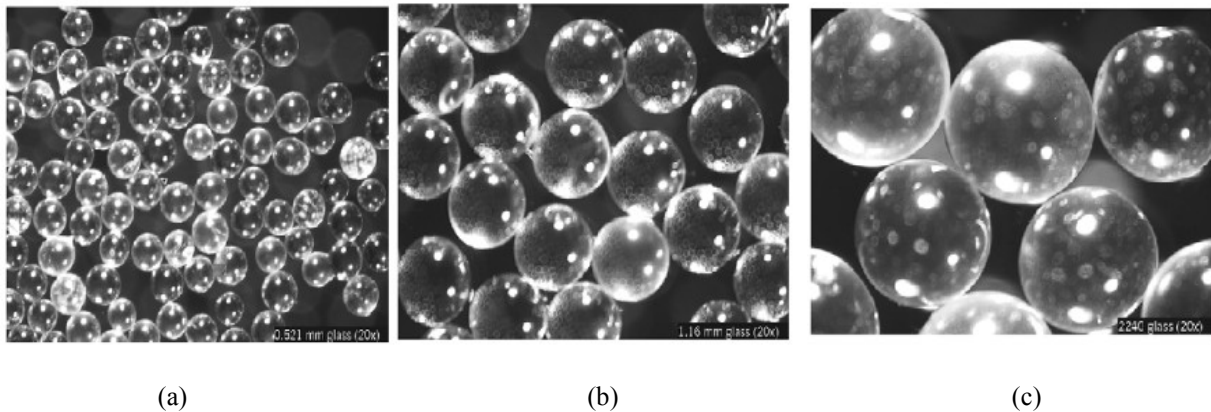


Figura 3.2. Sfere di vetro utilizzate per le prove sperimentali, di diametro (a) 0,521 mm (b) 1,160 mm (c) 2,240 mm (Ketterhagen et al. 2007)

I silii sono stati riempiti in tre modi diversi, a seconda della prova da eseguire: riempimento stratificato, riempimento ben miscelato e riempimento in serie di due tramogge. Il riempimento stratificato consiste nel versare le sfere di una certa dimensione, livellare il materiale e versare le sfere di un'altra dimensione, e a seguire un altro livellamento. Il riempimento ben miscelato è dato da una buona dispersione di una specie nell'altra, e per garantire questo si fanno delle miscele di piccole quantità e poi le si versano tutte nel silio. Il riempimento in serie di due tramogge, infine, consiste nel versare il materiale ben miscelato in un silio e scaricarlo, facendo sì che il materiale scaricato finisca direttamente all'interno dell'altro silio.

Si può quindi constatare che, industrialmente, il metodo di riempimento che approssima meglio la realtà è quello in serie di due tramogge. Esso infatti, oltre ad essere più realistico dal punto di vista pratico, lo è anche riguardo allo stato del materiale granulare dopo il riempimento del silio: esso, infatti, non è completamente separato nei suoi componenti né è possibile disperdere completamente un componente nell'altro, ma vi sarà sempre un certo grado di segregazione. Per semplificare le prove al simulatore, però, si è deciso di prendere come riferimento gli esperimenti effettuati in silii riempiti di materiale ben miscelato.

3.1.3 Scarico dei sili

Sono stati considerati poi due metodi di scarico dei sili: il metodo continuo e il metodo discontinuo. La differenza tra uno e l'altro sta nella raccolta dei campioni su cui analizzare le concentrazioni di materiale. Il primo metodo, infatti, consiste nel raccogliere i campioni lasciando scaricare continuamente il materiale senza fermarlo; il secondo, invece, consiste nel raccogliarli interrompendo ad ogni campionamento lo scarico del materiale.

Sebbene il campionamento continuo approssimi meglio ciò che avviene a livello industriale, dove per motivi di produttività non si interrompe lo scarico dei sili se non per necessità, il metodo più utilizzato è quello discontinuo. Infatti esso, oltre ad essere normato secondo gli standard ASTM (norma ASTM D 6940-03), è più semplice da eseguire sperimentalmente e, inoltre, rende minori le perdite di materiale dovute alla caduta dello stesso fuori dai contenitori dei campioni.

Vi sono quindi piccole differenze tra i profili di concentrazione in funzione del materiale scaricato se il metodo di scarico è continuo o discontinuo. Queste differenze sono state dimostrate negli esperimenti di Standish e Kilic (1985) e confermate in quelli di Ketterhagen *et al.* (2007), come mostrato in Figura 4.3.

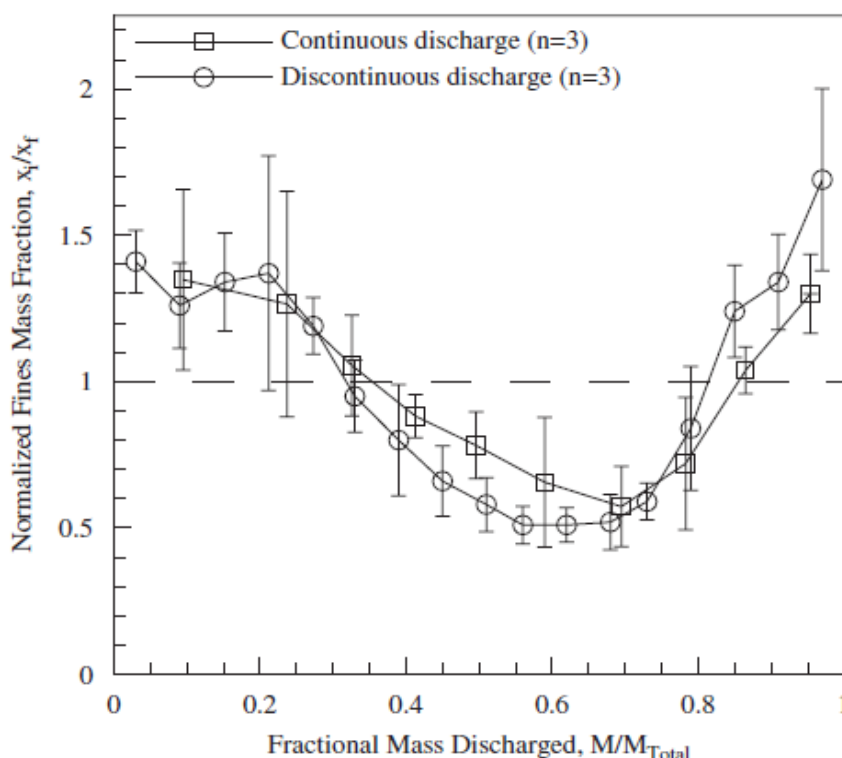


Figura 3.3. Risultati sperimentali sulla segregazione per scarico continuo e discontinuo, per un silo a tramoggia conica ad angolo di 55° , riempito di sfere di vetro a due diametri diversi in rapporto 4,3 e a concentrazione di fini del 10%. Le barre d'errore indicano un intervallo di confidenza del 95% (Ketterhagen *et al.*, 2007)

Gli studi sperimentali di Ketterhagen *et al.* (2007) sono stati compiuti utilizzando il metodo di scarico discontinuo, salvo che nel caso illustrato dalla Figura 3.3. Non sono stati reperiti invece studi a scarico continuo, anche perché la norma ASTM D 6940-03, come già detto, prevede lo scarico discontinuo. Anche se il metodo di simulazione numerica dà dinamiche simili allo scarico continuo, sono stati scelti comunque i dati sperimentali ottenuti a scarico discontinuo per il confronto con i dati numerici: si vedrà in seguito, infatti, che per rilevare dalle simulazioni i dati da analizzare si segue una procedura che “discretizza” queste misurazioni, rendendole simili al caso discontinuo.

3.2 Risultati degli studi sperimentali

Le prove descritte nel paragrafo precedente sono state effettuate variando la concentrazione dei fini, il rapporto dei diametri delle particelle (diametro particella grande su diametro della particella piccola) e la geometria del silo. Gli studi sperimentali considerati sono quelli ottenuti dai seguenti casi:

1. silo con tramoggia con angolo di 55° e rapporto dei diametri pari a 1,9;
2. silo con tramoggia con angolo di 15° e rapporto dei diametri pari a 1,9;
3. silo con tramoggia con angolo di 55° e rapporto dei diametri pari a 4,3;
4. silo con tramoggia con angolo di 15° e rapporto dei diametri pari a 4,3.

Per ogni caso sono stati testati tre diversi valori di concentrazione di fini, cioè 5%, 20% e 50%. Di ogni concentrazione sono state effettuate tre prove.

3.2.1 Caso 1: angolo di 55° e rapporto dei diametri pari a 1,9

Come viene mostrato in Figura 3.4, il grado di segregazione è più alto per il valore più basso di concentrazione di fini trattato, e diminuisce all'aumentare della concentrazione di fini. In più, nel caso del 5% di fini, vi è un eccesso di materiale scaricato inizialmente, mentre per le altre concentrazioni lo scarico è pressoché uniforme. Questo arricchimento di fini scaricati allo stadio iniziale è probabilmente dovuto a un eccesso di percolazione se i fini sono in quantità minore, quindi se vi sono più vuoti a disposizione per essi. Quando però la concentrazione di fini aumenta, la frazione di vuoto decresce, quindi le particelle più fini hanno meno spazio e possibilità di scendere, e vi è meno percolazione.

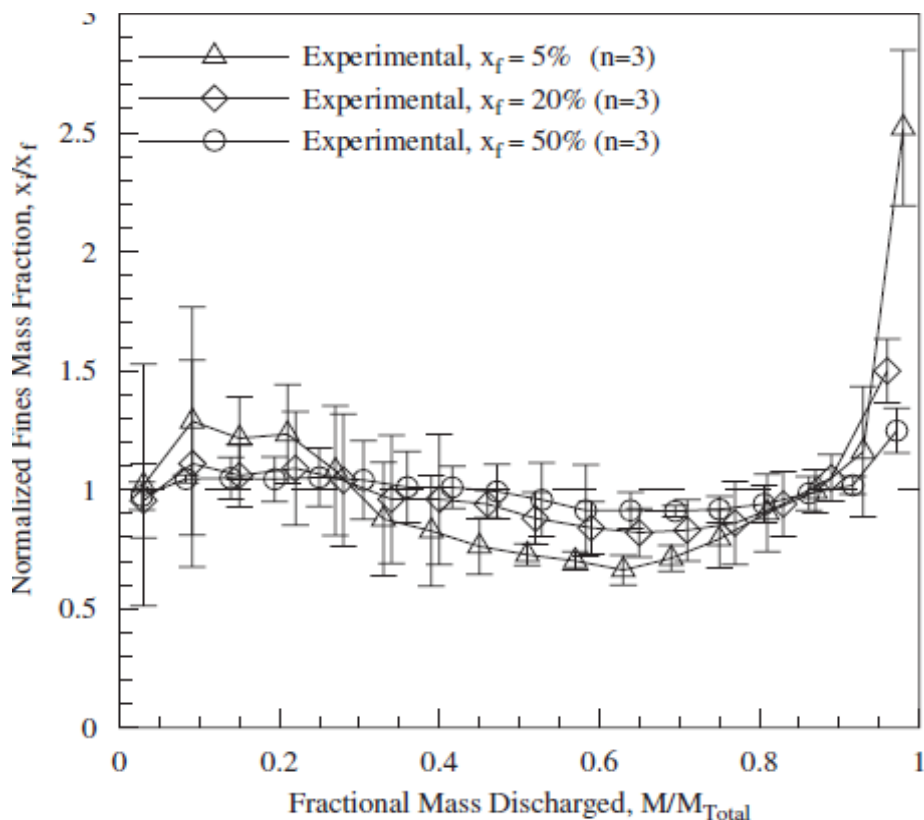


Figura 4.4. Risultati sperimentali sulla segregazione per un silo a tramoggia conica ad angolo di 55° , riempito di sfere di vetro a due diametri diversi in rapporto 1,9. Le barre d'errore indicano un intervallo di confidenza del 95% (Ketterhagen et al., 2007)

Da notare infine che la frazione di fini aumenta quando il materiale sta per essere tutto scaricato. Questo è dovuto al regime di *funnel-flow*, in cui l'ultima frazione di materiale scaricato è quella in prossimità delle pareti: in questa zona, prima di essere scaricate, si sono accumulate parte delle particelle più piccole.

3.2.2 Caso 2: angolo di 15° e rapporto dei diametri pari a 1,9

Il comportamento è simile al caso 1, ma il grado di segregazione è notevolmente ridotto. Come si può vedere nella Figura 4.5, i fini sono scaricati in maniera pressoché uniforme fino a che il materiale non è stato scaricato al 85%, poi il materiale scaricato si impoverisce di fini, indipendentemente dalla composizione iniziale. Nel caso di miscela al 50% di fini, il materiale scaricato ha quasi la stessa concentrazione per tutto il tempo di scarico.

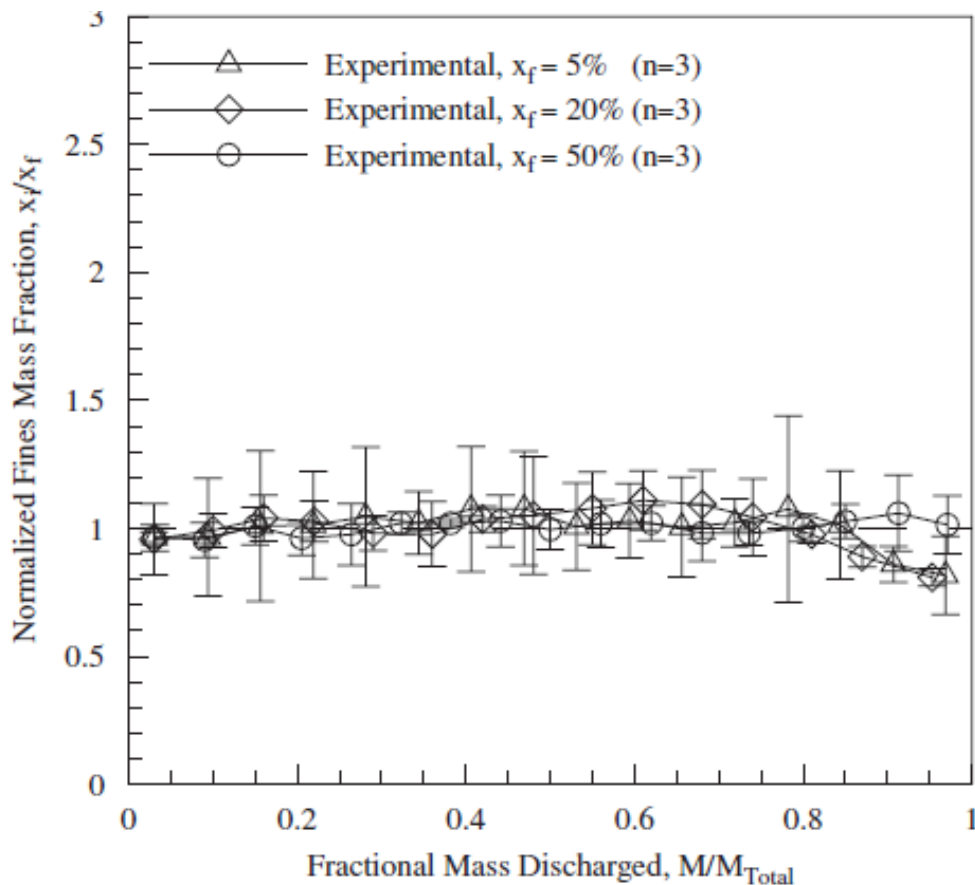


Figura 3.5. Risultati sperimentali sulla segregazione per un silo a tramoggia conica ad angolo di 15° , riempito di sfere di vetro a due diametri diversi in rapporto 1,9. Le barre d'errore indicano un intervallo di confidenza del 95% (Ketterhagen et al., 2007)

Non vi è quindi aumento della frazione di fini verso la fine dello scarico: questo perché il regime di scarico è il *mass-flow* e il materiale non si accumula sulle pareti. Non vi è nemmeno l'eccesso di fini all'inizio dello scarico, come nel caso 1, sempre a causa del *mass-flow*.

3.2.3 Caso 3: angolo di 55° e rapporto dei diametri pari a 4,3

Le curve sperimentali in Figura 3.6 presentano un andamento simile al caso 1, con una differenza sostanziale all'inizio dello scarico: mentre nel caso 1 appena dopo l'istante iniziale la concentrazione rimaneva pari al valore di partenza, in questo caso si ha un eccesso di fini scaricati all'istante iniziale, e questo eccesso è tanto più marcato quanto più bassa è la concentrazione di partenza di fini. Inoltre il rapporto tra la concentrazione di particelle più piccole e quella iniziale di particelle più piccole devia dal valore unitario in maniera più marcata rispetto al caso 1. Tutto ciò è dovuto alla differenza più marcata tra i diametri delle particelle: infatti, più alta è questa differenza più la percolazione è favorita, a causa della frazione maggiore di vuoti formata. Questi andamenti si registrano però solo per le concentrazioni di fini più basse, perché questi hanno così più spazio per scendere.

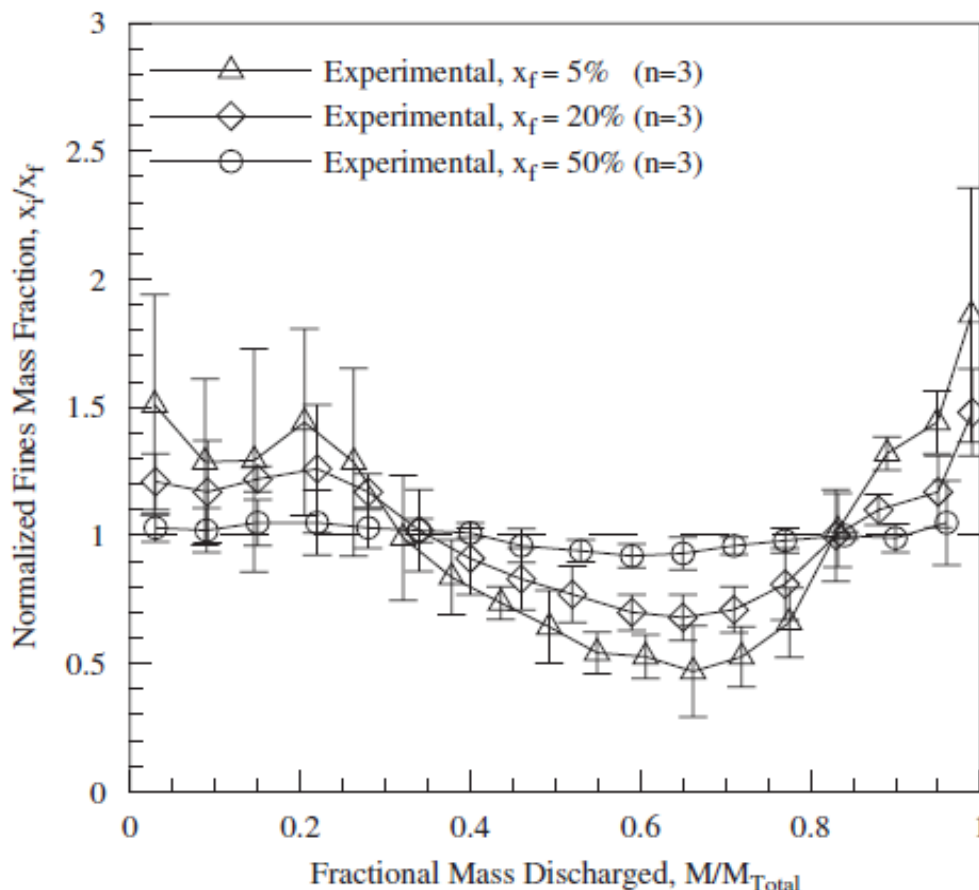


Figura 3.6. Risultati sperimentali sulla segregazione per un silo a tramoggia conica ad angolo di 55° , riempito di sfere di vetro a due diametri diversi in rapporto 4,3. Le barre d'errore indicano un intervallo di confidenza del 95% (Ketterhagen et al., 2007)

Da notare infine che, come nel caso 1, la frazione di fini aumenta verso la fine del processo di scarico, a dimostrazione che ciò è dovuto al regime di scarico *funnel-flow*.

3.2.4 Caso 4: angolo di 15° e rapporto dei diametri pari a 4,3

Come nel caso 3, anche in questo caso si ha un eccesso di fini negli istanti iniziali, come si ha uno scostamento maggiore dal valore unitario del rapporto concentrazione fini/concentrazione iniziale fini (Figura 3.7), sempre per concentrazioni iniziali più basse e sempre a causa del maggior rapporto tra il diametro della particella più grande e quello della particella più piccola.

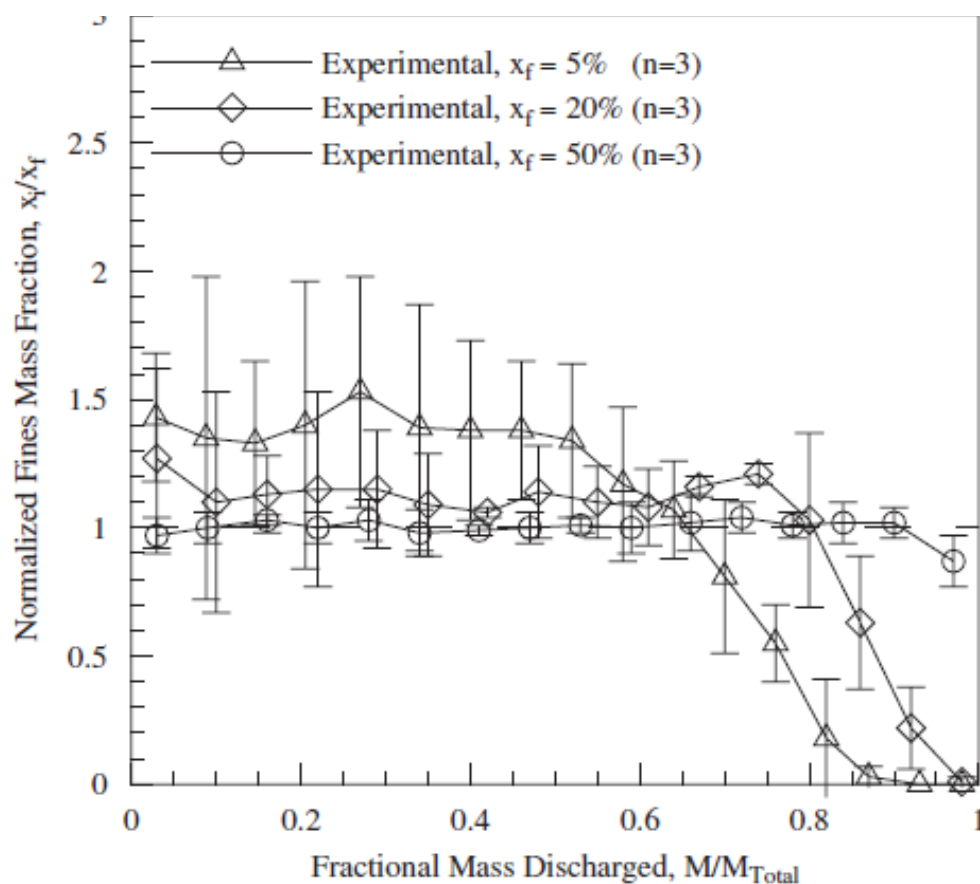


Figura 3.7. Risultati sperimentali sulla segregazione per un silo a tramoggia conica ad angolo di 15° , riempito di sfere di vetro a due diametri diversi in rapporto 4,3. Le barre d'errore indicano un intervallo di confidenza del 95% (Ketterhagen *et al.*, 2007)

Rispetto ai casi precedenti, però, vi è una differenza riguardo la parte finale dello scarico: in questo caso la quantità di fini tende a scendere in ogni prova, e in maniera tanto più veloce e marcata quanto più bassa è la concentrazione di partenza. Questo, secondo Ketterhagen *et al.* (2007), è dovuto ai bassi valori dei gradienti di velocità in prossimità della tramoggia: i fini che percolano, così, rimangono nel canale di flusso e vengono scaricati, dando così un eccesso di fini scaricati e una carenza di fini in prossimità della superficie superiore. Questa carenza comporta la decrescita della curva verso il termine del processo di scarico.

3.2.5 Conclusioni sull'indagine sui dati sperimentali

Nei casi trattati si è constatato che tanto più la concentrazione iniziale di fini è bassa tanto più favorita è la segregazione. A tal proposito, si può trovare conferma nella relazione di Arteaga e Tüzün (1990), che esprime la frazione massima di fini $\omega_{1,L}$ per cui vi è segregazione in funzione del rapporto tra i diametri (cfr §1.2.2):

$$\omega_{1,L} = \frac{4}{4 + \frac{d_2}{d_1}} \quad (3.1)$$

Si vede come per $d_2/d_1 = 1,9$ si ha $\omega_{1,L} = 0,68$ e per $d_2/d_1 = 4,3$ si ha $\omega_{1,L} = 0,48$, e che più ci si avvicina a tali valori minore è la segregazione (anzi, nel caso di fini al 50% per $d_2/d_1 = 4,3$ non vi è proprio segregazione), in accordo a quanto mostrato nei grafici.

Si ha poi un eccesso di fini allo scarico iniziale se questi hanno la possibilità di scendere, quindi quando spazi interparticellari presenti nel silo sono di più e più ampi: si è nei casi in cui vi è concentrazione minore di fini oppure dove il rapporto dei diametri è più alto. L'eccesso di fini può essere presente anche verso la fine dell'operazione di scarico: questo nel caso dello scarico *funnel-flow*, in cui vi sono particelle fini che rimangono “intrappolate” sulla parte inclinata della tramoggia, zona dalla quale il materiale scende per ultimo.

Per il *mass-flow*, invece, lo scarico è a concentrazione di fini uniforme nel tempo, fino a quando si arriva ad un certo valore di rapporto dei diametri. Se si supera tale valore, i bassi gradienti di velocità sulla tramoggia causano un arricchimento di fini agli istanti iniziali e un impoverimento degli stessi agli istanti finali.

Infine, il rapporto dei diametri influisce sulla distribuzione dei fini lungo lo scarico: più è alto il rapporto dei diametri, più vi è scostamento tra il rapporto frazione di fini/frazione di fini iniziali e il valore unitario dello stesso, in un senso e nell'altro.

Capitolo 4

Implementazione dei modelli nel simulatore

Per l'implementazione nel simulatore *COMSOL Multiphysics 4.3* dei modelli descritti nei precedenti capitoli, oltre alla correlazione con quelli già presenti nel simulatore stesso, vanno fissati il tipo di studio, i vari parametri e le variabili ausiliarie che compaiono nei modelli. Devono inoltre essere tracciate la geometria e la griglia computazionale.

È importante infine cercare di mantenere tutti i parametri e le variabili costanti al variare della geometria, in modo da avere un raffronto più realistico tra i vari casi studiati.

4.1 Fase preliminare: studio effettuato e geometria del sistema

La fase preliminare dell'utilizzo del simulatore comporta che si determini la dimensione spaziale in cui verranno eseguite le prove numeriche, che si inseriscano le fisiche necessarie a queste e che si scelga lo studio da svolgere. Successivamente, si può disegnare la geometria e la griglia computazionale.

4.1.1 Operazioni iniziali

La dimensione spaziale scelta è di tipo 2D: infatti, anche se per la geometria studiata è più realistica una dimensione 2D assial-simmetrica, la 2D può comunque permettere di descrivere i fenomeni trattati in maniera sufficientemente adeguata, avendo questi un'influenza prevalente lungo due direzioni.

Per quanto riguarda le fisiche, vanno scelte quelle denominate “*Laminar Two-Phase Flow, Level Set*”, “*Heat Transfer in Fluids*” e “*Coefficient Form PDE*”. In caso di necessità, queste possono essere implementate anche in un secondo momento. I motivi per cui saranno scelte queste fisiche saranno illustrati successivamente.

Il passo finale è poi quello di inserire il tipo di studio da effettuare, che nel caso in esame è quello dipendente dal tempo, con un tempo di simulazione pari a 10 s, tempo necessario a far scaricare i sili.

4.1.2 Geometria del sistema e griglia computazionale

I sili illustrati nel capitolo 4 sono stati disegnati utilizzando la sezione “*Geometry 1*”, fissando i vari punti uno ad uno per i domini più complessi e utilizzando invece i poligoni predefiniti (come ad esempio il rettangolo) per i domini più semplici. A proposito dei domini, ogni geometria trattata ne ha due, uno per il materiale granulare e uno per l'aria, dato che i sili nelle prove sperimentali sono stati riempiti solo parzialmente.

In Figura 4.1 sono rappresentate le geometrie come sono state implementate in *COMSOL Multiphysics 4.3*. Non tutti i segmenti rappresentano delle pareti: il segmento 5 indica l'entrata dell'aria dalla parte superiore, dato che i sili sono “a cielo aperto”; il segmento 4 rappresenta l'interfaccia tra il materiale granulare e l'aria; infine, il segmento 7 indica l'uscita del materiale granulare.

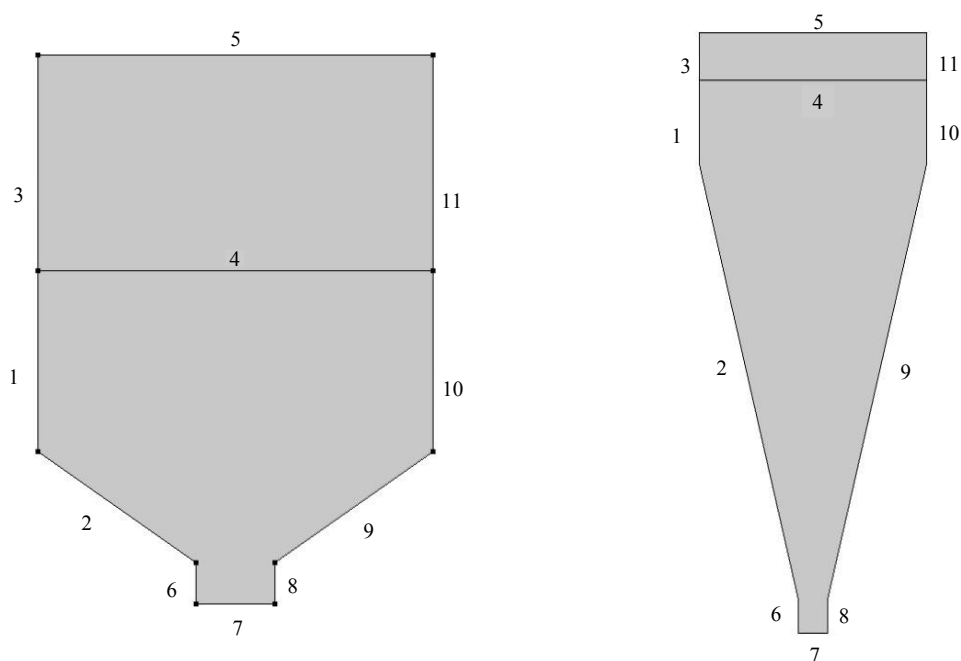


Figura 4.1. Geometrie implementate nel simulatore *COMSOL Multiphysics 4.3*. I contorni sono numerati seguendo la numerazione del simulatore.

Per i calcoli, inoltre, è stato necessario disegnare la griglia computazionale (*mesh*). Ne è stata scelta una, per ogni geometria, con celle a forma triangolare, in quanto con questo tipo di celle è più facile costruire la griglia e variarla a seconda delle necessità. In Figura 4.2 vi sono le griglie implementate.

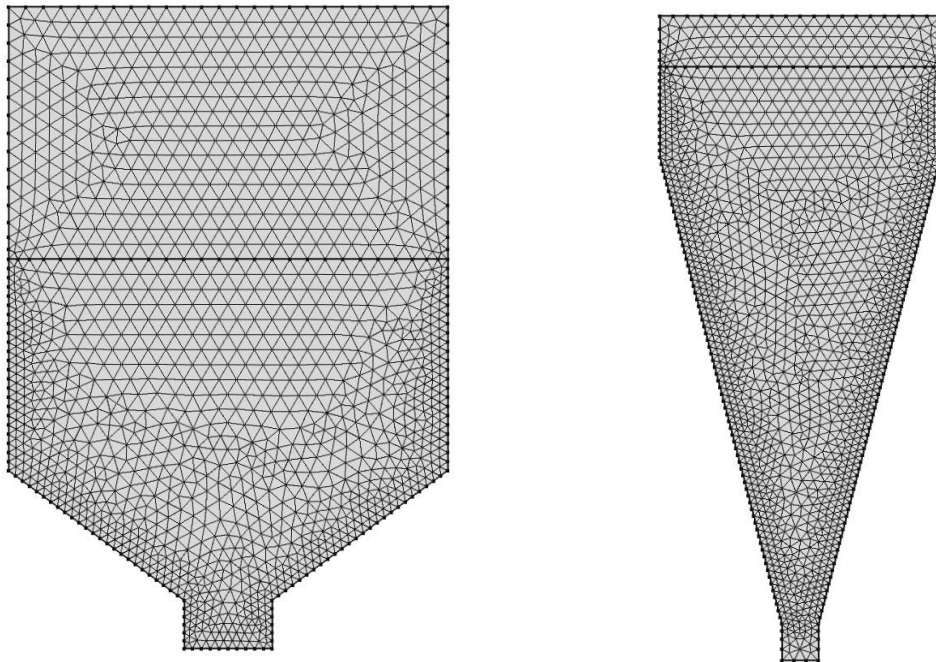


Figura 4.2. Griglia computazionale utilizzata nelle simulazioni per entrambe le geometrie.

Come si può vedere, le celle sono state tracciate in dimensioni tali da trovare un compromesso tra accuratezza dei risultati e risparmio del tempo computazionale. La griglia inoltre è stata resa più fitta in prossimità delle pareti, dove si prevede che i gradienti di velocità (*shear rate*) siano più alti.

4.2 Parametri e variabili preliminari e associati alle fisiche

Il passo successivo è quello di fissare i parametri e le variabili. I primi possono essere inseriti nel nodo “*Parameters*” sotto la sezione “*Global Definitions*”, mentre le seconde vanno implementate nel nodo “*Variables*” sotto la sezione “*Definitions*” del modello. Si deve cercare inoltre di mantenere costanti i parametri e le variabili al variare della geometria.

Le variabili e i parametri da inserire sono quelli illustrati nel capitolo 2, più altre variabili e parametri che di seguito verranno descritti.

4.2.1 Scorrimento alla parete e lunghezza di scivolamento

Nei pressi della parete il materiale granulare può scorrere in maniera diversa a seconda dei casi. Ad esempio può subire scorrimento parziale o non scorrimento, anche se di solito scorre parzialmente. In ogni caso, il comportamento del materiale granulare alla parete è descrivibile dal criterio di cedimento di Coulomb

$$\tau = \mu_w \sigma \quad , \quad (4.1)$$

dove τ indica lo sforzo tangenziale, σ lo sforzo normale e μ_w il coefficiente d'attrito alla parete. Si preferisce però, per semplicità di implementazione, ricorrere alla condizione di scorrimento di Navier

$$u_t = \lambda \left| \frac{\partial u_t}{\partial n} \right| \quad , \quad (4.2)$$

dove u_t indica la componente della velocità tangenziale alla parete, n il versore normale alla parete e λ un parametro chiamato “lunghezza di scivolamento”, il quale varia dal valore nullo (non scivolamento) al valore infinito (scivolamento perfetto) e può essere considerato proporzionale al diametro delle particelle d_p secondo un parametro $k_\lambda = \lambda / d_p$. Questo parametro dipende dalle interazioni tra le particelle del materiale e la parete, e viene ottenuto sperimentalmente.

4.2.2 Soft start

In certe occasioni, il proseguire del calcolo computazionale in una simulazione può risultare difficoltoso, soprattutto negli istanti iniziali. Per facilitare la simulazione, quindi, si ricorre ad una funzione dipendente dal tempo denominata “soft start”, la quale varia dal valore nullo che assume all'istante iniziale fino al valore unitario che assume ad un precisato istante detto “tempo scalato”. Moltiplicando determinate variabili per questa funzione adimensionale si può quindi favorire la convergenza della simulazione in tutto il tempo della stessa.

La funzione “soft start” implementata nel simulatore, già utilizzata in altre trattazioni (ad esempio: Volpato, 2013), è

$$\begin{cases} -2t_1^2 + 3t_1^3 & t_1 \leq 1 \\ 1 & t_1 > 1 \end{cases} \quad , \quad (4.3)$$

con $t_1 = t/t_{sc}$ tempo scalato, cioè tempo di simulazione rapportato ad un parametro t_{sc} detto “tempo di scala”, che in questa trattazione è stato considerato pari a 5 s.

4.3 Implementazione dei modelli bifasico e reologico

Il primo modello da inserire nel sistema di simulazione è il modello bifasico. Esso è già presente nel simulatore, quindi basta aggiungere al sistema la fisica descritta dal modello,

indicata con “*Laminar Two-Phase Flow, Level Set*” (*tpf*). Oltre a questo, poi, va inserita la reologia, espressa tramite un bilancio d'energia, come descritto in §2.3.

4.3.1 Implementazione del modello reologico

Il modello reologico non è presente in “*COMSOL Multiphysics 4.3*”: lo si può però implementare adattandolo ad un modello già presente nel simulatore. Se si osserva la fisica “*Heat Transfer in Fluids*”, essa è descritta dall'equazione

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k \nabla T) + Q + Q_{vh} + W_p \quad . \quad (4.4)$$

Il riscaldamento viscoso Q_{vh} e il lavoro di pressione W_p possono essere ritenuti trascurabili, semplificando così la (4.4) fino ad arrivare a

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k \nabla T) + Q \quad , \quad (4.5)$$

che è molto simile al bilancio d'energia cinetica traslazionale espresso nella (2.13): basta sostituire la temperatura T con la temperatura granulare θ , ponendo il calore specifico C_p pari a $3/2$, la conduttività termica k con il coefficiente costitutivo dell'energia fluttuante espresso dalla (2.19) e il calore sviluppato Q pari alla produzione netta d'energia descritta dalla (2.18).

4.3.2 Parametri del modello bifasico e del modello reologico

In Tabella 4.1 vengono riportati i valori dei parametri utilizzati in queste due fisiche, con le rispettive unità di misura reali e di implementazione, che tra loro possono anche non coincidere a causa dell'adattamento dei modelli a fisiche già presenti nel simulatore.

Tabella 4.1. Parametri utilizzati nel modello bifasico e nel modello reologico

Parametro	Simbolo	Valore	Unità di misura reale	Unità di misura d'implementazione
Densità del materiale granulare	ρ	1450	kg/m ³	kg/m ³
Parametro del coefficiente di viscosità	η_0	0.2	1/s	1/s
Parametro del coefficiente costitutivo dell'energia fluttuante	k'	2	1/s	m ² /(s ³ ·K)
Diametro medio delle particelle	d_p	0.0018 0.0019	m	m
Coefficiente d'attrito interno	μ	0.5	-	-
Parametro della lunghezza di scivolamento	k_λ	0.1 (<i>funnel</i>) 0.5 (<i>mass</i>)	-	-
Densità dell'aria	ρ_2	1	kg/m ³	kg/m ³
Viscosità dell'aria	η_2	10	Pa·s	Pa·s
Temperatura granulare iniziale	θ_0	0.12	m ² /s ²	K
Parametro adimensionale della scala di temperatura	k_θ	100	-	K·s ² /m ²
Accelerazione di gravità	g	9.81	m/s ²	m/s ²

Da notare che vi sono due valori diversi riguardo il parametro della lunghezza di scivolamento: non è stato possibile, per motivi computazionali, mantenere questo parametro uguale per ogni geometria. È comunque ammessa questa differenza, dato che lo scivolamento è diverso da silo a silo a seconda dell'angolo della tramoggia. Anche il diametro delle particelle, ottenuto da una media ponderata (rispetto alla composizione delle miscele) dei diametri di ogni biglia, assume due valori, a seconda della prova da effettuare.

4.3.3 Variabili del modello bifasico e del modello reologico

Dai parametri appena riportati dipendono inoltre le variabili necessarie per risolvere il modello bifasico e reologico. Queste variabili sono elencate in Tabella 4.2.

Tabella 4.2. Variabili utilizzate nel modello bifasico e nel modello reologico

Variabile	Simbolo	Espressione	Unità di misura reale	Unità di misura implementata
Temperatura granulare	θ	θ	m^2/s^2	K
Pressione	p	p	Pa	Pa
Scala di temperatura	θ^*	$g \cdot d_p \cdot k_0$	m^2/s^2	K
Coefficiente di viscosità	η'	$\eta_0 \cdot \exp(\theta^*/\theta)$	1/s	1/s
Viscosità del granulare	η	$\eta' \cdot \rho \cdot d_p^2$	Pa·s	Pa·s
Lunghezza di scivolamento	λ	$k_\lambda \cdot d_p$	m	m
Coefficiente costitutivo dell'energia fluttuante	k	$k' \cdot \rho \cdot d_p^2$	Pa·s	W/(m·K)
Sforzo di taglio	τ	$\eta \cdot \dot{\gamma}$	Pa	Pa
Termine di produzione del calore	\dot{Q}	$\dot{\gamma} \cdot (\tau - \mu * p)$	Pa/s	W/m ³

Oltre a queste vi è anche la variabile “*soft start*”, che non viene riportata in Tabella 4.2 perché non è di fondamentale importanza implementarla, anche se il suo utilizzo è fortemente consigliato per facilitare la convergenza delle simulazioni. Per la “*soft start*” (e per il suo parametro) si fa riferimento a §4.2.2.

4.3.4 Condizioni iniziali e al contorno nel modello bifasico

Una volta fissati i parametri e le variabili vanno inserite le condizioni iniziali e al contorno, facendo riferimento ai valori riportati in Tabella 4.1 e alle espressioni presenti in Tabella 4.2. Nel modello bifasico viene richiesto, come prima cosa, di specificare la densità e la viscosità di entrambi i fluidi, sapendo che il fluido “1” è il materiale granulare e il fluido “2” è l'aria. La densità e la viscosità medie verranno poi calcolate automaticamente con le (2.11).

Bisogna inoltre specificare la tensione superficiale, il parametro di reinizializzazione e lo spessore dell'interfaccia in funzione della dimensione delle celle della *mesh*: la tensione superficiale può essere trascurata, mentre si possono prendere i valori predefiniti sia come parametro di reinizializzazione (pari a 1) sia come spessore dell'interfaccia (pari alla metà della dimensione massima delle celle).

Viene richiesta poi l'interfaccia iniziale, che sarà il segmento 4, e i fluidi presenti all'istante iniziale nei vari domini: in quello superiore vi sarà l'aria, mentre in quello inferiore vi sarà il granulare. Entrambi i domini, infine, saranno sottoposti alla forza di gravità, quindi va

specificato anche il vettore di questa, che avrà la componente y pari a $-g$ (eventualmente moltiplicata per la “*soft start*”) e la componente x nulla.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, queste consistono in un'entrata, in un'uscita e nello scorrimento alla parete. La prima è posta sul segmento 5, e dato che il silo è a cielo aperto, va posta la condizione che entri solamente l'aria, fissando al valore unitario la frazione del fluido “2”. Si specifica inoltre la pressione iniziale nulla e il fatto che non vi sia alcuno sforzo viscoso.

L'uscita, invece, sarà il segmento 7, e nei pressi di essa vi sarà moto laminare: vi sarà cioè la condizione “*laminar outflow*”, in cui vi è un tratto subito dopo l'uscita in cui il moto laminare perdurerà. Si fisserà lo spessore di tale tratto pari al diametro del silo, mentre la sua lunghezza sarà, in questo caso, nulla. È possibile inoltre specificare la velocità media, la portata volumetrica o la pressione in uscita da tale tratto: nel caso in esame, sarà fissata la portata (eventualmente moltiplicata per la “*soft start*”) calcolata tramite la legge di Beverloo

$$\dot{m} = \rho \sqrt{g} C_M (B - k_x d_p)^{2,5} \quad (4.6)$$

se massiva; quindi per ottenerla volumetrica basta dividere per la densità ρ , e si ottiene

$$\tilde{V} = \sqrt{g} C_M (B - k_x d_p)^{2,5} \quad , \quad (4.7)$$

che ovviamente varierà a seconda del diametro d'uscita B e del diametro medio delle particelle. I parametri dell'equazione, oltre a quelli riportati in Tabella 4.1, sono k_x , che ha il valore di 1,5, e C_M , che dipende dal materiale: per un granulare generico viene assunto pari a 0,58, ma per sfere di vetro può arrivare a 0,64, perciò è quest'ultimo valore che verrà considerato nella (5.7).

Si conclude questa fase con le condizioni di scorrimento alla parete: nei bordi su cui non scorre il materiale granulare (segmenti 3 e 11) si impone un scivolamento generico, mentre nei bordi su cui scorre il materiale granulare (segmenti 1, 2, 7, 8, 9, 10) si fissa la velocità di scivolamento, imponendo lo scivolamento viscoso e specificando la lunghezza di scivolamento, eventualmente moltiplicata per la “*soft start*”.

4.3.5 Condizioni iniziali e al contorno nel modello reologico

Anche per il modello reologico vanno stabilite le condizioni al contorno, con riferimento alle Tabelle 4.1 e 5.2: in questo caso, però, va tenuto conto dell'adattamento di esso alla fisica “*Heat Transfer in Fluids*”. Perciò, quando si fissano le condizioni iniziali, si pone che la conduttività termica sia pari al coefficiente costitutivo dell'energia fluttuante e il calore specifico a pressione costante sia pari a 1,5, come già esplicitato in §2.3.3. Dal punto di vista termodinamico, inoltre, specificato che il tipo di fluido è “gas/liquido”, si fissa, con buona

approssimazione, che la densità sia pari a quella del materiale granulare, mentre si lascia al valore unitario (predefinito) il rapporto dei calori specifici. Viene infine richiesta la pressione e la velocità: dato che il modello bifasico e il modello reologico vanno accoppiati, si pongono queste due variabili pari a quelle calcolate con il “*Level Set*” (matrice “*tpf/fp1*”).

Si fissa poi il valore iniziale della temperatura granulare: questo sarà pari a quello specificato in Tabella 5.1, ottenuto in maniera tale da garantire il corretto scorrimento del materiale. Nel dominio in cui scorre il materiale granulare, inoltre, si implementa la sorgente di calore, imponendola pari al termine di produzione espresso in Tabella 5.2 (in accordo a ciò che è stato detto in §2.3.3), eventualmente moltiplicata per la “*soft start*”.

Infine, le pareti del silo garantiscono l'isolamento termico, tranne in uscita dove va specificato che l'energia fluttuante esce: si pone quindi sul solo segmento 7 la condizione “*outflow*”, lasciando l'isolamento termico in tutti gli altri contorni.

4.4 Implementazione del modello di segregazione

Tra le fisiche presenti in *COMSOL Multiphysics 4.3* non è presente alcun modello di segregazione, quindi quello descritto nel §2.7.3 andrebbe adattato ad una fisica già implementata nel simulatore, così come fatto per il modello reologico (cfr § 4.3.1), oppure si può ricorrere ad una via alternativa, che consiste nell'implementare il modello correlandolo ad una PDE generica, considerando la variabile dipendente di questa come un vettore a due componenti.

4.4.1 Trasporto di specie diluite

La prima alternativa è correlare il bilancio di materia ad un trasporto di specie diluite, descritto dall'equazione

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \nabla \cdot (-D_i \nabla c_i) + \mathbf{u} \cdot \nabla c_i = R_i \quad , \quad (4.8)$$

con i specie, c concentrazione molare e R velocità di produzione. Questo bilancio, semplice da maneggiare in quanto ha un solo termine diffusivo, può presentare difficoltà nell'inserire il termine di segregazione, che deve essere sottoposto a derivate parziali per poi essere messo nel termine di produzione. Il problema principale, però, è dato dalla concentrazione: essa non può assumere il significato di frazione (molare, ponderale o volumetrica), ma può essere espressa solo come moli/volume, la cui sommatoria non deve essere necessariamente unitaria. Questo non permette, se si inseriscono due specie, di ottenere una miscela effettivamente binaria, ma si ricava un sistema formato da due specie che si propagano in un mezzo (si può

infatti inserire un'unica specie e studiare il trasporto di essa). Questo trasporto di specie non viene quindi considerato.

4.4.2 Trasporto di specie concentrate

Il problema principale del trasporto delle specie diluite non si presenta in questo caso: infatti, la concentrazione delle specie inserite è espressa come frazione massiva la cui sommatoria dà sempre valore unitario, e il numero minimo di specie da inserire è due. L'equazione del trasporto, però, è più complessa che nel caso diluito:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega_i) + \nabla \cdot (\rho \omega_i \mathbf{u}) = -\nabla \cdot \mathbf{j}_i + R_i \quad , \quad (4.9)$$

con ω frazione di massa, i specie, R velocità di produzione e \mathbf{j} vettore del flusso massivo, descrivibile con il modello di Stefan-Maxwell, quello mediato sulla miscela o quello di Fick. Dato che è il più semplice e il più utilizzato, verrà illustrato solo quest'ultimo:

$$\mathbf{j}_i = - \left(\rho D_i^F \nabla \omega_i + \rho \omega_i D_i^F \frac{\nabla M_n}{M_n} + D_i^T \frac{\nabla T}{T} \right) \quad , \quad (4.10)$$

dove si ha, oltre ai simboli già citati, il coefficiente di diffusione D di Fick (di materia, indicato con apice F) e termico (apice T), la temperatura T e la massa molecolare media M_n , ottenibile dalla relazione

$$M_n = \left(\sum \frac{\omega_i}{M_i} \right)^{-1} \quad . \quad (4.11)$$

Come si può intuire, le difficoltà nel maneggiare l'equazione stanno nel termine di flusso: nel caso trattato, è bene che il secondo e il terzo addendo risultino nulli. Ciò è possibile rispettivamente ponendo di ugual valore le masse molecolari delle varie specie (in modo da annullare i gradienti) e ponendo nullo il coefficiente di diffusione termica. Fatto ciò, rimane il problema di inserire il termine di segregazione: lo si può fare nel termine di produzione, ma va comunque derivato, analogamente a ciò che si dovrebbe fare nel caso diluito. Perciò l'ipotesi del trasporto concentrato viene momentaneamente accantonata, e utilizzata solo come alternativa a ciò che verrà illustrato di seguito.

4.4.3 La PDE: forma generale e forma per un sistema binario

Come ultima scelta, si è ricorso all'utilizzo di una PDE generica, adattando i termini del modello di segregazione ad essa. La PDE utilizzata come opzione per l'implementazione del modello è espressa nella forma a coefficienti, quindi l'equazione generale che la descrive è:

$$e_a \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (-c \nabla \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} + \gamma) + \beta \cdot \nabla \mathbf{u} + a \mathbf{u} = f \quad , \quad (4.12)$$

con e_a che è il coefficiente di massa, d_a il coefficiente di smorzamento (o di massa se e_a è nullo), c il coefficiente di diffusione, α il coefficiente di flusso di convezione conservativo, β il coefficiente di convezione, a il coefficiente d'assorbimento, γ il termine di produzione del flusso conservativo e f il termine di produzione. Per quanto riguarda \mathbf{u} , esso è il vettore delle variabili incognite che si vuole esprimere tramite la risoluzione della PDE.

Si consideri ora un sistema binario: in questo caso si ha $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, mentre i termini e_a , d_a , c , α , β e a sono tutte matrici quadrate di due righe e due colonne e i termini γ e f sono vettori a due componenti. Si possono così esprimere:

- il termine di massa:

$$e_a \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \begin{bmatrix} e_{a11} & e_{a12} \\ e_{a21} & e_{a22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{a21} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + e_{a22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ e_{a11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + e_{a12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \end{bmatrix} ; \quad (4.13)$$

- il termine di smorzamento:

$$d_a \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \begin{bmatrix} d_{a11} & d_{a12} \\ d_{a21} & d_{a22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{a21} \frac{\partial u_1}{\partial t} + d_{a22} \frac{\partial u_2}{\partial t} \\ d_{a11} \frac{\partial u_1}{\partial t} + d_{a12} \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{bmatrix} ; \quad (4.14)$$

- il termine del flusso diffusivo, nel caso di sistema isotropo:

$$c \nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \nabla u_1 + c_{12} \nabla u_2 \\ c_{21} \nabla u_1 + c_{22} \nabla u_2 \end{bmatrix} ; \quad (4.15)$$

- il termine del flusso convettivo conservativo:

$$\alpha \mathbf{u} = \alpha \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{111} \\ \alpha_{112} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha_{121} \\ \alpha_{122} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha_{211} \\ \alpha_{212} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha_{221} \\ \alpha_{222} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{111} \\ \alpha_{112} \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} \alpha_{121} \\ \alpha_{122} \end{bmatrix} u_2 \\ \begin{bmatrix} \alpha_{211} \\ \alpha_{212} \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} \alpha_{221} \\ \alpha_{222} \end{bmatrix} u_2 \end{bmatrix}; \quad (4.16)$$

- il termine di produzione del flusso conservativo e la sua divergenza:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}; \quad (4.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{y} = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \\ \nabla \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}; \quad (4.18)$$

- il termine di convezione:

$$\beta \cdot \nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{111} \\ \beta_{112} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \beta_{121} \\ \beta_{122} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \beta_{211} \\ \beta_{212} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \beta_{221} \\ \beta_{222} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{111} \\ \beta_{112} \end{bmatrix} \cdot \nabla u_1 + \begin{bmatrix} \beta_{121} \\ \beta_{122} \end{bmatrix} \cdot \nabla u_2 \\ \begin{bmatrix} \beta_{211} \\ \beta_{212} \end{bmatrix} \cdot \nabla u_1 + \begin{bmatrix} \beta_{221} \\ \beta_{222} \end{bmatrix} \cdot \nabla u_2 \end{bmatrix}; \quad (4.19)$$

- il termine d'assorbimento:

$$\mathbf{a} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} u_1 + a_{12} u_2 \\ a_{21} u_1 + a_{22} u_2 \end{bmatrix}; \quad (4.20)$$

- il termine di produzione:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Ora è possibile confrontarli con il modello di segregazione, come verrà mostrato di seguito. Non vi sono più problemi di implementazione del flusso, dato che vi è ogni termine possibile correlabile ai vari modelli, e inoltre la PDE è valida sia per specie concentrate sia per specie diluite.

4.4.4 Confronto tra la PDE e il modello di segregazione

Si prenda ora un materiale granulare binario, formato quindi da due componenti 1 e 2. Se si segue il modello di Hajra *et al.* (2012) i bilanci di materia di questo materiale sono espressi dalle equazioni (3.9) e (3.11) messe a sistema. Questo sistema, se viene analizzato ognuno dei contributi delle equazioni che lo compongono, può essere confrontato con quello della PDE per un sistema bicomponente, ponendo

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

con $\omega_2 = 1 - \omega_1$.

Dalle (3.9) e (3.11) si può osservare come prima cosa che il termine d'accumulo dei bilanci di materia è uguale al termine di smorzamento, a patto di porre $d_{a11} = d_{a22} = 1$ e $d_{a12} = d_{a21} = 0$.

Per quanto riguarda il termine convettivo dei bilanci, esso può essere inserito confrontandolo con la matrice dei coefficienti β . In particolare si ha:

- $\beta_{111} = \beta_{221} = -u$;
- $\beta_{112} = \beta_{222} = -v$;
- $\beta_{121} = \beta_{122} = \beta_{211} = \beta_{212} = 0$;

Si ha poi il termine diffusivo: nelle (3.9) e (3.11), però, esso viene derivato solo lungo la direzione y . Per fare in modo che ciò avvenga, si può considerare il materiale anisotropo, in cui i coefficienti sono a loro volta delle matrici quadrate, come mostrato successivamente

$$\begin{aligned} c \nabla \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1112} \\ c_{1121} & c_{1122} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{1211} & c_{1212} \\ c_{1221} & c_{1222} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} c_{2111} & c_{2112} \\ c_{2121} & c_{2122} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{2211} & c_{2212} \\ c_{2221} & c_{2222} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1112} \\ c_{1121} & c_{1122} \end{bmatrix} \nabla u_1 + \begin{bmatrix} c_{1211} & c_{1212} \\ c_{1221} & c_{1222} \end{bmatrix} \nabla u_2 \\ \begin{bmatrix} c_{2111} & c_{2112} \\ c_{2121} & c_{2122} \end{bmatrix} \nabla u_1 + \begin{bmatrix} c_{2211} & c_{2212} \\ c_{2221} & c_{2222} \end{bmatrix} \nabla u_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Questo contributo diventa uguale a quello diffusivo se si pone $c_{1122} = c_{2222} = D_1 = D_2$, con tutti gli altri termini delle varie matrici nulli.

Bisogna infine inserire il flusso di segregazione. Lo si può fare analizzando il termine di produzione del flusso conservativo. Dato che il contributo segregativo va derivato solo lungo y , risulta che $\gamma_{11} = \gamma_{21} = 0$, $\gamma_{12} = J_{s,1}$ e $\gamma_{22} = J_{s,2}$.

4.4.5 Parametri del modello di segregazione

In Tabella 4.3 sono riportati i parametri necessari per implementare il modello della segregazione. Dato che le unità di misura vengono specificate manualmente nella PDE, come verrà specificato in §4.4.6, non vi è alcuna differenza tra le unità di misura reali e quelle d'implementazione.

Tabella 4.3. Parametri utilizzati nel modello di segregazione

Parametro	Simbolo	Valore	Unità di misura
Coefficiente di diffusione dei fini	D_1	$8 \cdot 10^{-4}$	m ² /s
Coefficiente di diffusione dei grossolani	D_2	$8 \cdot 10^{-4}$	m ² /s
Rapporto dei diametri	d_1/d_2	0.233	-
		0.526	-
Diametro delle particelle grossolane	d_2	0.00224	m
Frazione iniziale delle particelle fini	$\omega_{1,0}$	0.05	-
		0.2	-
		0.5	-

Il rapporto dei diametri e la frazione iniziale dei fini assumono valori diversi a seconda della prova da effettuare.

4.4.6 Variabili del modello di segregazione

Anche se la PDE permette di associare il vettore delle sue variabili ad una grandezza qualsiasi, non riesce a riconoscere quest'ultima come tale. Questo problema riguarda soprattutto le composizioni di sostanze: infatti, se si ha un vettore di frazioni molari, massive o volumetriche, la PDE non riesce a rispettare la condizione che queste varino tra il valore nullo e quello unitario, né riesce a rispettare la condizione di congruenza, per cui la somma delle frazioni deve essere unitaria.

Per ovviare a questo problema si ricorre quindi ad una modifica apportata alla frazione massiva $c_{i,CM}$ calcolata dal simulatore, in modo da rispettare le condizioni appena specificate.

Si esprime innanzitutto una variabile ausiliaria N_{CM} per normalizzare le frazioni massive, espressa da

$$N_{CM} = \max(\max(\min(\omega_{1,CM}, 1), 0), 1) . \quad (4.24)$$

La frazione massiva dei fini viene poi modificata in modo che risulti sempre compresa tra 0 e 1 con l'equazione

$$\omega_1 = \frac{\max(\min(\omega_{1,CM}, 1), 0)}{N_{CM}}, \quad (4.25)$$

mentre la frazione massiva dei grossolani viene ottenuta semplicemente sottraendo al valore unitario il valore di ω_1 , quindi $\omega_2 = 1 - \omega_1$.

Per risolvere le equazioni del trasporto, poi, sono necessarie delle variabili già esplicitate in §2.6 e §2.7.3 e che vengono qui riprese in Tabella 4.4. Anche in questo caso non vi è differenza tra l'unità di misura reale e quella implementata.

Tabella 4.4. Variabili utilizzate nel modello di segregazione

Variabile	Simbolo	Espressione	Unità di misura
Componente della velocità lungo la direzione x	u	u	m/s
Componente della velocità lungo la direzione y	v	v	m/s
Velocità di segregazione delle particelle fini	$v_{s,1}$	$-K d_2 (1 - \omega_1) \left(\frac{d_1}{d_2} - 1 \right) \dot{\gamma}^m$	m/s
Velocità di segregazione delle particelle grossolane	$v_{s,2}$	$K d_2 (1 - \omega_2) \left(\frac{d_1}{d_2} - 1 \right) \dot{\gamma}^n$	m/s
Flusso di segregazione delle particelle fini	$J_{s,1}$	$v_{s,1} \cdot \omega_1$	m/s
Flusso di segregazione delle particelle grossolane	$J_{s,2}$	$v_{s,2} \cdot \omega_2$	m/s
Frazione iniziale delle particelle grossolane	$\omega_{2,0}$	$1 - \omega_{1,0}$	-

Si vedrà poi che le velocità convettive e i flussi di segregazione subiranno un'ulteriore correzione.

4.4.7 Inserimento dei parametri, delle variabili e delle condizioni

Quando si aggiunge la PDE, bisogna per prima cosa specificare la quantità delle componenti del vettore della variabile dipendente, la quantità del termine di sorgente con la sua unità di misura e il nome del vettore delle variabili dipendenti e delle sue componenti. Nel caso in esame, si pone come quantità della variabile, che sarà un vettore a due componenti, la frazione massiva e come quantità della sorgente, che avrà unità di misura 1/s, “nessuna”.

I parametri e le variabili del modello di segregazione vengono così inseriti nella PDE in accordo con ciò che è stato detto in §4.4.4. Il trasporto di materia, però, deve essere valido solamente dove vi è il materiale granulare. Bisogna quindi annullarlo dove non vi è il granulare stesso: per far ciò, osservando il valore di frazione volumetrica di solido, si prende come riferimento quello assunto come convenzione per l'interfaccia, ovvero 0,5. Se in un dato punto della geometria si supera tale valore, i coefficienti di diffusione, le frazioni massive dei componenti, le componenti della velocità convettiva e i flussi di segregazione assumeranno in quel punto i valori riportati nelle Tabelle 4.3 e 4.4; in caso contrario, tutte queste grandezze saranno nulle.

Si conclude poi questa fase fissando le condizioni iniziali e al contorno: le prime consistono nell'imporre all'istante iniziale le frazioni massive di entrambi i componenti, per le seconde invece basta porre in corrispondenza dell'uscita (segmento 7) un flusso con i termini di sorgente e d'assorbimento nulli, lasciando la condizione di flusso nullo in tutti gli altri bordi.

Capitolo 5

Risultati numerici e confronto con i dati sperimentali

Una volta effettuate le varie simulazioni, i dati ricavati da queste sono stati rilevati ed elaborati seguendo una procedura che permette di poterli confrontare al meglio con i dati sperimentali.

Alle prove di confronto con i dati sperimentali illustrati in precedenza, effettuate a varie condizioni, si aggiungono altre simulazioni puramente qualitative atte a comprendere meglio i risultati ottenuti in precedenza. Per lo stesso motivo, inoltre, sono stati analizzati i profili di alcune variabili in gioco.

5.1 Scorrimento del materiale granulare

Una volta portate a termine le simulazioni, la prima cosa da effettuare è verificare lo scorrimento del materiale granulare all'interno del silo. Il risultato atteso consiste nell'ottenere un regime di *funnel-flow* per il silo con tramoggia ad angolo di 55° , mentre nel silo con tramoggia ad angolo di 15° ci si aspetta un regime di *mass-flow*. Le Figure 5.1 e 5.2 mostrano che ciò si è verificato correttamente.

5.1.1 Profili di frazione volumetrica di solido

In Figura 5.1, in particolare, si nota come la prima frazione di solido che esce è quella che all'inizio era sulla parte centrale, mentre l'ultima frazione di materiale granulare che esce è quella che staziona sulla zona in prossimità dell'attacco tra tramoggia conica e parte cilindrica, come avviene in un regime di *funnel-flow*.

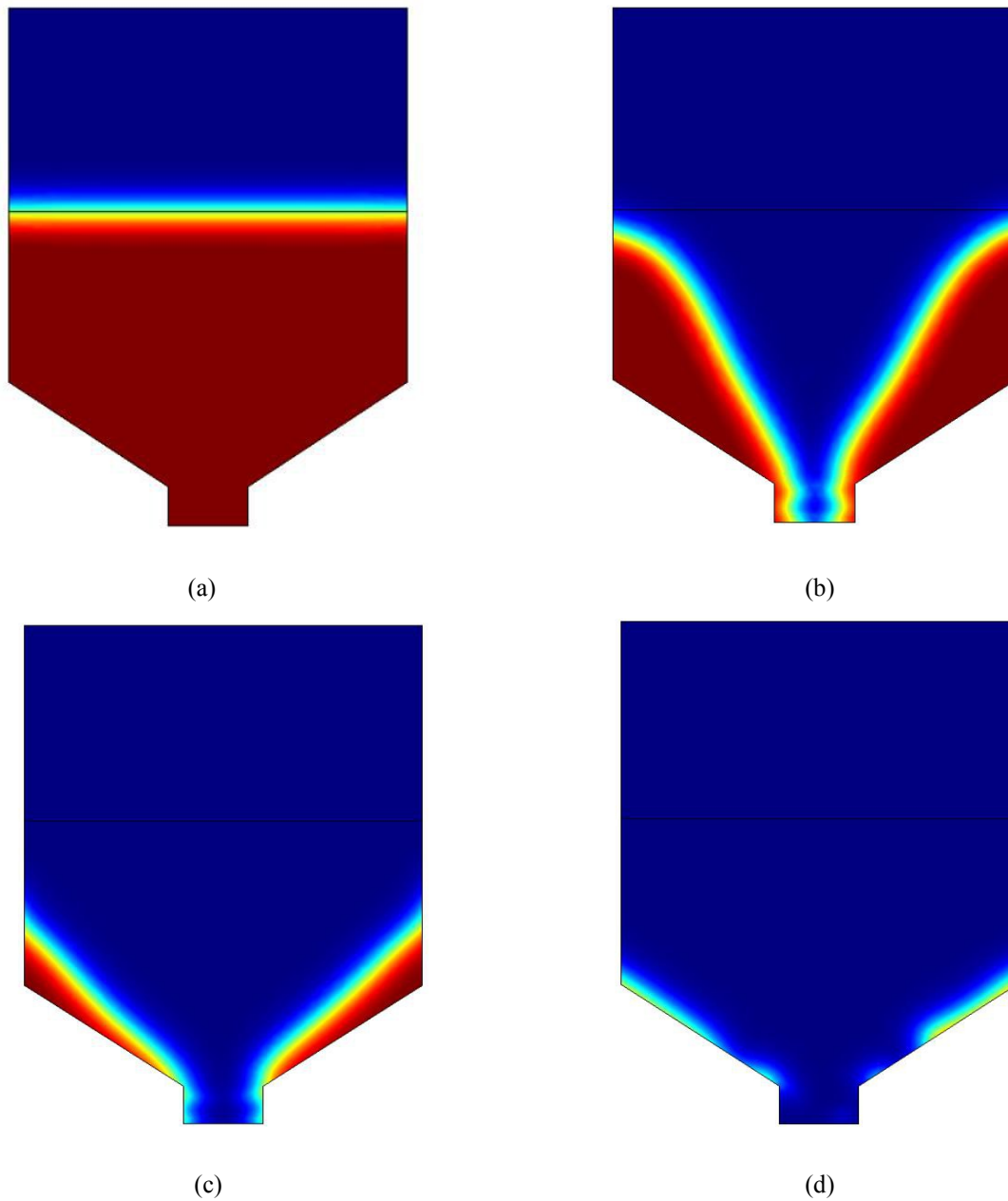


Figura 5.1. Scorrimento del materiale granulare (in rosso), seguendo i profili ai tempi di (a) 0 s (b) 3,5 s (c) 6 s (d) 10 s nel silo con tramoggia conica ad angolo di 55°

In Figura 5.2, invece, si osserva che la massa di granulare scende con un fronte pressoché piatto, salvo la presenza di una concavità nella parte centrale dovuta al fatto che la parte cilindrica è molto poco estesa e che quindi si è all'interno della zona di tramoggia conica. Il granulare che esce per primo è quello posto in prossimità dell'uscita del silo, come avviene in un regime di *mass-flow*.

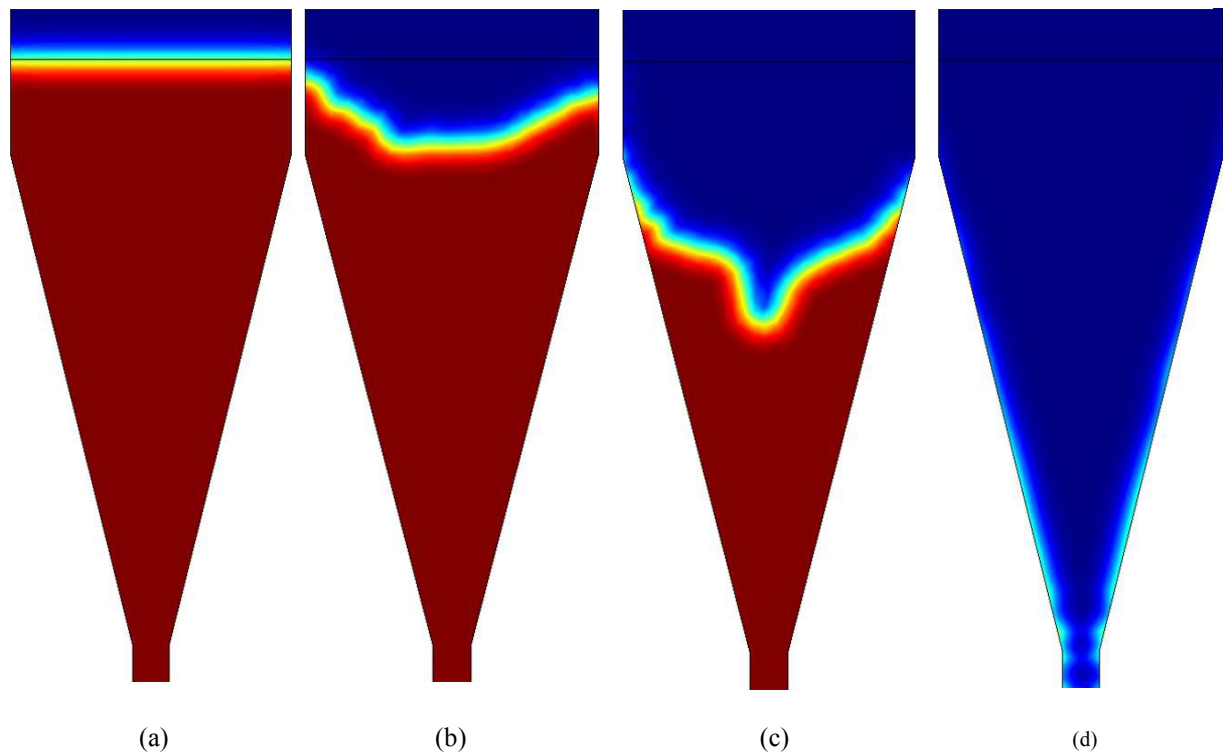


Figura 5.2. Scorrimento del materiale granulare (in rosso), seguendo i profili ai tempi di (a) 0 s (b) 3,5 s (c) 6 s (d) 10 s nel silo con tramoggia conica ad angolo di 15°

Lo scorrimento del materiale granulare è quindi corretto in entrambi i casi. Da notare che si ha *funnel-flow* o *mass-flow* già dagli istanti iniziali, perché la parte cilindrica in tutti e due i silo ha un'estensione limitata, quindi non vi è il regime che si presenterebbe in essa, il quale è simile a quello che avviene nella tramoggia del silo *mass-flow*.

5.1.2 Profili di velocità e di gradiente di velocità

Per comprendere meglio come scorre il materiale, si illustrano i profili della velocità, espressi tramite frecce di intensità proporzionale all'entità della velocità, e la distribuzione dei gradienti di velocità, espressi tramite mappe in cui il rosso indica maggiore intensità e il blu indica minore intensità. Questi profili risulteranno poi utili per studiare la segregazione, dato che così si può analizzare sia l'effetto dello *shear rate* sulla velocità di segregazione sia il moto delle singole specie.

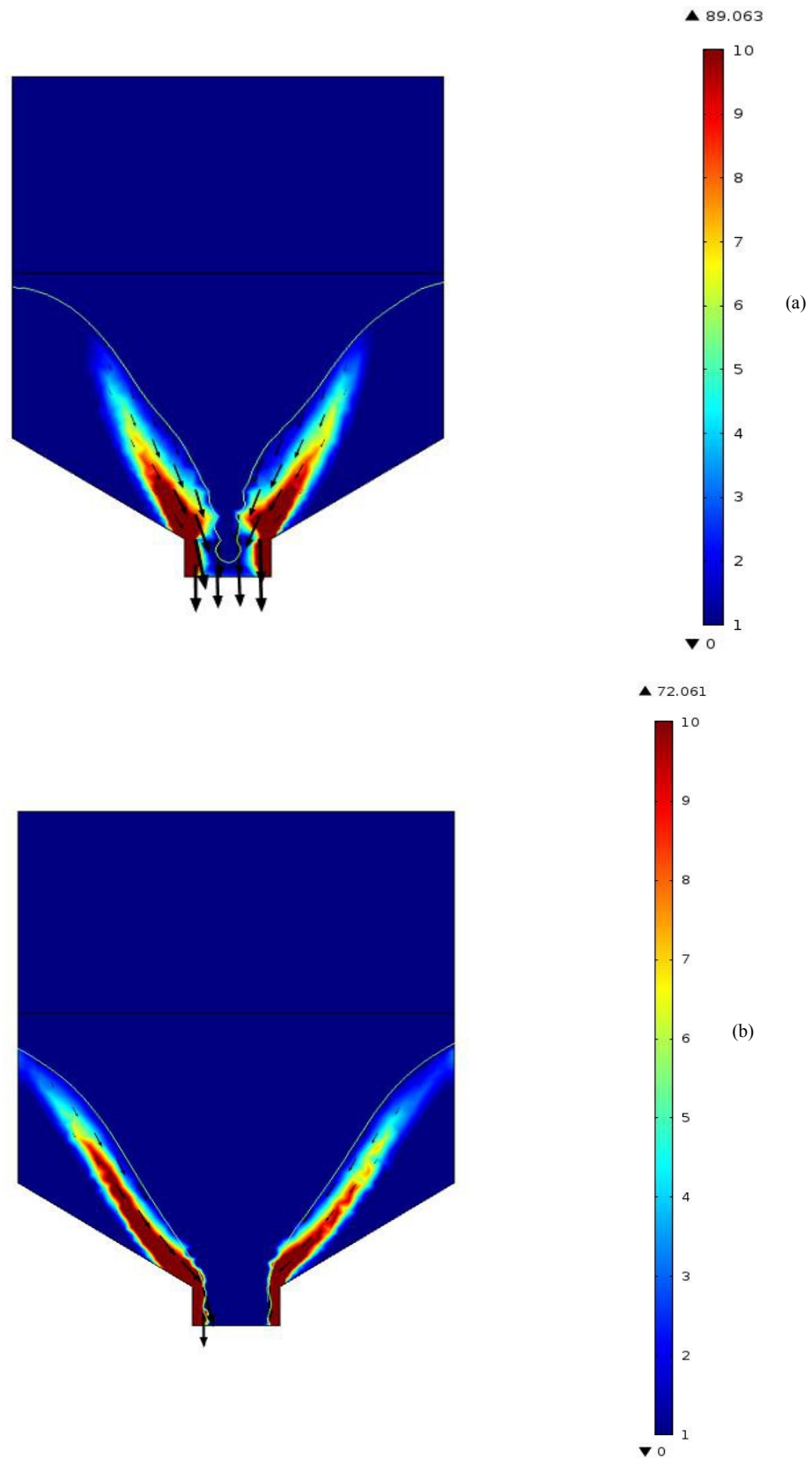


Figura 5.3. Profili del gradiente di velocità (a) 3 s (b) 4 s nel silo in regime di funnel-flow. La scala dei colori indica l'entità dello shear rate, la curva bianca indica l'interfaccia e le frecce nere indicano il moto del materiale, tanto più veloce quanto sono più grandi le frecce

In Figura 5.3 si osserva che nel silo che scorre in *funnel-flow* la zona a maggior gradiente di velocità è quella in prossimità dell'uscita, in particolare alle pareti dell'imboccatura d'uscita. Si ha poi un alto gradiente di velocità sulla zona del pelo libero del materiale, parte in cui la velocità comincia ad avere valori significativi e il materiale scorre, accelerando quando si avvicina all'uscita. Se ci si allontana però dal pelo libero del materiale, fino ad arrivare alla parete nella zona di transizione tra parte cilindrica e tramoggia, la velocità e il suo gradiente diminuiscono fino ad avere valori molto bassi, praticamente nulli, evidenziando quindi che lì il materiale è in moto molto lento, come già accennato in precedenza.

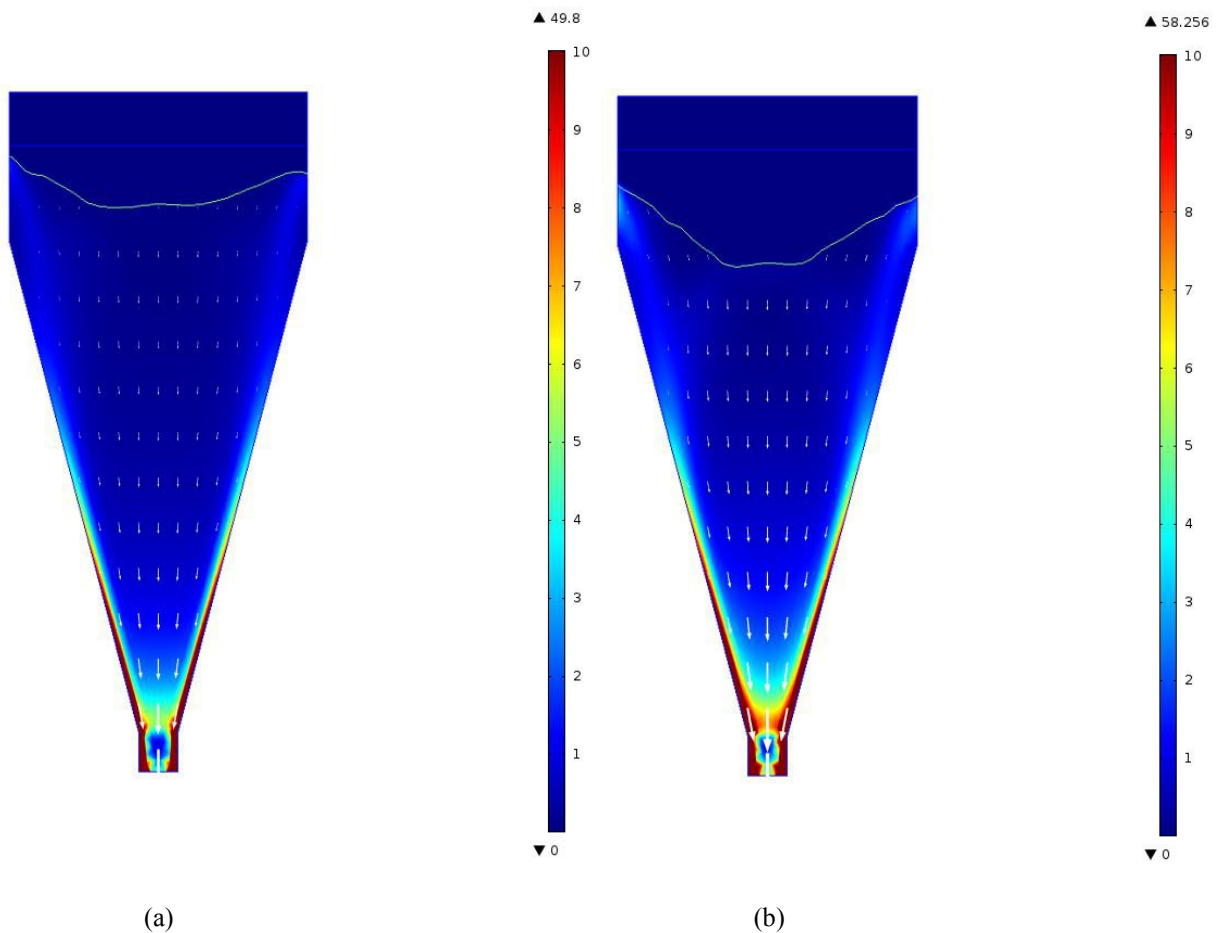


Figura 5.4. Profili del gradiente di velocità (a) 3 s (b) 4 s nel silo in regime di *mass-flow*. La scala dei colori indica l'entità dello *shear rate*, la curva bianca indica l'interfaccia e le frecce bianche indicano il moto del materiale, tanto più veloce quanto sono più grandi le frecce

In Figura 5.4, invece, si mostrano i profili per il silo in regime di *mass-flow*. Anche qui la zona a maggior gradiente di velocità è quella in corrispondenza dell'uscita, ma si ha in questo caso anche un alto gradiente di velocità in prossimità della parte finale delle pareti di tramoggia. I valori massimi, e i valori in generale, di *shear rate* sono inoltre minori rispetto al caso del

funnel flow, ma a differenza di questo tutto il materiale è in movimento, come evidenziato dalle frecce di velocità, le quali aumentano man mano che ci si avvicina all'uscita e all'asse di simmetria della tramoggia. Solo in una zona molto piccola in prossimità dell'attacco tra parte cilindrica e tramoggia conica si hanno velocità e suoi gradienti praticamente nulli.

5.2 Metodo d'analisi della segregazione

Verificato come scorre il materiale granulare nei due sili, si può ora studiare il meccanismo segregativo, definendo prima il modello matematico, poi analizzando una mappa qualitativa dove verranno mostrati i profili di frazione massiva dei fini, e infine trovando un metodo per confrontare i dati numerici con quelli sperimentali.

5.2.1 Effetto dello *shear rate*. Valori delle grandezze del modello

Il modello selezionato per lo studio della segregazione, espresso dall'equazione (2.41), comprende anche il parametro m , che è esponente del gradiente di velocità, e la funzione K , che coinvolge molte variabili. Vanno ora scelti dei valori da associare a queste due grandezze. Per K si tenga conto che essa è una funzione complessa, e per trovarla bisogna agire passo dopo passo: per questo, il primo tentativo è porla costante, per poi farla diventare dipendente da alcune variabili aggiunte una alla volta. Inoltre si deve fare in modo che la velocità di segregazione delle particelle fini abbia verso opposto a quello convenzionale dell'asse y , e quindi sia negativa, dato che le particelle fini devono scendere. Per come è espressa la (2.41), perciò, K deve avere un valore negativo.

Il parametro m , invece, va scelto in funzione del peso che si vuole dare al gradiente di velocità sulla segregazione. È già stato osservato che lo *shear rate* assume valori più alti in zone più estese nel silo che scarica in regime di *funnel-flow*. Come già sperimentato da Sleppy e Puri (1996), poi, lo scarico in *funnel-flow* favorisce la segregazione rispetto al *mass-flow*. Conviene quindi rendere adeguatamente elevato l'effetto del gradiente di velocità sulla segregazione, agendo su m , che sarà pari a 1, valore considerato sufficientemente alto.

5.2.2 Profili di frazione massiva di fini

Attivando in *COMSOL Multiphysics 4.3* il modello della segregazione, si ottengono delle mappe di frazione massiva di fini. Queste mostrano come le particelle più piccole generalmente seguano i profili del gradiente di velocità. Infatti, i fini tendono a concentrarsi nelle zone dove lo *shear rate* assume valori più alti, sia nel caso del *funnel-flow* sia nel caso del *mass-flow*.

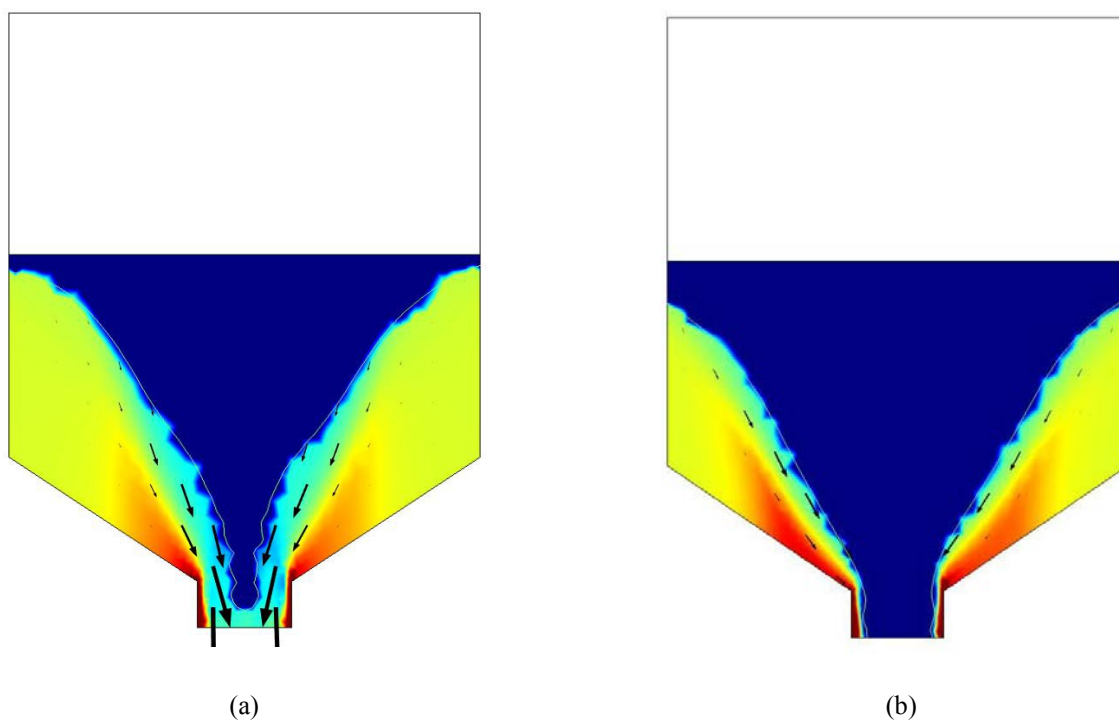


Figura 5.5. Profili della frazione massiva di fini (a) 3 s (b) 4 s nel silo in regime di *funnel-flow*. Si considera solo la zona al di sotto della curva bianca, la quale indica l'interfaccia: in rosso la quantità maggiore, in azzurro la quantità minore. Le frecce nere indicano il moto del materiale, tanto più veloce quanto sono più grandi le frecce

Tra i due casi vi sono però delle differenze. Nel *funnel-flow*, come si può vedere dalla Figura 5.5, i fini si dirigono nella zona ad alto gradiente di velocità, ma poi tendono ad accumularsi nella parte finale della parete della tramoggia, dove lo scorrimento del granulare è molto basso. Inoltre, dalle frecce che indicano la velocità si può osservare che il granulare in moto è quello vicino al pelo libero, presso il quale si accumulano i grossolani. Quindi ci si aspetta che la frazione di fini sia più alta all'inizio, per poi calare significativamente agli istanti centrali e crescere bruscamente quando l'ultima frazione di materiale viene scaricata, in accordo con i dati sperimentali di Ketterhagen *et al.* (2007). La segregazione attesa è quindi alta, come è stato constatato da Sleppy e Puri (1996).

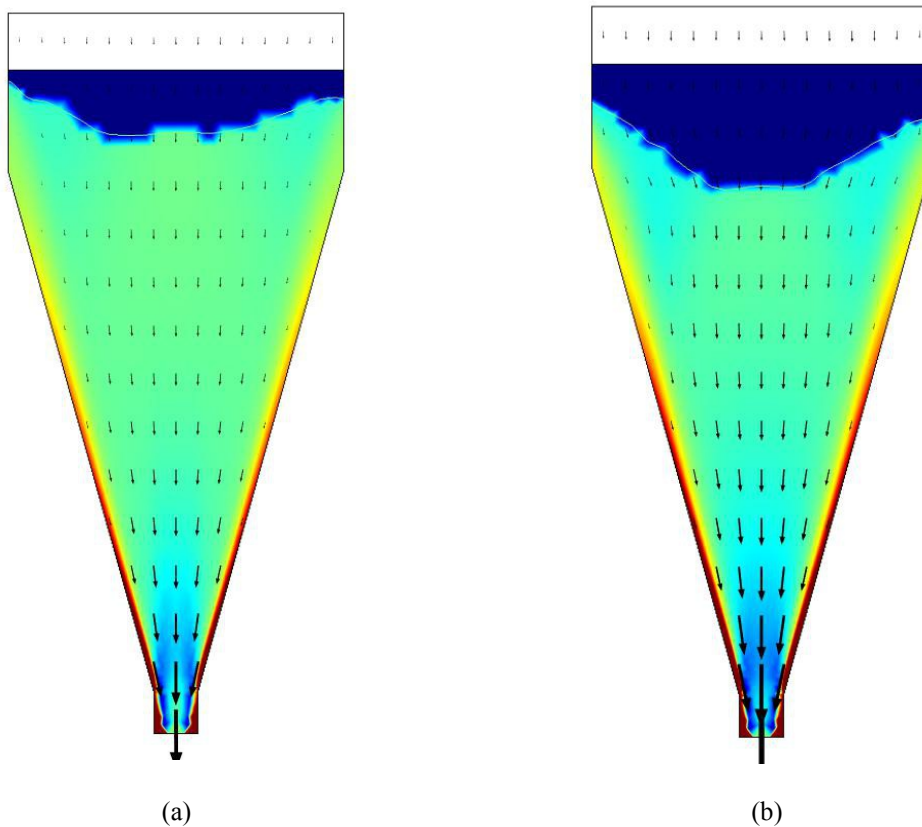


Figura 5.6. Profili della frazione massiva di fini (a) 3 s (b) 4 s nel silo in regime di mass-flow. Si considera solo la zona al di sotto della curva bianca, la quale indica l'interfaccia: in rosso la quantità maggiore, in azzurro la quantità minore. Le frecce nere indicano il moto del materiale, tanto più veloce quanto sono più grandi le frecce

Nel *mass-flow*, invece, i fini si dirigono verso le zone ad alto gradiente di velocità, ma in questo caso non vi sono zone d'accumulo, se non uno strato sottile nei pressi della parete, dove il materiale scorre parzialmente, come mostrato in Figura 5.6 dalle frecce che indicano la velocità. L'accumulo non avviene perché tutta la massa del materiale granulare scorre all'interno del silo, e quindi vi è assenza di zone stagnanti. Ci si aspetta perciò un leggero arricchimento di fini nelle fasi iniziali, poi una zona transitoria in cui la frazione di fini rimane più o meno costante e infine una fase in cui vi è maggioranza di grossolani. Nel complesso, quindi, la segregazione attesa è molto limitata, in accordo con ciò che è stato detto da Sleppey e Puri (1996).

5.2.3 Misurazione della frazione massiva di fini

Le mappe della frazione di fini, benché utili per analizzare i fenomeni segregativi, non permettono il confronto con i dati sperimentali di Ketterhagen *et al.* (2007), perché questi sono funzione della massa di solido scaricato, e le mappe mostrano ciò che succede all'interno del silo. Va osservato quindi ciò che succede al di fuori del silo stesso, misurando la frazione

di fini in uscita durante lo scarico. Un'idea può essere quella di misurare la frazione di fini in corrispondenza dell'uscita: se si fa questo, però, si presentano delle forti oscillazioni sulle misurazioni, le quali possono essere influenzate anche dal fatto che nel silo in regime di *funnel-flow* in corrispondenza dell'uscita vi è aria. Inoltre, è difficile correlare questa misurazione continua con i dati sperimentali ottenuti analizzando ciò che è stato scaricato in maniera discontinua, sapendo anche che non vi è correlazione diretta tra il tempo di scarico e la quantità scaricata: infatti, anche se la portata è costante (secondo le condizioni al contorno e secondo la legge di Beverloo), essa può essere moltiplicata per la funzione “*soft start*” per facilitare la convergenza, e quindi può essere più bassa agli istanti iniziali; e in più, nel caso del silo in regime di *funnel-flow*, essa comprende anche l'aria quando nel canale centrale di scarico non vi è più materiale granulare.

Si procede quindi ad una via alternativa di misurazione, che consiste nel discretizzare nel tempo la portata in uscita in modo da valutare le quantità scaricate tra istanti temporali predeterminati e rendere più diretto il confronto con le misurazioni sperimentali.

5.2.4 Procedura per la misurazione della frazione massiva di fini

L'idea è quella di seguire la procedura dettata dalla normativa ASTM D 6940-03 anche con i risultati delle simulazioni. Per prima cosa, si assuma che la densità di *bulk* del materiale granulare rimanga costante, indipendentemente dalla frazione massiva di fini, i quali avranno così densità di *bulk* pari a quella di tutto il materiale granulare. Si ha così che la frazione massiva di fini è pari alla frazione volumetrica dei fini stessi, quindi

$$\omega_1 = \frac{\text{massa di fini}}{\text{massa di solido}} = \frac{\text{volume di fini}}{\text{volume di solido}} = f_1 \quad . \quad (5.1)$$

Si sa inoltre che la frazione volumetrica di solido è

$$f_{mg} = \frac{\text{volume di solido}}{\text{volume totale}} = \frac{\text{volume di solido}}{\text{volume di solido} + \text{volume d'aria}} \quad , \quad (5.2)$$

quindi si può ottenere il prodotto

$$f_1 \cdot f_{mg} = \frac{\text{volume di fini}}{\text{volume di solido} + \text{volume d'aria}} \quad . \quad (5.3)$$

La (5.2) e la (5.3) possono ora essere integrate in tutto il dominio in cui scorre il materiale granulare. Il dominio, infatti, ha volume costante, ed ogni suo contributo volumetrico può contenere sia solido sia aria. L'integrazione porta così ad ottenere, rispettivamente, il volume di solido e il volume di fini all'interno del silo in un certo istante di tempo. Per integrare nel

dominio si utilizza il comando in *COMSOL Multiphysics 4.3* denominato “*Surface Integration*”, presente sotto la sezione “*Derived Values*” presente nella parte dei risultati: l'integrazione viene eseguita sulla superficie perché nel sistema 2D integrare sulla superficie equivale ad integrare nel volume in un dominio 3D, e quindi si ottiene comunque sia il volume di solido sia il volume di fini. Nel simulatore, inoltre, la frazione volumetrica di solido da considerare è solo quella che supera il valore di 0,5, perché si assume che per valori inferiori a questo non vi è proprio materiale granulare. Va quindi corretta in maniera analoga a ciò che è stato fatto per le grandezze in gioco nell'equazione del trasporto (2.32), tra le quali vi è anche la frazione massiva di fini (cfr. §4.4.7).

L'integrazione può essere compiuta a vari istanti di simulazione, anche interpolati. In questi istanti si ottengono le quantità presenti nel silo. Bisogna ora ricavare le quantità uscite dal silo: si possono ottenere quelle uscite tra un istante di calcolo e l'altro, sottraendo alla quantità presente nel silo in un dato istante quella presente nel silo all'istante immediatamente successivo, secondo le formule

$$\Delta V_{mg} = (V_{mg})_t - (V_{mg})_{t'} \quad (5.4)$$

$$\Delta V_1 = (V_1)_t - (V_1)_{t'} \quad (5.5)$$

dove V_{mg} indica il volume di materiale granulare e V_1 il volume di fini, entrambi all'interno del silo, mentre t' è l'istante immediatamente successivo all'istante t .

Le variazioni volumetriche di materiale granulare calcolate con la (5.4) vengono quindi sommate tra loro per dare degli intervalli più grandi di volume scaricato confrontabili con quelli sperimentali. In particolare, si fa in modo che questi intervalli abbiano una percentuale di volume rispetto a quella presente all'inizio nel silo pari a quella dei campioni ricavati per le prove sperimentali eseguite in Ketterhagen *et al.* (2007), in cui sono stati prelevati 18 campioni contenenti tutti, nei limiti del possibile, il 5,8% della massa di solido scaricata (la percentuale di massa scaricata è pari alla percentuale di volume scaricato perché si considera la densità di *bulk* costante), ad eccezione del campione ricavato per primo, che ha solo il 3% della massa iniziale per permettere di osservare cosa succede all'inizio del flusso di materiale granulare, e di quello ricavato per ultimo, che contiene la quantità residua di solido.

Si sommano poi tra loro anche le variazioni volumetriche di fini calcolate con la (5.5). I contributi da sommare tra loro sono quelli agli istanti corrispondenti a quelli dei contributi dati dalle variazioni volumetriche di materiale granulare: ad esempio, se si sono sommate tra loro le prime cinque variazioni volumetriche date dalla (5.4), si devono sommare tra loro anche le prime cinque variazioni volumetriche date dalla (5.5), e solo quelle, in modo da calcolare le quantità agli stessi intervalli di tempo.

Gli intervalli così ottenuti vanno in seguito rapportati tra loro: si divide quindi la quantità di fini scaricata in un dato intervallo di tempo per la quantità di materiale granulare scaricata nello stesso intervallo di tempo, in modo da ottenere la frazione volumetrica di fini in quel campione. La frazione volumetrica sarà pari a quella massiva per l'assunzione di densità di *bulk* costante, e verrà divisa per la frazione massiva iniziale di fini in modo da normalizzarla e da poterla riportare nelle ordinate dei grafici, in maniera analoga a come è stato fatto da Ketterhagen *et al.* (2007). In ascissa, invece, si riporta la frazione di solido scaricato, data dalla somma cumulata delle variazioni volumetriche di materiale granulare rapportate alla quantità iniziale di solido presente nel silo.

5.3 Risultati delle simulazioni: caso di K costante

Seguendo le procedure appena descritte, sono stati ricavati i risultati numerici che verranno rappresentati di seguito. I primi studi sono stati effettuati assumendo K costante in tutte le prove: i risultati ottenuti in questa condizione sono un punto di partenza necessario per poter sviluppare K , rendendolo variabile. Il valore di K scelto è -5, valore considerato ottimale dopo aver osservato le altre variabili in gioco nel modello e aver compiuto un'analisi di sensitività grossolana.

Si ricordano che i casi studiati sono:

1. silo con tramoggia con angolo di 55° e rapporto dei diametri pari a 1,9;
2. silo con tramoggia con angolo di 15° e rapporto dei diametri pari a 1,9;
3. silo con tramoggia con angolo di 55° e rapporto dei diametri pari a 4,3;
4. silo con tramoggia con angolo di 15° e rapporto dei diametri pari a 4,3.

Le frazioni massive iniziali di fini analizzate sono 0,05, 0,2 e 0,5, come negli studi sperimentali di Ketterhagen *et al.* (2007).

5.3.1 Caso 1 con K costante

Il primo caso riguarda le prove effettuate sul silo che scarica in regime di *funnel-flow* e all'interno del quale vi sono sfere di vetro che hanno diametri con rapporto reciproco pari a 1,9. I risultati sono mostrati in Figura 5.7.

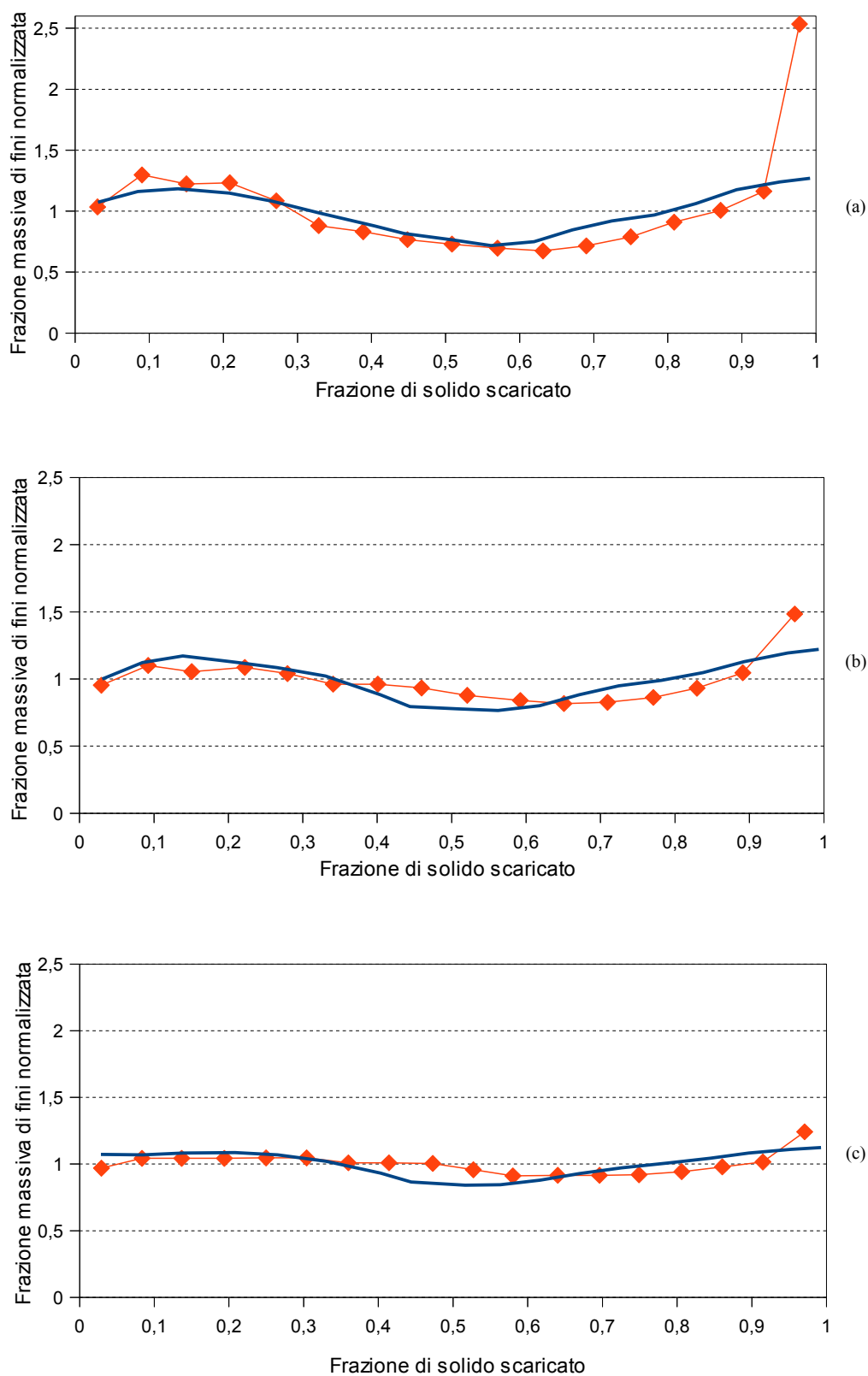


Figura 5.7. Risultati numerici ottenuti nel caso del silo in regime di funnel-flow e in cui il rapporto dei diametri pari a 1,9, con frazione massiva di fini iniziale pari a (a) 0,05 (b) 0,2 (c) 0,5 e K pari a -5. La linea continua blu rappresenta i risultati numerici, mentre la linea fine rossa con i punti rappresenta i risultati sperimentali di Ketterhagen et al. (2007)

Dai grafici si può notare che i risultati numerici rispecchiano fedelmente i dati sperimentali di Ketterhagen *et al.* (2007), soprattutto nel caso della quantità di fini più bassa (caso (a)), in cui però non è stato possibile prevedere il forte eccesso di particelle piccole nella parte finale. Ma si presume che questo eccesso sia dovuto alle prove sperimentali più che a questioni fisiche. Anche negli altri casi è stato difficile prevedere l'eccesso finale, mentre aumentando la frazione iniziale di fini risulta meno accurata la riproduzione dei dati sperimentali nella fase centrale del processo di scarico (casi (b) e (c)). Nel complesso, però, il *fitting* risulta buono e l'andamento rispecchia il risultato atteso per un regime di *funnel flow*, dato da un eccesso di fini nella fase iniziale e in quella finale del processo di scarico e una carenza degli stessi nella fase centrale.

5.3.2 Caso 2 con K costante

Nel secondo caso le prove sono state eseguite sul silo che scarica in regime di *mass-flow* e nel quale vi sono sfere di vetro che hanno diametri con rapporto reciproco pari a 1,9. I risultati sono mostrati in Figura 5.8.

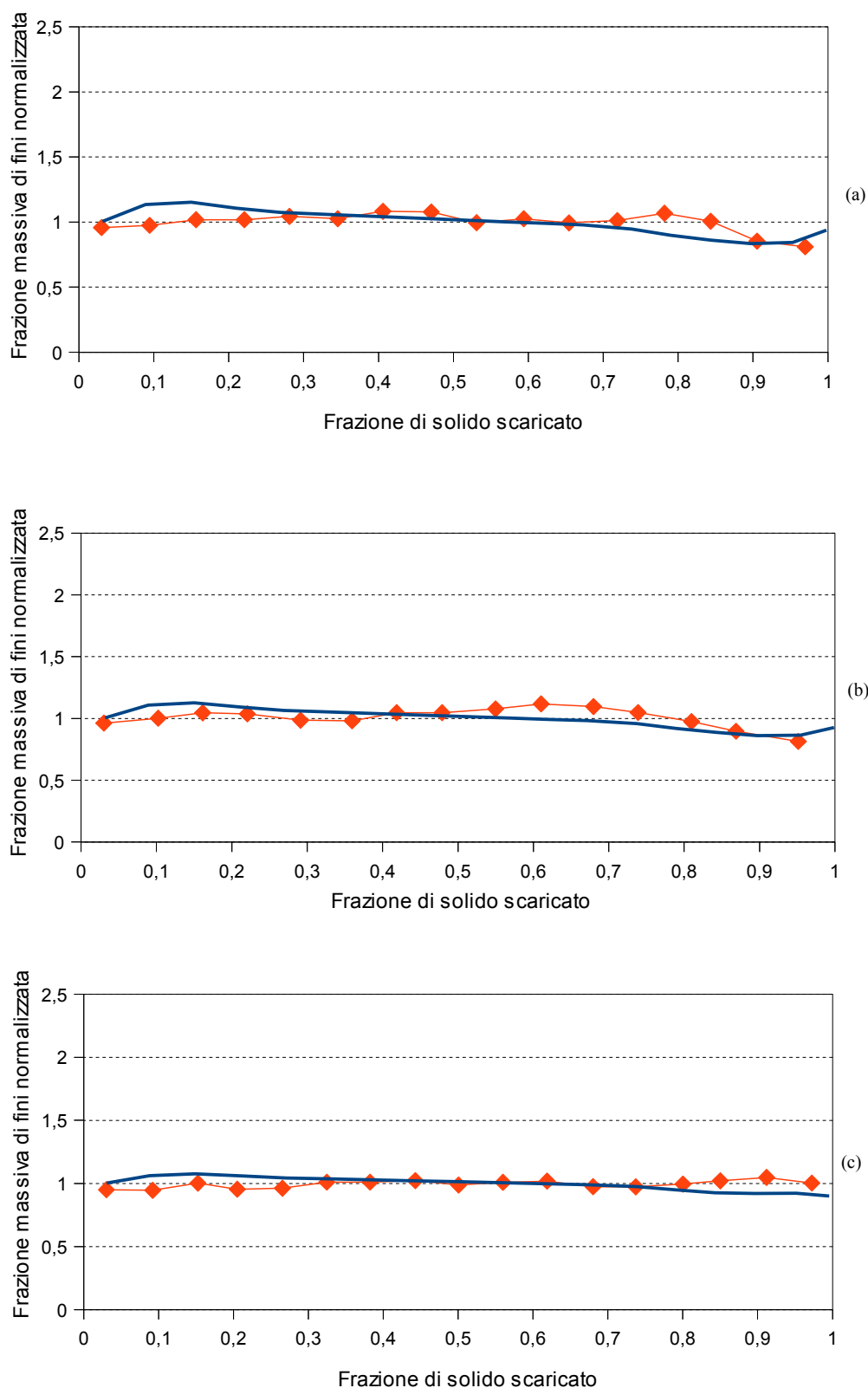


Figura 5.8. Risultati numerici ottenuti nel caso del silo in regime di mass-flow e in cui il rapporto dei diametri pari a 1,9, con frazione massiva di fini iniziale pari a (a) 0,05 (b) 0,2 (c) 0,5 e K pari a -5. La linea continua blu rappresenta i risultati numerici, mentre la linea fine rossa con i punti rappresenta i risultati sperimentali di Ketterhagen et al. (2007)

Anche in questo caso i risultati sperimentali sono stati riprodotti fedelmente, anche se per frazioni iniziali di fini basse (casi (a) e (b)) la curva non è piatta quanto lo è per gli esperimenti. Si ha sempre un leggero eccesso di fini nella fase iniziale del processo di scarico e una leggera carenza degli stessi nella fase finale, in accordo con quanto previsto in precedenza per il regime di *mass-flow*. La leggera carenza di fini è stata constatata anche nelle prove sperimentali, quindi si è riuscito a riprodurli numericamente, come si è riuscito a riprodurre la fase centrale del processo di scarico. Il *fitting*, quindi, risulta nel complesso buono per ogni condizione iniziale testata.

5.3.3 Caso 3 con K costante

Il terzo caso consiste nelle prove eseguite sul silo che scarica in regime di *funnel-flow* al cui interno vi sono sfere di vetro che hanno diametri con rapporto reciproco pari a 4,3. La Figura 5.9 riassume i risultati ottenuti.

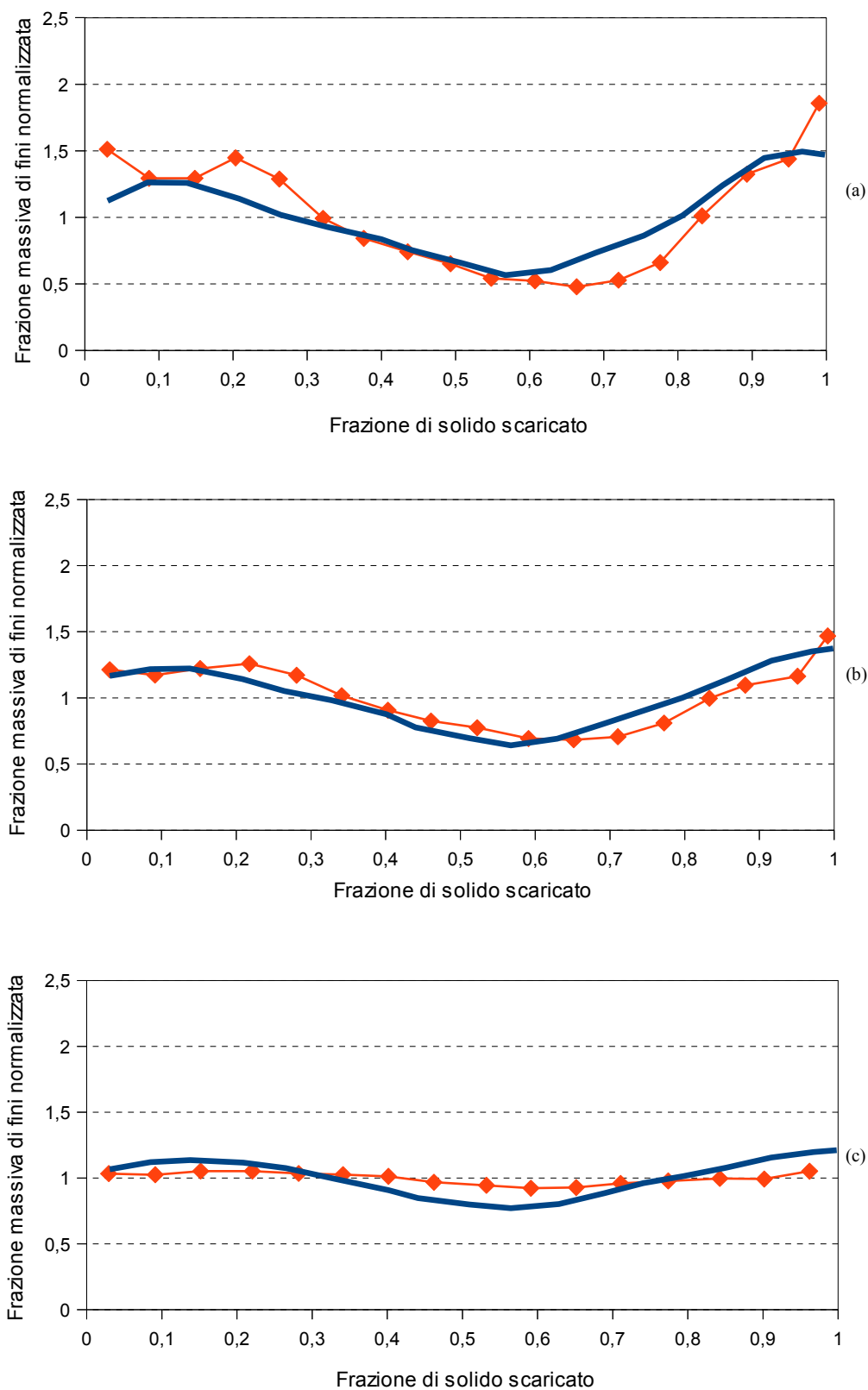


Figura 5.9. Risultati numerici ottenuti nel caso del silo in regime di funnel-flow e in cui il rapporto dei diametri pari a 4,3, con frazione massiva di fini iniziale pari a (a) 0,05 (b) 0,2 (c) 0,5 e K pari a -5. La linea continua blu rappresenta i risultati numerici, mentre la linea fine rossa con i punti rappresenta i risultati sperimentali di Ketterhagen et al. (2007)

Constatato che la simulazione rispecchia qualitativamente ciò che succede durante lo scarico del silo in regime di *funnel-flow*, la riproduzione dei dati sperimentali risulta nel complesso buona, soprattutto se la frazione iniziale di fini è bassa. È meno buona se la frazione iniziale aumenta (caso (c)), e questo può essere spiegato dal fatto che il modello non tiene conto di ciò che è stato rilevato da Arteaga e Tüzün (1990): infatti, secondo la relazione (3.1), per un rapporto tra il diametro di particelle grandi e il diametro di particelle piccole pari a 4,3 la frazione massima di fini iniziale per cui si ha segregazione è 0,48, quindi al di sotto di 0,5, e così sperimentalmente la curva risulta piatta, mentre numericamente rimane l'eccesso agli estremi e la carenza nella parte centrale.

Da notare infine che, nei casi (a) e (b), dove i fini sono in minor quantità, si è riuscito a riprodurre l'eccesso di questi nella primissima fase del processo di scarico: ciò è probabilmente stato permesso dall'incremento del valore assoluto della velocità di segregazione dato dall'aumento del rapporto d_2/d_1 , mentre si ricorda che sperimentalmente questo è dovuto alla percolazione istantanea dei fini causata dall'aumento dei vuoti, dovuto a sua volta all'incremento del rapporto d_2/d_1 .

5.3.4 Caso 4 con K costante

Le prove riguardanti il quarto e ultimo caso sono state effettuate sul silo che scarica in regime di *mass-flow* in cui scorrono sfere di vetro i cui diametri hanno rapporto reciproco pari a 4,3. I risultati sono rappresentati in Figura 5.10.

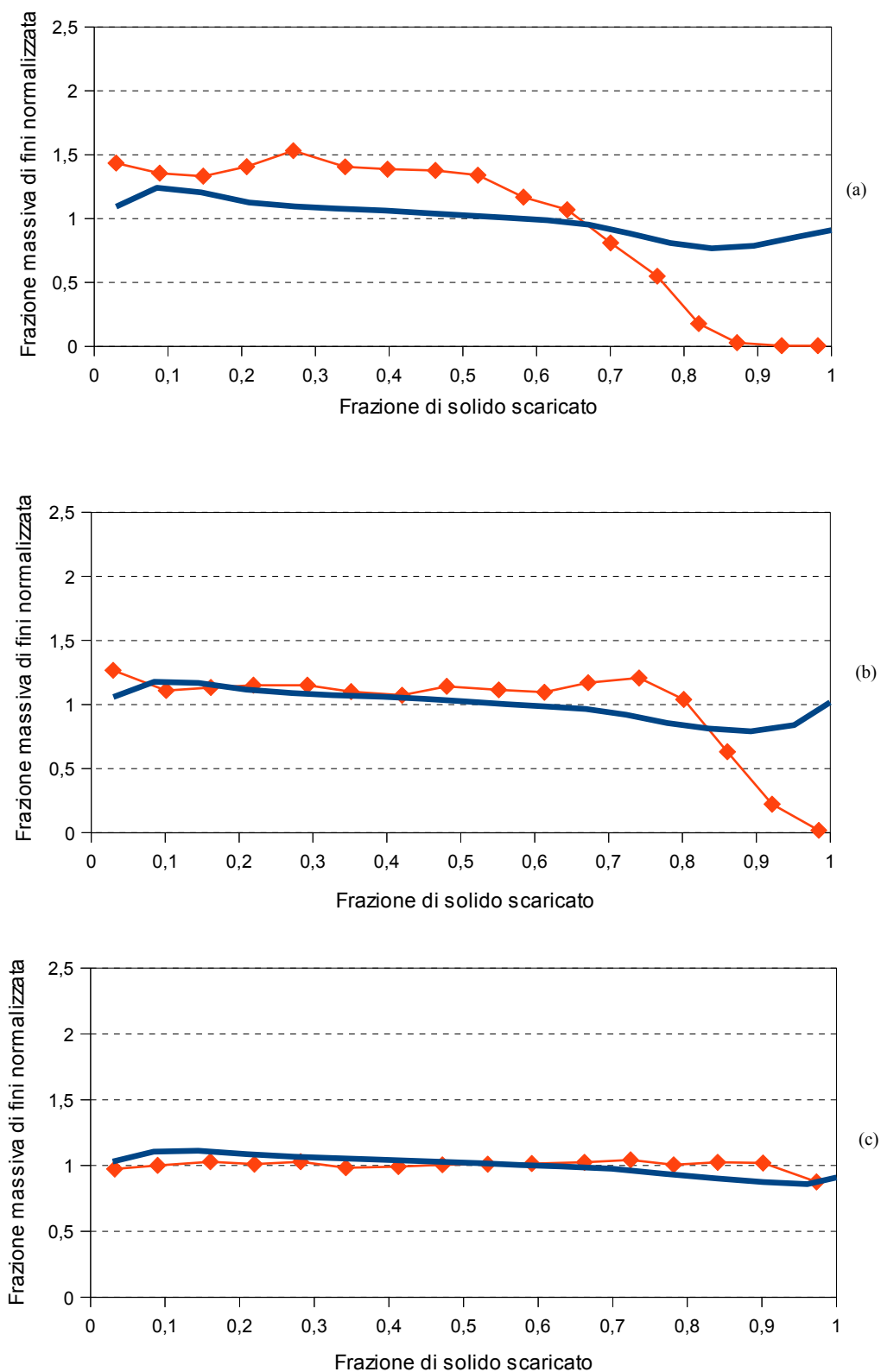


Figura 5.10. Risultati numerici ottenuti nel caso del silo in regime di mass-flow e in cui il rapporto dei diametri pari a 4,3, con frazione massiva di fini iniziale pari a (a) 0,05 (b) 0,2 (c) 0,5 e K pari a -5. La linea continua blu rappresenta i risultati numerici, mentre la linea fine rossa con i punti rappresenta i risultati sperimentali di Ketterhagen et al. (2007)

Oltre a notare che l'andamento qualitativo della curva rispecchia il comportamento di uno scarico in *mass-flow*, si osserva che la riproduzione dei dati sperimentali risulta buona solo per il caso (c), dove la curva sperimentale risulta piatta, in accordo con la relazione di Arteaga e Tüzün. Negli altri due casi la curva delle simulazioni numeriche è molto distante da quella degli esperimenti: lo è per tutto lo scarico nel caso (a), mentre lo è nella seconda metà di scarico nel caso (b).

Questo è dovuto all'eccesso di fini nella primissima parte, riprodotto solo parzialmente nel caso (a) e comunque non mantenuto nelle fasi successive di scarico: infatti, si può notare che nei dati sperimentali, dopo l'eccesso iniziale, il valore della frazione massiva di fini normalizzata rimane pressoché costante per tutta la prima metà dello scarico, per poi crollare. Andrebbe quindi riprodotta più fedelmente la primissima fase, ma ciò non è possibile in maniera molto accurata, per la condizione iniziale imposta nel simulatore per la quale la frazione massiva è uniforme su tutto il dominio, corrispondente ad una condizione di riempimento ben miscelato. Condizione che Ketterhagen *et al.* (2007) hanno cercato di mantenere, senza probabilmente riuscirci, data la quantità esigua di fini unita ad un rapporto d_2/d_1 pari a 4,3 (e quindi alto) che ha permesso una certa percolazione all'inizio del processo di scarico, se non addirittura prima di questo. Ketterhagen *et al.* (2007) hanno motivato il comportamento della curva sperimentale con i bassi valori dei gradienti di velocità in prossimità della tramoggia (cfr. §3.2.4), ma la spiegazione più plausibile è la non possibilità di mantenere il riempimento ben miscelato.

5.3.5 Conclusioni riguardo le prove con K costante

Si è visto come, nel complesso, le curve date dalle prove numeriche riproducano fedelmente sia il comportamento dei vari regimi di scarico sia i dati sperimentali. Il *fitting* di questi, però, risulta migliorabile in alcune fasi del processo di scarico per alcuni dei casi studiati: in particolare, è risultato difficile riprodurre l'eccesso di fini nella fase finale dello scarico *funnel-flow* (eccesso che peraltro è dovuto solo a fattori sperimentali) e nella fase iniziale per il rapporto dei diametri grossi/fini più alto, anche se quest'ultimo eccesso è dato dalla percolazione ai primissimi istanti, e quindi all'impossibilità di mantenere il riempimento ben miscelato all'interno del silo utilizzato per gli esperimenti.

Il *fitting* risulta migliorabile soprattutto nei casi in cui la concentrazione di fini iniziale è più alta: per questo si porrà K variabile nella maniera che verrà illustrata successivamente. Dato inoltre che il modello non prevede la concentrazione massima per cui si ha segregazione, e quindi non permette una fedele riproduzione degli esperimenti con quantità eccessive di fini, esso può essere modificato inserendovi la relazione di Arteaga e Tüzün: questo, però, sarà tema di sviluppi futuri che esulano da questa trattazione.

5.4 Risultati delle simulazioni: caso di K variabile

I risultati appena illustrati mostrano come, utilizzando K costante, il *fitting* dei dati sperimentali è buono, ma migliorabile. Peraltro, si è già detto che la grandezza K è una variabile che dipende da molti fattori, e che il mantenerla costante nelle prove precedenti era solo una fase preliminare per poi sviluppare la funzione, così da esprimere meglio i fenomeni che influenzano la segregazione, migliorando inoltre la correlazione dei risultati numerici con i dati sperimentali. Si deve quindi cercare di inserire delle grandezze, una alla volta, all'interno della variabile K .

5.4.1 Prima modellazione della variabile K

Dai risultati delle prove precedenti si è constatato che la qualità di correlazione dei risultati numerici con i dati sperimentali, a parità di K , variava con la frazione iniziale di fini. Il primo passo, perciò, è inserire la frazione iniziale di fini $\omega_{1,0}$: questa, infatti, può influenzare ad esempio la frazione di vuoto nel *bulk*, e quindi favorire o meno la segregazione.

Da uno studio di sensitività grossolano sono stati così ricavati i valori ottimali di K per ogni condizione iniziale di fini: si ha che $K = -5$ per $\omega_{1,0} = 0,05$, $K = -4$ per $\omega_{1,0} = 0,2$ e $K = -1,5$ per $\omega_{1,0} = 0,5$. Questi valori sono stato poi regrediti linearmente, arrivando così alla retta

$$K = 7,9 \omega_{1,0} - 5,5 \quad . \quad (5.6)$$

Dato poi che la frazione massiva di fini, in valore assoluto, non varia in maniera significativa durante il processo (le variazioni relative allo stato iniziale sono alte solo per le quantità di fini più basse, perciò la differenza assoluta $\omega_1 - \omega_{1,0}$ non sarà mai molto alta), la (5.6) può essere riscritta facendo riferimento alla frazione massiva generica, quindi si ha

$$K = 7,9 \omega_1 - 5,5 \quad . \quad (5.7)$$

Secondo Hajra *et al.* (2012), inoltre, la variabile K può essere espressa come somma di una componente intrinseca e di una componente dipendente dalla concentrazione: la prima viene identificata come K_T , mentre la seconda varia linearmente con la concentrazione di grossolani $\omega_2 = 1 - \omega_1$, secondo un coefficiente K_S , il quale, come K_T , è in realtà funzione di molti fattori che vanno inseriti man mano per un'accurata modellazione. Si ha perciò, secondo Hajra *et al.* (2012), la relazione

$$K d_2 = K_T + (1 - \omega_1) K_S \quad , \quad (5.8)$$

nella quale si può inserire la (5.7). È possibile così esprimere le funzioni K_T e K_S come dei valori costanti, tenendo presente che questo è un passaggio da effettuare per poi svilupparle in

futuro inserendo le dipendenze dai fattori che influenzano la segregazione. Dalla relazione che c'è tra la (5.7) e la (5.8) si ricava che $K_T = 0,0054$ e $K_S = -0,0177$, con il diametro dei grossolani pari a 0,00224, come riportato in Tabella 4.3. Con questi valori si può implementare la (5.8) nel simulatore *COMSOL Multiphysics 4.3*, oppure vi si può implementare direttamente la (5.7), dato che in questo caso le due espressioni sono equivalenti.

Effettuate le simulazioni con questa nuova variabile, e ricavati i risultati, questi ultimi possono essere confrontati sia con i dati sperimentali sia con i risultati numerici ottenuti con la condizione di K costante: questi confronti vengono compiuti qui di seguito, sapendo che i casi studiati sono ovviamente gli stessi testati in precedenza.

5.4.2 Caso 1 con K variabile

Si ricorda che primo caso riguarda il silo che scarica in regime di *funnel-flow* in cui le sfere di vetro hanno diametri con rapporto reciproco pari a 1,9. I risultati sono mostrati in Figura 5.11.

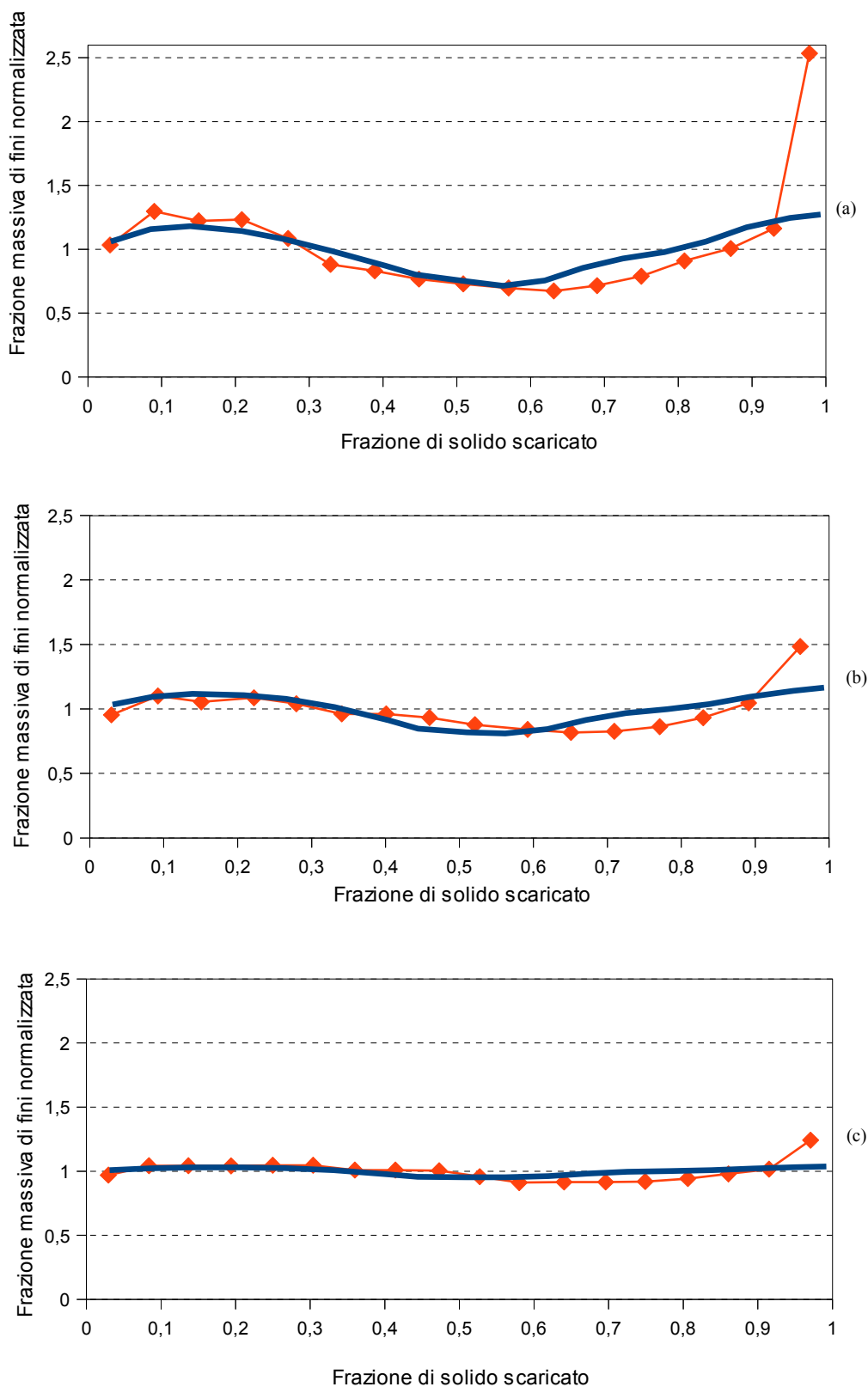


Figura 5.11. Risultati numerici ottenuti nel caso del silo in regime di funnel-flow e in cui il rapporto dei diametri pari a 1,9, con frazione massiva di fini iniziale pari a (a) 0,05 (b) 0,2 (c) 0,5 e K variabile. La linea continua blu rappresenta i risultati numerici, mentre la linea fine rossa con i punti rappresenta i risultati sperimentali di Ketterhagen et al. (2007)

Come nel caso di K costante, anche qui si ha che l'andamento dei dati numerici rispecchia qualitativamente il percorso delle particelle fini in un silo che scarica in regime di *funnel flow*, e nemmeno qui si riesce a riprodurre l'eccesso di fini nella fase finale di scarico, eccesso dato peraltro da fattori sperimentali. Rispetto al caso di K costante, però, la correlazione con i dati sperimentali risulta migliorata per i casi con frazione massiva di fini iniziale più alta: nel caso (b) il miglioramento più significativo è nella fase iniziale di scarico, mentre per il caso (c) il *fitting* è migliore in tutto il processo di scarico e la curva dei risultati numerici risulta inoltre appiattita rispetto alla condizione di K pari a -5, e quindi rispecchia più fedelmente ciò che accade con una miscela avente molte particelle piccole.

5.4.3 Caso 2 con K variabile

Si ricorda che il caso 2 prevede il silo che scarica in regime di *mass-flow* e le sfere di vetro che hanno diametri con rapporto reciproco pari a 1,9. I risultati sono mostrati in Figura 5.12.

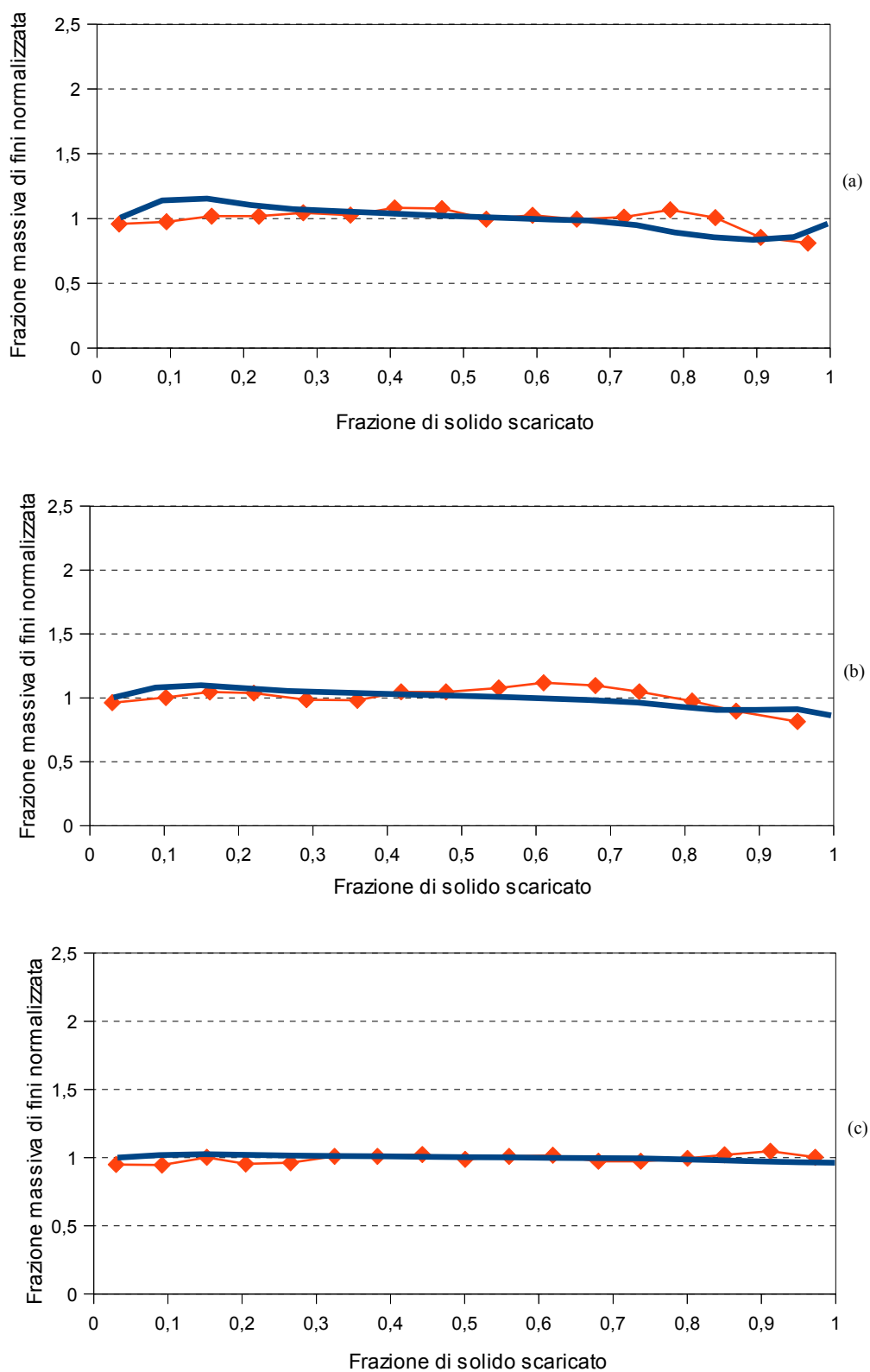


Figura 5.12. Risultati numerici ottenuti nel caso del silo in regime di mass-flow e in cui il rapporto dei diametri pari a 1,9, con frazione massiva di fini iniziale pari a (a) 0,05 (b) 0,2 (c) 0,5 e K variabile. La linea continua blu rappresenta i risultati numerici, mentre la linea fine rossa con i punti rappresenta i risultati sperimentali di Ketterhagen et al. (2007)

Le curve numeriche presentano andamenti analoghi al caso di K costante, sia per quanto riguarda la riproduzione generale del regime di *mass-flow*, quindi l'eccesso di fini iniziale e la carenza finale, sia per quanto riguarda la capacità di riprodurre i dati sperimentali nelle varie fasi del processo di scarico (in particolare la capacità di riprodurre la carenza finale). Si ha però un miglioramento significativo nel caso in cui le particelle più piccole sono presenti inizialmente con frazione massiva di 0,5 (caso (c)): la curva li risulta praticamente piatta, dando valori molto prossimi a quello unitario, e correlando i dati sperimentali in maniera molto più buona rispetto al caso in cui $K = -5$. La curva dei risultati numerici non è molto cambiata rispetto a quando K era costante nei casi (a) e (b), anche se nel caso (b) il *fitting* risulta migliorato in alcuni punti.

5.4.4 Caso 3 con K variabile

Anche qui il terzo caso consiste nel silo che scarica in regime di *funnel-flow* con al suo interno sfere di vetro che hanno diametri con rapporto reciproco pari a 4,3. La Figura 5.13 riassume i risultati ottenuti.

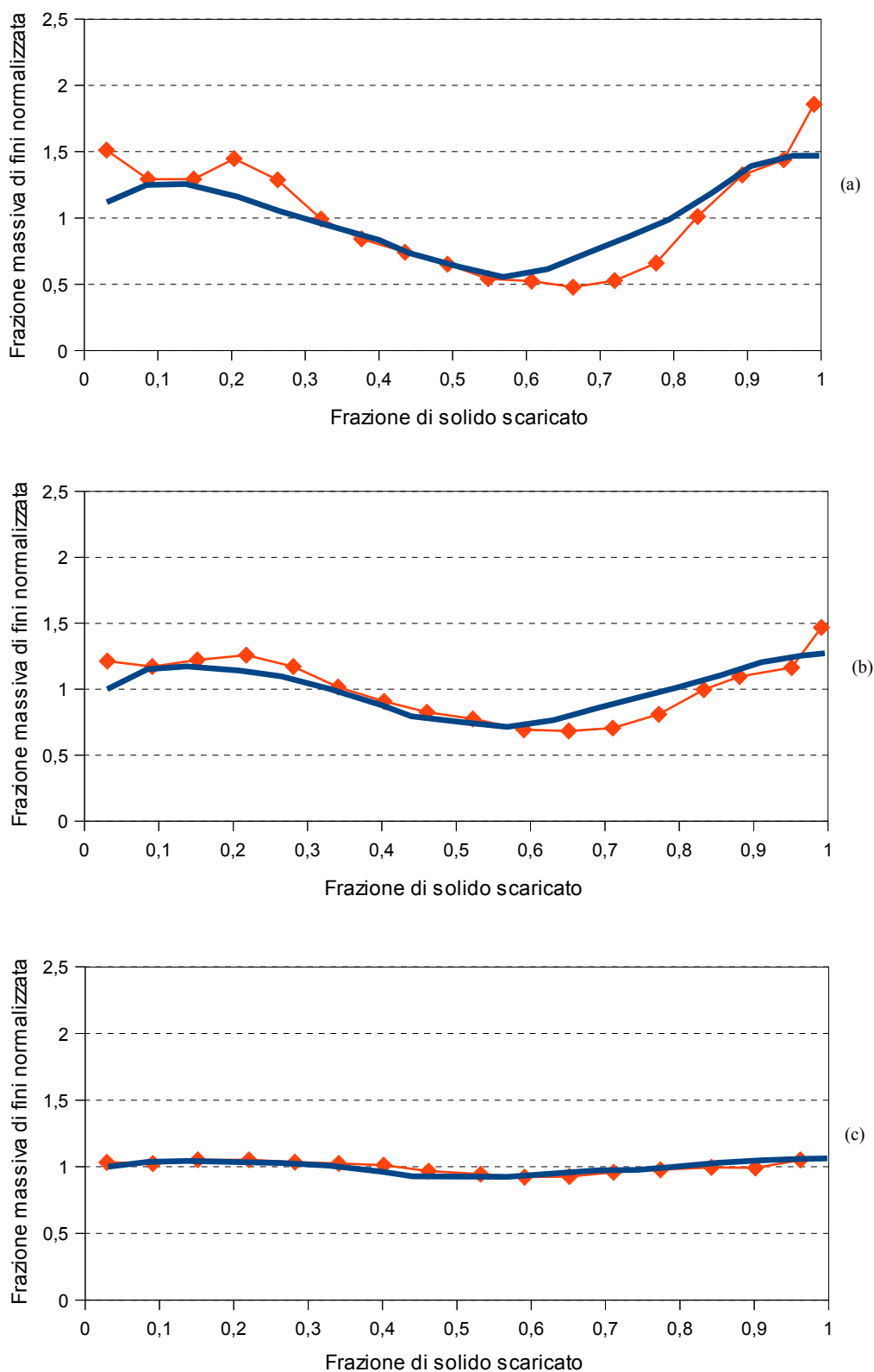


Figura 5.13. Risultati numerici ottenuti nel caso del silo in regime di funnel-flow e in cui il rapporto dei diametri pari a 4,3, con frazione massiva di fini iniziale pari a (a) 0,05 (b) 0,2 (c) 0,5 e K variabile. La linea continua blu rappresenta i risultati numerici, mentre la linea fine rossa con i punti rappresenta i risultati sperimentali di Ketterhagen et al. (2007)

Il processo di segregazione ha l'andamento qualitativo classico del regime di *funnel-flow*: detto questo, la correlazione con i dati sperimentali risulta adeguata in tutti i casi. Rispetto al caso in cui $K = -5$, vi sono però delle differenze. La prima è data sicuramente dal miglioramento del *fitting*, in tutti e tre i casi: nel caso (a) e nel caso (b) lo si ha nella fase centrale del processo di scarico, mentre nel caso (c) lo si ha per l'intero processo di scarico. In quest'ultimo caso il *fitting* risulta molto accurato, con la curva dei risultati numerici molto appiattita, anche senza aver inserito la relazione di Arteaga e Tüzün: per compiere questa operazione si può quindi utilizzare questo risultato come punto di partenza.

La seconda differenza è invece data dalla riproduzione dell'eccesso di fini nella primissima fase del processo di scarico: mentre nel caso di $K = -5$ si è riuscito ad ottenerla sia nel caso (a) sia nel caso (b), con K variabile lo si è ottenuto solo nel caso (a). Ciò è dovuto probabilmente alla diminuzione di K negli istanti iniziali rispetto al caso in cui $K = -5$, e alla conseguente diminuzione del valore assoluto della velocità di segregazione.

5.4.5 Caso 4 con K variabile

Il caso 4 riguarda sempre il silo che scarica in regime di *mass-flow* al cui interno le sfere di vetro hanno diametri con rapporto reciproco pari a 4,3. I risultati sono rappresentati in Figura 5.14.

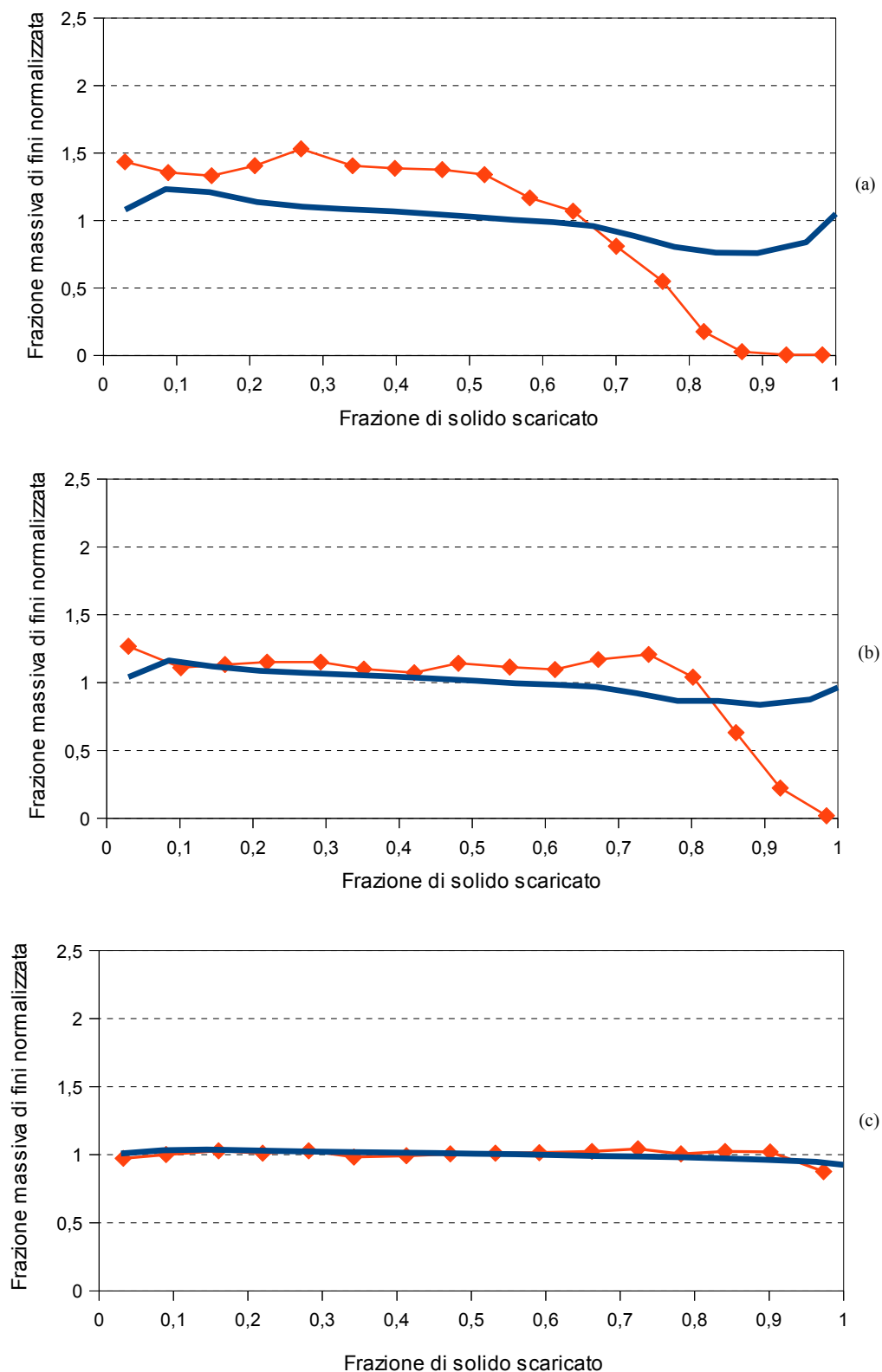


Figura 5.14. Risultati numerici ottenuti nel caso del silo in regime di mass-flow e in cui il rapporto dei diametri pari a 4,3, con frazione massiva di fini iniziale pari a (a) 0,05 (b) 0,2 (c) 0,5 e K variabile. La linea continua blu rappresenta i risultati numerici, mentre la linea fine rossa con i punti rappresenta i risultati sperimentali di Ketterhagen et al. (2007)

Come prima cosa, l'andamento delle curve numeriche rispecchia ciò che accade nel regime di *mass-flow*. Poi, per quanto riguarda la correlazione con i dati sperimentali, si possono fare considerazioni analoghe a ciò che è stato detto per lo stesso caso con $K = -5$, sull'impossibilità quindi di mantenere il riempimento ben miscelato e sul conseguente andamento dei dati sperimentali. Nei casi (a) e (b) risulta perciò impossibile verificare se il *fitting* dei dati sperimentali è migliorato o meno modificando K rendendolo variabile: si può solo constatare la meno fedele riproduzione della segregazione nella primissima fase del processo di scarico per il caso (b), dovuta alla diminuzione del valore assoluto della velocità di segregazione. Nel caso (c), però, che non ha avuto i problemi appena citati, il confronto tra K costante e K variabile può essere compiuto, e si vede come rendendo K variabile la curva dei dati numerici venga appiattita fino a valori dei suoi punti intorno a quello unitario, riproducendo inoltre in maniera molto più accurata i dati sperimentali, anche senza aver inserito la relazione di Arteaga e Tüzün, cosa che si può fare partendo da questi risultati.

5.4.6 Conclusioni riguardo le prove con K variabile

Anche in questo caso, i risultati numerici riproducono fedelmente sia il comportamento dei vari regimi di scarico sia i dati sperimentali. Si è riuscito, inoltre, rispetto al caso in cui K era costante, a migliorare il *fitting*, soprattutto nei casi in cui la frazione massiva di fini iniziale era più alta. Nel caso del *funnel-flow*, però, non si è riusciti a migliorare la riproduzione dei dati sperimentali nella fase finale del processo di scarico, mentre è risultata meno riproducibile la fase iniziale di entrambi i regimi di scarico per il rapporto d_2/d_1 pari a 4,3. Si tenga conto però che sono situazioni date da prove sperimentali, in particolare la seconda è data dall'impossibilità di mantenere il riempimento ben miscelato alla primissima fase degli esperimenti.

Anche se la modifica di K così apportata migliora il *fitting* dei dati sperimentali e il modello nel complesso, si può sviluppare questa variabile inserendovi altri fattori. Ad esempio, si può inglobare la relazione di Arteaga e Tüzün in modo da poter prevedere correttamente anche i casi in cui la frazione massiva di fini supera quella limite calcolata con tale equazione. Oppure, si può cercare un modo per rendere più esplicito l'effetto della frazione di vuoto. Un ulteriore passo può essere quello di inserire l'effetto della temperatura granulare, dato che le collisioni e le fluttuazioni della velocità (e quindi la mobilità del materiale granulare) possono anch'esse influenzare la segregazione; oppure quello di inserire la gravità, nel caso in cui essa possa avere un effetto diverso rispetto al caso dei silos, ad esempio in un piano inclinato. Tutte queste ipotesi sono tema di sviluppi futuri, in cui si possono modellare le componenti K_T e K_S rendendole anch'esse variabili oppure cambiando la dipendenza della variabile K .

5.5 Segregazione in sili con parte cilindrica allungata

Gli studi effettuati da Ketterhagen *et al.* (2007) riguardano sili con parte cilindrica di lunghezza limitata. Questa scelta è corretta non solo da un punto di vista normativo (le norme ASTM prevedono queste dimensioni) ma anche da un punto di vista fisico, soprattutto se si presume che la segregazione è fortemente influenzata dal gradiente di velocità: infatti, è nella zona della tramoggia che vi sono i maggiori gradienti di velocità, ed è lì che avviene la maggior segregazione. Peraltro, è importante anche venire a conoscenza di ciò che succede nella parte cilindrica, e inoltre con una geometria più allungata si può verificare se l'eccesso di fini presente alle primissime fasi del processo di scarico è dovuto, come supposto, all'impossibilità di mantenere il riempimento ben miscelato. Le prossime prove, quindi, riguarderanno sili con parte cilindrica più lunga.

5.5.1 Prove sperimentali

Le prove sperimentali effettuate con questo tipo di geometria cui si fa riferimento sono presenti nella trattazione di Arteaga e Tüzün (1990), i quali hanno compiuto degli esperimenti a vari rapporti dei diametri e a varie composizioni iniziali, sia per il regime di *funnel-flow* sia per il regime di *mass-flow*. Tra tutte queste prove, verrà analizzato solo il caso in cui il rapporto d_2/d_1 è pari a 4 e la frazione massiva iniziale di fini è pari a 0,2, tenendo presente che le altre prove danno risultati qualitativamente simili.

In Figura 5.15 sono rappresentati i risultati nel caso del silo in regime di *funnel-flow*. Il grafico ha in ascissa la frazione di solido scaricato, mentre in ordinata ha la frazione massiva di fini rapportata alla frazione iniziale: la rappresentazione è quindi simile a quella utilizzata da Ketterhagen *et al.* (2007).

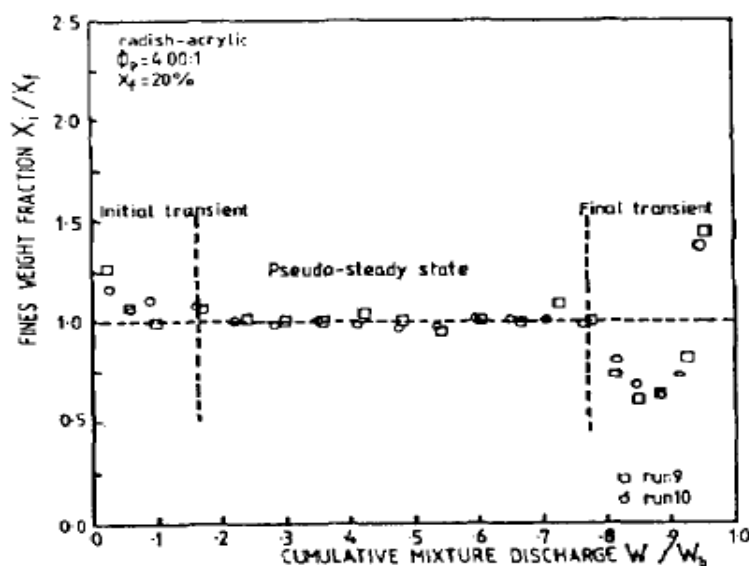


Figura 5.15. Risultati sperimentali sulla segregazione per un silo in regime di scarico di *funnel-flow* (Arteaga e Tüzün, 1990)

Dal grafico si può osservare come si possono distinguere tre zone: la prima, all'inizio della prima fase del processo di scarico (solido scaricato al 20% circa), consiste in una zona di transizione in cui vi è un arricchimento iniziale delle particelle fini, causato dalla formazione di gradienti di velocità in prossimità dello scarico che dilatano il letto del granulare. Questa fase viene seguita da una in cui vi è uno stato pseudo-stazionario in cui le particelle più piccole hanno valori di frazione massiva simili a quello iniziale, perché in quella fase il materiale è ancora nella parte cilindrica, dove il gradiente di velocità è basso tranne nelle zone in prossimità della parete: questo stato dura fino a che non viene scaricato l'80% del materiale granulare. A quel punto inizia la terza fase, il transitorio finale, che ha un andamento simile a quello che si riscontra nei silo degli esperimenti di Ketterhagen *et al.* (2007), quindi caratteristico dei fenomeni che avvengono in tramoggia già descritti in §5.2.2.

in Figura 5.16, invece, sono rappresentati i risultati riguardo a un silo che scarica in regime di *mass-flow*. In questo grafico la rappresentazione dei dati è simile a quello per il silo in regime di *funnel-flow*.

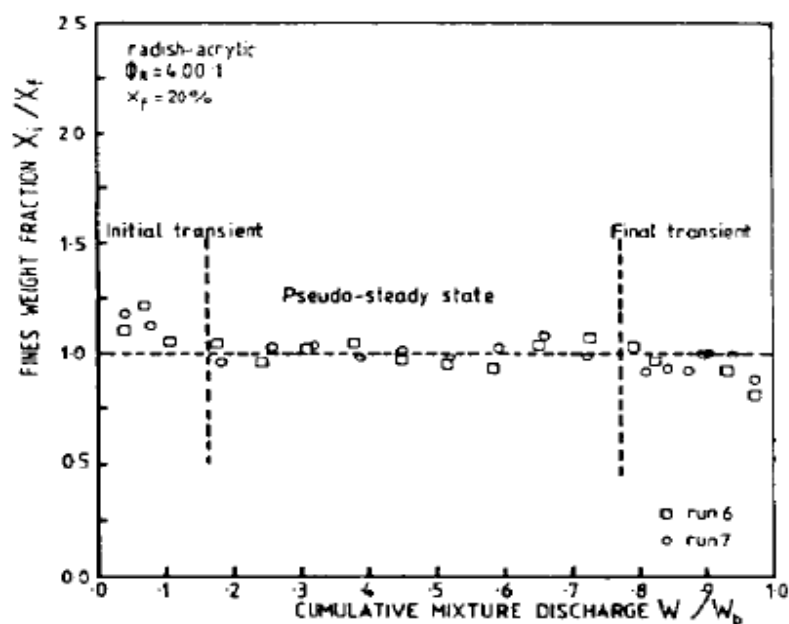


Figura 5.16. Risultati sperimentali sulla segregazione per un silo in regime di scarico di *mass-flow* (Arteaga e Tüzün, 1990)

Anche qui si possono osservare la zona di transizione iniziale, la zona di pseudo-stazionario e la zona di transizione finale. I fenomeni che avvengono in queste tre zone sono simili a quelli riscontrati nel caso del silo in regime di *funnel-flow*, tranne che nella zona di transizione finale, dove il comportamento è simile a quello del silo in *mass-flow* utilizzato negli esperimenti di Ketterhagen *et al.* (2007). Nella zona finale, quindi, il regime di *funnel-flow*

mostra una segregazione più spinta rispetto a quello di *mass-flow*, dove il profilo di frazione massiva è più piatto.

Si nota infine che non vi è più l'eccesso di fini nella primissima fase della zona di transizione finale riscontrato negli esperimenti di Ketterhagen *et al.* (2007), anche con rapporto dei diametri simile a quello di tali esperimenti. Ciò significa che tale effetto è stato compensato dall'allungamento della parte cilindrica dei sili.

5.5.2 Geometria dei sili con parte cilindrica allungata

Si vuole ora studiare numericamente l'effetto dell'allungamento dei sili. Dato che negli esperimenti di Arteaga e Tüzün (1990) il materiale utilizzato, la sua densità di *bulk* e le dimensioni delle particelle sono differenti rispetto a quelli utilizzati negli esperimenti di Ketterhagen *et al.* (2007), il confronto con i dati sperimentali in queste nuove prove saranno puramente qualitativi. Perciò, anziché implementare una nuova geometria, ci si limita ad allungare la parte cilindrica delle geometrie utilizzate in precedenza, immaginando che gli andamenti qualitativi rappresentato nelle Figure 5.15 e 5.16 sia poco dipendente dalla geometria utilizzata.

In Figura 5.17 sono rappresentate le nuove geometrie dei sili.

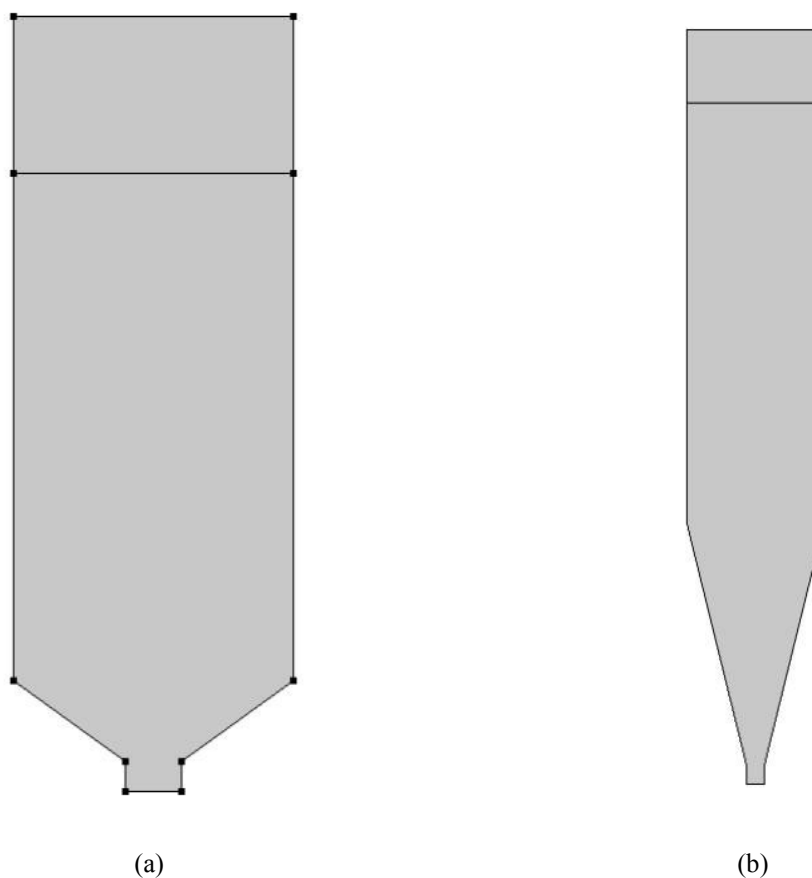


Figura 5.17. Geometrie dei sili con parte cilindrica allungata (a) *funnel-flow* (b) *mass-flow*

Per allungare i sili si è fatto in modo che il volume del granulare contenuto in essi passasse dal valore di 1 dm^3 , usato negli esperimenti di Ketterhagen *et al.* (2007), al valore di 3 dm^3 . Basandosi su questo, quindi, si ottiene che l'altezza del riempimento del materiale granulare è di 26,8 cm per il silo *funnel-flow* e 46,5 cm per il silo *mass-flow*, mentre il silo *funnel-flow* avrà un'altezza totale di 33,6 cm e il silo *mass-flow* un'altezza di 51,5 cm.

5.5.3 Risultati numerici

Effettuate le prove con le condizioni illustrate in precedenza, si riportano qui di seguito i risultati numerici, ricordando che il confronto con i dati sperimentali di Figura 5.15 e 5.16 è puramente qualitativo, data la differenza di alcune condizioni tra le prove.

La Figura 5.18 mostra il grafico ottenuto nel caso di silo che scarica in regime di *funnel-flow*. Si vede come anche in questo caso si possono distinguere la zona di transizione iniziale, dove vi è un eccesso di fini, la zona di pseudo-stazionario, dove la curva risulta pressoché piatta, e la zona di transizione finale, dove la segregazione avviene in maniera simile a ciò che accade nei sili in regime di *funnel-flow* a parte cilindrica di lunghezza limitata.

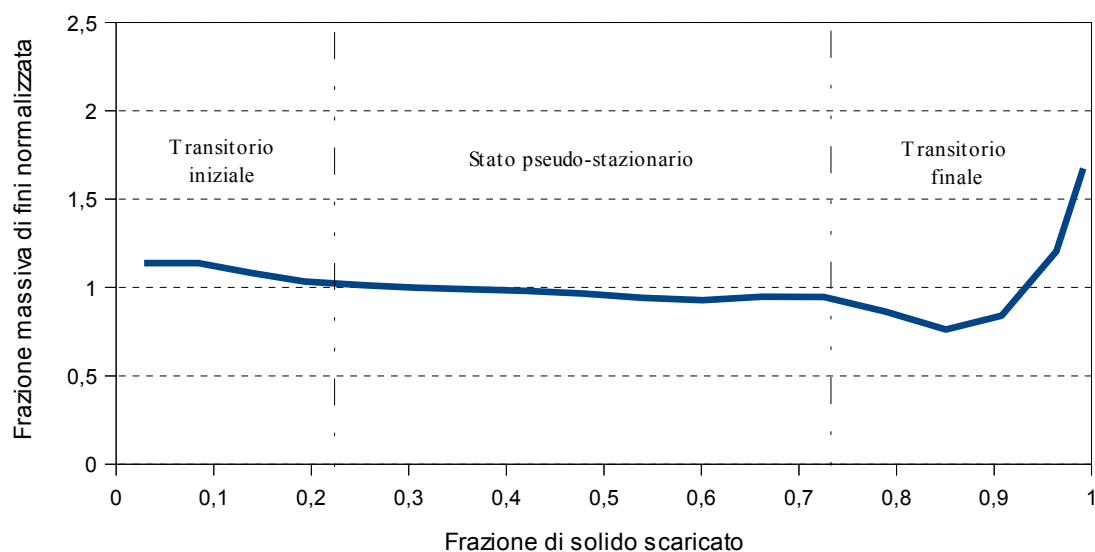


Figura 5.18. Frazione massiva di fini normalizzata in funzione della frazione di solido scaricato per un silo in regime di *funnel-flow* a tramoggia cilindrica allungata. Sono evidenziate la zona di transizione iniziale, la zona di pseudo-stazionario e la zona di transizione finale

In particolare, la zona di transizione iniziale è riprodotta in maniera molto fedele ai dati sperimentali. La zona di pseudo-stazionario è anch'essa fedele ai dati sperimentali, anche se vi è un leggero calo della frazione massiva di fini: calo che però è accettabile, in quanto i valori della frazione massiva di fini normalizzata non devono essere unitari ma oscillare attorno a quel valore. Infine, nella zona di transizione finale i dati sperimentali sono riprodotti

fedelmente, anche se il minimo non è pronunciato come in essi. Si ripete però che le simulazioni sono state compiute in condizioni diverse da quelle sperimentali (e questo vale anche per le considerazioni fatte per lo stato pseudo-stazionario), ed è per questo anche che l'ampiezza delle zone è maggiore rispetto ai casi sperimentali: infatti, la zona di transizione iniziale termina al 22% di materiale scaricato, mentre la zona di transizione finale inizia al 73% di materiale scaricato.

In Figura 5.19 sono rappresentati invece i risultati delle simulazioni sul silo che scarica in regime di *mass-flow*. Anche qui si possono distinguere la zona di transizione iniziale, la zona di pseudo-stazionario e la zona di transizione finale. Quest'ultima, in questo caso, rispecchia il fenomeno della segregazione che avviene nei sili in regime di *funnel-flow* a parte cilindrica di lunghezza limitata.

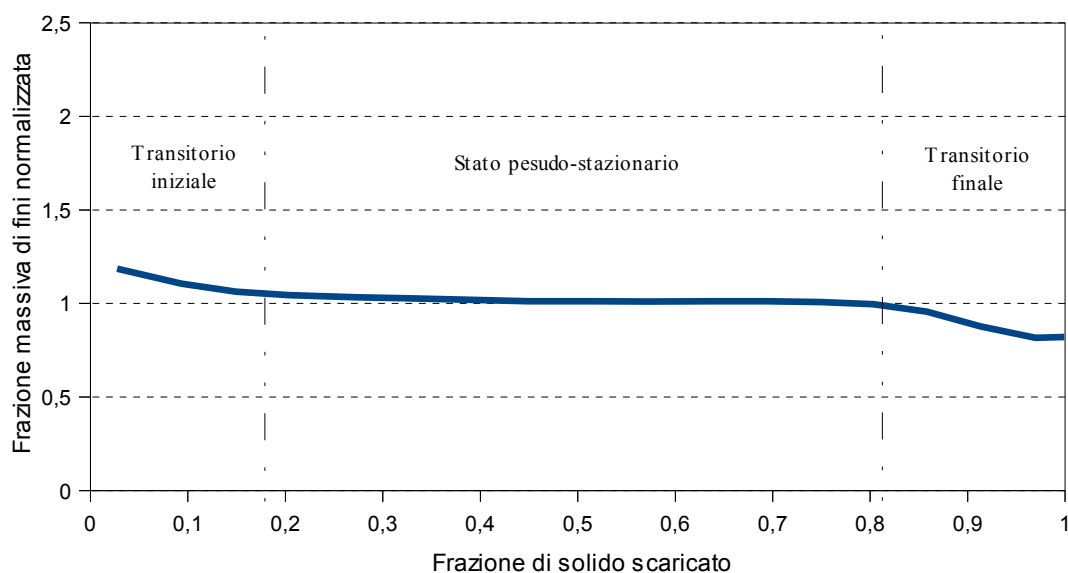


Figura 5.19. Frazione massiva di fini normalizzata in funzione della frazione di solido scaricato per un silo in regime di *mass-flow* a tramoggia cilindrica allungata. Sono evidenziate la zona di transizione iniziale, la zona di pseudo-stazionario e la zona di transizione finale

Con questo regime di scarico la riproduzione dei dati sperimentali è molto fedele ad essi in tutto il processo di scarico, salvo alcune piccole differenze dovute alle diverse condizioni di prova tra la situazione sperimentale e quella numerica. In particolare, nella zona in cui vi è lo pseudo-stazionario la curva è più piatta, e quindi più buona, rispetto al caso del *funnel-flow*.

In conclusione, l'obiettivo di verificare l'andamento qualitativo della segregazione in sili a parte cilindrica allungata è stato raggiunto, e i risultati numerici riproducono fedelmente i dati sperimentali.

5.6 Prospettive future

In base ai risultati ottenuti, si possono sviluppare ulteriori approfondimenti riguardanti la previsione numerica della segregazione, migliorando il modello e testando altre geometrie e altri sistemi. Si riportano qui di seguito dei possibili studi che potranno essere svolti in futuro.

5.6.1 Sviluppo della costante di segregazione K

Si è già accennato (cfr. §5.4.6) al fatto che la costante di segregazione può essere sviluppata inserendovi altri fattori che possono influenzarla, quali la frazione di vuoto, la temperatura granulare oppure la gravità. Si può inoltre inserire l'equazione di Arteaga e Tüzün, in modo da tenere conto della massima frazione volumetrica di fini oltre la quale non si ha più segregazione. Si consideri anche l'ipotesi di modificare l'espressione di K , quindi non necessariamente bisogna sviluppare la componente intrinseca K_T e la componente K_S , ma si può esprimere K in maniera differente a ciò che è stato fatto da Hajra *et al.* (2012).

5.6.2 Scelta del parametro m

Le simulazioni fin qui effettuate hanno sempre considerato il parametro m unitario. Ciò è stato considerato logico in quanto si è voluto rendere significativo il contributo dovuto al gradiente di velocità. Ci sono casi in cui però bisogna diminuirlo, ad esempio dopo un'analisi dei profili dello stesso dove si verifica che il contributo che dà alla segregazione è limitato, oppure aumentarlo. La scelta di m andrà quindi compiuta variandolo caso per caso, possibilmente facendo prima un'analisi di sensitività.

5.6.3 Gradiente di velocità

Nel modello si è sempre considerato il gradiente di velocità utilizzando il suo modulo. Ciò non è sbagliato, in quanto lo *shear rate* dà un effetto sulla segregazione in tutte le sue componenti. Si può però studiare l'effetto di ogni singola componente, perché questo potrebbe permettere di capire meglio il meccanismo della segregazione e l'effetto che ha su di esso il gradiente di velocità.

5.6.4 Altre geometrie

Appurato che il modello è valido, lo si può verificare ulteriormente testandolo su altre geometrie. Così facendo, infatti, lo si può sviluppare in maniera più accurata, inserendo molti più fattori che possono influenzare la segregazione.

Capitolo 6

Riempimento dei sili

Oltre a quella nella fase di scarico, si è iniziato a studiare la segregazione anche nella fase di riempimento dei sili, cercando prima un sistema geometrico che approssimasse al meglio tale operazione e poi studiando il fenomeno in maniera simile a ciò che è stato fatto per la fase di scarico. Si sono quindi cercati i parametri, le variabili, le condizioni iniziali e al contorno per ogni fisica, e poi si è osservato l'andamento della concentrazione di fini. Lo studio è stato fatto da un punto di vista puramente qualitativo, con l'unica intenzione di introdurre dei possibili sviluppi futuri.

6.1 Segregazione durante il riempimento dei sili. Piano inclinato.

Gli studi numerici effettuati nelle fasi precedenti avevano come condizione iniziale il fatto che il materiale granulare fosse ben miscelato nei suoi componenti, cioè che i suoi componenti fossero ben dispersi nella miscela. Ciò nella realtà non è assolutamente possibile, perché quando il materiale viene versato all'interno di un silo, esso tende già a segregare, per fenomeni inerziali o fluidodinamici (de Silva *et al.*, 2000, cfr §1.2.1). Anche il procedimento per ricavare una miscela completamente *random* descritto in Ketterhagen *et al.* (2007) non permette comunque di ottenerla, e in tale articolo viene messo in risalto che il modo più corretto e più realistico per studiare la segregazione è quello di riempire il silo con il metodo “a doppia tramoggia”, il quale è previsto anche nella normativa ASTM D 6940-03.

6.1.1 Studio del cumulo di materiale

Tra tutti i fenomeni segregativi che si verificano durante il riempimento dei sili, si vuole studiare ciò che avviene sulla superficie della massa di materiale granulare. Nel riempire i sili, il granulare assume una forma conica il cui angolo è pari al suo angolo di riposo, e la superficie di questa forma può essere assimilata ad un piano inclinato, come già mostrato ad esempio in Fan *et al.* (2014) e come si può osservare in Figura 6.1.

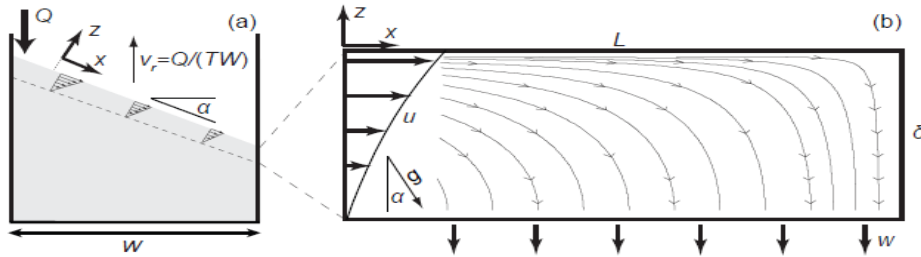


Figura 6.1. (a) Cumulo di materiale granulare e sua similitudine ad un piano inclinato. Il profilo di velocità viene schematizzato nell'immagine ingrandita e ruotata (b) (Fan et al., 2014)

Il passo successivo sarà quindi quello di studiare la segregazione in un piano inclinato, verificando però prima il corretto scorrimento del materiale in esso. La scala utilizzata sarà però più grande, per renderla simile a quella industriale.

6.2 Implementazione in *COMSOL Multiphysics 4.3*

Lo studio da effettuare viene svolto anche in questo caso con il simulatore *COMSOL Multiphysics 4.3*. Per implementare il sistema e i modelli matematici necessari a questo proposito, si segue una procedura analoga a quella utilizzata per studiare i sili, con alcune variazioni dovute alla diversa geometria.

6.2.1 Operazioni iniziali

Anche in questo caso la dimensione spaziale scelta è la 2D, perché si considera che il trasporto di materia lungo la direzione y ortogonale a x e z (cfr. Figura 7.1) sia trascurabile. Le fisiche da inserire sono le stesse del caso dei sili, cioè “*Laminar Two-Phase Flow, Level Set*”, “*Heat Transfer in Fluids*” e “*Coefficient Form PDE*”, mentre lo studio sarà ancora dipendente dal tempo, ma il tempo di simulazione sarà prolungato a 200 s, per rendere stazionario il flusso del materiale granulare, che in questo caso è continuo.

6.2.2 Geometria del sistema e griglia computazionale

La geometria implementata è raffigurata nella Figura 6.2. Anche in questo caso vi sono due domini, uno in cui all'inizio vi è materiale granulare e uno in cui all'inizio vi è aria. L'unico bordo che rappresenta una parete è quello indicato dal numero 2, mentre gli altri servono ad indicare le condizioni al contorno, le entrate, le uscite e l'interfaccia.

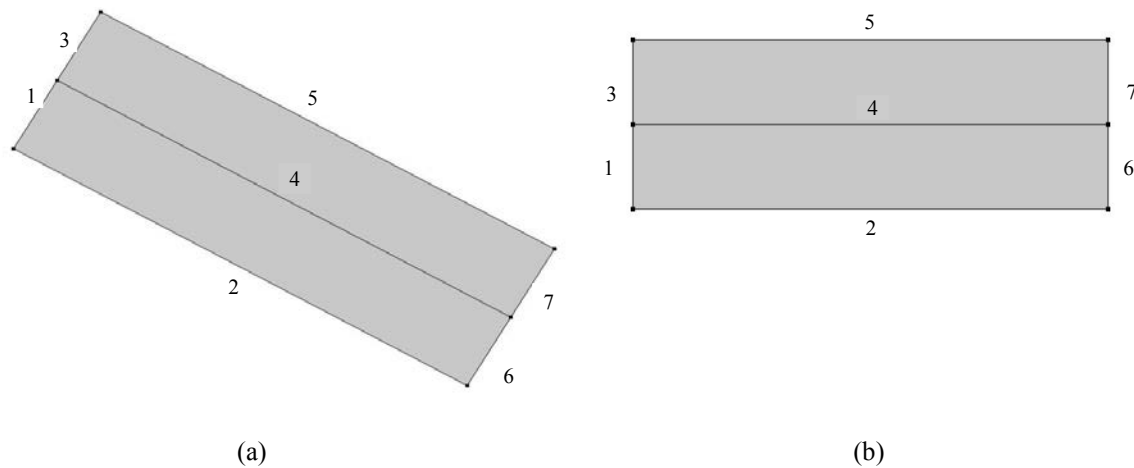


Figura 6.2. Geometrie del piano inclinato implementate nel simulatore COMSOL Multiphysics 4.3: (a) piano realmente inclinato con gravità non ruotata, (b) piano orizzontale con gravità ruotata

Il piano ha una lunghezza di 3 m, e lo spessore del materiale che vi scorre è di 0,5 m. Il dominio inferiore ha quindi queste dimensioni, così come il dominio superiore. L'angolo d'inclinazione del piano è di 30° , ma per semplicità si è scelto di implementare il piano come orizzontale, ruotando però la direzione del vettore gravità di 30° in senso antiorario, quindi si è utilizzata la geometria illustrata in Figura 6.2b preferendola alla geometria rappresentata in Figura 6.2a.

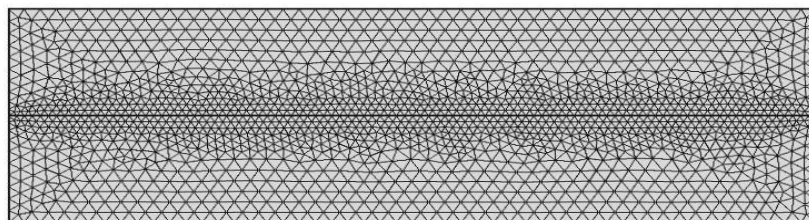


Figura 6.3. Griglia computazionale utilizzata nelle simulazioni per il piano inclinato.

In Figura 6.3 è invece illustrata la griglia computazionale necessaria alla simulazione. Anche in questo caso è una griglia a celle triangolari, con una definizione simile a quella della griglia utilizzata per i sili e infittita nella zona in cui si prevedono gradienti di velocità più elevati, che in questo caso è in prossimità dell'interfaccia.

6.2.3 Parametri e variabili dei modelli

Per verificare lo scorrimento del materiale sul piano inclinato e renderlo più simile al moto delle particelle sul cumulo di materiale, si è deciso di aumentare la viscosità del granulare, mantenendo lo stesso diametro medio e la stessa densità, quindi considerando sempre sfere di vetro. Sono state quindi apportate delle modifiche ad alcuni parametri rispetto allo studio dei sili, come mostrato in Tabella 6.1.

Tabella 6.1. Parametri utilizzati nei modelli per il piano inclinato. Sono riportati solo quelli variati rispetto al caso dei sili, mentre per gli altri si faccia riferimento alle Tabelle 4.1 e 4.3

Parametro	Simbolo	Valore	Unità di misura reale	Unità di misura d'implementazione
Parametro del coefficiente di viscosità	η_0	0.3	1/s	1/s
Parametro del coefficiente costitutivo dell'energia fluttuante	k'	0.3	1/s	$m^2/(s^3 \cdot K)$
Diametro medio delle particelle	d_p	0.0018	m	m
Coefficiente d'attrito interno	μ_i	0.6	-	-
Parametro della lunghezza di scivolamento	k_λ	2	-	-
Temperatura granulare iniziale	θ_0	0.085	m^2/s^2	K
Rapporto dei diametri	d_1/d_2	0.233	-	-
Frazione iniziale particelle fini	$c_{1,0}$	0.5	-	-

Tra i parametri variati vi è in particolare il coefficiente d'attrito interno, dato che si è considerato che l'angolo d'attrito interno fosse pari all'angolo d'inclinazione del piano.

Le variabili implementate sono infine le stesse che sono elencate in Tabella 4.2 con in più la funzione “soft start”.

6.2.4 Condizioni iniziali e al contorno

Le condizioni iniziali e al contorno di tutti i modelli sono, per la maggior parte, le stesse che nel caso dei sili. Le variazioni principali rispetto agli studi precedenti riguardano soprattutto il modello bifasico. Imposto il fluido “1” (materiale granulare) nel dominio inferiore e il fluido

“2” (aria) nel dominio superiore, si fissa l'interfaccia sul segmento 4, la condizione di scivolamento “*slip velocity*” sul segmento 2, in maniera analoga a ciò che è stato fatto nelle simulazioni precedenti. Si aggiunge inoltre una condizione di simmetria sul bordo 5, per far scorrere i fluidi nella maniera voluta.

Ciò che verrà variato rispetto ai casi precedenti sono le entrate, l'uscita e la gravità. Le prime sono diversificate a seconda del fluido che deve essere fatto entrare, quindi per il segmento 1 la frazione di fluido “2” sarà nulla con condizione di sforzo normale nullo, mentre sul segmento 3 si porrà unitaria la frazione dello stesso fluido, con condizione di pressione e sforzo viscoso nulli. L'uscita sarà sui bordi 6 e 7, e in essa sarà imposto un campo di velocità con la componente x pari a 0,01 m/s e con la componente y nulla. Infine, la gravità sarà ruotata dell'angolo d'inclinazione del piano inclinato, quindi la componente x avrà un valore di $g \cdot \sin(\pi/6)$, mentre la componente y avrà un valore di $-g \cdot \cos(\pi/6)$, con entrambi i valori che possono essere moltiplicati per la funzione “*soft start*”.

Per quanto riguarda il modello reologico, rispetto al caso dei sili cambia solo il fatto di imporre anche una temperatura granulare in corrispondenza delle entrate (segmenti 1 e 3). Per il resto si fissa la condizione “*outflow*” nei segmenti 6 e 7, e la sorgente di calore nel dominio inferiore, in maniera analoga alle simulazioni precedenti, così come in maniera analoga a queste si implementano le condizioni iniziali e l'isolamento termico.

Infine, la PDE va implementata come nel caso dei sili e solo nel dominio inferiore, con valori iniziali pari alla composizione iniziale e la condizione di flusso nullo all'uscita (segmento 6). Si impone però anche la condizione d'entrata sul bordo 1, in modo che su questo la frazione massiva sia sempre pari a quella iniziale, tramite l'opzione “*Dirichlet Boundary Condition*”. Sugli altri bordi si mantiene il flusso nullo.

6.3 Risultati ottenuti

Dalle simulazioni sono stati quindi ottenuti dei profili che verranno di seguito illustrati, tenendo presente che l'obiettivo di questi ultimi studi è quello di compiere delle analisi puramente qualitative e non necessariamente accurate, ma atte solo ad introdurre dei possibili sviluppi futuri.

6.3.1 Verifica dello scorrimento del materiale granulare

Prima di osservare come si sviluppa la segregazione, si è verificato il corretto scorrimento del materiale granulare sul piano inclinato. Per prima cosa va constatato se lo scorrimento raggiunge uno stato stazionario, confrontando le immagini in Figura 6.4.

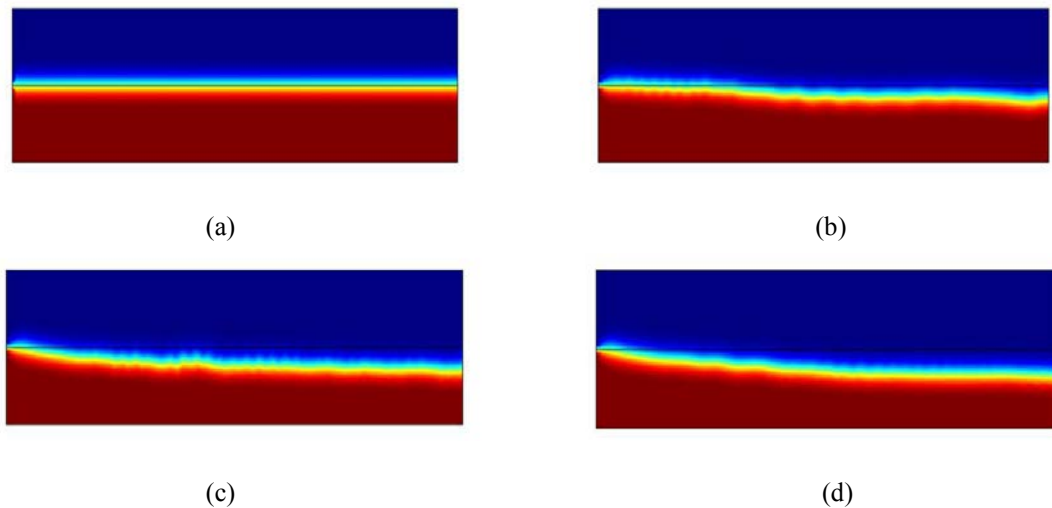


Figura 6.4. Profili di frazione volumetrica di materiale granulare, a diversi tempi di simulazione (a) 0 s (b) 40 s (c) 120 s (d) 200 s. La zona a maggior frazione volumetrica di solido è indicata in rosso, mentre la zona a minor frazione volumetrica di solido è indicata in blu.

Si vede innanzitutto che un tempo di 200 s è più che sufficiente per arrivare ad un profilo costante nel tempo. Lo stesso profilo inoltre rispetta ciò che si manifesta nella realtà, che consiste in una diminuzione dello spessore del letto del granulare.

Per verificare meglio il corretto scorrimento, però, va verificato il profilo di velocità lungo lo spessore del letto. Si traccia quindi una “*cut line*” ortogonale al piano di scorrimento e lunga quanto lo spessore iniziale del letto, posizionata a metà del piano stesso, e si traccia il profilo di velocità lungo questa linea. Il risultato è espresso in Figura 6.5: tale grafico riporta in ascissa il modulo della velocità e in ordinata la lunghezza della “*cut line*” al tempo finale. Lungo la “*cut line*”, però, si riscontra la presenza sia del solido sia dell'aria: nel grafico verranno quindi evidenziate la zona in cui vi è materiale granulare e la zona in cui vi è aria. In particolare, si osserva che il granulare ricopre un'altezza rispetto al piano di scorrimento compresa tra 0 m e 0,35 m.

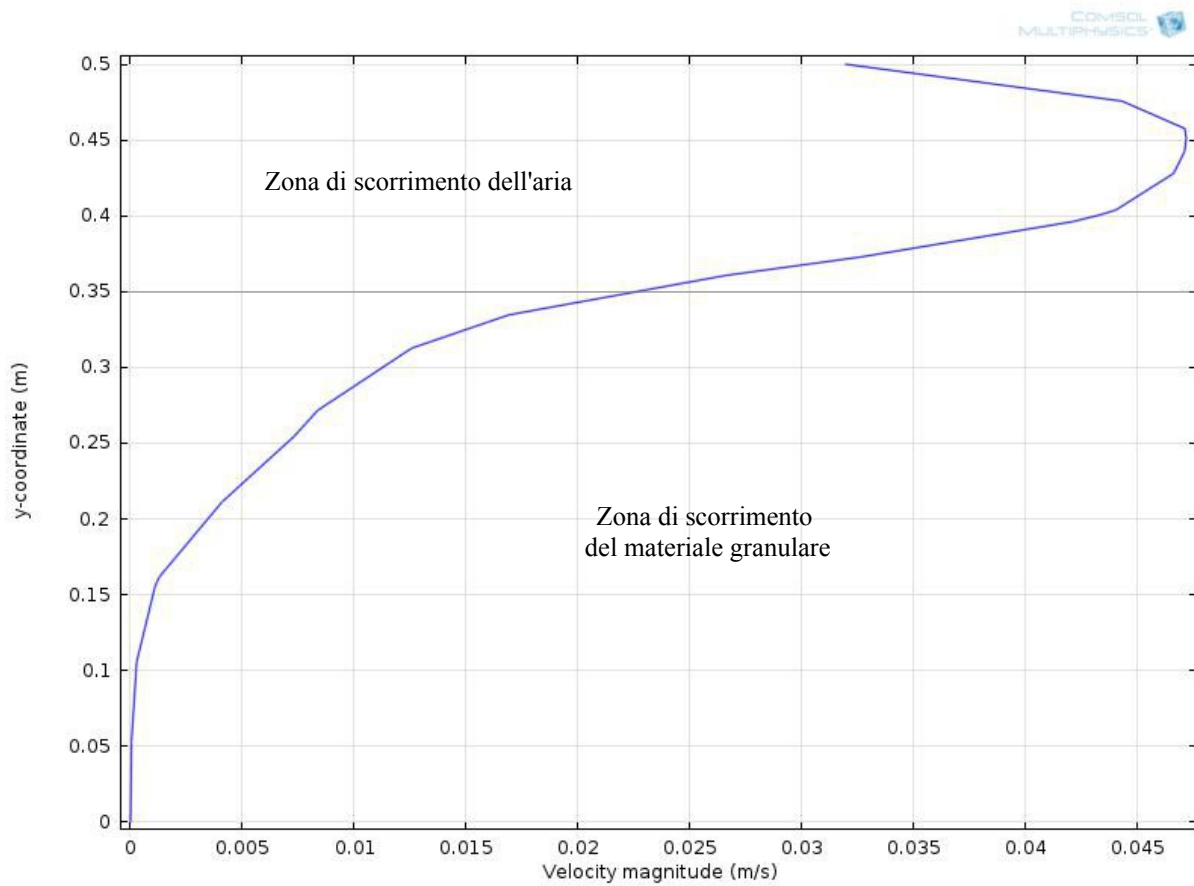


Figura 6.5. Profili di velocità (in ascissa) lungo l'altezza del letto (in ordinata).

Il profilo di velocità rispecchia qualitativamente quelli ottenuti sperimentalmente da Santomaso e Canu (2001). In particolare mostra la concavità tipica dei materiali granulari, che è opposta a quanto farebbe ad esempio un fluido newtoniano. Il corretto scorrimento del materiale è quindi ulteriormente verificato.

6.3.2 Segregazione

Per quanto riguarda il fenomeno segregativo, questo viene osservato utilizzando ancora il modello riportato in §2.7, variando, però, rispetto al caso precedente, i valori di K e m . Queste variazioni vengono apportate per cercare di accelerare la segregazione e verificare i componenti si separino completamente, per poi studiarla più accuratamente in futuro. Si assume perciò un valore di K pari a -25, mantenuto costante, mentre per valutare m si analizza la Figura 6.6, che mostra il profilo del gradiente di velocità.

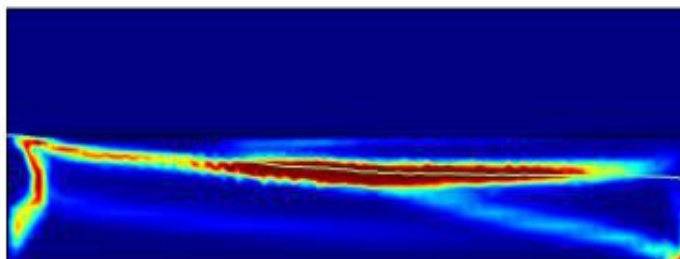


Figura 6.6. *Profili del gradiente di velocità al tempo di 200 s. La zona rossa indica valori maggiori di tale gradiente, mentre la zona blu indica valori minori. La linea bianca, infine, indica l'interfaccia.*

Come si può osservare da questa immagine, i gradienti di velocità sono concentrati maggiormente nei pressi dell'interfaccia, quindi, applicando il modello di segregazione, si ha che la velocità di percolazione è maggiore in tale zona, per poi decrescere bruscamente man mano che si va all'interno del letto. Bisogna quindi minimizzare l'effetto del gradiente di velocità, altrimenti le particelle fini tenderanno a concentrarsi solo in superficie. Si sceglie perciò un valore di m pari a 0,1.

Il profilo di frazione massiva della specie fine ottenuto è mostrato in Figura 6.7, ricordando che la miscela testata ha una percentuale di fini pari al 50% in massa.

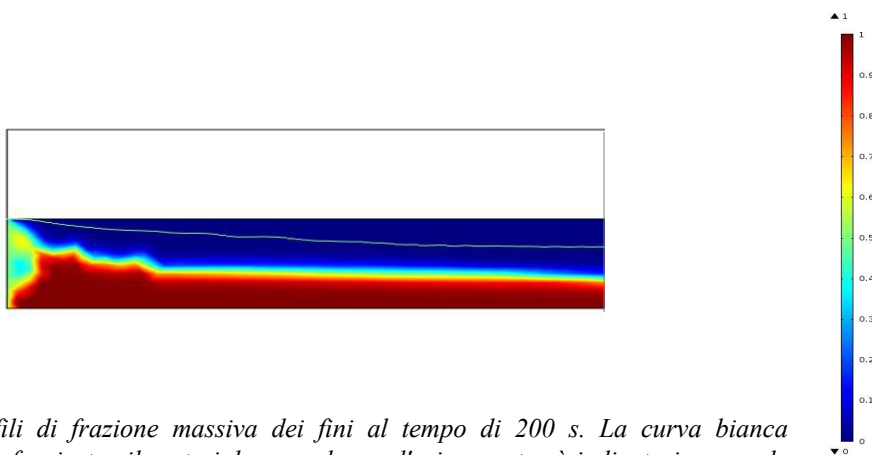


Figura 6.7. *Profili di frazione massiva dei fini al tempo di 200 s. La curva bianca rappresenta l'interfaccia tra il materiale granulare e l'aria, mentre è indicata in rosso la zona a maggior frazione massiva di fini e in blu quella a minor frazione massiva di fini*

Si può osservare come la maggior parte della segregazione avvenga già nel transitorio iniziale, per poi completarsi agli istanti successivi. L'obiettivo di verificare la completa segregazione delle particelle è quindi stato raggiunto, anche se serve comunque una più

accurata sintonizzazione del parametro m e una miglior definizione della costante K : ricerche che si propongono di eseguire in futuri lavori di tesi.

Come ultima cosa, si mostrano in Figura 6.8 i profili di frazione massiva delle varie zone del piano inclinato allo stazionario.

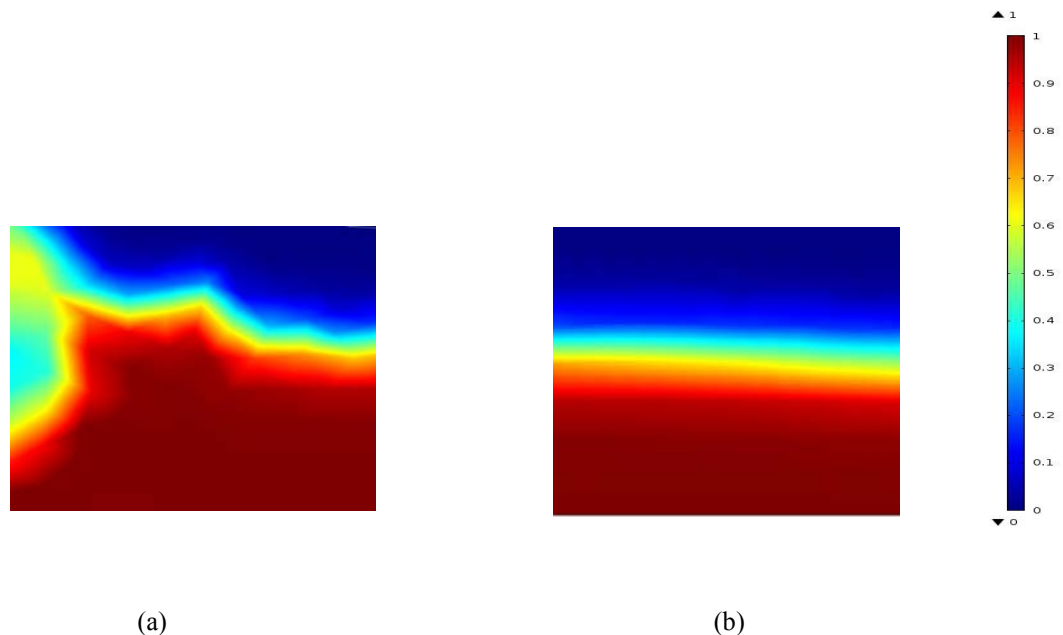


Figura 6.8. *Profili di frazione massiva al tempo di 200 s (a) parte iniziale del piano (b) parte finale del piano. In rosso le zone a più alta frazione massiva di fini, in blu le zone a più bassa frazione massiva di fini.*

Si vede come lo spessore delle particelle fini rimane costante. Ciò conferma la validità del modello, anche se esso non tiene conto dei meccanismi inerziali che guidano le particelle: infatti, le particelle a maggiori dimensioni hanno maggior inerzia e tendono a scorrere più velocemente. Nel modello numerico non è stato inserito alcun meccanismo inerziale, ma si consiglia di compiere questo passo in lavori futuri, in modo da simulare meglio il trasporto delle particelle sul piano inclinato.

Conclusioni

L'obiettivo di questa tesi è stato quello di studiare il fenomeno della segregazione da un punto di vista numerico, utilizzando un approccio continuo tramite il simulatore *COMSOL Multiphysics 4.3*.

Come prima cosa si è cercato di implementare un modello bifasico e un modello reologico che simulassero il moto del materiale granulare. Per poter poi studiare numericamente la segregazione, questi modelli ne è stato aggiunto uno che descrivesse il trasporto di materia da applicare alle particelle all'interno del materiale granulare. Questo si è ipotizzato essere costituito da particelle dello stesso materiale ma con due diverse dimensioni. I modelli così implementati sono stati utilizzati per simulare il comportamento del materiale granulare durante lo scarico da sili sia in regime di *mass-flow* sia in regime di *funnel-flow*, con geometrie simili a quelle utilizzate in esperimenti da laboratorio reperiti in letteratura. I risultati ottenuti numericamente sono stati poi confrontati con i dati ricavati da questi esperimenti per verificare la validità o meno del modello segregativo.

Le prove numeriche effettuate hanno riguardato i due tipi di sili appena citati e due miscele con particelle a diverso rapporto reciproco di diametri, ciascuna testata a tre composizioni differenti, per un totale di dodici prove, ripetute modificando successivamente il modello di segregazione con l'intenzione di migliorarlo. Da queste simulazioni sono stati ottenuti dei risultati qualitativi molto simili a quelli sperimentali, con in più una buona correlazione con gli stessi. Modificando poi il modello in maniera adeguata il confronto con i dati sperimentali è migliorato notevolmente anche dal punto di vista quantitativo, soprattutto per miscele con concentrazione di fini più alta. La modifica apportata al modello è stata peraltro grossolana: in trattazioni future si consiglia di migliorarlo ulteriormente aggiungendovi l'effetto di altri fattori che possono influenzare la segregazione (ad esempio i fenomeni inerziali), eventualmente modificando le espressioni delle variabili all'interno del modello stesso. Si è comunque ottenuto un ottimo punto di partenza per procedere al meglio allo studio dei fenomeni segregativi, in quanto è stato verificato l'influenza di alcuni fattori.

Ulteriori prove sono state condotte allungando le geometrie del silo in modo da poter osservare la segregazione in tutta la lunghezza del silo stesso, confrontando in maniera qualitativa i risultati numerici con altri dati sperimentali di letteratura. I risultati ottenuti sono risultati molto soddisfacenti anche in questo caso, in quanto non solo si è riusciti a rilevare delle zone diverse lungo il silo in cui la segregazione avviene in maniera differente a seconda della zona, ma anche si è riusciti a riprodurre i dati sperimentali in maniera qualitativamente molto fedele.

Infine, si è studiata in maniera preliminare la segregazione durante il riempimento dei sili, approssimando il pelo libero del materiale granulare ad un piano inclinato. I risultati ottenuti sono qualitativamente buoni ma migliorabili ulteriormente in futuro. Queste prove preliminari suggeriscono che è possibile approfondire lo studio dei fenomeni segregativi anche in altre geometrie e operazioni industriali, e confermano la possibilità di poter estendere l'utilizzo dei metodi numerici sin qui sviluppati anche ad altri casi d'interesse industriale.

Nomenclatura

B	=	diametro dell'uscita del silo (m)
C_p	=	calore specifico a pressione costante (J/(kg·K))
C_M	=	parametro della legge di Beverloo dovuto al materiale (-)
c	=	concentrazione (mol/m ³)
D	=	coefficiente di diffusione (m ² /s)
D_r	=	coefficiente di diffusione riferito alla distanza media (m ² /s)
d	=	diametro delle particelle (m)
d_p	=	diametro medio delle particelle (m)
E	=	modulo di Young (N/m ²)
F	=	forza di volume (N)
F_{st}	=	forza dovuta alla tensione superficiale (N)
f	=	frazione volumetrica (-)
f_{mg}	=	frazione volumetrica di materiale granulare (-)
g	=	modulo dell'accelerazione di gravità (m/s ²)
\mathbf{g}	=	modulo dell'accelerazione di gravità (m/s ²)
H	=	altezza del letto (m)
H_{sm}	=	funzione Heaviside del Level Set (-)
\mathbf{j}	=	flusso massivo (kg/(m ² ·s))
J_s	=	flusso di segregazione (m/s)
\mathbf{J}_s	=	flusso vettoriale di deriva della segregazione (m/s)
K	=	costante di segregazione (-)
K_S	=	coefficiente della componente segregativa legata alla concentrazione (m)
K_T	=	componente intrinseca della segregazione (m)
k	=	coefficiente costitutivo dell'energia fluttuante (Pa·s)
k'	=	coefficiente costitutivo dell'energia fluttuante (1/s)
k_x	=	parametro della legge di Beverloo (-)
k_0	=	parametro adimensionale della scala di temperatura (-)
L	=	distanza raggiungibile secondo Stokes (m)
m	=	parametro esponenziale del gradiente di velocità (-)
\dot{m}	=	portata massiva (kg/s)
\mathbf{M}	=	momento complessivo (N·m)
\mathbf{M}_0	=	momento complessivo del mezzo uniforme (N·m)
M_i	=	massa molecolare del componente i (kg/kmol)
M_n	=	massa molecolare media (kg/kmol)

n	=	versore normale alla parete (-)
N_{CM}	=	variabile ausiliaria per la normalizzazione (-)
P	=	probabilità di trovare una particella (-)
p	=	pressione (componente sferica del tensore degli sforzi) (N/m ²)
Q	=	sorgente di calore (W/m ³)
\dot{Q}	=	produzione netta d'energia (Pa/s)
q^T	=	flusso diffusivo dell'energia fluttuante (Pa·m/s)
Q_{VH}	=	riscaldamento viscoso (W/m ³)
R	=	velocità di produzione (kg/(m ³ ·s) o kmol/(m ³ ·s))
\dot{r}	=	distanza media tra le particelle (-)
S	=	lunghezza di scala (m)
T	=	temperatura (K)
t	=	tempo (s)
t_1	=	tempo scalato (-)
t_{sc}	=	tempo di scala (s)
u	=	componente della velocità lungo la direzione x (m/s)
\mathbf{u}	=	vettore della velocità (m/s)
\tilde{u}	=	componente fluttuante della velocità (m/s)
$\tilde{\mathbf{u}}$	=	vettore della velocità fluttuante (m/s)
$\bar{\mathbf{u}}$	=	vettore della velocità media (m/s)
\mathbf{u}_D	=	velocità di deriva dovuta alla diffusione (m/s)
\mathbf{u}_S	=	velocità di deriva dovuta allo sforzo di taglio (m/s)
\mathbf{u}_P	=	velocità di deriva dovuta alla percolazione (m/s)
u_t	=	velocità di scivolamento (m/s)
V_1	=	volume di fini (m ³)
V_{mg}	=	volume di materiale granulare (m ³)
\tilde{V}	=	portata volumetrica (m ³ /s)
v	=	componente della velocità lungo la direzione y (m/s)
v_s	=	velocità di segregazione lungo la direzione y (m/s)
W_p	=	lavoro di pressione (W/m ³)
w	=	componente della velocità lungo la direzione z (m/s)
w_p	=	velocità di percolazione (m/s)
w_s	=	velocità di segregazione lungo la direzione z (m/s)
X	=	fattore di forma (-)
x_Γ	=	distanza dall'interfaccia (m)
z^T	=	termine di dissipazione dell'energia fluttuante (Pa/s)

Lettere greche

$\dot{\gamma}$	=	gradiente di velocità (1/s)
γ_{LS}	=	parametro di reinizializzazione (-)
ε	=	spessore della regione di transizione nel <i>Level Set</i> (m)
η	=	viscosità (Pa·s)
η'	=	coefficiente di viscosità (1/s)
η_0	=	parametro del coefficiente di viscosità (1/s)
$\eta_{f,1}$	=	viscosità del fluido 1 nel <i>Level Set</i> (Pa·s)
$\eta_{f,2}$	=	viscosità del fluido 2 nel <i>Level Set</i> (Pa·s)
η_m	=	viscosità del mezzo (Pa·s)
θ	=	temperatura granulare (m ² /s ²)
θ^*	=	scala di temperatura (m ² /s ²)
θ_0	=	temperatura granulare iniziale (m ² /s ²)
λ	=	lunghezza di scivolamento (m)
μ	=	coefficiente d'attrito (-)
μ_w	=	coefficiente d'attrito alla parete (-)
ξ	=	coefficiente di percolazione (m/s)
ρ	=	densità di <i>bulk</i> (kg/m ³)
ρ_p	=	densità della singola particella (kg/m ³)
σ	=	sforzo normale (N/m ²)
τ	=	sforzo di taglio (N/m ²)
τ_{LS}	=	tempo artificiale nell'inizializzazione del <i>Level Set</i> (-)
φ_e	=	angolo d'attrito interno alla parete del materiale (rad)
ϕ	=	variabile ausiliaria del <i>Level Set</i> (-)
ϕ_{sd}	=	variabile ausiliaria calcolata in base alla distanza dall'interfaccia (-)
χ	=	frazione di vuoto accessibile (-)
ψ	=	coefficiente di trasporto nella segregazione da sforzi di taglio (m)
ω	=	frazione massiva (-)
$\omega_{f,i}$	=	frazione massiva massima per cui vi è segregazione (-)
$\omega_{i,0}$	=	frazione massiva iniziale del componente <i>i</i> (-)
$\omega_{i,CM}$	=	frazione massiva del componente <i>i</i> calcolata con <i>COMSOL</i> (-)

Pedici

1	=	componente formato dalle particelle più piccole (salvo diversa indicazione)
2	=	componente formato dalle particelle più grandi (salvo diversa indicazione)
<i>i</i>	=	componente generico

Riferimenti bibliografici

- Arteaga P., Tüzün U. (1990). Flow of Binary Mixtures of Equal-density Granules in Hoppers – Size Segregation, Flowing Density and Discharge Rates. *Chemical Engineering Science*, **45**, 205-223.
- Artoni R., Santomaso A., Canu P. (2009). Simulation of Dense Granular Flows: Dynamics of Wall Stress in Silos. *Chemical Engineering Science*, **64**, 4040-4050.
- Artoni R., Zugliano A., Primavera A., Canu P., Santomaso A. (2011). Simulation of Dense Granular Flows: Comparison with Experiments. *Chemical Engineering Science*, **66**, 548-557.
- ASTM Standard Practice for Measuring Sifting Segregation Tendencies of Bulk Solids, D 6940-03 (2003).
- Barker G. C., Metha A. (1993). Transient Phenomena, Self-diffusion, and Orientational Effects in Vibrated Powders. *Physical Review E*, **47**, 184-188.
- Bridgwater J. (1994). Mixing and Segregation Mechanisms in Particle Flow. In: *Granular Matter: an interdisciplinary approach* (Metha A., Ed.), Springer-Verlag, New York (U.S.A.) pp.161-193.
- Brown, R. L. (1939). The Fundamental Principles of Segregation. *Journal of the Institute of Fuel*, **13**, 15.
- Christakis N., Chapelle P., Strusevich N., Birdle I., Baxter J., Patel M. K., Cross M., Tüzün U., Reed A. R., Bradley M. S. A. (2006). A Hybrid Numerical Model for Predicting Segregation During Core Flow Discharge. *Advanced Powder Technology*, **17**, 641-662.
- Christakis N., Patel M. K., Cross M., Baxter J., Abou-Chakra H., Tüzün U. (2002). Predictions of Segregation of Granular Material with the Aid of PHYSICA, a 3-D Unstructured Finite-volume Modelling Framework. *International Journals for Numerical Methods in Fluids*, **40**, 281-291.
- COMSOL (2012). COMSOL Multiphysics User's Guide.
- de Silva S., Dyroy A., Enstad G. G. (2000). Segregation Mechanisms and Their Quantification Using Segregation Testers. In: *IUTAM Symposium on Segregation in Granular Flows* (Rosato A., Blackmore D. L., Eds.), Cape May, New Jersey (U.S.A.) pp.11-29.
- Dolgunin V. N., Kudy A. N., Ukolov A. A. (1998). Development of the Model of segregation of Particles Undergoing Granular Flow Down an Inclined Chute. *Powder Technology*, **96**, 211-218.
- Dolgunin V. N., Ukolov A. A. (1995). Segregation Modeling of Particle Rapid Gravity Flow. *Powder Technology*, **83**, 95-103.

- Fan Y., Schlick C. P., Umbanhowar P. B., Ottino J. M., Lueptow R. M. (2014). Modeling Size Segregation of Granular Materials: the Roles of Segregation, Advection and Diffusion. *Journal of Fluid Mechanics*, **741**, 252-279.
- Gray J. M. N. T., Thornton A. R. (2005). A theory for Particle Size Segregation in Shallow Granular Free-surface Flows. *Proceedings of the Royal Society A*, **461**, 1447-1473.
- Hajra S. K., Shi D., McCarthy J. J. (2012). Granular Mixing and Segregation in Zigzag Chute Flow. *Physical Review E*, **86**, 061318.
- Jenkins J. T., Savage S. B. (1983). A Theory for the Rapid Flow of Identical, Smooth, Nearly Elastic Particles. *Journal of Fluid Mechanics*, **130**, 187-202.
- Ketterhagen W. R., Curtis J. S., Wassgren C. R., Kong A., Narayan P. J., Hancock B. C. (2007). Granular Segregation in Discharging Cylindrical Hoppers: a Discrete Element and Experimental Study. *Chemical Engineering Science*, **62**, 6423-6439.
- Knight J. B., Jaeger H. M., Nagel S. R. (1993). Vibration-induced Size Separation in Granular Media: the Convection Connection. *Physical Review Letters*, **70**, 3728-3731.
- Marks B., Einav I., Rognon P. (2011). Polydisperse Segregation Down Inclines: Towards Degradation Models of Granular Avalanches. *Advances in Bifurcation and Degradation in Geomaterials*, **11**, 145-151.
- May L. B. H., Golick L. A., Phillips K. C., Shearer M., Daniels K. E. (2010). Shear-driven Size Segregation of Granular Materials: Modeling and Experiment. *Physical Review E*, **81**, 051301.
- Neddermann R. M. (1995). The Use of the Kinematic Model to Predict the Development of the Stagnant Zone Boundary in the Batch Discharge of a Bunker. *Chemical Engineering Science*, **50**, 959-965.
- Olsson E., Kreiss G. (2005). A Conservative Level Set Method for Two Phase Flow. *Journal of Computational Physics*, **210**, 225-246.
- Osher S., Sethian J. A. (1988). Fronts Propagating with Curvature-dependent Speed: Algorithm Based on Hamilton-Jacobi Formations. *Journal of Computational Physics*, **79**, 12-49.
- Rhodes, M. (2008). *Introduction to Particle Technology* (2nd ed.). John Wiley & Sons Ltd, Bognor Regis (U.K.), pp.293-298.
- Santomaso A. C., Canu P. (2001). Transition to Movement in Granular Chute Flows. *Chemical Engineering Science*, **56**, 3563-3573.
- Savage S. B., Lun C. K. K. (1988). Particle Size Segregation in Inclined Chute Flow of Dry Cohesionless Granular Solids. *Journal of Fluid Mechanics*, **189**, 311-335.
- Shi D., Abatan A. A., Vargas W. L., McCarthy J. J. (2007). Eliminating Segregation in Free-surface Flow of Particles. *Physical Review Letters*, **99**, 148001.
- Sleppy J. A., Puri V. M. (1996). Size-segregation of Granulated Sugar During Flow. *Transactions of the ASAE*, **39**, 1433-1439.

- Standish N., Kilic A. (1985). Comparison of Stop-Start and Continuous Sampling Methods of Studying Segregation of Material Discharging from a Hopper. *Chemical Engineering Science*, **40**, 2152-2153.
- Taberlet N., Newey M., Richard P., Losert W. (2006). On Axial Segregation in a Tumbler: an Experimental and Numerical Study. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, **07**, P07013.
- Volpato S. (2013). Studio Numerico del Flusso e della Distribuzione degli Sforzi in Sili Con e Senza Inserti. *Tesi di Laurea Magistrale in Ingegneria Chimica e dei Processi Industriali*, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università degli Studi di Padova.
- Volpato S., Artoni R., Santomaso A. C. (2014). Numerical Study on the Behavior of Funnel Flow Silos With and Without Inserts Through a Continuum Hydrodynamic Approach. *Chemical Engineering Research and Design*, **92**, 256-263.
- Williams J. C. (1963). The Segregation of Powders and Granular Materials. *Fuel Society Journal (University of Sheffield)*, **14**, 29-34.

Siti web

<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/11640-digitizing-gra>

(ultimo accesso: 05/02/2015)

http://www.tapcoinc.com/content/product_data/Tapco_catalog_09_p88-94.pdf

(ultimo accesso: 06/02/2015)

Ringraziamenti

In questo cammino che sto compiendo, lungo una strada bella, difficile, ricca di sorprese positive e negative, che è la mia vita, sono finalmente giunto al termine di quest'importante tappa, che è la Laurea Magistrale. Il raggiungimento di questo traguardo è stato possibile non solo ed esclusivamente grazie alle mie forze, ma anche grazie all'aiuto di Dio e delle persone che mi sono state vicine in questo periodo. In queste righe vorrei ringraziarle, scusandomi in anticipo se dimenticherò qualcuno.

Il primo pensiero va ovviamente alla mia famiglia, il cui sostegno è stato fondamentale per raggiungere quest'obiettivo: ringrazio quindi mio papà Tiziano, mia mamma Caterina e mio fratello Michele. Per lo stesso motivo, poi, vorrei ringraziare anche le mie nonne Paola e Cesira, e i miei nonni che da Lassù vegliano su di me: mio nonno Elia, che purtroppo non ho potuto conoscere, e mio nonno Gino, che ci lasciò esattamente 24 anni fa.

Proseguendo, vorrei inoltre ricordare ogni passo che ho compiuto in questa tappa. Partirò dall'ultimo tratto di questo percorso, in cui ho scoperto il mondo dei materiali granulari e di tutto ciò che riguarda questi dal punto di vista fisico e matematico, un mondo che mi ha appassionato e che ha suscitato in me molta curiosità. Se ho avuto l'opportunità di trattare quest'argomento, lo devo al Prof. Andrea Claudio Santomaso e alla proposta di tesi che mi ha rivolto. Lo ringrazio quindi per questo e per avermi seguito in maniera molto attenta, non facendomi mai mancare la sua disponibilità in caso di bisogno, anche per i più piccoli problemi che ho avuto. Sapevo inoltre di poter contare, oltre che sul suo supporto, anche sull'aiuto dell'Ing. Silvia Volpato: grazie a lei ho potuto imparare ad utilizzare il simulatore *COMSOL Multiphysics 4.3*, e grazie a lei ho potuto superare le difficoltà che mi si sono presentate sull'utilizzo del simulatore stesso, soprattutto nel primo periodo della tesi. La ringrazio inoltre per avermi seguito attentamente e per essere sempre stata disponibile a darmi una mano. Dunque, grazie ad entrambi per questa tesi, per i confronti verbali e i dialoghi riguardanti questa (e non solo), e per essere stati molto pazienti con me, anche nei momenti in cui (lo so) sono risultato stressante e problematico, e dei quali mi scuso.

Prima di svolgere questa tesi, però, ho dovuto percorrere tutta la strada che ha portato ad essa, quindi ho dovuto superare le prove che questo Corso di Laurea mi ha presentato. Se sono riuscito a vincere queste sfide, è stato anche grazie ai miei compagni di corso, con i quali mi sono potuto confrontare e scambiare informazioni sul corso stesso, e che mi hanno aiutato nei casi in cui mi sono trovato più in difficoltà. In particolare, ringrazio Nicola, Riccardo, Mattia, Nicola, Francesco, Paolo, Mattia, Andrea e Alberto, nonché le persone con cui ho condiviso per parte del mio periodo di tesi la sala di calcolo, quindi Alberto, Valentina e Matteo, senza i quali la sala è risultata più vuota.

Infine, per tutta la strada che percorro da tempo, della quale la Laurea Magistrale è stata una parte, ringrazio anche la compagnia di amici, scout e non, che mi accoglie e sopporta da anni, e con la quale ho condiviso molti momenti piacevoli che porterò sempre con me.

Grazie a tutti, dunque, anche a quelli che non ho citato in questa lettera ma che sono stati importanti per me in questo percorso: spero che tutte le persone che ho incontrato e tutti gli avvenimenti che ho vissuto mi insegnino sempre qualcosa di buono e mi aiutino a crescere ogni giorno di più. Adesso però è giunta l'ora di proseguire il mio cammino nella mia vita: cercherò di apprezzare le cose belle e non che mi si presenteranno percorrendolo, e cosa mi riserverà sarà comunque una sorpresa che sono curioso di scoprire.

Buona Strada

Davide