

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA  
DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA “GALILEO GALILEI”  
CORSO DI LAUREA IN FISICA

## Teoria Esatta delle Perturbazioni

*Candidato:*  
Riccardo CICCONE

*Relatore:*  
Prof. Luca MARTUCCI

Anno accademico 2016–2017



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Path integral e teoria delle perturbazioni</b>	<b>1</b>
1.1 Integrali sui cammini . . . . .	1
1.2 Teoria perturbativa . . . . .	4
1.3 Istantoni . . . . .	6
<b>2 Teoria degli integrali oscillanti</b>	<b>9</b>
2.1 Metodo steepest descent . . . . .	9
2.2 Decomposizione in Lefschetz Thimble . . . . .	12
<b>3 Espansioni asintotiche di integrali</b>	<b>15</b>
3.1 Serie asintotiche e sommabilità alla Borel . . . . .	15
3.2 Risommabilità alla Borel sui thimble . . . . .	18
3.3 Integrali in più dimensioni . . . . .	20
3.4 Generalizzazione ai path integral . . . . .	21
<b>4 Teoria esatta delle perturbazioni</b>	<b>23</b>
4.1 Limiti della teoria standard delle perturbazioni . . . . .	23
4.2 Caso 1-dimensionale . . . . .	26
4.3 Caso $\infty$ -dimensionale . . . . .	27
<b>5 Applicazioni</b>	<b>29</b>
5.1 Oscillatore anarmonico . . . . .	30
5.2 Doppia buca simmetrica . . . . .	31
5.3 Doppia buca supersimmetrica . . . . .	33
5.4 Oscillatore quartico . . . . .	35
<b>Conclusioni</b>	<b>37</b>
<b>A Teoria di Picard-Lefschetz</b>	<b>39</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>43</b>



# Introduzione

Da quando si dispone di un contesto matematico per la trattazione dei sistemi quantomeccanici è stato evidente il ruolo cruciale della *teoria delle perturbazioni* come strumento d'indagine. L'idea alla base della teoria delle perturbazioni è che un dato sistema  $H$ , tipicamente molto complicato, di cui si vuole conoscere una data osservabile, possa essere considerato come una piccola variazione  $H_0 + \lambda H_1$  di un sistema più semplice  $H_0$  che si riesce a trattare esattamente: i valori delle osservabili del sistema complesso allora saranno piccole variazioni di quelli del problema più facile. La grande versatilità di questo metodo ne ha favorito l'ampio uso, spesso anche in contesti in cui la variazione  $\lambda H_1$  è tutt'altro che piccola rispetto ad  $H_0$ .

Intesa come strumento matematico, però, la teoria delle perturbazioni è un argomento delicato. I risultati che si ottengono con questo metodo sono serie di potenze in un qualche parametro  $\lambda$ , e perchè questi risultati abbiano senso è necessario assicurare la convergenza di queste serie. Ebbene, quello che si trova (si veda ad esempio [8]) è che tipicamente le serie perturbative in Meccanica Quantistica sono al più serie asintotiche con raggio di convergenza nullo: questo significa che i risultati hanno senso, strettamente parlando, solo per  $\lambda = 0$ , oppure per  $\lambda$  piccolo a patto di troncatura la serie perturbativa.

Questo fatto renderebbe completamente ingiustificato l'uso della teoria delle perturbazioni nella gran parte dei casi, a meno di non riuscire a recuperare un risultato finito anche per valori di  $\lambda \neq 0$ . Un metodo per farlo è la cosiddetta *risommazione alla Borel* [12], che consiste nel modificare i coefficienti della serie perturbativa dividendoli per un termine che cresce come  $n!$  in modo da ottenere un risultato convergente, la trasformata di Borel, per poi ricalcolare la serie originale "risommata" tramite un integrale.

Mentre in alcuni casi, come ad esempio per l'oscillatore anarmonico, la risommazione alla Borel è sufficiente, in generale non è garantito che il risultato ottenuto con questo metodo di risommazione corrisponda al valore completo dell'osservabile desiderata, i.e. le serie perturbative in esame potrebbero non essere Borel-risommabili al risultato esatto. Da un punto di vista tecnico, la non risommabilità al risultato esatto è legata al comportamento singolare della trasformata di Borel nel dominio in cui si effettua l'integrale: alternativamente, si potrebbe deformare il cammino d'integrazione per aggirare le singolarità, ma ciò risulterebbe nell'introduzione di un'ambiguità dell'ordine di  $e^{-a/\lambda}$ , tipica dei *fenomeni non perturbativi*, come ad esempio gli istantoni [22], cioè che non possono essere rilevati con un'espansione perturbativa attorno a  $\lambda = 0$ .

Negli ultimi anni, l'approccio teorico prevalente è stato quello della *resurgence* [1, 7], in cui si è cercato di eliminare queste ambiguità andando a ricostruire questi termini non perturbativi in

$\lambda$  come configurazioni provenienti da un'approssimazione semiclassica, cioè come soluzioni non banali delle equazioni del moto nel limite formale  $\hbar \rightarrow 0$ . Un'implementazione sistematica di questo approccio è però resa difficoltosa da diversi fattori: innanzitutto, anche se la risommabilità alla Borel fosse in qualche modo assunta o garantita, la convergenza al risultato esatto richiederebbe la conoscenza di alcune proprietà di regolarità delle funzioni che descrivono l'osservabile in esame, tipicamente difficili da provare; inoltre, e probabilmente il problema principale, l'applicabilità del metodo per valori non piccoli della perturbazione  $\lambda$  è dubbia, proprio perché il risultato proviene da un'espansione semiclassica.

Un approccio differente, più geometrico, si può trovare partendo dalla formulazione della Meccanica Quantistica con il *path integral* [9]. La teoria delle perturbazioni fatta con il formalismo del path integral è una generalizzazione a infinite dimensioni del *metodo steepest descent*, o metodo del punto di sella, per valutare integrali. Se le funzioni coinvolte sono sufficientemente regolari, la *teoria di Picard-Lefschetz* mostra come decomporre il cammino d'integrazione iniziale in una somma di traiettorie steepest descent (chiamate, in inglese, *Lefschetz thimbles*) e permette di classificare in modo rigoroso quali espansioni di punto di sella contribuiscono alla serie perturbativa di una data osservabile. Un'eccellente introduzione alle applicazioni fisiche della teoria di Picard-Lefschetz è stata data da Witten [25].

Una domanda interessante da porsi è sotto quali condizioni si ha che un'unica espansione di punto di sella dà un contributo non nullo, in modo che l'espansione attorno all'unica sella rilevante coincida con la serie perturbativa dell'osservabile. Questo è quello che accade ad esempio nell'oscillatore anarmonico in cui, come abbiamo accennato, la serie perturbativa è Borel-risommabile al risultato esatto. Seguendo i recenti lavori di Serone et al. [16,17], in questa tesi mostreremo come ciò accada solo quando l'azione  $\mathcal{S}[x(\tau)]$  associata al sistema in esame ammetta una sola sella reale  $x_0(\tau)$ . Mostreremo anche che, qualora ciò non fosse verificato, sotto alcune ipotesi riusciremo comunque a mostrare un risultato ben più generale: *tutte le osservabili di un sistema quantistico soggette a un potenziale di legame si possono ricostruire da una singola serie perturbativa*. Per fare ciò avremo bisogno di introdurre una nuova teoria delle perturbazioni, chiamata *teoria esatta delle perturbazioni*. L'obiettivo di questa tesi è di presentare in maniera critica questo nuovo approccio e di applicarlo a diversi sistemi quantomeccanici di interesse.

**Organizzazione dell'elaborato.** Nel primo capitolo viene illustrato il quadro teorico in cui andremo a sviluppare i nostri risultati. Per prima cosa andremo a introdurre il formalismo del path integral in Meccanica Quantistica; mostreremo poi nella sezione successiva un esempio di tecnica perturbativa per ricavare gli autovalori e le autofunzioni dell'energia di un sistema quantomeccanico. Nell'ultima sezione daremo quindi una spiegazione del fenomeno degli istantoni, andando anche ad abbozzare (senza pretesa di completezza) un metodo con cui questi effetti non perturbativi possono essere catturati.

Nel secondo capitolo invece getteremo le basi matematiche necessarie allo studio di alcuni tipi di integrali, che ci sarà utile per successive considerazioni. In particolare, illustreremo il metodo steepest descent per la valutazioni di integrali impropri di funzioni che possono avere una fase rapidamente oscillante, e la decomposizione in Lefschetz thimbles, che permette la scomposi-

zione di un integrale calcolato lungo un cammino qualsiasi in una somma di integrali calcolati lungo i cammini steepest descent della funzione integranda. Questa premessa è fondamentale: possiamo vedere questi integrali in una dimensione  $Z(\lambda)$  come path integral in dimensione zero, con il parametro  $\lambda$  che ha il ruolo di  $\hbar$  dell'approssimazione semiclassica. Un piccolo approfondimento sulla generalizzazione della teoria di Picard-Lefschetz in dimensione infinita è riportato in appendice.

Nel terzo capitolo, dopo aver introdotto la nozione di serie asintotica e il meccanismo di risom-mazione alla Borel, continueremo lo studio degli integrali  $Z(\lambda)$  di cui sopra. La decomposizione in Lefschetz thimble riduce  $Z(\lambda)$  in una somma di integrali su singoli cammini steepest descent: proveremo che l'espansione di punto di sella di questi integrali è sempre Borel-risommabile al risultato esatto, e non c'è alcun bisogno di studiare le proprietà di regolarità dell'integrale come funzione di  $\lambda$ . Questo risultato è importante: quando la decomposizione di  $Z(\lambda)$  in thimble è triviale, la sua espansione di punto di sella è Borel-risommabile al risultato esatto. Generalizzeremo queste considerazioni al caso in dimensione maggiore di uno e poi in dimensione infinita, dove la richiesta di trivialità della decomposizione in thimble coincide con l'esistenza di un'unica sella reale dell'azione euclidea.

Nel quarto capitolo illustreremo le idee alla base della teoria esatta delle perturbazioni. In primo luogo discuteremo i limiti della teoria standard delle perturbazioni anche con l'uso della tecnica di risommazione alla Borel, studiando il comportamento delle serie perturbative dell'oscillatore anarmonico e della doppia buca di potenziale. Spinti da queste considerazioni introduciamo dunque il metodo annunciato nel caso di integrali in dimensione uno. Indipendentemente dalla decomposizione in thimble dell'integrale  $Z(\lambda)$ , è possibile considerare un secondo integrale,  $\hat{Z}(\lambda, \lambda_0)$ , che ha una decomposizione in thimble banale per ogni  $\lambda_0$  fissato e che coincide con  $Z(\lambda)$  per  $\lambda_0 = \lambda$ . In questo modo, l'espansione di  $\hat{Z}(\lambda, \lambda_0)$  in  $\lambda$  è Borel-risommabile al risultato esatto anche quando l'espansione di  $Z(\lambda)$  non lo è. La generalizzazione al caso infinito dimensionale è del tutto analoga: se il potenziale  $V(x; \lambda)$  che compare nell'azione ha più di un punto di sella reale, è possibile aggirare la presunta non risommabilità alla Borel andando a considerare un potenziale alternativo  $\hat{V}(x; \lambda, \lambda_0)$  che ammetta una espansione perturbativa Borel-risommabile al risultato esatto in  $\lambda$  e che coincida con il potenziale originario per  $\lambda_0 = \lambda$ . L'idea è di scegliere  $\hat{V}$  come la somma di un potenziale classico e di una correzione quantistica, in cui la prima ha un unico punto critico: poichè la decomposizione in thimble è controllata solo dall'unico punto di sella del potenziale classico, si ha risommabilità alla Borel al risultato esatto.

Nel quinto e ultimo capitolo riportiamo uno studio numerico di alcuni sistemi quantomeccanici. Mostriamo come in tutti questi sistemi il valore esatto dell'energia dello stato fondamentale, calcolato risolvendo l'equazione agli autovalori di Schrödinger, si possa recuperare senza introdurre correzioni per effetti non perturbativi. Lo stesso varrà anche per le energie dei primi stati eccitati e per le rispettive autofunzioni: lo studio di questi sistemi costituisce la parte più originale di questa tesi.

Concludiamo infine con un breve resoconto dei risultati trovati e accenniamo a loro possibili estensioni.



# Capitolo 1

## Path integral e teoria delle perturbazioni

In questo capitolo introdurremo come prima cosa, senza alcuna pretesa di completezza, il formalismo del *path integral*, l'”integrale sui cammini” di Feynman, per lo studio dei sistemi quantomeccanici [9, 15, 22] ed esporremo poi un approccio alla *teoria delle perturbazioni* in Meccanica Quantistica [2] equivalente al calcolo diagrammatico di Feynman [11]. Infine, nell'ultima sezione, illustreremo brevemente il fenomeno degli *istantoni* [5, 6, 12, 22], effetti che non possono essere catturati dalle usuali tecniche perturbative.

### 1.1 Integrali sui cammini

Per fissare le idee, consideriamo una particella di massa unitaria (priva di spin) che si muove in una dimensione sotto l'azione di un potenziale  $V(x)$ :

$$H = \frac{p^2}{2} + V(x). \quad (1.1)$$

Supponiamo che, sotto l'azione di questo potenziale, la particella passi dal trovarsi nella posizione  $x_i$  all'istante iniziale  $t_i = -t_0/2$  all'essere nella posizione  $x_f$  all'istante finale  $t_f = t_0/2$ . Il *propagatore* associato a questa configurazione è definito come l'ampiezza di transizione dallo stato iniziale allo stato finale:

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \langle x_f | e^{-iHt_0/\hbar} | x_i \rangle. \quad (1.2)$$

Un modo elegante di descrivere l'ampiezza di un tale processo è dovuto a Feynman [9]. La regola generale è che l'ampiezza è uguale alla somma su *tutti* i cammini  $\gamma$  nello spazio delle configurazioni congiungenti la configurazione iniziale  $(-t_0/2, x_i)$  e quella finale  $(t_0/2, x_f)$ , pesati con il fattore  $e^{i\mathcal{S}[\gamma]/\hbar}$ , dove  $\mathcal{S}[\gamma]$  è l'azione classica associata al cammino  $\gamma$ :

$$\mathcal{S}[\gamma] = \int_{-t_0/2}^{t_0/2} L(x, \dot{x}) dt, \quad L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x). \quad (1.3)$$

Formalmente, tale somma si esprime come un integrale:

$$\langle x_f | e^{-iHt_0/\hbar} | x_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}[x(t)] e^{i\mathcal{S}[x(t)]/\hbar}, \quad (1.4)$$

dove la scrittura  $\int \mathcal{D}[x(t)]$  va intesa come la definizione di una misura funzionale sullo spazio delle traiettorie, e l'integrale si intende esteso alle traiettorie  $x(t)$  tali per cui  $x(t_i) = x_i$ ,  $x(t_f) = x_f$ . Il termine  $\mathcal{N}$  è un fattore di normalizzazione e serve a tenere l'integrale finito.

Passando da autostati dell'operatore posizione  $|x\rangle$  ad autostati dell'operatore Hamiltoniano  $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ , si ha che il primo membro dell'equazione (1.4) si può scrivere come una somma di esponenziali oscillanti:

$$\langle x_f | e^{-iHt_0/\hbar} | x_i \rangle = \sum_n e^{-iE_n t_0/\hbar} \langle x_f | n \rangle \langle n | x_i \rangle. \quad (1.5)$$

A questo punto, si effettua un cambio di variabile per trasformare gli esponenziali oscillanti in esponenziali decrescenti: la *rotazione di Wick*  $t \rightarrow -i\tau$ . La teoria che si ottiene effettuando questa sostituzione è detta *Euclidea*, dal fatto che, se si considera uno spaziotempo piatto, si passa da un intervallo di tempo proprio  $ds^2 = -dt^2 + dx_i^2$ , corrispondente a una metrica di Minkowski di segnatura  $(-, +, +, +)$ , all'intervallo  $ds_E^2 = d\tau^2 + dx_i^2$ , corrispondente a una metrica Euclidea.

Conseguentemente, anche l'azione viene modificata:

$$i\mathcal{S}[x(t)] \rightarrow -\mathcal{S}_E[x(\tau)], \quad \mathcal{S}_E[x(\tau)] = \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right] d\tau. \quad (1.6)$$

Poichè non è restrittivo supporre  $\min V(x) = 0$ , si ha  $\mathcal{S}_E \geq 0$  e dunque l'integrando del membro a destra di (1.4) è anch'esso esponenzialmente decrescente. L'equazione (1.4) diventa allora

$$\langle x_f | e^{-H\tau_0/\hbar} | x_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}_E[x(\tau)] e^{-\mathcal{S}_E[x(\tau)]/\hbar}, \quad (1.7)$$

dove l'integrazione è ristretta ai cammini che rispettano le condizioni al contorno  $x(-\tau_0/2) = x_i$ ,  $x(\tau_0/2) = x_f$ . Nel seguito lavoreremo solo nel caso Euclideo e quindi ometteremo il pedice  $E$  per brevità.

L'integrale (1.7) è dominato dalla regione in cui l'azione euclidea  $\mathcal{S}$  ha un minimo. Sia  $X(\tau)$  il corrispondente cammino che minimizza (stazionarizza)  $\mathcal{S}$ , e poniamo  $\mathcal{S}[X(\tau)] = \mathcal{S}_{cl}$ . La notazione non è causale: è facile osservare che la condizione di stazionarietà dell'azione euclidea  $\delta\mathcal{S} = 0$  corrisponde all'equazione del moto classica per una particella sottoposta al potenziale  $-V(x)$ ,

$$\delta\mathcal{S} = 0 \iff \frac{d^2 X}{d\tau^2} = V'(X). \quad (1.8)$$

Siamo dunque interessati a funzioni  $x(\tau)$  che differiscono leggermente da  $X(\tau)$  e che soddisfano le stesse condizioni al contorno. Per comodità, poniamo  $\sqrt{\hbar}\delta x(\tau) = x(\tau) - X(\tau)$ : espandendo l'azione otteniamo

$$\mathcal{S}[X(\tau) + \delta x(\tau)] = \mathcal{S}_{cl} + \frac{\hbar}{2} \int \delta x(\tau_1) \frac{\delta^2 \mathcal{S}[x]}{\delta x(\tau_1) \delta x(\tau_2)} \Big|_{x=X} \delta x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \mathcal{O}(\hbar^{3/2}), \quad (1.9)$$

dove abbiamo tralasciato il termine lineare, poichè nullo. Se  $\mathcal{S}[x]$  è tale da poter considerare l'espansione troncata al secondo ordine come buona approssimazione, possiamo riscrivere l'integrale (1.5) nella forma

$$\langle x_f | e^{-H\tau_0/\hbar} | x_i \rangle = e^{-S_{cl}/\hbar} \mathcal{N} \int \mathcal{D}[\delta x(\tau)] e^{-\frac{1}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{S}[X]}{\delta x^2} \delta x^2 + \mathcal{O}(\hbar^{3/2})}, \quad (1.10)$$

dove la quantità a esponente dell'integrando è una notazione compatta per l'integrale che compare in (1.9). Questo è l'analogo infinito-dimensionale di un integrale gaussiano<sup>1</sup>: calcolandolo, si trova [22]:

$$\langle x_f | e^{-H\tau_0/\hbar} | x_i \rangle = e^{-S_{cl}/\hbar} \mathcal{N} \left[ \det \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(X(\tau)) \right) \right]^{-1/2} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \quad (1.12)$$

A questo punto è necessario calcolare esplicitamente in fattore di normalizzazione  $\mathcal{N}$ : tuttavia di per sè è una quantità mal definita, perchè la quantità finita è il prodotto tra  $\mathcal{N}$  e la misura funzionale  $\mathcal{D}[x]$ . Come convenzione quindi si usa prendere come riferimento un sistema semplice, cioè un oscillatore armonico. Per un oscillatore armonico di pulsazione  $\omega$  si trova [22]:

$$\langle x_f = 0 | e^{-H\tau_0/\hbar} | x_i = 0 \rangle = \mathcal{N} \left[ \det \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) \right]^{-1/2} = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi \sinh(\omega\tau_0)}}, \quad (1.13)$$

quindi l'equazione (1.12) è riscritta più convenientemente come

$$\langle x_f | e^{-H\tau_0/\hbar} | x_i \rangle = e^{-S_{cl}/\hbar} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi \sinh(\omega\tau_0)}} \left\{ \frac{\det \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(X(\tau)) \right)}{\det \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)} \right\}^{-1/2} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \quad (1.14)$$

Tutte queste identità sono di tipo formale giacchè si sta calcolando il determinante di operatori infinito-dimensionali. In ogni caso, stiamo implicitamente assumendo che l'operatore  $\delta^2 \mathcal{S}[X(\tau)]$  non abbia autovalori nulli, cioè che  $X(\tau)$  sia un punto stazionario non degenerare dell'azione.

È interessante osservare cosa rappresenta l'equazione (1.5) nel caso euclideo:

$$\langle x_f | e^{-H\tau_0/\hbar} | x_i \rangle = \sum_n e^{-E_n \tau_0/\hbar} \langle x_f | n \rangle \langle n | x_i \rangle. \quad (1.15)$$

Ponendo  $x_f = x_i$  e integrando riconosciamo la definizione della *funzione di partizione* in Meccanica Statistica:

$$\mathcal{Z}(\beta) = \text{tr} e^{-\beta H} = \int \langle x | e^{-\beta H} | x \rangle dx = \sum_n e^{-\beta E_n} = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}[x(\tau)] e^{-\mathcal{S}[x(\tau)]}, \quad (1.16)$$

<sup>1</sup>L'analogia con caso in dimensione finita è la seguente. Sia  $M$  una matrice  $n \times n$  reale o complessa, di autovalori  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; allora vale

$$\int e^{-\sum_{ij} x_i M_{ij} x_j} d^n \mathbf{x} = \prod_{i=1}^n \sqrt{\pi/\mu_i} = \det(M/\pi)^{-1/2}. \quad (1.11)$$

Nel nostro caso possiamo riassorbire il fattore  $\pi^{n/2}$  nella definizione di  $\mathcal{N}$ , e la matrice  $M$  non è altro che l'operatore differenziale  $\delta^2 \mathcal{S}[X(\tau)] = -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(X(\tau))$ .

dove abbiamo identificato  $\tau_0/\hbar$  con  $\beta = 1/k_B T$  e l'integrazione a ultimo membro è fatta sui cammini periodici:  $\mathcal{P} = \{x : [-\beta/2, +\beta/2] \rightarrow \mathbb{R} \mid x(+\beta/2) = x(-\beta/2)\}$ . In questo spirito, si può definire l'energia libera del sistema come

$$F(\beta) = -\frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}(\beta), \quad (1.17)$$

e chiaramente per grandi  $\beta$  l'energia libera è dominata dall'energia dello stato fondamentale:

$$E_0 = -\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}(\beta). \quad (1.18)$$

Per esempio, per l'oscillatore armonico si trova la nota relazione

$$\mathcal{Z}(\beta) = \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{\hbar\beta\omega}{2}\right)} = \sum_n e^{-\hbar\beta\omega(n+1/2)}. \quad (1.19)$$

## 1.2 Teoria perturbativa

In questa sezione discuteremo le relazioni che ci permetteranno di calcolare l'espansione perturbativa di funzioni d'onda ed energie di sistemi soggetti a un potenziale  $V$ . Questo tipo di teoria perturbativa, sviluppata per la prima volta da Bender, Wu [2, 3] per lo studio dell'oscillatore anarmonico, differisce dalla nota teoria di Feynman del calcolo dei diagrammi (si veda ad esempio [11]), ma i loro risultati coincidono. Infatti, nell'approccio diagrammatico, solo i diagrammi di Feynman con particolari topologie contribuiscono all'espansione perturbativa degli autovalori dell'energia: le relazioni di ricorrenza di Bender, Wu sono un metodo rapido per calcolare la somma dei diagrammi di Feynman che contribuiscono a ciascun autovalore dell'energia [3].

Seguiremo l'approccio usato in [20]. Consideriamo duque un potenziale classico  $V(x)$ , che supporremo rispetti la struttura canonica  $V(x) = v(gx)/g^2$ , dove  $g^2$  è un qualche parametro detto *coupling*. L'unica assunzione che facciamo sul potenziale  $V(x)$  è che esso abbia un minimo non degenero in  $x = 0$  e che sia sufficientemente regolare in un intorno dell'origine. Consideriamo l'equazione di Schrödinger

$$-\frac{1}{2}\psi''(x) + \frac{1}{g^2}v(gx)\psi(x) = \epsilon\psi(x), \quad (1.20)$$

vogliamo trovare la soluzione di questa equazione agli autovalori come espansione perturbativa attorno al minimo  $x = 0$ , non è restrittivo supporre che sia  $v(0) = 0$ . Poniamo innanzitutto

$$\psi(x) = u(x)e^{-\omega x^2/2}, \quad \frac{\tilde{v}(gx)}{g^2} = \frac{v(gx)}{g^2} - \frac{\omega^2 x^2}{2}, \quad (1.21)$$

dove  $\omega^2 = v''(0)$ . In questo modo l'equazione (1.20) diventa

$$-u''(x) + 2\omega x u'(x) + \frac{2}{g^2}\tilde{v}(gx)u(x) = 2\left(\epsilon - \frac{\omega}{2}\right)u(x). \quad (1.22)$$

Facciamo ora le seguenti espansioni formali:

$$u(x) = \sum_{l=0}^{\infty} u_l(x) g^l, \quad \epsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n g^n, \quad (1.23)$$

ed espandiamo il potenziale attorno all'origine:

$$\frac{\tilde{v}(gx)}{g^2} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n g^n x^{n+2}, \quad v_n = \frac{V^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}. \quad (1.24)$$

Inserendo il tutto in (1.22) ed eguagliando le potenze di  $g$  si trova

$$-u_l''(x) + 2\omega x u_l'(x) + 2 \sum_{n=1}^l v_n x^{n+2} u_{l-n}(x) = 2 \sum_{n=0}^l (\epsilon_n - \delta_{n0} \omega/2) u_{l-n}(x). \quad (1.25)$$

Il termine dominante per  $u(x)$  è  $l = 0$ , per il quale si ha

$$-u_0''(x) + 2\omega x u_0'(x) = 2(\epsilon_0 - \omega/2) u_0(x), \quad (1.26)$$

che è l'equazione di Hermite in  $u_0(x)$ , per cui  $u_0(x) = H_\nu(x)$  è il  $\nu$ -esimo polinomio di Hermite e  $\epsilon_0 - \omega/2 = \nu\omega$ , dove  $\nu$  è il numero quantico associato al livello energetico (che consideriamo fissato): all'ordine dominante allora  $\epsilon_0 = \omega(\nu + 1/2)$ , come ci aspetteremmo da un'approssimazione di tipo parabolico.

A questo punto espandiamo  $u_l(x)$  in serie di potenze di  $x$ :

$$u_l(x) = \sum_{k=0}^{K_l} A_l^k x^k, \quad (1.27)$$

dove  $K_l$  è la massima potenza di  $x$  che può apparire all'ordine  $l$ , per la quale vale un limite superiore  $K_l \leq \nu + 3l$  (l'uguaglianza vale se  $v_1 \neq 0$ ). Inserendo questa espressione in (1.25) ed eguagliando le potenze di  $x$  si ottiene

$$-(k+2)(k+1)A_l^{k+2} + 2\omega(k-\nu)A_l^k = 2 \sum_{n=1}^l (\epsilon_n A_{l-n}^k - v_n A_{l-n}^{k-n-2}). \quad (1.28)$$

Quest'ultima equazione può essere risolta ricorsivamente per  $A_l^k$  ed  $\epsilon_l$ . Osserviamo che per  $k = \nu$  si può riscrivere come

$$2\epsilon_l A_0^\nu = -(\nu+2)(\nu+1)A_l^{\nu+2} - 2 \sum_{n=1}^{l-1} \epsilon_n A_{l-n}^\nu + 2 \sum_{n=1}^l v_n A_{l-n}^{\nu-n-2}, \quad (1.29)$$

perciò possiamo determinare i coefficienti  $\epsilon_l$  se conosciamo tutti i coefficienti  $A$  fino all'ordine  $l-1$  e se conosciamo  $A_l^{\nu+2}$ . Scegliamo dunque di porre  $A_0^\nu = 1$ ,  $A_l^\nu = 0$  per ogni  $l > 0$  come normalizzazione. In questo modo, (1.29) diventa

$$\epsilon_l = -\frac{1}{2}(\nu+2)(\nu+1)A_l^{\nu+2} + \sum_{n=1}^l v_n A_n^{\nu-n-2}; \quad (1.30)$$

inoltre, possiamo riscrivere (1.28) come

$$A_l^k = \frac{1}{2\omega(k-\nu)} \left[ (k+2)(k+1)A_l^{k+2} + 2 \sum_{n=1}^{l-1} \epsilon_n A_{l-n}^k - 2 \sum_{n=1}^l v_n A_{l-n}^{k-n-2} \right]. \quad (1.31)$$

Usando (1.30) e (1.31) possiamo trovare tutti i coefficienti  $\epsilon_l$  e  $A_l^k$  ricorsivamente. Per prima cosa calcoliamo i coefficienti  $A_l^k$  per  $k > \nu$  partendo da  $A_l^{K_l}$  e  $A_l^{K_l-1}$ , che sono noti se sono noti tutti i coefficienti fino all'ordine  $l-1$  e ricordando che deve essere  $A_l^{K_l+2} = 0$ ; in particolare siamo interessati a  $A_l^{\nu+2}$ . Noto quest'ultimo possiamo calcolare  $\epsilon_l$ , e quindi possiamo calcolare i rimanenti  $A_l^k$  per  $k < \nu$ . In questo modo abbiamo un'espressione perturbativa delle energie e delle rispettive autofunzioni:

$$\epsilon^{(\nu)} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n^{(\nu)} g^n, \quad \psi^{(\nu)}(x) = e^{-\frac{\omega x^2}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\nu+3l} (A_l^{k(\nu)} x^k) g^l. \quad (1.32)$$

Notare che in questo contesto abbiamo usato variabili canoniche, in cui la costante d'accoppiamento  $g^2$  gioca il ruolo di  $\hbar$ . Questo significa che l'espansione perturbativa in serie di potenze di  $g$  corrisponde esattamente all'espansione in serie di potenze di  $\sqrt{\hbar}$  dell'approssimazione semiclassica. Con questo accorgimento, non c'è necessità di distinguere  $g^2$  da  $\hbar$  e nel seguito chiameremo semplicemente questo parametro  $\lambda$ .

### 1.3 Istantoni

In Meccanica Quantistica, con fenomeno non perturbativo si intende un effetto che non si può rilevare attraverso la teoria delle perturbazioni. Un tipico esempio di questi fenomeni è dato dagli *istantoni*, cioè da soluzioni non banali delle equazioni del moto classiche  $\delta\mathcal{S}[X(\tau)] = 0$ . Se  $\lambda$  è la costante di accoppiamento della teoria, cioè il parametro di espansione perturbativa (ad esempio, il  $g^2$  della sezione precedente), questi effetti presentano una dipendenza da  $\lambda$  del tipo  $e^{-A/\lambda}$ . Osserviamo che se questa correzione è effettivamente piccola se  $\lambda$  è piccolo e positivo, ma non è possibile catturarla con la teoria perturbativa, poichè la sua espansione in serie di potenze attorno alla singolarità essenziale  $\lambda = 0$  è identicamente nulla.

Gli istantoni sono responsabili di uno degli effetti più importanti in Meccanica Quantistica: l'effetto tunnel attraverso una barriera di potenziale. Questo effetto cambia qualitativamente la struttura del vuoto quantistico.

A titolo di esempio, diamo un abbozzo di come si riescano a ricavare i contributi istantonici in un potenziale del tipo doppia buca simmetrica. Consideriamo il potenziale

$$V(x) = \frac{\lambda}{2} \left( x^2 - \frac{1}{4\lambda} \right)^2, \quad (1.33)$$

dove  $\lambda = g^2$  è detta costante di accoppiamento, o *coupling*. Con la teoria delle perturbazioni si troverebbero due stati fondamentali degeneri, localizzati vicino ai minimi  $x = \pm\sqrt{1/(4\lambda)}$ , di energia [12]

$$E_0(\lambda) = \frac{1}{2} - \lambda - \frac{9}{2}\lambda^2 - \frac{89}{2}\lambda^3 - \frac{5013}{8}\lambda^4 + \dots \quad (1.34)$$



Figura 1.1: Il potenziale  $V(x)$  della doppia buca simmetrica (1.33), a sinistra, e il potenziale invertito da inserire nell'espressione dell'azione Euclidea, a destra.

In particolare, il valore di aspettazione della posizione negli stati fondamentali degeneri non sarebbe zero, ma piuttosto  $\langle x \rangle_0 = \pm \sqrt{1/(4\lambda)}(1 + \mathcal{O}(\lambda))$  a seconda di dove si effettua l'espansione, rompendo la simmetria sotto parità del sistema. In realtà non può essere così: in effetti ora mostreremo che non c'è degenerazione,

$$E_0(\lambda) = \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\lambda) - \frac{e^{-1/6\lambda}}{\sqrt{\pi\lambda}}(1 + \mathcal{O}(\lambda)), \quad E_1(\lambda) = \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\lambda) + \frac{e^{-1/6\lambda}}{\sqrt{\pi\lambda}}(1 + \mathcal{O}(\lambda)). \quad (1.35)$$

Come abbiamo detto, l'Hamiltoniana del sistema è invariante sotto parità, dunque l'Hamiltoniano  $H$  e l'operatore parità  $P$  ammettono un sistema completo di autostati comuni:

$$H\psi_{\epsilon,N}(x) = E_{\epsilon,N}(\lambda)\psi_{\epsilon,N}(x), \quad P\psi_{\epsilon,N}(x) = \epsilon\psi_{\epsilon,N}(x), \quad (1.36)$$

dove  $\epsilon = \pm 1$  è la parità e  $N$  è il numero quantico assegnato a un dato stato richiedendo che sia, per  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $E_{\epsilon,N}(\lambda) = N + 1/2 + \mathcal{O}(\lambda)$ , i.e. per  $\lambda \rightarrow 0$  si riottiene l' $N$ -esimo livello energetico dell'oscillatore armonico. Per separare gli autovalori di  $H$  corrispondenti a stati di simmetria diversa possiamo considerare la funzione di partizione "antisimmetrica"

$$\mathcal{Z}_a(\beta) = \text{tr} \left( P e^{-\beta H} \right) = \int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}[x(\tau)] e^{-\mathcal{S}[x(\tau)]}, \quad (1.37)$$

dove  $\mathcal{A} = \{x : [-\beta/2, +\beta/2] \rightarrow \mathbb{R} \mid x(+\beta/2) = -x(-\beta/2)\}$ , e  $P$  è l'operatore di parità. Per  $\beta \rightarrow \infty$  si ha

$$\mathcal{Z}_a(\beta) \approx e^{-\beta E_{+,0}} - e^{-\beta E_{-,0}} \approx -\beta e^{-\beta/2} (E_{+,0} - E_{-,0}). \quad (1.38)$$

Stiamo dunque considerando tutte le soluzioni delle equazioni del moto classiche (a potenziale invertito) che connettono i punti  $x = \pm \sqrt{1/(4\lambda)}$  nel limite  $\beta \rightarrow \infty$ . Per costruzione, queste soluzioni devono avere energia zero: allora

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} - V(x) = 0 \implies \dot{x} = -\sqrt{\lambda} \left( x^2 - \frac{1}{4\lambda} \right) \implies x_{\pm}^{\tau_0}(\tau) = \pm \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \tanh \left( \frac{\tau - \tau_0}{2} \right). \quad (1.39)$$

Le soluzioni  $x_{\pm}^{\tau_0}$  sono chiamate rispettivamente *(anti)istantoni* di centro  $\tau_0$ . Inoltre, si ha

$$\mathcal{S}_0 \equiv \mathcal{S}[x_{\pm}^{\tau_0}(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\dot{x}_{\pm}^{\tau_0})^2 d\tau = \int_{-\sqrt{1/(4\lambda)}}^{+\sqrt{1/(4\lambda)}} -\sqrt{\lambda} \left( x^2 - \frac{1}{4\lambda} \right) dx = \frac{1}{6\lambda}, \quad (1.40)$$

$$M \equiv \delta^2 \mathcal{S}[x_{\pm}^{\tau_0}(\tau)] = -\frac{d^2}{d\tau^2} + 1 - \frac{3}{2 \cosh^2((\tau - \tau_0)/2)}. \quad (1.41)$$

Quest'ultimo fa parte di una famiglia di operatori, i *potenziali di Pöschl-Teller*  $M_{m,l}$ :

$$M_{m,l} = -\frac{d^2}{d\tau^2} + m^2 - \frac{l(l+1)}{\cosh^2 \tau}, \quad M = \frac{1}{4} M_{2,2}, \quad (1.42)$$

dopo il riscaldamento  $\tau \rightarrow (\tau - \tau_0)/2$ . Lo spettro degli operatori  $M_{m,l}$  è noto: in particolare,  $M$  ha un autovalore nullo, di autofunzione

$$x_0(\tau) = \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{1}{\cosh^2((\tau - \tau_0)/2)}. \quad (1.43)$$

Il fatto che  $M$  abbia un autovalore nullo implica che calcolando  $\mathcal{Z}_a(\beta)$  tramite l'espressione (1.14) con  $x_i = \pm \sqrt{1/(4\lambda)} = -x_f$  sembrerebbe che si ottenga un'espressione priva di significato. La presenza di un autovalore nullo però non deve sorprendere: l'azione è invariante per trasformazioni nello spazio funzionale che corrispondono a traslazioni di  $\tau_0$ . Si può mostrare che si ottiene [12]

$$\mathcal{Z}_a(\beta) \approx 2e^{-S_0} \sqrt{\frac{1}{2\pi \sinh \beta}} \left[ \frac{\det' M}{\det \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + 1 \right)} \right]^{-1/2} \frac{\beta \sqrt{\mathcal{S}_0}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (1.44)$$

dove per  $\det' M$  si intende il prodotto degli autovalori non nulli di  $M$  e il fattore 2 viene dal fatto che le soluzioni  $x_{\pm}^{\tau_0}(\tau)$  danno lo stesso contributo. Il fattore  $\beta \sqrt{\mathcal{S}_0/2\pi}$  viene dalla integrazione rispetto alla variabile  $\tau_0 \in [-\beta/2; +\beta/2]$ , in particolare  $\sqrt{\mathcal{S}_0}$  viene dal Jacobiano del cambio di variabile che lega  $\tau_0$  alla "direzione"  $\delta x^{\tau_0}$  lungo cui l'azione è costante per traslazioni di  $\tau_0$ . Il rapporto tra i determinanti si può calcolare esattamente sfruttando dei risultati noti per i potenziali di Pöschl-Teller [12], ottenendo  $1/12$ . Ricordando (1.38) si ha allora, a conti fatti,

$$E_{+,0}(\lambda) - E_{-,0}(\lambda) = -\frac{2}{\sqrt{\pi\lambda}} e^{-1/6\lambda} (1 + \mathcal{O}(\lambda)), \quad (1.45)$$

cioè lo *splitting* tra lo stato fondamentale e il primo stato eccitato è di tipo non perturbativo, e lo stato fondamentale corrisponde a una funzione d'onda simmetrica:

$$E_{+,0}(\lambda) = E_0(\lambda), \quad E_{-,0}(\lambda) = E_1(\lambda). \quad (1.46)$$

Come abbiamo appena visto, recuperare esattamente i contributi non perturbativi è decisamente non banale. Tuttavia, come si propone di illustrare questa tesi, questo procedimento può essere non necessario in un buon numero di casi, perchè lo spettro esatto in energia (i.e. completo dei contributi non perturbativi) associato a un potenziale si potrà recuperare a partire da una espansione perturbativa opportunamente modificata.

## Capitolo 2

# Teoria degli integrali oscillanti

Una volta adottato il formalismo del path integral per descrivere un sistema fisico, per conoscerne le osservabili di interesse è necessario valutare questi integrali. In questo capitolo introduciamo dunque alcuni strumenti matematici utili per il calcolo di certi tipi di integrali. In particolare, siamo interessati a calcolare integrali impropri di funzioni che possono avere una fase rapidamente oscillante, la quale rende ostica una discussione della convergenza e la valutazione numerica dell'integrale stesso. Tuttavia, vedremo come grazie al teorema di Cauchy una appropriata deformazione del cammino d'integrazione nel piano complesso (la *decomposizione in Lefschetz thimble* [1, 21, 25] e la conseguente espansione di punto di sella, o *steepest descent* [18]) renda immediata la convergenza dell'integrale e ne permetta la valutazione come sviluppo formale in un qualche parametro  $\lambda$ .

### 2.1 Metodo steepest descent

Consideriamo un integrale della forma

$$Z(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{\mathcal{C}} g(z) e^{-f(z)/\lambda} dz, \quad (2.1)$$

ove  $\mathcal{C}$  è un qualche cammino in  $\mathbb{C}$  (ad esempio, l'asse reale) e  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ; assumeremo che le funzioni  $f$  e  $g$ , in generale a valori complessi, siano sufficientemente regolari e che la convergenza dell'integrale per valori di  $\lambda$  positivi sia determinata solo da  $f(z)$ . In generale  $g(z)$  può presentare anche una dipendenza sufficientemente regolare da  $\lambda$ . Per semplicità supporremo inoltre che  $f(z), g(z)$  siano funzioni intere di  $z$ . Ci si chiede quale sia il comportamento di  $Z(\lambda)$  per  $\lambda \rightarrow 0^+$ .

Il metodo steepest descent, che descriviamo di seguito, è lo strumento adatto per rispondere a questa domanda. Scriviamo  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , con  $u, v$  funzioni reali di  $z = x + iy$ : ci aspettiamo che l'integrale sia dominato dai punti in cui  $u$  è massima, e inoltre richiediamo che  $v$  sia stazionaria in modo che i contributi oscillanti non tendano a cancellarsi. Quindi stiamo richiedendo  $f'(z) = 0$ : come conseguenza delle condizioni di Cauchy-Riemann, gli unici punti stazionari possibili per  $f$  o per  $\text{Re } f$  sono punti di sella.

Prima di proseguire, notiamo che in ogni punto del dominio in cui la derivata  $f'(z)$  non è nulla esiste una direzione lungo la quale  $u(x, y)$  varia più rapidamente: questa direzione è quella del

vettore  $\nabla u(x, y)$ , e il modulo della derivata presa in questa direzione è massimo. Sfruttando le condizioni di Cauchy-Riemann, è facile notare che  $\nabla u(x, y)$  definisce proprio la direzione tangente al luogo dei punti con  $\text{Im}(f(z)) = \text{cost.}$ : dunque la direzione in cui  $u$  varia più rapidamente coincide con la direzione in cui  $v$  non varia.

Analizziamo più nel dettaglio quello che accade nell'intorno di un punto di sella  $z_0$ . Nell'intorno di tale punto sarà

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+p)}(z_0)}{(n+p)!} (z - z_0)^n, \quad p \geq 2. \quad (2.2)$$

Ponendo

$$f^{(n+p)}(z_0) = r_n e^{i\beta_n}, \quad z - z_0 = \rho e^{i\omega} \quad (2.3)$$

ed eguagliando a zero le parti reale ed immaginaria di (2.2), otteniamo per le curve  $u(x, y) = \text{cost.}$  e  $v(x, y) = \text{cost.}$  rispettivamente le equazioni

$$\text{Re}[f(z) - f(z_0)] = \Phi_1(\rho, \omega) = r_0 \cos(\beta_0 + p\omega) + r_1 \rho \cos[\beta_1 + (p+1)\omega] + \dots = 0, \quad (2.4)$$

$$\text{Im}[f(z) - f(z_0)] = \Phi_2(\rho, \omega) = r_0 \sin(\beta_0 + p\omega) + r_1 \rho \sin[\beta_1 + (p+1)\omega] + \dots = 0. \quad (2.5)$$

L'equazione (2.4) per  $\rho \rightarrow 0$  diventa semplicemente

$$\cos(\beta_0 + p\omega) = 0 \implies \omega_m = -\frac{\beta_0}{p} + \frac{2m+1}{2p}\pi, \quad m = 0, 1, \dots, 2p-1.$$

Poichè  $\frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega}(0, \omega_m) \neq 0$ , per il teorema della funzione implicita l'equazione (2.4) ha  $2p$  soluzioni in  $\omega$ : ci sono quindi  $2p$  curve uscenti da  $z_0$ , o analogamente  $p$  curve passanti per  $z_0$ , lungo cui  $\Phi_1 = 0$ ; esse dividono l'intorno di  $z_0$  in  $2p$  settori di uguale angolo al vertice, in cui si ha alternativamente  $\Phi_1 < 0$  e  $\Phi_1 > 0$ .

Con lo stesso ragionamento per l'equazione (2.5) si determinano le  $p$  curve passanti per  $z_0$  lungo cui  $\Phi_2 = 0$ :

$$\sin(\beta_0 + p\omega) = 0 \implies \omega_m = -\frac{\beta_0}{p} + \frac{m}{p}\pi, \quad m = 0, 1, \dots, 2p-1.$$

Queste ultime curve, per quanto detto, definiscono i cammini lungo cui  $u(x, y)$  ha variazione massima, e il segno della variazione è dato dal segno di  $\Phi_1$ . I cammini lungo cui  $\Phi_2 = 0$ ,  $\Phi_1 < 0$  sono detti cammini di *steepest ascent*, mentre i cammini per cui  $\Phi_2 = 0$ ,  $\Phi_1 > 0$  sono chiamati cammini di *steepest descent*.

L'idea alla base del metodo *steepest descent* (detto anche metodo del punto di sella) è quella di applicare il teorema di Cauchy per deformare  $\mathcal{C}$  in un cammino *steepest descent*  $\mathcal{C}'$  per il punto di sella  $z_0$  che rende massima  $u(z)$ : questo darà una stima del termine dominante dell'integrale. Supponiamo dunque che si possa effettuare tale deformazione. Poichè il nuovo cammino  $\mathcal{C}'$  è di *steepest descent*, per  $z \in \mathcal{C}'$  si può scrivere

$$f(z) - f(z_0) = w, \quad w \in \mathbb{R}_+. \quad (2.6)$$

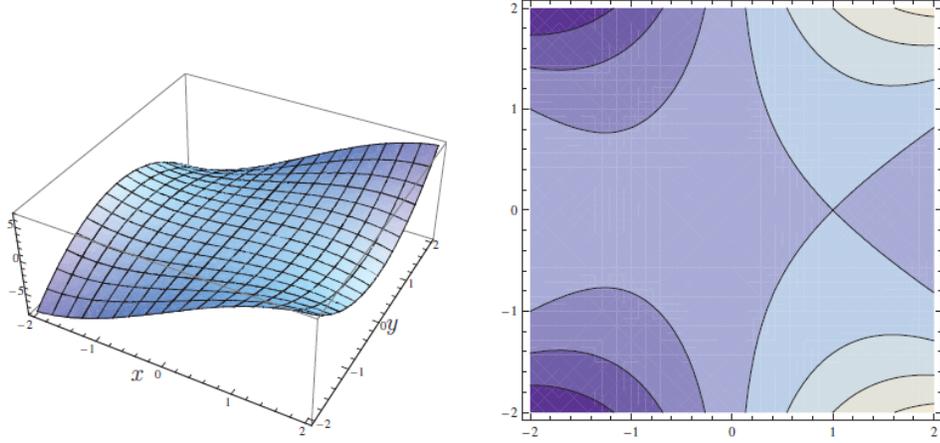


Figura 2.1: Grafico e curve di livello per la funzione  $u(x, y) = \operatorname{Re}(z - z^3/3) = u(1, 0)$ . Il cammino di steepest descent è l'asse reale  $y = 0$ .

Invertendo tale relazione, si trovano  $2p$  possibili curve  $z = z_{\pm}(w)$  uscenti dal punto  $z = z_0$ , ma solo due, che indichiamo con  $z_{\pm}(w)$ , sono relative al cammino  $\mathcal{C}'$ . Detto  $\mathcal{C}'_{\pm}$  il cammino descritto da tali curve, e supponendo che  $\mathcal{C}$  sia orientata in modo da poter scrivere  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}'_+ - \mathcal{C}'_-$ , possiamo riscrivere  $Z(\lambda)$  come

$$Z(\lambda) = e^{-f(z_0)/\lambda} \left\{ \int_{z_+(w) \in \mathcal{C}'_+} g(z_+(w)) e^{-w/\lambda} \frac{dz_+}{dw} dw - \int_{z_-(w) \in \mathcal{C}'_-} g(z_-(w)) e^{-w/\lambda} \frac{dz_-}{dw} dw \right\}. \quad (2.7)$$

A questo punto si espandono le quantità  $g(z_{\pm}(w)) \frac{dz_{\pm}}{dw}$  in  $w$  e si svolgono gli integrali, in modo da ottenere un risultato che si possa esprimere tramite una serie di potenze di  $\lambda$  (eventualmente con termini esponenziali in  $1/\lambda$ ); solitamente comunque è sufficiente conoscere gli andamenti dominanti. Ad esempio, per  $p = 2$  e nel caso in cui  $g(z_0) \neq 0$ , si ha

$$Z(\lambda) = i\sqrt{2\pi}g(z_0)e^{-f(z_0)/\lambda} e^{\frac{i}{2} \arg f''(z_0)} |f''(z_0)|^{-1/2} [1 + \mathcal{O}(\lambda)]. \quad (2.8)$$

Concludiamo con due importanti osservazioni. In primo luogo, se esplicitassimo i termini  $\mathcal{O}(\lambda)$  sotto forma di serie di potenze nulla ci assicurerebbe la convergenza di tale serie: torneremo su questo punto nel capitolo 3. Inoltre, nella nostra trattazione abbiamo tacitamente assunto che l'espansione dell'integrale dipenda da una sola sella: in generale non è affatto così. Se ci sono più selle bisognerà tenere conto dei contributi di ciascuna di esse. In certi casi è anche possibile che il cammino steepest descent uscente da una sella  $z_{\sigma}$  termini a sua volta su un'altra sella  $z_{\tau}$ , o addirittura vi possono essere situazioni in cui non tutte le selle contribuiscono all'espansione asintotica dell'integrale. Lo strumento geometrico ideale per studiare in un ambito più generale questi fenomeni è la teoria di Picard-Lefschetz.

## 2.2 Decomposizione in Lefschetz Thimble

Consideriamo nuovamente un integrale della forma (2.1), dove però poniamo  $\mathcal{C} = \mathbb{R}$ :

$$Z(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-f(x)/\lambda} dx. \quad (2.9)$$

Questo tipo di integrali è il prototipo dei path integrals che si incontrano in Meccanica Quantistica, dove  $f(x)$  gioca il ruolo dell'azione e  $g(x)$  rappresenta l'osservabile che siamo interessati a studiare. Facciamo su  $f(z)$  e  $g(z)$ , estensioni analitiche di  $f(x)$  e  $g(x)$ , le stesse assunzioni fatte nella sezione precedente.

Poichè  $f(z)$  in generale avrà diversi punti di sella, e ogni punto di sella avrà la sua espansione perturbativa, il risultato esatto per  $Z(\lambda)$  si ottiene da una combinazione non banale dei vari contributi di ciascuna sella, opportunamente risommati. In questa sezione mostreremo come combinare i singoli contributi, mentre una trattazione più ampia sulle applicazioni della teoria di Picard-Lefschetz può essere trovata in Appendice.

Indichiamo con  $z_\sigma$  i punti di sella di  $f(z)$ :  $f'(z_\sigma) = 0$ . Purchè i punti di sella  $z_\sigma$  siano isolati e non degeneri, cioè  $f''(z_\sigma) \neq 0$ , il cammino di steepest descent passante per  $z_\sigma$  è determinato dall'immagine di una soluzione  $z(t)$  delle equazioni

$$\frac{dz}{dt} = \eta \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{d\bar{z}}{dt} = \eta \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \eta = \pm 1, \quad (2.10)$$

dove abbiamo posto  $F(z) = -f(z)/\lambda$  e  $t$  è un parametro reale. Poichè la soluzione  $z(t) \equiv z_\sigma$  è di equilibrio per questo sistema, una soluzione non costante può raggiungere  $z_\sigma$  solo per  $t \rightarrow \pm\infty$ . Inoltre, lungo  $z(t)$  si ha

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dt} = 2\eta \left| \frac{\partial F}{\partial z} \right|^2. \quad (2.11)$$

Notiamo che  $dF/dt$  è una quantità reale, dunque lungo  $z(t)$  si ha  $\text{Im } F(z) = \text{cost.}$ , e il segno è dato da  $\eta$ . Le soluzioni delle equazioni (2.10) per  $\eta = -1$  e per  $\eta = 1$  sono chiamate rispettivamente flusso discendente, indicato con  $\mathcal{J}_\sigma$  e flusso ascendente, indicato con  $\mathcal{K}_\sigma$ , dal fatto che  $\text{Re } F$  è monotona decrescente e crescente nei due casi. Da questa costruzione è chiaro che  $\mathcal{J}_\sigma$  coincide con il cammino steepest descent passante per  $z_\sigma$ , e quando tale cammino è tale per cui  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \text{Re } F = -\infty$  viene chiamato *Lefschetz thimble*. Viceversa, quando il cammino steepest descent termina su un altro punto di sella  $z_\tau$ , esso tipicamente si divide nei due rami di  $\mathcal{J}_\tau$ . In questo caso si dice che gli integrali sono su una *linea di Stokes* e bisogna analizzare i singoli casi.

Se non ci sono singolarità, il cammino d'integrazione (qui l'asse reale  $\mathbb{R}$ ) può essere deformato in una combinazione  $\mathcal{C}$  di cammini steepest descent  $\mathcal{J}_\sigma$  mantenendo l'integrale (2.9) finito:

$$\mathcal{C} = \sum_{\sigma} \mathbf{n}_\sigma \mathcal{J}_\sigma. \quad (2.12)$$

Il calcolo dei coefficienti  $\mathbf{n}_\sigma$  è in generale complicato. Se  $\mathcal{J}_\sigma$  è un thimble passante per la sella  $z_\sigma$ , vale la relazione

$$\mathbf{n}_\sigma = \langle \mathbb{R}, \mathcal{K}_\sigma \rangle \in \mathbb{Z}, \quad (2.13)$$

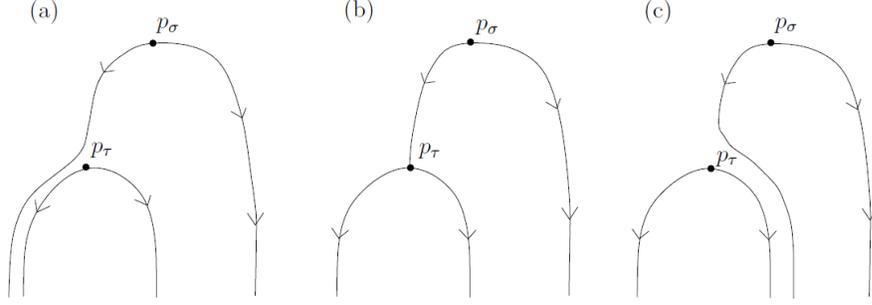


Figura 2.2: Rappresentazione del comportamento dei flussi discendenti  $\mathcal{J}_\sigma$  e  $\mathcal{J}_\tau$  in prossimità di una linea di Stokes. Mentre  $\mathcal{J}_\tau$  non cambia attraversando la linea di Stokes,  $\mathcal{J}_\sigma$  è discontinuo tra (a) e (c). Quando l'integrale è sulla linea di Stokes (b) si ha  $\mathcal{J}_\sigma = \mathcal{K}_\tau$  [25].

dove  $\langle \mathbb{R}, \mathcal{K}_\sigma \rangle$  denota il prodotto d'intersezione tra il cammino originale  $\mathbb{R}$  e il flusso ascendente  $\mathcal{K}_\sigma$ . Ricordiamo che il prodotto d'intersezione tra due cammini è definito in modo che  $\mathcal{J}_\sigma$  e  $\mathcal{K}_\sigma$  siano i duali l'uno dell'altro:

$$\langle \mathcal{J}_\sigma, \mathcal{K}_\tau \rangle = \delta_{\sigma\tau}. \quad (2.14)$$

Con questa modifica, l'integrale (2.9) viene ridotto a una somma di integrali lungo i thimble  $\mathcal{J}_\sigma$ :

$$Z(\lambda) = \sum_{\sigma} \mathbf{n}_{\sigma} Z_{\sigma}(\lambda), \quad Z_{\sigma}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{\mathcal{J}_{\sigma}} g(z) e^{-f(z)/\lambda} dz. \quad (2.15)$$

Poichè è possibile che per qualche sella si abbia  $\mathbf{n}_{\sigma} = 0$ , non è detto che sia necessario deformare il cammino d'integrazione in modo da passare attraverso tutte le selle di  $f$ : solo i punti di sella con  $\mathbf{n}_{\sigma} \neq 0$  contribuiscono all'integrale.

Se i flussi connettono due punti di sella  $z_{\sigma}$  e  $z_{\tau}$ , si ha  $\mathcal{J}_{\sigma} = \mathcal{K}_{\tau}$  e l'intersezione  $\langle \mathcal{J}_{\sigma}, \mathcal{K}_{\tau} \rangle$  non è ben definita. Un modo per aggirare questa difficoltà è di ammettere che  $\lambda$  abbia una parte immaginaria "piccola": in questo modo, i flussi (che dipendono implicitamente da  $\lambda$  tramite  $F$ ) vengono leggermente deviati e  $\mathcal{J}_{\sigma}$  raggiunge effettivamente l'infinito. L'integrale di partenza si recupera poi nel limite  $\text{Im } \lambda \rightarrow 0$ : è però possibile che alcuni dei  $\mathbf{n}_{\sigma}$  siano discontinui e che quindi la decomposizione (2.12) sia differente nei limiti  $\text{Im } \lambda \rightarrow 0^{\pm}$ ; in ogni caso si ritrova però la stessa espressione di  $Z(\lambda)$ . Questo ad esempio accade quando l'integrale si trova su una linea di Stokes.



## Capitolo 3

# Espansioni asintotiche di integrali

Nello scorso capitolo abbiamo visto come valutare certi integrali oscillanti scrivendone i risultati come serie formali in un qualche parametro  $\lambda$ , ma tipicamente queste ultime non saranno convergenti se intese come serie di potenze. Nella prima sezione introdurremo il concetto di *serie asintotica*, [13] a cui appartengono questo tipo di serie formali, e discuteremo le condizioni sotto le quali una serie asintotica identifica univocamente una funzione analitica in un intorno dell'origine, tramite il processo di *risommazione alla Borel* [12]. Nelle sezioni successive vedremo come questo strumento si possa applicare agli integrali visti nel capitolo precedente, e ne discuteremo la generalizzazione al caso dei path integral [17].

### 3.1 Serie asintotiche e sommabilità alla Borel

Come detto, gli integrali  $Z_\sigma(\lambda)$  in (2.15) possono essere calcolati con un'espansione di punto di sella, che però in generale dà origine a serie di potenze con raggio di convergenza nullo. In questa sezione introdurremo le definizioni e gli strumenti matematici necessari per trattare tale tipo di serie.

Una espansione in serie associata a una funzione  $Z(\lambda)$  è detta *asintotica* (nel senso di Poincarè), e scriviamo  $Z(\lambda) \sim \sum_n Z_n \lambda^n$ , se, per ogni  $N \in \mathbb{N}$  fissato,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-N} \left[ Z(\lambda) - \sum_{n=0}^N Z_n \lambda^n \right] = 0. \quad (3.1)$$

Questa definizione non dice nulla sulla convergenza di  $\sum_n Z_n \lambda^n$ . L'espansione asintotica di una funzione  $Z(\lambda)$ , se esiste, è unica; viceversa una data espansione asintotica non definisce univocamente la funzione  $Z(\lambda)$ : ad esempio,  $Z(\lambda)$  e  $e^{-\alpha/\lambda} Z(\lambda)$  ammettono la stessa espansione. In modo simile, una espansione in serie si dice *asintotica* (in senso forte, o *Gevrey-1*), se per ogni  $N \in \mathbb{N}$  fissato si ha

$$\left| Z(\lambda) - \sum_{n=0}^N Z_n \lambda^n \right| \leq c A^N N! |\lambda|^{N+1}, \quad (3.2)$$

per qualche costante  $c, A$ . Per le serie asintotiche Gevrey-1 valgono considerazioni analoghe a quelle fatte in precedenza, ma possiamo dire anche qualcosa in più. Dalla maggiorazione (3.2)

possiamo trovare il valore di  $N$  che minimizza la differenza  $\Delta$  tra  $Z(\lambda)$  e la sua espansione a  $\lambda$  fissato: non è difficile trovare che deve essere  $N \approx 1/(A\lambda)^1$ , da cui si avrà  $\Delta \approx e^{-\frac{1}{A\lambda}}$ . La forma funzionale di  $\Delta$  è proprio quella che corrisponde a un fenomeno non perturbativo in Meccanica Quantistica, e dunque troncatura semplicemente la somma non dà nessuna informazione su questi effetti.

Si può fare di meglio: sotto certe ipotesi si può ricostruire  $Z(\lambda)$  nota la sua espansione asintotica tramite la *risommazione alla Borel*. Consideriamo una serie  $\sum_n Z_n \lambda^n$  i cui coefficienti si comportino come  $Z_n \sim cA^n n!$  per  $n$  abbastanza grande: la sua *trasformata di Borel* è definita come

$$\mathcal{B}Z(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n}{n!} \lambda^n. \quad (3.3)$$

Per costruzione, la trasformata di Borel  $\mathcal{B}Z(\lambda)$  è una serie di potenze di raggio di convergenza  $\rho = 1/A$  e definisce una funzione analitica per  $|\lambda| < 1/A$ . Tipicamente presenterà una qualche singolarità nel bordo di questa regione  $|\lambda| = 1/A$ , come un polo o un punto di ramificazione, ma spesso potrà essere estesa analiticamente a un dominio più grande nel piano complesso.

Supponiamo allora che la trasformata di Borel  $\mathcal{B}Z(\lambda)$  ammetta una estensione analitica in un intorno del semiasse reale positivo. In tal caso, l'integrale

$$Z_B(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \mathcal{B}Z(\lambda t) dt, \quad (3.4)$$

che non è altro che la trasformata di Laplace di  $\mathcal{B}Z(\lambda)$  a meno di un riscalamento, definisce una funzione di  $\lambda$  con la stessa espansione asintotica di  $Z(\lambda)$  e la serie  $\sum_n Z_n \lambda^n$  si dice essere *Borel-risommabile*. Tuttavia, poichè funzioni diverse possono avere la stessa espansione asintotica, è necessario assumere certe proprietà di  $Z(\lambda)$  per provare che si abbia effettivamente  $Z_B(\lambda) = Z(\lambda)^2$ . La dimostrazione di queste proprietà partendo solo dalla espansione asintotica è tipicamente molto difficile; d'altra parte, se si riesce a scrivere  $Z(\lambda)$  direttamente nella forma integrale (3.4), allora la regolarità nel semiasse reale positivo di  $\mathcal{B}Z(\lambda)$  è sufficiente a mostrare che  $Z_B(\lambda) = Z(\lambda)$ . In generale, se si ha  $Z_B(\lambda) = Z(\lambda)$ , diciamo che la serie  $\sum_n Z_n \lambda^n$  è *Borel-risommabile al risultato esatto*.

Per i nostri scopi useremo una generalizzazione della trasformata di Borel, dovuta a Le Roy, ottenuta ponendo

$$\mathcal{B}_b Z(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n}{\Gamma(n+1+b)} \lambda^n, \quad (3.5)$$

dove  $b > -1$  è un parametro reale. Con questa modifica,  $Z_B(\lambda)$  diventa

$$Z_B(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^b \mathcal{B}_b Z(\lambda t) dt. \quad (3.6)$$

<sup>1</sup>Poichè fermandosi all'ordine  $N$  si ha  $\Delta \sim Z_N \lambda^N$ , si ricava  $\ln \Delta \sim N(\ln(NA\lambda) - 1)$ ; imponendo  $\frac{\partial}{\partial N} \ln \Delta = 0$  si trova  $N \approx 1/(A\lambda)$ .

<sup>2</sup>In particolare, è necessario mostrare che  $\mathcal{B}Z(t)$  definisca una funzione analitica in una qualche striscia  $S_\sigma = \{t \mid \text{dist}(t, \mathbb{R}_+) < 1/\sigma\}$  e che ivi valga uniformemente una maggiorazione del tipo  $|\mathcal{B}Z(t)| \leq K \exp(|t|/R)$ . In quel caso  $Z_B(\lambda)$  è una funzione analitica in un dominio del tipo  $C_R = \{\lambda \mid \text{Re } \lambda^{-1} > R^{-1}\}$  e perciò deve essere  $Z_B(\lambda) = Z(\lambda)$ . Per una dimostrazione si veda [19].

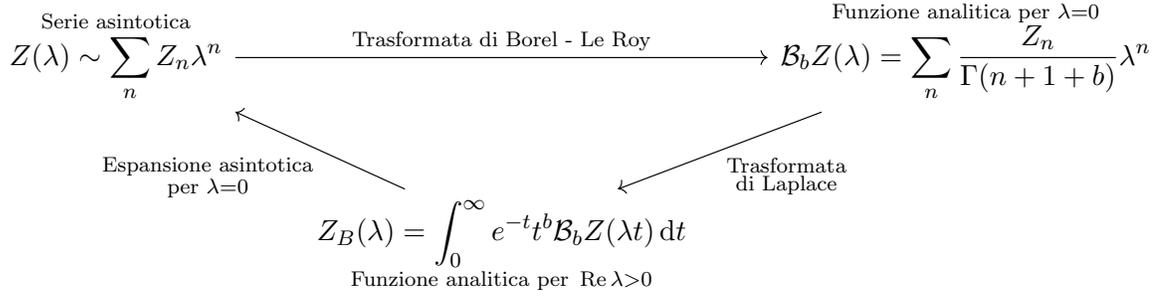


Figura 3.1: Rappresentazione schematica della procedura di risommazione alla Borel.

La difficoltà pratica nelle applicazioni è che solitamente sono noti soli i primi coefficienti della serie originale, e questo rende difficoltosa la procedura di estensione analitica di  $\mathcal{B}Z(t)$  in un intorno del semiasse reale positivo. Un utile metodo per ricostruire  $\mathcal{B}Z(t)$  è fornita dagli *approssimanti di Padé* [12]. Data una serie

$$S(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k \lambda^k, \tag{3.7}$$

il suo approssimante di Padé  $[l/m]_S$  è dato dalla funzione razionale

$$[l/m]_S(\lambda) = \frac{p_0 + p_1 \lambda + \dots + p_l \lambda^l}{q_0 + q_1 \lambda + \dots + q_m \lambda^m}, \tag{3.8}$$

dove  $q_0 = 1$ , e gli altri coefficienti sono fissati imponendo

$$S(\lambda) - [l/m]_S(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{l+m+1}). \tag{3.9}$$

Conoscendo i primi  $2n$  termini dell'espansione asintotica di  $Z(\lambda)$ , è possibile quindi costruire l'approssimante di Padé della sua trasformata di Borel<sup>3</sup>:

$$\mathcal{P}_n Z(\lambda) \equiv [n/n]_{\mathcal{B}Z}(\lambda). \tag{3.10}$$

$\mathcal{P}_n Z(\lambda)$  sarà una funzione razionale con diversi poli nel piano complesso; se ad esempio  $\mathcal{B}Z$  possiede un taglio di ramificazione, l'approssimante di Padé imiterà il taglio con una sequenza di poli. Una buona approssimazione della serie risommata alla Borel sarà dunque un integrale della forma (3.4) in cui viene integrato  $\mathcal{P}_n Z$  anziché  $\mathcal{B}Z$ :

$$Z_B(\lambda) \approx \int_0^{\infty} e^{-t} \mathcal{P}_n Z(\lambda t) dt. \tag{3.11}$$

Analoghe considerazioni si hanno sostituendo alla trasformata di Borel la sua generalizzazione  $\mathcal{B}_b Z(t)$ .

<sup>3</sup>La scelta di considerare l'approssimante di Padé  $[n/n]$ , oltre ad essere quella naturale, è dovuta anche alla maggiore stabilità degli algoritmi usati per calcolare  $[l/m]$  quando  $l = m$ .

La struttura analitica della trasformata di Borel è collegata al comportamento per grandi  $n$  della espansione asintotica. Per esempio, se  $Z_n \sim cA^n n!$  per  $n$  abbastanza grande, il coefficiente  $A$  determina la posizione della singolarità di  $\mathcal{B}Z(\lambda t)$  più vicina all'origine:  $\lambda t_* = 1/A$ . Se  $A < 0$  la serie è a termini di segno alterno, la singolarità è nel semiasse reale negativo di  $t$  e la serie è Borel-risommabile se non ci sono singolarità sul semiasse reale positivo. Se invece  $A > 0$ , la singolarità più vicina all'origine è sul semiasse reale positivo di  $t$  e la serie non è Borel-risommabile. In questo caso l'integrale (3.4) è mal definito, ma possiamo definirlo deformando il cammino d'integrazione in modo appropriato per evitare le singolarità, ad esempio scegliendo dei cammini  $\mathcal{C}_\pm$  che aggirano le singolarità da sopra o da sotto rispettivamente.

Le funzioni ottenute in questo modo,

$$Z_{B,\pm}(\lambda) = \int_{\mathcal{C}_\pm} e^{-t} \mathcal{B}Z(\lambda t) dt, \quad (3.12)$$

sono chiamate *risommazioni laterali alla Borel*. Un modo analogo per definire queste somme laterali è ammettere che  $\lambda$  abbia una piccola parte immaginaria nell'integrale (3.4), e poi si ottiene  $Z_{B,\pm}(\lambda) = \lim_{\text{Im } \lambda \rightarrow 0^\mp} Z_B(\lambda)$ . Le funzioni  $Z_{B,\pm}$  guadagnano dunque una parte immaginaria a causa della deformazione del cammino d'integrazione, e la loro differenza, che è puramente immaginaria, è dell'ordine di  $\sim e^{-t_*} = e^{-1/(A\lambda)} \sim \Delta$ . Questa ambiguità segnala la presenza di ulteriori correzioni non perturbative a  $Z(\lambda)$  che non vengono catturate da  $Z_B(\lambda)$ .

Il modo sistematico con cui questi effetti non-perturbativi si combinano con l'espansione perturbativa è il soggetto della cosiddetta *resurgence* [1, 7]. In effetti, la deformazione usata per definire la risommazione laterale alla Borel è la stessa necessaria per evitare le linee di Stokes nella teoria di Picard-Lefschetz; la teoria della resurgence fornisce un modo alternativo per calcolare i numeri di intersezione definiti in (2.13). Tuttavia, mostreremo che con la Teoria Esatta delle Perturbazioni non ci sarà bisogno di calcolare i coefficienti  $\mathfrak{n}_\sigma$ , in quanto modificheremo le teorie in modo da renderle Borel-risommabili, facendo risultare molto più immediato lo studio di diversi sistemi fisici.

## 3.2 Risommabilità alla Borel sui thimble

Nella sezione 2.2 abbiamo visto che l'integrale (2.9) può essere scritto come una somma di integrali sui thimble  $Z_\sigma(\lambda)$ : mostreremo ora che ciascun  $Z_\sigma(\lambda)$  ammette una espansione asintotica che è Borel-risommabile al risultato esatto [17].

Consideriamo il cambio di variabile

$$t = \frac{f(z) - f(z_\sigma)}{\lambda}. \quad (3.13)$$

Poichè i thimble sono cammini lungo cui si ha  $\text{Im } f = \text{cost.}$ , per ogni valore di  $z$  lungo  $\mathcal{J}_\sigma$  si ha  $t \geq 0$ . Per ogni  $t \neq 0$ , poichè per ipotesi  $\mathcal{J}_\sigma$  non passa attraverso altre selle, esistono due valori  $z_{1,2}(\lambda t) \in \mathcal{J}_\sigma$  che soddisfano (3.13), uno per ogni ramo del flusso discendente. Questo cambio

di variabile porta a riscrivere l'integrale  $Z_\sigma(\lambda)$  come

$$Z_\sigma(\lambda) = e^{-f(z_\sigma)/\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} B_\sigma(\lambda t) dt, \quad B_\sigma(\lambda t) = \sum_{k=1,2} \frac{g(z_k(\lambda t))}{|f'(z_k(\lambda t))|} \sqrt{\lambda t}. \quad (3.14)$$

Per  $t$  piccoli, poichè  $f(z) - f(z_\sigma) \sim (z - z_\sigma)^2$  se  $z_\sigma$  è una sella non degenera<sup>4</sup>, si ha  $f'(z_k(t)) \sim \sqrt{t}$ , cosicchè  $B_\sigma(\lambda t)$  è analitica in un intorno dell'origine: in realtà, se non ci sono altri punti di sella lungo il thimble e le funzioni  $f$  e  $g$  sono regolari, è analitica in tutto un intorno del semiasse reale positivo. Confrontando l'integrale (3.14) con (3.6), allora, deve essere

$$B_\sigma(\lambda t) = \mathcal{B}_{-1/2} Z_\sigma(\lambda t), \quad (3.15)$$

in particolare i coefficienti dell'espansione di  $B_\sigma(\lambda)$  sono collegati a quelli di  $Z_\sigma(\lambda)$  da  $B_{\sigma,n} = Z_{\sigma,n} \Gamma(n + 1/2)$ , e  $Z_\sigma(\lambda)$  è Borel-risommabile al risultato esatto.

Nel caso di integrali in una dimensione si può ricavare anche una formula esplicita per i coefficienti  $Z_{\sigma,n}$  della espansione asintotica (si veda ad esempio [4]):

$$Z_{\sigma,n} = \frac{\Gamma(n + 1/2)}{2\pi i} \oint_{z_\sigma} \frac{g(z)}{[f(z) - f(z_\sigma)]^{n+1/2}} = \Gamma(n + 1/2) \operatorname{Res}_{z=z_\sigma} \frac{g(z)}{[f(z) - f(z_\sigma)]^{n+1/2}}, \quad (3.16)$$

che fornisce una motivazione teorica nello scegliere la trasformata di Borel - Le Roy con  $b = -1/2$ .

L'integrale originale (2.9) può essere calcolato secondo la decomposizione (2.15) e sfruttando la riscrittura (3.14). Il contributo associato alla sella con  $f(z_\sigma)$  inferiore può essere visto come il contributo perturbativo dominante a  $Z(\lambda)$ , mentre le altre selle si possono trattare come effetti non-perturbativi; formalmente, quello che si ottiene è una *trans-serie*:

$$\begin{aligned} Z(\lambda) &= \sum_{\sigma} \left( \mathbf{n}_\sigma e^{-f(z_\sigma)/\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} Z_{\sigma,n} \lambda^n \right) \\ &= \sum_{\sigma_0} e^{-f(z_{\sigma_0})/\lambda} \left( \mathbf{n}_{\sigma_0} \sum_{n=0}^{\infty} Z_{\sigma_0,n} \lambda^n + \sum_{\sigma} e^{-(f(z_\sigma) - f(z_{\sigma_0}))/\lambda} \mathbf{n}_\sigma \sum_{n=0}^{\infty} Z_{\sigma,n} \lambda^n \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

dove con la somma su  $\sigma_0$  si intende la somma su tutte le selle  $z_{\sigma_0}$  che minimizzano  $f(z_\sigma)$ . Da questa complicata espressione è chiaro che quando c'è una sola sella (o più selle con lo stesso valore di  $f(z_\sigma)$ ) con  $\mathbf{n}_\sigma$  non nullo, la serie perturbativa è Borel-risommabile al risultato esatto; invece, quando più selle con valori diversi di  $f(z_\sigma)$  contribuiscono in (2.15), l'espansione perturbativa, pur essendo Borel-risommabile, non è in grado di riprodurre il risultato esatto, perchè i contributi delle altre selle sono proporzionali a un fattore non perturbativo  $e^{-(f(z_\sigma) - f(z_{\sigma_0}))/\lambda}$ . Infine, se  $Z(\lambda)$  giace su una linea di Stokes alcune delle espansioni perturbative in (3.17) non sono Borel-risommabili, perchè i rispettivi numeri d'intersezione  $\mathbf{n}_\sigma$  sono mal definiti.

É possibile mostrare (si veda ad esempio [4] per una derivazione rigorosa) che il comportamento dominante per  $n$  grandi dei coefficienti dell'espansione asintotica dell'integrale (2.9)

<sup>4</sup>Se invece  $z_\sigma$  è una sella degenera, ad esempio se  $f(z) - f(z_\sigma) \sim (z - z_\sigma)^n$ , basta sostituire  $\sqrt{t}$  con  $t^{1-1/n}$ .

attorno a un punto di sella  $z_\sigma$  è determinato dagli altri punti di sella di  $f$ . Più precisamente: si consideri l'integrale in (2.15) come una funzione di  $\lambda = |\lambda|e^{i\theta}$ : il thimble  $\mathcal{J}_\sigma(\theta)$  si muoverà nel piano complesso al variare di  $\theta$ . Per i valori di  $\theta$  per cui esso interseca altri punti di sella l'integrale è su una linea di Stokes: queste selle sono dette "adiacenti" a  $z_\sigma$ . Tra tutte le selle adiacenti a  $z_\sigma$ , denominiamo  $z_{\sigma_*}$  le selle che minimizzano  $|f(z_\sigma) - f(z_{\sigma_*})|$ : si trova che, per  $n$  sufficientemente grandi,

$$Z_{\sigma,n} \approx \sum_{z_{\sigma_*}} Z_{\sigma_*,0} \frac{(n-1)!}{(f(z_\sigma) - f(z_{\sigma_*}))^n}, \quad (3.18)$$

dove  $Z_{\sigma_*,0} = g(z_{\sigma_*})/\sqrt{2\pi|f''(z_{\sigma_*})|}$ . Questa relazione giustifica l'assunzione  $Z_n \sim cA^n n!$ , dove qui  $A = 1/(f(z_\sigma) - f(z_{\sigma_*}))$ . Poichè  $A$  determina la posizione della singolarità più vicina all'origine della trasformata di Borel  $\mathcal{B}Z(t)$ , nel caso in cui sia reale e positivo (ad esempio, se  $f$  è una funzione reale di variabile reale con più punti stazionari) si ha la non risommabilità alla Borel dell'espansione di punto di sella.

### 3.3 Integrali in più dimensioni

Il primo passo per applicare i nostri strumenti agli integrali sui cammini è quello di passare per il generico caso finito-dimensionale. Fortunatamente, gran parte delle considerazioni fatte finora per gli integrali in una dimensione si possono trasportare senza problemi a dimensione maggiore. Dato l'integrale

$$Z(\lambda) = \lambda^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{x}) e^{-f(\mathbf{x})/\lambda} d^d \mathbf{x}, \quad (3.19)$$

consideriamolo come un integrale su una sottovarietà reale  $\mathcal{C}$  di  $\mathbb{C}^d$ , di coordinate  $\mathbf{z}$ . Per ogni punto di sella  $\mathbf{z}_\sigma$  è possibile individuare i flussi ascendenti e discendenti generalizzando le equazioni (2.10), e definiamo il Lefschetz thimble  $\mathcal{J}_\sigma$  e il suo duale  $\mathcal{K}_\sigma$  prendendo l'unione di tutti i flussi ascendenti e discendenti passanti per  $\mathbf{z}_\sigma$ . Dopo aver scomposto  $\mathcal{C}$  in termini dei thimble, come in (2.12), bisognerà valutare integrali del tipo

$$Z_\sigma(\lambda) = \lambda^{-d/2} \int_{\mathcal{J}_\sigma} g(\mathbf{z}_\sigma) e^{-f(\mathbf{z})/\lambda} d^d \mathbf{z}. \quad (3.20)$$

Supponiamo dunque che  $\mathbf{z}_\sigma$  sia una sella non degenera, cioè  $\det[\partial_i \partial_j f(\mathbf{z}_\sigma)] \neq 0$ . Con il cambio di variabile

$$t = \frac{f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}_\sigma)}{\lambda}, \quad (3.21)$$

si può mostrare che si ottiene [10]

$$Z_\sigma(\lambda) = e^{-f(\mathbf{z}_\sigma)/\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{d/2-1} B_\sigma(\lambda t) dt, \quad (3.22)$$

$$B_\sigma(\lambda t) = (\lambda t)^{1-d/2} \int_{\mathcal{J}_\sigma} g(\mathbf{z}) \delta[f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}_\sigma) - \lambda t] d^d \mathbf{z} = (\lambda t)^{1-d/2} \int_{\Omega_{\lambda t}} \frac{g(\mathbf{z})}{|\nabla f(\mathbf{z})|} d\Sigma, \quad (3.23)$$

dove  $\Omega_{\lambda t}$  è l'ipersuperficie reale  $(d-1)$ -dimensionale definita da  $f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}_\sigma) - \lambda t = 0$ ,  $d\Sigma$  è la sua forma volume, e  $\delta$  è la delta di Dirac. È possibile mostrare che  $B_\sigma(\lambda t)$  è analitica in un intorno

del semiasse reale positivo, quindi l'espansione asintotica di  $Z_\sigma(\lambda)$  in  $\lambda$  è Borel-risommabile al risultato esatto, con

$$B_\sigma(t) = \mathcal{B}_{d/2-1} Z_\sigma(t). \quad (3.24)$$

Grazie alle relazioni che collegano tra di loro le trasformate di Borel-Le Roy per  $b$  differenti [17], possiamo scrivere

$$\mathcal{B}_0 Z_\sigma(t) = \partial_t^{k-1} \int_{\mathcal{J}_\sigma} g(\mathbf{z}) \delta[f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}_\sigma) - \lambda t] d^d \mathbf{z}, \quad d = 2k, \quad (3.25)$$

$$\mathcal{B}_{-1/2} Z_\sigma(t) = \sqrt{t} \partial_t^k \int_{\mathcal{J}_\sigma} g(\mathbf{z}) \delta[f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}_\sigma) - \lambda t] d^d \mathbf{z}, \quad d = 2k + 1. \quad (3.26)$$

### 3.4 Generalizzazione ai path integral

Consideriamo l'integrale sui cammini

$$\mathcal{Z}(\lambda) = \int \mathcal{D}[x(\tau)] G[x(\tau)] e^{-\mathcal{S}[x(\tau)]/\lambda}, \quad (3.27)$$

dove  $\tau$  è il tempo Euclideo e  $\mathcal{S}$  è l'azione Euclidea (1.6). Assumiamo che il potenziale  $V(x)$  sia una funzione analitica di  $x$  e che valga  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$ , cosicchè lo spettro in energia della teoria sia discreto. Inoltre supporremo che i funzionali  $\mathcal{S}[x]$  e  $G[x]$  siano regolari e tali per cui il path integral sia "ben definito" per ogni  $\lambda \geq 0$ . La misura funzionale  $\mathcal{D}[x]$  contiene un fattore di normalizzazione dipendente da  $\lambda$  per mantenere  $\mathcal{Z}(\lambda)$  finito. L'integrale è preso sui cammini reali  $x(\tau)$  soddisfacenti a date condizioni al contorno.

Per definizione, (3.27) si può scrivere come il limite infinito-dimensionale di un integrale finito-dimensionale:

$$\mathcal{Z}(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \mathcal{D}^{(N)}[x(\tau)] G^{(N)}[x(\tau)] e^{-\mathcal{S}^{(N)}[x(\tau)]/\lambda}, \quad (3.28)$$

dove si è presa una discretizzazione dei funzionali  $G[x]$ ,  $\mathcal{S}[x]$  e della misura  $\mathcal{D}[x]$ , che al suo interno racchiude un fattore di normalizzazione  $\lambda^{-N/2}$ . Poichè non ci aspettiamo problemi nel passaggio al limite del continuo, possiamo usare lo stesso approccio del caso  $N < \infty$ . In particolare, una volta identificate le "selle"  $z_\sigma(\tau)$  dell'azione, ossia le soluzioni (della complessificazione) dell'equazione del moto  $\delta\mathcal{S}[x] = 0$  e costruiti gli analoghi dei flussi ascendenti e discendenti per ogni  $z_\sigma(\tau)$ , si vorrebbe riuscire a costruire anche i thimble. Tuttavia, poichè il path integral è un integrale funzionale, il numero delle selle sarà tipicamente infinito e una trattazione sistematica alla Picard-Lefschetz è poco pratica. D'altra parte, se si riesce a mostrare che le equazioni del moto ammettono un'unica soluzione reale  $x_0(\tau)$ , allora il dominio d'integrazione (cioè l'insieme di tutti i cammini reali soddisfacenti le condizioni al contorno date) coincide con un thimble. In questo caso, trattando l'integrale dentro al limite (3.28) come finito-dimensionale, possiamo scrivere

$$\mathcal{Z}(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-\mathcal{S}^{(N)}[x_0(\tau)]/\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} \mathcal{B}_{-1/2}^{(N)} \mathcal{Z}(\lambda t), \quad (3.29)$$

$$\mathcal{B}_{-1/2}^{(N)} \mathcal{Z}(\lambda t) = \sqrt{\lambda t} \partial_{\lambda t}^N \int \mathcal{D}_{\lambda=1}^{(N)}[x(\tau)] G^{(N)}[x(\tau)] \delta[\mathcal{S}^{(N)}[x(\tau)] - \mathcal{S}^{(N)}[x_0(\tau)] - \lambda t], \quad (3.30)$$

dove abbiamo scelto di discretizzare l'integrale in uno di dimensione  $2N + 1$  e  $\mathcal{D}_{\lambda=1}^{(N)}[x(\tau)]$  è la misura funzionale discretizzata privata della dipendenza da  $\lambda$ . La regolarità dei funzionali a  $N$  fissato e l'assenza di divergenze nel limite  $N \rightarrow \infty$  suggeriscono che sia possibile scambiare somma e integrale in (3.29). La funzione limite  $\mathcal{B}_{-1/2}^{(\infty)}\mathcal{Z}(\lambda t)$  corrisponde alla trasformata di Borel-Le Roy di  $\mathcal{Z}(\lambda t)$  nel limite del continuo, è integrabile e riproduce il risultato esatto  $\mathcal{Z}(\lambda)$ .

Concludiamo allora che se la complessificazione delle equazioni del moto  $\delta\mathcal{S}[x(\tau)] = 0$  ammette una sola soluzione reale  $x_0(\tau)$  soddisfacente alle condizioni al contorno implicite in (3.27) e tale che  $\det \delta^2\mathcal{S}[x_0(\tau)] \neq 0$ , allora l'espansione in serie di  $\mathcal{Z}(\lambda)$  attorno a  $\lambda = 0$  è Borel-risommabile al risultato esatto; le eventuali altre selle dell'azione nel piano complesso (che corrispondono, in termini di soluzioni delle equazioni del moto, a degli istantoni complessi) non contribuiscono al path integral. Se vi è più di una sella reale soddisfacente alle condizioni al contorno, viceversa, la serie perturbativa di  $\mathcal{Z}(\lambda)$  tipicamente non sarà Borel-risommabile a causa del fenomeno di Stokes.

È chiaro dunque che le condizioni al contorno del path integral sono di cruciale importanza per la risommabilità alla Borel di  $\mathcal{Z}(\lambda)$ , perchè determinano il numero di selle reali di  $\mathcal{S}[x(\tau)]$ : in particolare, la stessa teoria può avere alcune osservabili che sono Borel-risommabili al risultato esatto e altre osservabili per le quali per ottenere il risultato esatto è necessario includere nell'espansione perturbativa una serie di fenomeni non perturbativi, ottenendo una scrittura del tipo (3.17).

Nelle applicazioni in cui si è interessati allo studio dello spettro in energia del potenziale in esame è necessario chiedersi cosa accada nel limite  $\beta \rightarrow \infty$ . Consideriamo a titolo d'esempio l'energia dello stato fondamentale,

$$E_0(\lambda) = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}(\lambda, \beta), \quad (3.31)$$

dove ricordiamo che si è definita la funzione di partizione come

$$\mathcal{Z}(\lambda, \beta) = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}[x(\tau)] e^{-\mathcal{S}[x(\tau)]/\lambda}. \quad (3.32)$$

A differenza del limite del continuo, il limite  $\beta \rightarrow \infty$  non commuta con la decomposizione in thimble; ad esempio, a seconda del potenziale in esame è possibile che  $\mathcal{S}[x(\tau)]$  abbia una sola sella reale a ogni  $\beta$  finito ma che per  $\beta = \infty$  l'integrale giaccia su una linea di Stokes, o viceversa che ammetta più di una sella reale a  $\beta$  finito ma che solo una sopravviva a  $\beta \rightarrow \infty$ .

Quest'ultimo caso è quello che si ha per un potenziale che soddisfa  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$  con un unico punto di minimo globale  $\bar{x}$ : se  $x'$  è un'altro punto critico di  $V(x)$ , il suo contributo all'espansione perturbativa di  $\mathcal{Z}(\lambda, \beta)$  sarà proporzionale a un fattore  $e^{-\beta[V(x') - V(\bar{x})]/\lambda}$  rendendo  $\mathcal{Z}(\lambda, \beta)$  non Borel-risommabile al risultato esatto per  $\beta$  finito; per  $\beta \rightarrow \infty$  invece tale contributo sarà soppresso esponenzialmente e quindi la serie perturbativa per  $E_0$  risulterà Borel-risommabile al risultato esatto.

## Capitolo 4

# Teoria esatta delle perturbazioni

In questo capitolo mostreremo come gli strumenti visti nei capitoli precedenti si possono applicare nell'ambito della teoria delle perturbazioni. Tuttavia, gli ostacoli alla risommabilità alla Borel rendono la teoria cosiddetta "standard" delle perturbazioni inadatta alla trattazione di sistemi in cui si riscontra la presenza di fenomeni non perturbativi. Per questo motivo illustreremo un approccio alternativo, la teoria "esatta" delle perturbazioni [16, 17], che è in grado di garantire la Borel-risommabilità della teoria per un'ampia classe di sistemi altrimenti problematici.

### 4.1 Limiti della teoria standard delle perturbazioni

Per mostrare come la teoria standard delle perturbazioni possa portare a delle serie perturbative divergenti, cioè asintotiche con raggio di convergenza nullo, conviene considerare un esempio semplice. Consideriamo l'analogo zero-dimensionale della funzione di partizione euclidea per un oscillatore anarmonico accoppiato

$$Z(\lambda) = \int e^{-\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\lambda}{4}x^4\right)} dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (4.1)$$

L'espansione perturbativa di questo integrale per  $\lambda \ll 1$  si può calcolare come

$$Z(\lambda) = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\lambda}{4}x^4\right)^n e^{-x^2/2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\lambda}{4}x^4\right)^n e^{-x^2/2} dx \equiv \sum_{n=0}^{\infty} Z_{0,n} \lambda^n. \quad (4.2)$$

Notiamo che il processo avviene in due passaggi: innanzitutto l'integrando viene espanso in serie di potenze di  $\lambda$ , dopodiché si scambiano somma e integrale. È possibile calcolare esplicitamente i coefficienti  $Z_{0,n}$ : si trova immediatamente che

$$Z_{0,n} = \sqrt{2}(-1)^n \frac{\Gamma(2n + \frac{1}{2})}{n!}. \quad (4.3)$$

La serie (4.2) diverge per ogni  $\lambda \neq 0$ .<sup>1</sup>

D'altra parte, però, è chiaro che l'integrale (4.1) è convergente per ogni valore di  $\lambda$  reale positivo:

---

<sup>1</sup>Per il criterio di Cauchy-Hadamard, poichè  $\lim \left| \frac{Z_{0,n+1}}{Z_{0,n}} \right| = \lim (n+1)(2n+1/2) = +\infty$ , si ha che la serie di potenze  $\sum_n Z_{0,n} \lambda^n$  ha raggio di convergenza nullo.

dunque nell'espansione perturbativa dobbiamo aver commesso un'azione non lecita. Il primo passo, l'espansione in serie di potenze, è legittimo, perché l'integrando è una funzione analitica di  $\lambda$ ; dev'essere quindi nel secondo passaggio, lo scambio di somma e integrale, la causa di questa divergenza.

Quello che si ottiene è che, sebbene la funzione integranda in (4.1) sia analitica in  $\lambda$ , l'integrale non lo è. Per vederlo, si può anche notare che per valori di  $\lambda$  negativi l'integrale diverge. In effetti, estendendo analiticamente l'integrando per valori di  $\lambda \in \mathbb{C}$ , si osserva che (4.1) presenta un taglio che connette  $\lambda = 0$  a  $\lambda = \infty$ , che si può ad esempio prendere lungo il semiasse reale negativo [11].

Questo esempio mostra un importante criterio per capire la natura divergente della teoria standard delle perturbazioni, attribuito a Dyson [8]: se si vuole che la serie perturbativa converga al risultato esatto, allora la funzione di cui si fa l'espansione deve essere analitica in  $\lambda$  a  $\lambda = 0$ . Al contrario, se una funzione non è analitica in  $\lambda = 0$ , allora la serie perturbativa diverge, oppure converge a un risultato errato.

È tuttavia noto [11] che la teoria descritta dall'integrale (4.1) sia risommabile alla Borel per  $\lambda > 0$ . In effetti, posto

$$f(z) = \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4}, \quad (4.4)$$

si ha che  $f(z)$  ha come punti di sella  $z_0 = 0$ ,  $z_{\pm} = \pm i$ . Il flusso ascendente  $\mathcal{K}_0$  passante per l'unica sella reale  $z_0$  passa attraverso i due punti di sella  $z_{\pm}$ : si può evitare ciò ammettendo che  $\lambda$  abbia una parte immaginaria non nulla. Poiché però i numeri d'intersezione dei flussi  $\mathcal{K}_{\sigma}$  con il cammino d'integrazione sono gli stessi nei due casi  $\text{Im } \lambda \rightarrow 0^{\pm}$  ( $\mathbf{n}_0 = 1$ ,  $\mathbf{n}_{\pm} = 0$ ), la decomposizione (2.12) non è ambigua e il cammino d'integrazione è un thimble. Per effettuare una risommazione alla Borel possiamo dunque seguire l'approccio indicato nella sezione 3.2: risolviamo l'equazione (3.13) imponendo che per  $t = 0$  si abbia  $z(0) = z_0$ ,

$$z_{1,2}(t) = \pm \sqrt{\sqrt{1 + 4\lambda t} - 1}. \quad (4.5)$$

Inserendo tale espressione in (3.14) si trova dunque

$$\mathcal{B}_{-1/2} Z_0(\lambda t) = \sum_{k=1,2} \frac{\sqrt{\lambda t}}{|f'(z_k(\lambda t))|} = \frac{2\sqrt{\lambda t}}{\sqrt{1 + 4\lambda t} \sqrt{\sqrt{1 + 4\lambda t} - 1}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4\lambda t}}{1 + 4\lambda t}}, \quad (4.6)$$

che ha un punto di ramificazione per  $\lambda t_{*} = -1/4$  ma è regolare nel semiasse reale positivo, come ci aspettavamo, e il suo sviluppo in serie di potenze di  $\lambda t$  porge proprio i coefficienti (4.3). Integrando si trova infine

$$Z(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} \mathcal{B}_{-1/2} Z_0(\lambda t) dt = \frac{1}{2\lambda} e^{1/8\lambda} K_{1/4} \left( \frac{1}{8\lambda} \right), \quad (4.7)$$

dove  $K_n$  è la funzione di Bessel modificata del secondo tipo.

Quello appena visto è un esempio in cui la teoria standard delle perturbazioni, che sembra portare a risultati divergenti, riesce comunque a dare informazioni grazie alla sommabilità alla

Borel dell'espansione perturbativa. Ci sono casi in cui la risommabilità alla Borel manca e bisogna prestare maggior cautela. Un esempio è quello della doppia buca di potenziale, la cui funzione di partizione euclidea ha analogo zero-dimensionale

$$Z(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(-\frac{x^2}{2} + \lambda \frac{x^4}{4}\right)} dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (4.8)$$

Tale integrale converge per ogni  $\lambda > 0$ , ma per  $\lambda \leq 0$  è divergente: dall'argomento di Dyson ci aspettiamo che la serie perturbativa diverga. Inoltre, posto

$$f(z) = -\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4}, \quad (4.9)$$

si osserva che  $f(z)$  ha tre selle reali  $z_0 = 0$ ,  $z_{\pm} = \pm 1$ . Anche qui, il flusso ascendente  $\mathcal{K}_0$  passante per  $z_0$  passa per le selle  $z_{\pm}$ , ma stavolta i numeri d'intersezione sono discontinui in  $\text{Im } \lambda = 0$  ( $\mathbf{n}_0 = \pm 1$ ,  $\mathbf{n}_{\pm} = 1$ ). L'integrale giace dunque su una linea di Stokes e non c'è risommabilità alla Borel. A secondo del segno di  $\text{Im } \lambda$  la decomposizione (2.12) è

$$\mathcal{C}_{\pm} = \mathcal{J}_- \mp \mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_+, \quad \text{Im } \lambda \rightarrow 0^{\pm}. \quad (4.10)$$

In ogni caso gli integrali lungo  $\mathcal{C}_{\pm}$  coincidono nel limite di  $\text{Im } \lambda \rightarrow 0$ . Per completezza, svolgiamo esplicitamente il calcolo.

$$Z_0(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{\mathcal{J}_0} e^{-f(z)/\lambda} dz = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{x^2/2 - \lambda x^4/4} dx = i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2 - \lambda x^4/4} dx, \quad (4.11)$$

$$Z_{\pm}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{\mathcal{J}_{\pm}} e^{-f(z)/\lambda} dz = -ie^{1/4\lambda} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{y^2 + \lambda y^4} dy = e^{1/4\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2 + \lambda y^4} dy, \quad (4.12)$$

A meno dei fattori  $e^{-f(z_{\sigma})/\lambda}$ , i coefficienti delle espansioni attorno ai punti di sella sono

$$Z_{\pm, n} = \frac{\Gamma(2n + 1/2)}{n!}, \quad Z_{0, n} = i\sqrt{2}(-1)^n \frac{\Gamma(2n + 1/2)}{n!}. \quad (4.13)$$

Confrontando questi ultimi con (4.3), si trova

$$\mathcal{B}_{-1/2} Z_{\pm}(\lambda t) = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 4\lambda t}}{2(1 - 4\lambda t)}}, \quad \mathcal{B}_{-1/2} Z_0(\lambda t) = i\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4\lambda t}}{1 + 4\lambda t}}. \quad (4.14)$$

Poichè  $\mathcal{B}_{-1/2} Z_{\pm}(\lambda t)$  ha un punto di ramificazione sul semiasse reale positivo, la serie asintotica associata non è risommabile alla Borel. Tuttavia l'aver dato una piccola parte immaginaria a  $\lambda$  per evitare la linea di Stokes permette anche di evitare questi punti di ramificazione. Reinserendo i fattori  $e^{-f(z_{\sigma})/\lambda}$  e integrando su  $t$  si ottiene

$$Z_{\pm}(\lambda) = \text{sign}(\text{Im } \lambda) \frac{ie^{1/8\lambda}}{2\sqrt{\lambda}} K_{1/4} \left( -\frac{1}{8\lambda} \right), \quad Z_0(\lambda) = i\frac{1}{2\lambda} e^{1/8\lambda} K_{1/4} \left( \frac{1}{8\lambda} \right). \quad (4.15)$$

Usando (4.10) si ottiene, nel limite  $\text{Im } \lambda \rightarrow 0$ ,

$$Z(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi^2}{4\lambda}} e^{1/8\lambda} \left[ I_{-1/4} \left( \frac{1}{8\lambda} \right) + I_{1/4} \left( \frac{1}{8\lambda} \right) \right], \quad (4.16)$$

dove  $I_n$  è la funzione di Bessel modificata del primo tipo.

## 4.2 Caso 1-dimensionale

Come abbiamo visto, l'espansione perturbativa per una data osservabile non è in grado di riprodurre il risultato esatto se nell'integrale (2.9)  $f(x)$  ha più punti di sella reali, mentre è in grado di farlo quando ve n'è uno solo. L'idea alla base della cosiddetta "teoria esatta delle perturbazioni" è di aggirare questo problema modificando leggermente la definizione delle funzioni  $f$  e  $g$  in modo da rendere l'espansione perturbativa Borel-risommabile al risultato esatto.

Il punto cruciale è che la decomposizione in Lefschetz thimble è governata solo dai punti di sella di  $f(x)$ , in particolare è indipendente da  $g(x)$ . Definiamo dunque una nuova funzione,

$$\hat{Z}(\lambda, \lambda_0) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\hat{f}(z)/\lambda} \hat{g}(x, \lambda_0) dx, \quad (4.17)$$

dove si è posto

$$\hat{f}(x) = f(x) + \delta f(x), \quad \hat{g}(x, \lambda_0) = g(x) e^{\delta f(x)/\lambda_0}, \quad (4.18)$$

e si assume che la convergenza dell'integrale a  $\lambda_0$  fissato sia indipendente da  $\delta f$ , in particolare assumeremo che sia  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \delta f(x)/f(x) = 0$ . Per costruzione, l'integrale (2.9) si riottiene ponendo  $\lambda_0 = \lambda$  in (4.17).

Poichè a  $\lambda_0$  fissato la decomposizione in thimble di (4.17) è determinata solo da  $\hat{f}$ , con una opportuna scelta della deformazione  $\delta f$  si può costruire  $\hat{f}$  in modo che abbia una sola sella reale  $\hat{x}_0$  e che l'asse reale coincida con un thimble. Sebbene sia possibile che l'integrale  $Z(\lambda)$  si trovi su una linea di Stokes e che la sua espansione perturbativa non sia Borel-risommabile, l'espansione asintotica di  $\hat{Z}(\lambda, \lambda_0)$  in  $\lambda$  a  $\lambda_0$  fissato sarà comunque Borel-risommabile, e reinserendo  $\lambda = \lambda_0$  si otterrà il risultato esatto  $Z(\lambda)$ .

Per illustrare la potenza del metodo riconsideriamo il sistema (4.8), per cui la decomposizione in thimble era non banale. Scegliendo  $\delta f(x) = x^2$  si ha

$$\hat{f}(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}, \quad \hat{g}(x, \lambda_0) = e^{x^2/\lambda_0}. \quad (4.19)$$

La decomposizione in thimble di  $\hat{f}$  è nota: l'asse reale è già un thimble. Possiamo effettuare dunque una espansione perturbativa in  $\lambda$  a  $\lambda_0$  fissato, trovando i coefficienti [14]

$$\hat{Z}_n(\lambda_0) = \sqrt{2}(-1)^n \frac{\Gamma(2n + 1/2)}{n!} {}_1F_1(-n, 1/2 - 2n; -2/\lambda_0) \quad (4.20)$$

dove  ${}_1F_1$  è la funzione ipergeometrica confluyente del primo tipo. Siamo interessati quindi a trovare la trasformata di Borel - Le Roy della serie perturbativa,

$$\mathcal{B}_{-1/2} \hat{Z}(\lambda t, \lambda_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{Z}_n(\lambda_0)}{\Gamma(n + 1/2)} (\lambda t)^n, \quad (4.21)$$

ma farlo partendo dai coefficienti (4.20) è molto difficile. Alternativamente, possiamo sfruttare (3.13) e (3.14), ottenendo

$$\mathcal{B}_{-1/2}\hat{Z}(\lambda t, \lambda_0) = e^{\frac{\sqrt{1+4\lambda t}-1}{\lambda_0}} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4\lambda t}}{1 + 4\lambda t}}. \quad (4.22)$$

Per riottenere il risultato voluto non resta altro che integrare e porre  $\lambda_0 = \lambda$ :

$$\hat{Z}(\lambda, \lambda) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} \mathcal{B}_{-1/2}\hat{Z}(\lambda t, \lambda_0) dt \Big|_{\lambda_0=\lambda}. \quad (4.23)$$

Per concludere, è necessario fare un commento sul regime di validità di questa teoria. Quello che effettivamente questa teoria prevede è di effettuare l'espansione perturbativa non più nel parametro  $\lambda$  originario, ma in un altro parametro, che chiamiamo qui  $\lambda'$ , mentre si tiene un ulteriore parametro  $\lambda_0$  fissato. L'espansione perturbativa originaria in  $\lambda$  corrisponde allora a una espansione nella direzione  $\lambda' = \lambda_0$ ; quello che si va a fare qui invece è di effettuare l'espansione nella direzione  $\lambda_0 = \text{cost.}$  nel piano  $(\lambda', \lambda_0)$ . Questo parametro  $\lambda_0$  è quello in cui sono incorporati i fenomeni non perturbativi che prima non si riuscivano a catturare: il risultato esatto si riesce ad ottenere al prezzo di introdurre una singolarità essenziale in  $\hat{g}(x, \lambda_0)$ , e quindi in  $\hat{Z}(\lambda', \lambda_0)$ , per  $\lambda_0 = 0$ . Come conseguenza di questo fatto è naturale aspettarsi che la teoria esatta delle perturbazioni riesca ad essere più efficace in condizioni di *strong coupling*, cioè nel regime opposto di quello della teoria standard delle perturbazioni, cosa che effettivamente si osserverà nelle applicazioni.

### 4.3 Caso $\infty$ -dimensionale

Il metodo descritto nella sezione precedente si può trasportare al caso dei path integral (3.27). Si supponga di poter scrivere il potenziale  $V$  come

$$V = V_0 + \Delta V, \quad (4.24)$$

dove  $V_0$  è scelto in modo da avere un solo punto di minimo non degenero, e la decomposizione è tale per cui  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Delta V/V_0 = 0$ . Consideriamo allora il potenziale "ausiliario"

$$\hat{V} = V_0 + \frac{\lambda}{\lambda_0} \Delta V = V_0 + \lambda V_1, \quad (4.25)$$

e il path integral modificato associato

$$\hat{Z}(\lambda, \lambda_0) = \int \mathcal{D}[x(\tau)] G[x(\tau)] e^{-\int d\tau \Delta V/\lambda_0} e^{-S_0[x(\tau)]/\lambda}, \quad S_0[x(\tau)] = \int \left[ \frac{\dot{x}^2}{2} + V_0 \right] d\tau. \quad (4.26)$$

Poichè  $\hat{Z}(\lambda, \lambda) = Z(\lambda)$ , quest'ultimo si può ottenere come espansione perturbativa in  $\lambda$  di  $\hat{Z}(\lambda, \lambda_0)$ , che per ipotesi è Borel-risommabile al risultato esatto.

Vale la pena sottolineare che la decomposizione  $V = V_0 + \Delta V$  non è unica, e che il punto di minimo per  $V_0$  attorno a cui si effettua l'espansione non deve necessariamente essere un punto critico per  $V$ . Purchè si rispettino le condizioni suddette, ogni scelta di decomposizione va

ugualmente bene, sebbene alcune decomposizioni risultino naturalmente più convenienti di altre a seconda del sistema che si sta studiando.

Nelle nostre applicazioni ci concentreremo sullo studio dello spettro in energia del potenziale  $V$  in esame. Ancora una volta, l'energia dello stato fondamentale sarà data da (3.31); in questo caso però non c'è motivo di preoccuparsi del fatto che il limite  $\beta \rightarrow \infty$  non commuti con la decomposizione in thimble. Infatti l'espansione di punto di sella viene fatta solo per  $V_0$ , che presenta un unico minimo globale sull'asse reale per ogni  $\beta$ , finito o infinito. Poiché le nostre considerazioni sono valide per ogni scelta del funzionale  $G[x(\tau)]$  saranno valide anche per  $G[x(\tau)]e^{-\int d\tau \Delta V/\lambda_0}$ , e l'espansione perturbativa di  $E_0(\lambda)$  sarà Borel-risommabile al risultato esatto. Lo stesso varrà per qualsiasi altra osservabile, cioè per ogni path integral con condizioni al contorno regolari e funzioni analitiche di essi, come appunto gli autovalori dell'energia, gli autostati corrispondenti, le funzioni di partizione, eccetera.

# Capitolo 5

## Applicazioni

Questo capitolo è dedicato allo studio numerico di alcuni sistemi quantomeccanici attraverso la teoria esatta delle perturbazioni. Ci concentreremo sull'analisi dello spettro energetico associato a diversi potenziali, in particolare dello stato fondamentale e dei primi stati eccitati. Ad oggi, lo studio della convergenza delle serie perturbative collegate ad osservabili diverse dall'energia è stato poco studiato in letteratura: questo ci ha spinti a studiare anche le serie perturbative associate alle funzioni d'onda che sono autofunzioni dell'energia. In particolare, lo studio delle autofunzioni rappresenta la parte più originale dell'elaborato.

Le espansioni perturbative sono ottenute usando il software Mathematica [14] e il pacchetto "BenderWu" [20], che è basato su una generalizzazione delle relazioni di ricorrenza espresse nella sezione 1.2. Come detto, queste relazioni di ricorrenza calcolano la somma dei diagrammi di Feynman che contribuiscono all'espansione dell'osservabile desiderata, i risultati che si ottengono con questo metodo sono identici a quelli ottenibili dall'espansione di punto di sella degli integrali sui cammini.

Operiamo nel modo seguente. Scelto un potenziale  $V(x; \lambda)$ , ne scegliamo una decomposizione  $\hat{V}(x; \lambda, \lambda_0)$  del tipo (4.25), dove il parametro ausiliario  $\lambda_0$  viene fissato al valore desiderato. Il pacchetto "BenderWu" riproduce le espansioni perturbative, fino all'ordine  $N$  desiderato, del  $\nu$ -esimo autovalore dell'energia e dell'autofunzione associata:

$$\hat{E}_N^{(\nu)}(\lambda, \lambda_0) = \sum_{n=0}^N \epsilon_n^{(\nu)}(\lambda_0) \lambda^n, \quad \hat{\psi}_N^{(\nu)}(x; \lambda, \lambda_0) = e^{-\frac{\omega x^2}{2}} \sum_{l=0}^{2N} \sum_{k=0}^{\nu+3l} A_l^{k(\nu)}(\lambda_0) x^k \lambda^{l/2}. \quad (5.1)$$

Viene quindi calcolata la trasformata di Borel - Le Roy dell'espansione perturbativa con  $b = -1/2$  (il calcolo di  $\hat{\psi}^{(\nu)}(x; \lambda, \lambda_0)$  viene effettuato puntualmente per diversi  $x$  fissati), e questa viene approssimata con gli approssimanti di Padè (3.10). La valutazione numerica degli integrali (3.11) per  $\lambda = \lambda_0$  porta al risultato finale.

Poichè il pacchetto "BenderWu" calcola funzioni d'onda non normalizzate, per ciascun sistema viene scelto un valore  $x_0$  e si normalizza la funzione d'onda dividendola per il valore che assume in quel punto, cioè imponendo  $\hat{\psi}_N^{(\nu)}(x_0; \lambda, \lambda) = 1$ . È chiaro che sarà necessario scegliere  $x_0$  con cura, perchè la funzione d'onda in quel punto non deve annullarsi.

Come controllo della bontà dei risultati ottenuti useremo un altro metodo numerico, il metodo di Rayleigh-Ritz (si veda ad esempio [23] per una realizzazione con l'uso di Mathematica). Per potenziali polinomiali di grado non sufficientemente elevato e per bassi  $\nu$  si procede in questo modo. Usando come base gli autostati dell'oscillatore armonico  $\phi_k(x)$  per  $k = 1, \dots, N_{RR}$ , viene calcolata l'Hamiltoniana "troncata"  $H_{kh}$ , che è una matrice quasi diagonale. Gli autovalori e le autofunzioni del sistema sono date, approssimativamente, dagli autovalori e autovettori di  $H_{kh}$ . Questo metodo variazionale è rapidamente convergente; la accuratezza dei risultati dipende da  $N_{RR}$  e da  $\nu$ .

Le funzioni d'onda così calcolate sono anche naturalmente normalizzate; per effettuare il confronto con i risultati ottenuti con il metodo perturbativo imponiamo la stessa normalizzazione.

## 5.1 Oscillatore anarmonico

Il sistema più semplice da studiare è l'oscillatore anarmonico, ossia un potenziale armonico perturbato con un termine quartico:

$$V(x; \lambda) = \frac{x^2}{2} + \frac{\lambda}{2}x^4. \quad (5.2)$$

È evidente che il potenziale  $V(x; \lambda)$  ammette un unico punto di minimo reale per  $x = 0$ , dunque le espansioni perturbative associate sono Borel-risommabili al risultato esatto già nell'ambito della teoria standard delle perturbazioni.

L'espansione perturbativa per l'energia dello stato fondamentale è

$$E_0(\lambda) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\lambda - \frac{21}{32}\lambda^2 + \frac{333}{128}\lambda^3 + \dots \quad (5.3)$$

e la corrispondente espansione dell'autofunzione è

$$\psi_0(x; \lambda) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[ 1 - \left( \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^4 \right) \lambda + \left( \frac{21}{32}x^2 + \frac{31}{128}x^4 + \frac{13}{192}x^6 + \frac{1}{128}x^8 \right) \lambda^2 + \dots \right] \quad (5.4)$$

Espansioni simili si hanno per gli stati eccitati.

Siamo andati a calcolare gli autovalori e le autofunzioni dell'energia per  $\lambda = 1$  usando  $N = 200$  termini di espansione perturbativa in  $\lambda$ . In tabella 5.1 riportiamo i primi tre valori dell'energia stimati con la teoria delle perturbazioni, arrotondati alla quinta cifra decimale, e li confrontiamo con gli autovalori ottenuti con il metodo variazionale di Rayleigh-Ritz.  $\Delta E_\nu / E_\nu^{RR}$  è la differenza relativa tra l'energia calcolata perturbativamente  $E_\nu$  e l'energia calcolata con il metodo di Rayleigh-Ritz  $E_\nu^{RR}$ . Allo stesso modo sono stati calcolate le differenze relative tra i valori della funzione d'onda perturbativa e quella variazionale per alcuni valori di  $x$ . In figura 5.1 riportiamo una rappresentazione del potenziale e delle autofunzioni associate agli autovalori dell'energia.

Oscillatore anarmonico, $\lambda = 1$							
$\nu$	$E_\nu$	$\Delta E_\nu/E_\nu^{RR}$	$x = 0$	$x = 1/2$	$x = 1$	$x = 3/2$	$x = 2$
0	0.69618	$2 \cdot 10^{-32}$	$8 \cdot 10^{-11}$	$9 \cdot 10^{-11}$	$1 \cdot 10^{-10}$	$4 \cdot 10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-9}$
1	2.32441	$4 \cdot 10^{-30}$	—	$5 \cdot 10^{-11}$	$4 \cdot 10^{-11}$	$9 \cdot 10^{-12}$	$5 \cdot 10^{-10}$
2	4.32752	$2 \cdot 10^{-27}$	$6 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-6}$

Tabella 5.1: Analisi di alcuni livelli energetici dell'oscillatore anarmonico (5.2) per  $\lambda = 1$  calcolati con  $N = 200$  ordini perturbativi. Come normalizzazione per la funzione d'onda si è preso  $x_0 = 1/6$ . La dicitura "—" significa che la funzione d'onda variazionale ha un nodo.

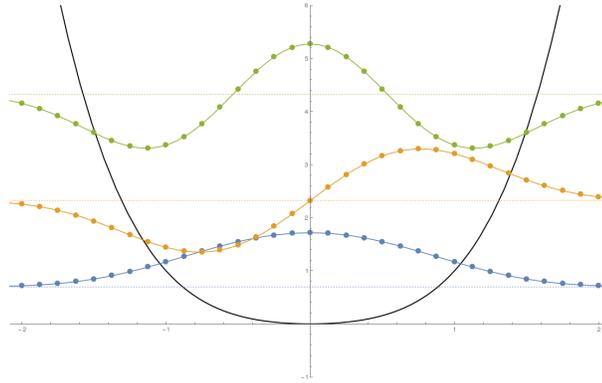


Figura 5.1: Rappresentazione dei primi tre autostati dell'oscillatore anarmonico (5.2) per  $\lambda = 1$ . Il potenziale  $V(x, \lambda)$  è indicato con la linea nera; le linee orizzontali tratteggiate sono gli autovalori dell'energia. Riguardo alle funzioni d'onda, i punti rappresentano i valori calcolati perturbativamente e le linee continue sono le autofunzioni ottenute con il metodo di Rayleigh-Ritz. Per facilitare la visualizzazione lo zero di ciascuna funzione d'onda è stato fissato all'autovalore dell'energia corrispondente.

## 5.2 Doppia buca simmetrica

Come abbiamo visto nella sezione 1.3, per ottenere lo spettro in energia della doppia buca simmetrica è necessario tenere conto di contributi istantonici, e l'espansione perturbativa attorno a ciascuno dei due minimi non sarà Borel-risommabile. La teoria standard delle perturbazioni richiederebbe di considerare un numero infinito di contributi istantonici per trovare il significato esatto, ma la teoria esatta delle perturbazioni ne rende la valutazione molto più semplice. Consideriamo dunque il potenziale

$$V(x; \lambda) = \frac{\lambda}{2} \left( x^2 - \frac{1}{4\lambda} \right)^2, \quad (5.5)$$

e la relativa decomposizione nel potenziale ausiliario

$$V_0 = \frac{1}{32\lambda} + \frac{\lambda_0}{2} x^2 + \frac{\lambda}{2} x^4, \quad V_1 = - \left( 1 + \frac{1}{2\lambda_0} \right) \frac{x^2}{2}. \quad (5.6)$$

L'espansione perturbativa per l'energia dello stato fondamentale è

$$E_0(\lambda, \lambda_0) = \frac{1}{32\lambda} + \frac{\lambda_0^{1/2}}{2} - \frac{2\lambda_0 - 3\lambda_0^{1/2} + 1}{8\lambda_0^{3/2}}\lambda - \frac{4\lambda_0^2 - 24\lambda_0^{3/2} + 46\lambda_0 - 12\lambda_0^{1/2} + 1}{64\lambda_0^{7/2}}\lambda^2 + \dots \quad (5.7)$$

e la corrispondente espansione dell'autofunzione è

$$\psi_0(x; \lambda, \lambda_0) = e^{-\sqrt{\lambda_0} \frac{x^2}{2}} \left[ 1 + \left( \frac{1 - 3\lambda_0^{1/2} + 2\lambda_0}{8\lambda_0^{3/2}} x^2 - \frac{1}{8\lambda_0^{1/2}} x^4 \right) \lambda + \dots \right]. \quad (5.8)$$

Espansioni simili si hanno per gli stati eccitati.

Siamo andati a calcolare gli autovalori e le autofunzioni dell'energia per  $\lambda = \lambda_0 = 1$  e per  $\lambda = \lambda_0 = 1/32$  usando  $N = 200$  termini di espansione perturbativa in  $\lambda$ . In tabella 5.2 riportiamo i valori dell'energia, arrotondati alla quinta cifra decimale, e li confrontiamo con gli autovalori ottenuti con il metodo variazionale di Rayleigh-Ritz. Allo stesso modo sono stati calcolate le differenze relative tra i valori della funzione d'onda perturbativa e quella variazionale per alcuni valori di  $x$ . In figura 5.2 riportiamo una rappresentazione del potenziale e delle autofunzioni associate ad alcuni livelli energetici.

Doppia buca simmetrica, $\lambda = 1$							
$\nu$	$E_\nu$	$ \Delta E_\nu/E_\nu^{RR} $	$x = 0$	$x = 1/2$	$x = 1$	$x = 3/2$	$x = 2$
0	0.46626	$6 \cdot 10^{-34}$	$1 \cdot 10^{-11}$	$< 10^{-99}$	$5 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{-9}$
1	1.69814	$1 \cdot 10^{-30}$	—	$< 10^{-99}$	$2 \cdot 10^{-11}$	$1 \cdot 10^{-10}$	$8 \cdot 10^{-10}$
2	3.44205	$5 \cdot 10^{-27}$	$3 \cdot 10^{-9}$	$< 10^{-99}$	$4 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-9}$	$8 \cdot 10^{-9}$
3	5.45819	$2 \cdot 10^{-25}$	—	$< 10^{-99}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-3}$
Doppia buca simmetrica, $\lambda = 1/32$							
$\nu$	$E_\nu$	$ \Delta E_\nu/E_\nu $	$x = 0$	$x = 1/2$	$x = 1$	$x = 3/2$	$x = 2$
0	0.45021	$2 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-3}$
1	0.47413	$2 \cdot 10^{-11}$	—	$3 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$8 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-5}$

Tabella 5.2: Analisi di alcuni livelli energetici  $\nu$  della doppia buca simmetrica (5.5) per  $\lambda = 1$  e  $\lambda = 1/32$  calcolati con  $N = 200$  ordini perturbativi. Come normalizzazione si è preso il fondo della buca,  $x_0 = 1/(2\sqrt{\lambda})$ . La dicitura "—" significa che la funzione d'onda variazionale ha un nodo, mentre " $< 10^{-99}$ " significa che la differenza relativa è inferiore alla precisione con cui sono stati svolti i calcoli.

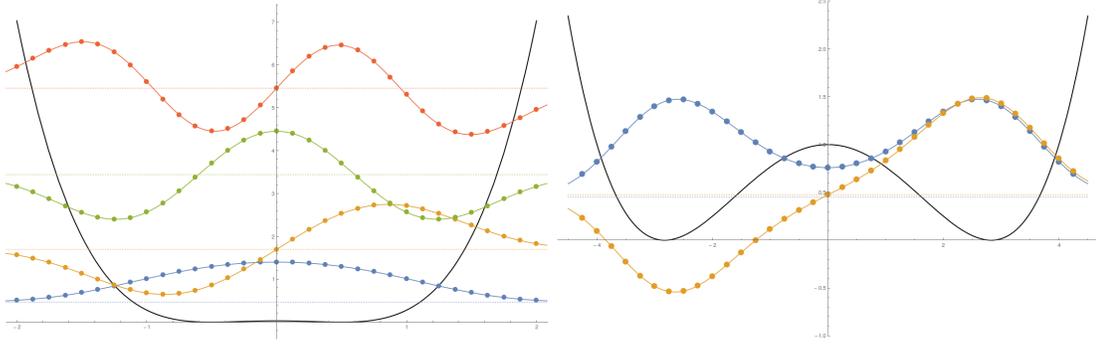


Figura 5.2: Rappresentazione dei primi autostati della doppia buca simmetrica (5.5) per  $\lambda = 1$  (sinistra) e per  $\lambda = 1/32$  (destra). Il potenziale  $V(x, \lambda)$  è indicato con la linea nera; le linee orizzontali tratteggiate sono gli autovalori dell'energia. Riguardo alle funzioni d'onda, i punti rappresentano i valori calcolati perturbativamente e le linee continue sono le autofunzioni ottenute con il metodo di Rayleigh-Ritz. Per facilitare la visualizzazione lo zero di ciascuna funzione d'onda è stato fissato all'autovalore dell'energia corrispondente.

### 5.3 Doppia buca supersimmetrica

Un potenziale interessante è quello della doppia buca a cui è aggiunta una deformazione lineare:

$$V(x; \lambda) = \frac{\lambda}{2} \left( x^2 - \frac{1}{4\lambda} \right)^2 + \sqrt{\lambda}x. \quad (5.9)$$

Questo potenziale è quello che si ottiene dalla versione supersimmetrica del potenziale a doppia buca per integrazione sulle variabili fermioniche, da cui il nome. È noto [24] che l'energia dello stato fondamentale  $E_0$  è nulla ad ogni ordine perturbativo a causa della supersimmetria. A livello non perturbativo, però, si ha  $E_0 \neq 0$  per la rottura della supersimmetria.

Questo rende la doppia buca supersimmetrica il sistema ideale in cui testare l'efficacia della teoria esatta delle perturbazioni. A questo scopo introduciamo il potenziale ausiliario

$$V_0 = \frac{1}{32\lambda} + \frac{\lambda_0}{2}x^2 + \frac{\lambda}{2}x^4, \quad V_1 = \frac{x}{\sqrt{\lambda}} - \left(1 + \frac{1}{2\lambda_0}\right) \frac{x^2}{2}. \quad (5.10)$$

L'espansione perturbativa per l'energia dello stato fondamentale è

$$E_0(\lambda, \lambda_0) = \frac{1}{32\lambda} + \frac{\lambda_0^{1/2}}{2} - \frac{2\lambda_0 + \lambda_0^{1/2} + 1}{8\lambda_0^{3/2}}\lambda - \frac{4\lambda_0^2 + 8\lambda_0^{3/2} - 50\lambda_0 + 4\lambda_0^{1/2} + 1}{64\lambda_0^{7/2}}\lambda^2 + \dots \quad (5.11)$$

e la corrispondente espansione dell'autofunzione è

$$\psi_0(x; \lambda, \lambda_0) = e^{-\sqrt{\lambda_0} \frac{x^2}{2}} \left[ 1 - \frac{x}{\lambda_0^{1/2}}\lambda^{1/2} + \left( \frac{1 + \lambda_0^{1/2} + 2\lambda_0}{8\lambda_0^{3/2}}x^2 - \frac{1}{8\lambda_0^{1/2}}x^4 \right) \lambda + \dots \right]. \quad (5.12)$$

Espansioni simili si hanno per gli stati eccitati.

Siamo andati a calcolare gli autovalori e le autofunzioni dell'energia per  $\lambda = \lambda_0 = 1$  usando  $N = 200$  termini di espansione perturbativa in  $\lambda$ . In tabella 5.3 riportiamo i valori dell'energia,

arrotondati alla quinta cifra decimale, e li confrontiamo con gli autovalori ottenuti con il metodo variazionale di Rayleigh-Ritz. Allo stesso modo sono stati calcolate le differenze relative tra i valori della funzione d'onda perturbativa e quella variazionale per alcuni valori di  $x$ . In figura 5.3 riportiamo una rappresentazione del potenziale e delle autofunzioni associate ad alcuni livelli energetici.

Doppia buca supersimmetrica, $\lambda = 1$							
$\nu$	$E_\nu$	$\Delta E_\nu / E_\nu^{RR}$	$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$
0	0.16851	$2 \cdot 10^{-27}$	$6 \cdot 10^{-10}$	$8 \cdot 10^{-11}$	$3 \cdot 10^{-11}$	$1 \cdot 10^{-10}$	$4 \cdot 10^{-9}$
1	1.69814	$1 \cdot 10^{-30}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-9}$	$4 \cdot 10^{-7}$

Tabella 5.3: Analisi di alcuni livelli energetici della doppia buca supersimmetrica (5.9) per  $\lambda = 1$  calcolati con  $N = 200$  ordini perturbativi. Come normalizzazione per la funzione d'onda si è preso il fondo della buca.

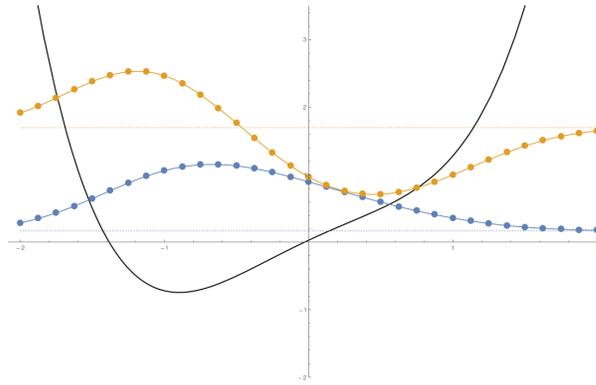


Figura 5.3: Rappresentazione dei primi autostati della doppia buca supersimmetrica (5.9) per  $\lambda = 1$ . Il potenziale  $V(x, \lambda)$  è indicato con la linea nera; le linee orizzontali tratteggiate sono gli autovalori dell'energia. Riguardo alle funzioni d'onda, i punti rappresentano i valori calcolati perturbativamente e le linee continue sono le autofunzioni ottenute con il metodo di Rayleigh-Ritz. Per facilitare la visualizzazione lo zero di ciascuna funzione d'onda è stato fissato all'autovalore dell'energia corrispondente.

## 5.4 Oscillatore quartico

Consideriamo l'oscillatore quartico puro, il cui potenziale è della forma

$$V(x; \lambda) = 4\lambda x^4. \quad (5.13)$$

Il fattore 4 è tale per cui, a meno di un riscaldamento, l'Hamiltoniana associata è della forma  $p^2 + x^4$ , che è la normalizzazione convenzionale per questo modello. L'oscillatore quartico è un sistema fortemente accoppiato; il potenziale  $V(x; \lambda)$  è convesso con un minimo degenerare in  $x = 0$ . Poichè manca un termine di secondo grado in  $x$ , la teoria standard delle perturbazioni non si può usare. Possiamo però considerare la seguente decomposizione:

$$V_0 = 4\lambda x^4 + 2x^2, \quad V_1 = -\frac{2}{\lambda_0} x^2, \quad (5.14)$$

in modo che per  $\lambda = \lambda_0$  si recuperi il potenziale iniziale. Con questa scelta,  $V_0$  ha un unico punto di minimo non degenerare in  $x = 0$  e si può usare la teoria delle perturbazioni.

L'espansione perturbativa per l'energia dello stato fondamentale è

$$E_0(\lambda, \lambda_0) = 1 + \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{2\lambda_0} \right) \lambda - \frac{2 - 12\lambda_0 + 21\lambda_0^2}{16\lambda_0^2} \lambda^2 + \dots \quad (5.15)$$

e la corrispondente espansione dell'autofunzione è

$$\psi_0(x; \lambda, \lambda_0) = e^{-\sqrt{2}\frac{x^2}{2}} \left[ 1 + \left( \frac{2 - 3\lambda_0}{4\lambda_0} x^2 - \frac{1}{2} x^4 \right) \lambda + \dots \right]. \quad (5.16)$$

Espansioni simili si hanno per gli stati eccitati.

Siamo andati a calcolare gli autovalori e le autofunzioni dell'energia per  $\lambda = \lambda_0 = 1$  usando  $N = 200$  termini di espansione perturbativa in  $\lambda$ . In tabella 5.4 riportiamo i valori dell'energia, arrotondati alla quinda cifra decimale, e li confrontiamo con gli autovalori ottenuti con il metodo variazionale di Rayleigh-Ritz. Allo stesso modo sono stati calcolate le differenze relative tra i valori della funzione d'onda perturbativa e quella variazionale per alcuni valori di  $x$ . In figura 5.4 riportiamo una rappresentazione del potenziale e delle autofunzioni associate ad alcuni livelli energetici.

Oscillatore quartico, $\lambda = 1$							
$\nu$	$E_\nu$	$\Delta E_\nu / E_\nu^{RR}$	$x = 0$	$x = 3/8$	$x = 3/4$	$x = 9/8$	$x = 3/2$
0	1.06036	$3 \cdot 10^{-25}$	$3 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-11}$	$4 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{-9}$
1	3.79967	$4 \cdot 10^{-25}$	—	$7 \cdot 10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-11}$	$7 \cdot 10^{-11}$	$6 \cdot 10^{-10}$
2	7.45570	$7 \cdot 10^{-24}$	$5 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-9}$	$3 \cdot 10^{-8}$

Tabella 5.4: Analisi di alcuni livelli energetici dell'oscillatore quartico (5.13) per  $\lambda = 1$  calcolati con  $N = 200$  ordini perturbativi. Come normalizzazione per la funzione d'onda si è preso  $x = 1/\sqrt{2}$ . La dicitura "—" significa che la funzione d'onda variazionale ha un nodo.

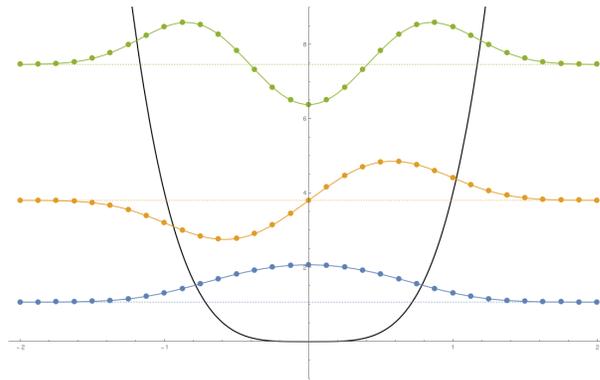


Figura 5.4: Rappresentazione dei primi autostati dell'oscillatore quartico (5.13) per  $\lambda = 1$ . Il potenziale  $V(x, \lambda)$  è indicato con la linea nera; le linee orizzontali tratteggiate sono gli autovalori dell'energia. Riguardo alle funzioni d'onda, i punti rappresentano i valori calcolati perturbativamente e le linee continue sono le autofunzioni ottenute con il metodo di Rayleigh-Ritz. Per facilitare la visualizzazione lo zero di ciascuna funzione d'onda è stato fissato all'autovalore dell'energia corrispondente.

# Conclusioni

In questa tesi abbiamo studiato alcuni sistemi quantomeccanici in una dimensione soggetti a un potenziale di legame e a spettro discreto. Abbiamo mostrato una caratterizzazione di alcune condizioni per la risommabilità alla Borel della teoria delle perturbazioni in Meccanica Quantistica. In particolare, quando il potenziale ammette un unico punto critico di minimo, abbiamo mostrato che l'espansione perturbativa del path integral Euclideo è Borel risommabile al risultato esatto. Alcuni risultati noti riguardo la risommabilità alla Borel di certi sistemi, in particolare dell'oscillatore anarmonico, sono stati riderivati in questa ottica.

Abbiamo anche illustrato come la teoria esatta delle perturbazioni, introdotta da Serone et al. [16, 17], è in grado di estendere i risultati succitati a generici potenziali di legame. In particolare, la teoria esatta delle perturbazioni è in grado di catturare tutte le correzioni non perturbative della usuale teoria delle perturbazioni evitando tutte le complicazioni che tipicamente vi appaiono: non c'è più bisogno di andare a ricostruire i termini non perturbativi come provenienti da un'approssimazione semiclassica con la teoria della resurgence, oppure di effettuare una decomposizione in Lefschetz thimble complicata. Inoltre, si è trovato che la teoria esatta delle perturbazioni è maggiormente efficace in regime di strong coupling.

Questi risultati sono stati illustrati in dettaglio con diversi esempi e mostrandone anche alcune applicazioni. Nello specifico, siamo andati a studiare alcuni sistemi quantomeccanici: l'oscillatore anarmonico, la doppia buca simmetrica, la doppia buca supersimmetrica, l'oscillatore quartico. In questo lavoro si è anche andati ad estendere l'analisi già presente in letteratura allo studio non solo dei primi autovalori dell'energia di questi sistemi, ma anche delle loro autofunzioni, ottenendo un alto grado di precisione per i primi livelli energetici.

Sebbene metodi variazionali, come il metodo di Rayleigh-Ritz, rimangano comunque più affidabili per questi semplici casi, i risultati che abbiamo esposto sono interessanti soprattutto per le loro possibili estensioni a casi più complicati. Ad esempio, un possibile sviluppo è la generalizzazione della teoria esatta delle perturbazioni a sistemi quantomeccanici in più dimensioni; un risultato assai più importante sarebbe riuscire ad utilizzare questi metodi nella trattazione di teorie di campo quantistiche. Data la recente pubblicazione dei lavori su cui ci siamo basati si tratta di un terreno del tutto inesplorato e potenzialmente prolifico.



# Appendice A

## Teoria di Picard-Lefschetz

La teoria di Picard-Lefschetz permette una riformulazione geometrica del metodo steepest descent, e ne suggerisce una generalizzazione per i path integral.

Consideriamo un integrale della forma

$$Z(\lambda) = \int_{\mathcal{Y}} d\theta e^{-\mathcal{S}(\theta)/\lambda}, \quad (\text{A.1})$$

dove  $\lambda$  è un parametro (che per il momento prenderemo reale), e  $\mathcal{Y}$  è una varietà affine reale di dimensione finita dotata della forma volume  $d\theta$ . Per fissare le idee, si può pensare al caso semplice  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^n$ , ma si possono considerare anche casi più generali. Chiediamo che  $\mathcal{S} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{C}$  sia un polinomio su  $\mathcal{Y}$ , e che  $\text{Re} \mathcal{S} \rightarrow +\infty$  per  $|\theta| \rightarrow \infty$  se  $\mathcal{Y}$  non è compatta in modo da avere convergenza; poichè  $\mathcal{S}$  sarà in generale una quantità complessa l'integrale (A.1) è oscillante. Nel linguaggio della Fisica,  $\mathcal{Y}$  è lo spazio delle configurazioni,  $\mathcal{S}$  è l'azione Euclidea del sistema e  $Z$  è la funzione di partizione. Il parametro  $\lambda$  può avere diversi significati: può essere sostituito da  $\hbar$  in Meccanica Quantistica, da  $k_B T$  in Meccanica Statistica, e così via.

Assumiamo che esista una complessificazione  $\mathcal{X}$  di  $\mathcal{Y}$ , cioè che esista una varietà complessa  $\mathcal{X}$  tale per cui esista una immersione  $\mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{X}$  e per cui si abbia  $y = \bar{y}$  per ogni  $y \in \mathcal{Y}$ . In coordinate locali olomorfe  $(z^1, \dots, z^n)$ ,  $\mathcal{X}$  ammetterà la metrica hermitiana  $ds^2 = \frac{1}{2} g_{i\bar{j}} (dz^i \otimes d\bar{z}^j + d\bar{z}^j \otimes dz^i)$ , e denotiamo la 2-forma ad essa associata come  $\omega = \frac{i}{2} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$ , che assumeremo chiusa<sup>1</sup>: in questo modo  $\mathcal{X}$  ha una naturale struttura simplettica.

In analogia con quanto fatto nella sezione 2.2, vogliamo costruire i cammini d'integrazione su cui  $\text{Im}(\mathcal{S}/\lambda)$  è costante in modo che l'integrale non sia oscillante. Sia dunque  $\mathcal{I} = -\mathcal{S}/\lambda$  (ora  $\lambda$  può anche essere complesso), e consideriamo  $h = \text{Re} \mathcal{I}$  come *funzione di Morse*<sup>2</sup>. Poichè l'integrando è dato da  $e^{h+i \text{Im} \mathcal{I}}$ ,  $h$  è legata al peso di una data configurazione in  $\mathcal{X}$ .

Per trovare questi cammini di integrazione è utile costruire una nozione di *omologia relativa* su  $\mathcal{X}$  partendo dalla funzione di Morse  $h$ . Per farlo, introduciamo l'equazione di Morse per il flusso secondo gradiente:

---

<sup>1</sup>In questo caso si dice che  $g_{i\bar{j}}$  è una *metrica di Kähler*, e che  $\omega$  è la *forma di Kähler* associata alla metrica.

<sup>2</sup>Una funzione di Morse è semplicemente una funzione a valori reali i cui punti critici  $h'(p) = 0$  sono non degeneri.

$$\frac{dz^i}{dt} = -2g^{i\bar{j}} \frac{\partial h}{\partial z^{\bar{j}}} = -g^{i\bar{j}} \frac{\partial \bar{\mathcal{I}}}{\partial z^{\bar{j}}}, \quad \frac{dz^{\bar{j}}}{dt} = -2g^{i\bar{j}} \frac{\partial h}{\partial z^i} = -g^{i\bar{j}} \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial z^i}. \quad (\text{A.2})$$

Lungo le soluzioni di queste equazioni la funzione di Morse  $h$  è monotona decrescente:

$$\frac{dh}{dt} = -2g^{i\bar{j}} \partial_i h \bar{\partial}_{\bar{j}} h \leq 0, \quad (\text{A.3})$$

e l'uguaglianza è soddisfatta solo nei punti critici di  $h$ . Inoltre, posto  $H = \text{Im } \mathcal{I}$ , si ha che  $H$  è una quantità conservata lungo le soluzioni di (A.2):

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dz^i}{dt} \partial_i H + \frac{dz^{\bar{j}}}{dt} \bar{\partial}_{\bar{j}} H = -\frac{g^{i\bar{j}}}{2i} (\partial_i \mathcal{I} \bar{\partial}_{\bar{j}} \mathcal{I} + \partial_i \mathcal{I} (-\bar{\partial}_{\bar{j}} \mathcal{I})) = 0. \quad (\text{A.4})$$

Un altro modo di vedere la conservazione di  $H$  consiste nello sfruttare la struttura simplettica di  $\mathcal{X}$ : le equazioni (A.2) non sono altro che le equazioni di Hamilton di hamiltoniana  $H = \text{Im } \mathcal{I}$ :

$$\frac{dz^i}{dt} = \{H, z^i\}, \quad \frac{dz^{\bar{j}}}{dt} = \{H, z^{\bar{j}}\}, \quad (\text{A.5})$$

e la parentesi di Poisson è definita come  $\{f, g\} = -2ig^{k\bar{l}}(\partial_k f \bar{\partial}_{\bar{l}} g - \bar{\partial}_{\bar{l}} f \partial_k g)$ .

Se vogliamo integrare  $e^{\mathcal{I}}$  lungo un cammino su  $\mathcal{X}$ , deve essere  $h = \text{Re } \mathcal{I} \rightarrow -\infty$  per  $|z| \rightarrow \infty$  lungo tale cammino. Poniamo allora  $\mathcal{X}_{-T} = \{p \in \mathcal{X} | h(p) \leq -T\}$ : ogni cammino che soddisfi le proprietà suddette deve avere gli estremi in  $\mathcal{X}_{-T}$  per  $T \gg 1$ , cioè deve appartenere a  $H_n(\mathcal{X}, \mathcal{X}_{-T}; \mathbb{Z})$  per  $T \gg 1$ . Quello che stiamo facendo è di identificare tutti i punti in  $\mathcal{X}$  su cui  $e^h$  è sufficientemente piccolo. Un modo per calcolare un elemento generatore di  $H_n(\mathcal{X}, \mathcal{X}_{-T}; \mathbb{Z})$  è il seguente: se nessuna coppia di punti critici è collegata dalle soluzioni dell'equazione (A.2), allora la funzione di Morse  $h$  diverge a  $-\infty$  per  $t \rightarrow +\infty$  lungo il flusso. Possiamo quindi definire il Lefschetz thimble  $\mathcal{J}_\sigma$  associato al punto critico  $p_\sigma$  come

$$\mathcal{J}_\sigma = \left\{ c(0) \in \mathcal{X} \left| \frac{dc}{dt} = \{\text{Im } \mathcal{I}, c\}, \lim_{t \rightarrow -\infty} c(t) = p_\sigma \right. \right\}, \quad (\text{A.6})$$

e  $\mathcal{J}_\sigma$  genera  $H_n(\mathcal{X}, \mathcal{X}_{-T}; \mathbb{Z})$ : per costruzione, l'integrale è esponenzialmente convergente su  $\mathcal{J}_\sigma$ , e con questa definizione  $\mathcal{J}_\sigma$  ha la dimensione corretta.

A questo punto possiamo riscrivere il cammino di integrazione  $\mathcal{Y}$  trattandolo come un elemento di  $H_n(\mathcal{X}, \mathcal{X}_{-T}; \mathbb{Z})$ :

$$\mathcal{Y} = \sum_{\sigma} \mathbf{n}_\sigma \mathcal{J}_\sigma, \quad \mathbf{n}_\sigma \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.7})$$

Con questa riscrittura, l'integrale (A.1) diventa la somma di integrali convergenti:

$$Z(\lambda) = \sum_{\sigma} \mathbf{n}_\sigma \int_{\mathcal{J}_\sigma} d\theta e^{-S(\theta)/\lambda}. \quad (\text{A.8})$$

Se definiamo  $\mathcal{K}_\sigma$  come l'elemento generatore dell'omologia relativa  $H_n(\mathcal{X}, \mathcal{X}^T; \mathbb{Z})$ , dove  $\mathcal{X}^T = \{x \in \mathcal{X} | h(x) \geq T\}$ , si trova

$$\mathcal{K}_\sigma = \left\{ c(0) \in \mathcal{X} \left| \frac{dc}{dt} = \{\text{Im } \mathcal{I}, c\}, \lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = p_\sigma \right. \right\}. \quad (\text{A.9})$$

Poichè  $h(z) \leq h(p_\sigma)$  per  $z \in \mathcal{J}_\sigma$  e  $h(z) \geq h(p_\sigma)$  per  $z \in \mathcal{K}_\sigma$ ,  $\mathcal{J}_\sigma$  e  $\mathcal{K}_\sigma$  si intersecano solo in  $p_\sigma$ , e se non ci sono flussi che connettono punti di sella diversi  $p_\sigma, p_\tau$ , si ha  $\langle \mathcal{J}_\sigma, \mathcal{K}_\tau \rangle = \delta_{\sigma\tau}$ . Si ritrova allora la formula

$$\mathbf{n}_\sigma = \langle \mathcal{Y}, \mathcal{K}_\sigma \rangle. \quad (\text{A.10})$$

Ora che abbiamo reso rigorosa la costruzione dei thimble e la definizione dei numeri di intersezione per integrali di dimensione finita, ne forniamo una generalizzazione ai path integral. Consideriamo a titolo di esempio il propagatore euclideo:

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int_{\mathcal{Y}} \mathcal{D}[x] e^{-\mathcal{S}[x]/\hbar}, \quad (\text{A.11})$$

dove  $\mathcal{Y} = \{x : [t_i, t_f] \rightarrow \mathbb{R} \mid x(t_i) = x_i, x(t_f) = x_f\}$  è l'insieme dei cammini che soddisfano le condizioni al contorno date. Per applicare i risultati della teoria di Picard-Lefschetz bisogna considerare i seguenti passaggi:

1. Per prima cosa bisogna prendere la complessificazione di  $\mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{X} = \{z : [t_i, t_f] \rightarrow \mathbb{C} \mid z(t_i) = x_i, z(t_f) = x_f\}$ , e trovare tutte le soluzioni in  $\mathcal{X}$  dell'equazione del moto "complessificata"  $\delta\mathcal{S}[z] = 0$ . Poichè supponiamo che  $\mathcal{S}[z]$  sia olomorfo, usando le condizioni di Cauchy-Riemann e scrivendo  $z(t) = x(t) + iy(t)$ , possiamo riscrivere  $\delta\mathcal{S}[z] = 0$  come

$$\frac{\delta \operatorname{Re} \mathcal{S}}{\delta x} = 0, \quad \frac{\delta \operatorname{Re} \mathcal{S}}{\delta y} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Denotiamo con  $z_\sigma$  le soluzioni trovate.

2. Per ciascun  $z_\sigma$ , calcoliamo il Lefschetz thimble  $\mathcal{J}_\sigma$  risolvendo le equazioni di flusso secondo gradiente [21]:

$$\frac{\partial z(t; u)}{\partial u} = \frac{\overline{\delta\mathcal{S}[z(t; u)]}}{\delta z(t; u)}, \quad (\text{A.13})$$

con le condizioni al contorno  $z(t; -\infty) = z_\sigma(t)$  e  $z(t_i, u) = x_i, z(t_f, u) = x_f$ . Si trova che  $\operatorname{Re} \mathcal{S} \rightarrow +\infty$  all'infinito e che  $\operatorname{Im} \mathcal{S}$  è costante lungo un flusso: quindi il path integral su ciascun Lefschetz thimble è convergente,

$$\mathcal{J}_\sigma = \left\{ z(\cdot; 0) : [t_i, t_f] \rightarrow \mathbb{C} \left| \frac{\partial z(t; u)}{\partial u} = \frac{\overline{\delta\mathcal{S}[z(t; u)]}}{\delta z(t; u)}, \lim_{u \rightarrow -\infty} z(t; u) = z_\sigma(t) \right. \right\}. \quad (\text{A.14})$$

3. Decomponiamo (A.11) nella somma di path integral lungo i Lefschetz thimble:

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \sum_{\sigma} \langle \mathcal{Y}, \mathcal{K}_\sigma \rangle \int_{\mathcal{J}_\sigma} \mathcal{D}[z] e^{-\mathcal{S}[z]/\hbar}, \quad (\text{A.15})$$

dove

$$\mathcal{K}_\sigma = \left\{ z(\cdot; 0) : [t_i, t_f] \rightarrow \mathbb{C} \left| \frac{\partial z(t; u)}{\partial u} = \frac{\overline{\delta\mathcal{S}[z(t; u)]}}{\delta z(t; u)}, \lim_{u \rightarrow +\infty} z(t; u) = z_\sigma(t) \right. \right\}. \quad (\text{A.16})$$

Il calcolo dei coefficienti  $\mathbf{n}_\sigma$  nel caso dei path integral è tipicamente molto difficile. Inoltre, questa procedura è in qualche senso formale e va effettuata con le dovute regolarizzazioni degli integrali.



# Bibliografia

- [1] Behtash, A., G.V. Dunne, T. Schaefer, T. Sulejmanpasic e M. Unsal: *Toward Picard-Lefschetz Theory of Path Integrals, Complex Saddles and Resurgence*. 2015.
- [2] Bender, C. M. e T. T. Wu: *Anharmonic Oscillator*. Phys. Rev., 184:1231–1260, Aug 1969.
- [3] Bender, C. M. e T. T. Wu: *Large order behavior of Perturbation theory*. Phys. Rev. Lett., 27:461, 1971.
- [4] Berry, M. V. e C. J. Howls: *Hyperasymptotics for Integrals with Saddles*. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 434(1892):657–675, 1991.
- [5] Callan, Jr., C. G. e S. R. Coleman: *The Fate of the False Vacuum. 2. First Quantum Corrections*. Phys. Rev., D16:1762–1768, 1977.
- [6] Coleman, S.: *Aspects of Symmetry: Selected Erice Lectures*. Cambridge University Press, 1985.
- [7] Dorigoni, D.: *An Introduction to Resurgence, Trans-Series and Alien Calculus*. 2014.
- [8] Dyson, F. J.: *Divergence of Perturbation Theory in Quantum Electrodynamics*. Phys. Rev., 85:631–632, Feb 1952.
- [9] Feynman, R. P., A. R. Hibbs e D. F. Styer: *Quantum mechanics and path integrals*. Courier Corporation, 2010.
- [10] Howls, C. J.: *Hyperasymptotics for multidimensional integrals, exact remainder terms and the global connection problem*. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 453(1966):2271–2294, 1997.
- [11] Kleinert, H. e V. Schulte-Frohlinde: *Critical Properties of  $\phi^4$ -Theories*. 2001.
- [12] Mariño, M.: *Instantons and Large N: An Introduction to Non-Perturbative Methods in Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2015.
- [13] Mariño, M.: *Lectures on non-perturbative effects in large N gauge theories, matrix models and strings*. Fortsch. Phys., 62:455–540, 2014.
- [14] Mathematica: *Wolfram Research Inc.*, 2017.

- [15] Rattazzi, R.: *The Path Integral approach to Quantum Mechanics. Lecture Notes for Quantum Mechanics IV*, 2009.
- [16] Serone, M., G. Spada e G. Villadoro: *Instantons from Perturbation Theory*. 2016.
- [17] Serone, M., G. Spada e G. Villadoro: *The Power of Perturbation Theory*. JHEP, 05:056, 2017.
- [18] Smirnov, V. I.: *Corso di matematica superiore*. Editori riuniti, 1992.
- [19] Sokal, A. D.: *An improvement of Watson's Theorem on Borel summability*. J. Math. Phys., 21:261–263, 1980.
- [20] Sulejmanpasic, T. e M. Ünsal: *Aspects of Perturbation theory in Quantum Mechanics: The BenderWu Mathematica package*. 2016.
- [21] Tanizaki, Y.: *Study on sign problem via Lefschetz-thimble path integral*, 2015.
- [22] Vainshtein, A. I., V. I. Zakharov, V. A. Novikov e M. A. Shifman: *ABC's of Instantons*. Sov. Phys. Usp., 25:195, 1982.
- [23] Vieira, P.: *Mathematica Summer School on Theoretical Physics*. <http://msstp.org>.
- [24] Witten, E.: *Dynamical Breaking of Supersymmetry*. Nucl. Phys., B188:513, 1981.
- [25] Witten, E.: *Analytic Continuation Of Chern-Simons Theory*. AMS/IP Stud. Adv. Math., 50:347–446, 2011.