

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Il Teorema di Uniformizzazione in chiave analitica

Relatrice:
Prof.ssa Annalisa Cesaroni

Laureanda: Linda Giusti
Matricola: 1225376

Anno Accademico 2022/2023

15 dicembre 2023

Indice

Introduzione	iii
1 Equazione di Laplace	1
1.1 Formule di media	1
1.2 Principio del massimo e del minimo	4
1.3 Regolarità delle funzioni armoniche	5
1.4 Disuguaglianza di Harnack	9
1.5 Soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace	11
1.6 Funzione di Green	13
1.7 Integrale di Poisson	17
1.8 Teoremi di convergenza	22
1.9 Funzioni armoniche in senso distribuzionale	27
1.10 Metodo di Perron	28
2 Teorema di uniformizzazione	41
2.1 Funzioni armoniche sul piano complesso	41
2.2 Funzioni armoniche su superfici di Riemann	44
2.3 Funzioni di Green su superfici di Riemann	48
2.4 Funzioni di Green bipolari su superfici di Riemann	55
A Prerequisiti	63
A.1 Notazioni	63
A.2 Richiami	65
Bibliografia	73

Introduzione

Durante la seconda metà dell'Ottocento, prendono forma due teoremi strettamente legati: il teorema della mappa di Riemann e il teorema di uniformizzazione. Il primo afferma che ogni sottoinsieme aperto, non vuoto e semplicemente connesso del piano complesso è conforme al disco unitario aperto. Il secondo generalizza il primo, affermando che ogni superficie di Riemann semplicemente connessa è conforme o al disco unitario aperto, o al piano complesso, oppure alla sfera di Riemann. Il matematico finlandese Ahlfors, specializzato nell'ambito dell'analisi complessa e della teoria delle superfici di Riemann, li ha definiti rispettivamente come “uno dei teoremi più importanti dell'analisi complessa” [2] e “forse il teorema più importante in tutta la teoria delle funzioni analitiche in una variabile” [3].

La prima formulazione del teorema della mappa di Riemann risale al 1851 e si deve a Riemann stesso: in quel periodo la teoria delle funzioni complesse e quella delle superfici di Riemann andavano ancora delineandosi, motivo per cui la formulazione originale del teorema differisce, quantomeno formalmente, da quella moderna. La dimostrazione proposta dal matematico si serviva di strumenti prettamente analitici, tra cui serie di potenze, continuazioni analitiche e integrali di Cauchy; inoltre poggiava sul cosiddetto *principio di Dirichlet*, secondo il quale ogni funzione continua definita sul bordo di un aperto limitato e semplicemente connesso di \mathbb{R}^n dovrebbe potersi estendere ad una funzione armonica definita su tutto il dominio. Nel 1870 Weierstrass confutò questo principio. I risultati di Riemann non vennero accolti con favore, nondimeno posero le basi per gli studi successivi.

Nel 1882 Poincaré e, indipendentemente, Klein arrivarono ad un primo teorema di uniformizzazione, che l'anno successivo Poincaré generalizzò. La dimostrazione, tuttavia, era lacunosa, inoltre erano esclusi i casi di superfici di Riemann con singolarità interne; per questo e per il fatto che non risultava chiaro se la mappa di uniformizzazione fosse in effetti suriettiva, Hilbert criticò la dimostrazione di Poincaré ed inserì il teorema di uniformizzazione come ventiduesimo dei ventitré problemi proposti al Congresso internazionale dei matematici tenuto a Parigi nel 1900.

Tra il 1880 e il 1890 la teoria del potenziale, intimamente legata a quella delle funzioni armoniche, vide grandi sviluppi e nel 1887 Harnack pubblicò un risultato di risolubilità del problema di Dirichlet [1]: riconoscendo i problemi che altri matematici prima di lui, come Schwarz e Neumann, avevano riscontrato, legati alla natura del bordo del dominio, Harnack decise di cambiare approccio, introducendo l'uso delle funzioni di Green. In [1] è anche presente una dimostrazione del teorema della mappa di Riemann e il noto risultato di convergenza uniforme di funzioni armoniche che porta il suo nome (cfr. Teorema 1.23). Nel 1900 Osgood dimostrò l'esistenza di una funzione di Green per ogni sottoinsieme proprio e semplicemente connesso del piano complesso e successivamente congetturò una

generalizzazione a domini con bordo dato da una curva di Jordan semplice e chiusa. Nel 1907 Poincaré e, indipendentemente, Koebe diedero una dimostrazione rigorosa del teorema di uniformizzazione. La dimostrazione di Poincaré faceva uso delle funzioni di Green e dei risultati di Harnack. Koebe fornì diverse dimostrazioni, sempre più semplificate, ma tutte estremamente rigorose.

Nei primi anni del Novecento anche Hilbert diede il proprio contributo alla teoria, in particolare nel 1909 pubblicò sul *Göttingen Nachrichten* un articolo in cui, tra le altre cose, mostrava che il principio di Dirichlet vale solo per domini regolari (cfr. 1.3) e inoltre dava una dimostrazione diretta del teorema della mappa di Riemann in domini arbitrari. Nella pubblicazione successiva del giornale (due settimane dopo) vi era un articolo di Koebe in cui mostrava come passare dalla costruzione di Hilbert ad una che faceva uso di una funzione di Green.

Negli anni successivi molti altri matematici, come Carathéodory, Bieberbach e poi Perron, svilupparono nuovi metodi analitici che permisero dimostrazioni del teorema di uniformizzazione sempre più semplici. Altri ancora cercarono vie dimostrative di natura più geometrica, che si avvalevano di strumenti quali triangolazioni e il teorema di Riemann-Roch: verso la fine del Novecento, Demailly e Marin riuscirono a dare una dimostrazione puramente geometrica del teorema di uniformizzazione, a partire dal solo teorema della mappa di Riemann.

Il presente lavoro di tesi è finalizzato a dare una dimostrazione analitica del teorema di uniformizzazione, tramite funzioni di Green e funzioni di Green bipolari.

Nel primo capitolo si sviluppa la teoria delle funzioni armoniche e subarmoniche in \mathbb{R}^n . Si presentano i principi di massimo e minimo, la disuguaglianza di Harnack e si dimostra la regolarità analitica delle funzioni armoniche e armoniche in senso distribuzionale. Si deriva la soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace nel piano e in dimensione superiore, discutendone alcune differenze. Si definisce il concetto di funzione di Green e, utilizzando la soluzione fondamentale, si ottiene la funzione di Green della palla, da cui si deriva la soluzione del problema di Dirichlet nelle palle, tramite la formula integrale di Poisson. Tale formula e una caratterizzazione delle funzioni subarmoniche stanno alla base del metodo di Perron per la costruzione di funzioni armoniche in aperti limitati. Infine, tramite la definizione di barriera, si caratterizzano i punti regolari del bordo e il teorema di Wiener permette di risolvere il problema di Dirichlet in aperti limitati regolari. Il capitolo termina con la presentazione di alcune condizioni sufficienti, nel piano e in dimensione superiore, per la regolarità del bordo. Le fonti principali seguite per la redazione di questa prima parte sono state [5], [13] e [16].

Nel secondo capitolo si definiscono le funzioni armoniche e subarmoniche sul piano complesso e se ne dimostrano alcuni risultati, mettendole in relazione con le funzioni olomorfe. Si dà una dimostrazione del teorema della mappa di Riemann. Si introduce quindi il concetto di superficie di Riemann e ivi si ridefinisce quello di funzioni armoniche e subarmoniche. Si introducono le famiglie di Perron e si dimostra il teorema di Perron sulle superfici di Riemann. Si ridefinisce quindi il concetto di funzione di Green che permette di dimostrare la prima parte del teorema di uniformizzazione: se una superficie di Riemann semplicemente connessa ammette una funzione di Green, allora è conforme al disco unitario aperto. Si definiscono le superfici di Riemann iperboliche, caratterizzandole tramite l'esistenza di funzioni subarmoniche negative non costanti. Il capitolo termina presentando

do il concetto di funzione di Green bipolare per una superficie di Riemann e completando la dimostrazione del teorema di uniformizzazione: se una superficie di Riemann semplicemente connessa non ammette una funzione di Green e non è compatta, allora è conforme al piano complesso, altrimenti, se è compatta, allora è conforme alla sfera di Riemann. Le fonti principali seguite per la redazione di questa seconda parte sono state [11] e [14]. In appendice sono state definite le notazioni adoperate nel testo ed è stata richiamata la maggior parte degli elementi di analisi utilizzati nelle dimostrazioni presenti nella tesi, questo nell'intento di dare una trattazione quanto più esauriente degli argomenti esposti, accessibile anche a chi li affrontasse per la prima volta.

In questa sede ci tengo a ringraziare la mia relatrice, Annalisa Cesaroni, per avermi supportata, con pazienza e dedizione, nella stesura del presente elaborato.

Capitolo 1

Equazione di Laplace

Definizione. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, definiamo il laplaciano di una funzione $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ come

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n D_{ii}u = \operatorname{div} Du = \operatorname{tr}(D^2u).$$

Diciamo che u è

- armonica in Ω se $-\Delta u = 0$ (equazione di Laplace),
- subarmonica in Ω se $-\Delta u \leq 0$,
- superarmonica in Ω se $-\Delta u \geq 0$.

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto limitato con bordo \mathcal{C}^1 e $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, possiamo applicare il Teorema A.10 a $Du \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, ottenendo

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} Du \cdot \nu \, dS = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS. \quad (1.1)$$

1.1 Formule di media

Osservazione 1.1. Per ogni palla $B_r(y) \subset \mathbb{R}^n$ valgono

$$|B_r(y)| = r^n \omega_n \quad (1.2)$$

$$|\partial B_r(y)| = nr^{n-1} \omega_n \quad (1.3)$$

Dimostrazione. Tramite il diffeomorfismo

$$\begin{aligned} \tilde{g}: B_1(0) &\rightarrow B_r(y) \\ \omega &\mapsto r\omega + y \end{aligned}$$

che ha matrice jacobiana $D\tilde{g} = r^n \mathbb{1}_n$, possiamo operare un cambio di variabili che giustifica il seguente calcolo

$$|B_r(y)| = \int_{B_r(y)} dx = \int_{g(B_1(0))} dx = \int_{(B_1(0))} r^n dx = r^n \omega_n.$$

Analogamente il diffeomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbf{g}: \partial B_1(0) &\rightarrow \partial B_r(y) \\ \omega &\mapsto r\omega + y \end{aligned}$$

ha matrice jacobiana $D\mathbf{g} = r^{n-1}\mathbb{1}_n$ (per verificarlo consideriamo il diffeomorfismo dato dalle coordinate ipersferiche

$$\begin{aligned} \mathbf{h}: \prod_{n=1}^{n-2} [0, \pi] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \partial B_1(0) \\ (\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) &\mapsto (v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

ove $v_1 = \cos(\theta_1)$, $v_i = \prod_{t=1}^{i-1} \sin(\theta_t) \cos(\theta_i)$ per $i = 2, \dots, n-1$, $v_n = \prod_{t=1}^{n-1} \sin(\theta_t)$, con trasformazioni inverse $\tan(\theta_i) = \frac{\sqrt{\sum_{k=i}^n x_k^2}}{x_i}$ per $i = 1, \dots, n-2$, $\tan(\theta_{n-1}) = \frac{x_n}{x_{n-1}}$; chiaramente $\mathbf{g} \circ \mathbf{h} = r^{n-1}\mathbf{h}$, in particolare $D(\mathbf{g} \circ \mathbf{h}) = D\mathbf{g} D\mathbf{h} = r^{n-1}D\mathbf{h}$ da cui $(r^{n-1}\mathbb{1}_n - D\mathbf{g}) D\mathbf{h} = 0$ e si conclude essendo \mathbf{h} diffeomorfismo e dunque $D\mathbf{h}$ invertibile). Operando il cambio di variabili tramite \mathbf{g} otteniamo

$$\begin{aligned} |\partial B_r(y)| &= \int_{\partial B_r(y)} dS(x) = \frac{1}{r} \int_{\partial B_r(y)} |x - y| dS(x) = \frac{1}{r} \int_{\partial B_r(y)} (x - y) \frac{x - y}{|x - y|} dS(x) \stackrel{\star}{=} \\ &\stackrel{\star}{=} \frac{1}{r} \int_{B_r(y)} \operatorname{div}(x - y) dx = \frac{n}{r} |B_r(y)| = nr^{n-1} \omega_n \end{aligned}$$

dove in \star abbiamo applicato il Teorema A.10. \square

Teorema 1.1 (Formule di media). *Sia data $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, che verifica $-\Delta u \leq 0$. Allora per ogni palla $B_R(y) \Subset \Omega$ valgono*

$$u(y) \leq \int_{\partial B_R(y)} u dS = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(y)} u dS \quad (1.4)$$

$$u(y) \geq \int_{B_R(y)} u dx = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(y)} u dx \quad (1.5)$$

Dimostrazione. Consideriamo $B_R(y) \Subset \Omega$ e per ogni $r \in (0, R]$ definiamo

$$\Phi(r) = \int_{\partial B_r(y)} u(x) dS(x). \quad (1.6)$$

Affinché il dominio di integrazione dell'integrale che definisce Φ non dipenda da r , operiamo un cambio di variabili tramite il diffeomorfismo $\mathbf{g}: \partial B_1(0) \rightarrow \partial B_r(y)$, $\omega \mapsto r\omega + y$ e otteniamo

$$\int_{\partial B_r(y)} u(x) dS(x) = \int_{\mathbf{g}(\partial B_1(0))} u(x) dS(x) = r^{n-1} \int_{\partial B_1(0)} u(r\omega + y) dS(\omega)$$

da cui

$$\Phi(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} u(r\omega + y) dS(\omega) = \int_{\partial B_1(0)} u(r\omega + y) dS(\omega).$$

Essendo $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, in particolare $u \in \mathcal{C}^2(\overline{B_1(0)})$, per il Teorema A.7 Φ è continua e derivabile, con derivata

$$\begin{aligned} \Phi'(r) &= \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial u}{\partial r}(r\omega + y) dS(\omega) = \int_{\partial B_1(0)} Du(r\omega + y) \cdot \omega dS(\omega) \stackrel{\star}{=} \\ &\stackrel{\star}{=} \frac{1}{n} \int_{B_1(0)} \operatorname{div} Du(r\omega + y) d\omega = \frac{r}{n} \int_{B_1(0)} \Delta u(r\omega + y) d\omega = \\ &= \frac{r}{n\omega_n} \int_{B_1(0)} \Delta u(r\omega + y) d\omega = \frac{r}{n} \int_{B_r(y)} \Delta u(x) dx \stackrel{\geq}{\leq} 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

dove in \star abbiamo applicato il Teorema A.10, dunque deduciamo che

$$\Phi(r) \stackrel{\leq}{\geq} \Phi(R) \quad \forall r \in (0, R].$$

Poiché

$$|\Phi(r) - u(y)| = \left| \int_{\partial B_r(y)} (u(x) - u(y)) dS(x) \right| \leq \sup_{x \in \partial B_r(y)} |u(x) - u(y)| \rightarrow 0 \quad \text{per } r \rightarrow 0^+,$$

estendendo Φ per continuità in 0, otteniamo

$$u(y) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \Phi(r) = \Phi(0) \stackrel{\leq}{\geq} \Phi(R) = \int_{\partial B_r(y)} u(x) dS(x)$$

che restituisce (1.4) e, per il Teorema A.13, vale inoltre

$$\begin{aligned} \int_{B_R(y)} u(x) dx &= \int_0^R \left(\int_{\partial B_r(y)} u(x) dS(x) \right) dr \stackrel{\geq}{\leq} u(y) \int_0^R |B_r(y)| dr = \\ &= u(y) \int_0^R n\omega_n r^{n-1} dr = \omega_n R^n u(y) = |B_R(y)| u(y) \end{aligned}$$

che dimostra (1.5). □

Teorema 1.2 (Inverso delle formule di media). *Sia data $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Se per ogni palla $B_R(y) \Subset \Omega$ vale*

$$u(y) \stackrel{\leq}{\geq} \int_{\partial B_R(y)} u dS,$$

allora $-\Delta u \stackrel{\leq}{\geq} 0$.

Dimostrazione. Supponiamo che per ogni palla $B_R(y) \Subset \Omega$ valga $u(y) \leq \int_{\partial B_R(y)} u dS$ e supponiamo per assurdo che esista $z \in \Omega$ tale che $-\Delta u(z) > 0$, allora, per continuità di

$-\Delta u$, dovrebbe esistere $r > 0$ tale che $B_r(z) \Subset \Omega$ e $-\Delta u(x) > 0$ per ogni $x \in \overline{B_r(z)}$.

Considerando $\Phi(\rho) = \int_{\partial B_\rho(z)} u(x) dS(x)$, con $\rho \in (0, r]$, come in (1.6), da (1.7) otteniamo che $\Phi'(\rho) < 0$, da cui, come sopra, $u(z) > \Phi(r)$, ma questo è in contraddizione con l'ipotesi $u(z) \leq \int_{\partial B_r(z)} u dS = \Phi(r)$.

In maniera del tutto analoga mostriamo che se per ogni palla $B_R(y) \Subset \Omega$ vale $u(y) \geq \int_{\partial B_R(y)} u dS$, allora $-\Delta u \geq 0$. In particolare, se per ogni palla $B_R(y) \Subset \Omega$ vale $u(y) = \int_{\partial B_R(y)} u dS$, allora u è armonica. □

1.2 Principio del massimo e del minimo

Teorema 1.3 (Principio del massimo e del minimo forte). *Sia data $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso.*

- *Se per ogni palla $B_R(y) \Subset \Omega$ vale che $u(y) \leq \int_{B_R(y)} u(x) dx$ e se inoltre esiste $y \in \Omega$ tale che $u(y) = \sup_{\Omega} u$, allora u è costante.*
- *Se per ogni palla $B_R(y) \Subset \Omega$ vale che $u(y) \geq \int_{B_R(y)} u(x) dx$ e se inoltre esiste $y \in \Omega$ tale che $u(y) = \inf_{\Omega} u$, allora u è costante.*

Dimostrazione. Supponiamo che per ogni palla $B_R(y) \Subset \Omega$ valga che $u(y) \leq \int_{B_R(y)} u(x) dx$ e definiamo

$$M = \sup_{\Omega} u,$$

$$\Omega_M = \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}.$$

Per ipotesi $M \in \mathbb{R}$ e $\Omega_M \neq \emptyset$. Notiamo che $\Omega_M = u^{-1}(\{M\})$ è controimmagine di un chiuso tramite una funzione continua, dunque Ω_M è chiuso in Ω . Ora consideriamo la funzione $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto v(x) = u(x) - M$. Chiaramente per ogni $B_R(y) \Subset \Omega$ vale che $v(y) \leq \int_{B_R(y)} u(x) dx - M = \int_{B_R(y)} v(x) dx$. Prendendo $y \in \Omega_M$ otteniamo dunque che

$$0 = v(y) = u(y) - M \leq \int_{B_R(y)} \underbrace{(u(x) - M)}_{\leq 0} dx \leq 0$$

da cui $u(x) = M$ per ogni $x \in B_R(y)$ (se esistesse $x_0 \in B_R(y)$ tale che $u(x_0) - M < 0$, per continuità di v dovrebbe esistere un intorno J di x_0 tale che $u(x) < M$ per ogni $x \in J$ da cui $0 \leq \int_{B_R(y)} (u(x) - M) dx \leq \int_J (u(x) - M) dx < 0$, assurdo). Ne deduciamo che $B_R(y) \subseteq \Omega_M$, ovvero Ω_M è intorno di ogni suo punto, ovvero Ω_M è aperto in Ω . Concludiamo che $\Omega_M = \Omega$, in quanto Ω_M è un sottoinsieme non vuoto, chiuso e aperto di Ω connesso.

Infine, se supponiamo che per ogni palla $B_R(y) \Subset \Omega$ valga che $u(y) \geq \int_{B_R(y)} u(x) dx$, allora $(-u)(y) \leq \int_{B_R(y)} (-u)(x) dx$ e da quanto appena dimostrato concludiamo che $-u$ è costante in Ω , ovvero che u è costante in Ω . \square

Un corollario immediato del Teorema 1.3 è il seguente

Teorema 1.4 (Principio del massimo e del minimo). *Sia data $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato.*

- *Se per ogni palla $B_R(y) \Subset \Omega$ vale che $u(y) \leq \int_{B_R(y)} u(x) dx$, allora $\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$.*
- *Se per ogni palla $B_R(y) \Subset \Omega$ vale che $u(y) \geq \int_{B_R(y)} u(x) dx$, allora $\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u$.*

In particolare, se u è armonica, allora $\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u$ per ogni $x \in \Omega$.

Grazie al Teorema 1.4 riusciamo a stabilire il seguente risultato di unicità.

Teorema 1.5 (Unicità del problema di Dirichlet). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, connesso, limitato. Date $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ e $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, esiste al più una soluzione $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ per il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.8)$$

Dimostrazione. Siano $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ soddisfacenti (1.8). Applicando il Teorema 1.4 alla funzione armonica $w = u - v$, otteniamo che $0 \leq w(x) \leq 0$ per ogni $x \in \Omega$, da cui $u(x) = v(x)$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$. \square

Osservazione 1.2. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, connesso, limitato. Date $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ rispettivamente armonica e subarmonica in Ω che coincidono sul bordo $\partial\Omega$, abbiamo che*

$$\begin{cases} -\Delta(v - u) \leq 0 & \text{in } \Omega \\ v - u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

da cui, per il Teorema 1.4, concludiamo che $v \leq u$ in Ω . Analogamente, date $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ rispettivamente armonica e superarmonica in Ω che coincidono sul bordo $\partial\Omega$, abbiamo che $v \geq u$ in Ω . Questo risultato giustifica la scelta terminologica dei prefissi sub e super.

1.3 Regolarità delle funzioni armoniche

Vogliamo ora dedurre il risultato di regolarità per cui una funzione armonica è necessariamente $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$: la condizione algebrica posta dall'equazione di Laplace $\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0$ comporta la proprietà analitica per cui tutte le derivate parziali di u esistono, anche quelle che non compaiono nell'equazione.

Teorema 1.6. *Data $u \in \mathcal{C}(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, se u soddisfa la proprietà del valor medio in Ω , ovvero per ogni palla $B_R(y) \Subset \Omega$ vale che $u(y) = \int_{\partial B_R(y)} u \, dS = \int_{B_R(y)} u \, dx$, allora $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.*

Notiamo che tra le ipotesi del Teorema 1.6 non ci sono richieste di regolarità per u su $\partial\Omega$.

Dimostrazione. Sia η il mollificatore standard definito in (A.4). Sia $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$ in $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Per il punto (i.) del Teorema A.15, si ha che $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Per mostrare che $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ mostriamo che $u = u^\varepsilon$ su Ω_ε per ogni $\varepsilon > 0$. Sia $x \in \Omega_\varepsilon$, allora

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &= \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x - y) u(y) \, dy = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \eta\left(\frac{|x - y|}{\varepsilon}\right) u(y) \, dy = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\int_{\partial B_r(x)} u \, dS \right) dr \stackrel{\star}{=} \frac{1}{\varepsilon^n} u(x) \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) n \omega_n r^{n-1} \, dr = \\ &= u(x) \int_0^\varepsilon \int_{\partial B_r(0)} \eta_\varepsilon(y) \, dS(y) \, dr \stackrel{\star\star}{=} u(x) \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y) \, dy = u(x) \end{aligned}$$

dove in \star abbiamo applicato la proprietà del valor medio e in $\star\star$ il Teorema A.13. \square

In realtà vale qualcosa di ancora più forte, ovvero che ogni funzione armonica non solo è C^∞ , ma è anche analitica. Al fine di provare tale risultato deriviamo delle stime sulle derivate parziali di una funzione armonica.

Teorema 1.7 (Stime sulle derivate di una funzione armonica). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $u \in C^2(\Omega)$ una funzione armonica in Ω , allora per ogni palla $B_r(x_0) \Subset \Omega$ e per ogni multi-indice α di ordine $|\alpha| = k$ vale che*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}, \quad C_0 = \frac{1}{\omega_n}, \quad C_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\omega_n} \quad (k \geq 1). \quad (1.9)$$

Dimostrazione. Fissiamo una palla $B_r(x_0) \Subset \Omega$ e procediamo per induzione.

Caso $k = 0$. Da (1.5) abbiamo che

$$|u(x_0)| = \left| \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \right| \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} |u(x)| dx = \frac{1}{\omega_n r^n} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.$$

Caso $k = 1$. Notiamo che se u è armonica, anche u_{x_j} lo è per ogni $j = 1, \dots, n$, infatti

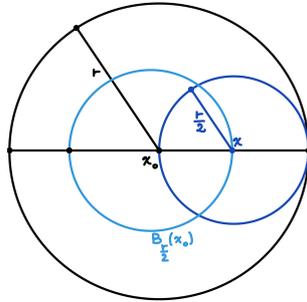
$$\Delta u_{x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{\partial}{\partial x_j} u \stackrel{\star}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u = \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u = \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta u = 0$$

ove in \star abbiamo potuto applicare il Teorema di Schwarz essendo, dal Teorema 1.6, che $u \in C^\infty(\Omega)$. Allora, per il Teorema 1.1, u_{x_j} verifica (1.5) in $B_{r/2}(x_0)$, per cui

$$\begin{aligned} |u_{x_j}(x_0)| &= \left| \frac{2^n}{\omega_n r^n} \int_{B_{r/2}(x_0)} u_{x_j}(x) dx \right| \stackrel{\star}{=} \left| \frac{2^n}{\omega_n r^n} \int_{\partial B_{r/2}(x_0)} u_{x_j} \nu^j(x) dS \right| \leq \\ &\leq \frac{2^n}{\omega_n r^n} |\partial B_{r/2}(x_0)| \|u\|_{L^\infty(\partial B_{r/2}(x_0))} = \frac{2^n}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial B_{r/2}(x_0))} \end{aligned}$$

ove in \star abbiamo applicato il Teorema A.9.

Ora, per ogni $x \in \partial B_{r/2}(x_0)$ vale che $B_{r/2}(x) \subset B_r(x_0) \Subset \Omega$



per cui, applicando (1.9) nel caso $k = 0$ alla palla $B_{r/2}(x)$, otteniamo che

$$|u(x)| \leq \frac{2^n}{\omega_n r^n} \|u\|_{L^1(B_{r/2}(x))} \leq \frac{2^n}{\omega_n r^n} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.$$

Poiché questo vale per ogni $x \in \partial B_{r/2}(x_0)$, abbiamo che

$$\|u\|_{L^\infty(\partial B_{r/2}(x_0))} \leq \frac{2^n}{\omega_n r^n} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}$$

e dunque, da sopra, deduciamo che

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{2^{n+1} n}{\omega_n} \frac{1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}$$

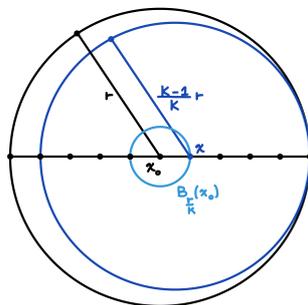
per ogni $|\alpha| = 1$.

Caso $k \geq 2$. Supponiamo che (1.9) valga per ogni $|\beta| \leq k - 1$ e sia α un multi-indice di ordine $|\alpha| = k$, per cui $D^\alpha u = (D^\beta u)_{x_j}$ per un certo $j \in \{1, \dots, n\}$ e un certo multi-indice β di ordine $|\beta| = k - 1$. Per quanto detto sopra, anche $D^\alpha u$ è armonica, per cui verifica (1.5) in $B_{r/k}(x_0)$, dunque

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(x_0)| &= \left| \frac{k^n}{\omega_n r^n} \int_{B_{r/k}(x_0)} (D^\beta u)_{x_j}(x) dx \right| \stackrel{\star}{=} \left| \frac{k^n}{\omega_n r^n} \int_{\partial B_{r/k}(x_0)} (D^\beta u)_{x_j} \nu^j(x) dS \right| \leq \\ &\leq \frac{k^n}{\omega_n r^n} |\partial B_{r/k}(x_0)| \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B_{r/k}(x_0))} = \frac{k^n}{r} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B_{r/k}(x_0))} \end{aligned}$$

ove in \star abbiamo applicato il Teorema A.9.

Ora, per ogni $x \in \partial B_{r/k}(x_0)$ vale che $B_{(k-1)r/k}(x) \subset B_r(x_0) \Subset \Omega$



per cui, essendo $|\beta| = k - 1$, per ipotesi induttiva otteniamo che

$$|D^\beta u(x)| \leq \frac{(2^{n+1} n (k-1))^{k-1}}{\omega_n \left(\frac{k-1}{k} r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.$$

Poiché quanto detto vale per ogni $x \in \partial B_{r/k}(x_0)$, abbiamo che

$$\|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B_{r/k}(x_0))} \leq \frac{(2^{n+1} n (k-1))^{k-1}}{\omega_n \left(\frac{k-1}{k} r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}$$

e dunque, da sopra, deduciamo che

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{(2^{n+1} n k)^k}{\omega_n} \frac{1}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}$$

per ogni $|\alpha| = k$. □

Le stime ottenute permettono di dimostrare immediatamente il seguente

Teorema 1.8 (Liouville). *Una funzione armonica $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ limitata è costante.*

Dimostrazione. Fissata una palla $B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n$, vale che

$$|Du(x_0)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (D_i u(x_0))^2} \stackrel{*}{\leq} \sqrt{n} \frac{2^{n+1} n}{\omega_n r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))} \leq \frac{\sqrt{n} 2^{n+1} n}{r} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$$

per $r \rightarrow \infty$, ove in $*$ abbiamo applicato (1.9), per cui $Du \equiv 0$ e dunque u è costante. \square

Teorema 1.9. *Una funzione subarmonica $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ superiormente limitata è costante.*

Dimostrazione. Sia $u \leq 0$ (se $u \leq C$, $C \in \mathbb{R}$, consideriamo $u - C$ in luogo di u). Fissato $\varepsilon > 0$, definiamo

$$v_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon \log |x|$$

per ogni $x \in \Omega_{>1} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > 1\}$. Notiamo che $v_\varepsilon \leq 0 \forall x \in \Omega_{>1}$ e $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} v_\varepsilon(x) = -\infty$, dunque $M = \sup_{\Omega_{>1}} v_\varepsilon(x) \leq 0$ ed esiste $R > 1$ tale che $v_\varepsilon(x) < M \forall x \in \Omega_{\geq R} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geq R\}$, per cui $M = \sup_{\Omega_{>1}} v_\varepsilon(x) = \sup_S v_\varepsilon(x)$, ove $S = \Omega_{>1} \setminus \Omega_{\geq R}$. Essendo $\Delta \log |x| = 0 \forall x \in \Omega_{>1}$, deduciamo che v_ε è subarmonica in $\Omega_{>1}$, in particolare nell'aperto S , dunque, per il Teorema 1.4, $M = \sup_S v_\varepsilon(x) = \max_{|x|=1} v_\varepsilon(x) = \max_{|x|=1} u(x)$. Ora da $v_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon \log |x| \leq M$ in $\Omega_{>1}$, facendo il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$, deduciamo che

$$u(x) \leq M = \max_{|x|=1} u(x) \quad \forall x \in \Omega_{>1}.$$

Per ipotesi, u è subarmonica nell'aperto $\Omega_{<1} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$, da cui, sempre per il Teorema 1.4, otteniamo

$$u(x) \leq M = \max_{|x|=1} u(x) \quad \forall x \in \Omega_{<1},$$

da cui

$$u(x) \leq \max_{|x|=1} u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

e concludiamo per il Teorema 1.3 che u è costante. \square

Osservazione 1.3. *Il Teorema 1.9 non è più valido per $n \geq 3$. Consideriamo la funzione $v(x) = \max\{-u, -1\}$, ove $u(x) = |x|^{2-n}$. Come vedremo meglio in seguito (cfr. Osservazione 1.18), u è una funzione subarmonica in \mathbb{R}^n , secondo una definizione più generale del termine che daremo (è continua e verifica le proprietà della sottomediana (1.4), (1.5)), inoltre u è limitata, ma non è costante.*

Teorema 1.10 (Analiticità). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ una funzione armonica in Ω , allora u è analitica in Ω .*

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che ogni $x_0 \in \Omega$ ammette un intorno in cui u coincide con la sua serie di Taylor centrata in x_0 .

Sia $r = \frac{1}{3} \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$ (se $\Omega = \mathbb{R}^n$ possiamo scegliere r arbitrario) e chiamiamo $M =$

$\frac{1}{\omega_n r^n} \|u\|_{L^1(B_{2r}(x_0))}$. Essendo $B_{2r}(x_0) \Subset \Omega$ e $u \in C^\infty(\Omega)$, vale che $M < \infty$; inoltre per ogni $x \in B_r(x_0)$ si ha che $B_r(x) \subset B_{2r}(x_0) \Subset \Omega$, dunque, per il Teorema 1.7, vale che

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{(2^{n+1}n|\alpha|)^{|\alpha|}}{\omega_n r^{n+|\alpha|}} \|u\|_{L^1(B_r(x))} \leq \frac{(2^{n+1}n|\alpha|)^{|\alpha|}}{\omega_n r^{n+|\alpha|}} \|u\|_{L^1(B_{2r}(x_0))} = M \left(\frac{2^{n+1}n}{r}\right)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|},$$

da cui

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \leq M \left(\frac{2^{n+1}n}{r}\right)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|}.$$

Ora

$$e^{|\alpha|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^k}{k!} \geq \frac{|\alpha|^{|\alpha|}}{|\alpha|!},$$

da cui $|\alpha|^{|\alpha|} \leq e^{|\alpha|} |\alpha|!$ e inoltre, per il Teorema A.1,

$$n^{|\alpha|} = (1 + \dots + 1)^{|\alpha|} = \sum_{|\beta|=|\alpha|} \frac{|\beta|!}{\beta!} \geq \frac{|\alpha|!}{\alpha!},$$

da cui $|\alpha|! \leq n^{|\alpha|} \alpha!$. Da sopra abbiamo quindi che

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \leq M \left(\frac{2^{n+1}n^2 e}{r}\right)^{|\alpha|} \alpha!.$$

Applicando il Teorema A.2 ad u nella palla $B_{\frac{r}{2^{n+2}n^3 e}}(x_0)$, per ogni $N \in \mathbb{N}$ otteniamo che

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \leq N-1} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha + R_{x_0, N-1}$$

ove

$$R_{x_0, N-1} = \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(x_0 + t(x-x_0))}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha$$

è il resto in forma di Lagrange e $t \in [0, 1]$. Sfruttando la disuguaglianza trovata sopra concludiamo che

$$|R_{x_0, N-1}| \leq M \sum_{|\alpha|=N} \left(\frac{2^{n+1}n^2 e}{r}\right)^N \left(\frac{r}{2^{n+2}n^3 e}\right)^N \leq \frac{Mn^N}{(2n)^N} = \frac{M}{2^N} \rightarrow 0 \quad \text{per } N \rightarrow \infty. \quad \square$$

1.4 Disuguaglianza di Harnack

Teorema 1.11 (Disuguaglianza di Harnack). *Dato un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, per ogni $\Omega' \Subset \Omega$ aperto connesso esiste una costante $C = C(n, \Omega', \Omega)$ tale che*

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u$$

per ogni u funzione armonica non negativa definita in Ω .

In particolare per ogni $x, y \in \Omega'$ vale che $\frac{1}{C}u(y) \leq u(x) \leq Cu(y)$.

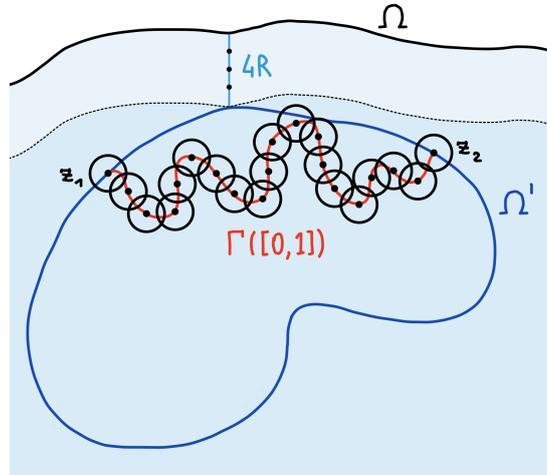
Dimostrazione. Sia u un'arbitraria funzione armonica non negativa definita in Ω . Siano $y \in \Omega$ e $r > 0$ tali che $B_{4r}(y) \Subset \Omega$, allora, applicando (1.5), abbiamo che per ogni $y_1, y_2 \in B_r(y)$ valgono

$$\begin{aligned} u(y_1) &= \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(y_1)} u(x) dx \leq^* \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_{2r}(y)} u(x) dx, \\ u(y_2) &= \frac{1}{\omega_n (3r)^n} \int_{B_{3r}(y_1)} u(x) dx \geq^* \frac{1}{\omega_n (3r)^n} \int_{B_{2r}(y)} u(x) dx \end{aligned}$$

ove in \star abbiamo sfruttato l'ipotesi $u \geq 0$. Dunque $u(y_1) \leq 3^n u(y_2)$. Data l'arbitrarietà di $y_1, y_2 \in B_r(y)$, concludiamo che

$$\forall B_r(y) \Subset \Omega \text{ tale che } B_{4r}(y) \subset \Omega \text{ vale che } \sup_{B_r(y)} u \leq 3^n \inf_{B_r(y)} u. \quad (*)$$

Ora sia $\Omega' \Subset \Omega$ aperto connesso: $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ è compatto, dunque esistono $z_1, z_2 \in \overline{\Omega'}$ tali che $u(z_1) = \sup_{\Omega'} u$ e $u(z_2) = \inf_{\Omega'} u$. Inoltre, $\overline{\Omega'}$ è connesso (chiusura di un connesso) in \mathbb{R}^n , dunque connesso per archi, in particolare esiste un arco chiuso $\Gamma: [0, 1] \rightarrow \overline{\Omega'}$ con punto iniziale z_1 e punto finale z_2 (Γ continua, tale che $\Gamma(0) = z_1, \Gamma(1) = z_2$). Essendo $\Gamma([0, 1])$ chiuso in $\overline{\Omega'}$ compatto, $\Gamma([0, 1])$ è compatto. Sia $r = \frac{1}{4} \text{dist}(\Gamma([0, 1]), \partial\Omega)$, allora esiste un ricoprimento finito di $\Gamma([0, 1])$ di palle $B_1(x_1), \dots, B_N(x_N)$, con $N = N(\Omega', \Omega)$, ciascuna di raggio r , tale che $x_1 = z_1, x_N = z_2, B_i(x_i) \cap B_{i+1}(x_{i+1}) \neq \emptyset$.



Per come abbiamo scelto r , in ogni palla del ricoprimento vale (*), per cui

$$\begin{aligned} u(z_1) &= \sup_{B_1(x_1)} u \leq 3^n \inf_{B_1(x_1)} u \leq 3^n \inf_{B_1(x_1) \cap B_2(x_2)} u \leq 3^n \sup_{B_1(x_1) \cap B_2(x_2)} u \leq 3^n \sup_{B_2(x_2)} u \leq \\ &\leq (3^n)^2 \inf_{B_2(x_2)} u \leq \dots \leq (3^n)^2 \sup_{B_3(x_3)} u \leq \\ &\leq (3^n)^3 \inf_{B_3(x_3)} u \leq \dots \leq (3^n)^{N-1} \sup_{B_N(x_N)} u \leq \\ &\leq (3^n)^N \inf_{B_N(x_N)} u = 3^{nN} u(z_2) \end{aligned}$$

dunque concludiamo scegliendo $C = C(n, \Omega', \Omega) = 3^{nN(\Omega', \Omega)}$.

Notiamo che C è indipendente dalla scelta di u . □

1.5 Soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace

Cerchiamo ora soluzioni esplicite per l'equazione di Laplace.

Osservazione 1.4. *L'equazione di Laplace è invariante per rotazioni.*

Dimostrazione. Sia $M = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ matrice ortogonale (${}^tM = M^{-1}$) e sia $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ tale che $\Delta u = 0$. Definiamo $v(x) = u(Mx)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$: vogliamo mostrare che $\Delta v = 0$. Applicando il Teorema A.3, otteniamo $D(u(Mx)) = Du(Mx)M$, in particolare

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u(Mx) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} u(Mx) m_{ki} \quad i = 1, \dots, n$$

e analogamente

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(Mx) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} u(Mx) m_{ki} m_{lj} \quad i, j = 1, \dots, n,$$

da cui

$$\Delta v(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} u(Mx) m_{ki} m_{li} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} u(Mx) \left(\sum_{i=1}^n m_{ki} m_{li} \right).$$

Ora per ortogonalità di M vale che

$$\sum_{i=1}^n m_{ki} m_{li} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = l \\ 0 & \text{se } k \neq l \end{cases}$$

dunque $\Delta v(x) = \Delta u(Mx) = 0$. □

Quanto visto nell'Osservazione 1.4 suggerisce di cercare soluzioni radiali per l'equazione di Laplace, cioè della forma $u(x) = v(r)$, ove $r = |x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Ora, per ogni $i = 1, \dots, n$, vale che $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} 2x_i = \frac{x_i}{r}$ se $x \neq 0$, per cui

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= v'(r) \frac{x_i}{r}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) &= v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right), \end{aligned}$$

ovvero

$$\Delta u(x) = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r),$$

dunque

$$\Delta u(x) = 0, x \neq 0 \iff v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0, r > 0.$$

Se $v' \neq 0$ otteniamo che

$$\begin{aligned} \Delta u(x) = 0, x \neq 0 &\iff \log(|v'(r)|)' = \frac{v''(r)}{v'(r)} = \frac{1-n}{r}, \text{ con } r > 0 \\ &\iff \log(|v'(r)|) = (1-n) \log(r) + c, \text{ con } c \in \mathbb{R}, r > 0 \\ &\iff v'(r) = \frac{a}{r^{n-1}}, \text{ con } a \in \mathbb{R}, r > 0 \\ &\iff v(r) = \begin{cases} a \log(r) + c & \text{se } n = 2 \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c & \text{se } n \geq 3 \end{cases}, \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}, r > 0. \end{aligned}$$

Diamo quindi la seguente

Definizione. Chiamiamo soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace la funzione

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{se } n = 2 \\ \frac{1}{n(2-n)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{se } n \geq 3 \end{cases} \quad (1.10)$$

definita per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Con abuso di notazione, scriveremo talvolta $\Gamma(x) = \Gamma(|x|)$ a memoria del fatto che la soluzione fondamentale è radiale.

Osservazione 1.5. Con dei calcoli diretti si può verificare che per ogni $n \geq 2$

$$D_i \Gamma(x) = \frac{1}{n\omega_n} \frac{x_i}{|x|^n}, \quad (1.11)$$

$$D_{ij} \Gamma(x) = \frac{1}{n\omega_n} \frac{|x|^2 \delta_{ij} - nx_i x_j}{|x|^{n+2}}. \quad (1.12)$$

e da ciò è possibile derivare le stime

$$|D_i \Gamma(x)| \leq \frac{1}{n\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-1}}, \quad (1.13)$$

$$|D_{ij} \Gamma(x)| \leq \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{|x|^n}. \quad (1.14)$$

Osservazione 1.6. Γ presenta una singolarità integrabile nel punto $x = 0$, in particolare $\Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Se $n = 2$, applicando il Teorema A.13, otteniamo che per ogni $r > 0$

$$\begin{aligned} \int_{B_r(0)} \log |x| dx &= \int_0^r |\partial B_r(0)| \log(\rho) d\rho = n\omega_n \int_0^r \rho \log(\rho) d\rho \stackrel{\text{per parti}}{=} \\ &= \left[\frac{\rho^2}{2} \left(\log \rho - \frac{1}{2} \right) \right]_0^r = \frac{r^2}{2} \left(\log r - \frac{1}{2} \right) < \infty. \end{aligned}$$

Se $n \geq 3$, analogamente, otteniamo che per ogni $r > 0$

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{n-2}} dx = \int_0^r |\partial B_r(0)| \frac{1}{\rho^{n-2}} d\rho = n\omega_n \int_0^r \rho d\rho = \frac{n\omega_n}{2} r^2 < \infty.$$

□

1.6 Funzione di Green

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, limitato, con bordo \mathcal{C}^1 . Vogliamo trovare una formula di rappresentazione per la soluzione dell'equazione di Poisson $\Delta u = f$ in Ω , con condizioni al contorno $u = g$ su $\partial\Omega$, ove $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ e $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$.

Teorema 1.12. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, limitato, con bordo \mathcal{C}^1 e sia $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Allora per ogni $y \in \Omega$*

$$u(y) = \int_{\Omega} \Gamma(x-y) \Delta u(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right) dS(x). \quad (1.15)$$

Dimostrazione. Fissiamo $y \in \Omega$. La singolarità in $x = y$ di $\Gamma(x-y)$ ci impedisce di usare la stessa in luogo di v nella formula (iii.) del Teorema A.12. Per ovviare a tale difficoltà, consideriamo $\Omega_\rho = \Omega \setminus \overline{B_\rho(y)}$, con $B_\rho(y) \Subset \Omega$: Ω_ρ è aperto, limitato, con bordo \mathcal{C}^1 , dunque su tale dominio possiamo applicare la formula di Green richiamata e otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\rho} \Gamma(x-y) \Delta u(x) dx &= \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) \right) dS(x) + \\ &+ \int_{\partial B_\rho(y)} \left(\Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) \right) dS(x). \end{aligned}$$

Essendo $\Gamma \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (cfr. Osservazione 1.6) e $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, è possibile applicare il Teorema A.6 al primo membro dell'equazione sopra, per cui

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Omega_\rho} \Gamma(x-y) \Delta u(x) dx = \int_{\Omega} \Gamma(x-y) \Delta u(x) dx.$$

Ora, ricordando che $\Gamma(x-y)$ ha simmetria radiale di centro il punto y , abbiamo la stima

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_\rho(y)} \Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) dS(x) \right| &= \left| \Gamma(\rho) \int_{\partial B_\rho(y)} Du(x) \cdot \nu(x) dS(x) \right| \leq \\ &\leq |\Gamma(\rho)| |\partial B_\rho(y)| \sup_{\Omega} |Du|. \end{aligned}$$

Essendo $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, esiste $C > 0$ tale che $\sup_{\Omega} |Du| < C$. Per stimare $|\Gamma(\rho)|$ sfruttiamo il fatto che per ogni $x \in \partial B_\rho(0)$ vale (1.5) in $B_\rho(x)$ e i conti fatti nell'Osservazione 1.6:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\omega_n \rho^n} \int_{B_\rho(x)} \Gamma(z) dz \sim_0 \begin{cases} \log \rho & \text{se } n = 2 \\ \rho^{2-n} & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

dunque

$$|\Gamma(\rho)| |\partial B_\rho(y)| \sup_{\Omega} |Du| \sim_0 \begin{cases} \rho \log \rho & \text{se } n = 2 \\ \rho & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

quindi in ogni caso

$$\left| \int_{\partial B_\rho(y)} \Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) dS(x) \right| \rightarrow 0 \quad \text{per } \rho \rightarrow 0.$$

Infine, derivando da (1.11) che $D\Gamma(x-y) = \frac{1}{n\omega_n} \frac{x-y}{|x-y|^n}$ e osservando che la normale esterna a $\Omega \setminus B_\rho(y)$ in $x \in \partial B_\rho(y)$ è $\nu(x) = \frac{y-x}{|x-y|}$, otteniamo

$$\begin{aligned} - \int_{\partial B_\rho(y)} u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) dS(x) &= - \int_{\partial B_\rho(y)} u(x) D\Gamma(x-y) \cdot \nu(x) dS(x) = \\ &= - \frac{1}{n\omega_n \rho^n} \int_{\partial B_\rho(y)} u(x) (x-y) \cdot \left(- \frac{x-y}{|x-y|} \right) dS(x) = \\ &= \frac{1}{n\omega_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(y)} u(x) dS(x) = \\ &= \Phi(\rho) \end{aligned}$$

ove Φ è la funzione definita in (1.6), per cui abbiamo già osservato che $\lim_{\rho \rightarrow 0} \Phi(\rho) = u(y)$, dunque

$$- \int_{\partial B_\rho(y)} u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) dS(x) \rightarrow u(y) \quad \text{per } \rho \rightarrow 0.$$

Mettendo insieme i risultati trovati concludiamo che per ogni $y \in \Omega$

$$\int_{\Omega} \Gamma(x-y) \Delta u(x) dx = \int_{\partial \Omega} \left(\Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) \right) dS(x) + u(y). \quad \square$$

La formula (1.15) permette di costruire u , conoscendo i valori di Δu in Ω e di $u, \frac{\partial u}{\partial \nu}$ su $\partial \Omega$.

Corollario 1.1. *Se nel Teorema 1.12 richiediamo che u sia a supporto compatto, allora per ogni $y \in \text{supp } u$ si ha che*

$$u(y) = \int \Gamma(x-y) \Delta u(x) dx. \quad (1.16)$$

Dimostrazione. Sia $R > 0$ tale che $\text{supp } u \subseteq B_R(0)$ e applichiamo (1.15) nella palla $B_R(0)$, per cui per ogni $y \in \text{supp } u$ vale che

$$u(y) = \int_{B_R(0)} \Gamma(x-y) \Delta u(x) dx + \int_{\partial B_R(0)} \left(u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right) dS(x).$$

Ora, per come abbiamo scelto R , $u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$, dunque il primo membro dell'equazione coincide con $\int \Gamma(x-y) \Delta u(x) dx$; inoltre, ogni $x \in \partial B_R(0)$ ammette un intorno U_x in cui $u \equiv 0$, per cui anche $\frac{\partial u}{\partial \nu} \equiv 0$ in U_x , dunque il secondo termine del secondo membro dell'equazione risulta nullo. \square

Corollario 1.2. *Se nel Teorema 1.12 richiediamo che u sia armonica, allora per ogni $y \in \Omega$ si ha che*

$$u(y) = \int_{\partial \Omega} \left(u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right) dS(x). \quad (1.17)$$

Teorema 1.13 (Formula di rappresentazione di Green). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, limitato, con bordo \mathcal{C}^1 ; sia $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$; per ogni $y \in \Omega$ sia $h^y \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ tale che $\Delta_x h^y(x) = 0$ in Ω . Definiamo $G(x, y) = \Gamma(x - y) - h^y(x)$ per ogni $x, y \in \overline{\Omega}$, $x \neq y$. Allora per ogni $y \in \Omega$ si ha che*

$$u(y) = \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) - G(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right) dS(x). \quad (1.18)$$

In particolare se G si annulla su $\partial\Omega$, o meglio se $(x \in \partial\Omega) \vee (y \in \partial\Omega) \Rightarrow G(x, y) = 0$, allora G è detta funzione di Green e otteniamo

$$u(y) = \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS(x). \quad (1.19)$$

Dimostrazione. Sia $y \in \Omega$ fissato. Nella formula (iii.) del Teorema A.12 sostituiamo $-h^y$ in luogo di v e otteniamo

$$0 = - \int_{\Omega} h^y(x) \Delta u(x) dx - \int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial h^y}{\partial \nu}(x) - h^y(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right) dS(x).$$

Inoltre da (1.15) abbiamo che

$$u(y) = \int_{\Omega} \Gamma(x - y) \Delta u(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x - y) - \Gamma(x - y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right) dS(x).$$

Sommando membro a membro le due equazioni sopra otteniamo la tesi. □

Osservazione 1.7. *Per il Teorema 1.5, se un dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, limitato e con bordo \mathcal{C}^1 ammette una funzione di Green, questa è unica.*

Osservazione 1.8. *Se un dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, limitato e con bordo \mathcal{C}^1 ammette una funzione di Green G , per ogni $y \in \Omega$ questa verifica $\Delta_x G(x, y) = 0$.*

Dimostrazione. $\Delta_x G(x, y) = \Delta_x \Gamma(x - y) - \Delta_x h^y(x) = 0$ in Ω . □

Notiamo che se riusciamo a costruire la funzione di Green per un dato Ω , la formula (1.19) permette di costruire $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ soluzione del problema di Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ e $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$.

Teorema 1.14 (Simmetria della funzione di Green). *Se un dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, limitato e con bordo \mathcal{C}^1 ammette una funzione di Green G , allora*

$$G(x, y) = G(y, x) \quad \text{per ogni } x, y \in \Omega, x \neq y.$$

Dimostrazione. Fissiamo $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, e definiamo

$$v(z) = G(z, x), \quad w(z) = G(z, y) \quad \text{per ogni } z \in \Omega \setminus \{z, y\}.$$

Allora per l'Osservazione 1.8 vale che $\Delta v(z) = \Delta_z G(z, x) = 0$ e analogamente $\Delta w(z) = 0$.

Inoltre se $z \in \partial\Omega$, allora $v(z) = w(z) = 0$ per costruzione di G .

Ora sia $0 < \rho < \frac{1}{2} \text{dist}(x, y)$ tale che $B_\rho(x), B_\rho(y) \Subset \Omega$ e sia $\Omega_\rho = \Omega \setminus (B_\rho(x) \cup B_\rho(y))$.

Applicando la formula (iii.) del Teorema A.12 a v e w in Ω_ρ , otteniamo che

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_\rho} (v\Delta w - w\Delta v) dx = \int_{\partial\Omega_\rho} \left(v \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS + \\ &\quad + \int_{\partial B_\rho(x)} \left(v \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS + \int_{\partial B_\rho(y)} \left(v \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS \end{aligned}$$

da cui

$$\int_{\partial B_\rho(x)} \left(w \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) dS = \int_{\partial B_\rho(y)} \left(v \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS, \quad (1.20)$$

ove ν indica la normale interna a $B_\rho(x) \cup B_\rho(y)$.

Ora, essendo $h^x \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, esistono $C, C' > 0$ tali che $|h^x(z)| \leq C$ e $|Dh^x(z)| \leq C'$ per ogni $z \in \Omega$, dunque

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_\rho(x)} v \frac{\partial w}{\partial \nu} dS \right| &= \left| \int_{\partial B_\rho(x)} (\Gamma(z-x) - h^x(z)) Dw(z) \cdot \nu(z) dS(z) \right| \leq \\ &\leq |\partial B_\rho(x)| (|\Gamma(\rho)| + C) \left(\sup_{z \in \partial B_\rho(x)} |D\Gamma(z-y)| + C' \right) \leq \\ &\leq n\omega_n \rho^{n-1} (|\Gamma(\rho)| + C) \left(\sup_{[\frac{1}{2} \text{dist}(x,y), \frac{3}{2} \text{dist}(x,y)]} |D\Gamma(\rho)| + C' \right) \leq \\ &\leq C''(n) \rho^{n-1} (|\Gamma(\rho)| + C) \sim_0 \begin{cases} \rho \log \rho & \text{se } n = 2 \\ \rho & \text{se } n \geq 3, \end{cases} \end{aligned}$$

quindi in ogni caso

$$\left| \int_{\partial B_\rho(x)} v \frac{\partial w}{\partial \nu} dS \right| \rightarrow 0 \quad \text{per } \rho \rightarrow 0.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho(x)} w \frac{\partial v}{\partial \nu} dS &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho(x)} (D\Gamma(z-x) \cdot \nu(z) - Dh^x(z) \cdot \nu(z)) w(z) dS(z) = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho(x)} \left(\frac{1}{n\omega_n} \frac{z-x}{|z-x|^n} \cdot \frac{x-z}{|x-z|} \right) w(z) dS(z) + \\ &\quad - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho(x)} (Dh^x(z) \cdot \nu(z)) w(z) dS(z) = \\ &= - \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{n\omega_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(x)} w(z) dS(z) - 0 \stackrel{*}{=} -w(x), \end{aligned}$$

ove in \star abbiamo sfruttato dei conti fatti nella dimostrazione del Teorema 1.1. Analogamente

$$\begin{aligned}\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho(y)} w \frac{\partial v}{\partial \nu} dS &= 0, \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho(y)} v \frac{\partial w}{\partial \nu} dS &= -v(y).\end{aligned}$$

Ora, passando al limite per $\rho \rightarrow 0$ in (1.20), otteniamo $-w(x) = -v(y)$ e concludiamo

$$G(x, y) = w(x) = v(y) = G(y, x). \quad \square$$

Osservazione 1.9. *Se un dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, limitato e con bordo \mathcal{C}^1 ammette una funzione di Green G , per ogni $x \in \Omega$ questa verifica $\Delta_y G(x, y) = 0$.*

Dimostrazione. Sfruttando la simmetria di G dimostrata nel Teorema 1.14 e ricordando l'Osservazione 1.8, otteniamo che $\Delta_y G(x, y) = \Delta_y G(y, x) = 0$. \square

1.7 Integrale di Poisson

Quando consideriamo come aperto, limitato e con bordo \mathcal{C}^1 una palla B in \mathbb{R}^n , la funzione di Green può essere determinata esplicitamente, sfruttando la riflessione rispetto a ∂B .

Definizione. *Dato un punto $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, chiamiamo*

$$\bar{x} = \frac{R^2}{|x|^2} x$$

il punto duale di x rispetto a $\partial B_R(0)$. La mappa $I_R: x \mapsto \bar{x}$ è detta inversione sferica rispetto a $\partial B_R(0)$.

Notiamo che $I_R(B_R(0)) = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(0)}$, $I_R(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(0)}) = B_R(0)$ e $I_R|_{\partial B_R(0)} = \text{id}_{\partial B_R(0)}$.

Determiniamo ora la funzione di Green in $B_R(0)$: per ogni $y \in B_R(0)$ vogliamo trovare $h^y(x) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ tale che

$$\begin{cases} \Delta_x h^y(x) = 0 & \text{in } B_R(0), \\ h^y(x) = \Gamma(x - y) & \text{su } \partial B_R(0). \end{cases}$$

L'idea è quella di "riflettere" la singolarità di $\Gamma(x - y)$ da $y \in B_R(0)$ a $\bar{y} \notin \overline{B_R(0)}$.

Teorema 1.15 (Funzione di Green in una palla). *La funzione di Green nella palla $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ è data da*

$$\begin{aligned}G(x, y) &= \begin{cases} \Gamma(|x - y|) - \Gamma\left(\frac{|y|}{R}|x - \bar{y}|\right) & \text{se } y \neq 0 \\ \Gamma(|x|) - \Gamma(R) & \text{se } y = 0 \end{cases} \\ &= \Gamma\left(\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y}\right) - \Gamma\left(\sqrt{\left(\frac{|x||y|}{R}\right)^2 + R^2 - 2x \cdot y}\right) \end{aligned} \quad (1.21)$$

per ogni $x, y \in \overline{B_R(0)}$, $x \neq y$.

G verifica $G(x, y) = G(y, x)$ e $G(x, y) \leq 0$ per ogni $x, y \in \overline{B_R(0)}$, $x \neq y$.

Dimostrazione. Per ogni $y \in B_R(0)$, definiamo

$$h^y(x) = \begin{cases} \Gamma\left(\frac{|y|}{R}|x - \bar{y}|\right) & \text{se } y \neq 0 \\ \Gamma(R) & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

per ogni $x \in B_R(0)$. Nel caso di $y = 0$ risulta evidente che $h^0(x) \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Delta_x h^0(x) = 0$ in $B_R(0)$ e $\Gamma(x) - h^0(x) = 0$ per ogni $x \in \partial B_R(0)$.

Sia quindi $y \neq 0$. Essendo per costruzione $\bar{y} \in \mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$, $x \neq \bar{y}$ per ogni $x \in B_R(0)$, dunque $\frac{|y|}{R}|x - \bar{y}| \neq 0$ per ogni $x \in B_R(0)$: avendo “riflesso” la singolarità di $\Gamma(|x - y|)$ fuori da $\overline{B_R(0)}$ e ricordando che Γ è una funzione armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, otteniamo che $h^y(x) \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ e $\Delta_x h^y(x) = 0$ in $B_R(0)$. Infine, se $y \in \partial B_R(0)$, allora $y = \bar{y}$ e $\Gamma(|x - y|) - \Gamma\left(\frac{|y|}{R}|x - \bar{y}|\right) = 0$; se $x \in \partial B_R(0)$, allora $\frac{|y|}{R}|x - \bar{y}| = \frac{|y|}{R}\sqrt{R^2 + \frac{R^4}{|y|^4}|y|^2 - 2\frac{R^2}{|y|^2}x \cdot y} = \sqrt{|y|^2 + R^2 - 2x \cdot y} = |x - y|$, dunque $\Gamma(|x - y|) - \Gamma\left(\frac{|y|}{R}|x - \bar{y}|\right) = 0$. Concludiamo che $G(x, y) = \Gamma(|x - y|) - h^y(x)$ è la funzione di Green nella palla $B_R(0)$. \square

Teorema 1.16 (Formula integrale di Poisson). *Se $u \in \mathcal{C}^2(B_R(0)) \cap \mathcal{C}^1(\overline{B_R(0)})$ è armonica, allora per ogni $y \in B_R(0)$ vale che*

$$u(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{u(x)}{|x - y|^n} dS(x). \quad (1.22)$$

Il membro a destra di (1.22) è detto integrale di Poisson di u .

$$K(x, y) = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R|x - y|^n},$$

definito per ogni $x \in \partial B_R(0)$ e $y \in B_R(0)$, è detto nucleo di Poisson.

Dimostrazione. Notiamo che per $y = 0$ (1.22) coincide con (1.4), dunque è banalmente verificata. Sia quindi $y \in B_R(0) \setminus \{0\}$. Da (1.19) abbiamo che

$$u(y) = \int_{\partial B_R(0)} u(x) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS(x).$$

Per concludere mostriamo che per ogni $x \in \partial B_R(0)$ si ha che

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R|x - y|^n} = K(x, y). \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) &= DG(x, y) \cdot \frac{x}{|x|} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Gamma(|x - y|) - \Gamma\left(\frac{|y|}{R} \left| x - \frac{R^2}{|y|^2} y \right| \right) \right] \frac{x_i}{R} = \\ &= \frac{1}{n\omega_n R} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} - \frac{|y|}{R} \frac{\frac{|y|}{R} x_i - \frac{R}{|y|} y_i}{\left| \frac{|y|}{R} x - \frac{R}{|y|} y \right|^n} \right] x_i = \\ &= \frac{1}{n\omega_n R|x - y|^n} \left[(R^2 - x \cdot y) - \frac{|y|}{R} \left(\frac{|y|}{R} R^2 - \frac{R}{|y|} x \cdot y \right) \right] = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R|x - y|^n}. \end{aligned}$$

\square

Osservazione 1.10. *Il Teorema 1.16 continua a valere per $u \in \mathcal{C}^2(B_R(0)) \cap \mathcal{C}^0(\overline{B_R(0)})$.*

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che nel caso di $y = 0$ si ritrova un risultato noto. Sia quindi $y \neq 0$. Per ogni $r \in \left(R - \frac{\text{dist}(y,0)}{2}, R\right)$ abbiamo che $y \in B_r(0)$ e $u \in \mathcal{C}^2(\overline{B_r(0)})$, dunque, dal Teorema 1.16, abbiamo che $u(y) = \frac{r^2 - |y|^2}{n\omega_n r} \int_{\partial B_r(0)} \frac{u(x)}{|x-y|^n} dS(x)$. Facendo il limite per $r \rightarrow R$, concludiamo per il Teorema A.6 (che possiamo applicare essendo $u \in \mathcal{C}^0(\overline{B_R(0)})$). \square

Vogliamo ora provare l'inverso del risultato appena visto, che permette di stabilire l'esistenza di soluzioni per il problema di Dirichlet nelle palle. Per farlo, sarà utile la seguente

Osservazione 1.11. *Il nucleo di Poisson verifica le seguenti proprietà*

- i.* $K(x, y) > 0$ per ogni $x \in \partial B_R(0)$, $y \in B_R(0)$;
- ii.* $\Delta_y K(x, y) = 0$ per ogni $x \in \partial B_R(0)$;
- iii.* $\int_{\partial B_R(0)} K(x, y) dS(x) = 1$.

Dimostrazione.

i. Banale.

ii. Sia $x \in \partial B_R(0)$. Essendo $\Delta_y G(x, y) = 0$, per il Teorema 1.6 vale che $G \in \mathcal{C}^\infty(B_R(0))$, dunque possiamo applicare il Teorema di Schwarz, ottenendo

$$\Delta_y K(x, y) = \Delta_y \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta_y G(x, y) = 0.$$

iii. Se in (1.22) consideriamo $u = 1$, otteniamo la tesi. \square

Teorema 1.17 (Soluzione per il problema di Dirichlet nelle palle). *Sia $R > 0$ e consideriamo la palla $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. Sia data $g \in \mathcal{C}^0(\partial B_R(0))$. Allora*

$$u(y) = \begin{cases} \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{g(x)}{|x-y|^n} dS(x) & y \in B_R(0) \\ g(y) & y \in \partial B_R(0) \end{cases} \quad (1.24)$$

è armonica in $B_R(0)$ e inoltre $u \in \mathcal{C}^2(B_R(0)) \cap \mathcal{C}^0(\overline{B_R(0)})$.

In particolare u è soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } B_R(0) \\ u = g & \text{su } \partial B_R(0). \end{cases}$$

Dimostrazione. Verifichiamo innanzitutto che u definita in (1.24) è armonica. In virtù della linearità e del Teorema A.7, è possibile portare il laplaciano sotto il segno di integrale, ottenendo

$$\Delta u(y) = \frac{1}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(0)} g(x) \Delta_y \frac{R^2 - |y|^2}{|x-y|^n} dS(x) = \int_{\partial B_R(0)} g(x) \Delta_y K(x, y) dS(x) \stackrel{*}{=} 0,$$

ove in \star abbiamo sfruttato il punto (ii.) dell'Osservazione 1.11.

Verifichiamo ora che u è continua fino a $\partial B_R(0)$, cioè che per ogni $x_0 \in \partial B_R(0)$ vale che $\lim_{y \rightarrow x_0} u(y) = u(x_0)$. Fissiamo $x_0 \in \partial B_R(0)$. Dalla continuità di g su $\partial B_R(0)$ abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ per ogni $x \in \partial B_R(0)$ con $|x - x_0| < \delta$; inoltre, essendo $\partial B_R(0)$ compatto, esiste $M > 0$ tale che $|g(x)| \leq M$ per ogni $x \in \partial B_R(0)$. Ora sia $y \in B_R(0)$ tale che $|y - x_0| < \frac{\delta}{2}$, allora, ricordando il punto (iii.) dell'Osservazione 1.11, abbiamo che

$$\begin{aligned} u(y) - u(x_0) &= \int_{\partial B_R(0)} K(x, y)g(x) dS(x) - g(x_0) = \\ &= \int_{\partial B_R(0)} K(x, y)g(x) dS(x) - g(x_0) \int_{\partial B_R(0)} K(x, y) dS(x) = \\ &= \int_{\partial B_R(0)} K(x, y)(g(x) - g(x_0))K(x, y) dS(x); \end{aligned}$$

ora per il punto (i.) dell'Osservazione 1.11

$$\begin{aligned} |u(y) - u(x_0)| &= \left| \int_{\partial B_R(0)} K(x, y)(g(x) - g(x_0)) dS(x) \right| \leq \\ &\leq \int_{\partial B_R(0)} K(x, y) |g(x) - g(x_0)| dS(x) = \\ &= \int_{\substack{x \in \partial B_R(0) \\ |x - x_0| < \delta}} K(x, y) |g(x) - g(x_0)| dS(x) + \\ &+ \int_{\substack{x \in \partial B_R(0) \\ |x - x_0| \geq \delta}} K(x, y) |g(x) - g(x_0)| dS(x); \end{aligned}$$

per quanto osservato sopra, $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ ove $|x - x_0| < \delta$ e più genericamente $|g(x) - g(x_0)| < 2M$ ove $|x - x_0| \geq \delta$, da cui, usando di nuovo il punto (iii.) dell'Osservazione 1.11, abbiamo che

$$|u(y) - u(x_0)| < \varepsilon + \frac{2M(R^2 - |y|^2)}{n\omega_n R} \int_{\substack{x \in \partial B_R(0) \\ |x - x_0| \geq \delta}} \frac{1}{|x - y|^n} dS(x);$$

infine, se $|x - x_0| \geq \delta$ vale che $|x - y| \geq ||x - x_0| - |y - x_0|| = |x - x_0| - |y - x_0| > \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$, da cui

$$|u(y) - u(x_0)| < \varepsilon + \frac{2M(R^2 - |y|^2)}{n\omega_n R \left(\frac{\delta}{2}\right)^n} n\omega_n R^{n-1} = \varepsilon + 2M \left(\frac{2}{\delta}\right)^n R^{n-2}(R^2 - |y|^2);$$

poiché $0 \leq R^2 - |y|^2 \rightarrow 0$ per $y \rightarrow x_0$, esiste $\bar{\delta} < \delta$ tale che se $y \in B_R(0)$ verifica $|y - x_0| < \bar{\delta}$, allora $R^2 - |y|^2 < \frac{\varepsilon}{2M\left(\frac{2}{\delta}\right)^n R^{n-2}}$, per cui $|u(y) - u(x_0)| < 2\varepsilon$. \square

Notiamo che l'argomento proposto a dimostrazione della continuità al bordo è locale: se g fosse solo limitata e integrabile su $\partial B_R(0)$ e continua in un intorno di x_0 , allora si avrebbe che $u(y) \rightarrow g(x_0)$ per $y \rightarrow x_0$.

Teorema 1.18. *Sia $R > 0$ e consideriamo la palla $B_R(y_0) \subset \mathbb{R}^n$. Sia data $g \in \mathcal{C}^0(\partial B_R(y_0))$. Allora*

$$u(y) = \begin{cases} \frac{R^2 - |y - y_0|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(y_0)} \frac{g(x)}{|x - y|^n} dS(x) & y \in B_R(y_0) \\ g(y) & y \in \partial B_R(y_0) \end{cases} \quad (1.25)$$

è armonica in $B_R(y_0)$ e inoltre $u \in \mathcal{C}^2(B_R(y_0)) \cap \mathcal{C}^0(\overline{B_R(y_0)})$.

Dimostrazione. Per ipotesi $g(x) \in \mathcal{C}^0(\partial B_R(y_0))$, dunque $g(X + y_0) \in \mathcal{C}^0(\partial B_R(0))$, da cui, per il Teorema 1.17,

$$U(Y) = \begin{cases} \frac{R^2 - |Y|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{g(X + y_0)}{|X - Y|^n} dS(X) & Y \in B_R(0) \\ g(Y + y_0) & Y \in \partial B_R(0) \end{cases}$$

è armonica in $B_R(0)$ e inoltre $U \in \mathcal{C}^2(B_R(0)) \cap \mathcal{C}^0(\overline{B_R(0)})$. Sia $u(y) = U(y - y_0)$, per cui $u \in \mathcal{C}^2(B_R(y_0)) \cap \mathcal{C}^0(\overline{B_R(y_0)})$. Se $y \in \partial B_R(y_0)$, allora $Y = y - y_0 \in \partial B_R(0)$, per cui $u(y) = g(y)$. Se $y \in B_R(y_0)$, allora $Y = y - y_0 \in B_R(0)$, per cui

$$\begin{aligned} u(y) &= U(y - y_0) = \frac{R^2 - |y - y_0|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{g(X + y_0)}{|X - (y - y_0)|^n} dS(X) = \\ &= \frac{R^2 - |y - y_0|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{g(X + y_0)}{|(X + y_0) - y|^n} dS(X) = \\ &= \frac{R^2 - |y - y_0|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(y_0)} \frac{g(x)}{|x - y|^n} dS(x). \quad \square \end{aligned}$$

Il risultato appena visto permette di dimostrare il seguente

Teorema 1.19 (Singolarità eliminabile per le funzioni armoniche). *Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $y \in \Omega$ e una funzione $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ armonica su $\Omega \setminus \{y\}$, se $u = o(\Gamma(x - y))$, ovvero*

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow y} \frac{u(x)}{\log|x - y|} = 0 & n = 2 \\ \lim_{x \rightarrow y} u(x)|x - y|^{n-2} = 0 & n \geq 3, \end{cases} \quad (1.26)$$

allora y è una singolarità eliminabile per u , ovvero u può essere estesa ad una funzione armonica su Ω .

Dimostrazione. Sia $R > 0$ tale che $B_R(y) \Subset \Omega$. Sia \bar{u} la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} = 0 & x \in B_R(y) \\ \bar{u}(x) = u(x) & x \in \Omega \setminus B_R(y) \end{cases}$$

data da (1.25). Allora \bar{u} è limitata in $B_R(y)$ (per il Teorema 1.4 abbiamo che $\sup_{B_R(y)} \bar{u} = \max_{\partial B_R(y)} \bar{u} = \max_{\partial B_R(y)} u < +\infty$) e ivi armonica. Per concludere è dunque sufficiente mostrare che $\bar{u} = u$ in $B_R(y)$.

La funzione

$$w: \overline{B_R(y)} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto w(x) = u(x) - \bar{u}(x)$$

è armonica in $B_R(y) \setminus \{y\}$ e si annulla su $\partial B_R(y)$. D'altra parte, la funzione

$$h: \overline{B_R(y)} \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto h(x) = \begin{cases} \log R - \log |x - y| & n = 2 \\ R^{2-n} - |x - y|^{2-n} & n \geq 3 \end{cases}$$

è positiva, armonica in $B(y, R) \setminus \{y\}$ e si annulla su $\partial B_R(y)$. Dall'ipotesi (1.26), abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow y} \frac{w(x)}{h(x)} = 0,$$

per cui per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, R)$ tale che $|w| \leq \varepsilon h$ in $\overline{B_\delta(y)}$, in particolare $|w| < \varepsilon h$ su $\partial B_\delta(y)$. Applicando il Teorema 1.4 a $w - \varepsilon h$ in $B_R(y) \setminus B_\delta(y)$, otteniamo che $w \leq \varepsilon h$ in $B_R(y) \setminus B_\delta(y)$ e analogamente, applicando il Teorema 1.4 ad $-w - \varepsilon h$ in $B_R(y) \setminus B_\delta(y)$, otteniamo che $-w \leq \varepsilon h$ in $B_R(y) \setminus B_\delta(y)$, ma allora $|w| \leq \varepsilon h$ in $B_R(y) \setminus B_\delta(y)$. Da sopra concludiamo che $|w| \leq \varepsilon h$ in tutta la palla $B_R(y)$, dunque, data l'arbitrarietà di ε , $w = 0$ in $B_R(y)$, ovvero $u(x) = \bar{u}(x)$ per ogni $x \in B_R(y)$. \square

Osservazione 1.12. *Se supponiamo che esista $R > 0$ tale che h risulti limitata in $B_R(y) \setminus \{z_0\}$, allora l'ipotesi $h = o(\Gamma(x - y))$ del Teorema 1.19 è banalmente verificata, per cui h può essere estesa ad una funzione armonica su Ω .*

1.8 Teoremi di convergenza

Vediamo ora alcuni altri risultati conseguenti alla formula integrale di Poisson.

Teorema 1.20. *Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, una funzione $u \in C^0(\Omega)$ è armonica in Ω se e solo se per ogni palla $B_r(y) \Subset \Omega$ soddisfa la proprietà del valor medio*

$$u(y) = \int_{\partial B_r(y)} u(x) dS(x).$$

Dimostrazione. (\Rightarrow) Visto nel Teorema 1.1.

(\Leftarrow) Essendo $u \in C^0(\Omega)$, dal Teorema 1.18, per ogni palla $B_r(y) \Subset \Omega$ riusciamo a costruire una funzione $h_{r,y} \in C^2(B_r(y_0)) \cap C^0(\overline{B_r(y_0)})$, soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta h_{r,y} = 0 & \text{in } B_r(y) \\ h_{r,y} = u & \text{su } \partial B_r(y). \end{cases}$$

Nella palla $B_r(y_0)$ definiamo la funzione $w_{r,y}(x) = u(x) - h_{r,y}(x)$. Per costruzione $w_{r,y} \in C^0(\overline{B_r(y_0)})$. Per ipotesi, $w_{r,y}$ soddisfa la proprietà del valor medio in $B_r(y_0)$, dunque, per il Teorema 1.4, vale che

$$0 = \inf_{\partial B_r(y_0)} w_{r,y} \leq w_{r,y}(x) \leq \sup_{\partial B_r(y_0)} w_{r,y} = 0 \text{ per ogni } x \in B_r(y_0),$$

da cui $u(x) = h_{r,y}(x)$ per ogni $x \in B_r(y_0)$, ovvero u coincide con una funzione armonica in ogni $B_r(y) \Subset \Omega$: concludiamo che u è armonica in Ω . \square

Osservazione 1.13. *In luce del Teorema 1.20, possiamo ridefinire il concetto di funzione armonica: dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, diciamo che una funzione $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ è armonica in Ω se soddisfa la proprietà del valor medio in Ω , ovvero per ogni palla $B_R(y) \Subset \Omega$ vale che $u(y) = \int_{\partial B_R(y)} u \, dS = \int_{B_R(y)} u \, dx$.*

Un corollario del Teorema 1.20 è il seguente

Teorema 1.21. *Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, sia $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni armoniche in Ω che converge uniformemente ad una funzione u su ogni sottoinsieme compatto di Ω . Allora u è armonica in Ω .*

Dimostrazione. Per ipotesi, u_m è armonica per ogni $m \in \mathbb{N}$, dunque per ogni palla $B_r(y) \Subset \Omega$ soddisfa la proprietà del valor medio

$$u_m(y) = \int_{\partial B_r(y)} u_m(x) \, dS(x).$$

Ora, in virtù della convergenza uniforme di $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ ad u in $B_r(y) \Subset \Omega$, possiamo fare il limite per $m \rightarrow \infty$ su ambo i membri dell'equazione, ottenendo

$$u(y) = \int_{\partial B_r(y)} u(x) \, dS(x),$$

ovvero, per ogni palla $B_r(y) \Subset \Omega$, u soddisfa la proprietà del valor medio; inoltre u è continua in Ω , in quanto limite localmente uniforme di funzioni continue, dunque, per il Teorema 1.20, concludiamo che u è armonica. \square

Teorema 1.22. *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato, sia $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni armoniche in Ω tale che per ogni $m \in \mathbb{N}$*

$$\begin{cases} -\Delta u_m = 0 & \text{in } \Omega \\ u_m = g_m & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

con $g_m \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$. Se la successione $\{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente in $\partial\Omega$ ad una funzione g , allora $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente in $\bar{\Omega}$ ad una funzione armonica u , soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dimostrazione. La successione $\{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente in $\partial\Omega$, dunque è uniformemente di Cauchy, ovvero $\lim_{m,k \rightarrow \infty} \sup_{x \in \partial\Omega} |g_m(x) - g_k(x)| = 0$. Ora notiamo che, per ogni $m, k \in \mathbb{N}$, $\Delta(u_m - u_k) = 0$, dunque, per il Teorema 1.4, per ogni $x \in \Omega$ si ha che $u_m(x) - u_k(x) \leq \sup_{\partial\Omega} (g_m - g_k) \leq \sup_{\partial\Omega} |g_m - g_k|$ e analogamente $u_k(x) - u_m(x) \leq \sup_{\partial\Omega} (g_k - g_m) \leq \sup_{\partial\Omega} |g_m - g_k|$, da cui

$$\sup_{\bar{\Omega}} |u_m - u_k| \leq \sup_{\partial\Omega} |g_m - g_k| \rightarrow 0 \quad \text{per } m, k \rightarrow \infty,$$

ovvero la successione $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ è uniformemente di Cauchy in $\bar{\Omega}$, dunque ivi converge uniformemente ($\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset (\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$ completo). Dal Teorema 1.21 abbiamo che il limite uniforme della successione di funzioni armoniche $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ è una funzione armonica u . Per unicità del limite $u = g$ in $\partial\Omega$. \square

Teorema 1.23 (Convergenza di Harnack). *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una successione monotona crescente di funzioni armoniche in Ω . Supponiamo che esista $x_0 \in \Omega$ tale che la successione $\{u_m(x_0)\}_{m \in \mathbb{N}}$ sia limitata. Allora $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente ad una funzione armonica u in ogni $\overline{\Omega'}$, con $\Omega' \Subset \Omega$ aperto connesso tale che $x_0 \in \Omega'$.*

Dimostrazione. La successione $\{u_m(x_0)\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge, essendo monotona crescente e limitata, dunque è di Cauchy, ovvero per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che per ogni $m \geq k > M$ si ha che $0 \leq u_m(x_0) - u_k(x_0) < \varepsilon$. Inoltre, per ogni $m \geq k > M$ si ha che $u_m - u_k \geq 0$ e $\Delta(u_m - u_k) = 0$, dunque per il Teorema 1.11, per ogni $\Omega' \Subset \Omega$ aperto connesso tale che $x_0 \in \Omega'$ esiste $C = C(n, \Omega', \Omega)$ tale che $\sup_{\Omega'}(u_m - u_k) \leq C \inf_{\Omega'}(u_m - u_k) \leq C(u_m(x_0) - u_k(x_0)) < C\varepsilon$. Abbiamo così ottenuto che la successione $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ è uniformemente di Cauchy in $\overline{\Omega'}$, dunque ivi converge uniformemente ($\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset (C^0(\overline{\Omega'}), \|\cdot\|_\infty)$ completo) ad una funzione u che risulta essere armonica per il Teorema 1.21. \square

Vogliamo ora dare delle stime dall'interno per le derivate di funzioni armoniche.

Osservazione 1.14. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e u una funzione armonica in Ω . Allora per ogni palla $B_r(y) \Subset \Omega$ si ha che*

$$|Du(y)| \leq \frac{n}{r} \sup_{\partial B_r(y)} |u|. \quad (1.27)$$

Dimostrazione. Essendo $D_i u$ armonica per ogni $i = 1, \dots, n$ (come visto nella dimostrazione del Teorema 1.7), applicando i Teoremi 1.1 e A.9, otteniamo che per ogni palla $B_r(y) \Subset \Omega$ vale che

$$D_i u(y) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(y)} D_i u(x) dx = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\partial B_r(y)} u(x) \nu^i dS(x),$$

per cui

$$Du(y) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\partial B_r(y)} u(x) \boldsymbol{\nu} dS(x),$$

da cui

$$|Du(y)| \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\partial B_r(y)} |u(x)| dS(x) \leq \frac{n}{r} \sup_{\partial B_r(y)} |u|. \quad \square$$

Teorema 1.24. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e u una funzione armonica in Ω . Allora per ogni $\Omega' \Subset \Omega$ aperto e per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$*

$$\sup_{\Omega'} |D^\alpha u| \leq \left(\frac{n|\alpha|}{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)} \right)^{|\alpha|} \sup_{\Omega} |u|. \quad (1.28)$$

Dimostrazione. Sia $\Omega' \Subset \Omega$ arbitrario: essendo Ω aperto limitato e $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, abbiamo che $0 < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega) < \infty$. Supponiamo dapprima $|\alpha| = 1$, per cui $|D^\alpha u(x)| \leq |Du(x)|$ per ogni $x \in \Omega$. Per ogni $y \in \Omega'$ definiamo $\bar{y} \in \partial\Omega'$ tale che $\text{dist}(y, \bar{y}) = \text{dist}(y, \partial\Omega') > 0$ (essendo Ω' aperto e $y \in \Omega'$) e $r_y = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega) + \frac{1}{2} \text{dist}(y, \bar{y})$. Allora

$$\text{dist}(\Omega', \partial\Omega) < r_y < \text{dist}(y, \partial\Omega),$$

infatti se $\tilde{y} \in \partial\Omega$ verifica $\text{dist}(y, \tilde{y}) = \text{dist}(y, \partial\Omega) > 0$ e $\tilde{y} \in [y, \tilde{y}] \cap \partial\Omega'$, ove $[y, \tilde{y}]$ indica il segmento da y a \tilde{y} , allora $\text{dist}(y, \partial\Omega) = \text{dist}(y, \tilde{y}) + \text{dist}(\tilde{y}, \tilde{y}) \geq \text{dist}(y, \bar{y}) + \text{dist}(\Omega', \partial\Omega) > r_y$. Essendo per costruzione $B_{r_y}(y) \Subset \Omega$, da (1.27) vale che

$$|Du(y)| \leq \frac{n}{r_y} \sup_{\partial B_{r_y}(y)} |u| < \frac{n}{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)} \sup_{\Omega} |u|,$$

dunque

$$\sup_{\Omega'} |D^\alpha u| \leq \sup_{\Omega'} |Du| \leq \frac{n}{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)} \sup_{\Omega} |u|.$$

Sia ora $|\alpha| > 1$ e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_{|\alpha|-1} \in \mathbb{N}^n$ tali che

$$\begin{aligned} |\alpha_1| &= |\alpha| - 1, \quad \alpha_1 \leq \alpha \\ |\alpha_2| &= |\alpha| - 2, \quad \alpha_2 \leq \alpha_1 \\ &\vdots \\ |\alpha_{|\alpha|-1}| &= 1, \quad \alpha_{|\alpha|-1} \leq \alpha_{|\alpha|-2} \end{aligned}$$

Per ogni $y \in \Omega'$ definiamo $d_y = \text{dist}(y, \partial\Omega) > 0$ e $r_y = \frac{d_y}{|\alpha|}$. Considerando la funzione $D^\alpha u$ nella palla $B_{r_y}(y) \Subset \Omega$, da (1.27) abbiamo

$$|D^\alpha u(y)| \leq \frac{n}{r_y} \sup_{B_{r_y}(y)} |D^{\alpha_1} u|.$$

Ora per ogni $z \in B_{r_y}(y)$ vale che $B_{r_y}(z) \Subset \Omega$, dunque considerando la funzione $D^{\alpha_1} u$ in tale palla, da (1.27) abbiamo

$$|D^{\alpha_1} u(z)| \leq \frac{n}{r_y} \sup_{B_{r_y}(z)} |D^{\alpha_2} u|;$$

poiché per ogni $z \in B_{r_y}(y)$ si ha che $B_{r_y}(z) \subseteq B_{2r_y}(y)$, otteniamo

$$\sup_{B_{r_y}(y)} |D^{\alpha_1} u| \leq \frac{n}{r_y} \sup_{B_{2r_y}(y)} |D^{\alpha_2} u|,$$

da cui

$$|D^\alpha u(y)| \leq \left(\frac{n}{r_y}\right)^2 \sup_{B_{2r_y}(y)} |D^{\alpha_2} u|.$$

Analogamente, per ogni $z \in B_{2r_y}(y)$ vale che $B_{r_y}(z) \Subset \Omega$, da cui

$$|D^{\alpha_2} u(z)| \leq \frac{n}{r_y} \sup_{B_{r_y}(z)} |D^{\alpha_3} u|$$

e poiché per ogni $z \in B_{2r_y}(y)$ si ha che $B_{r_y}(z) \subseteq B_{3r_y}(y)$, otteniamo che

$$\sup_{B_{2r_y}(y)} |D^{\alpha_2} u| \leq \frac{n}{r_y} \sup_{B_{3r_y}(y)} |D^{\alpha_3} u|,$$

da cui

$$|D^\alpha u(y)| \leq \left(\frac{n}{r_y}\right)^3 \sup_{B_{3r_y}(y)} |D^{\alpha_3} u|.$$

Iterando il ragionamento, poiché per ogni $k \in \{3, \dots, |\alpha| - 1\}$ vale che per ogni $z \in B_{kr_y}(y)$ vale che $B_{r_y}(z) \Subset \Omega$ e $B_{r_y}(z) \subset B_{(k+1)r_y}(y)$, otteniamo

$$|D^\alpha u(y)| \leq \left(\frac{n}{r_y}\right)^{|\alpha|-1} \sup_{B_{(|\alpha|-1)r_y}(y)} |D^{\alpha_{|\alpha|-1}} u| \leq \left(\frac{n}{r_y}\right)^{|\alpha|} \sup_{B_{|\alpha|r_y}(y)} |u| \leq \left(\frac{n|\alpha|}{d_y}\right)^{|\alpha|} \sup_{\Omega} |u|.$$

Per ogni $y \in \Omega'$ vale che $d_y = \text{dist}(y, \partial\Omega) \geq \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, dunque concludiamo che

$$|D^\alpha u(y)| \leq \left(\frac{n|\alpha|}{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)}\right)^{|\alpha|} \sup_{\Omega} |u|. \quad \square$$

La stima data da (1.28) permette di derivare il seguente

Teorema 1.25. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $\{u_j\}_{j \in J}$ una famiglia di funzioni armoniche equilimitate in Ω ($\exists M > 0: \forall x \in \Omega, \forall j \in J |u_j(x)| \leq M$). Allora, per ogni $\Omega' \Subset \Omega$ aperto e per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la famiglia di funzioni $\{D^\alpha u_j\}_{j \in J}$ è uniformemente equicontinua in $\overline{\Omega'}$ ($\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x_1, x_0 \in \overline{\Omega'}, \forall j \in J (|x_1 - x_0| < \delta \rightarrow |D^\alpha u_j(x_1) - D^\alpha u_j(x_0)| < \varepsilon)$).*

Dimostrazione. Siano $\Omega' \Subset \Omega$ aperto, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $j \in J$. Mostriamo dapprima che la famiglia di funzioni $\{D^\alpha u_j\}_{j \in J}$ è equicontinua in $\overline{\Omega'}$ ($\forall x_0 \in \overline{\Omega'}, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{x_0} > 0: \forall x \in \overline{\Omega'}, \forall j \in J (|x - x_0| < \delta_{x_0} \rightarrow |D^\alpha u_j(x) - D^\alpha u_j(x_0)| < \varepsilon)$). Fissato $\varepsilon > 0$, sia $x_0 \in \overline{\Omega'}$ e sia $\delta'_{x_0} > 0$ tale che $B_{\delta'_{x_0}}(x_0) \Subset \Omega$. Sia $\gamma \in \mathbb{N}^n$ tale che $|\gamma| = |\alpha| + 1$ e $\alpha \leq \gamma$. Allora per ogni $x \in B_{\delta'_{x_0}}(x_0) \cap \overline{\Omega'}$, applicando il Teorema di Lagrange e il Teorema 1.24, otteniamo che

$$\begin{aligned} |D^\alpha u_j(x) - D^\alpha u_j(x_0)| &\leq \sup_{\Omega'} |D^\gamma u_j| |x - x_0| \leq \delta'_{x_0} \sup_{\Omega'} |D^\gamma u_j| \leq \\ &\leq \delta'_{x_0} \left(\frac{n(|\alpha| + 1)}{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)}\right)^{(|\alpha|+1)} \sup_{\Omega} |u_j| \leq M \delta'_{x_0} \left(\frac{n(|\alpha| + 1)}{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)}\right)^{(|\alpha|+1)}. \end{aligned}$$

Scegliendo $\delta_{x_0} < \min \left\{ \delta'_{x_0}, \frac{\varepsilon}{M} \left(\frac{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)}{n(|\alpha|+1)}\right)^{(|\alpha|+1)} \right\}$, abbiamo l'equicontinuità.

A questo punto, essendo $\overline{\Omega'}$ compatto, dal ricoprimento aperto $\{B_{\delta_x}(x) \cap \overline{\Omega'} \mid x \in \overline{\Omega'}\}$ si può estrarre un sottoricoprimento finito $\{B_{\delta_{x_i}}(x_i) \cap \overline{\Omega'} \mid i = 1, \dots, k\}$, con $k \in \mathbb{N}$ e $x_i \in \overline{\Omega'}$ per ogni $i = 1, \dots, k$, a cui è associato un numero di Lebesgue $2\delta > 0$ tale che per $x \in \overline{\Omega'}$ esiste $i \in \{1, \dots, k\}$ per cui $B_\delta(x) \cap \overline{\Omega'} \subset B_{\delta_{x_i}}(x_i) \cap \overline{\Omega'}$ (cfr. Teorema A.22). Se quindi prendiamo $x_1, x_0 \in \overline{\Omega'}$ tali che $|x_1 - x_0| < \delta$, esiste $i \in \{1, \dots, k\}$ per cui $B_\delta(\frac{x_0+x_1}{2}) \cap \overline{\Omega'} \subset B_{\delta_{x_i}}(x_i) \cap \overline{\Omega'}$, ovvero $|x_1 - x_i|, |x_0 - x_i| < \delta_{x_i}$, da cui $|D^\alpha u_j(x_1) - D^\alpha u_j(x_0)| \leq |D^\alpha u_j(x_1) - D^\alpha u_j(x_i)| + |D^\alpha u_j(x_i) - D^\alpha u_j(x_0)| < 2\varepsilon$. Questo verifica l'uniforme equicontinuità. \square

Per il Teorema di Ascoli-Arzelà concludiamo il seguente

Teorema 1.26 (Ascoli-Arzelà per le funzioni armoniche). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni armoniche equilimitate in Ω . Allora per ogni aperto $\Omega' \Subset \Omega$ $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione convergente uniformemente in $\overline{\Omega'}$ ad una funzione armonica.*

1.9 Funzioni armoniche in senso distribuzionale

Osservazione 1.15. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ una funzione con la proprietà della media in Ω , ovvero per ogni $B_R(y) \Subset \Omega$ vale che $u(y) = \int_{B_R(y)} u(x) dx$. Allora u è armonica in Ω .

Dimostrazione. u è continua in Ω dal momento che verifica la proprietà della media, dunque concludiamo per il Teorema 1.20. \square

Definizione. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Diciamo che una funzione $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ è armonica in senso distribuzionale in Ω se

$$\int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi(x) dx = 0 \quad (1.29)$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Teorema 1.27 (Lemma di Weyl). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ una funzione armonica in senso distribuzionale in Ω . Allora, a meno di ridefinire la funzione in un insieme di misura nulla, u è armonica in Ω e quindi ivi analitica.

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che, a meno di modificare u su un insieme di misura nulla, u verifica la proprietà della media in Ω e dunque, per l'Osservazione 1.15, è armonica in Ω . Consideriamo u^ε la sua mollificazione e mostriamo che è armonica in Ω . Per assurdo, se u^ε non fosse armonica in Ω , allora esisterebbe una palla $B_R(y) \Subset \Omega$ tale che $\Delta u^\varepsilon(x) > 0$ per ogni $x \in B_R(y)$ (o $\Delta u^\varepsilon(x) < 0$ per ogni $x \in B_R(y)$). Consideriamo ora la funzione

$$\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \varphi(x) = \begin{cases} |x - y|^2 - r^2 & x \in B_R(y) \\ 0 & x \in \Omega \setminus B_R(y). \end{cases}$$

Sia $\delta_y = \frac{1}{2}(\text{dist}(y, \partial\Omega) - R)$. Per costruzione, $\text{supp } \varphi = \overline{B_R(y)}$ e φ è continua in Ω , per cui la sua mollificazione φ^ε ha supporto contenuto in $\overline{B_{R+\varepsilon}(y)}$ e $\varphi^\varepsilon \in C_c^\infty(B_{R+\delta_y}(y))$, per cui $\varphi^\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ per ogni $\varepsilon < \delta_y$ (cfr. Teorema A.15, (i.)). Allora, per definizione di u armonica in senso distribuzionale in Ω , otteniamo che

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi^\varepsilon(x) dx = \int_{\Omega} u(x) \int_{B_R(y)} \Delta_x \eta^\varepsilon(x - z) \varphi(z) dz dx \stackrel{\star}{=} \\ &\stackrel{\star}{=} \int_{\Omega} u(x) \int_{B_R(y)} \Delta_z \eta^\varepsilon(z - x) \varphi(z) dz dx \stackrel{\star\star}{=} \int_{B_R(y)} \varphi(z) \int_{\Omega} u(x) \Delta_z \eta^\varepsilon(z - x) dx dz = \\ &= \int_{B_R(y)} \varphi(z) \Delta u^\varepsilon(z) dz, \end{aligned}$$

ove in \star abbiamo sfruttato il fatto che $\eta^\varepsilon(x - z) = \eta^\varepsilon(z - x)$ e in $\star\star$ il Teorema di Fubini-Tonelli. Abbiamo trovato un assurdo perché $\varphi(x) \Delta u^\varepsilon(x) < 0$ (> 0) per ogni $x \in B_R(y)$. Deduciamo che u^ε è armonica in Ω , dunque verifica (1.4) e (1.5), in particolare per ogni $B_r(y) \Subset \Omega$ vale che

$$\int_{B_r(y)} u^\varepsilon(x) dx = \frac{r}{n} \int_{\partial B_r(y)} u^\varepsilon(x) dS(x).$$

Ora, in virtù dei punti (iii.) e (iv.) del Teorema A.15, facendo il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ (o meglio su una opportuna successione $\{\varepsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tale che $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0$), troviamo

$$\Psi(r) = \int_{B_r(y)} u(x) dx = \frac{r}{n} \int_{\partial B_r(y)} u(x) dS(x)$$

per quasi ogni $r > 0$. Ψ definita sopra è continua in $(0, +\infty)$ per costruzione, inoltre Ψ è derivabile e precisamente

$$\begin{aligned} \Psi'(r) &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\Psi(r+\delta) - \Psi(r)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} \int_{B_{r+\delta}(y) \setminus B_r(y)} u(x) dx \stackrel{\star}{=} \\ &\stackrel{\star}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} \int_r^{r+\delta} \int_{\partial B_\rho(y)} u(x) dS(x) d\rho = \int_{\partial B_r(y)} u(x) dS(x), \end{aligned}$$

ove in \star abbiamo applicato il Teorema A.13 e nell'ultimo passaggio il Teorema fondamentale del calcolo. Quindi $\Psi \in C^1(0, +\infty)$ e verifica l'equazione differenziale $r\Psi'(r) - n\Psi(r) = 0$ equivalente a $\frac{d}{dr}(r^{-n}\Psi(r)) = 0$, per cui esiste una costante $C = C_y \in \mathbb{R}$ indipendente da r tale che $C_y = \Psi(r) = \int_{B_r(y)} u(x) dx$ per ogni $r > 0$. Ora, per il Teorema A.8, per quasi ogni $y \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{B_r(y)} u(x) dx = u(y)$, ovvero per quasi ogni $y \in \mathbb{R}^n$ si ha che $u(y) = C_y = \int_{B_r(y)} u(x) dx$ per ogni $r > 0$. Concludiamo che, a meno di ridefinire u su un insieme di misura nulla ponendola uguale a C_y per ogni y in tale insieme, u verifica la proprietà della media. \square

1.10 Metodo di Perron

Vogliamo ora interessarci al quesito circa l'esistenza di soluzioni $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ per il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & x \in \Omega \\ u = g & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato arbitrario, con $g \in C(\partial\Omega)$.

Teorema 1.28. *Sia $u \in C^0(\Omega)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i. per ogni $B_R(y) \Subset \Omega$ si ha che $u(y) \leq \int_{B_R(y)} u(x) dx$;

ii. per ogni $B_R(y) \Subset \Omega$ e per ogni funzione $h: \overline{B_R(y)} \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa

$$\begin{cases} -\Delta h = 0 & x \in B_R(y) \\ h \geq u & x \in \partial B_R(y), \end{cases}$$

si ha che $h(x) \geq u(x)$ per ogni $x \in \overline{B_R(y)}$;

iii. per ogni $B_R(y) \Subset \Omega$ si ha che $u(y) \leq \int_{\partial B_R(y)} u(x) dS(x)$;

iv. per ogni $y \in \Omega$ e per ogni $\varphi \in C^2(\Omega)$, se $u - \varphi$ ha un massimo locale in y , allora $-\Delta\varphi(y) \leq 0$.

i. loc per ogni $y \in \Omega$ esiste $\delta_y \in (0, \text{dist}(y, \partial\Omega))$ tale che per ogni $R \in (0, \delta_y]$ si ha che $u(y) \leq \int_{B_R(y)} u(x) dx$;

ii. loc per ogni $y \in \Omega$ esiste $\delta_y \in (0, \text{dist}(y, \partial\Omega))$ tale che per ogni $R \in (0, \delta_y]$ e per ogni funzione $h: \overline{B_R(y)} \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa

$$\begin{cases} -\Delta h = 0 & x \in B_R(y) \\ h \geq u & x \in \partial B_R(y), \end{cases}$$

si ha che $h(x) \geq u(x)$ per ogni $x \in \overline{B_R(y)}$;

iii. loc per ogni $y \in \Omega$ esiste $\delta_y \in (0, \text{dist}(y, \partial\Omega))$ tale che per ogni $R \in (0, \delta_y]$ si ha che $u(y) \leq \int_{\partial B_R(y)} u(x) dS(x)$;

iv. loc per ogni $y \in \Omega$ esiste $\delta_y \in (0, \text{dist}(y, \partial\Omega))$ tale che per ogni $R \in (0, \delta_y]$ e per ogni $\varphi \in C^2(B_R(y))$ se $u - \varphi$ ha un massimo locale in y , allora $-\Delta\varphi(y) \leq 0$.

Dimostrazione.

(i.) \Rightarrow (ii.) Per ogni $B_R(y) \Subset \Omega$ si ha che $(u - h)(y) \leq \int_{B_R(y)} (u - h)(x) dx$ dal Teorema 1.1, inoltre $u - h \leq 0$ in $\partial B_R(y)$ per ipotesi, allora, per il Teorema 1.4, possiamo concludere che $u - h \leq 0$ in $\overline{B_R(y)}$.

(ii.) \Rightarrow (iii.) Per ogni $B_R(y) \Subset \Omega$, sia $h_{y,R}$ la soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta h_{y,R} = 0 & x \in B_R(y) \\ h_{y,R} = u & x \in \partial B_R(y). \end{cases}$$

Essendo $h_{y,R}$ armonica, per il Teorema 1.1 si ha che $h_{y,R}(y) = \int_{\partial B_R(y)} h_{y,R}(x) dS(x)$, inoltre per ipotesi $h_{y,R}(x) \geq u(x)$ per ogni $x \in \overline{B_R(y)}$ e $h_{y,R}(x) = u(x)$ per ogni $x \in \partial B_R(y)$, dunque concludiamo $u(y) \leq \int_{\partial B_R(y)} h_{y,R}(x) dS(x) = \int_{\partial B_R(y)} u(x) dS(x)$.

(iii.) \Rightarrow (i.) Per ogni $B_R(y) \Subset \Omega$, applicando il Teorema A.13, si trova che

$$\int_{B(y,R)} u(x) dx = \int_0^R \int_{\partial B(y,r)} u(x) dS(x) dr \geq \int_0^R u(y) n \omega_n r^{n-1} dr = u(y) \omega_n R^n.$$

(iii.) \Rightarrow (iv.) Siano $y \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ tali che $u - \varphi$ abbia un massimo locale in y , allora esiste $R > 0$ tale che $B_R(y) \Subset \Omega$ e $(u - \varphi)(y) \geq (u - \varphi)(x)$ per ogni $x \in B_R(y)$. Allora per ogni $r \in (0, R)$ vale che

$$u(y) - \varphi(y) = \int_{\partial B_r(y)} (u(y) - \varphi(y)) dS(x) \geq \int_{\partial B_r(y)} (u(x) - \varphi(x)) dS(x) \stackrel{\star}{\geq} u(y) - \Phi(r),$$

ove in \star abbiamo usato l'ipotesi (iii.), per cui $u(y) \leq \int_{\partial B_r(y)} u(x) dS(x)$, e definito $\Phi(r) = \int_{\partial B_r(y)} \varphi(x) dS(x) = \int_{\partial B_1(0)} \varphi(r\omega + y) dS(\omega)$. Deduciamo quindi che

$$\varphi(y) \leq \Phi(r) \quad \text{per ogni } r \in (0, R).$$

In virtù dei conti fatti in (1.7), abbiamo che

$$\Phi'(r) = \frac{r}{n} \int_{B_r(y)} \Delta\varphi(x) dx$$

e per il Teorema A.6

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \Phi(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\partial B_1(0)} \varphi(r\omega + y) dS(\omega) = \int_{\partial B_1(0)} \varphi(y) dS(\omega) = \varphi(y),$$

da cui, estendendo Φ per continuità in 0, otteniamo che

$$\Phi(0) \leq \Phi(r) \quad \text{per ogni } r \in (0, R).$$

Ora supponiamo per assurdo che esista $\delta > 0$ tale che $\Delta\varphi(y) < -2\delta < 0$, allora, per continuità, esiste $r \in (0, R)$ tale che $\Delta\varphi(x) < -\delta < 0$ per ogni $x \in B_r(y)$, da cui

$$\Phi'(\rho) = \frac{\rho}{n} \int_{B_\rho(y)} \Delta\varphi(x) dx < -\frac{\delta\rho}{n}$$

per ogni $\rho \in (0, r)$. Integrando, concludiamo che

$$\Phi(r) - \Phi(0) = \int_0^r \Phi'(\rho) d\rho < -\frac{\delta}{n} \int_0^r \rho d\rho = -\frac{\delta}{2n} r^2 < 0$$

da cui $\Phi(0) > \Phi(r)$, assurdo.

(iv.) \Rightarrow (iii.) Per assurdo, supponiamo esistano $y \in \Omega$ e $R > 0$ tali che $B_R(y) \Subset \Omega$ e $u(y) > \int_{\partial B_R(y)} u(x) dS(x)$, per cui esiste $C > 0$ tale che

$$u(y) - \int_{\partial B_R(y)} u(x) dS(x) > CR^2.$$

Sia ora $\bar{u} \in \mathcal{C}^2(B_R(y)) \cap \mathcal{C}^0(\overline{B_R(y)})$ la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta\bar{u} = 0 & x \in B_R(y) \\ \bar{u} = u & x \in \partial B_R(y), \end{cases}$$

che, per il Teorema 1.18, è

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} \frac{R^2 - |x-y|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(y)} \frac{u(z)}{|z-x|^n} dS(z) & \text{se } x \in B_R(y) \\ u(x) & \text{se } x \in \partial B_R(y). \end{cases}$$

Notiamo che $\bar{u}(y) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(y)} u(z) dS(z) = \int_{\partial B_R(y)} u(x) dS(x)$.
A questo punto, definiamo

$$\varphi(x) = \bar{u}(x) + C(R^2 - |x-y|^2) \quad \forall x \in \overline{B_R(y)}.$$

Risulta che $\varphi \in \mathcal{C}^2(B_R(y))$, $u(x) - \varphi(x) = 0$ per ogni $x \in \partial B_R(y)$ e $u(y) - \varphi(y) = u(y) - \bar{u}(y) - CR^2 = u(y) - \int_{\partial B_R(y)} u(x) dS(x) - CR^2 > 0$. Allora $M = \sup_{B_R(y)} (u -$

$\varphi) = \max_{B_R(y)}(u - \varphi) > 0$, in particolare esiste $z \in B_R(y)$ tale che $u(z) - \varphi(z) = M$. Ora sia $r = |z - y|$ e sia $\delta = \frac{R-r}{3} > 0$. Per il Teorema A.16, esiste una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tale che $0 \leq f(x) \leq 1$ per ogni $x \in \Omega$, $f(x) = 1$ per ogni $x \in \overline{B_{r+\delta}(y)}$ e $f(x) = 0$ per ogni $x \in \Omega \setminus B_{r+2\delta}(y)$. Allora $\tilde{\varphi}(x) = f(x)\varphi(x) \in \mathcal{C}^2(B_R(y))$, inoltre $\tilde{\varphi}(x) = 0$ per ogni $x \in \Omega \setminus B_{r+2\delta}(y)$, dunque può essere estesa ad una funzione $\mathcal{C}^2(\Omega)$, ponendola pari a 0 fuori da $B_R(y)$. Poiché $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ per ogni $x \in \overline{B_{r+\delta}(y)}$, $u - \tilde{\varphi}$ ha un massimo locale in z , dunque, per il punto (iv.), $-\Delta\varphi(z) = \Delta\tilde{\varphi}(z) \leq 0$, ma $-\Delta\varphi(z) = -\Delta\bar{u}(z) + C\Delta_z(|z - y|^2) = 0 + C(2n) > 0$, assurdo.

In modo perfettamente analogo si mostra che le corrispondenti proprietà locali (i^{loc}), (ii^{loc}), (iii^{loc}), (iv^{loc}) sono equivalenti tra loro.

(iv.) \Rightarrow (iv^{loc}) Data $\varphi \in \mathcal{C}^2(B_R(y))$, con $B_R(y) \subseteq \Omega$, allora come sopra costruiamo la funzione $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ che coincide con φ in $\overline{B_{r+\delta}(y)} \subseteq B_R(y)$, per cui $u - \tilde{\varphi}$ ha un massimo locale in y , dunque $-\Delta\varphi(y) = \Delta\tilde{\varphi}(y) \leq 0$.

(iv^{loc}) \Rightarrow (iv.) Sia $y \in \Omega$ e sia $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tale che $u - \varphi$ abbia un massimo locale in y , allora $\varphi \in \mathcal{C}^2(B_{\delta_y}(y))$ e $(u - \varphi)|_{B_{\delta_y}(y)}$ ha un massimo locale in y , per cui $-\Delta\varphi(y) \leq 0$. \square

Definizione. Se $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ verifica (una tra) le affermazioni del Teorema 1.28, diciamo che u è subarmonica.

Notiamo che questa definizione generalizza quella nota, infatti se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, dai Teoremi 1.1 e 1.2, $\Delta u \leq 0$ è equivalente a (i.).

Osservazione 1.16. Considerando $-u$ in luogo di u nel Teorema 1.28, possiamo ottenere un risultato analogo, che permette di estendere la definizione di funzione superarmonica per $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$.

Osservazione 1.17. Dal Teorema 1.28 e dall'Osservazione 1.16, otteniamo una caratterizzazione per le funzioni armoniche che ne evidenzia la natura locale.

Osservazione 1.18. Date u_1, \dots, u_n subarmoniche in Ω , si ha che anche $\max_{i=1, \dots, n} u_i$ è subarmonica in Ω .

Dimostrazione. Per ogni $B \subseteq \Omega$ e per ogni funzione $h: \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}$ armonica in \overline{B} tale che $h \geq \max_{i=1, \dots, n} u_i$ per ogni $x \in \partial B$, si ha che $h \geq u_i$ per ogni $x \in \partial B$, per ogni $i = 1, \dots, n$, dunque, per il Teorema 1.28, $h(x) \geq u_i(x)$ per ogni $x \in \overline{B_R}(y)$, per ogni $i = 1, \dots, n$ e concludiamo che $h(x) \geq \max_{i=1, \dots, n} u_i(x)$ per ogni $x \in \overline{B_R}(y)$. \square

Osservazione 1.19. Analogamente, date u_1, \dots, u_n superarmoniche in Ω , si ha che anche $\min_{i=1, \dots, n} u_i$ è superarmonica in Ω .

Teorema 1.29. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, sia $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni subarmoniche in Ω che converge uniformemente ad una funzione u su ogni sottoinsieme compatto di Ω . Allora u è subarmonica in Ω .

Dimostrazione. Per ipotesi, u_m è subarmonica per ogni $m \in \mathbb{N}$, dunque per ogni palla $B_r(y) \subseteq \Omega$ soddisfa la proprietà della sottomediana

$$u_m(y) \leq \int_{\partial B_r(y)} u_m(x) dS(x).$$

Ora, in virtù della convergenza uniforme di $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ ad u in $B_r(y) \Subset \Omega$, possiamo fare il limite per $m \rightarrow \infty$ su ambo i membri dell'equazione, ottenendo

$$u(y) \leq \int_{\partial B_r(y)} u(x) dS(x),$$

ovvero, per ogni palla $B_r(y) \Subset \Omega$, u soddisfa la proprietà della sottomediana; inoltre u è continua in Ω , in quanto limite localmente uniforme di funzioni continue, dunque, per il Teorema 1.28, concludiamo che u è subarmonica. \square

Definizione. Date una funzione $u \in C^0(\Omega)$ subarmonica in Ω e una palla $B \Subset \Omega$, consideriamo $\bar{u} \in C^2(B) \cap C^0(\bar{B})$ la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u}(x) = 0 & x \in B \\ \bar{u}(x) = u(x) & x \in \partial B \end{cases}$$

e definiamo il sollevamento armonico di u in B come

$$U(x) = \begin{cases} \bar{u}(x) & x \in B \\ u(x) & x \in \Omega \setminus B. \end{cases} \quad (1.30)$$

Osservazione 1.20. $U \in C(\bar{\Omega})$, $u \leq U$, U è armonica in B e U è subarmonica in Ω .

Dimostrazione. $U \in C(\bar{\Omega})$ essendo $u \in C(\Omega)$, $\bar{u} \in C(\bar{B})$ e $\bar{u} = u$ in ∂B . Per l'Osservazione 1.2, $u \leq \bar{u}$ in B , dunque concludiamo che $u \leq U$. U è armonica in B per costruzione, essendolo \bar{u} . Mostriamo ora che U verifica (ii.) del Teorema 1.28 per concludere che U è subarmonica in Ω . Sia $B' \Subset \Omega$ una palla e sia $h: \bar{B}' \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione soddisfacente il problema

$$\begin{cases} -\Delta h(x) = 0 & x \in B' \\ h(x) \geq U(x) & x \in \partial B'. \end{cases}$$

Vogliamo provare che $h(x) \geq U(x)$ per ogni $x \in \bar{B}'$. Se $B \cap B' = \emptyset$, allora $U(x) = u(x)$ per ogni $x \in \bar{B}'$, da cui $U - h = u - h$ è subarmonica in B' , $U(x) - h(x) \leq 0$ per ogni $x \in \partial B'$, dunque concludiamo per il Teorema 1.4. Se invece $B \cap B' \neq \emptyset$, allora in $B' \setminus (B' \cap B)$ si ha che $U = u$ e si conclude come sopra. In $B' \cap B$ si ha che h e U sono entrambe armoniche e su $\partial(B' \cap B)$ $h \geq U$, per cui concludiamo sempre per il Teorema 1.4. \square

Definizione. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia data $g \in L^\infty(\partial\Omega)$. Definiamo

$$\mathcal{S}_g = \{v \in C(\bar{\Omega}) \mid v \text{ subarmonica in } \Omega, v(x) \leq g(x) \forall x \in \partial\Omega\} \quad (1.31)$$

e diciamo che $v \in \mathcal{S}_g$ è una subfunzione relativa a g .

Osservazione 1.21. \mathcal{S}_g è un insieme non vuoto e superiormente limitato.

Dimostrazione. La funzione costante $\inf_{\partial\Omega} g$ è un elemento di \mathcal{S}_g e per il Teorema 1.4 ogni $v \in \mathcal{S}_g$ verifica $v \leq \sup_{\partial\Omega} g$. \square

Teorema 1.30 (Soluzione di Perron). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $g \in L^\infty(\partial\Omega)$. Allora*

$$H_g(x) = \sup_{v \in \mathcal{S}_g} v(x)$$

è una funzione armonica in Ω .

Dimostrazione. H_g risulta essere ben definita grazie all'Osservazione 1.21. Fissiamo dunque $y \in \Omega$ e mostriamo che H_g è armonica in y . Per definizione di sup, esiste una successione $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_g$ tale che $v_m(y) \rightarrow H_g(y)$. Senza perdita di generalità, possiamo supporre $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ equilimitata, infatti, possiamo sempre considerare $\{\tilde{v}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ in luogo di $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, ove $\tilde{v}_m = \max\{v_m, \inf_{\partial\Omega} g\}$: $\tilde{v}_m \in \mathcal{S}_g$ (per l'Osservazione 1.18), $\{\tilde{v}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ è equilimitata ($\inf_{\partial\Omega} g \leq \tilde{v}_m \leq \sup_{\partial\Omega} g$) e $\tilde{v}_m(y) \rightarrow H_g(y)$ ($v_m(y) \leq \tilde{v}_m(y) \leq H_g(y)$ e $v_m(y) \rightarrow H_g(y)$). Denotiamo la successione con $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$.

A questo punto, fissiamo $R > 0$ tale che $B_R(y) \Subset \Omega$ e per ogni $m \in \mathbb{N}$ chiamiamo V_m il sollevamento armonico di v_m nella palla $B_R(y)$. Per ogni $m \in \mathbb{N}$, abbiamo che $V_m \in \mathcal{S}_g$ (dall'Osservazione 1.20, $V_m \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ è subarmonica in Ω , inoltre $V_m(x) = v_m(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in \partial\Omega$), V_m è equilimitata (per l'Osservazione 1.18, il Teorema 1.4 e il fatto che $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ è equilimitata come visto sopra, abbiamo $\inf_{\partial\Omega} g \leq v_m \leq V_m$ e $\sup_B V_m = \sup_{\partial B} V_m = \sup_{\partial B} v_m \leq \sup_{\partial\Omega} g$) e $V_m(y) \rightarrow H_g(y)$ ($v_m(y) \leq V_m(y) \leq H_g(y)$ e $v_m \rightarrow H_g(y)$).

Ora, essendo $\{V_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni armoniche equilimitate in $B_R(y)$, per il Teorema 1.26, a meno di passare ad una sottosuccessione (che denoteremo sempre $\{V_m\}_{m \in \mathbb{N}}$), abbiamo che $\{V_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente ad una funzione armonica V in $B_r(y)$, per ogni $r \in (0, R)$. Per costruzione, $V(x) \leq H_g(x)$ per ogni $x \in B_R(y)$ e $V(y) = H_g(y)$. Se riusciamo a mostrare che esiste $r \in (0, R)$ tale che $V(x) = H_g(x)$ per ogni $x \in B_r(y)$, allora abbiamo finito perché questo implica che H_g è armonica in y .

Supponiamo per assurdo che per ogni $r \in (0, R)$ esista $z \in B_r(y)$ tale che $V(z) < H_g(z)$. Analogamente a sopra, sia $\{w_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_g$ una successione equilimitata, tale che $w_m(z) \rightarrow H_g(z)$. Senza perdita di generalità, possiamo supporre $w_m \geq V_m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, infatti possiamo sempre considerare $\{\tilde{w}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ in luogo di $\{w_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, ove $\tilde{w}_m = \max\{w_m, V_m\}$: $\tilde{w}_m \in \mathcal{S}_g$ ($w_m, V_m \in \mathcal{S}_g$), \tilde{w}_m è equilimitata (essendolo w_m e V_m) e $\tilde{w}_m(z) \rightarrow H_g(z)$ ($w_m(y) \leq \tilde{w}_m(y) \leq H_g(y)$ e $w_m(y) \rightarrow H_g(y)$). Denotiamo la successione con $\{w_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Ora, per ogni $m \in \mathbb{N}$, consideriamo il sollevamento armonico W_m di w_m in $B_r(y)$: come sopra, per ogni $m \in \mathbb{N}$, abbiamo che $W_m \in \mathcal{S}_g$ e W_m equilimitata, inoltre $W_m(x) \geq V_m(x)$ per ogni $x \in \Omega$ (infatti in $\Omega \setminus B_r(y)$ si ha $W_m - V_m = w_m - V_m \geq 0$ per costruzione e in $B_r(y)$ si ha che $W_m - V_m = \bar{w}_m - \bar{v}_m$ è armonica con $W_m - V_m = w_m - V_m \geq 0$ su $\partial B_r(y)$, dunque, per il Teorema 1.4, $W_m - V_m \geq 0$ su tutta la palla $B_r(y)$), in particolare $V_m(y) \leq W_m(y) \leq H_g(y)$. Allora, come sopra, essendo $\{W_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni armoniche equilimitate in $B_r(y)$, per il Teorema 1.26, a meno di passare ad una sottosuccessione (che denoteremo sempre $\{W_m\}_{m \in \mathbb{N}}$), abbiamo che $\{W_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente ad una funzione armonica W in $B_\rho(y)$, per ogni $\rho \in (0, r)$. Per costruzione, $V(x) \leq W(x)$ per ogni $x \in B_r(y)$, $V(y) = W(y) = H_g(y)$ e $W(z) = H_g(z) > V(z)$. Abbiamo così ottenuto due funzioni armoniche V e W armoniche in $B_r(y)$ tali che $V(y) - W(y) = 0$, ma allora, per il Teorema 1.3, $V = W$ in $B_r(y)$, che contraddice il fatto che esiste $z \in B_r(y)$ tale che $W(z) > V(z)$. \square

Nel Teorema 1.30 abbiamo mostrato che per ogni $g \in L^\infty(\partial\Omega)$ esiste una funzione armonica $H_g \in C^\infty(\Omega)$ che soddisfa

$$\begin{cases} -\Delta H_g = 0 & \text{in } \Omega \\ H_g \leq g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Notiamo che se il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.32)$$

è risolubile, la sua soluzione coincide con H_g , infatti se w ne è soluzione, allora chiaramente $w \in \mathcal{S}_g$ e inoltre per ogni altra $u \in \mathcal{S}_g$ si ha che $w \geq u$ (infatti $-\Delta(u - w) \leq 0$, da cui, per il Teorema 1.4, $\sup_\Omega(u - w) = \sup_{\partial\Omega}(u - w) \leq 0$). H_g è detta *soluzione di Perron*.

A questo punto, supponendo $g \in C(\partial\Omega)$, ci chiediamo sotto quali condizioni H_g sia soluzione di (1.32), in particolare, sotto quali condizioni

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} H_g(x) = g(x_0) \quad \forall x_0 \in \partial\Omega, \quad (1.33)$$

per cui $H_g \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ coincide con g su $\partial\Omega$.

Osservazione 1.22. *In generale 1.33 non può valere per ogni aperto limitato Ω , per esempio siano $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < 1\}$ e $g \in C(\partial\Omega)$ definita come $g(x) = 0$ per $|x| = 1$ e $g(0) = 1$, allora $H_g \equiv 0$, in particolare non è soluzione del problema di Dirichlet con valori al bordo g , essendo $H_g(0) = 0 \neq 1$.*

Dimostrazione. $0 \in \mathcal{S}_g$, dunque $H_g(x) \geq 0$ per ogni $x \in \Omega$. Ora sia $v \in \mathcal{S}_g$, essendo $g(0) = 1$, per il Teorema 1.4 si ha che $v(x) < 1$ per ogni $x \in \Omega$. Per ogni $\varepsilon > 0$ sia $\delta_\varepsilon \in (0, 1)$ tale che $-\varepsilon \log(\delta_\varepsilon) > 1$. Consideriamo la funzione $w_\varepsilon(x) = -\varepsilon \log|x|$, $x \in \Omega$: ricordando (1.10), abbiamo che w_ε è armonica in $\Omega' = \{x \in \Omega \mid \delta_\varepsilon < |x| < 1\}$, inoltre $w_\varepsilon(x) = 0$ se $|x| = 1$ e $w_\varepsilon(x) = -\varepsilon \log(\delta_\varepsilon) > 1$ se $|x| = \delta_\varepsilon$, dunque, per il Teorema 1.4, si ha che $\sup_{\Omega'}(v - w_\varepsilon) = \sup_{\partial\Omega'}(v - w_\varepsilon) = \max\{\sup_{|x|=1}(v - w_\varepsilon), \sup_{|x|=\delta_\varepsilon}(v - w_\varepsilon)\} \leq \max\{\sup_{|x|=1} g, \sup_{|x|=\delta_\varepsilon}(v - 1)\} = 0$ da cui $v(x) \leq w_\varepsilon(x)$ in $\overline{\Omega'}$. D'altra parte, se $|x| \leq \delta_\varepsilon$, allora (con abuso di notazione) $w_\varepsilon(x) \geq w_\varepsilon(\delta_\varepsilon) > 1 > v(x)$. Ne deduciamo che $v(x) \leq w_\varepsilon(x)$ in $\overline{\Omega} \setminus \{0\}$ per ogni $v \in \mathcal{S}_g$, da cui $H_g(x) \leq w_\varepsilon(x) = -\varepsilon \log|x|$ per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $\varepsilon > 0$, dunque prendendo $\varepsilon \rightarrow 0$ concludiamo che $H_g \equiv 0$. \square

La condizione di continuità al contorno (1.33) è legata alle proprietà geometriche del bordo $\partial\Omega$ tramite il concetto di *barriera*.

Definizione. *Sia $x_0 \in \partial\Omega$. Una funzione w è detta barriera a x_0 relativamente a Ω se*

- i. $w \in C^0(\overline{\Omega})$;
- ii. w è superarmonica in Ω ;
- iii. $w(x_0) = 0$ e $w(x) > 0$ per ogni $x \in \overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$.

Definizione. Sia $x_0 \in \partial\Omega$. Una funzione w è detta barriera locale a x_0 relativamente a Ω se esiste un intorno U di x_0 tale che

- i. $w \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega \cap U})$;
- ii. w è superarmonica in $\Omega \cap U$;
- iii. $w(x_0) = 0$ e $w(x) > 0$ per ogni $x \in \overline{\Omega \cap U} \setminus \{x_0\}$.

Definizione. Sia $x_0 \in \partial\Omega$. Diciamo che x_0 è un punto regolare (rispetto al laplaciano) se esiste una barriera locale a x_0 .

Osservazione 1.23. Data w una barriera locale a x_0 , possiamo sempre costruire una barriera a x_0 : siano $R > 0$ tale che $B_R(x_0) \Subset U$ e $m = \inf_{(U \setminus B_R(x_0)) \cap \Omega} w > 0$, allora

$$\bar{w}(x) = \begin{cases} \min\{m, w(x)\} & x \in \overline{\Omega} \cap B_R(x_0) \\ m & x \in \overline{\Omega} \setminus B_R(x_0) \end{cases} \quad (1.34)$$

è una barriera a x_0 .

Dimostrazione. w è superarmonica in $\Omega \cap U$, in particolare lo è in $(U \setminus B_R(x_0)) \cap \Omega$, dunque, per il Teorema 1.4, $w(x) \geq m$ per ogni $x \in (U \setminus B_R(x_0)) \cap \Omega$, in particolare $m = \min\{m, w(x)\}$ in $\partial B_R(x_0) \cap \overline{\Omega}$, inoltre il minimo tra due funzioni continue è una funzione continua, per cui $\bar{w} \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. Per l'Osservazione 1.19, \bar{w} è superarmonica in Ω . Infine $\bar{w}(x_0) = w(x_0) = 0$, $\bar{w}(x) = m > 0$ se $x \in \overline{\Omega} \setminus B_R(x_0)$ e $\bar{w}(x) = \min\{m, w(x)\} > 0$ se $x \in \overline{\Omega} \cap B_R(x_0)$ (essendo in tal caso $x \in \overline{\Omega \cap U} \setminus \{x_0\}$, dunque $w(x) > 0$). \square

Il legame tra la barriera e il comportamento al contorno delle soluzioni è dato nel seguente

Teorema 1.31 (Wiener). Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato, $g \in L^\infty(\partial\Omega)$ e $x_0 \in \partial\Omega$. Se x_0 è punto regolare (rispetto al laplaciano) e g è continua in x_0 , allora (1.33) è verificata in x_0 .

Dimostrazione. Sia w una barriera a x_0 (w esiste per l'Osservazione 1.23). Fissato $\varepsilon > 0$, per la continuità di g in x_0 , esiste δ_ε tale che per ogni $x \in \partial\Omega$ per cui $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ si ha che $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$. Ora sia $M = \sup_{\partial\Omega} |g| < \infty$ e fissiamo $k > 0$ tale che $kw(x) > 2M$ per ogni $x \in \partial\Omega$ per cui $|x - x_0| \geq \delta_\varepsilon$ (k esiste per i punti (i.) e (iii.) della definizione di barriera).

Consideriamo la funzione $u(x) = g(x_0) - \varepsilon - kw(x)$: $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ (essendo $w \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$) e u è subarmonica in Ω (essendo w superarmonica in Ω). Ora, preso $x \in \partial\Omega$ tale che $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, essendo $w(x) \geq 0$, si ha che $u(x) \leq g(x_0) - \varepsilon < g(x)$; d'altra parte, preso $x \in \partial\Omega$ tale che $|x - x_0| \geq \delta_\varepsilon$, si ha che $u(x) < g(x_0) - \varepsilon - 2M \leq g(x) - \varepsilon < g(x)$ (dal fatto che $g(x_0) - g(x) \leq |g(x_0)| + |g(x)| \leq 2M$). Abbiamo così mostrato che $u(x) < g(x)$ per ogni $x \in \partial\Omega$, dunque $u \in \mathcal{S}_g$ e quindi $H_g(x) \geq u(x)$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$.

Analogamente, consideriamo la funzione $v(x) = g(x_0) + \varepsilon + kw(x)$: $v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ (essendo $w \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$) e v è superarmonica in Ω (essendo w superarmonica in Ω). Ora, preso $x \in \partial\Omega$ tale che $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, essendo $w(x) \geq 0$, si ha che $v(x) \geq g(x_0) + \varepsilon > g(x)$; d'altra parte, preso $x \in \partial\Omega$ tale che $|x - x_0| \geq \delta_\varepsilon$, si ha che $v(x) > g(x_0) + \varepsilon + 2M \geq g(x) + \varepsilon > g(x)$ (dal fatto che $g(x) - g(x_0) \leq |g(x)| + |g(x_0)| \leq 2M$). Abbiamo così mostrato che $v(x) > g(x)$

per ogni $x \in \partial\Omega$, dunque, per il Teorema 1.4, $v(x) \geq l(x)$ per ogni $l \in \mathcal{S}_g$ e quindi $H_g(x) \leq v(x)$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$.

Abbiamo provato che $g(x_0) - \varepsilon - kw(x) \leq H_g(x) \leq g(x_0) + \varepsilon + kw(x)$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$, ovvero che $|H_g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon + kw(x)$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$. Facendo il limite per $x \rightarrow x_0$, concludiamo per l'arbitrarietà di ε . \square

Dai Teoremi 1.30 e 1.31 otteniamo il seguente

Corollario 1.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, allora per ogni $g \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$ il problema di Dirichlet (1.32) ammette un'unica soluzione $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ se e solo se tutti i punti del bordo $\partial\Omega$ sono regolari.*

Dimostrazione.

(\Leftarrow) Se g è continua e tutti i punti del bordo $\partial\Omega$ sono regolari, allora H_g è soluzione di (1.32) ed è unica per il Teorema 1.5.

(\Rightarrow) Supponiamo che per ogni $g \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$ il problema di Dirichlet (1.32) ammetta un'unica soluzione $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ consideriamo $g_{x_0}(x) = |x - x_0|$ e sia u_{x_0} la soluzione di (1.32) con valori al contorno g_{x_0} , allora $u_{x_0} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, u_{x_0} è armonica in Ω , in particolare è superarmonica e $\min_{\overline{\Omega}} u_{x_0} = \min_{\overline{\Omega}} g_{x_0} = 0$, dunque $u_{x_0}(x) \geq 0$ e se esistesse $x_1 \in \overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$ tale che $u_{x_0}(x_1) = 0$, allora $x_1 \in \Omega$ ($u_{x_0}(x) = g_{x_0}(x) > 0$ per ogni $x \in \partial\Omega \setminus \{x_0\}$), ma allora, per il Teorema 1.3, u_{x_0} dovrebbe essere costante in $\overline{\Omega}$, falso, non essendolo g_{x_0} , dunque $u_{x_0}(x) > 0$ per ogni $x \in \overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$. Questo dimostra che u_{x_0} è una barriera a x_0 che quindi risulta regolare. Concludiamo per l'arbitrarietà di $x_0 \in \partial\Omega$. \square

A questo punto cerchiamo delle proprietà geometriche locali di $\partial\Omega$ che risultino condizioni sufficienti per la regolarità di tutti i punti del bordo.

Definizione. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Diciamo che Ω verifica la proprietà della palla tangente esterna in un punto $x_0 \in \partial\Omega$ se esistono $y \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$ tali che $\overline{B_R(y)} \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$. Inoltre, diciamo che Ω verifica la proprietà della palla tangente esterna se, per ogni $x_0 \in \partial\Omega$, Ω verifica la proprietà della palla tangente esterna in x_0 .*

Osservazione 1.24. *Se un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è convesso, allora verifica la proprietà della palla tangente esterna.*

Dimostrazione. Se Ω è convesso, per ogni punto $x_0 \in \partial\Omega$ si può costruire un iperpiano passante per x_0 tale che Ω sia tutto contenuto in uno dei due semispazi in cui \mathbb{R}^n è diviso dall'iperpiano (cfr. [15]), dunque ogni palla nell'altro semispazio e tangente l'iperpiano in x_0 realizza la proprietà della palla tangente esterna nel punto x_0 . \square

Osservazione 1.25. *Se un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è di classe \mathcal{C}^2 , allora verifica la proprietà della palla tangente esterna.*

Dimostrazione. Se Ω è di classe \mathcal{C}^2 , fissato $x_0 \in \partial\Omega$ scegliamo un sistema di coordinate x_1, \dots, x_n per \mathbb{R}^n in modo che x_0 e la normale esterna a Ω in x_0 abbiano rispettivamente coordinate $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ ed $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ (per cui l'iperpiano tangente a $\partial\Omega$ in x_0 ha equazione $x_n = 0$). In tal caso, per il Teorema della funzione implicita, esistono $r > 0$ e una funzione $\gamma: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{n-1})$, tali che

$\Omega \cap B(0, r) = \{x \in B(0, r) \mid x_n < \gamma(x')\}$, ove $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Chiaramente $\gamma(\mathbf{0}') = 0$ ($x_0 \in \partial\Omega$) e $D\gamma(\mathbf{0}') = 0$ (l'equazione dell'iperpiano tangente a $\partial\Omega$ in $\mathbf{0}$ è $-\partial_{x_1}\gamma(\mathbf{0}')x_1 - \dots - \partial_{x_{n-1}}\gamma(\mathbf{0}')x_{n-1} + 1 \cdot x_n = 0$ ma per costruzione è anche $x_n = 0$). Lo sviluppo di Taylor di γ centrato in $\mathbf{0}'$ è dunque: $\gamma(x') = \frac{1}{2}\langle D^2\gamma(\mathbf{0}')x', x'\rangle + o(|x'|^2)$. La matrice hessiana $D^2\gamma(\mathbf{0}')$ è simmetrica, dunque diagonalizzabile con autovalori reali $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, allora $M = \|D^2\gamma(\mathbf{0}')\| = \sup_{|x'|=1} |D^2\gamma(\mathbf{0}')x'| = \max_{i=1, \dots, n-1} |\lambda_i|$, in particolare $|\frac{1}{2}\langle D^2\gamma(\mathbf{0}')x', x'\rangle| \leq \frac{1}{2}|D^2\gamma(\mathbf{0}')x'| |x'| \leq \frac{M}{2}|x'|^2$. Per definizione di $o(|x'|^2)$, esiste $\delta \in (0, r)$ tale che se $|x'| < \delta$ allora $|o(|x'|^2)| < \frac{M}{2}|x'|^2$, per cui $\gamma(x') \leq |\gamma(x')| < M|x'|^2$. Ora sia $R \in (0, \min\{\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2M}\})$, allora la palla di raggio R centrata in $y = Re_n = (0, \dots, 0, R)$ è contenuta nella regione $\{x \in B_\delta(\mathbf{0}) \mid x_n > M|x'|^2\}$ (per ogni $x \in B_R(y)$ vale che $|\frac{x-y}{R}|^2 = |x|^2 + R^2 - 2Rx_n < R^2$ da cui $|x|^2 < 2Rx_n$ da cui $\gamma(x') < M|x|^2 < 2MRx_n < x_n$) e $B_R(y)$ interseca il bordo di $\{x \in B_\delta(\mathbf{0}) \mid x_n = M|x'|^2\}$ solo in $\mathbf{0}$ (se $|x-y|^2 = r^2$ e $x_n = M|x'|^2$, allora $|x|^2 = 2Rx_n = 2RM|x'|^2 \leq |x'|^2$ da cui $x_n^2 \leq 0$ ovvero $x_n = 0$ e dunque $x' = \mathbf{0}'$), dunque tale palla interseca $\overline{\Omega}$ solo in $\mathbf{0}$ (da sopra $\overline{\Omega} \cap B_\delta(\mathbf{0}) \subseteq \{x \in B_\delta(\mathbf{0}) \mid x_n \leq M|x'|^2\}$). \square

Osservazione 1.26. *Se un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è di classe \mathcal{C}^1 in generale non verifica la proprietà della palla tangente esterna.*

Dimostrazione. Consideriamo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2 \log|x|\}$. Ω è di classe \mathcal{C}^1 ($\partial\Omega = f(\mathbb{R})$, $f(x) = x^2 \log|x| \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$), ma non verifica la proprietà della palla tangente esterna: per vederlo cerchiamo $R > 0$ per cui $\overline{B_R(0, -R)} \cap \overline{\Omega} = \{\mathbf{0}\}$ (essendo la normale esterna a $\partial\Omega$ in $\mathbf{0}$ pari a $(0, -1)$). La semicirconferenza superiore di $\partial B_R(0, -R)$ è descritta dalla funzione $g(x) = \sqrt{R^2 - x^2} - R$ per $|x| \leq R$. Vorremmo che $f(x) > g(x)$ per ogni $x \in (-R, R) \setminus \{0\}$. Notiamo che $f(0) = g(0) = 0$. Il problema è che $f'(x) < g'(x)$ per $x \rightarrow 0^+$ e $f'(x) > g'(x)$ per $x \rightarrow 0^-$, dunque $g(x) > f(x)$ in un intorno di $\mathbf{0}$. \square

Teorema 1.32. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $x_0 \in \partial\Omega$. Se Ω verifica la proprietà della palla tangente esterna in x_0 , allora x_0 è regolare (rispetto al laplaciano).*

Dimostrazione. Per ipotesi esistono se $y \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ tali che $\overline{B_R(y)} \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$. Allora la funzione

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{|x-y|^{n-2}} & n > 2 \\ \log \frac{|x-y|}{R} & n = 2. \end{cases}$$

è una barriera a x_0 (ricordando (1.10), w è $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ (la singolarità $y \notin \overline{\Omega}$); inoltre w è armonica in $\overline{\Omega}$, in particolare ivi è superarmonica; infine $|x-y| \geq R$ per ogni $x \in \overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$ e $|x-y| = R$ se e solo se $x = x_0$). \square

Definizione. *Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è un cono convesso se per ogni $x, y \in C$ anche $x+y \in C$ e $\lambda x \in C$ per ogni $\lambda > 0$.*

Un cono convesso $C \subseteq \mathbb{R}^2$ è circolare se esiste $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, detto angolo d'apertura, tale che, a meno di un cambio di coordinate,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \arg(x, y) \in (-\alpha, \alpha)\},$$

ove $\arg(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$. Tramite le coordinate sferiche, è possibile dare una formula di rappresentazione analoga per i coni sferici in \mathbb{R}^n .

Definizione. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Diciamo che Ω verifica la proprietà del cono esterno in un punto $x_0 \in \partial\Omega$ se esistono un cono C con $\text{Int } C \neq \emptyset$ e un intorno U di x_0 tali che $(x_0 + C) \cap U \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Inoltre, diciamo che Ω verifica la proprietà del cono esterno se, per ogni $x_0 \in \partial\Omega$, Ω verifica la proprietà del cono esterno in x_0 .

Osservazione 1.27. Se un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 , allora verifica la proprietà del cono esterno.

Definizione. Un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ha bordo Lipschitziano se per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ esistono un intorno U di x_0 , un aperto limitato $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ e una funzione Lipschitziana $\gamma: D \rightarrow \mathbb{R}$ tali che, a meno di un'opportuna trasformazione ortogonale, si abbia che

$$\Omega \cap U = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in D, x_n < \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Osservazione 1.28. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato ha bordo Lipschitziano, allora verifica la proprietà del cono esterno.

Osservazione 1.29. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, il laplaciano di una funzione $u \in C^2(\Omega)$ in coordinate polari (ρ, θ) , per cui $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, è dato da

$$\Delta u = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}. \quad (1.35)$$

Teorema 1.33. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $x_0 \in \partial\Omega$. Se Ω verifica la proprietà del cono esterno in x_0 , allora x_0 è regolare (rispetto al laplaciano).

Dimostrazione. Supponiamo $n = 2$ (per $n \geq 3$ la dimostrazione è analoga). Fissiamo $x_0 \in \partial\Omega$. Per ipotesi esistono un cono C e un intorno U di x_0 tali che $(x_0 + C) \cap U \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. A meno di una rotazione, possiamo ridurci al caso in cui C è un cono convesso circolare con angolo d'apertura α . Inoltre, a meno di una traslazione, possiamo supporre $x_0 = \mathbf{0}$. A questo punto, consideriamo la funzione $w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $w(x, y) = -\rho^\lambda \cos(\lambda\theta)$ se $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, $w(\mathbf{0}) = 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ da scegliere opportunamente). Chiaramente w è continua, inoltre, applicando (1.35), verifichiamo che w è armonica in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Per costruzione $\Omega \cap U \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \mid (x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta), \theta \in (\alpha, 2\pi - \alpha)\}$, dunque, scegliendo $\lambda = \frac{2\pi}{3\alpha}$, otteniamo che per ogni $x \in \overline{\Omega \cap U} \setminus \{\mathbf{0}\}$ si ha che $w(x) > 0$ (se $\theta \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$, allora $\lambda\theta \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ da cui $\cos(\lambda\theta) < 0$). \square

Nel caso $n = 2$ il Teorema 1.33 può essere ancora migliorato.

Definizione. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ un aperto limitato. Diciamo che Ω verifica la proprietà del segmento esterno in un punto $z_0 \in \partial\Omega$ se esiste $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_0$, tale che $[z_0, z_1] \cap \overline{\Omega} = \{z_0\}$, dove $[z_0, z_1] = \{tz_1 + (1-t)z_0 \in \mathbb{C} \mid t \in [0, 1]\}$. Inoltre, diciamo che Ω verifica la proprietà del segmento esterno se, per ogni $z_0 \in \partial\Omega$, Ω verifica la proprietà del segmento esterno in z_0 .

Teorema 1.34. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ un aperto limitato e sia $z_0 \in \partial\Omega$. Se Ω verifica la proprietà del segmento esterno in z_0 , allora z_0 è regolare (rispetto al laplaciano).

Dimostrazione. Sia $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_0$, tale che $[z_0, z_1] \cap \overline{\Omega} = \{z_0\}$. A meno di una traslazione e di una rotazione, possiamo supporre che z_0 e z_1 coincidano rispettivamente con 0 e -1 . Identificando \mathbb{R}^2 con il piano complesso \mathbb{C} , abbiamo che $\overline{\Omega \cap B_1(0)} \cap (\{\text{Im } z = 0\} \cap \{\text{Re } z \leq 0\}) = \{0\}$, dunque i punti $z = \rho e^{i\theta} \in \overline{\Omega \cap B_1(0)} \setminus \{0\}$ sono determinati da un unico valore di $\theta \in (-\pi, \pi)$, per cui $\log z = \log \rho + i\theta$ è unicamente determinato in $\overline{\Omega \cap B_1(0)} \setminus \{0\}$. Ora definiamo la funzione

$$w: \overline{\Omega \cap B_1(0)} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto w(z) = -\text{Re} \left(\frac{1}{\log z} \right) = -\frac{\log \rho}{(\log \rho)^2 + \theta^2}.$$

Essendo $\lim_{z \rightarrow 0} w(z) = 0$, w può essere estesa per continuità in 0, ottenendo $w \in \mathcal{C}(\overline{\Omega \cap B_1(0)})$, inoltre per costruzione $w(0) = 0$ e $w(z) > 0$ per ogni $z \in \overline{\Omega \cap B_1(0)} \setminus \{0\}$. Infine w è armonica in $\Omega \cap B_1(0)$ (in particolare superarmonica), essendo la parte reale di una funzione olomorfa in $\Omega \cap B_1(0)$ (cfr. Teorema 2.2): $-\frac{1}{\log z} = -\frac{\log \rho}{(\log \rho)^2 + \theta^2} + i \frac{\theta}{(\log \rho)^2 + \theta^2} = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta)$ è olomorfa in $\Omega \cap B_1(0)$ essendo u, v ivi differenziabili e soddisfacenti le condizioni di Cauchy-Riemann polari $u_\rho = \frac{1}{\rho} v_\theta$, $u_\theta = -\rho v_\rho$. \square

Osservazione 1.30. *Il Teorema 1.34 non vale per $n \geq 3$ (cfr. [9], II, 7.2).*

Il Teorema 1.34 può essere generalizzato.

Definizione. *Diciamo che un sottoinsieme di uno spazio metrico è un continuo se è compatto, connesso e ha almeno due punti.*

Osservazione 1.31. *Sia $E \subset \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ compatto con almeno due punti. Allora E è un continuo se e solo se $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ è semplicemente connesso.*

Dimostrazione. A meno di un cambio di coordinate, possiamo supporre che $\infty \in E$, per cui il risultato segue dal Teorema A.25. \square

Definizione. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ un aperto. Diciamo che Ω verifica la proprietà del continuo esterno in un punto $z_0 \in \partial\Omega$ se esiste un continuo $E \subseteq \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ tale che $z_0 \in E$. Inoltre, diciamo che Ω verifica la proprietà del continuo esterno se, per ogni $z_0 \in \partial\Omega$, Ω verifica la proprietà del continuo in z_0 .*

Teorema 1.35. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ aperto e sia $z_0 \in \partial\Omega$. Se Ω verifica la proprietà del continuo esterno in z_0 , allora z_0 è regolare (rispetto al laplaciano).*

Dimostrazione. Sia $z_1 \in E \setminus \{z_0\}$ e sia $R = |z_1 - z_0|$. Per l'Osservazione 1.31, si ha che $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ è semplicemente connesso, dunque, per il Teorema A.26, esiste una determinazione del logaritmo

$$f: (\overline{\mathbb{C}} \setminus E) \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z) = \log \left(\frac{z - z_0}{z - z_1} \right)$$

ben definita e biolomorfa. Allora la funzione

$$w: \overline{\Omega \cap B_1(z_0)} \cap B_{R/2}(z_0) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto w(z) = -\text{Re} \left(\frac{1}{f(z)} \right)$$

è ben definita, armonica (cfr. Teorema 2.2), sempre positiva e $\lim_{z \rightarrow z_0} w(z) = 0$, dunque può essere estesa per continuità in z_0 ponendola pari a zero e tale estensione risulta essere barriera locale a z_0 relativamente a Ω . \square

Capitolo 2

Teorema di uniformizzazione

2.1 Funzioni armoniche sul piano complesso

Definizione. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, diciamo che una funzione $u: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ è armonica se lo è $u \circ \phi: \phi^{-1}(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ come funzione di \mathbb{R}^2 , ove $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x + iy$.

Osservazione 2.1. Sia $R > 0$ e consideriamo il disco aperto $B_R(0) \subset \mathbb{C}$. Sia data una funzione $g \in C(\partial B_R(0))$. Allora, se $\Psi: [0, 2\pi) \rightarrow \partial B_R(0)$ è il diffeomorfismo $\alpha \mapsto Re^{i\alpha}$, la funzione

$$\begin{aligned} u: B_R(0) &\rightarrow \mathbb{R} \\ z = \rho e^{i\theta} &\mapsto u(\rho e^{i\theta}) = \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g \circ \Psi(\alpha)}{R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \alpha) + \rho^2} d\alpha \\ 0 &\mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g \circ \Psi(\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (2.1)$$

è armonica in $B_R(0)$ e si estende ad una funzione continua su $\overline{B_R(0)}$ che coincide con g su $\partial B_R(0)$.

Dimostrazione. Segue dal Teorema 1.17 nel caso $n = 2$, operando un cambio di variabili tramite Ψ . \square

Definizione. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, diciamo che una funzione $u: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ è subarmonica se lo è $u \circ \phi: \phi^{-1}(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ come funzione di \mathbb{R}^2 , ove $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x + iy$.

Osservazione 2.2. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, una funzione $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua è subarmonica se e solo se per ogni disco aperto $B_R(z_0) \Subset \Omega$ vale che

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta. \quad (2.2)$$

Inoltre, u è subarmonica se e solo se, per ogni $B_R(z_0) \Subset \Omega$ e per ogni funzione armonica $h: \overline{B_R(z_0)} \rightarrow \mathbb{R}$, vale che se $u \leq h$ su $\partial B_R(z_0)$ allora $u \leq h$ su $\overline{B_R(z_0)}$.

Dimostrazione. Segue dalla definizione (cfr. Teorema 1.28), in particolare (2.2) segue dal punto (iii.) nel caso $n = 2$, operando un cambio di variabili tramite il diffeomorfismo $\Psi: [0, 2\pi) \rightarrow \partial B_R(0)$, $\theta \mapsto z_0 + Re^{i\theta}$. \square

Teorema 2.1. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto semplicemente connesso e sia data una funzione armonica $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Allora esiste una funzione olomorfa $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re} F = h$. Inoltre $\operatorname{Im} F$ è unicamente determinata a meno di una costante additiva reale.*

Dimostrazione. Definiamo la 1-forma differenziale

$$\omega(x + iy) = -h_y dx + h_x dy$$

Essendo $d\omega = \left(\frac{\partial}{\partial x} h_x - \frac{\partial}{\partial y} (-h_y) \right) dx \wedge dy = 0$, abbiamo che ω è una forma chiusa sul dominio Ω semplicemente connesso, dunque ω è una forma esatta, ovvero esiste una funzione $k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\omega = dk = \frac{\partial k}{\partial x} dx + \frac{\partial k}{\partial y} dy$, da cui $k_x = -h_y$ e $k_y = h_x$. Per la regolarità di h , vale che $\Delta k = -h_{yx} + h_{xy} = 0$, quindi k è armonica, in particolare analitica. Per come abbiamo costruito k , concludiamo che la funzione $F(z) = h(z) + ik(z)$ è olomorfa, in virtù del Teorema A.17. \square

Teorema 2.2. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Allora $u = \operatorname{Re} F$ e $v = \operatorname{Im} F$ sono funzioni armoniche in Ω , quindi ivi analitiche.*

Dimostrazione. Per ogni palla $B \Subset \Omega$ e per ogni $\varphi \in C_c^\infty(B)$, $\varphi|_{\partial B} \equiv 0$, dunque, per il punto (ii.) del Teorema A.12, le equazioni di Cauchy-Riemann e il Teorema A.11, vale che

$$\begin{aligned} \int_B u(z) \Delta \varphi(z) dz &= - \int_B Du(z) \cdot D\varphi(z) dz = - \int_B (v_y \varphi_x - v_x \varphi_y) dz = \\ &= \int_B v(\varphi_{xy} - \varphi_{yx}) dz = 0. \end{aligned}$$

Analogamente, $\int_B u(z) \Delta \varphi(z) dz = 0$. Abbiamo quindi verificato che u e v sono funzioni debolmente armoniche in ogni palla $B \Subset \Omega$. Per il Teorema 1.27, concludiamo che, a meno di ridefinirle in un insieme di misura nulla, u e v sono armoniche in ogni palla $B \Subset \Omega$ e dunque, per il Teorema 1.28, armoniche in Ω . \square

Teorema 2.3. *Siano $U, V \subseteq \mathbb{C}$ aperti. Se $F: V \rightarrow U$ è una funzione olomorfa e $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ è armonica, allora $h \circ F$ è armonica.*

Dimostrazione. $F: (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$, $h: (u, v) \mapsto h(u, v)$ e per ipotesi $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ e $h_{uu} + h_{vv} = 0$. Allora, applicando il Teorema A.3, otteniamo

$$\begin{aligned} (h \circ F)_x &= h_u(F)u_x + h_v(F)v_x, \\ (h \circ F)_y &= h_u(F)u_y + h_v(F)v_y, \\ (h \circ F)_{xx} &= [h_{uu}(F)u_x + h_{uv}(F)v_x]u_x + h_u(F)u_{xx} + [h_{vu}(F)u_x + h_{vv}(F)v_x]v_x + h_v(F)v_{xx} \\ (h \circ F)_{yy} &= [h_{uu}(F)u_y + h_{uv}(F)v_y]u_y + h_u(F)u_{yy} + [h_{vu}(F)u_y + h_{vv}(F)v_y]v_y + h_v(F)v_{yy} \end{aligned}$$

da cui concludiamo

$$\begin{aligned} (h \circ F)_{xx} + (h \circ F)_{yy} &= h_{uu}(F)[u_x u_x + u_y u_y] + h_{vv}(F)[v_x v_x + v_y v_y] + \\ &\quad + 2h_{uv}(F)[u_x v_x + u_y v_y] + h_u(F)[u_{xx} + u_{yy}] + h_v(F)[v_{xx} + v_{yy}] = \\ &= \Delta h(F)[u_x^2 + u_y^2] + h_u(F)\Delta u + h_v(F)\Delta v = 0 \end{aligned}$$

grazie alla regolarità di h , alle proprietà elencate sopra e al Teorema 2.2. \square

Teorema 2.4. *Siano $U, V \subseteq \mathbb{C}$ aperti. Se $F: V \rightarrow U$ è una funzione olomorfa e $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ è subarmonica, allora $h \circ F$ è subarmonica.*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $h \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Per il Teorema 2.2, dette $u = \operatorname{Re} F$ e $v = \operatorname{Im} F$, abbiamo che u e v sono armoniche, inoltre soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann, dunque, ripercorrendo i conti fatti nella dimostrazione del Teorema 2.3, otteniamo

$$(h \circ F)_{xx} + (h \circ F)_{yy} = \Delta h(F)(u_x^2 + u_y^2) \geq 0.$$

Ora mostriamo che se h è subarmonica in U , allora per ε sufficientemente piccolo abbiamo che la mollificazione $h^\varepsilon = h * \eta_\varepsilon$ è subarmonica in B , per ogni palla $B \Subset U$. Infatti, sfruttando la subarmonicità di h (cfr. Osservazione 2.2), il Teorema A.13 e il Teorema di Fubini-Tonelli, abbiamo che

$$\begin{aligned} h^\varepsilon(z) &= \int_{B_\varepsilon(0)} h(z - \zeta) \eta_\varepsilon(\zeta) d\zeta \leq \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(\zeta) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z + re^{i\theta} - \zeta) d\theta d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta_\varepsilon(se^{i\theta'}) h(z + re^{i\theta} - se^{i\theta'}) d\theta d\theta' ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^\varepsilon(z + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Essendo $h^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(U_\varepsilon)$, ove $U_\varepsilon = \{z \in U \mid \operatorname{dist}(z, \partial U) > \varepsilon\}$, per quanto mostrato sopra, otteniamo che $h^\varepsilon \circ F$ è subarmonica in $F^{-1}(B)$ per ogni $\varepsilon \in (0, \operatorname{dist}(B, \partial U))$ e inoltre $h^\varepsilon \circ F \rightarrow h \circ F$ uniformemente su $F^{-1}(B)$, dunque $u \circ F$ è subarmonica in $F^{-1}(B)$ per il Teorema 1.29. Concludiamo che $u \circ F$ è subarmonica per il Teorema 1.28. \square

Corollario 2.1. *Se $F: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa, allora $\log |F(z)|$ è subarmonica.*

Vogliamo ora dare una dimostrazione del Teorema della mappa di Riemann che si basa sulla risoluzione di un certo problema di Dirichlet: questo approccio dimostrativo fu proprio quello adottato inizialmente dal matematico di cui tale risultato porta il nome.

Teorema 2.5 (Mappa di Riemann). *Sia $\emptyset \neq \Omega \subsetneq \mathbb{C}$ aperto semplicemente connesso. Allora esiste una mappa conforme da Ω nel disco unitario aperto \mathbb{D} .*

Dimostrazione. Per ipotesi Ω è semplicemente connesso, dunque $\mathbb{C} \setminus \Omega$ ha almeno due punti (se fosse $\mathbb{C} \setminus \Omega = \{z_0\}$, allora $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ non sarebbe semplicemente connesso), dunque $\mathbb{C} \setminus \Omega$ è un continuo, per cui, per il Teorema 1.35, tutti i punti di $\partial\Omega$ sono regolari. Fissiamo $z_1 \in \partial\Omega$. In virtù della semplice connessione di Ω , per il Teorema A.26, esiste una determinazione del logaritmo

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z) = \log(z - z_1)$$

ben definita e biolomorfa. Siano $z_0 \in \Omega$ e $w_0 = f(z_0)$, per cui esiste $r > 0$ tale che $B_r(w_0) \subseteq f(\Omega)$. Allora $f(\Omega) \cap (f(\Omega) + 2\pi i) = \emptyset$ (se esistessero $z_1, z_2 \in \Omega$ tali che $f(z_1) = f(z_2) + 2\pi i$, allora, per il Teorema A.26, avremmo che $z_1 = e^{f(z_1)} = e^{f(z_2) + 2\pi i} = z_2$, assurdo), per cui $f(\Omega) \cap (B_r(w_0) + 2\pi i) = \emptyset$, ovvero per ogni $z \in \Omega$ vale che $|f(z) - (f(z_0) + 2\pi i)| > r$, ovvero $\left| \frac{1}{f(z) - f(z_0) - 2\pi i} \right| < \frac{1}{r}$. Concludiamo che la funzione

$$h: \Omega \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto h(z) = \frac{1}{f(z) - w_0 - 2\pi i}$$

mappa conformemente Ω nel dominio limitato $B_r(0)$.

A questo punto quindi, possiamo supporre che Ω sia limitato e per comodità che $0 \in \Omega$. Sia u la funzione armonica in Ω , soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u(z) = 0 & z \in \Omega \\ u(z) = \log |z| & z \in \partial\Omega. \end{cases}$$

(u esiste unica per il Corollario 1.3). Essendo Ω semplicemente connesso, per il Teorema 2.1, esiste una funzione olomorfa $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re} F = u$. Possiamo così definire la funzione

$$\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \varphi(z) = ze^{-F(z)}$$

che risulta olomorfa e tale che $|\varphi(z)| \rightarrow 1$ per $z \rightarrow \partial\Omega$, per cui, per il Teorema A.19, $|\varphi(z)| < 1$ per ogni $z \in \Omega$, ovvero $\varphi(\Omega) \subseteq \mathbb{D}$. Inoltre, φ ha solo uno zero in Ω che è lo zero semplice $z = 0$. Allora, per ogni $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, se $\varepsilon_w = \frac{|w|+1}{2} \in (0, 1)$, applicando il Teorema A.29 in $\Omega' = \varphi^{-1}(B_{\varepsilon_w}(0))$ alle funzioni $\varphi(z)$ e $-w$ (per continuità, $|\varphi(z)| = \varepsilon_w > |w|$ per ogni $z \in \partial\Omega'$), concludiamo che $\varphi(z) - w$ ha esattamente uno zero in Ω' , dunque in Ω . Data l'arbitrarietà di $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, concludiamo che φ mappa conformemente Ω nel disco unitario. \square

Osservazione 2.3. *Il caso di $\Omega = \mathbb{C}$ non è contemplato nel Teorema 2.5 e questo non è sorprendente: l'esistenza di una mappa conforme da \mathbb{C} in \mathbb{D} cadrebbe in contraddizione con il Teorema 1.8.*

2.2 Funzioni armoniche su superfici di Riemann

Definizione. *Sia R uno spazio topologico. Chiamiamo carta locale il dato (U, φ) di un aperto U e di un omeomorfismo $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{C}$. Diciamo che due carte (U, φ) , (V, ψ) sono compatibili se $U \cap V = \emptyset$ oppure se $U \cap V \neq \emptyset$ e la mappa di transizione $\varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$ è olomorfa. Chiamiamo atlante una collezione di carte $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ tale che $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ formi un ricoprimento aperto di R e ogni coppia di carte sia compatibile. Un atlante è detto massimale se non è contenuto in alcun altro atlante strettamente più grande.*

Osservazione 2.4. *Ogni atlante è contenuto in un unico atlante massimale.*

Definizione. *Uno spazio topologico R è di Hausdorff se per ogni $p, q \in R$ esistono due aperti disgiunti U e V tali che $p \in U$ e $q \in V$. R è a base numerabile se ammette una base numerabile per la sua topologia.*

Definizione. *Una superficie di Riemann è uno spazio topologico connesso, di Hausdorff, a base numerabile, con un atlante massimale.*

Esempio. *Il piano complesso \mathbb{C} è una superficie di Riemann con un atlante formato da una sola carta (U, φ) , ove $U = \mathbb{C}$ e $\varphi = \operatorname{id}$. Analogamente, ogni sottoinsieme aperto connesso del piano complesso è una superficie di Riemann.*

Esempio. La sfera di Riemann $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ è l'esempio più semplice di superficie di Riemann non banale, con atlante $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$, ove $U_1 = \mathbb{C}$, $\varphi_1(z) = z$, $U_2 = \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, $\varphi_2(z) = \frac{1}{z}$ (la mappa di transizione $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$ è olomorfa).

Osservazione 2.5. In generale, un sottoinsieme aperto connesso S di una superficie di Riemann R è esso stesso una superficie di Riemann, con atlante ottenuto restringendo a S le carte dell'atlante di R .

Definizione. Sia R una superficie di Riemann e sia $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ una carta su R . Se il disco unitario $\mathbb{D} = B_1(0)$ è tale che $\bar{\mathbb{D}} \subseteq \varphi_\alpha(U_\alpha)$, chiamiamo (Δ, φ_α) disco coordinato su R , ove $\Delta = \varphi_\alpha^{-1}(\mathbb{D})$.

Osservazione 2.6. Se (Δ, φ_α) è un disco coordinato, φ_α^{-1} è definita anche su $\partial\mathbb{D}$.

Osservazione 2.7. Per ogni $q \in R$ vi è un disco coordinato (Δ, φ) contenente q tale che $\varphi(q) = 0$.

Dimostrazione. Dal momento che gli aperti dell'atlante ricoprono R , esiste una carta (V, ψ) tale che $q \in V$, inoltre, essendo $\psi(V)$ aperto, esiste $r > 0$ tale che $B_r(\psi(q)) \subseteq \psi(V)$. Concludiamo definendo $\Delta = \psi^{-1}(B_r(\psi(q)))$ e

$$\begin{aligned} \varphi: \Delta &\rightarrow \mathbb{D} \\ p &\mapsto \varphi(p) = \frac{1}{r}(\psi(p) - \psi(q)) \end{aligned}$$

$(\Delta \subset V$ e (V, φ) è compatibile con le carte dell'atlante, essendolo (V, ψ)). □

Definizione. Date due superfici di Riemann R, S , diciamo che una mappa $f: R \rightarrow S$ è analitica in $p \in R$ se esiste un disco coordinato (Δ_1, φ_1) in R contenente p e un disco coordinato (Δ_2, φ_2) in S contenente $f(p)$ tali che $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1: \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ è olomorfa in $\varphi_1(p)$. Diciamo che f è analitica se lo è in ogni $p \in R$. Nel caso particolare in cui $f: R \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, diciamo che f è meromorfa in $p \in R$ se è analitica in p . Diciamo che f è meromorfa se lo è in ogni $p \in R$. Infine, diciamo che due superfici di Riemann R, S sono conformemente equivalenti se vi è una mappa conforme (biolomorfa) $f: R \rightarrow S$.

Teorema 2.6. Ogni superficie di Riemann ammette una base numerabile di dischi coordinati precompatti (la cui chiusura è un compatto).

Dimostrazione. Essendo ogni superficie di Riemann a base numerabile, se indichiamo con $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ l'atlante associato, è possibile estrarre un sottoricoprimento numerabile $\{U_{\alpha_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dal ricoprimento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di R . Ora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, possiamo ricoprire $\varphi_{\alpha_n}(U_{\alpha_n})$ con palle con centro a coordinate razionali e raggio razionale $B_{r_{n_j}}(z_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$. Concludiamo considerando $\cup_{n \in \mathbb{N}} \cup_{j \in \mathbb{N}} (\varphi_{\alpha_n}^{-1}(B_{r_{n_j}}(z_{n_j})), \frac{1}{r_{n_j}}(\varphi_{\alpha_n}(p) - \varphi_{\alpha_n}(z_{n_j})))$. □

Definizione. Sia R una superficie di Riemann. Diciamo che una funzione $u: R \rightarrow \mathbb{R}$ è armonica in $p \in R$ se esiste un disco coordinato (Δ, φ) tale che $p \in \Delta$ e $u \circ \varphi^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione armonica. Diciamo che u è armonica su R se lo è in ogni $p \in R$.

Osservazione 2.8. *La definizione di armonicità non dipende dalla scelta del disco coordinato: se (Δ_1, φ_1) e (Δ_2, φ_2) sono due dischi coordinati contenenti $p \in R$ e $u \circ \varphi_1^{-1}$ è armonica, allora $u \circ \varphi_2^{-1} = (u \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})$ è composizione di una funzione armonica con una funzione olomorfa, dunque, per il Teorema 2.3, è armonica.*

Definizione. *Sia R una superficie di Riemann. Diciamo che una funzione continua $u: R \rightarrow \mathbb{R}$ è subarmonica in $p \in R$ se esiste un disco coordinato (Δ, φ) tale che $p \in \Delta$ e $u \circ \varphi^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione subarmonica. Diciamo che u è subarmonica su R se lo è in ogni $p \in R$.*

Osservazione 2.9. *Data una superficie di Riemann R , una funzione continua $u: R \rightarrow \mathbb{R}$ è subarmonica se e solo se per ogni disco coordinato (Δ, φ) e per ogni funzione armonica $h: \overline{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}$ che verifica $u(p) \leq h(p)$ per ogni $p \in \partial\Delta$ vale che $u(p) \leq h(p)$ per ogni $p \in \Delta$.*

Dimostrazione. Segue dall'Osservazione 2.2. □

Osservazione 2.10. *Date u_1, u_2 funzioni subarmoniche su una superficie di Riemann R , si ha che anche $\max\{u_1, u_2\}$ è subarmonica.*

Dimostrazione. Segue dall'Osservazione 1.18. □

Teorema 2.7 (Principio del massimo forte sulle superfici di Riemann). *Sia R una superficie di Riemann e sia u una funzione subarmonica su R . Se esiste $q_0 \in R$ tale che $u(q_0) = \sup_R u$, allora u è costante.*

Dimostrazione. Sia $M = \sup_R u$ e definiamo $R_M = \{p \in R \mid u(p) = M\}$. Per ipotesi $M \in \mathbb{R}$ e $R_M \neq \emptyset$. Notiamo che $M \in \mathbb{R} = u^{-1}(\{M\})$ è controimmagine di un chiuso tramite una funzione continua, dunque è chiuso in R . Ora sia $q \in R$ e sia (Δ, φ) un disco coordinato contenente q tale che $u \circ \varphi^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ è subarmonica (esiste per definizione di funzione subarmonica su R): se $z_q = \varphi(q)$, abbiamo che la funzione subarmonica $u \circ \varphi^{-1}: \mathbb{D} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ raggiunge il suo massimo in $z_q \in \mathbb{D}$, dunque, per il Teorema 1.4, $u \circ \varphi^{-1}$ è costante. Essendo φ biettiva, deduciamo che u è costante su Δ , in particolare $u(p) = u(q) = M$ per ogni $p \in \Delta$. In questo modo abbiamo mostrato che R_M è intorno di ogni suo punto, dunque aperto. Concludiamo che $R_M = R$, in quanto R_M è un sottoinsieme non vuoto, chiuso e aperto di R connessa. □

Poiché, per il Teorema di Weierstrass, ogni funzione continua su un compatto ammette massimo, un corollario immediato del Teorema 2.7 è il seguente

Teorema 2.8 (Principio del massimo sulle superfici di Riemann). *Sia R una superficie di Riemann e sia u una funzione subarmonica su R . Se esiste una costante $C > 0$ tale che $u(p) \leq C$ per ogni $p \in R \setminus K$, con K sottoinsieme compatto di R , allora $u(p) \leq C$ per ogni $p \in R$.*

Vogliamo ora risolvere il problema di Dirichlet su una superficie di Riemann tramite il metodo di Perron.

Definizione. *Siano R una superficie di Riemann, (Δ, φ) un disco coordinato e $u: R \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione subarmonica. Sia $\bar{u}^\Delta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{D}})$ la soluzione del problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u}^\Delta(z) = 0 & z \in \mathbb{D} \\ \bar{u}^\Delta(z) = u \circ \varphi^{-1}(z) & z \in \partial\mathbb{D} \end{cases}$$

e definiamo il sollevamento armonico di u in Δ come

$$U^\Delta: R \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto U^\Delta(p) = \begin{cases} \bar{u}^\Delta \circ \varphi(p) & p \in \Delta \\ u(p) & p \in R \setminus \Delta. \end{cases} \quad (2.3)$$

Osservazione 2.11. $U^\Delta \in \mathcal{C}(R)$, $u \leq U^\Delta$, U^Δ è armonica in Δ e U^Δ è subarmonica in R .

Dimostrazione. $U^\Delta \in \mathcal{C}(R)$ è vero per costruzione, infatti, se $p \in \partial\Delta$, allora $\varphi(p) \in \partial\mathbb{D}$, dunque $\bar{u}^\Delta \circ \varphi(p) = u \circ \varphi^{-1} \circ \varphi(p) = u(p)$.

U^Δ è armonica in Δ , essendo $U^\Delta \circ \varphi^{-1}(z) = \bar{u}^\Delta \circ \varphi \circ \varphi^{-1}(z) = \bar{u}^\Delta(z)$ per ogni $z \in \mathbb{D}$ e $-\Delta \bar{u}^\Delta(z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{D}$.

$u \leq U^\Delta$ essendo $u = U^\Delta$ su $R \setminus \Delta$, in particolare su $\partial\Delta$, dunque concludiamo per l'Osservazione 2.9, essendo u subarmonica e U^Δ armonica su Δ .

U^Δ è subarmonica in R poiché, per definizione di u subarmonica in R , per ogni $q \in R$ esiste un disco coordinato (Δ_q, φ_q) tale che $q \in \Delta_q$ e $u \circ \varphi_q^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ è subarmonica, ma allora

$$U^\Delta \circ \varphi_q^{-1}(z) = \begin{cases} \bar{u}^\Delta \circ \varphi \circ \varphi_p^{-1}(z) & z \in \varphi_q(\Delta_q \cap \Delta) \\ u \circ \varphi_p^{-1}(z) & z \in \varphi_q(\Delta_q \setminus \Delta) \end{cases}$$

(subarmonica su $\varphi_q(\Delta_q \cap \Delta)$ per il Teorema 2.4). \square

Definizione. Data una superficie di Riemann R , chiamiamo famiglia di Perron su R una famiglia non vuota \mathcal{S} di funzioni subarmoniche su R tale che

- i. se $u_1, u_2 \in \mathcal{S}$, allora $\max\{u_1, u_2\} \in \mathcal{S}$;
- ii. se $u \in \mathcal{S}$, allora $U^\Delta \in \mathcal{S}$ per ogni disco coordinato (Δ, φ) .

Teorema 2.9 (Perron). Sia data una famiglia di Perron \mathcal{S} su una superficie di Riemann R . Allora

$$H(p) = \sup_{v \in \mathcal{S}} v(p)$$

è una funzione armonica oppure $H(p) = +\infty$ per ogni $p \in R$.

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme $\hat{R} = \{p \in R \mid H(p) < \infty\}$. Sia $q \in \hat{R}$ e sia (Δ, φ) disco coordinato contenente q . Per definizione di sup, esiste una successione $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ tale che $v_m(q) \rightarrow H(q)$. Senza perdita di generalità, possiamo supporre $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ crescente, infatti possiamo sempre considerare $\{\tilde{v}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ in luogo di $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, ove $\tilde{v}_m = \max\{v_1, \dots, v_m\}$: $\tilde{v}_m \in \mathcal{S}$ (da (i.)) e $\tilde{v}_m(q) \rightarrow H(q)$ ($v_m(q) \leq \tilde{v}_m(q) \leq H(q)$ e $v_m(q) \rightarrow H(q)$). Denotiamo la successione con $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Allora, se V_m^Δ è il sollevamento armonico di v_m in Δ , abbiamo che anche $\{V_m^\Delta\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ risulta essere crescente, armonica in Δ (V_m^Δ coincide con v_m fuori da Δ ed è armonica in Δ , dunque, per il Teorema 1.4, $V_{m_1}^\Delta \leq V_{m_2}^\Delta$ su $\partial\Delta$ implica $V_{m_1}^\Delta \leq V_{m_2}^\Delta$ su Δ) e $V_m^\Delta(q) \rightarrow H(q)$. Da (ii.) abbiamo che $V = \sup_{m \in \mathbb{N}} V_m^\Delta \leq H$ e in particolare $V(q) = H(q) < \infty$, dunque, per il Teorema 1.23, V è una funzione armonica in Δ .

Mostriamo ora che $V = H$ in Δ per poter concludere che H è armonica in Δ e dunque che \hat{R} è aperto, in quanto intorno di ogni suo punto. Supponiamo per assurdo che esista $q' \in \Delta$ tale che $V(q') < H(q')$. Per definizione di sup, esiste una successione $\{w_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ tale

che $w_m(q') \rightarrow H(q')$. Senza perdita di generalità, possiamo supporre $\{w_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ crescente tale che $w_m \geq v_m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, infatti possiamo sempre considerare $\{\tilde{w}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ in luogo di $\{w_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, ove $\tilde{w}_m = \max\{w_1, \dots, v_m, v_m\}$. Denotiamo la successione con $\{w_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Procedendo come sopra, se W_m^Δ è il sollevamento armonico di w_m in Δ , abbiamo che anche $\{W_m^\Delta\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ risulta essere crescente, armonica in Δ e $V_m^\Delta(q') \rightarrow H(q')$. Da (ii.) abbiamo che $V \leq W = \sup_{m \in \mathbb{N}} W_m^\Delta \leq H$ e in particolare $V(q') < W(q') = H(q')$ e $W(q) = H(q) < \infty$, dunque, per il Teorema 1.23, W è una funzione armonica in Δ . Abbiamo così costruito V, W armoniche in Δ tali che $W(q) = V(q)$ e $W(q') > V(q')$, con $q, q' \in \Delta$: questo contraddice il Teorema 2.7.

Anche $R \setminus \hat{R} = \{p \in R \mid H(p) = \infty\}$ è aperto, infatti se $H(q) = +\infty$, passando per una successione $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ crescente come sopra, otteniamo $U = \sup_{m \in \mathbb{N}} U_m^\Delta$ armonica su Δ tale che $U(q) = +\infty$, ma allora, per il Teorema 2.7, $U(p) = +\infty$ per ogni $p \in \Delta$, ma $U \leq H$, per cui $U(p) = +\infty$ per ogni $p \in \Delta$.

Essendo \hat{R} aperto e chiuso (complementare di un aperto) in un connesso, concludiamo che o $\hat{R} = R$ e in tal caso abbiamo verificato che H è armonica, oppure $\hat{R} = \emptyset$, per cui $H(p) = +\infty$ per ogni $p \in R$. \square

2.3 Funzioni di Green su superfici di Riemann

Definizione. Data una superficie di Riemann R , fissiamo $q \in R$ e (Δ, φ) un disco coordinato contenente q tale che $\varphi(q) = 0$ (esiste per l'Osservazione 2.7). Sia \mathcal{P}_q la famiglia di tutte le funzioni subarmoniche su $R \setminus \{q\}$ tale che

i. ogni $u \in \mathcal{P}_q$ ha supporto compatto;

ii. ogni $u \in \mathcal{P}_q$ è tale che $v(p) = u(p) + \log |\varphi(p)|$ è subarmonica su Δ

(dal Corollario 2.1 abbiamo che $\log |\varphi(p)|$ è subarmonica, dunque $0 \in \mathcal{P}_q$ e \mathcal{P}_q risulta essere una famiglia di Perron su $R \setminus \{q\}$).

Se esiste $p \in R$ per cui $\sup_{u \in \mathcal{P}_q} u(p) < +\infty$, definiamo una funzione di Green per R con polo in q come

$$G: (R \setminus \{q\}) \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto G(p, q) = \sup_{u \in \mathcal{P}_q} u(p).$$

Se $\sup_{u \in \mathcal{P}_q} u(p) = +\infty$ per ogni $p \in R$, diciamo che non esiste una funzione di Green per R con polo in q .

Esempio. Sia $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ il disco unitario aperto nel piano complesso. Fissato $w \in \mathbb{D}$, la funzione $G: (\mathbb{D} \setminus \{w\}) \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto G(z) = \log \left| \frac{1-z\bar{w}}{z-w} \right|$ è una funzione di Green per \mathbb{D} con polo in w (cfr. Teorema 1.15).

Le funzioni di Green si riveleranno essere uno strumento importante nella dimostrazione del teorema di uniformizzazione, per cui ne studiamo ora alcune proprietà.

Teorema 2.10. Sia R una superficie di Riemann. Sia data $G(p, q)$ una funzione di Green per R con polo in q . Allora $G(p, q) > 0$ e $G(p, q)$ è armonica per ogni $p \in R \setminus \{q\}$. Inoltre, se (Δ, φ) è un disco coordinato tale che $\varphi(q) = 0$, allora la funzione $h(p) = \log |\varphi(p)| + G(p, q)$ è armonica su Δ . Infine, se w è una funzione armonica positiva su $R \setminus \{q\}$ tale che $w(p) + \log |\varphi(p)|$ è armonica in q , allora $w(p) \geq G(p, q)$ per ogni $p \in R \setminus \{q\}$.

Dimostrazione. In virtù del Teorema 2.9, $G(p, q)$ è armonica per ogni $p \in R \setminus \{q\}$. Essendo $0 \in \mathcal{P}_q$, abbiamo che $G(p, q) \geq 0$ per ogni $p \in R \setminus \{q\}$, inoltre, $\mathcal{P}_q \neq \{0\}$, ad esempio la funzione

$$v: R \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \begin{cases} -\log |\varphi(p)| & p \in \Delta \\ 0 & p \in R \setminus \Delta \end{cases}$$

è un elemento di \mathcal{P}_q . Allora $G(p, q) \geq v(p) > 0$ per ogni $p \in \Delta$, da cui, per il fatto che $G(p, q)$ non può avere minimo a meno che non sia costante (cfr. Teorema 2.7), concludiamo che $G(p, q) > 0$ per ogni $p \in R \setminus \{q\}$.

Vogliamo ora mostrare che la funzione

$$h: \Delta \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto h(p) = G(p, q) + \log |\varphi(p)|$$

è armonica. Innanzitutto, abbiamo che h è armonica su $\Delta \setminus \{q\}$, essendo

$$h \circ \varphi^{-1}: \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto h \circ \varphi^{-1}(z) = G \circ \varphi^{-1}(z) + \log |z|$$

una funzione armonica sul disco punturato ($G \circ \varphi^{-1}$ lo è poiché, per definizione di funzione armonica su R , per ogni $q \in R$ esiste un disco coordinato (Δ_q, φ_q) tale che $q \in \Delta_q$ e $G \circ \varphi_q^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ è armonica, ma allora $G \circ \varphi^{-1} = (G \circ \varphi_q^{-1}) \circ (\varphi_q \circ \varphi^{-1}): \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ è armonica per il Teorema 2.3). Se mostriamo che h è limitata, per l'Osservazione 1.12 possiamo concludere che h è armonica su Δ . Denotiamo con M il massimo assunto da $G(p, q)$ su $\partial\Delta = \{p \in R \mid |\varphi(p)| = 1\}$ ($M < \infty$ esiste essendo $\partial\Delta$ compatto). Essendo per costruzione $u(p) + \log |\varphi(p)|$ subarmonica in Δ per ogni $u \in \mathcal{P}_q$ e $\log |\varphi(p)| = 0$ per ogni $p \in \partial\Delta$, per il Teorema 2.7 deduciamo che $u(p) + \log |\varphi(p)| \leq M$ per ogni $u \in \mathcal{P}_q$ e per ogni $p \in \Delta$, da cui $h(p) = G(p, q) + \log |\varphi(p)| \leq M$. D'altra parte $v \in \mathcal{P}_q$, per cui $G(p, q) \geq -\log |\varphi(p)|$ per ogni $p \in \Delta$, da cui concludiamo che $0 \leq h(p) \leq M$ per ogni $p \in \Delta$.

Infine, supponiamo che w sia una funzione armonica positiva su $R \setminus \{q\}$ tale che $w(p) + \log |\varphi(p)|$ sia armonica in q . Se $u \in \mathcal{P}_q$, allora $u - w$ è subarmonica su R e $u - w < 0$ in $R \setminus K_u$, con $K_u = \text{supp } u$ compatto, dunque, per il Teorema 2.8, $u - w < 0$ su R . Data l'arbitrarietà di $u \in \mathcal{P}_q$, concludiamo che $G(p, q) - w(p) \leq 0$ per ogni $p \in R \setminus \{q\}$. \square

Osservazione 2.12. *In luce delle proprietà viste nel Teorema 2.10, notiamo che, per coerenza con quanto fatto nella Sezione 1.6, avremmo dovuto definire la funzione di Green associata alla famiglia \mathcal{P}_q come $G(p, q) = -\sup_{u \in \mathcal{P}_q} u(p)$, tuttavia, per non appesantire la notazione sostituendo $-G$ a G , proseguiamo come impostato.*

Teorema 2.11. *Sia R una superficie di Riemann. Sia data $G(p, q)$ una funzione di Green per R con polo in q . Allora*

$$\inf_{p \in R} G(p, q) = 0. \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Sia (Δ, φ) un disco coordinato contenente q tale che $\varphi(q) = 0$. Per assurdo, supponiamo $a = \inf_{p \in R} G(p, q) > 0$. Per il Teorema 2.10, $G(p, q)$ armonica per ogni $p \in R \setminus \{q\}$, dunque (per il Teorema 2.7) $G(p, q) - a > 0$ per ogni $p \in R \setminus \{q\}$, inoltre $G(p, q) - a + \log |\varphi(p)|$ è armonica per ogni $p \in \Delta$. Sia ora $u \in \mathcal{P}_q$. Per costruzione $u(p) + \log |\varphi(p)|$ è subarmonica su Δ , dunque anche

$$u(p) - (G(p, q) - a) = (u(p) + \log |\varphi(p)|) - (G(p, q) - a + \log |\varphi(p)|)$$

è subarmonica su Δ . Essendo $K_u = \text{supp } u$ compatto, $u(p) - (G(p, q) - a) < 0$ per ogni $p \in R \setminus K_u$, dunque, per il Teorema 2.8, $u(p) < G(p, q) - a$ per ogni $p \in R$ e per ogni $u \in \mathcal{P}_q$, da cui la contraddizione $G(p, q) = \sup_{u \in \mathcal{P}_q} u(p) \leq G(p, q) - a$. \square

A questo punto vogliamo mostrare che se $G(p, q_0)$ esiste per un certo $q_0 \in R$, allora esiste $G(p, q)$ per ogni $q \in R$. Per farlo sfruttiamo una funzione armonica ausiliaria e una particolare tecnica di approssimazione.

Costruzione preliminare. Sia R una superficie di Riemann. Fissato $q \in R$, sia (U_q, φ_q) una carta di R tale che $q \in U_q$ e $\varphi_q(q) = 0$. Sia $r > 0$ tale che

$$\overline{\Delta_r^q} = \varphi_q^{-1}(\overline{B_r(0)}) = \{p \in U_q \mid |\varphi_q(p)| \leq r\} \subset U_q$$

sia ben definito. Indichiamo $\Delta_r^q = \varphi_q^{-1}(B_r(0))$. Definiamo ora la famiglia

$$\mathcal{S}^q = \{v : (R \setminus \Delta_r^q) \rightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ subarmonica, } v \leq 1, v \text{ a supporto compatto}\}.$$

Per costruzione \mathcal{S}^q è una famiglia di Perron. Per il Teorema 2.9, la funzione

$$H^q : (R \setminus \Delta_r^q) \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto H^q(p) = \sup_{v \in \mathcal{S}^q} v(p)$$

è armonica.

Ora sia $s > r$ tale che $\overline{\Delta_s^q} = \varphi_q^{-1}(\overline{B_s(0)}) = \{p \in U_q \mid |\varphi_q(p)| \leq s\} \subset U_q$ sia ben definito. Indichiamo $\Delta_s^q = \varphi_q^{-1}(B_s(0))$.

A questo punto, per determinare $w_0 : \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < s\} \rightarrow \mathbb{R}$ soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta w_0(z) = 0 & z \in B_s(0) \setminus \overline{B_r(0)} \\ w_0(z) = 1 & z \in \partial B_r(0) \\ w_0(z) = 0 & z \in \partial B_s(0), \end{cases}$$

ricordando i conti fatti all'inizio della sezione 1.5, imponiamo le condizioni al contorno a $w_0 = c_0 + c_1 \log |z|$, trovando

$$w_0(z) = 1 - \frac{\log r}{\log(r/s)} + \frac{\log |z|}{\log(r/s)}.$$

Componendo con φ_q , otteniamo la funzione

$$v_0^q : (R \setminus \Delta_r^q) \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto v_0^q(p) = \begin{cases} w_0 \circ \varphi_q(p) & p \in \Delta_s^q \setminus \Delta_r^q \\ 0 & p \in R \setminus \Delta_s^q \end{cases}$$

che è subarmonica su $R \setminus \Delta_r^q$ (infatti per ogni disco coordinato (Δ, φ) abbiamo che $v_0^q \circ \varphi^{-1} : \varphi(R \setminus \Delta_r^q) \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto w_0 \circ (\varphi_q \circ \varphi^{-1})$ se $z \in \varphi(\Delta_s^q \setminus \Delta_r^q)$ e $z \mapsto 0$ se $z \in \varphi(R \setminus \Delta_s^q)$, in particolare $v_0^q \circ \varphi^{-1}$ è armonica in $R \setminus \varphi(\partial \Delta_s^q)$ e per $z_0 \in \varphi(\partial \Delta_s^q)$ verifica (2.2), essendo $v_0^q \circ \varphi^{-1}(z_0) = 0$ e $v_0^q \circ \varphi^{-1}(z) \in (0, 1)$ per ogni $z \in \Delta_s^q \setminus \Delta_r^q$ dal fatto che $w_0(B_s(0) \setminus \overline{B_r(0)}) \subseteq (0, 1)$).

Per costruzione, $v_0^q \in \mathcal{S}^q$, inoltre per ogni $p' \in \partial \Delta_r^q$ abbiamo che $v_0^q(p) \rightarrow 1$ per $p \rightarrow p'$ ed essendo $v_0^q(p) \leq H^q(p) \leq 1$ per ogni $p \in (R \setminus \Delta_r^q)$, concludiamo che $H^q \rightarrow 1$ per $p \rightarrow \partial \Delta_r^q$. Siccome $0 \in \mathcal{S}^q$, abbiamo che $0 \leq H^q(p) \leq 1$ per ogni $p \in (R \setminus \Delta_r^q)$. H^q può essere vista come la soluzione di Perron per il problema di Dirichlet su $R \setminus \Delta_r^q$ con valori al bordo 1 su $\partial \Delta_r^q$ e 0 a ∞ . Per il Teorema 2.7 applicato ad H^q e a $-H^q$, otteniamo che $0 < H^q(p) < 1$ per ogni $p \in (R \setminus \Delta_r^q)$, oppure $H^q \equiv 1$.

Teorema 2.12. *Sia R una superficie di Riemann. Se esiste una funzione di Green $G(p, q_0)$ nel disco coordinato aperto $\Delta_r^{q_0}$ per un certo $q_0 \in R$, allora $0 < H^{q_0}(p) < 1$ per ogni $p \in R \setminus \Delta_r^{q_0}$. D'altra parte, se $0 < H^{q_0}(p) < 1$ per ogni $p \in R \setminus \Delta_r^{q_0}$, allora esiste $G(p, q)$ per ogni $q \in \Delta_r^{q_0}$.*

Dimostrazione. Per la prima parte, supponiamo che esista una funzione di Green $G(p, q_0)$ nel disco coordinato aperto $\Delta_r^{q_0}$ per un certo $q_0 \in R$. Per il Teorema 2.10, $G(p, q_0) > 0$ per ogni $p \in R \setminus \{q_0\}$, in particolare esiste $a > 0$ tale che $G(p, q_0) > a$ per ogni $p \in \partial\Delta_r^{q_0}$. Allora, per quanto visto sopra, $H^{q_0}(p) \leq 1 < \frac{1}{a}G(p, q_0)$ per ogni $p \in \partial\Delta_r^{q_0}$, da cui, per il Teorema 2.7, $H^{q_0}(p) < \frac{1}{a}G(p, q_0)$ per ogni $p \in R \setminus \Delta_r^{q_0}$. Essendo dal Teorema 2.11 che $\inf_{p \in R} G(p, q) = 0$, allora $\inf_{R \setminus \Delta_r^{q_0}} H^{q_0} = 0$ da cui $H^{q_0} \not\equiv 1$ per cui $H^{q_0}(p) \in (0, 1)$ per ogni $p \in (R \setminus \Delta_r^q)$.

Per la seconda parte, supponiamo $H^{q_0}(p) \in (0, 1)$ per ogni $p \in (R \setminus \Delta_r^q)$. Sia $q \in \Delta_r^{q_0}$ e sia Δ_s^q come sopra, tale che $\Delta_r^{q_0} \subset \Delta_s^q \subset U$. Ora consideriamo il disco coordinato (Δ_s^q, φ_q) , ove $\varphi_q(p) = \varphi_{q_0}(p) - \varphi_{q_0}(q)$. Vogliamo mostrare che $u \in \mathcal{P}_q \setminus \{0\}$ sono globalmente limitate. Sia quindi $u \in \mathcal{P}_q \setminus \{0\}$, per definizione di \mathcal{P}_q , $u(p) + \log |\varphi_q(p)|$ è subarmonica su Δ_s^q . Sia $C > 0$ tale che $|\log |\varphi_q(p)|| \leq C$ per ogni $p \in \partial\Delta_r^{q_0} \cup \partial\Delta_s^q$. Sia inoltre $M_u > 0$ tale che $|u(p)| \leq M_u$ per ogni $p \in \partial\Delta_s^q$. Allora $u(p) + \log |\varphi_q(p)| \leq M_u + C$ per ogni $p \in \partial\Delta_s^q$, da cui, per il Teorema 2.7, $u(p) + \log |\varphi_q(p)| \leq M_u + C$ per ogni $p \in \Delta_s^q$, in particolare per ogni $p \in \partial\Delta_r^{q_0}$. Otteniamo quindi che

$$u(p) \leq C + M_u - \log |\varphi_q(p)| \leq 2C + M_u \quad \forall p \in \partial\Delta_r^{q_0}.$$

Da sopra abbiamo che $H^{q_0}(p) = 1$ per ogni $p \in \partial\Delta_r^{q_0}$, dunque $u(p) \leq (2C + M_u)H^{q_0}(p)$ per ogni $p \in \partial\Delta_r^{q_0}$, da cui, avendo u supporto compatto, per il Teorema 2.7 deduciamo che

$$u(p) \leq (2C + M_u)H^{q_0}(p) \quad \forall p \in R \setminus \Delta_r^{q_0}.$$

In particolare, prendendo il massimo su $\partial\Delta_s^q$, troviamo

$$M_u \leq (2C + M_u) \max_{p \in \partial\Delta_s^q} H^{q_0}(p),$$

da cui

$$M_u \leq \frac{2C \max_{p \in \partial\Delta_s^q} H^{q_0}(p)}{1 - \max_{p \in \partial\Delta_s^q} H^{q_0}(p)} = K,$$

ove K è indipendente da u . Ricapitolando, abbiamo che per ogni $u \in \mathcal{P}_q$ e per ogni $p \in \partial\Delta_s^q$ vale la disuguaglianza $|u(p)| \leq K$, da cui concludiamo che esiste una funzione di Green $G(p, q)$ con polo in q per ogni $q \in \Delta_r^{q_0}$. \square

Teorema 2.13. *Sia R una superficie di Riemann. Supponiamo esista $G(p, q_0)$ una funzione di Green per R con polo in q_0 . Allora esiste una funzione di Green per R con polo in q per ogni $q \in R$.*

Dimostrazione. Definiamo \hat{R} come l'insieme dei $q \in R$ per cui esiste una funzione di Green $G(p, q)$ per R con polo in q . Per ipotesi $\hat{R} \neq \emptyset$. Per il Teorema 2.12, risulta che \hat{R} è aperto, essendo intorno di ogni suo punto. Per mostrare che \hat{R} è anche chiuso, mostriamo che il suo complementare in R è aperto. Sia quindi $q_0 \in R \setminus \hat{R}$, ovvero supponiamo che non esista una funzione di Green $G(p, q_0)$ per R con polo in q_0 , allora, per il Teorema 2.12,

$H^{q_0} \equiv 1$. Siano (U_{q_0}, φ_{q_0}) , $\Delta_r^{q_0}$ e $H^{q_0}: (R \setminus \Delta_r^{q_0}) \rightarrow \mathbb{R}$ come nella costruzione preliminare. Se per assurdo vi fosse un certo $q \in \Delta_r^{q_0}$ per cui esistesse una funzione di Green $G(p, q)$, allora, come nella prima parte della dimostrazione del Teorema 2.12, esisterebbe $a > 0$ tale che $G(p, q) > a$ per ogni $p \in \partial\Delta_r^{q_0}$, per cui $H^{q_0}(p) = 1 \leq \frac{1}{a}G(p, q)$ per ogni $p \in \Delta_r^{q_0}$, da cui, per il Teorema 2.7, $H^{q_0}(p) = 1 \leq \frac{1}{a}G(p, q)$ per ogni $p \in R \setminus \Delta_r^{q_0}$, ma questo è assurdo, dal momento che, per il Teorema 2.11, $\inf_{p \in R} G(p, q) = 0$. Concludiamo che $\Delta_r^{q_0} \subset (R \setminus \hat{R})$, ovvero che $R \setminus \hat{R}$ è intorno di ogni suo punto e dunque aperto. Abbiamo dimostrato che \hat{R} è aperto, chiuso e non vuoto in R connessa, dunque $\hat{R} = R$. \square

Teorema 2.14. *Sia S una superficie di Riemann. Sia R un'altra superficie di Riemann, sottoinsieme aperto connesso di S . Supponiamo che R abbia un atlante formato da un numero finito di dischi coordinati precompatti in S . Allora per ogni $q \in R$ esiste una funzione di Green $G(p, q)$ su R con polo in q .*

Dimostrazione. Grazie al Teorema 2.13, è sufficiente mostrare che esiste una funzione di Green $G(p, q)$ su R con polo in q per un solo $q \in R$. Scegliamo q dentro ad un disco coordinato precompatto (Δ, φ) tale che $\emptyset \neq \partial\Delta \cap \partial R \subset S$. Sia $b \in \partial\Delta \cap \partial R$, per cui $\varphi(b) \in \partial\mathbb{D}$. Consideriamo la funzione

$$w: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto w(z) = \operatorname{Re}(\overline{\varphi(b)}z) - 1,$$

allora w è armonica, $w(\varphi(b)) = 0$ e $w(z) < 0$ per ogni $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{\varphi(b)\}$. Ora vogliamo estendere $f_0 = w \circ \varphi: \overline{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}$ ad una funzione subarmonica $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(b) = 0$ e $f(p) < 0$ per ogni $p \in R \setminus \{b\}$. Lo facciamo un disco coordinato alla volta. Sia (Δ_1, φ_1) un altro disco coordinato tale che $\Delta \cap \Delta_1 \neq \emptyset$, per cui $f_0(p) \leq 0$ per ogni $p \in \partial\Delta_1 \cap \Delta$. In virtù del Teorema A.31, possiamo estendere f_0 a f'_1 su $\partial\Delta_1$ in modo che $f'_1(p) < 0$ per ogni $p \in \partial\Delta_1 \setminus \overline{\Delta}$. Grazie all'Osservazione 2.1, riusciamo a costruire una funzione armonica $F_1: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ che coincide con $f'_1 \circ \varphi_1^{-1}$ su $\partial\mathbb{D}$. Definiamo quindi

$$f_1: \overline{\Delta \cup \Delta_1} \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \begin{cases} F_1 \circ \varphi_1(p) & p \in \overline{\Delta_1} \\ f_0(p) & p \in \overline{\Delta} \setminus \overline{\Delta_1}. \end{cases}$$

In questo modo potremmo ridefinire f_0 in alcuni valori di $\Delta \cap \Delta_1$, ma l'importante è che otteniamo una funzione subarmonica definita su $\overline{\Delta \cup \Delta_1}$ non positiva, che si annulla solo in b . Procedendo in questo modo per ciascuno dei (finiti) dischi coordinati precompatti che ricoprono R per ipotesi otteniamo la f desiderata.

A questo punto sia $r > 0$ tale che $\Delta_r = \{p \in \Delta \mid \varphi(p) \leq r\} \subset \Delta$ sia ben definito e definiamo \mathcal{S}^q e $H^q: (R \setminus \Delta_r) \rightarrow \mathbb{R}$ come nella Costruzione preliminare al Teorema 2.12. Scegliamo $a > 0$ tale che $-f(p) > a$ per ogni $p \in \partial\Delta_r$. Per ogni $v \in \mathcal{S}^q$ abbiamo che $v(p) + \frac{1}{a}f(p) \leq 0$ per ogni $p \in \partial\Delta_r$. Essendo v a supporto compatto in R , per il Teorema 2.7, concludiamo che $v(p) + \frac{1}{a}f(p) \leq 0$ per ogni $p \in R \setminus \Delta_r$ e per ogni $v \in \mathcal{S}^q$. Otteniamo così che $H^q(p) \leq -\frac{1}{a}f(p)$ per ogni $p \in R \setminus \Delta_r$. Per come abbiamo costruito f , abbiamo che $-f(p) \rightarrow 0$ per $p \rightarrow b$, da cui $H^q(p) \rightarrow 0$ per $p \rightarrow b$. Ne deduciamo che $H^q \not\equiv 1$, dunque, per il Teorema 2.12, esiste una funzione di Green $G(p, q)$ per R con polo in q e questo completa la dimostrazione. \square

Il Teorema di uniformizzazione permette di classificare tutte le superfici di Riemann R semplicemente connesse. Vogliamo arrivare a provare che se una superficie di Riemann

semplicemente connessa R ammette una funzione di Green, allora R è conformemente equivalente al disco unitario aperto. Per poterlo fare ci serve il seguente risultato.

Teorema 2.15. *Sia R una superficie di Riemann semplicemente connessa e supponiamo che esista una funzione di Green $G(p, q)$ per R con polo in $q \in R$. Allora esiste una funzione olomorfa $F: R \rightarrow \mathbb{C}$ tale che*

$$|F(p)| = e^{-G(p, q)} \quad \text{per ogni } p \in R. \quad (2.5)$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A} = \{(\Delta_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ un atlante di R . Per il Teorema 2.6, possiamo supporre che ogni carta $(\Delta_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ sia un disco coordinato.

Sia quindi $(\Delta_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ e supponiamo dapprima che $q \notin \Delta_\alpha$, allora, per il Teorema 2.10, la funzione $G(p) = G(p, q)$ è armonica in Δ_α , ovvero $G \circ \varphi_\alpha^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ è armonica. Ricordando il Teorema 2.1, sappiamo che esiste una funzione olomorfa $g_\alpha: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $G \circ \varphi_\alpha^{-1} = \text{Re}(g_\alpha)$. Definiamo quindi la funzione olomorfa

$$H_\alpha: \Delta_\alpha \rightarrow \mathbb{C}, p \mapsto H_\alpha(p) = g_\alpha \circ \varphi_\alpha(p).$$

Abbiamo che $\text{Re}(H_\alpha) = \text{Re}(g_\alpha \circ \varphi_\alpha) = \text{Re}(g_\alpha) \circ \varphi_\alpha = G \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha = G$. Allora la funzione

$$F_\alpha: \Delta_\alpha \rightarrow \mathbb{C}, p \mapsto F_\alpha(p) = e^{-H_\alpha(p)}$$

verifica

$$|F_\alpha(p)| = |e^{-\text{Re}(H_\alpha(p))} e^{-i \text{Im}(H_\alpha(p))}| = e^{-G(p, q)}.$$

Dal Teorema 2.1, $\text{Im}(H_\alpha)$ è unica a meno di una costante additiva reale, dunque F_α è unica a meno di una moltiplicazione per $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Sia ora $(\Delta_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ tale che $q \in \Delta_\alpha$. Per il Teorema 2.10, la funzione

$$f: \Delta_\alpha \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto f(p) = G(p, q) + \log |\varphi_\alpha(p) - \varphi_\alpha(q)|$$

è armonica su Δ_α . Ripercorrendo il procedimento di sopra, esiste una funzione olomorfa $H_\alpha: \Delta_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\text{Re}(H_\alpha(p)) = f(p)$. Allora la funzione

$$F_\alpha: \Delta_\alpha \rightarrow \mathbb{C}, p \mapsto F_\alpha(p) = (\varphi_\alpha(p) - \varphi_\alpha(q)) e^{-H_\alpha(p)}$$

verifica

$$|F_\alpha(p)| = |\varphi_\alpha(p) - \varphi_\alpha(q)| e^{-\text{Re}(H_\alpha(p))} = |\varphi_\alpha(p) - \varphi_\alpha(q)| e^{-G(p, q) - \log |\varphi_\alpha(p) - \varphi_\alpha(q)|} = e^{-G(p, q)}.$$

Di nuovo, F_α è unica a meno di una moltiplicazione per $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

A questo punto abbiamo una collezione di funzioni $\{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$ uniche a meno di una moltiplicazione per $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Segue che se $\Delta_\alpha \cap \Delta_\beta \neq \emptyset$, allora $|F_\alpha| = |F_\beta|$ su $\Delta_\alpha \cap \Delta_\beta$, per cui $F_\alpha F_\beta^{-1} = e^{i\theta}$ su $\Delta_\alpha \cap \Delta_\beta$ per un certo $\theta \in \mathbb{R}$. Dunque $F_\beta = e^{-i\theta} F_\alpha$ è il prolungamento analitico di F_α da $\Delta_\alpha \cap \Delta_\beta$ a Δ_β . Segue che F_α può essere estesa analiticamente lungo ogni cammino in R con punto iniziale in Δ_α . Per il Teorema A.23, F_α ammette un prolungamento analitico F in R e per costruzione $|F(p)| = e^{-G(p, q)}$ per ogni $p \in R$. \square

Osservazione 2.13. *Notiamo che la funzione olomorfa F del Teorema 2.15 ha un solo zero in q e che $|F(p)| < 1$ per ogni $p \in R$, essendo dal Teorema 2.10 che $G(p, q) > 0$ per ogni $p \in R$.*

Siamo finalmente pronti per dimostrare il seguente

Teorema 2.16 (Uniformizzazione - prima parte). *Sia R una superficie di Riemann semplicemente connessa e supponiamo che ammetta una funzione di Green $G(p, q)$. Allora esiste una mappa conforme da R nel disco unitario aperto.*

Dimostrazione. Sia $q_0 \in R$ e sia $G(p, q_0)$ una funzione di Green per R con polo in q_0 . Per il Teorema 2.15, esiste una funzione olomorfa $F: R \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $|F(p)| = e^{-G(p, q_0)}$ per ogni $p \in R$. Sia $q_1 \in R \setminus \{q_0\}$ e definiamo la funzione

$$\varphi: R \rightarrow \mathbb{C}, p \mapsto \varphi(p) = \frac{F(p) - F(q_1)}{1 - \overline{F(q_1)}F(p)}.$$

Essendo, dall'Osservazione 2.13, che $|F(p)| < 1$ per ogni $p \in R$, φ risulta ben definita e olomorfa (rapporto di analitiche con denominatore mai nullo), inoltre $\varphi(q_1) = 0$ e, ricordando che $F(q_0) = 0$, vale che $\varphi(q_0) = -F(q_1)$. Vogliamo ora mostrare che $|\varphi(p)| < 1$ per ogni $p \in R$. Siano $\varepsilon_p, \varepsilon_1 \in (0, 1]$ tali che $|F(p)|^2 = 1 - \varepsilon_p$ per ogni $p \in R \setminus \{q_1\}$ e $|F(q_1)|^2 = 1 - \varepsilon_1$, allora vale la disuguaglianza

$$|F(p)|^2 + |F(q_1)|^2 = (1 - \varepsilon_p) + (1 - \varepsilon_1) < (1 - \varepsilon_p) + (1 - \varepsilon_1) + \varepsilon_p \varepsilon_1 = 1 + |F(p)|^2 |F(q_1)|^2,$$

da cui otteniamo la disuguaglianza

$$\begin{aligned} |F(p) - F(q_1)|^2 &= |F(p)|^2 + |F(q_1)|^2 - F(p)\overline{F(q_1)} - \overline{F(p)}F(q_1) < \\ &< 1 + |F(p)|^2 |F(q_1)|^2 - F(p)\overline{F(q_1)} - \overline{F(p)}F(q_1) = \\ &= |1 - F(p)\overline{F(q_1)}|^2, \end{aligned}$$

equivalente al fatto che $|\varphi(p)| < 1$.

Sia $u \in \mathcal{P}_{q_1}$, allora, per definizione di \mathcal{P}_{q_1} , u è a supporto compatto $K_u \subset R$ e inoltre $u(p) + \log |\varphi(p)|$ è subarmonica su Δ^{q_1} , ove (φ, Δ^{q_1}) è disco coordinato centrato in q_1 . Chiaramente, dal fatto che $|\varphi(p)| < 1$, abbiamo che $u(p) + \log |\varphi(p)| < 0$ per ogni $p \notin K_u$, dunque, per il Teorema 2.8, $u(p) + \log |\varphi(p)| < 0$ per ogni $p \in R$. Poiché questo vale per ogni $u \in \mathcal{P}_{q_1}$, passando al sup otteniamo

$$G(p, q_1) + \log |\varphi(p)| \leq 0 \quad \text{per ogni } p \in R,$$

in particolare $G(q_0, q_1) + \log |\varphi(q_0)| \leq 0$. Per quanto visto sopra $\varphi(q_0) = -F(q_1)$, inoltre per ipotesi $|F(q_1)| = e^{-G(q_1, q_0)}$, dunque

$$G(q_0, q_1) + \log |\varphi(q_0)| = G(q_0, q_1) + \log |F(q_1)| = G(q_0, q_1) - G(q_1, q_0),$$

da cui $G(q_0, q_1) - G(q_1, q_0) \leq 0$. Ora possiamo ripetere il procedimento scambiando i ruoli di q_0 e q_1 , ottenendo $G(q_0, q_1) - G(q_1, q_0) \leq 0$, da cui concludiamo che $G(q_0, q_1) = G(q_1, q_0)$ per ogni $q_0, q_1 \in R$, $q_0 \neq q_1$. Da questo segue che $G(q_0, q_1) + \log |\varphi(q_0)| = 0$. Poiché prima abbiamo mostrato che la funzione subarmonica $G(p, q_1) + \log |\varphi(p)| \leq 0$ per ogni $p \in R$, per il Teorema 2.7 concludiamo che $G(p, q_1) + \log |\varphi(p)| \equiv 0$, ovvero che $G(p, q_1) = -\log |\varphi(p)|$ per ogni $p \in R$. Essendo $G(p, q_1)$ finita su $R \setminus \{q_1\}$, concludiamo che φ non ha zeri in $R \setminus \{q_1\}$, ovvero $F(p) \neq F(q_1)$ per ogni $p \in R \setminus \{q_1\}$, ovvero $F(p) = F(q_1)$ se e solo se $p = q_1$. Data l'arbitrarietà di $q_1 \in R$, questo prova che F è iniettiva.

Segue che $F: R \rightarrow (F(R) \subseteq \mathbb{D})$ è conforme (biolomorfa), inoltre, essendo $F(R)$ un aperto semplicemente connesso, per il Teorema 2.5, esiste una mappa conforme $\gamma: F(R) \rightarrow \mathbb{D}$, per cui $\gamma \circ F: R \rightarrow \mathbb{D}$ è una mappa conforme da R nel disco unitario aperto. \square

Osservazione 2.14. *Dalla dimostrazione del Teorema 2.16, abbiamo che se una superficie di Riemann R ammette una funzione di Green $G(p, q)$, allora $G(p, q) = G(q, p)$ per ogni $p, q \in R$, $p \neq q$.*

Definizione. *Diciamo che una superficie di Riemann R è iperbolica se ammette una funzione di Green con polo in $q \in R$ (e quindi in ogni $q \in R$).*

Osservazione 2.15. *Per il Teorema 2.16, una superficie di Riemann iperbolica e semplicemente connessa è conforme al disco unitario aperto.*

Teorema 2.17. *Sia R una superficie di Riemann. Allora R è iperbolica se e solo se esiste una funzione subarmonica in R negativa e non costante. In particolare se R è iperbolica, allora non è compatta. Inoltre, se R è iperbolica, allora il problema di Dirichet*

$$\begin{cases} -\Delta u(p) = 0 & p \in R \setminus \Delta_r^q \\ u(p) = 0 & p \in \partial\Delta_r^q \end{cases} \quad (2.6)$$

ha infinite soluzioni.

Dimostrazione.

(\Rightarrow) Supponiamo che esista $G(p, q)$ funzione di Green con polo in $q \in R$. Per ogni $m > 0$, per il Teorema 2.10 esiste un intorno di q in cui $G > m$, allora, per l'Osservazione 2.10, $\max\{-G, -m\}$ è una funzione subarmonica negativa non costante.

(\Leftarrow) D'altra parte, supponiamo che esista u funzione subarmonica in R negativa e non costante. Fissato $q \in R$, siano Δ_r^q e H^q come nella Costruzione preliminare al Teorema 2.12, per cui H^q è armonica in $R \setminus \Delta_r^q$ e $H^q(p) = 1$ per ogni $p \in \partial\Delta_r^q$. Se riusciamo a mostrare che $0 < H^q(p) < 1$ per ogni $p \in R \setminus \Delta_r^q$, possiamo concludere per il Teorema 2.12. Supponiamo per assurdo che $H^q(p) \equiv 1$ per ogni $p \in R \setminus \Delta_r^q$. Sia $m > 0$ tale che $-m = \sup_{p \in \Delta_r^q} u(p) = \max_{p \in \partial\Delta_r^q} u(p)$, per cui $u(p) \leq -m = -mH^q(p)$ per ogni $p \in \partial\Delta_r^q$. Essendo u subarmonica e H^q armonica, per il Teorema 2.7, abbiamo che $u(p) \leq -mH^q(p) = m$ per ogni $p \in R \setminus \Delta_r^q$, ovvero $u(p) \leq -m$ per ogni $p \in R$, ma $-m = \max_{p \in \partial\Delta_r^q} u(p)$, per cui, per il Teorema 2.7, deduciamo che u è costante, in contraddizione con l'ipotesi.

Se R è iperbolica, allora, per quanto visto, esiste u funzione subarmonica in R negativa e non costante, dunque, per il Teorema 2.7, R non può essere compatta.

Infine, se R è iperbolica, allora, prendendo H^q come sopra, otteniamo che $u(p) = \lambda(H^q - 1)$ è soluzione di (2.6) per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. \square

2.4 Funzioni di Green bipolari su superfici di Riemann

In questa sezione concludiamo la dimostrazione del teorema di uniformizzazione, dando una classificazione delle superfici di Riemann R semplicemente connesse che non ammettono una funzione di Green. In particolare, mostreremo che in questo caso possiamo costruire una mappa conforme da R nella sfera di Riemann se R è compatta e da R al piano complesso altrimenti.

Definizione. Sia R una superficie di Riemann, siano $q_1, q_2 \in R$, $q_1 \neq q_2$, e siano $(\Delta_1, \varphi_1), (\Delta_2, \varphi_2)$ dischi coordinati tali che $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ e $\varphi_1(q_1) = \varphi_2(q_2) = 0$. Allora chiamiamo funzione di Green bipolare per R con poli in q_1 e q_2 una funzione armonica $G(\cdot, q_1, q_2): R \setminus \{q_1, q_2\} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- i. $G(p, q_1, q_2) + \log |\varphi_1(p)|$ sia armonica in q_1 ;
- ii. $G(p, q_1, q_2) - \log |\varphi_2(p)|$ sia armonica in q_2 ;
- iii. $G(p, q_1, q_2)$ sia limitata su $R \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$.

Osservazione 2.16. Nella definizione precedente $G(p, q_1, q_2)$ non è univocamente determinata: è unica a meno di sommarvi una funzione armonica limitata.

Esempio. Una funzione di Green bipolare per la sfera di Riemann $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con poli in $q_1 = 0$ e $q_2 = \infty$ è data da $G(\cdot, q_1, q_2): \bar{\mathbb{C}} \setminus \{q_1, q_2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto G(z, 0, \infty) = -\log |z|$. In questo caso $G(z, 0, \infty)$ è unica a meno di sommarvi una costante, essendo le uniche funzioni armoniche su $\bar{\mathbb{C}}$ (cfr. Teorema 1.8).

Esempio. Se $G(p, q)$ è una funzione di Green per una superficie di Riemann R , allora, per ogni $q_1, q_2 \in R$, $q_1 \neq q_2$, la funzione $G(p, q_1, q_2) = G(p, q_1) - G(p, q_2)$ è una funzione di Green bipolare per R con poli in q_1 e q_2 .

Teorema 2.18. Sia R' una superficie di Riemann e sia S un'altra superficie di Riemann sottoinsieme di R' dotata di un atlante formato da un numero finito di dischi coordinati precompatti in R' . Siano $q_1, q_2 \in S$, $q_1 \neq q_2$, e siano $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ carte di R' tali che $q_1 \in U_1$, $\varphi_1(q_1) = 0$, $q_2 \in U_2$, $\varphi_2(q_2) = 0$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Sia $r > 0$ tale che $\Delta_r^i = \varphi_i^{-1}(B_r(0)) = \{p \in U_i \mid |\varphi_i(p)| \leq r\} \subset U_i$ sia ben definito per ogni $i \in \{1, 2\}$. Denotiamo $\Delta_r^i = \varphi_i^{-1}(B_r(0)) = \{p \in U_i \mid |\varphi_i(p)| < r\} \subset U_i$ per ogni $i \in \{1, 2\}$. Allora esiste una costante $C_0 > 0$ tale che

$$|G_R(p, q_1) - G_R(p, q_2)| \leq 2C_0 \quad \forall p \in R \setminus (\Delta_r^1 \cup \Delta_r^2) \quad (2.7)$$

per ogni superficie di Riemann R contenente $S \cup \partial S$ e dotata di un atlante formato da un numero finito di dischi coordinati precompatti in R' .

Dimostrazione. Sia R una superficie di Riemann contenente $S \cup \partial S$ e dotata di un atlante formato da un numero finito di dischi coordinati precompatti in R' . Sia $s \in (0, r)$, per cui $\Delta_s^i = \varphi_i^{-1}(B_s(0)) = \{p \in U_i \mid |\varphi_i(p)| \leq s\} \subset \Delta_r^i \subset U_i$ è ben definito per ogni $i \in \{1, 2\}$. Denotiamo $\Delta_s^i = \varphi_i^{-1}(B_s(0)) = \{p \in U_i \mid |\varphi_i(p)| < s\} \subset \Delta_r^i \subset U_i$ per ogni $i \in \{1, 2\}$. Per il Teorema 2.14, R ammette una funzione di Green $G_R(p, q)$ con polo in q per ogni $q \in R$. Sia $M_i = \max_{p \in \partial \Delta_s^i} G_R(p, q_i)$ per ogni $i \in \{1, 2\}$. Per ogni $i \in \{1, 2\}$ abbiamo che, per il Teorema 2.10, $G_R(p, q_i) > 0$ per ogni $p \in R$ e, per il Teorema 2.11, $\inf_{p \in R} G_R(p, q_i) = 0$, dunque $G_R(p, q_i) \rightarrow 0$ per $p \rightarrow \partial R$. Sempre per il Teorema 2.10 $G_R(p, q_i)$ è armonica su $R \setminus (\Delta_s^1 \cup \Delta_s^2)$, da cui, per il Teorema 2.7, $G_R(p, q_i) \leq M_i$ per ogni $p \in R \setminus (\Delta_s^1 \cup \Delta_s^2)$, in particolare

$$M_i - G_R(p, q_i) \geq 0 \quad \forall p \in S \setminus (\Delta_s^1 \cup \Delta_s^2).$$

Sia ora $z_i \in \partial \Delta_r^i$ tale che $G_R(p, q_i) \leq G_R(z_i, q_i)$ per ogni $p \in \partial \Delta_r^i$ (z_i esiste essendo $\partial \Delta_r^i$ compatto). Essendo $G_R(p, q_i) + \log |\varphi_i(p)|$ armonica su Δ_r^i , per il Teorema 2.7 vale che

$$G_R(p, q_i) + \log |\varphi_i(p)| \leq G_R(z_i, q_i) + \log r \quad \forall p \in \Delta_r^i,$$

in particolare, $M_i + \log s = \max_{p \in \partial \Delta_s^i} (G_R(p, q_i) + \log |\varphi_i(p)|) \leq G_R(z_i, q_i) + \log r$, ovvero $M_i - G_R(z_i, q_i) \leq \log(r/s)$. Essendo $M_i - G_R(p, q_i)$ una funzione armonica non negativa su $S \setminus (\Delta_s^1 \cup \Delta_s^2)$ ed essendo $\partial \Delta_r^1 \cup \partial \Delta_r^2 \subset S$ e S connessa, per il Teorema 1.11, esiste $C = C(\partial \Delta_r^1 \cup \partial \Delta_r^2, S) > 0$ tale che

$$M_i - G_R(p, q_i) \leq C(M_i - G_R(z_i, q_i)) \quad \forall p \in \partial \Delta_r^1 \cup \partial \Delta_r^2,$$

da cui

$$M_i - G_R(p, q_i) \leq C \log(r/s) = C_0 \quad \forall p \in \partial \Delta_r^1 \cup \partial \Delta_r^2,$$

ove C_0 è indipendente da R , dunque

$$M_i - C_0 \leq G_R(p, q_i) \leq M_i \quad \forall p \in \partial \Delta_r^1 \cup \partial \Delta_r^2,$$

da cui

$$|G_R(p, q_1) - G_R(p, q_2)| \leq |M_1 - M_2| + C_0 \quad \forall p \in \partial \Delta_r^1 \cup \partial \Delta_r^2.$$

Poiché $G_R(p, q_i) \rightarrow 0$ per $p \rightarrow \partial R$, per il Teorema 2.7 otteniamo che

$$|G_R(p, q_1) - G_R(p, q_2)| \leq |M_1 - M_2| + C_0 \quad \forall p \in R \setminus (\Delta_r^1 \cup \Delta_r^2).$$

Le costanti M_i dipendono da R , vogliamo invece trovare una stima indipendente da R . Poiché $G_R(p, q_1)$ è armonica su Δ_r^2 , per il Teorema 2.7 abbiamo che $M_1 - C_0 \leq G_R(p, q_1) \leq M_1$ per ogni $p \in \Delta_r^2$, in particolare $M_1 - C_0 \leq G_R(q_2, q_1) \leq M_1$. Analogamente, $M_2 - C_0 \leq G_R(q_1, q_2) \leq M_2$. Siccome $G_R(q_1, q_2) = G_R(q_2, q_1)$, deduciamo che $|M_1 - M_2| \leq C_0$, indipendente da R , da cui concludiamo che

$$|G_R(p, q_1) - G_R(p, q_2)| \leq 2C_0 \quad \forall p \in R \setminus (\Delta_r^1 \cup \Delta_r^2). \quad \square$$

Teorema 2.19. *Data una superficie di Riemann R , per ogni $q_1, q_2 \in R$, $q_1 \neq q_2$, esiste $G(p, q_1, q_2)$ funzione di Green bipolare per R con poli in q_1 e q_2 .*

Dimostrazione. Siano $q_1, q_2 \in R$, $q_1 \neq q_2$, inoltre siano (Δ_1, φ_1) , (Δ_2, φ_2) dischi coordinati tali che $q_1 \in \Delta_1$, $\varphi_1(q_1) = 0$, $q_2 \in \Delta_2$, $\varphi_2(q_2) = 0$ e $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$. Per il Teorema 2.6, $R = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m$, ove S_m è una superficie di Riemann dotata di un atlante formato da un numero finito di dischi coordinati precompatti in R . A meno di aggiungere (Δ_1, φ_1) , (Δ_2, φ_2) nell'atlante di S_1 e tutte le carte dell'atlante di S_m a quello di S_{m+1} , possiamo supporre che $\Delta_1 \cup \Delta_2 \subset S_1$ e che $\overline{S_m} \subseteq S_{m+1}$. Sia $C_0 = C_0(\partial \Delta_1 \cup \partial \Delta_2, S_1) > 0$ come nella dimostrazione del Teorema 2.18. Come visto sopra, ogni S_m ammette due funzioni di Green $G_m(p, q_1)$ e $G_m(p, q_2)$, per cui, definendo $G_m(p, q_1, q_2) = G_m(p, q_1) - G_m(p, q_2)$, da (2.7) otteniamo che $|G_m(p, q_1, q_2)| \leq 2C_0$ per ogni $p \in S_m$, per ogni $m \geq 1$. Estendendo G_m per continuità in $R \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$, ponendola pari a 0 fuori da S_m , otteniamo una funzione, che denoteremo ancora con G_m , armonica in $S_m \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$ tale che $|G_m(p, q_1, q_2)| \leq 2C_0$ per ogni $p \in R \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$. Allora $\{G_m(p, q_1, q_2)\}_{m \geq 1}$ è una successione di funzioni equilimitate in $R \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$ tale, per ogni $M \in \mathbb{N}$, la sottosuccessione $\{G_m\}_{m \geq M}$ è una successione di funzioni armoniche in $S_M \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$. Ora, applicando il Teorema 1.26 in ogni $S_m \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$, $m \geq 1$, vogliamo estrarre una sottosuccessione di $\{G_m(p, q_1, q_2)\}_{m \geq 1}$ che converga in tutta $R \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$ ad una funzione armonica $G(p, q_1, q_2)$. Lo facciamo con un argomento diagonale: sia $\{G_k^1\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sottosuccessione di $\{G_m(p, q_1, q_2)\}_{m \geq 1}$ che converga uniformemente ad una funzione armonica in S_1 ;

ora, poiché $\{G_k^1\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $\{G_m(p, q_1, q_2)\}_{m \geq 1}$, possiamo estrarne una sottosuccessione $\{G_k^{12}\}_{k \in \mathbb{N}}$ che sia anche sottosuccessione di $\{G_m(p, q_1, q_2)\}_{m \geq 2}$; a questo punto da $\{G_k^{12}\}_{k \in \mathbb{N}}$ estraiamo una sottosuccessione $\{G_k^2\}_{k \in \mathbb{N}}$ che converge uniformemente ad una funzione armonica in S_2 e da questa una sottosuccessione $\{G_k^{23}\}_{k \in \mathbb{N}}$ che sia anche sottosuccessione di $\{G_m(p, q_1, q_2)\}_{m \geq 3}$. Procedendo in questo modo, al passo N da $\{G_k^{(N-1)N}\}_{k \in \mathbb{N}}$ estraiamo una sottosuccessione $\{G_k^N\}_{k \in \mathbb{N}}$ che converge uniformemente ad una funzione armonica in S_N e da questa una sottosuccessione $\{G_k^{N(N+1)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ che sia anche sottosuccessione di $\{G_m(p, q_1, q_2)\}_{m \geq (N+1)}$. Infine consideriamo la successione $\{G_k^m\}_{k \in \mathbb{N}}$: questa è una sottosuccessione di $\{G_k^m\}_{k \in \mathbb{N}}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, dunque converge uniformemente ad una funzione armonica in S_m per ogni $m \in \mathbb{N}$, dunque converge su tutta $R \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$ ad una funzione armonica, che denoteremo $G(p, q_1, q_2)$ per ogni $p \in R \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$.

Per il Teorema 2.10, $G_k^k(p, q_1, q_2) + \log |\varphi_1(p)| = (G_k^k(p, q_1) + \log |\varphi_1(p)|) - G_k^k(p, q_2)$ è armonica in Δ_1 e per $p \in \partial\Delta_1$ vale che $|G_k^k(p, q_1, q_2) + \log |\varphi_1(p)|| = |G_k^k(p, q_1) - G_k^k(p, q_2)| \leq 2C_0$, da cui, per il Teorema 2.7, deduciamo che

$$|G_k^k(p, q_1, q_2) + \log |\varphi_1(p)|| \leq 2C_0 \quad \forall p \in \Delta_1,$$

dunque, come prima, per il Teorema 1.26, esiste una sottosuccessione $\{G_{k_j}^{k_j}(p, q_1, q_2) + \log |\varphi_1(p)|\}_{j \in \mathbb{N}}$ convergente uniformemente su Δ_1 ad una funzione armonica $G(p, q_1, q_2) + \log |\varphi_1(p)|$. In modo completamente analogo troviamo che esiste una sottosuccessione $\{G_{k_l}^{k_l}(p, q_1, q_2) - \log |\varphi_2(p)|\}_{l \in \mathbb{N}}$ convergente uniformemente su Δ_2 ad una funzione armonica $G(p, q_1, q_2) - \log |\varphi_2(p)|$. Dunque $G(p, q_1, q_2)$ è ben definita per unicità del limite ed è una funzione di Green bipolare per R con poli in q_1 e q_2 . \square

Teorema 2.20. *Sia R una superficie di Riemann e supponiamo che esista una funzione olomorfa $F: R \rightarrow \mathbb{C}$ limitata e non costante. Allora R ammette una funzione di Green.*

Dimostrazione. Sia $q \in R$ e sia $C > 0$ tale che $|F(p)| < C$ per ogni $p \in R$. Allora la funzione

$$\varphi: R \rightarrow \mathbb{C}, p \mapsto \varphi(p) = \frac{F(p) - F(q)}{C}$$

è olomorfa, $\varphi(q) = 0$ e $|\varphi(p)| < 1$ per ogni $p \in R$. Allora, per ogni $u \in \mathcal{P}_q$, la funzione $u(p) + \log |\varphi(p)|$ è subarmonica su $R \setminus \{q\}$ e $u(p) + \log |\varphi(p)| < 0$ per ogni $p \notin \text{supp } u$, da cui, per il Teorema 2.8, $u(p) + \log |\varphi(p)| < 0$ per ogni $p \in R \setminus \{q\}$, ovvero $u(p) < -\log |\varphi(p)|$ per ogni $p \in R \setminus \{q\}$. Poiché questo vale per ogni $u \in \mathcal{P}_q$, allora $\sup_{u \in \mathcal{P}_q} u(p)$ non è identicamente $+\infty$, dunque esiste una funzione di Green per R . \square

Teorema 2.21. *Sia R una superficie di Riemann semplicemente connessa e sia $G(p, q_1, q_2)$ una funzione di Green bipolare per R con poli in $q_1, q_2 \in R$, $q_1 \neq q_2$. Allora esiste una funzione meromorfa $F: R \rightarrow \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tale che*

$$|F(p)| = e^{-G(p, q_1, q_2)} \quad \text{per ogni } p \in R. \quad (2.8)$$

Dimostrazione. Seguiamo la tecnica dimostrativa presentata nel Teorema 2.15.

Sia $\mathcal{A} = \{(\Delta_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ un atlante di R . Per il Teorema 2.6, possiamo supporre che ogni carta $(\Delta_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ sia un disco coordinato. Essendo R di Hausdorff, possiamo supporre che non vi siano dischi coordinati contenenti sia q_1 che q_2 .

Sia quindi $(\Delta_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ e supponiamo dapprima che $q_1, q_2 \notin \Delta_\alpha$, allora, per definizione di funzione di Green bipolare, la funzione $G(p) = G(p, q_1, q_2)$ è armonica in Δ_α , ovvero $G \circ \varphi_\alpha^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ è armonica. Ricordando il Teorema 2.1, sappiamo che esiste una funzione olomorfa $g_\alpha: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $G \circ \varphi_\alpha^{-1} = \operatorname{Re}(g_\alpha)$. Definiamo quindi la funzione olomorfa

$$H_\alpha: \Delta_\alpha \rightarrow \mathbb{C}, p \mapsto H_\alpha(p) = g_\alpha \circ \varphi_\alpha(p).$$

Abbiamo che $\operatorname{Re}(H_\alpha) = \operatorname{Re}(g_\alpha \circ \varphi_\alpha) = \operatorname{Re}(g_\alpha) \circ \varphi_\alpha = G \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha = G$. Allora la funzione

$$F_\alpha: \Delta_\alpha \rightarrow \mathbb{C}, p \mapsto F_\alpha(p) = e^{-H_\alpha(p)}$$

verifica

$$|F_\alpha(p)| = |e^{-\operatorname{Re}(H_\alpha(p))} e^{-i \operatorname{Im}(H_\alpha(p))}| = e^{-G(p, q_1, q_2)}.$$

Dal Teorema 2.1, $\operatorname{Im}(H_\alpha)$ è unica a meno di una costante additiva reale, dunque F_α è unica a meno di una moltiplicazione per $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Sia ora $(\Delta_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ tale che $q_1 \in \Delta_\alpha$ (per cui, per costruzione dell'atlante, $q_2 \notin \Delta_\alpha$). Per definizione di funzione di Green bipolare, la funzione

$$f: \Delta_\alpha \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto f(p) = G(p, q_1, q_2) + \log |\varphi_\alpha(p) - \varphi_\alpha(q_1)|$$

è armonica su Δ_α . Ripercorrendo il procedimento di sopra, esiste una funzione olomorfa $H_\alpha: \Delta_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re}(H_\alpha(p)) = f(p)$. Allora la funzione

$$F_\alpha: \Delta_\alpha \rightarrow \mathbb{C}, p \mapsto F_\alpha(p) = (\varphi_\alpha(p) - \varphi_\alpha(q_1)) e^{-H_\alpha(p)}$$

verifica

$$\begin{aligned} |F_\alpha(p)| &= |\varphi_\alpha(p) - \varphi_\alpha(q_1)| e^{-\operatorname{Re}(H_\alpha(p))} = |\varphi_\alpha(p) - \varphi_\alpha(q_1)| e^{-G(p, q_1, q_2) - \log |\varphi_\alpha(p) - \varphi_\alpha(q_1)|} = \\ &= e^{-G(p, q_1, q_2)}. \end{aligned}$$

Di nuovo, F_α è unica a meno di una moltiplicazione per $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

In maniera del tutto analoga, dato $(\Delta_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ tale che $q_2 \in \Delta_\alpha$ (per cui $q_1 \notin \Delta_\alpha$), per definizione di funzione di Green bipolare, la funzione

$$f: \Delta_\alpha \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto f(p) = G(p, q_1, q_2) - \log |\varphi_\alpha(p) - \varphi_\alpha(q_2)|$$

è armonica su Δ_α ed esiste una funzione olomorfa $H_\alpha: \Delta_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re}(H_\alpha(p)) = f(p)$. Allora la funzione

$$F_\alpha: \Delta_\alpha \rightarrow \mathbb{C}, p \mapsto F_\alpha(p) = (\varphi_\alpha(p) - \varphi_\alpha(q_2))^{-1} e^{-H_\alpha(p)}$$

verifica

$$\begin{aligned} |F_\alpha(p)| &= |\varphi_\alpha(p) - \varphi_\alpha(q_2)|^{-1} e^{-\operatorname{Re}(H_\alpha(p))} = |\varphi_\alpha(p) - \varphi_\alpha(q_2)|^{-1} e^{-G(p, q_1, q_2) + \log |\varphi_\alpha(p) - \varphi_\alpha(q_2)|} = \\ &= e^{-G(p, q_1, q_2)}. \end{aligned}$$

Di nuovo, F_α è unica a meno di una moltiplicazione per $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

A questo punto abbiamo una collezione di funzioni $\{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$ uniche a meno di una moltiplicazione per $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Segue che se $\Delta_\alpha \cap \Delta_\beta \neq \emptyset$, allora $|F_\alpha| = |F_\beta|$ su

$\Delta_\alpha \cap \Delta_\beta$, per cui $F_\alpha F_\beta^{-1} = e^{i\theta}$ su $\Delta_\alpha \cap \Delta_\beta$ per un certo $\theta \in \mathbb{R}$. Dunque $F_\beta = e^{-i\theta} F_\alpha$ è il prolungamento analitico di F_α da $\Delta_\alpha \cap \Delta_\beta$ a Δ_β . Segue che F_α può essere estesa analiticamente lungo ogni cammino in R con punto iniziale in Δ_α . Per il Teorema A.23, F_α ammette un prolungamento analitico F in R e per costruzione $|F(p)| = e^{-G(p,q_1,q_2)}$ per ogni $p \in R$.

Notiamo che F ha uno zero semplice in q_1 e un polo semplice in q_2 . \square

Teorema 2.22 (Uniformizzazione - seconda parte). *Sia R una superficie di Riemann semplicemente connessa che non ammette funzione di Green. Allora o esiste una mappa conforme da R nel piano complesso \mathbb{C} , oppure esiste una mappa conforme da R nella sfera di Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.*

Dimostrazione. Siano $q_1, q_2 \in R$, $q_1 \neq q_2$. Per il Teorema 2.19, esiste $G(p, q_1, q_2)$ funzione di Green bipolare per R . Per il Teorema 2.21, esiste una funzione meromorfa $F: R \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ tale che $|F(p)| = e^{-G(p,q_1,q_2)}$ per ogni $p \in R$.

Mostriamo ora che F è iniettiva. Sia $q_0 \in R \setminus \{q_1, q_2\}$ e sia $H: R \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ meromorfa tale che $|H(p)| = e^{-G(p,q_0,q_2)}$ per ogni $p \in R$. Siano $(\Delta_1, \varphi_1), (\Delta_2, \varphi_2), (\Delta_3, \varphi_3)$ dischi coordinati tali che $\varphi_i(q_i) = 0$ e $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Per definizione, $G(p, q_1, q_2)$ è limitata su $R \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$ e $G(p, q_0, q_2)$ è limitata su $R \setminus (\Delta_0 \cup \Delta_2)$, inoltre $G(q_1, q_1, q_2) = +\infty$, $G(q_2, q_1, q_2) = -\infty$, $G(q_0, q_0, q_2) = +\infty$, $G(q_2, q_0, q_2) = -\infty$. Otteniamo quindi che F è limitata su $R \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$, H è limitata su $R \setminus (\Delta_0 \cup \Delta_2)$, inoltre $F(q_1) = H(q_2) = 0$ e $F(q_2) = H(q_1) = \infty$. Dal momento che tali zeri e poli sono semplici, la funzione

$$\varphi: R \rightarrow \mathbb{C}, p \mapsto \varphi(p) = \frac{F(p) - F(q_0)}{H(p)}$$

è ben definita, olomorfa e limitata, dunque, per il Teorema 2.20, φ è costante. Dal fatto che $\varphi(q_1) = -\frac{F(q_0)}{H(q_1)} \neq 0$ deduciamo che φ non è costantemente nulla, dunque $F(p) = F(q_0)$ se e solo se $p = q_0$ e, per l'arbitrarietà di q_0 , questo prova l'iniettività di F .

Abbiamo quindi che $F(R) \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ è aperto, semplicemente connesso e $F: R \rightarrow F(R)$ è una mappa conforme. Se $\overline{\mathbb{C}} \setminus F(R)$ contenesse più di un punto, esisterebbero $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F(R)$, $z_1 \neq z_2$, allora considerando la mappa conforme

$$\gamma: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z-z_1} & z \in \mathbb{C} \setminus z_1 \\ \infty & z = z_1 \\ 0 & z = \infty \end{cases}$$

otterremmo che $\emptyset \neq (\gamma \circ F)(R) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{z_2-z_1}\} \subsetneq \mathbb{C}$ e $(\gamma \circ F)(R)$ è semplicemente connesso, dunque, per il Teorema 2.5, esisterebbe una mappa conforme $\delta: (\gamma \circ F)(R) \rightarrow \mathbb{D}$ e quindi $\delta \circ \gamma \circ F$ mappa conformemente R nel disco unitario aperto. In particolare $\delta \circ \gamma \circ F: R \rightarrow \mathbb{C}$ sarebbe una funzione olomorfa, limitata e non costante, dunque per il Teorema 2.20, R dovrebbe ammettere una funzione di Green, ma questo cade in contraddizione con l'ipotesi. Ne deduciamo che $\overline{\mathbb{C}} \setminus F(R)$ contiene al più un punto.

Se $\overline{\mathbb{C}} \setminus F(R)$ contiene esattamente un punto, diciamo z_1 , allora $\gamma \circ F$ è una mappa conforme da R al piano complesso \mathbb{C} . Se invece $\overline{\mathbb{C}} \setminus F(R) = \emptyset$, ovvero $F(R) = \overline{\mathbb{C}}$, allora F è mappa conforme da R alla sfera di Riemann $\overline{\mathbb{C}}$. \square

Definizione. *Sia R una superficie di Riemann. Diciamo che R è ellittica se è compatta. Diciamo che R è parabolica se non ammette una funzione di Green e non è compatta.*

Osservazione 2.17. *Per il Teorema 2.22, una superficie di Riemann ellittica e semplicemente connessa è conforme alla sfera di Riemann, mentre una superficie di Riemann parabolica e semplicemente connessa è conforme al piano complesso.*

Osservazione 2.18. *Sia R una superficie di Riemann non compatta. Dal Teorema 2.17, abbiamo che R è parabolica se e solo se tutte le funzioni in R subarmoniche e negative sono costanti. Questo comprova il Teorema 1.9.*

Appendice A

Prerequisiti

A.1 Notazioni

- \mathbb{R}^n indica lo spazio euclideo n-dimensionale, $n \geq 2$.
- $x = (x_1, \dots, x_n)$ indica un punto generico di \mathbb{R}^n .
- $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ indica la norma euclidea di $x \in \mathbb{R}^n$.
- Dati $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, denotiamo con $a \cdot b = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ il loro prodotto scalare.
- $e_i = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0)$ indica l'elemento i-esimo della base canonica di \mathbb{R}^n .
- Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, denotiamo $\text{Int } \Omega$ l'interno di Ω , con $\partial\Omega$ il bordo di Ω e con $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ la chiusura di Ω .
- Dati $\Omega', \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, diciamo che Ω' è *compattamente contenuto* in Ω e scriviamo $\Omega' \Subset \Omega$ se $\Omega' \subseteq \bar{\Omega} \subseteq \text{Int } \Omega$ e $\bar{\Omega}'$ è compatto.
- $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < r\}$ indica la palla in \mathbb{R}^n di centro x e raggio $r > 0$.
- ω_n indica il volume della palla unitaria in \mathbb{R}^n .
- Data una funzione $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, scriviamo

$$u(x) = u(x_1, \dots, x_n) \quad \forall x \in \Omega.$$

Se u è una funzione continua, denotiamo con

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}}$$

il suo supporto.

- Data una funzione $\mathbf{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, scriviamo

$$\mathbf{u}(x) = (u^1(x), \dots, u^m(x)) \quad \forall x \in \Omega$$

dove \mathbf{u}^k è la k-esima componente di \mathbf{u} , $k = 1, \dots, m$.

- Se Σ è una superficie liscia $(n - 1)$ -dimensionale in \mathbb{R}^n , scriviamo

$$\int_{\Sigma} f dS$$

per indicare l'integrale di f su Σ rispetto alla misura di superficie $(n - 1)$ -dimensionale.

- Data una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, per ogni $E \subseteq \Omega$ con misura di Lebesgue $|E| > 0$, indichiamo con

$$\int_E f d\mu = \frac{1}{|E|} \int_E f d\mu$$

la media di f su E .

- Diciamo che una funzione $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, è *Lipschitziana* se esiste una costante $C > 0$ tale che

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|$$

per ogni $x, y \in \Omega$.

- Data una funzione derivabile $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, indichiamo con

$$Du = (D_1u, \dots, D_nu) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$$

il suo *gradiente*.

- Dati un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e un campo vettoriale $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, denotiamo con

$$\operatorname{div} f = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right)$$

la *divergenza* di f .

- Data una funzione derivabile $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $u(x) = (u_1(x), \dots, u_m(x))$ e u_i è una funzione derivabile per ogni $i = 1 \dots, m$, indichiamo con

$$Du = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

la sua *matrice jacobiana*.

- Data una funzione $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ che ammetta derivate parziali almeno fino al secondo ordine, indichiamo con

$$D^2u = \begin{pmatrix} u_{x_1x_1} & \cdots & u_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{x_nx_1} & \cdots & u_{x_nx_n} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

la sua *matrice hessiana*.

- Dato un multi-indice $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta_i \in \mathbb{N}$, di ordine $|\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$, indichiamo con

$$D^\beta u = \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}$$

la corrispondente derivata parziale mista di u di ordine $|\beta|$ (laddove essa sia definita).

- Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, indichiamo con
 - $\mathcal{C}(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \mid u \text{ è continua}\}$;
 - $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) = \{u \in \mathcal{C}(\Omega) \mid \forall \Omega' \subseteq \Omega \text{ limitato } u \text{ è uniformemente continua in } \Omega'\}$;
 - $\mathcal{C}^k(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \mid u \text{ è differenziabile } k \text{ volte con derivate continue}\}$;
 - $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) = \{u \in \mathcal{C}^k(\Omega) \mid \forall \Omega' \subseteq \Omega \text{ limitato } D^\alpha u \text{ è uniformemente continua in } \Omega' \mid \forall |\alpha| \leq k\}$;
 - $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega)$;
 - $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$;
 - $\mathcal{C}_c(\Omega)$, $\mathcal{C}_c^k(\Omega)$, etc. indicano funzioni in $\mathcal{C}(\Omega)$, $\mathcal{C}^k(\Omega)$, etc. a *supporto compatto* in Ω ;
 - $L^p(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ è Lebesgue-misurabile, con } \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$,
ove $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ ($1 \leq p < +\infty$);
 - $L^\infty(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ è Lebesgue-misurabile, con } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty\}$,
ove $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup } |u| = \inf\{\mu \in \mathbb{R} \mid |\{u > \mu\}| = 0\}$;
 - $L^p_{\text{loc}}(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \in L^p(\Omega') \text{ per ogni } \Omega' \Subset \Omega\}$.

A.2 Richiami

Teorema A.1 (Multinomiale). *Per ogni $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 0$, vale che*

$$(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \mathbf{x}^\alpha,$$

ove $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$ e $\mathbf{x}! = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$.

Teorema A.2 (Taylor in più variabili). *Data una funzione $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^{k+1}(\Omega)$, con Ω aperto convesso, se $\mathbf{a}, \mathbf{h} \in \Omega$, allora*

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(\mathbf{a})}{\alpha!} \mathbf{h}^\alpha + R_{\mathbf{a},k}(\mathbf{h})$$

ove il resto in forma di Lagrange è dato da

$$R_{\mathbf{a},k}(\mathbf{h}) = \sum_{|\alpha|=k+1} D^\alpha f(\mathbf{a} + c\mathbf{h}) \frac{\mathbf{h}^\alpha}{\alpha!} \quad \exists c \in (0, 1).$$

Teorema A.3 (Regola della catena). *Dati $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ aperti e date due funzioni $f: U \rightarrow V$, $g: V \rightarrow \mathbb{R}^k$, se f è differenziabile in x_0 e g è differenziabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ è differenziabile in x_0 , con matrice jacobiana*

$$D(g \circ f)(x_0) = D(g)(f(x_0)) D(f)(x_0).$$

Teorema A.4 (Lemma di Fatou). *Data una successione di funzioni misurabili non negative $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, vale che*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx.$$

Teorema A.5 (Convergenza monotona). *Data una successione di funzioni misurabili non negative $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, vale che*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx.$$

Teorema A.6 (Convergenza dominata). *Data una successione di funzioni integrabili $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $f_k \rightarrow f$ q.o., se esiste una funzione integrabile g tale che $|f_k| \leq g$ q.o., allora vale che*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

Teorema A.7 (Continuità e derivabilità degli integrali dipendenti da parametro). *Siano dati uno spazio con misura (X, \mathcal{M}, μ) e una funzione $f: X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che la funzione $x \mapsto f(x, t)$ sia integrabile per ogni $t \in [a, b]$. Sia $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x)$ definita per $t \in [a, b]$.*

- *Se la funzione $t \mapsto f(x, t)$ è continua in $t_0 \in [a, b]$ per q.o. $x \in X$ ed esiste $g \in L^1(\mu)$ tale che $|f(x, t)| \leq g(x)$ per ogni $t \in [a, b]$ e per q.o. $x \in X$, allora F è continua in t_0 .*
- *Se f è derivabile rispetto a t ed esiste $g \in L^1(\mu)$ tale che $|\partial_t f(x, t)| \leq g(x)$ per ogni $t \in [a, b]$ e per q.o. $x \in X$, allora F è derivabile e $F'(t) = \int_X \partial_t f(x, t) d\mu(x)$.*

Teorema A.8 (Differenziazione di Lebesgue). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrabile. Allora per quasi ogni $y \in \Omega$ vale che*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(y)} f(x) dx = f(y).$$

Definizione. *Dati $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, diciamo che il bordo $\partial\Omega$ è \mathcal{C}^k (o che Ω è di classe \mathcal{C}^k) se per ogni punto $x^0 \in \partial\Omega$ esistono $r > 0$ e una funzione $\gamma: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^{n-1})$, tali che, a meno di rinominare e riorientare gli assi coordinati, si abbia*

$$\Omega \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) \mid x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Analogamente, diciamo che $\partial\Omega$ è \mathcal{C}^∞ (o che Ω è di classe \mathcal{C}^∞) se $\partial\Omega$ è \mathcal{C}^k per ogni $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e che $\partial\Omega$ è analitico se la mappa γ è analitica.

Osservazione A.1. Se $\partial\Omega$ è \mathcal{C}^1 allora su $\partial\Omega$ è definito il campo vettoriale normale unitario esterno

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu^1, \dots, \nu^n)$$

e in ogni punto $x^0 \in \partial\Omega$ la normale unitaria esterna $\boldsymbol{\nu}(x^0) = (\nu^1(x^0), \dots, \nu^n(x^0))$.

Data $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ definiamo

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \cdot Du$$

la derivata normale esterna di u .

Teorema A.9 (Gauss-Green). Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con bordo \mathcal{C}^1 e $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, allora

$$\int_{\Omega} u_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u \nu^i dS \quad (i = 1, \dots, n). \quad (\text{A.1})$$

Teorema A.10 (Divergenza). Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con bordo \mathcal{C}^1 e $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ campo vettoriale, allora

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} dS. \quad (\text{A.2})$$

Dimostrazione. Segue da (A.1) applicato ad ogni componente di $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$. \square

Teorema A.11 (Integrazione per parti). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con bordo \mathcal{C}^1 , inoltre siano $u, v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, allora

$$\int_{\Omega} (u_{x_i} v + u v_{x_i}) dx = \int_{\partial\Omega} u v \nu^i dS \quad (i = 1, \dots, n). \quad (\text{A.3})$$

Dimostrazione. Segue da (A.1) applicato ad uv . \square

Teorema A.12 (Formule di Green). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con bordo \mathcal{C}^1 , inoltre siano $u, v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Allora

i. se $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, si ha che $\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} dS$,

ii. se $v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, si ha che $\int_{\Omega} Dv \cdot Du dx = - \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} u dS$,

iii. se $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, si ha che $\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}) dS$.

Dimostrazione.

i. In (A.3) sostituiamo u_{x_i} a u e 1 a v per ottenere $\int_{\Omega} u_{x_i x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u_{x_i} \nu^i dS$ poi sommiamo su $i = 1, \dots, n$.

ii. In (A.3) sostituiamo v_{x_i} a v .

iii. Nella precedente formula scambiamo i ruoli di u e v e sottraiamo. \square

Osservazione A.2. Nel Teorema A.12 è possibile indebolire le ipotesi $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, richiedendo $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$.

Teorema A.13 (Coordinate polari). *Data $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua e integrabile, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vale che*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_r(x_0)} f \, dS \right) dr.$$

Definizione. *Date $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ misurabili, denotiamo con $f * g$ la convoluzione di f con g , definita come*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) \, dy$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ per cui $y \mapsto f(x - y)g(y)$ risulti integrabile.

Teorema A.14. *Assumendo che gli integrali coinvolti esistano, abbiamo che*

- $f * g = g * f$,
- $\text{supp}(f * g) \subseteq \overline{\{z + y \mid z \in \text{supp } f, y \in \text{supp } g\}}$.

*Inoltre, se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, allora $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

Definizione. *Definiamo il mollificatore standard $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ come*

$$\eta(x) = \begin{cases} C e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

ove C è tale che $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$. Notiamo che $\eta(x) \geq 0$, $\eta(x) = \eta(-x)$ e che η è una funzione radiale. Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo inoltre

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (\text{A.5})$$

Risulta che $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e inoltre $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon \, dx = 1$ con $\text{supp}(\eta_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(0)$.

Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione localmente integrabile, ovvero $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, definiamo la sua mollificazione in $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ come

$$f^\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon * f(x) = \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x - y)f(y) \, dy = \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y)f(x - y) \, dy.$$

Teorema A.15 (Proprietà dei mollificatori). *Valgono le seguenti proprietà*

- i. $f^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$;
- ii. $f^\varepsilon \rightarrow f$ q.o. per $\varepsilon \rightarrow 0$;
- iii. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_y(R)} |f^\varepsilon(x) - f(x)| \, dx = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $R > 0$;
- iv. $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_y(R)} |f^\varepsilon(x) - f(x)| \, dS(x) = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ e per quasi ogni $R > 0$;
- v. se $f \in C(\Omega)$, allora $f^\varepsilon \rightarrow f$ uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di Ω ;
- vi. se $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, allora $f^\varepsilon \rightarrow f$ in $L^p_{loc}(\Omega)$.

Teorema A.16 (Lemma di Urysohn). *Siano $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto e $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto contenente K . Allora esiste una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che*

- $0 \leq f(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,
- $f(x) = 1$ per ogni $x \in K$,
- $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{U\}$.

Definizione. *Una funzione $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è differenziabile in senso complesso in $z \in \mathbb{C}$ se esiste il limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z)$, $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. f è detta olomorfa se è differenziabile in senso complesso in z per ogni $z \in \Omega$.*

Teorema A.17. *Sia $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ olomorfa. Allora valgono le equazioni di Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Viceversa se $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sono differenziabili e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann, allora $f = u + iv: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa.*

Teorema A.18. *$f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è analitica in Ω allora iv è olomorfa (e viceversa, cfr. Teorema 2.2).*

Teorema A.19. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia data una funzione olomorfa $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Allora $|f|$ ammette massimo in Ω se e solo se f è costante.*

Definizione. *Siano U, V aperti di \mathbb{C} . Una funzione olomorfa biiettiva $f: U \rightarrow V$ è detta conforme.*

Teorema A.20. *Siano U, V aperti di \mathbb{C} . Sia $f: U \rightarrow V$ una funzione olomorfa biiettiva. Allora $f^{-1}: V \rightarrow U$ è olomorfa.*

Definizione. *Dato $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, definiamo una 1-forma differenziale ω su Ω come una funzione $\omega: \Omega \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, ove $\text{Lin}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ sono le funzioni lineari da \mathbb{C} a \mathbb{C} . In coordinate possiamo scriverla come $\omega(x + iy) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$. Definiamo il differenziale della una 1-forma come $d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$. Diciamo che ω è chiusa se $d\omega = 0$ e che è esatta se esiste una funzione f tale che $\omega = df$.*

Teorema A.21. *Ogni 1-forma esatta è chiusa e ogni 1-forma chiusa su un dominio Ω semplicemente connesso è esatta.*

Definizione. *Dato uno spazio topologico R , diciamo che una funzione $f: [0, 1] \rightarrow R$ è un cammino in R con punto iniziale x_0 e punto finale x_1 se f è continua, $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$. Diciamo che due cammini $f, g: [0, 1] \rightarrow R$ con punto iniziale x_0 e punto finale x_1 sono omotopi se esiste una funzione continua $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow R$, detta omotopia tra f e g , tale che $H(t, 0) = f(t)$, $H(t, 1) = g(t)$ per ogni $t \in [0, 1]$ e $H(0, s) = x_0$, $H(1, s) = x_1$ per ogni $s \in [0, 1]$. Diciamo che R è connesso per archi se per ogni $x_0, x_1 \in R$, esiste un cammino in R da x_0 a x_1 . Diciamo che R è semplicemente connesso se è connesso per archi e per ogni f, g cammini in R tali che $f(0) = g(0)$ e $f(1) = g(1)$ si ha che f e g sono omotopi.*

Teorema A.22. *Dati uno spazio metrico compatto (X, d) e un suo ricoprimento aperto, esiste un numero $\delta > 0$, detto numero di Lebesgue, tale che ogni sottoinsieme di X di diametro minore di δ è contenuto in uno degli elementi del ricoprimento.*

Teorema A.23 (Monodromia). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ semplicemente connesso. Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analitica in z_0 tale che sia possibile estenderla analiticamente lungo ogni cammino con punto iniziale z_0 . Allora, se γ_1 e γ_2 sono due cammini da z_0 a z_1 , il prolungamento analitico di f lungo γ_1 e lungo γ_2 ha lo stesso valore in z_1 .*

Definizione. *Sia $\gamma \subset \mathbb{C}$. Diciamo che γ è una curva di Jordan o curva semplice chiusa se è l'immagine di un cerchio, tramite una mappa continua e iniettiva, nel piano.*

Teorema A.24. *Sia $\gamma \subset \mathbb{C}$ una curva di Jordan. Allora $\mathbb{C} \setminus \gamma$ consta di esattamente due componenti aperte connesse, una limitata e uno non, di cui γ è il bordo.*

Teorema A.25. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ connesso per archi è semplicemente connesso se e solo se $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ è connesso.

Dimostrazione. Se Ω è semplicemente connesso, allora, per il Teorema A.24, il bordo $\partial\Omega$ è una curva di Jordan che in $\overline{\mathbb{C}}$ diventa una curva chiusa che divide $\overline{\mathbb{C}}$ in due componenti connesse: una è data $\text{Int } \Omega$, l'altra da $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$ (cfr. [11], VIII, 8).

D'altra parte, se Ω non è semplicemente connesso, esiste $\gamma \subset \Omega$ curva di Jordan non omotopa ad un punto, che, per il Teorema A.24, divide $\overline{\mathbb{C}}$ in due componenti aperte connesse A_1, A_2 tali che $\infty \notin A_1, \infty \in A_2$. Poiché γ non è omotopa ad un punto $A_1 \not\subseteq \Omega$ per cui $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega = [(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega) \cap A_1] \cup [(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega) \cap A_2]$ è unione di due aperti disgiunti non vuoti, ovvero non è connesso. \square

Teorema A.26. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ semplicemente connesso e tale che $1 \in \Omega, 0 \notin \Omega$. Allora in Ω è definita una determinazione del logaritmo $F(z) = \log_\Omega z$ tale che F è olomorfa in Ω e $e^{F(z)} = z$ per ogni $z \in \Omega$.*

Dimostrazione. Poiché $0 \notin \Omega$, la funzione $f(z) = \frac{1}{z}$ è olomorfa in Ω . Essendo Ω semplicemente connesso, la definizione $\log_\Omega(z) = F(z) = \int_\gamma f(w) dw$, con γ cammino in Ω da 1 a z , è ben posta. Si riesce allora a mostrare che F è olomorfa e $F'(z) = \frac{1}{z}$ per ogni $z \in \Omega$. Infine $\frac{d}{dz}(ze^{-F(z)}) = (1 - zF'(z))e^{-F(z)} = 0$, per cui, essendo Ω connesso, $ze^{-F(z)}$ è costante pari a 1, essendo $F(1) = 0$ (cfr. [12], 3, 6). \square

Definizione. *Data una funzione $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa non identicamente nulla, diciamo che $z_0 \in \Omega$ è uno zero di f se $f(z_0) = 0$. Definiamo la sua molteplicità come zero di f $\text{mult}_{z_0} f = \max\{n \in \mathbb{N} \mid f^{(k)}(z_0) = 0 \forall k \in \mathbb{N} \cap [0, n]\}$. Se $\text{mult}_{z_0} f = 1$ diciamo che z_0 è zero semplice di f , se $\text{mult}_{z_0} f = n > 1$, diciamo che z_0 è zero multiplo di f con molteplicità n .*

Teorema A.27. *Gli zeri di una funzione olomorfa formano un insieme discreto.*

Definizione. *Data una funzione $f: (B_r(z_0) \setminus \{z_0\}) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, diciamo che z_0 è*

- *singularità rimovibile per f se f può essere estesa a $\bar{f}: B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, cioè $f(z) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i (z - z_0)^i$;*

- polo per f di ordine $k \in \mathbb{N}$ se esiste $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $(z - z_0)^k f(z)$ ha una singolarità rimovibile in z_0 , mentre $(z - z_0)^j f(z)$ non ha una singolarità rimovibile in z_0 per ogni $j \in \mathbb{N} \cap (0, k)$, per cui $f(z) = \sum_{i \geq -k} a_i (z - z_0)^i$;
- singolarità essenziale per f se $f(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i (z - z_0)^i$ e per ogni $j > 0$ esiste $k > j$ tale che $a_{-k} \neq 0$.

Teorema A.28 (Singolarità eliminabile). *Dati $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $z_0 \in \Omega$ e una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa su $\Omega \setminus \{z_0\}$, se esiste $r > 0$ tale che f risulta limitata in $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, allora z_0 è una singolarità eliminabile per f , ovvero f può essere estesa ad una funzione olomorfa su Ω .*

Teorema A.29 (Rouché). *Siano $f, h: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfe, $\Omega' \Subset \Omega$ aperto limitato e $\gamma = \partial\Omega'$. Se $|f(z)| > |h(z)|$ per ogni $z \in \gamma$, allora f e $f + h$ hanno lo stesso numero di zeri in Ω' , contati con le loro molteplicità.*

Definizione. *Uno spazio topologico è detto normale se per ogni coppia di insiemi chiusi disgiunti (C_1, C_2) esiste una coppia di aperti disgiunti (A_1, A_2) tali che $C_1 \subset A_1$ e $C_2 \subset A_2$.*

Osservazione A.3. *Uno spazio normale è di Hausdorff.*

Il Teorema A.16 può essere generalizzato nel seguente

Teorema A.30 (Urysohn generalizzato). *Sia R uno spazio topologico normale e siano C_1, C_2 chiusi disgiunti di R , allora esiste una funzione $f: R \rightarrow [0, 1]$ continua tale che $f = 0$ su C_1 e $f = 1$ su C_2 .*

Teorema A.31 (Estensione di Tietze). *Sia R uno spazio topologico normale e sia $C \subset R$ un sottospazio chiuso di R . Allora ogni funzione continua $f: C \rightarrow [a, b]$ è prolungabile ad una funzione continua $g: R \rightarrow [a, b]$ ($g(x) = f(x)$ per ogni $x \in C$).*

Dimostrazione. Sostituendo f con $\frac{f-a}{b-a}$, possiamo supporre $[a, b] = [0, 1]$. Vogliamo mostrare che esiste una successione $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni continue su R tale che $0 \leq g_n \leq \frac{2^{n-1}}{3^n}$ su R e $0 \leq f - \sum_{i=1}^n g_i \leq (\frac{2}{3})^n$ su C . Facciamolo per induzione. Siano $C_1 = f^{-1}([0, \frac{1}{3}])$ e $C_2 = f^{-1}([\frac{2}{3}, 1])$. C_1 e C_2 sono due sottoinsiemi chiusi in C , dunque, essendo C chiuso in R , sono chiusi in R . Per il Teorema A.30, esiste una funzione continua $g_1: R \rightarrow [0, \frac{1}{3}]$ tale che $g_1 = 0$ su C_1 e $g_1 = \frac{1}{3}$ su C_2 , dunque $f - g_1 \leq \frac{2}{3}$ su C . Ora, supponendo di aver costruito g_1, \dots, g_{n-1} , in maniera analoga definiamo $g_n: R \rightarrow [0, \frac{2^{n-1}}{3^n}]$ tale che $g_n = 0$ sull'insieme in cui $f - \sum_{i=1}^{n-1} g_i \leq \frac{2^{n-1}}{3^n}$ e $g_n = \frac{2^{n-1}}{3^n}$ sull'insieme in cui $f - \sum_{i=1}^{n-1} g_i \geq (\frac{2}{3})^n$. Ora definiamo $F = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$. Poiché per costruzione $\|g_n\|_{\infty} \leq \frac{2^{n-1}}{3^n}$, la successione delle somme parziali converge uniformemente, dunque F , limite uniforme di continue, è continua. Inoltre su C vale che $0 \leq f - F \leq (\frac{2}{3})^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, per cui concludiamo che $F = f$ su C . \square

Bibliografia

- [1] Alex Harnack. *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials und der eindeutigen Potentialfunktion in der Ebene*. ger. Leipzig: B. G. Teubner, 1887.
- [2] Lars Valerian Ahlfors. «Development of the Theory of Conformal Mapping and Riemann Surfaces Through a Century». In: *Contributions to the Theory of Riemann Surfaces*. A cura di Lars Valerian Ahlfors et al. Princeton University Press, 1953. ISBN: 9781400828371.
- [3] Lars Valerian Ahlfors. *Conformal invariants: topics in geometric, function theory*. eng. New York: McGraw-Hill, 1973. ISBN: 0070006598.
- [4] William Abikoff. «The Uniformization Theorem». In: *The American Mathematical Monthly* 88.8 (1981), pp. 574–592. ISSN: 00029890, 19300972. URL: <http://www.jstor.org/stable/2320507>.
- [5] David Gilbarg e Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. eng. 2. ed. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin: Springer-Verlag, 1983. ISBN: 038713025X.
- [6] Sheldon Axler, Paul Bourdon e Wade Ramey. *Harmonic function theory*. eng. Graduate texts in mathematics. New York: Springer-Verlag, 1992.
- [7] Hershel M. Farkas e Irwin Kra. *Riemann surfaces*. eng. 2. ed. Graduate texts in mathematics. New York: Springer, 1992. ISBN: 0387977031.
- [8] Jeremy Gray. «On the history of the Riemann mapping theorem». In: *Mathematical Reviews* 1295591 (1994). ISSN: 56826661. URL: <https://www.math.stonybrook.edu/~bishop/classes/math401.F09/GrayRMT.pdf>.
- [9] Emmanuele DiBenedetto. *Partial differential equations*. eng. Boston: Birkhauser, 1995. ISBN: 0817637087.
- [10] Gerald B. Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*. eng. 2. ed. Pure and applied mathematics. New York: J. Wiley, 1999. ISBN: 0471317160.
- [11] Theodore W. Gamelin. *Complex analysis*. eng. Undergraduate texts in mathematics. New York: Springer, 2001. ISBN: 0387950931.
- [12] Elias M. Stein e Rami Shakarchi. *Complex analysis*. eng. Princeton lectures in analysis. Princeton Oxford: Princeton university press, 2003. ISBN: 9780691113852.
- [13] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations Second Edition*. eng. Graduate Studies in Mathematics Ser. ; v.19. Providence: American Mathematical Society, 2010. ISBN: 9781470411442.

- [14] Sébastien Picard. *The Uniformisation Theorem*. <https://www.math.mcgill.ca/gantumur/math580f11/downloads/uniformisation.pdf>. 2011.
- [15] Ali Taherinassaj e Yiling Chen. *A Non-Convex Separation Through an Alternative Proof for the Supporting Hyperplane Theorem*. 2023. arXiv: 2303.05423 [math.OC].
- [16] Annalisa Cesaroni. *Perron method for the Dirichlet problem*. <https://www.math.unipd.it/~acesar/perron.pdf>.
- [17] Annalisa Cesaroni. *Removable singularities of harmonic functions*. <https://www.math.unipd.it/~acesar/removable.pdf>.
- [18] Roberto Monti. *Equazioni differenziali. Introduzione alle funzioni armoniche*. <https://www.math.unipd.it/~monti/ED2008/Appunti.pdf>.
- [19] Mihalis Papadimitrakis. *Notes on Classical Potential Theory*. https://fourier.math.uoc.gr/~papadim/potential_theory.pdf.