

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA



DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA  
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi

RIASSICURAZIONE E INVESTIMENTO  
OTTIMI IN UN MODELLO PER IL RISCHIO  
ASSICURATIVO

Relatore  
Prof. Wolfgang Runggaldier

Laureanda  
Cristina Piscitello

Anno Accademico 2011-2012



*... Alla mia Famiglia,  
ai miei Amici e a Brosutti.*



# Introduzione

Oggetto di questo lavoro è la probabilità di rovina per una compagnia assicurativa considerando il processo aleatorio del rischio assicurativo per un orizzonte temporale finito.

In particolare studieremo l'evoluzione del processo di rischio quando la compagnia ha la possibilità sia di riassicurare parte del rischio che di investire nei mercati finanziari. In questo contesto infatti l'evoluzione del capitale è influenzata sia dall'ammontare delle richieste di risarcimento che arrivano da parte dei clienti che dalle variazioni dei prezzi dei titoli su cui la compagnia sceglie di investire. Dunque la compagnia assicurativa può controllare il processo di rischio attraverso la scelta progressiva di una politica di riassicurazione e investimento, ovvero la scelta di un livello di riassicurazione e della quantità di capitale da investire.

Il controllo di un processo di rischio finalizzato alla minimizzazione della probabilità di rovina è un'area di ricerca molto attuale e molto importante per le scienze attuariali, (si vedano Schmidli, H. (2002) ([10]), Schäl, M. (2004 e 2005) ([8], e [9]), Diasparra & Romera (2010) ([2]), Edoli & Runggaldier (2010) ([3])).

Tuttavia riuscire concretamente a minimizzare la probabilità di fallimento di una compagnia assicurativa è un problema tutt'altro che banale, in contesti generali infatti, è difficile riuscire a determinare una formula esplicita per tale probabilità, così come è molto oneroso implementare un programma che fornisca una soluzione a tale problema.

Per poter superare questi ostacoli, un approccio usato nella teoria della rovina, è quello di determinare delle disuguaglianze per la probabilità di rovina. Tali disuguaglianze vengono poi utilizzate per determinare dei confini superiori alla probabilità di fallimento. Alla luce di ciò, l'obiettivo diventa quello di determinare le politiche che minimizzano tali confini, nella speranza che, così facendo, si determini al tempo stesso la politica che minimizza il rischio. I confini superiori trovati in questa tesi possono però non risultare particolarmente utili come confini per la probabilità di rovina in quanto non è detto che questi siano inferiori di 1.

Il vantaggio che deriva però dal minimizzare tali confini superiori è che, mentre l'effettiva soluzione ottima è difficile da determinare in quanto è una soluzione di tipo closed-loop feedback (ossia si basa, oltre che sull'informazione disponibile, anche sugli effetti che il controllo può avere sull'andamento futuro del processo), la politica che minimizza il nostro confine superiore è una politica miope, ovvero una politica che in ogni istante decisionale minimizza la probabilità di rovina localmente, senza considerare gli effetti che essa può avere sull'evoluzione futura del processo, ed ha dunque una struttura più semplice.

Gli elementi stocastici che influenzano l'evoluzione del processo di rischio sono, pertanto, gli istanti temporali in cui avvengono i cambiamenti (istanti di salto), l'ammontare delle richieste di risarcimento, e le variazioni dei prezzi dei titoli su cui la compagnia investe.

Le richieste di risarcimento, che in seguito chiameremo claim, arrivano in istanti di tempo casuali e anche l'entità dei claim è stocastica, mentre l'evoluzione del prezzo del titolo su cui la compagnia investe è usualmente modellata come un processo a tempo continuo.

Su scale temporali di piccole dimensioni, si può assumere, senza perdita di generalità, che anche l'evoluzione del prezzo del titolo cambi in istanti casuali discreti con l'entità delle variazioni anch'essa casuale.

Questo ci porta a supporre che gli istanti casuali in cui avvengono i cambiamenti (ovvero gli istanti in cui si verifica una richiesta di risarcimento o una variazione del prezzo del titolo) siano determinati da un processo semi-markoviano a tempo continuo.

La tesi è strutturata nel seguente modo. Nel primo capitolo tratteremo il processo del rischio, nel paragrafo 1.1 daremo una breve spiegazione sul perché la compagnia assicurativa debba riassicurare e/o investire in un titolo rischioso, nel paragrafo 1.2 definiremo i processi che guidano l'evoluzione del capitale della compagnia e nel paragrafo 1.3 descriveremo la dinamica del processo di rischio.

Nel capitolo 2, introdurremo la probabilità di rovina. In particolare, dopo aver dato le definizioni e le notazioni di base (paragrafo 2.1), nel paragrafo 2.2 determineremo una formula ricorsiva per la probabilità di rovina. Quest'ultima verrà utilizzata nel capitolo 3 per determinare un confine superiore.

Nel capitolo 4 ci occuperemo dell'ottimizzazione di tale confine. In particolare, nel paragrafo 4.1 introdurremo i problemi di controllo stocastici e i differenti tipi di controllo, mentre nel paragrafo 4.2 descriveremo l'algoritmo che ci permetterà di determinare una politica miope ottima per il problema della minimizzazione del confine superiore alla probabilità di rovina.

Il capitolo 5 sarà interamente dedicato ad un esempio in cui verranno scelte distribuzioni specifiche per i processi che guidano l'evoluzione del capitale.

Sempre seguendo l' impostazione dell' esempio 1, nel capitolo 6 verranno descritti in dettaglio l'algoritmo di policy improvement e il programma utilizzato per simulare l' andamento del capitale della compagnia.

Infine, nel capitolo 7 verranno esposti i risultati numerici, distinguendo nei vari paragrafi tra i diversi scenari possibili. Nel capitolo 8 verranno brevemente riepilogati i risultati ottenuti.

Nelle appendici, saranno invece inseriti i codici delle implementazioni dell' algoritmo di policy improvement, delle funzioni necessarie, e del programma di simulazione delle traiettorie.





# Indice

<b>1</b>	<b>Modello e processo di rischio</b>	<b>1</b>
1.1	Considerazioni generali sul modello . . . . .	1
1.2	Il processo di Rischio . . . . .	5
1.3	Dinamica del processo di rischio . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Formula ricorsiva</b>	<b>13</b>
2.1	Notazioni e definizioni . . . . .	13
2.2	Formula ricorsiva . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Confini superiori</b>	<b>23</b>
<b>4</b>	<b>Ottimizzazione dei confini superiori</b>	<b>37</b>
4.1	Politiche . . . . .	37
4.2	Policy Improvement . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Esempio 1: <math>Z_1 \sim \exp(\lambda)</math></b>	<b>45</b>
5.1	$Y_1 \sim \exp(\mu)$ , $W_1$ discreta . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Implementazione degli algoritmi</b>	<b>55</b>
6.1	Algoritmo di Policy Improvement . . . . .	55
6.2	Algoritmo di Simulazione . . . . .	61
<b>7</b>	<b>Risultati numerici</b>	<b>63</b>
7.1	Considerazioni preliminari . . . . .	63
7.2	$0 < c^* < C(0)$ . . . . .	65
	7.2.1 mercato favorevole . . . . .	65
	7.2.2 mercato sfavorevole . . . . .	70
7.3	$0 < C(0) < c^*$ . . . . .	73
	7.3.1 mercato favorevole . . . . .	74
	7.3.2 mercato sfavorevole . . . . .	78
7.4	$C(0) < 0 < c^*$ . . . . .	80
	7.4.1 mercato favorevole . . . . .	80

<i>INDICE</i>	IX
7.4.2 mercato sfavorevole . . . . .	88
<b>8 Conclusioni</b>	<b>93</b>
<b>Appendici</b>	<b>97</b>
<b>A La funzione <math>f_{mincon}</math></b>	<b>99</b>
<b>B Generazione dati</b>	<b>103</b>
<b>C Le funzioni <math>C(\cdot)</math>, <math>b_{min}</math>, <math>l(\cdot)</math></b>	<b>111</b>
C.1 $C(b)$ . . . . .	111
C.2 $b_{min}(\cdot)$ . . . . .	112
C.3 $l(\cdot)$ . . . . .	113
<b>D Policy improvement</b>	<b>115</b>
<b>E Codice di simulazione del capitale</b>	<b>123</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>129</b>

# Capitolo 1

## Modello a orizzonte finito e il processo di rischio

### 1.1 Considerazioni generali sul modello

Il modello più semplice per l'evoluzione del rischio tiene in considerazione solo le entrate (al netto delle spese) della compagnia assicurativa e la distribuzione nel tempo delle richieste di risarcimento, che spesso chiameremo claim, così in ogni istante temporale il capitale della compagnia è dato dalla differenza tra il capitale cumulato nel passato, e le richieste di risarcimento che pervengono in quell'istante, dunque, in un tale modello, la compagnia assicurativa non può intervenire sul processo per evitare la rovina, in quanto le entrate sono già fissate nei contratti e i claim sono aleatori.

La compagnia ha però bisogno di intervenire sul processo di rischio al fine di controllare la probabilità di rovina, per far ciò, considereremo un modello per il processo del rischio che prende in considerazione sia la possibilità di riassicurarsi che quella di investire nei mercati finanziari.

#### **Perché riassicurare ?**

Un qualsiasi soggetto (individuo, famiglia, impresa, ecc...) che può trovarsi nella situazione di incorrere in certi rischi, può decidere di trasferire ad altri soggetti, detti enti assicuratori, parte dei rischi. Tale trasferimento sarà attuato quando il rischio complessivo che il soggetto dovrebbe sopportare, supera un livello per lui accettabile. La capacità di 'sopportare' dei rischi, dipende da vari fattori tra i quali ha un evidente ruolo, l'ammontare del proprio capitale, (più in generale l'ammontare dei mezzi finanziari) che può essere utilizzato per coprire le possibili perdite. Il trasferimento dei ri-

schi avviene tipicamente mediante la stipulazione di opportuni contratti di assicurazione, il soggetto che si accolla i rischi è dunque un assicuratore.

Anche una compagnia di assicurazione può trovarsi nelle condizioni di ritenere conveniente operare una riduzione della propria esposizione al rischio, cedendo parte dei propri rischi ad un'altro ente assicurativo, cioè 'riassicurandosi'. Per effetto di tale scelta, l'assicuratore dovrà pagare un prezzo per il servizio offertogli, 'il premio di riassicurazione', pertanto, mentre vedrà diminuire il rischio del proprio portafoglio, dovrà ripartire con il riassicuratore le proprie entrate in misura dipendente dalle condizioni del contratto.

A volte, però, il sacrificio delle entrate potrebbe essere considerato eccessivo dal management della compagnia, in particolare può accadere che, nonostante, grazie alla riassicurazione, il rischio si riduca ad un livello adeguato per la compagnia stessa, il valore atteso del patrimonio netto si riduca in una misura così elevata da causare un aumento della probabilità di rovina della compagnia, anziché una diminuzione, pertanto, al fine di ridurre la propria esposizione al rischio, la compagnia potrebbe adottare strategie diverse.

Infine, un altro aspetto fondamentale della riassicurazione è quello di dare stabilità economica e finanziaria alla compagnia assicurativa che decide di riassicurarsi, proteggendo il suo surplus da shock derivanti da un numero rilevante di richieste di risarcimento o da un evento catastrofe. Attutire le fluttuazioni di tali fenomeni si traduce pertanto nel fatto di aumentare la capacità di solvibilità della compagnia (ovvero la capacità di tener fede ai contratti stipulati con i clienti), diminuendone, quindi, la probabilità di rovina.

### **Perché investire ?**

Un'altra strada che può percorrere la compagnia assicurativa per incrementare il proprio capitale è quella dell'investimento nei mercati finanziari.

Investire in tali mercati, per chi vuole veder crescere il proprio capitale, è uno strumento tanto potente quanto pericoloso. Si è visto infatti, soprattutto negli ultimi anni, che investire nel mercato può non essere più così ragionevole e può addirittura diventare estremamente pericoloso.

Un'alta volatilità dei mercati, infatti, può portare a grossi guadagni così come a perdite di entità rilevante. Ovviamente, una tale scelta dipende anche dall'avversione (propensione) al rischio della compagnia, ma è evidente, che se lo scopo è quello di minimizzare la probabilità di rovina, allora la compagnia sarà in un certo modo avversa al rischio, ovvero si comporterà in modo da adottare una politica di investimento 'conservativa', in particolare può imporre dei vincoli sugli investimenti, per esempio imponendo un intervallo all'interno del quale è possibile scegliere la politica di investimento.

E' quindi naturale chiedersi se è opportuno investire in un determinato titolo e in caso di risposta affermativa, in che misura farlo.

Inoltre si osservi che il fallimento può derivare sia da una richiesta di claim molto elevata, che da una variazione del prezzo del titolo a ribasso, ovvero da perdite nel mercato finanziario, ciò vuol dire che l'investimento nei mercati finanziari è a sua volta una potenziale fonte di rischio.

Il nostro obiettivo è dunque quello di costruire un modello che preveda la possibilità sia di riassicurazione che di investimento, e scegliere strategie ottime di riassicurazioni e investimento che minimizzino la probabilità di rovina. Come già accennato nell' introduzione, supporremo che gli istanti casuali in cui avvengano i cambiamenti ( ovvero gli istanti in cui si verifica una richiesta di claim o una variazione del prezzo del titolo) siano determinati dallo stesso processo semi-markoviano a tempo continuo, ove un tale processo è così definito

**Definizione 1.**

*Un processo stocastico a tempo continuo  $\{X_t \mid t \in (0, T]\}$ , a valori nello spazio degli stati  $E$ , è Markoviano, se per ogni sequenza di valori  $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t$  la distribuzione di probabilità di  $X_t$  condizionata a  $X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$  dipende soltanto dallo stato  $X_{t_n}$ , per ogni  $n > 0$  e per ogni valore degli stati  $j, i_0, i_1, \dots, i_n \in E$ :*

$$P\{X_t = j \mid X_{t_0} = i_0; X_{t_1} = i_1; \dots; X_{t_n} = i_n\} = P\{X_t = j \mid X_{t_n} = i_n\}$$

*Dalla definizione di processo Markoviano si ha che la distribuzione del tempo di permanenza nello stato  $i$  è di tipo esponenziale con intensità  $\lambda_i$ , ove tale intensità può dipendere dallo stato  $i$  in cui il processo si trova (assenza di memoria).*

*Se si assume che la distribuzione di probabilità del tempo di permanenza in uno stato non sia esponenziale, ma generale, allora si ha un processo stocastico semi-Markoviano. In questo caso le transizioni fra stati del processo avvengono in istanti di tempo con distribuzione di probabilità generale, e il tempo di intercorrenza tra due salti, può dipendere dagli stati tra cui avviene il salto.*

*Se consideriamo il processo stocastico discreto che registra il valore che il processo assume negli istanti in cui avvengono i salti, allora ritroviamo una catena di Markov, tale processo è detto catena di salti immersa ( embedded jump chain ).*

Consideriamo dunque un orizzonte temporale finito  $T > 0$ . Precisamente, per modellare gli istanti di accadimento degli eventi ( richiesta di risarcimento

e variazione del prezzo del titolo) introduciamo il processo  $\{K_t\}_{t>0}$  per  $t < T$ , come un processo semi-Markoviano a tempo continuo (SMP) su  $\{0, 1\}$ , ove,  $K_t = 0$  se in  $t$  è arrivata una richiesta di risarcimento, mentre  $K_t = 1$  se in  $t$  si è verificata una variazione del prezzo del titolo. Dalla definizione di SMP a tempo continuo, segue che la catena di salti associata a  $\{K_t\}_{t>0}$ , evolve secondo la matrice delle probabilità di transizione  $P = \|p_{ij}\|_{i,j \in \{0,1\}}$  che è supposta data, e il tempo di permanenza è una variabile casuale la cui distribuzione di probabilità può dipendere solo dagli stati tra cui avviene il salto. Ritorreremo su questo punto, nelle prossime sezioni.

**Definizione 2.** Diciamo che un processo  $T_n$  è un processo di punto (univariato), se  $T_n$  è una sequenza di variabili aleatorie non negative

$$0 = T_0 < T_1 < \dots < T_k < \dots$$

che supponiamo non esplodere ossia

$$T_\infty = \lim_{n \uparrow +\infty} T_n = +\infty \quad q.c.$$

ove  $T_n$  è l'istante casuale in cui avviene l' $n^{\circ}$  salto,  $n > 1$ . Un'altra possibile rappresentazione per il processo di punto  $T_n$  si ottiene considerando il processo di conteggio (o di punto) associato,  $N_t$ , che viene definito come segue

$$N_t = n \text{ se } t \in [T_n; T_{n+1}); \quad n \geq 0$$

o, equivalentemente,

$$N_t = \sum_{j=1}^{\infty} 1_{\{T_j \leq t\}} \quad (1.1)$$

il quale conta il numero di salti che si sono verificati fino al tempo  $t$ . E' così possibile ridefinire  $T_n$  a partire da  $N_t$  come:

$$T_n = \min \{t \geq 0 \mid N_t = n\}. \quad (1.2)$$

In ambito assicurativo, così come in moltri altri contesti, è abitudine considerare il processo di punti,  $N_t$ , di tipo Poissoniano, in particolare nell'esempio che considereremo più avanti, utilizzeremo proprio un processo di conteggio di questo tipo.

**Definizione 3.** Il processo  $N_t$ , definito sullo spazio di probabilità filtrato  $(\Omega; \mathcal{F}; P)$  dotato di una filtrazione  $\mathcal{F}_t$ , è un processo di Poisson se

- $N_0 = 0$ ;
- $N_t$  è un processo ad incrementi indipendenti:  $N_t - N_s$  è indipendente da  $\mathcal{F}_s \quad \forall s \leq t$ ;
- $N_t - N_s$  è una variabile di Poisson di parametro  $\Lambda_{s,t}$ , ove generalmente  $\Lambda_{s,t} = \int_s^t \lambda_u du$  e  $\lambda_u$  è una funzione deterministica.

Il capitolo 1 è strutturato nel seguente modo: Nel paragrafo 1.2 introduciamo alcuni concetti fondamentali per la costruzione del modello che descrive l'evoluzione del processo di rischio, e verranno fatte alcune assunzioni. Nella sezione 1.3 verrà modellata la dinamica del processo di rischio.

## 1.2 Il processo di Rischio

In questa sezione costruiremo un modello in grado di descrivere la dinamica del processo di rischio, supponendo di partire all'istante  $t \in [0, T]$ , ove  $T$  è l'orizzonte temporale fissato.

Introduciamo dunque, i processi stocastici relativi ai claim, agli intertempi di accadimento e al prezzo del titolo.

Siano,

$Y_n$  per  $(n \geq 1)$ , una successione di variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite (*i.i.d*) con densità di distribuzione comune  $F(y)$ . La variabile  $Y_n$  descrive l'ammontare dell' $n^{\circ}$  richiesta di risarcimento, ed ha supporto nei reali positivi.

$Z_n$  per  $(n \geq 1)$ , una successione di variabili casuali *i.i.d.* con funzione di distribuzione (*p.d.f*)  $G(z)$ . La variabile  $Z_n$  denota il tempo di intercorrenza tra l' $(n-1)^{\circ}$  e l' $n^{\circ}$  salto della catena semi-Markoviana  $\{K_{T_n}\}_{n \geq 1}$ . Da ciò possiamo dire che le probabilità di transizione della SMP  $\{K_t\}_{t > 0}$  sono:

$$P \{K_{T_{n+1}} = j, Z_{n+1} \leq s \mid K_{T_n} = i\} = p_{ij}G(s)$$

Si noti che in generale, la funzione di distribuzione  $G(\cdot)$  può dipendere anche dagli stati corrente e futuro su cui si muove la catena di Markov.

In ciò che segue supporremo che ciò non avviene, ovvero  $G(\cdot)$  è indipendente da  $i$  e  $j$ .

$W_n$  per ( $n \geq 1$ ), una successione di variabili casuali *i.i.d.* con funzione di distribuzione  $H(w)$ . La variazione del prezzo del titolo,  $S_{N_t}$ , (con  $S_t$  denotiamo il prezzo scontato), avviene in accordo a:

$$\frac{S_{N_{t+1}} - S_{N_t}}{S_{N_t}} = (e^{W_{N_{t+1}}} - 1) K_{T_{N_{t+1}}}. \quad (1.3)$$

Le variabili  $W_n$  assumono valori nell'intervallo  $[\underline{w}, \bar{w}]$  con  $\underline{w} < 0 < \bar{w}$ . Si noti che si può anche avere  $\underline{w} = -\infty$  e  $\bar{w} = +\infty$ .

Per semplicità e senza perdita di generalità consideriamo un unico titolo di investimento, una generalizzazione immediata si può ottenere anche per investimenti nel conto monetario.

Si osservi inoltre che dalla (1.3), supposto che  $K_{T_{N_{t+1}}} = 1$  segue che:

$$\begin{aligned} E_t[S_{N_{t+1}}] &= E_t[S_{N_t} + S_{N_t}(e^{W_{N_{t+1}}} - 1)] \\ &= S_{N_t} + S_{N_t}E_t[e^{W_{N_{t+1}}}] - S_{N_t} \\ &= S_{N_t}E_t[e^{W_{N_{t+1}}}] \end{aligned}$$

Da cui segue che

$$E_t[S_{N_{t+1}}] \begin{cases} > S_{N_t} & \text{se } E[W_{N_{t+1}}] > 0 \text{ mercato favorevole} \\ = S_{N_t} & \text{se } E[W_{N_{t+1}}] = 0 \text{ mercato equo} \\ < S_{N_t} & \text{se } E[W_{N_{t+1}}] < 0 \text{ mercato sfavorevole} \end{cases}$$

**Osservazione 4.** *Il nostro modello esclude la possibilità di salti simultanei (le variazioni del prezzo del titolo e le richieste di risarcimento non avvengono mai nello stesso istante temporale). Si potrebbe dunque generalizzare il modello estendendo  $K_t$  a tre possibili valori:*



$$K_{T_n} = \begin{cases} 0 & \text{se in } T_n \text{ si è verificato un salto di tipo claim} \\ 1 & \text{se in } T_n \text{ si è verificata una variazione del prezzo del titolo} \\ 2 & \text{se in } T_n \text{ si sono verificati due salti simultanei} \end{cases}$$

In generale, affermare che il processo può essere controllato mediante la scelta di politiche di riassicurazione e investimento, significa che possiamo scegliere in corrispondenza agli istanti di tempo in cui avvengono i salti,  $T_{N_t}$ , il livello di esposizione al rischio  $b_{N_t}$  di un contratto di riassicurazione, e l'ammontare  $\delta_{N_t}$  da investire nel titolo rischioso.

Precisamente:

$b_{N_t}$ . *La politica di riassicurazione*, può assumere valori nell'intervallo  $(b_{min}, 1]$ , ove  $b_{min}$  verrà definito in seguito.

$\delta_{N_t}$ . *La politica di investimento*, assume valori nell'intervallo  $[\underline{\delta}, \bar{\delta}]$ , ove  $\bar{\delta} \geq 0$  e  $\underline{\delta} \leq 0$  sono parametri dati in modo esogeno.

E' importante sottolineare che politiche di investimento negative equivalgono a vendite allo scoperto. Per l'azienda, per esempio, può essere conveniente vendere allo scoperto in caso di mercati finanziari sfavorevoli. Viceversa, adottare una politica di investimento che prevede l'indebitamento, ovvero  $\bar{\delta} \geq x_0$ , può essere conveniente nel caso di mercati favorevoli. E' chiaro che se una politica ottima richiede l'indebitamento, questo sarà solo istantaneo, poiché ci aspettiamo un aumento del prezzo del titolo, e già al salto successivo potremo coprire il debito accumulato.

### ***Parametri del problema***

Indicheremo con :

$c$  : l'ammontare dei premi (in entrata) pagato dai clienti alla compagnia, per unità di tempo, tale valore è un parametro esogeno in quanto già fissato nei contratti di assicurazione.

$h(b, Y)$  : la quota del generico claim  $Y$  pagata dall' assicurazione. In ciò che segue, assumeremo che  $h(b, Y)$  sia della forma  $h(b, Y) = bY$  (proportional reinsurance).

Si osservi che, all'arrivo di una richiesta di risarcimento di ampiezza  $Y$ , se la politica di riassicurazione adottata è  $b$ , allora l'assicurazione paga  $h(b, Y) = bY$ , mentre l'ente riassicuratore copre la restante quota  $1 - h(b, y) = (1 - b)Y$ .

Quindi, scegliere un livello di riassicurazione basso ( $b$  piccolo) significa coprirsi molto dal rischio di risarcimento, e viceversa scegliere  $b$  prossimo ad 1, significa accollarsi gran parte del rischio derivante da un salto di tipo claim.

$\theta$  : *safety loading* scelta dall'ente riassicuratore, e quindi esogena.

$C(b_{N_t})$  : Se all'istante  $t$  la compagnia adotta la politica di riassicurazione  $b_t$ , allora dovrà pagare all'ente riassicuratore un premio che dipenderà da  $b_t$ .

In particolare il premio per unità di tempo, che indicheremo con  $c_r(b)$  dipenderà solo dal livello di riassicurazione corrente,  $b$ . Supponiamo che  $c_r(b)$  venga fissato all'istante  $t_0 = 0$  e che abbia validità in tutto l'intervallo  $[0, T]$ , in accordo con il principio del valore atteso, si ha che  $c_r(b)$  è dato da:

$$c_r(b) := (1 + \theta) \frac{E\{Y_1 - bY_1\}}{E\{Z_1 \wedge T\}} \quad (1.4)$$

Dunque, all'istante  $t$ , e per tutto il periodo che precede il salto successivo, le entrate nette della compagnia, nell'unità di tempo, saranno anch'esse funzione solo di  $b_t$ , e possono quindi essere definite come segue:

$$C(b) := c - c_r(b) = c - (1 + \theta) (1 - b) \frac{E\{Y_1\}}{E\{Z_1 \wedge T\}}. \quad (1.5)$$

Definiamo inoltre,

$$b_{min} := \min \{b \in [0, 1] \mid c^* \leq C(b) \leq c\}, \quad (1.6)$$

ove  $c^* \geq 0$  è il minimo premio netto in entrata che la compagnia è disposta ad accettare.

**Definizione 5.**

Chiameremo controllo al tempo  $t$  la coppia  $\phi_t = (b_t, \delta_t)$ , con  $b_t \in (b_{min}, 1]$  e  $\delta_t \in [\underline{\delta}, \bar{\delta}]$ . Chiameremo politica una successione  $\pi = \{(b_{t_n}, \delta_{t_n})\}_{\{n \geq 1\}}$  di controlli.

**Osservazione 6.**

1. Si osservi che nella (1.5) e nella (1.6), abbiamo supposto che il premio da pagare all'ente riassicuratore, per unità di tempo, venga fissato all'istante  $t_0 = 0$ , più in generale, se si suppone che l'istante in cui tale tasso viene fissato sia l'istante  $0 < t_0 < T$ , ovvero se il tempo residuo è dato da  $T - t_0$ , basta sostituire nella (1.5) e nella (1.6)  $T$  con  $T - t_0$ .
2. Abbiamo usato, nella definizione di  $C(b)$  le variabili  $Z_1$  e  $Y_1$  poiché, grazie all'assunzione di i.i.d, le varie  $Z_n$  e  $Y_n$  sono tutte copie identiche e indipendenti delle  $Z_1$  e  $Y_1$ .

3. Al fine di mantenere la formula (1.5) semplice e il più possibile simile agli standard, al denominatore del membro di destra abbiamo considerato la variabile casuale  $Z_1$  tra due istanti di eventi successivi, mentre avremmo dovuto considerare la variabile casuale che identifica il tempo intercorso tra due eventi di tipo 'richiesta di risarcimento', che in generale è più grande.

Per risolvere tale problema è possibile giocare con la safety loading, infatti, se denotiamo con  $Z_0$  la variabile casuale che misura gli intertempi tra due richieste di claim consecutive, e con  $\bar{Z}_0$  il tempo medio tra due successivi claim prima di  $T$ , ( $\bar{Z}_0 = E\{Z_0 \wedge T\}$ ) possiamo definire, per un dato  $\theta$ :

$$\bar{\theta}_0 := (1 + \theta) \frac{\bar{Z}_0}{E\{Z_1 \wedge T\}} - 1. \quad (1.7)$$

Dalla (1.7) segue che  $\frac{(1+\theta)}{E\{Z_1 \wedge T\}} = \frac{(1+\bar{\theta}_0)}{\bar{Z}_0}$ , e poiché  $\bar{Z}_0 > E\{Z_1 \wedge T\}$ , siamo sicuri che  $1 + \bar{\theta}_0 = (1 + \theta) \frac{\bar{Z}_0}{E\{Z_1 \wedge T\}} > 1 + \theta > 1$ .

**Assunzioni 7.**

- (i) Le variabili casuali  $(Z_n, Y_n, W_n)_{n \geq 1}$  sono mutuamente indipendenti.
- (ii) Definiamo  $\bar{r} := \sup\{r > 0 \mid E\{e^{rY_1}\} < +\infty\}$ , e assumiamo che  $\bar{r} > 0$  e che  $E\{e^{\bar{r}Y_1}\} = +\infty$ .
- (iii) Supponiamo che valga la condizione  $c > \frac{p_{k,0}E[Y_1]G(T-t)}{E\{Z_1 \wedge (T-t)\}} \quad \forall t \in [0, T]$ .

**Osservazione 8.**

- (i) Per  $h(b, Y) = bY$ ,  $C(b)$  è una funzione strettamente crescente in  $b$ , dunque

$$c \geq C(b) \geq \max(c^*, C(0)) \geq 0, \forall b \in (b_{min}, 1].$$

Inoltre, dalla (1.6), segue che

$$b_{min} = \begin{cases} 1 - (c - c^*) \frac{E[Z_1 \wedge T]}{E[Y_1](1+\theta)} & \text{se } c^* > C(0) \\ 0 & \text{se } 0 < c^* \leq C(0) \end{cases} \quad (1.8)$$

Osserviamo che imporre  $c^* > C(0)$  significa che le entrate nette, che la compagnia vuole garantirsi, devono essere maggiori di quelle che avrebbe se riassicurasse tutto ( $b = 0$ ), ovviamente questo limita inferiormente l'insieme delle politiche ammissibili. D'altra parte, se le entrate nette sono più elevate, la compagnia avrà a disposizione più capitale per far fronte alle richieste di risarcimento o per investire nei mercati.

$C(0) < 0$ , vuol dire che riassicurare tutto,  $b = 0$ , costa (nell'unità di tempo) più di quanto la compagnia incassa, ovvero  $c_r(0) > c$ .

Nel caso in cui  $0 < c^* \leq C(0)$ , la politica di riassicurazione  $b = 0$  è tale da soddisfare la condizione  $c^* \leq C(0)$ . Se permettessimo, però, alla compagnia di adottare una tale politica, allora la strategia ottima sarebbe  $(b, \delta) = (0, 0)$  ovvero, si riassicura tutto e non si investe nulla, in tal caso la probabilità di fallire sarebbe nulla, e la soluzione ottima sarebbe banale.

Supponiamo quindi, di introdurre un vincolo per la compagnia assicurativa che vieti livelli di riassicurazione inferiori ad una certa soglia, per esempio  $\underline{b} > 0$ , e ridefiniamo  $b_{min}$  come segue:

$$b_{min} = \begin{cases} 1 - (c - c^*) \frac{E[Z_1 \wedge T]}{E[Y_1](1+\theta)} & \text{se } c^* > C(0) \\ \underline{b} & \text{se } 0 < c^* \leq C(0) \end{cases} \quad (1.9)$$

In seguito, dimostreremo che esiste sempre una politica ammissibile sotto l'ipotesi di validità dell'assunzione 7 (iii).

(ii) Poichè  $b \leq 1$ , il punto (ii) nelle assunzioni 7 implica che per  $b \in (b_{min}, 1]$  fissato:

$$E \{ e^{rbY_1} \} < +\infty$$

per ogni  $r \in [0, \bar{r})$ , e in particolare, se definiamo,  $r^* := \frac{\bar{r}}{b_{min}} > \bar{r}$

$$E \{ e^{rbY_1} \} = +\infty \text{ se } r = r^*$$

infatti ,

$$E \{ e^{r^*bY_1} \} = E \left\{ e^{\bar{r} \frac{b}{b_{min}} Y_1} \right\} > E \{ e^{\bar{r}Y_1} \} = +\infty$$

(iii) Poichè  $Y_1$  ha supporto nei reali positivi, si ha che:

$$\lim_{r \uparrow \bar{r}} E \{ e^{rY_1} \} = +\infty$$

e, per un fissato  $b \in (b_{min}, 1]$

$$\lim_{r \uparrow r^*} E \{ e^{rbY_1} \} = +\infty$$

Si noti anche che  $\bar{r}$  può essere infinito, p.e. se  $Y$  ha supporto limitato, e in tal caso , vale  $r^* = \bar{r} = +\infty$ .

(iv) Le precedenti assunzioni seguono l'impostazione di Romera & Rungaldier (2012) ([6]). Nel loro articolo gli autori assumono che il premio netto in entrata per una riassicurazione totale,  $b = 0$ , sia sempre positivo. Noi rilassiamo questa condizione. Assumendo la 7 punto (iii), infatti, si considera sia il caso  $C(0) > 0$  che il caso  $C(0) \leq 0$  purchè valga l'assunzione 7 punto (iii).

**Definizione 9.**

Per  $t \in [0, T]$ , sia  $U = [b_{min}, 1] \times [\underline{\delta}, \bar{\delta}]$ , diremo che un controllo  $\phi = (b, \delta)$  è ammissibile se  $(b, \delta) \in U$ . Si noti che  $U$  è compatto.

### 1.3 Dinamica del processo di rischio

Adesso, abbiamo tutti gli strumenti necessari per la formulazione del modello che descrive la dinamica del processo di rischio assicurativo.

Se all'istante  $T_n$  abbiamo un capitale  $X_{T_n} > 0$ , e decidiamo di adottare il controllo  $\phi_n = (b_n, \delta_n) \in U$ , allora all'istante  $T_{n+1}$  (ovvero l'istante in cui si verifica il prossimo salto), il capitale sarà dato da:

$$X_{T_{n+1}} = X_{T_n} + C(b_n)Z_{n+1} - (1 - K_{T_{n+1}})b_n Y_{n+1} + K_{T_{n+1}} \delta_n (e^{W_{n+1}} - 1) \quad (1.10)$$

Per generalizzare il modello è necessario descrivere la dinamica in un passo del processo di rischio, definito in (1.10), per un generico istante di tempo  $t < T$  con capitale iniziale  $X_t = x$ .

A tale scopo si noti che, se per un dato  $t < T$  si ha  $N_t = n$ , allora  $T_{N_t} = T_n$  è l'istante casuale in cui avviene l' $n^{\circ}$  evento e vale che  $T_n \leq t \leq T_{n+1}$ , in particolare, il controllo da utilizzare nell'intervallo  $(T_{N_t}, T_{N_t+1}]$  è, per ipotesi, già stato scelto in  $T_{N_t}$ , e quindi noto all'istante  $t$ . Inoltre, all'istante  $t$ , conosciamo il tempo trascorso dall'ultimo evento, ovvero  $t - T_{N_t}$ , così come il capitale maturato nell'intervallo  $[T_{N_t}, t]$ , che è dato da  $\tilde{x} := C(b_{N_t})(t - T_{N_t})$ , dunque, si può assumere di partire dall'istante  $T_{N_t}$  con capitale  $X_{T_{N_t}} = x - \tilde{x}$ . Questo spiega perché non è restrittivo supporre  $t = T_{N_t}$ .

Dunque, se  $x_t = x$  è il capitale disponibile in  $t$  e assumiamo che  $t = T_{N_t}$ , possiamo scrivere, per  $0 \leq t \leq T$ :

$$X_{N_t+1} = x + C(b_{N_t})Z_{N_t+1} - (1 - K_{T_{N_t+1}})b_{N_t} Y_{N_t+1} + K_{T_{N_t+1}} \delta_{N_t} (e^{W_{N_t+1}} - 1). \quad (1.11)$$

Infine, introduciamo uno stato assorbente  $\varkappa = 0$ , tale che se  $X_{N_t} \leq 0$ , allora  $X_{N_t+1} = 0, \forall t \leq T$ .

Lo spazio degli stati è denotato con  $\chi = \mathbb{R}$

## Capitolo 2

# Formula ricorsiva per la probabilità di rovina

Inizieremo questo capitolo specificando alcune notazioni e introducendo le definizioni basilari riguardanti la probabilità di rovina.

### 2.1 Notazioni e definizioni

Si noti che (1.11) può essere riscritta come segue, se  $N_t = n$  e  $T_{N_t} = t$ :

$$X_{n+1} = x - \left[ (1 - K_{T_{n+1}}) b_n Y_{n+1} - \left( C(b_n) Z_{n+1} + K_{T_{n+1}} \delta_n (e^{W_{n+1}} - 1) \right) \right] \quad (2.1)$$

Da questa espressione si vede che la compagnia fallisce se :

- $K_{T_{n+1}} = 0$ ,  $b_n Y_{n+1} - C(b_n) Z_{n+1} > x$  e  $T_{n+1} < T$ ,  
questo significa che è avvenuto almeno un salto di tipo claim nell'intervallo  $(T_{N_t}, T]$ , e che le entrate dovute al pagamento dei premi nell'intervallo di ampiezza  $Z_{n+1}$ ,  $C(b_n) Z_{n+1}$  e il capitale iniziale  $x$ , non sono sufficienti a pagare la quota di risarcimento a carico della compagnia assicuratrice.
- $K_{T_{n+1}} = 1$ ,  $\delta(e^{W_{n+1}} - 1) + C(b_n) Z_{n+1} + x < 0$  e  $T_{n+1} < T$ ,  
ovvero è avvenuta una variazione del prezzo del titolo nell'intervallo  $(T_n, T]$ , e le entrate dovute al pagamento dei premi nell'intervallo di ampiezza  $Z_{n+1}$  più il capitale iniziale  $x$ , non sono sufficienti a coprire le perdite dovute agli investimenti.

In generale dunque, partendo dall'istante  $t = T_{N_t}$ , con  $N_t = n$  si fallisce in un passo se :

$$\begin{cases} (1 - K_{T_{n+1}})b_n Y_{n+1} - (C(b_n)Z_{n+1} + K_{T_{n+1}}\delta_n(e^{W_{n+1}} - 1)) \geq x \\ T_{n+1} < T \end{cases}$$

o, equivalentemente

$$\begin{cases} C(b_n)Z_{n+1} \leq (1 - K_{T_{n+1}})b_n Y_{n+1} - K_{T_{n+1}}\delta_n(e^{W_{n+1}} - 1) - x \\ T_{n+1} < T \end{cases}$$

Si osservi, che la condizione  $T_{n+1} \leq T$ , è molto importante, infatti , se  $X_{T_n} > 0$  e  $T_{n+1} > T$ , allora l'eventuale fallimento avviene dopo l'orizzonte temporale (caso a cui noi non siamo interessati).

Inserendo dunque quest' osservazione nella dinamica del processo di rischio si ha che, nelle stesse ipotesi di sopra:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= x + C(b_n)(Z_{n+1} \wedge (T - t)) \\ &\quad - \mathbf{1}_{\{Z_{n+1} < T-t\}} \left[ (1 - K_{T_{n+1}})b_n Y_{n+1} - K_{T_{n+1}}\delta_n(e^{W_{n+1}} - 1) \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Così, data una politica  $\pi$  ( della quale nelle definizioni che seguono utilizzeremo solo il generico controllo  $\phi_t = (b, \delta)$ ), introduciamo le seguenti funzioni

$$u^\pi(y, z, w, k) := (1 - k)by - C(b)z - k\delta(e^w - 1) \quad (2.3)$$

$$\tau^\pi(y, w, k, x) := \frac{(1 - k)by - k\delta(e^w - 1) - x}{C(b)} \quad (2.4)$$

Dalle definizioni (2.3) e (2.4) segue che :  $u^\pi(y, z, w, k) \leq x \Leftrightarrow z \geq \tau^\pi(y, w, k, x)$ .



Definiamo adesso gli eventi disgiunti :

$$\begin{aligned} A_{x,\pi}^+ &:= \{(y, z, w, k) \mid u^\pi(y, z, w, k) < x \ ; \ z < T - t\} \\ &= \{(y, w, k, x) \mid \tau^\pi(y, w, k, x) < z < T - t\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{x,\pi}^- &:= \{(y, z, w, k) \mid u^\pi(y, z, w, k) \geq x \ ; \ z \leq T - t\} \\ &= \{(y, w, k, x) \mid \min(\tau^\pi(y, w, k, x), T - t) \geq z\}, \end{aligned}$$

dunque, partendo da un istante  $t \in [0, T]$  con capitale  $x > 0$ , e adottando il controllo  $\pi = (b, \delta)$ , si fallisce in un passo se si verifica un evento in  $A_{x,\pi}^-$ .

Per semplicità di notazione, in ciò che segue scriveremo  $X_k$  in luogo di  $X_{T_k}$ .

Con  $\mathcal{F}_{t,m}^\pi$ , per  $m = 0, 1, 2, \dots$ , denotiamo, per una fissata politica  $\pi$ , la seguente  $\sigma$ -algebra:

$$\mathcal{F}_{t,m}^\pi := \sigma(X_{N_t}, Z_{N_t+m}, K_{N_t+m}, Y_{N_t+m}, W_{N_t+m}) \quad (2.5)$$

e definiamo per  $m = 0$ ,

$$\mathcal{F}_{t,0}^\pi := \sigma(X_{N_t}, Z_{N_t}, K_{N_t}, Y_{N_t}, W_{N_t}).$$

Si osservi che

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{T_m,0}^\pi &= \sigma(X_{N_{T_m}}, Z_{N_{T_m}}, K_{N_{T_m}}, Y_{N_{T_m}}, W_{N_{T_m}}) \\ &= \sigma(X_{N_t+m}, Z_{N_t+m}, K_{N_t+m}, Y_{N_t+m}, W_{N_t+m}) \\ &=^* \sigma(X_{N_t}, Z_{N_t+m}, K_{N_t+m}, Y_{N_t+m}, W_{N_t+m}) \\ &= \mathcal{F}_{t,m}^\pi \end{aligned}$$

ove in (=\*) si è usato il fatto che, fissata una politica  $\pi$  e data l'informazione in  $T_m$ , cioè, osservati i processi  $(X_{N_t}, Z_{N_t+k}, K_{N_t+k}, Y_{N_t+k}, W_{N_t+k})$ , per  $k =$

$0, 1, 2, \dots, m$ , è possibile conoscere il processo  $(X_{N_t+k}, Z_{N_t+k}, K_{N_t+k}, Y_{N_t+k}, W_{N_t+k})$ , per  $k = 0, 1, 2, \dots, m$ , utilizzando ricorsivamente la (1.11).

Ovviamente vale anche il viceversa, nota  $\sigma(X_{N_t+m}, Z_{N_t+m}, K_{N_t+m}, Y_{N_t+m}, W_{N_t+m})$  è nota anche  $(\sigma(X_{N_t}, Z_{N_t+m}, K_{N_t+m}, Y_{N_t+m}, W_{N_t+m}))$  in quanto la seconda è una sotto- $\sigma$ -algebra della prima.

**Definizione 10.** *Assumiamo di trovarci al tempo  $t$  con un surplus iniziale di  $X_t = X_{T_{N_t}} = x > 0$  e con  $K_t = K_{T_{N_t}} = k \in \{0, 1\}$ .*

*Denotiamo con  $\psi_1^\pi(t, x; k)$  la probabilità di rovina quando nell'intervallo  $[t, T]$  si verifica al più 1 salto, e viene adottata la politica  $\pi$ .*

*Formalmente, abbiamo*

$$\begin{aligned} \psi_1^\pi(t, x; k) &:= P^\pi (\{X_{N_{t+1}} \leq 0\}; \{Z_{N_{t+1}} \leq T - t\} \mid \mathcal{F}_{t,0}^\pi) \\ &= P^\pi (\{X_{N_{t+1}} \leq 0\}; \{Z_1 \leq T - t\} \mid \mathcal{F}_{t,0}^\pi) \\ &= P^\pi (\{X_{N_{t+1}} \leq 0\} \mid \mathcal{F}_{t,0}^\pi) \end{aligned} \tag{2.6}$$

*ove abbiamo usato, nella prima uguaglianza, il fatto che le  $Z_n$  sono tutte copie identiche e indipendenti della  $Z_1$  e, nell'ultima, il fatto che, se non avvengono salti in  $(t, T]$ , ossia  $\{Z_1 > T - t\}$ , e  $x > 0$  non si può fallire prima di  $T$ , ovvero  $\{X_{N_{t+1}} \leq 0\} \subset \{Z_1 \leq T - t\}$ .*

Più in generale, ricordando che abbiamo supposto  $X = 0$  come stato assorbente e che quindi  $\{X_n \leq 0\} \Rightarrow \{X_k = 0\} \quad \forall k > n$ , possiamo dare la seguente definizione:

**Definizione 11.** *Assumiamo di trovarci al tempo  $t$  con un surplus iniziale di  $X_t = X_{T_{N_t}} = x > 0$  e con  $K_t = K_{T_{N_t}} = k \in \{0, 1\}$ .*

*Denotiamo con  $\psi_n^\pi(t, x; k)$  la probabilità di rovina quando nell'intervallo  $[t, T]$  si verificano al più  $n$  salti, e viene adottata la politica  $\pi$ . Formalmente, abbiamo*

$$\begin{aligned}
\psi_n^\pi(t, x; k) &:= P^\pi \left( \{X_{(N_t+n) \wedge N_T} \leq 0\} \mid \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right) \\
&:= P^\pi \left( \{X_{(N_t+n)} \leq 0\}; \{T_n \leq T\} \mid \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right) \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Il nostro primo obiettivo nel prossimo paragrafo è ottenere una formula ricorsiva per  $\psi_n^\pi(t, x; k)$

## 2.2 Formula ricorsiva

Al fine di ottenere una formula ricorsiva per  $\psi_n^\pi(t, x; k)$ , in aggiunta agli insiemi  $A_{x,\pi}^+$  e  $A_{x,\pi}^-$  definiamo, per ogni  $t < T$ , gli eventi

$$B := \{X_{N_t+1} < 0\} \quad \& \quad C_n := \bigcup_{h=N_t+2}^{(N_t+n) \wedge N_T} \{X_h < 0\}. \quad (2.8)$$

Si noti che valgono le relazioni:

$$B \cap C_n = \emptyset$$

$$C_n \cap \{N_T - N_t \leq 1\} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad C_n \subset \{N_T - N_t > 1\}.$$

e

$$\{X_{(N_t+n) \wedge N_T} \leq 0\} = \bigcup_{h=N_t+1}^{(N_t+n) \wedge N_T} \{X_h < 0\} = B \cup C_n$$

Inoltre, dato  $(x, k)$  il verificarsi dell'evento  $B$  è equivalente al verificarsi di un evento in  $A_{x,\pi}^-$ . Dalle definizioni in (2.8) segue, ancora, che:

$$C_n = \bigcup_{h=N_t+2}^{(N_t+n)\wedge N_T} \{X_h < 0\} = \{X_{N_t+2} < 0\} \cup \bigcup_{h=N_t+3}^{(N_t+n)\wedge N_T} \{X_h < 0\}$$

$$C_n = \{X_{N_t+2} < 0\} \cup C_{n-1} \quad (2.9)$$

Il risultato principale di questo paragrafo è la seguente formula ricorsiva.

**Proposizione 12.** *Per un dato istante  $t \in [0, T]$  in cui il capitale è  $x$  e lo stato è  $K_{T_{N_t}} = k \in \{0, 1\}$ , e per una fissata politica  $\pi$ , la probabilità di rovina in accordo con la definizione (2.7) ammette la seguente rappresentazione ricorsiva:*

$$\begin{aligned} \psi_n^\pi(t, x, k) &= \sum_{h=0}^1 p_{kh} \int_{\underline{w}}^{\bar{w}} \int_0^\infty G(\tau^\pi(y, w, h, x) \wedge (T - t)) dF(y) dH(w) \\ &+ \sum_{h=0}^1 p_{kh} \int_{\underline{w}}^{\bar{w}} \int_0^\infty \int_{\tau^\pi(y, w, h, x)}^{T-t} \psi_{n-1}^\pi(t + z, x - u^\pi(y, z, w, h), h) dG(z) dF(y) dH(w) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dalla relazione precedente segue immediatamente che

$$\psi_1^\pi(t, x, k) = \sum_{h=0}^1 p_{kh} \int_{\underline{w}}^{\bar{w}} \int_0^\infty G(\tau^\pi(y, w, h, x) \wedge (T - t)) dF(y) dH(w) \quad (2.11)$$

*Dimostrazione.*

Grazie alle osservazioni sopra e alle definizioni (2.7) e (2.8) possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\psi_n^\pi(t, x, k) &= P^\pi(B \cup C_n | \mathcal{F}_{t,0}^\pi) = P^\pi(B | \mathcal{F}_{t,0}^\pi) + P^\pi(C_n | \mathcal{F}_{t,0}^\pi) \\
&= P^\pi[A_{x,\pi}^- | \mathcal{F}_{t,0}^\pi] + P^\pi[A_{x,\pi}^+ \cap \{N_T - N_t > 1\} \cap C_n | \mathcal{F}_{t,0}^\pi] \\
&= P^\pi[\tau^\pi(Y_1, W_1, K_{T_{N_t+1}}, x) \geq Z_1 \text{ con } t + Z_1 \leq T | \mathcal{F}_{t,0}^\pi] \\
&\quad + P^\pi[\{\tau^\pi(Y_1, W_1, K_{T_{N_t+1}}, x) \leq Z_1 \leq T - t\} \cap C_n | \mathcal{F}_{t,0}^\pi] \\
&= E^\pi \left[ \mathbf{1}_{\{\{\tau^\pi(Y_1, W_1, K_{T_{N_t+1}}, x) \geq Z_1\} \cap \{t + Z_1 \leq T\}\}} | \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right] \\
&\quad + E^\pi \left[ \mathbf{1}_{\{\{\tau^\pi(Y_1, W_1, K_{T_{N_t+1}}, x) \leq Z_1 \leq T - t\} \cap C_n\}} | \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right] \\
&= \sum_{h=0}^1 p_{k,h} \int_{\underline{w}}^{\bar{w}} \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{\{\tau^\pi(y, w, h, x) \geq z\} \cap \{t + z \leq T\}\}} dG(z) dF(y) dH(w) \\
&\quad + E^\pi \left[ \mathbf{1}_{\{\{\tau^\pi(Y_1, W_1, K_{T_{N_t+1}}, x) \leq Z_1 \leq T - t\} \cap C_n\}} | \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right]
\end{aligned}$$

Ovvero

$$\begin{aligned}
\psi_n^\pi(t, x, k) &= \sum_{h=0}^1 p_{k,h} \int_{\underline{w}}^{\bar{w}} \int_0^\infty G(\tau^\pi(y, w, h, x) \wedge (T - t)) dF(y) dH(w) \\
&\quad + E^\pi \left[ \mathbf{1}_{\{\{\tau^\pi(Y_1, W_1, K_{T_{N_t+1}}, x) \leq Z_1 \leq T - t\} \cap C_n\}} | \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right]. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Ora osserviamo che

$$\begin{aligned}
& E^\pi \left[ \mathbf{1}_{\left\{ \left\{ \tau^\pi(Y_1, W_1, K_{T_{N_t+1}}, x) \leq Z_1 \leq T-t \right\} \cap C_n \right\}} \middle| \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right] \\
&= E^\pi \left[ E^\pi \left[ \mathbf{1}_{\left\{ \left\{ \tau^\pi(Y_1, W_1, K_{T_{N_t+1}}, x) \leq Z_1 \leq T-t \right\} \cap C_n \right\}} \middle| \mathcal{F}_{t,1}^\pi \right] \middle| \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right] \\
&= E^\pi \left[ \mathbf{1}_{\left\{ \tau^\pi(Y_1, W_1, K_{T_{N_t+1}}, x) \leq Z_1 \leq T-t \right\}} E^\pi \left[ \mathbf{1}_{C_n} \middle| \mathcal{F}_{t,1}^\pi \right] \middle| \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right] \\
&= E^\pi \left[ \mathbf{1}_{\left\{ \tau^\pi(Y_1, W_1, K_{T_{N_t+1}}, x) \leq Z_1 \leq T-t \right\}} E^\pi \left[ \mathbf{1}_{\left\{ \{X_{N_t+Z_1+1} < 0\} \cup C_{n-1} \right\}} \middle| \mathcal{F}_{t,1}^\pi \right] \middle| \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right] \\
&= E^\pi \left[ \mathbf{1}_{\left\{ \tau^\pi(Y_1, W_1, K_{T_{N_t+1}}, x) \leq Z_1 \leq T-t \right\}} P^\pi \left[ \left\{ \{X_{N_t+Z_1+1} < 0\} \cup C_{n-1} \right\} \middle| \mathcal{F}_{t+Z_1,0}^\pi \right] \middle| \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right] \\
&= E^\pi \left[ \mathbf{1}_{\left\{ \tau^\pi(Y_1, W_1, K_{T_{N_t+1}}, x) \leq Z_1 \leq T-t \right\}} \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \psi_{n-1}^\pi(t + Z_1, x - u^\pi(Y_1, Z_1, W_1, K_{T_{N_t+1}}), K_{T_{N_t+1}}) \middle| \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right] \\
&= \sum_{h=0}^1 p_{kh} E^\pi \left[ \mathbf{1}_{\left\{ \tau^\pi(Y_1, W_1, h, x) \leq Z_1 \leq T-t \right\}} \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \psi_{n-1}^\pi(t + Z_1, x - u^\pi(Y_1, Z_1, W_1, h), h) \middle| \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right] \\
&= \sum_{h=0}^1 p_{kh} \int_{\underline{w}}^{\bar{w}} \int_0^\infty \\
&\quad \int_{\tau^\pi(y, w, h, x)}^{T-t} \psi_{n-1}^\pi(t + z, x - u^\pi(y, z, w, h), h) dG(z) dF(y) dH(w)
\end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione nella (2.12) otteniamo la (2.10).

□

**Osservazione 13.** *Si osservi che,  $\psi_n^\pi(t, x, k)$ , dipende dalla politica  $\pi = (\phi_t, \phi_{T_{N_t+1}}, \phi_{T_{N_t+2}}, \dots, \phi_{T_{N_t+n} \wedge T_{N_T}})$ , mentre  $\psi_{n-1}^\pi(t+z, x - u_t^\pi(y, z, w, h), h)$  dipende dalla politica  $\pi$  solo attraverso i controlli  $(\phi_{T_{N_t+1}}, \phi_{T_{N_t+2}}, \dots, \phi_{T_{N_t+n} \wedge T_{N_T}})$ . Si tenga presente che abbiamo assunto di scegliere il controllo,  $\phi_k$  solo quando ci si trova all'istante  $T_k$ , e quindi tale controllo dipende, dall'informazione disponibile all'istante  $T_k$ .*





## Capitolo 3

# Confini superiori per la probabilità di rovina

In questa sezione deriveremo dei confini superiori per la probabilità di rovina in un contesto generale e nella prossima sezione minimizzeremo tali confini rispetto alle politiche di riassicurazioni e investimento.

Per sottolineare il fatto che il processo  $X$  definito in (1.11) corrisponde alla scelta di una specifica politica  $\pi$ , in ciò che segue useremo la notazione  $X^\pi$ . Più in generale, per evidenziare la dipendenza di un processo,  $M$ , dal controllo scelto al tempo  $t$ , useremo la notazione  $M^{\phi_t}$ .

Dato un controllo  $\phi_t = (b_t, \delta_t) \in U$  definiamo, per  $t \in [0, T]$ , la variabile casuale:

$$\begin{aligned} V_t^\phi &:= C(b) (Z_{T_{N_{t+1}}} \wedge (T - t)) \\ &\quad - \mathbf{1}_{\{Z_{T_{N_{t+1}}} \leq T-t\}} \left[ (1 - K_{T_{N_{t+1}}}) b Y_{T_{N_{t+1}}} - K_{T_{N_{t+1}}} \delta \left( e^{W_{T_{N_{t+1}}}} - 1 \right) \right] \end{aligned} \tag{3.1}$$

ove  $b = b_t$ ,  $\delta = \delta_t$  e quindi  $\phi = \phi_t$ .

Dalla (2.2) e dalla (3.1), segue che, supposto di trovarci in  $T_n$  con capitale  $X_{T_n} = x > 0$  e scelto il controllo  $\phi_n = (b_n, \delta_n)$ , il processo di rischio ha dinamica di transizione in un passo data da:

$$X_{T_{n+1}}^{\phi_n} = x + V_{T_n}^{\phi_n}. \quad (3.2)$$

Definiamo inoltre, fissato il controllo  $\phi = (b, \delta)$ , per  $r \in (0, r^*)$  e  $k \in \{0, 1\}$  la funzione:

$$l_r^\phi(t, k) := E \left[ e^{-rV_t^\phi} \mid \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right] - 1 \quad (3.3)$$

ove, per ragioni che mostreremo in seguito, distinguiamo la dipendenza di  $l^\pi$  da  $r$  dalla dipendenza da  $(t, k)$ .

**Osservazione 14.** Ricordiamo dalle proprietà del valor medio, la regola di indipendenza.

*Se  $\mathcal{H}$  è una  $\sigma$ -algebra indipendente da  $\sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$ , allora*

$$E[X | \sigma(\mathcal{H}, \mathcal{G})] = E[X | \mathcal{G}], q.c.$$

Consideriamo le  $\sigma$ -algebre  $\mathcal{H}^\pi := \sigma(X_{N_t}, Z_{N_t}, Y_{N_t}, W_{N_t})$  e  $\mathcal{G}^\pi = \sigma(K_{N_t})$ , per una fissata politica  $\pi$ . Segue che  $\mathcal{F}_{t,0}^\pi = \sigma(\mathcal{G}^\pi, \mathcal{H}^\pi)$ .

Per l'assunzione 7 punto (i) si ha che  $\mathcal{H}^\pi$  è indipendente da  $\mathcal{G}^\pi$  e da  $\sigma(\mathcal{G}^\pi, \sigma(V_t^\pi))$ , ma allora per la regola di indipendenza vale che:

$$E[V_t^\pi | \mathcal{F}_{t,0}^\pi] = E[V_t^\pi | \sigma(\mathcal{H}^\pi, \mathcal{G}^\pi)] = E[V_t^\pi | \mathcal{G}^\pi] := E_k[V_t^\pi], q.c.$$

**Osservazione 15.**

Si noti che, dall'osservazione 8 punto (iii), si ha che

$$\lim_{r \uparrow r^*} l_r^\phi(t, k) = +\infty \quad \forall \phi = (b, \delta) \in U$$

Prima di dimostrarlo, osserviamo che:

1. poiché la funzione  $f(x) = e^{-x}$  è decrescente in  $x$  si ha che, per ogni  $z \in [0, +\infty)$ ,  $w \in [\underline{w}, \bar{w}]$ ,  $h \in \{0, 1\}$

$$C(b)(z \wedge (T - t)) + \delta h \mathbf{1}_{\{z \leq T-t\}} (e^w - 1) \leq C(b)(T - t) + \delta (e^{\bar{w}} - 1)$$

da cui

$$e^{-r(C(b)(z \wedge (T-t)) + \delta h \mathbf{1}_{\{z \leq T-t\}}(e^w - 1))} \geq e^{-r(C(b)(T-t) + \delta(e^{\bar{w}} - 1))}$$

e, in particolare, per la monotonia del valore atteso,

$$E_k \left[ e^{-r(C(b)(Z_1 \wedge (T-t)) + \delta K_{T_{N_t+1}} \mathbf{1}_{\{Z_1 \leq T-t\}}(e^{W_1} - 1))} \right] \geq e^{-r(C(b)(T-t) + \delta(e^{\bar{w}} - 1))}$$

2. Per ogni  $r \geq 0$ , vale che  $D(r) := e^{-r(C(b)(T-t) + \delta(e^{\bar{w}} - 1))}$  è positiva, limitata e costante in  $(z, w, h, y)$ .
3. dai punti precedenti si ha che ,

$$\begin{aligned} 1 + I_r^\phi(t, k) &= E_k \left[ e^{-rV_t^\phi} \right] \\ &= E_k \left[ e^{-r(C(b)(Z_1 \wedge (T-t)) - \mathbf{1}_{\{Z_1 \leq T-t\}} [(1 - K_{T_{N_t+1}}) bY_1 - K_{T_{N_t+1}} \delta(e^{W_1} - 1)])} \right] \end{aligned}$$

ovvero,

$$\begin{aligned} &1 + I_r^\phi(t, k) \\ &= E_k \left[ e^{-r[C(b)(Z_1 \wedge (T-t)) + \mathbf{1}_{\{Z_1 \leq T-t\}} K_{T_{N_t+1}} \delta(e^{W_1} - 1)]} \right. \\ &\quad \left. \cdot e^{r \mathbf{1}_{\{Z_1 \leq T-t\}} (1 - K_{T_{N_t+1}}) bY_1} \right] \\ &\stackrel{\geq(1)}{\geq} E_k \left[ e^{-r[C(b)(T-t) + \delta(e^{\bar{w}} - 1)]} e^{r \mathbf{1}_{\{Z_1 \leq T-t\}} (1 - K_{T_{N_t+1}}) bY_1} \right] \\ &\stackrel{=(2)}{=} e^{-r[C(b)(T-t) + \delta(e^{\bar{w}} - 1)]} E_k \left[ e^{r \mathbf{1}_{\{Z_1 \leq T-t\}} (1 - K_{T_{N_t+1}}) bY_1} \right] \\ &= D(r) \left[ p_{k,0} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{r \mathbf{1}_{\{z \leq T-t\}} by} dF(y) dG(z) + p_{k,1} \right] \\ &= D(r) \left[ p_{k,1} + p_{k,0} \int_0^\infty \int_0^{T-t} e^{rby} dG(z) + (1 - G(T-t)) dF(y) \right] \\ &= D(r) (1 + G(T-t) p_{k,0} (E[e^{rby_1}] - 1)) \end{aligned}$$

Ma allora passando al limite per  $r \uparrow r^*$ , e assumendo che  $p_{k,0} > 0$  si ha che:

$$\lim_{r \uparrow r^*} l_r^\phi(t, k) \geq D(r^*) \left( 1 + G(T - t) \left( \lim_{r \uparrow r^*} E[e^{rbY_1}] - 1 \right) \right)$$

ove si è usato il fatto che il limite del prodotto è il prodotto dei limiti. In particolare dall'osservazione 8 (iii), dal fatto che  $D(r^*) > 0$  e  $b \neq 0$ , per il punto precedente (2), segue che

$$\lim_{r \uparrow r^*} l_r^\phi(t, k) = +\infty$$

**Definizione 16.**

Diremo che un controllo  $\phi_t = (b_t, \delta_t)$  è **fortemente ammissibile** al tempo  $t$ , e denotiamo l'insieme di tali controlli con  $\mathcal{A}_t$  se  $(b_t, \delta_t) \in U$  e, per ogni  $k \in \{0, 1\}$  vale che  $E_k\{V_t^{\phi_t}\} > 0$ .

e di conseguenza,

**Definizione 17.**

Diremo che una politica  $\pi = \{\phi_{T_n}\}_{n \geq 1}$  è **fortemente ammissibile** e denotiamo l'insieme di tali politiche con  $\mathcal{A}$  se in ogni istante  $T_n \in [0, T]$  il corrispondente controllo  $\phi_{T_n} \in \mathcal{A}_{T_n}$ .

**Proposizione 18.** *Nell'ipotesi che le assunzioni 7 valgano, possiamo affermare che l'insieme delle politiche ammissibili,  $\mathcal{A}$ , definito come nella definizione 17 è non vuoto.*

*Dimostrazione.*

Basta dimostrare, che  $\mathcal{A}_t$  è non vuoto per ogni  $t \in [0, T]$ . Data una politica  $\phi = (b_t, 0) \in U$  questa è fortemente ammissibile se e soltanto se

$$\begin{aligned}
& E_k \left[ V_t^{\phi_t} \right] = \\
& = C(b_t) E_k [Z_1 \wedge (T - t)] - p_{k,0} G(T - t) b_t E_k [Y_1] \\
& \stackrel{(*)}{=} C(b_t) E [Z_1 \wedge (T - t)] - p_{k,0} G(T - t) b_t E [Y_1] \\
& = \left( c - (1 - b_t) \frac{(1 + \theta) E[Y_1]}{E\{Z_1 \wedge T\}} \right) E [Z_1 \wedge (T - t)] + \\
& \quad - p_{k,0} G(T - t) b_t E [Y_1] \\
& = C(0) E [Z_1 \wedge (T - t)] + \\
& \quad + b_t E [Y_1] \left( (1 + \theta) \frac{E [Z_1 \wedge (T - t)]}{E [Z_1 \wedge T]} - p_{k,0} G(T - t) \right) \\
& > 0 \tag{3.4}
\end{aligned}$$

ove in  $\stackrel{(*)}{=}$  si è usato il fatto che, dall'assunzione 7 punto (i), le variabili  $Z_1$  e  $Y_1$  sono indipendenti dall'evento  $\{K_{N_t} = k\}$ .

Ora, la (3.4) è vera, se e soltanto se

$$1 > b_t > - \frac{C(0) E [Z_1 \wedge (T - t)] E [Z_1 \wedge T]}{E[Y_1] \left( (1 + \theta) E [Z_1 \wedge (T - t)] - p_{k,0} G(T - t) E [Z_1 \wedge T] \right)}. \tag{3.5}$$

La (3.5) ha soluzione soltanto se

$$\begin{aligned}
C(0) &> -\frac{E[Y_1] \left( (1 + \theta) E[Z_1 \wedge (T - t)] - p_{k,0} G(T - t) E[Z_1 \wedge T] \right)}{E[Z_1 \wedge (T - t)] E[Z_1 \wedge T]} \\
&= -E[Y_1] \left( \frac{(1 + \theta)}{E[Z_1 \wedge T]} - \frac{p_{k,0} G(T - t)}{E[Z_1 \wedge T - t]} \right) \\
&\Leftrightarrow \\
c &> \frac{p_{k,0} E[Y_1] G(T - t)}{E[Z_1 \wedge T - t]} \tag{3.6}
\end{aligned}$$

ove, nell'ultima implicazione, abbiamo utilizzato la definizione di  $C(0)$ .  
Si osservi che la (3.6) è sempre vera, grazie all'assunzione 7 punto (iii).  $\square$

### Osservazione 19.

La proposizione precedente afferma che  $\mathcal{A}$  è non vuoto nell'ipotesi che l'assunzione 7 punto (iii) sia vera. Quest'ultima assume che la prima disuguaglianza della (3.6) valga per ogni  $t \in [0, T)$  e quindi anche per  $t \uparrow T$ .

L'assunzione 7 punto (iii) può sembrare dunque molto forte, ma si osservi che, per esempio, se consideriamo  $Z \equiv \exp(\lambda)$ , si ha che  $\frac{G(T-t)}{E\{Z_1 \wedge (T-t)\}} = \lambda$  e quindi è costante nel tempo. Segue che, in tal caso, basta che tale assunzione sia verificata all'istante  $t = t_0 = 0$ , per avere la certezza che valga per ogni  $t \in [0, T]$ .

**Proposizione 20.** *Nell'ipotesi che le assunzioni 7 valgano, per un dato controllo  $\phi = (b, \delta) \in U$  si ha per la funzione  $l_r^\pi$  la seguente formula esplicita:*

$$\begin{aligned}
l_r^\phi(t, k) &= \int_0^{T-t} e^{-rC(b)z} dG(z) \left[ p_{k0} \int_0^{+\infty} e^{rby} dF(y) + p_{k1} \int_{\underline{w}}^{\bar{w}} e^{-r\delta(e^w - 1)} dH(w) \right] \\
&\quad + ((1 - G(T - t))e^{-rC(b)(T-t)} - 1). \tag{3.7}
\end{aligned}$$

*Dimostrazione.*

Dalla (3.1) e dalla (3.3) segue che :

$$\begin{aligned}
& 1 + l_r^\phi(t, k) = E_k \left[ e^{-r[C(b)(Z_1 \wedge (T-t)) - \mathbf{1}_{\{Z_1 \leq T-t\}}[(1-K_{T_{N_t+1}})bY_1 - K_{T_{N_t+1}}\delta(e^{W_1}-1)]]} \right] \\
& = \sum_{h=0,1} p_{kh} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\underline{w}}^{\bar{w}} e^{r[C(b)(z \wedge (T-t)) - \mathbf{1}_{\{z \leq T-t\}}[(1-h)by - h\delta(e^w-1)]]} dH(w) dF(y) dG(z) \\
& = \sum_{h=0,1} p_{kh} \int_0^\infty \int_{\underline{w}}^{\bar{w}} \int_0^{T-t} e^{-r[C(b)z - (1-h)by + h\delta(e^w-1)]} dG(z) dH(w) dF(y) + \\
& \quad + \sum_{h=0,1} p_{kh} \int_0^\infty \int_{\underline{w}}^{\bar{w}} \int_{T-t}^\infty e^{-rC(b)(T-t)} dG(z) dH(w) dF(y) \\
& = \sum_{h=0,1} p_{kh} \int_0^\infty \int_{\underline{w}}^{\bar{w}} \int_0^{T-t} e^{-r[C(b)z - (1-h)by + h\delta(e^w-1)]} dG(z) dH(w) dF(y) + \\
& \quad + e^{-rC(b)(T-t)}(1 - G(T-t))
\end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned}
l_r^\phi(t, k) & = \int_0^{T-t} e^{-rC(b)z} dG(z) \left[ p_{k,0} \int_0^{+\infty} e^{rby} dF(y) + p_{k,1} \int_{\underline{w}}^{\bar{w}} e^{-r\delta(e^w-1)} dH(w) \right] \\
& \quad + ((1 - G(T-t))e^{-rC(b)(T-t)} - 1).
\end{aligned}$$

Ove abbiamo usato, l' indipendenza delle variabili  $(Z_1, Y_1, W_1)$ , che ci permette di riscrivere il valor medio del prodotto come il prodotto dei valori medi.

□

**Proposizione 21.**

Per ogni  $(t, k) \in [0, T] \times \{0, 1\}$  e ogni controllo  $\phi_t \in \mathcal{A}_t$  abbiamo che :

1. Come funzione di  $r \in (0, r^*)$  con  $r^* = \bar{r}/b_{\min}$  e  $\bar{r}$  tale che le assunzioni 7 (ii) siano soddisfatte,  $l_r^{\phi_t}(t, k)$  è convessa con pendenza negativa in  $r = 0$  ;
2. l'equazione  $l_r^{\phi_t}(t, k) = 0$ , vista come equazione nella  $r$ , ha un' unica radice positiva in  $(0, r^*)$ , che denotiamo con  $R^{\phi_t}(t, k)$ , così che la relazione che definisce  $R^{\phi_t}(t, k)$  è:

$$l_{R^{\phi_t}(t, k)}^{\phi_t}(t, k) = 0 \quad \forall (t, k) \in [0, T] \times \{0, 1\} \quad (3.8)$$

*Dimostrazione.*

Differenziando rispetto ad  $r$  sotto il segno di valore atteso si ha che:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} (l_r^{\phi_t}(t, k))|_{r=0} = E_k \{-V_t^{\phi_t}\} < 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} (l_r^{\phi_t}(t, k)) = E_k \left\{ \left( V_t^{\phi_t} \right)^2 e^{-rV_t^{\phi_t}} \right\} > 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

ove la prima disuguaglianza segue dall'ammissibilità di  $\pi$ .

Ora, il punto 1) segue facilmente dalla (3.9) , mentre per dimostrare la 2) si osservi che dall' osservazione 15 si ha che  $\lim_{r \uparrow r^*} l_r^{\phi_t}(t, k) = +\infty$ . Questo, unitamente all'affermazione del punto 1) e alla convessità di  $l_r^{\phi_t}(t, k)$ , ci permette di concludere che esiste un'unica radice positiva. □

**Definizione 22.**

Per una data politica  $\phi_t \in \mathcal{A}_t$  e per  $t \in [0, T]$  sia

$$R_t^{\phi_t} := \min [R^{\phi_t}(t, 0), R^{\phi_t}(t, 1)] \quad (3.10)$$



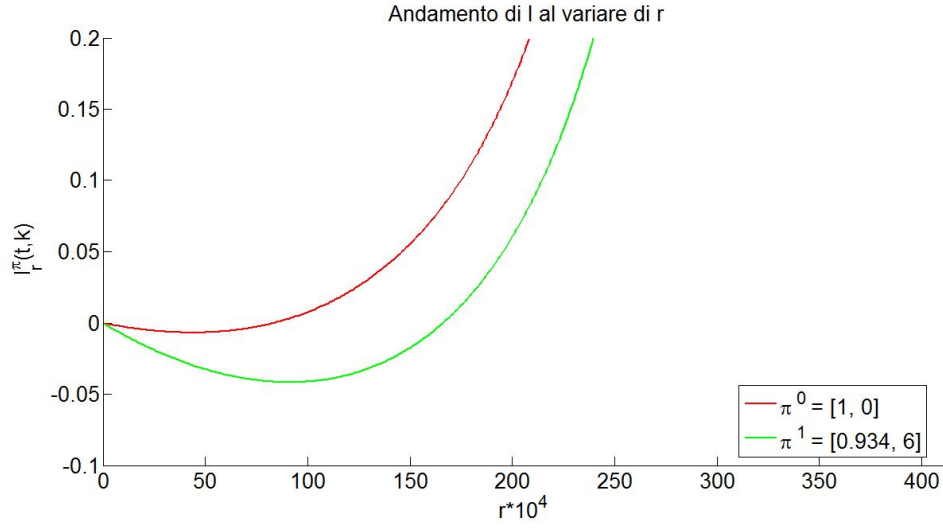


Figura 3.1: grafico di  $l_r^\pi(t, k)$  al variare di  $r$  per 2 fissate politiche

**Osservazione 23.** Si noti che dall'osservazione 15 e dalla definizione 22, possiamo sempre assumere che  $R^{\phi_t}(t, k) < r^* \quad \forall (t, k) \in [0, T] \times \{0, 1\}$ . In particolare, si ha che

$$l_{R_t^{\phi_t}}^{\phi_t}(t, k) = E_k \left[ e^{-R_t^{\phi_t} V_t^{\phi_t}} \right] - 1 \leq 0 \quad (3.11)$$

In vista dei risultati che otterremo nella prossima sezione, dimostriamo adesso i seguenti lemmi.

**Lemma 24.**

Supponendo di trovarci all'istante  $t \in [0, T]$ , con  $K_{T_{N_t}} = k \in \{0, 1\}$  e capitale  $X_t = x > 0$ , abbiamo

$$\psi_1^\pi(t, x, k) \leq e^{-R_t^\pi x} \quad (3.12)$$

ove  $R_t^\pi$  è come nella definizione 22 (si veda (3.10)) e, in questo caso,  $\pi = \phi_t$ .

*Dimostrazione.*

Si noti innanzitutto che, dalla (3.2) e dalla sua definizione in (3.1), la variabile casuale  $V_t^{\phi_t}$  rappresenta gli incrementi del processo di rischio  $X_t$  tra due eventi successivi, a patto che entrambi gli eventi si verifichino prima di  $T$ .

In accordo alla definizione della probabilità di rovina in al più un salto,(2.6), possiamo scrivere

$$\psi_1^\pi(t, x, k) = P^\pi \{X_{N_{t+1}} \leq 0 \mid \mathcal{F}_{t,0}^\pi\} = P^\pi \left( V_t^{\phi_t} \leq -x \mid \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right)$$

d'altra parte, dalla disuguaglianza di Chebyshev abbiamo per  $r > 0$

$$\begin{aligned} P^\pi \left( V_t^{\phi_t} \leq -x \mid \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right) &= P^\pi \left( e^{-rV_t^{\phi_t}} \geq e^{rx} \mid \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right) \\ &\leq e^{-rx} E^\pi \left[ e^{-rV_t^{\phi_t}} \mid \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right] \\ &= e^{-rx} E^\pi \left[ e^{-rV_t^{\phi_t}} \mid \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right] \\ &= e^{-rx} E_k^\pi \left[ e^{-rV_t^{\phi_t}} \right] \end{aligned}$$

ove, l'ultima uguaglianza segue dall'osservazione 14.

Per  $r = R_t^{\phi_t}$ , usando le due relazioni precedenti, otteniamo

$$\psi_1^\pi(t, x, k) \leq e^{-R_t^{\phi_t} x} E_k^\pi \left[ e^{-R_t^{\phi_t} V_t^{\phi_t}} \right] \leq e^{-R_t^{\phi_t} x}$$

ove, nell'ultima disuguaglianza, abbiamo sfruttato l'osservazione 23 e quindi il fatto che

$$E_k^\pi \left[ e^{-R_t^{\phi_t} V_t^{\phi_t}} \right] \leq 1$$

□

In ciò che segue scriveremo  $E^\pi [\psi_{n-1}^\pi(t + Z_1, X_{t+Z_1}, K_{t+Z_1}) | \mathcal{F}_{t+Z_1,0}^\pi]$  in luogo di

$$\sum_{h=0}^1 p_{kh} \int_{\underline{w}}^{\bar{w}} \int_0^\infty \int_0^{+\infty} \psi_{n-1}^\pi(t + z, x - u^\pi(y, z, w, h), h) dG(z) dF(y) dH(w)$$

facendo così riferimento al valore atteso della probabilità di rovina in  $n - 1$  salti, a partire dall'istante aleatorio  $t + Z_1$  con capitale (aleatorio)  $X_{t+Z_1}$  e salto (aleatorio)  $K_{t+Z_1}$ .

**Proposizione 25.**

Per ogni coppia  $(t, k) \in [0, T] \times \{0, 1\}$  abbiamo

$$\psi_n^\pi(t, x, k) \leq E^\pi \left[ \sum_{h=N_t+1}^{(N_t+n) \wedge N_T} e^{-R_{T_{h-1}}^{\phi_{h-1}} X_{T_{h-1}}} | \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right] \quad (3.13)$$

ove  $\pi = (\phi_t, \phi_{T_{N_t+1}}, \dots, \phi_{T_{N_t+n} \wedge T_{N_T}})$ ,  $R_{T_{h-1}}^{\phi_{h-1}}$  è definita come in (3.10) per  $t = T_{h-1}$  e  $T_{N_t} = t$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $\mathcal{F}_{t,m}^\pi$  la  $\sigma$ -algebra definita come in (2.5). Poichè  $m < m + 1$  allora

$$\mathcal{F}_{T_m,0}^\pi = \mathcal{F}_{t,m}^\pi \subseteq \mathcal{F}_{t,m+1}^\pi = \mathcal{F}_{T_{m+1},0}^\pi$$

e quindi dalle proprietà del valore medio condizionato, segue che per ogni variabile casuale,  $X$ , per la quale esiste  $E[X | \mathcal{F}_{T_m}^\pi]$  vale che :

$$E[ X | \mathcal{F}_{T_m,0}^\pi ] = E[ E[ X | \mathcal{F}_{T_{m+1},0}^\pi ] | \mathcal{F}_{T_m,0}^\pi ].$$

Dimostriamo adesso (3.13) per induzione su  $n$ .

Per  $n = 1$ , la (3.13) diventa

$$\psi_1^\pi(t, x, k) \leq \sum_{h=N_t+1}^{(N_t+1) \wedge N_T} E^\pi \left[ e^{-R_{T_{h-1}}^{\phi_{h-1}} X_{T_{h-1}}} | \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right] = e^{-R_t^{\phi_t} x}$$

che è vera per il lemma 24, e perché si fallisce in un passo solo se  $N_T - N_t \geq 1$ . Supponiamo adesso che la (3.13) sia vera per  $n - 1$ , ovvero : per ogni coppia  $(t, k) \in [0, T] \times \{0, 1\}$  abbiamo

$$\psi_{n-1}^\pi(t, x, k) \leq E_{x,k}^\pi \left[ \sum_{h=N_t+1}^{(N_t+n-1) \wedge N_T} e^{-R_{T_{h-1}}^{\phi_{h-1}} X_{T_{h-1}}} \mid \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right]$$

allora, dalla formula ricorsiva (2.10), dalla 2.11 e dal lemma 24 segue che:

$$\begin{aligned} \psi_n^\pi(t, x, k) &= \sum_{h=0}^1 p_{kh} \int_{\underline{w}}^{\bar{w}} \int_0^\infty G(\tau^\pi(y, w, h, x) \wedge (T - t)) dF(y) dH(w) \\ &+ \sum_{h=0}^1 p_{kh} \int_{\underline{w}}^{\bar{w}} \int_0^\infty \int_{\tau^\pi(y, w, h, x)}^{T-t} \psi_{n-1}^\pi(t + z, x - u^\pi(y, z, w, h), h) dG(z) dF(y) dH(w) \\ &\leq e^{-R_t^\pi x} + E^\pi \left[ \psi_{n-1}^\pi(t + Z_1, X_{t+Z_1}, K_{t+Z_1}) \mid \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right] \\ &\leq e^{-R_t^\pi x} + E^\pi \left[ E^\pi \left[ \sum_{h=N_{t+Z_1}+1}^{(N_{t+Z_1}+n-1) \wedge N_T} e^{-R_{T_{h-1}}^{\phi_{h-1}} X_{T_{h-1}}} \mid \mathcal{F}_{t+Z_1,0}^\pi \right] \mid \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right] \end{aligned}$$

poiché nell'intervallo  $(t, t + Z_1]$  è avvenuto un salto e quindi si ha che  $N_{t+Z_1} = N_t + 1$  e  $e^{-R_t^\pi x} = e^{-R_{T_{N_t}}^\pi x} = e^{-R_{T_{(N_t+1)-1}}^\pi x}$  segue che

$$\begin{aligned}
\psi_n^\pi(t, x, k) &\leq e^{-R_t^\pi x} + E^\pi \left[ \sum_{h=N_t+2}^{(N_t+n) \wedge N_T} e^{-R_{T_{h-1}}^{\phi_{h-1}} X_{T_{h-1}}} \mid \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right] \\
&= E^\pi \left[ \sum_{h=N_t+1}^{(N_t+n) \wedge N_T} e^{-R_{T_{h-1}}^{\phi_{h-1}} X_{T_{h-1}}} \mid \mathcal{F}_{t,0}^\pi \right]
\end{aligned}$$

□



# Capitolo 4

## Ottimizzazione dei confini superiori

### 4.1 Politiche

Molti problemi applicativi possono essere modellati come problemi di controllo ottimo, ovvero problemi in cui lo scopo è quello di determinare un controllo che sia in qualche senso ‘ottimo’, o ‘quasi ottimo’. In ciò che segue, basandoci su Runggaldier (1993) ([7]) daremo definizioni importanti riguardanti i problemi di controllo stocastici e i concetti di ottimalità. Per maggiori dettagli sulle politiche e sui problemi di controllo Markoviani si vedano Hernández-Lerma O. (1989) ([5]) e Hernández-Lerma, O. and Lasserre, J. B. (1996) [4]

**Definizione 26.** *Una politica è una regola (o funzione) che determina una decisione in base alle informazioni di cui si dispone quando il processo si trova, in un determinato istante, in un certo stato.*

I problemi di controllo stocastici sono intrinsecamente complessi e consentono di definire il concetto di ottimalità in vari modi.

In un tipico problema di controllo si ha un sistema in cui lo stato evolve, sotto l’influenza del controllo, come un processo stocastico con descrizione probabilistica nota.

Consideriamo per semplicità una formulazione a tempo discreto su un fissato orizzonte temporale finito  $T$ , e denotiamo con  $X_k$  lo stato (aleatorio) del sistema all’istante  $T_k$ , una possibile descrizione è

$$X_{k+1} = f_k(X_k, u_k, V_k), \quad k = 0, 1, \dots, k_T - 1 \quad (4.1)$$

ove  $u_k$  è la variabile di controllo che prende valori in un certo insieme  $U$ ;  $V_k$  è una data perturbazione stocastica (nel nostro caso la terna  $(Z_{k+1}, Y_{k+1}, W_{k+1})$ ) e  $X_0$  una variabile casuale (possibilmente degenera).

Indichiamo con  $\mathcal{F}_i = \sigma(X_j \mid 0 \leq j \leq i)$  la  $\sigma$ -algebra generata dal processo  $X_n$ , cioè la più piccola  $\sigma$ -algebra che rende  $X_j$  misurabile per ogni  $0 \leq j \leq i$  e con  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i, i \geq 0)$  la famiglia di tali  $\sigma$ -algebre, ovvero la filtrazione naturale del processo. Il problema è scegliere una ‘politica di controllo’ adattata alla filtrazione  $\mathcal{F}$ , ovvero una politica che si basi sull’informazione disponibile. Tale informazione consiste nella conoscenza a priori delle proprietà strutturali del sistema così come della storia corrente dei controlli adottati. Al fine di scegliere la strategia ottima è necessario avere un ‘funzione obiettivo’ per il controllo,

$$J = E_t[C(T, X_0^T, U_0^{T-})] = E[C(T, X_0^T, U_0^{T-}) \mid \mathcal{F}_t]$$

ove, se  $k_T$  è il numero (deterministico) di istanti decisionali nell’intervallo  $[0, T]$ , con il simbolo  $X_0^T$  denotiamo il vettore casuale  $X_0^T = (X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_{k_T}})$  e analogamente con il simbolo  $U_0^{T-}$  denotiamo il vettore casuale  $U_0^{T-} = (U_{t_0}, U_{t_1}, \dots, U_{t_{k_T-1}})$ , mentre con  $C(\cdot)$  indichiamo una data funzione costo (o guadagno), che supponiamo essere limitata dal basso (risp dall’alto).

### Osservazione 27.

*Si osservi che dalla sua definizione, la funzione obiettivo, è il valore atteso della funzione costo, che non dipende solo dall’informazione corrente, ma anche dall’evoluzione futura del processo. Dunque ogni controllo preso in qualsiasi istante decisionale avrà degli effetti sull’evoluzione futura del processo, e di conseguenza può essere scelto tenendo conto di tali effetti.*

Esiste una varietà di politiche di controllo basate sull’informazione disponibile e possono essere classificate, sulla base di quanta informazione esse utilizzano.

### Definizione 28.

*Un controllo è detto ad **anello aperto (O.L)** se è valutato solo sulla base della struttura e della descrizione probabilistica del processo degli stati e della funzione costo da minimizzare. In particolare dunque, il controllo ottimo, può essere determinato così:*

$$J^{OLO} := \min_{U_0^{k_T-1}} E \left[ C(T, X_0^{k_T}, U_0^{k_T-1}) \right]$$



ove la minimizzazione è fatta su  $U_0^{k_T} = (u_0, u_1, \dots, u_{k_T-1})$  che è una sequenza adattata alla filtrazione  $\mathcal{F}$ , con  $u_k \in U$  per  $h = 0, \dots, k_T - 1$ .

**Definizione 29.**

Un controllo è detto ad **anello-chiuso con retroazione (feedback) (C.L)** se è valutato sia sulla base dell'intera informazione attuale che sull'anticipazione, in senso casuale, dei feedback futuri.

L'anticipazione probabilistica di osservazioni future parte da una valutazione preventiva dell'impatto che i controlli hanno sulla possibile evoluzione del processo. Precisamente conduce a stimare, sulla base dei dati disponibili, il valore dell'informazione ottenuta dalle osservazioni future.

In particolare dunque, un controllo ottimo di questo tipo, può essere determinato così:

$$J^{CLO} := \min_{u_0} E[\dots \min_{u_{k_T-2}} E[\min_{u_{k_T-1}} E[C(T, X_0^{k_T}, U_0^{k_T-1}) | \mathcal{F}_{k_T-2}] | \mathcal{F}_{k_T-3}] | \dots | \mathcal{F}_0]$$

ove con  $\mathcal{F}_{k_T-i}$  indichiamo la  $\sigma$ -algebra generata da  $(X_s | 0 \leq s \leq k_T - i)$ .

Si noti che la speranza nidificata mostra che il controllo CL-ottimale anticipa successive retroazioni, ovvero, ogni volta che il controllo è calcolato, viene calcolata la media delle osservazioni successive, condizionatamente all'informazione disponibile.

**Definizione 30.**

Una politica è detta **miope**, se le scelte fatte oggi, non tengono in considerazione le ripercussioni che possono avere sull'evoluzione futura del processo. Nel nostro contesto, una politica miope è ottima se utilizza, ad ogni istante decisionale, il controllo che minimizza la probabilità di rovina in un passo, o più precisamente il suo confine superiore.

In altre parole, una politica miope è ottima se, all'istante  $t = T_n$ , con capitale  $x = X_{T_n}$  viene adottato il controllo

$$\phi_n^* = (b_n, \delta_n) = \arg \min_{\phi_n \in \mathcal{A}_{T_n}} e^{-R_{T_n}^{\phi_n} X_{T_n}} \quad (4.2)$$

**Osservazione 31.**

Dalla (3.13), si vede che, minimizzare il confine superiore per la probabilità di rovina in al più  $n$  salti, è equivalente a minimizzare il valore atteso di una somma, ovvero scegliere la politica  $\pi = (\phi_{N_t}, \phi_{N_t+1}, \dots, \phi_{(N_t+n) \wedge N_T})$  tale che:

$$\pi = \arg \min_{\pi \in \mathcal{A}} E_{x,k}^{\pi} \left[ \sum_{h=N_t+1}^{(N_t+n) \wedge N_T} e^{-R_{T_{h-1}}^{\phi_{h-1}}} X_{T_{h-1}} \right].$$

Se ci restringiamo alla ricerca di una politica che sia miope, e quindi minimizzare il valore atteso della somma equivale a minimizzare ogni singolo addendo, allora è sufficiente scegliere la politica  $\pi = (\phi_{N_t}, \phi_{N_t+1}, \dots, \phi_{(N_t+n) \wedge N_T})$  tale che ogni singolo controllo,  $\phi_{N_t+h}^*$  per  $h = 0, 1, \dots, n \wedge (N_T - N_t)$  sia soluzione della (4.2).

In altri termini, la politica miope ottima che minimizza il confine superiore per la probabilità di rovina in al più  $n$  salti, è la politica che adotta in ogni istante decisionale  $T_{N_t+h}$  il controllo  $\phi_{N_t+h}^*$ , ovvero il controllo miope ottimo che minimizza il confine superiore per la probabilità di rovina in al più un salto.

Ma allora una tale strategia richiede di scegliere in ogni istante di salto,  $T_{N_t+h}$  il controllo  $\phi_{N_t+h}^*$  che minimizza  $e^{-R_{T_{N_t+h}}^{\phi_{N_t+h}^*}} X_{T_{N_t+h}}$ , o equivalentemente che massimizza  $R_{T_{N_t+h}}^{\phi_{N_t+h}^*}$ .

**Osservazione 32.**

Si osservi che, data una coppia  $(t, k)$ , e un fissato controllo, fortemente ammissibile,  $\phi_t^0$ , la funzione  $l_{R_0}^{\phi_t^0}(t, k)$  avrà uno zero positivo, e dunque possiamo definire  $R_0 := R_t^{\phi_t^0}$  come in (3.10). Ora, se l'obiettivo è quello di massimizzare  $R_t^{\phi_t}$ , vogliamo capire come si può determinare una politica  $\phi_t^1$  tale che  $R_1 := R_t^{\phi_t^1}$ , sia maggiore di  $R_0$ .

A tale proposito, si osservi che, se vale la relazione :

$$l_{R_0}^{\phi_t^1}(t, k) \leq l_{R_0}^{\phi_t^0}(t, k) \leq 0$$

allora,  $R_1 > R_0$ . Dunque, per essere sicuri di determinare  $\phi_t^1$ , con le caratteristiche richieste, si può minimizzare la funzione  $l_{R_0}^{\phi_t^1}(t, k)$  rispetto ai controlli ammissibili.

Si noti che, agire così, non ci assicura che la politica  $\phi_t^1$  trovata sia tale da rendere massimo  $R_t^{\phi_t^1}$ , siamo però sicuri che iterando tale procedimento,

possiamo ogni volta determinare un  $R_t^\phi$  maggiore del precedente.  
 Poichè dall'osservazione 23 si ha che  $R_t^\phi < r^*$ , possiamo affermare che una tale procedura converge al controllo ottimo  $\phi_t^*$  che massimizza  $R_t^\phi$ .

## 4.2 Policy Improvement

Come già detto, in generale non è semplice ottenere una soluzione esplicita al problema di riassicurazione e investimento, se lo scopo è quello di minimizzare la probabilità di rovina.

Se ci restringiamo alla ricerca di una politica miope che minimizza il confine superiore, possiamo in ogni istante, determinare il controllo ottimo risolvendo la (4.2).

Come già detto nell'osservazione 31 per ottenere, dato  $t \in [0, T]$ , il controllo che risolve (4.2) è sufficiente scegliere il controllo che massimizza  $R_t^\pi = \min \{R^\pi(t, 0), R^\pi(t, 1)\}$ .

A questo scopo, in questa sezione proponiamo un algoritmo di tipo 'policy improvement'.

Per quanto riguarda la massimizzazione di  $R_t^\pi$ , si noti che basta che la scelta delle politiche di controllo  $\phi = (b, \delta)$  sia fatta solo negli istanti temporali in cui avvengono i salti  $T_n$ . La massimizzazione di  $R_t^\pi$  rispetto a  $\pi \in \mathcal{A}$  è quindi fatta per le coppie  $(t, k)$  della forma  $(T_n, K_{T_n})$  che portano ad una politica  $\pi$  con controllo al tempo  $T_n$ ,  $\phi_{T_n} = (b_{T_n}, \delta_{T_n})$ .

Il nostro problema è quello di determinare una politica di riassicurazione e investimento miope ottimale, ove con ottimale intendiamo la politica miope che minimizza il confine superiore trovato per la probabilità di rovina in un passo.

Grazie all'osservazione 32, possiamo dunque determinare in ogni istante tale controllo risolvendo i seguenti sottoproblemi :

- (i) Per una data politica  $\bar{\pi} \in \mathcal{A}$  determinare  $l_r^{\bar{\pi}}(t, k)$  per le coppie  $(t, k)$  della forma  $(T_n, K_{T_n})$  ;
- (ii) si determina  $R^{\bar{\pi}}(T_n, K_{T_n})$  come soluzione rispetto ad  $r$  dell'equazione  $l_r^{\bar{\pi}}(t, k) = 0$  e si pone  $R_t^{\bar{\pi}} = \min [R^{\bar{\pi}}(t, 0), R^{\bar{\pi}}(t, 1)]$ ;
- (iii) si migliora la politica  $\bar{\pi}$  minimizzando  $l_{R_t^{\bar{\pi}}}^{\bar{\pi}}(t, k)$  rispetto a  $\pi \in \mathcal{A}$ .

Questo porta ad un approccio di tipo 'Policy improvement', e precisamente,

si procede per ogni coppia  $(T_n, K_{T_n})$  nel seguente modo:

- (a) si parte da una data politica fortemente ammissibile  $\pi_n^0 = (b_n^0, \delta_n^0) \in \mathcal{A}$ ;
- (b) si determina  $R^{\pi_n^0}$  corrispondente a  $\pi_n^0$ ;
- (c) si determina  $\pi_n^1 \in \mathcal{A}$  che minimizza  $l_{R^{\pi_n^0}}^\pi(T_n, K_{T_n})$  rispetto a  $\pi \in \mathcal{A}$ ;
- (d) si ripete l'algoritmo finchè non è soddisfatto un criterio di arresto, per esempio quando  $\pi_n^{i+1} = \pi_n^i$ .

**Osservazione 33.**

*Si osservi inoltre che se il controllo  $\pi^0$  da cui si parte è una politica fortemente ammissibile, come nella definizione 16,  $\pi^0 \in \mathcal{A}_t$ , allora si può estendere la ricerca del minimo ( passo (c) ), a tutte le politiche in  $U$ , infatti tra tutte le politiche ammissibili, quella che minimizza  $l_{R^0}^\pi(t, k)$  sarà necessariamente fortemente ammissibile.*

*A dimostrazione di ciò, si noti che se il controllo  $\bar{\pi} \in U$  non è fortemente ammissibile, allora dalla definizione 16 si ha  $E[V_t^{\bar{\pi}}] < 0$  e quindi la (3.9) diventa*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} (l_r^{\phi_t}(t, k))|_{r=0} = E_k\{-V_t^{\phi_t}\} > 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} (l_r^{\phi_t}(t, k)) = E_k\left\{\left(V_t^{\phi_t}\right)^2 e^{-rV_t^{\phi_t}}\right\} > 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

e  $l_{r|_{r=0}}^\pi(t, k) = 0$  per ogni  $\pi \in U$ .

*Da ciò segue che  $l_r^{\bar{\pi}}(t, k) > 0 \quad \forall r \in (0, r^*)$ , e poiché  $l_{R^0}^{\pi^0} = 0$ ,  $\bar{\pi}$  non minimizza  $l_{R^0}^\pi(t, k)$ .*

*Per quanto detto finora, si può affermare che partendo da una politica  $\pi^0$  fortemente ammissibile l'algoritmo di policy improvement determina una politica ottima che è fortemente ammissibile.*

**Osservazione 34.**

*Dall'osservazione 32, l'algoritmo appena descritto, utilizzando il criterio di*

*arresto  $\pi_n^{i+1} = \pi_n^i$ , è tale che l'ultima politica trovata è quella che massimizza  $R^\pi$ , inoltre dall'osservazione precedente segue che tale politica è anche fortemente ammissibile.*

Per implementare tale algoritmo basta generare in modo casuale (utilizzando le rispettive distribuzioni) gli istanti di tempo  $\{T_n\}_{n \geq 1}$  e i tipi di salto  $\{K_{T_n}\}_{n \geq 1}$ .

In corrispondenza di ciascuna coppia  $(T_n, K_{T_n})$  viene determinato il controllo ottimo  $\phi_{T_n}^* = (b_{T_n}^*, \delta_{T_n}^*)$ , utilizzando l'algoritmo di policy improvement descritto dai punti **(a)**-**(d)**.

La funzione  $l_r^\phi(t, k)$  dovrà, dunque, essere determinata solo per i valori  $t = T_n$  e per i vari valori di  $k = K_{T_n}$ . Analogamente per  $R^\phi$  e per la politica  $\phi$ .



## Capitolo 5

### Esempio 1: $Z_1 \sim \exp(\lambda)$

Il processo di Poisson (si veda definizione 3) è il processo comunemente utilizzato per modellare un processo di punto. Le caratteristiche di un tale processo, infatti, sono riscontrabili in molte situazioni reali e rendono inoltre la trattazione matematica del problema più semplice.

Consideriamo, dunque, il seguente esempio.

#### **Esempio 1.**

Siano  $N_t^0$  e  $N_t^1$  due processi di Poisson indipendenti tra loro con intensità rispettivamente  $\lambda^0$  e  $\lambda^1$ . Possiamo pensare ad  $N_t^0$  come il processo che conta il numero dei salti di tipo claim (richiesta di risarcimento) e ad  $N_t^1$  come al processo che conta il numero di variazioni del prezzo del titolo su cui investiamo. Il processo di Poisson dato dalla somma dei due processi:  $N_t = N_t^0 + N_t^1$  può intendersi come il processo che conta il numero di salti del processo di rischio, e poiché  $N_t^0$  e  $N_t^1$  sono indipendenti, il processo  $N_t$  è un processo di Poisson di intensità  $\lambda = \lambda^0 + \lambda^1$ .

Possiamo porre:

$$K_{T_n} = \begin{cases} 0 & \text{se in } T_n \text{ si è verificato un salto in } N_t^0 \text{ (claim)} \\ 1 & \text{se in } T_n \text{ si è verificato un salto in } N_t^1 \text{ (price change)} \end{cases}$$

**Osservazione 35.** *Osserviamo che:*

- Sia  $Z^0$  il processo stocastico che misura il tempo trascorso tra due salti di tipo claim successivi. Dalla letteratura sappiamo che se il processo che conta il numero di accadimenti di un certo evento in un intervallo di tempo, è un processo di Poisson di intensità  $\lambda$ , allora il processo  $Z$  degli intertempi di accadimento è una variabile esponenziale negativa di parametro  $\lambda$ . Dunque,  $N_t^0 \sim \text{Poisson}(\lambda^0) \Rightarrow Z^0 \sim \text{Exp}(\lambda^0)$ .
- Sia  $Z^1$  il processo stocastico che misura il tempo trascorso tra due variazioni di prezzo successive. Per le osservazioni fatte al punto precedente, se  $N_t^1 \sim \text{Poisson}(\lambda^1) \Rightarrow Z^1 \sim \text{Exp}(\lambda^1)$ .
- Indichiamo con  $Z$  il processo stocastico che misura il tempo trascorso tra due salti successivi (di qualsiasi tipo). Poichè  $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda) \Rightarrow Z \sim \text{Exp}(\lambda)$ .

Segue facilmente che

$$\begin{aligned} & P \{K_{T_{n+1}} = j, Z_{n+1} \leq s \mid K_{T_n} = i\} \\ &= P \{K_{T_{n+1}} = j \mid Z_{n+1} \leq s, K_{T_n} = i\} P \{Z_{n+1} \leq s \mid K_{T_n} = i\} \\ &= p_{ij} P \{Z_1 \leq s\} = \frac{\lambda^j}{\lambda} (1 - e^{-\lambda s}) \end{aligned}$$

così che, in questo caso

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{ij} = \frac{\lambda^j}{\lambda} := p_j \quad \forall i \\ G(s) = (1 - e^{-\lambda s}) \end{array} \right.$$

**Osservazione 36.**

*Condizionatamente ad una sola transizione, le probabilità di transizione  $p_j$  sono indipendenti dallo stato in cui ci si trova,  $i$ .*



**Parametri del problema**

Le variabili esogene sono:

1.  $\theta$  : ovvero la safety loading;
2.  $\lambda$  : intensità del processo di Poisson che conta il numero di salti (sia i salti dovuti a richieste di risarcimento che quelli dovuti alle variazioni di prezzo del titolo);
3.  $p_0 = P(K_t = 0)$ , da cui segue che  $p_1 = P(K_t = 1) = 1 - p_0$ ;
4.  $c$  : importo lordo delle entrate per la compagnia assicurativa;
5.  $c^*$  : estremo inferiore per l'importo netto delle entrate. E' un vincolo che la compagnia può imporre per evitare di avere entrate nette troppo basse;
6.  $\underline{b}$ : livello minimo di rassicurazione ammissibile che viene imposto nel caso in cui valga la relazione  $C(0) \geq c^*$ .
7.  $[\underline{w}, \bar{w}]$ : supporto delle variabili  $W_n$ , che guidano le variazioni del prezzo del titolo;
8.  $[\underline{\delta}, \bar{\delta}]$  : intervallo di ammissibilità delle politiche di investimento;
9.  $T$ : orizzonte temporale;

Ricordiamo la definizione di premio netto in entrata per la compagnia di assicurazioni, per  $h(b, Y) = bY$  (proportional reinsurance):

$$C(b) := c - \frac{(1 + \theta)(1 - b)E\{Y_1\}}{E\{Z_1 \wedge (T)\}} \quad (5.1)$$

Nelle ipotesi dell'esempio 1,  $Z \sim Z_1 \sim exp(\lambda)$ , dunque vale la relazione

$$\begin{aligned}
E[Z \wedge T] &= \int_0^\infty (z \wedge T) dG(z) \\
&= \int_0^T z dG(z) + T \int_T^\infty dG(z) \\
&= \int_0^T z \lambda e^{-\lambda z} dz + T \int_T^\infty \lambda e^{-\lambda z} dz \\
&= [-ze^{-\lambda z}]_0^T + \int_0^T e^{-\lambda z} dz + T [-e^{-\lambda z}]_T^\infty \\
&= -Te^{-\lambda T} + 1/\lambda [-e^{-\lambda z}]_0^T + Te^{-\lambda T} \\
&= \frac{(1 - e^{-\lambda T})}{\lambda}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

dalla quale segue che le entrate nette assumono la forma:

$$C(b) := c - \frac{(1 + \theta)(1 - b)E[Y_1]}{E[Z \wedge T]} = c - \frac{E[Y_1](1 + \theta)(1 - b)\lambda}{(1 - e^{-\lambda T})}, \tag{5.3}$$

In particolare, dalla formula (5.2), segue che l'assunzione 7 (iii), può essere riscritta come :

**Assunzione 37.**

$$c > \frac{p_0 E[Y_1] G(T - t)}{E[Z \wedge T - t]} = p_0 \lambda E[Y_1] \tag{5.4}$$

Ora dalla (1.6) e dal punto (i) dell'osservazione 8, (formula (1.9)), segue che,

$$b_{min} = \begin{cases} 1 + \frac{(c^* - c)(1 - e^{-\lambda T})}{\lambda E[Y_1](1 + \theta)} & \text{se } c^* > C(0) \\ \underline{b} & \text{se } 0 < c^* < C(0) \end{cases} \tag{5.5}$$

**Proposizione 38.**

Nelle ipotesi di validità delle assunzioni 7 (i)-(ii) e della (5.4), e nelle ipotesi dell'esempio 1 si ha:

$$l_r^\pi(t) = \left( e^{-(\lambda+rC(b))(T-t)} - 1 \right) + \frac{\left( 1 - e^{-(\lambda+rC(b))(T-t)} \right)}{\lambda + rC(b)} \cdot \left[ \lambda^0 \int_0^\infty e^{rby} dF(y) + \lambda^1 \int_{\underline{w}}^{\bar{w}} e^{-r\delta(e^w-1)} dH(w) \right] \quad (5.6)$$

independentemente dal valore di  $k$ .

*Dimostrazione.*

Dalla (3.7) si ha subito la tesi, basta infatti osservare che, risolvendo alcuni semplici integrali, si ottengono le relazioni

$$\left( (1 - G(T-t))e^{-rC(b)(T-t)} - 1 \right) = \left( e^{-(\lambda+rC(b))(T-t)} - 1 \right)$$

e

$$\int_0^{T-t} e^{-rC(b)z} dG(z) = \frac{\lambda \left( 1 - e^{-(\lambda+rC(b))(T-t)} \right)}{\lambda + rC(b)}$$

si noti inoltre che  $\lambda^0 = \lambda p_0$  e  $\lambda^1 = \lambda p_1$ . □

**Proposizione 39.** Nelle ipotesi dell'esempio 1,  $R_t^\phi$  definito come in (3.10) è indipendente da  $(t, k) \in [0, T] \times \{0, 1\}$ .

*Dimostrazione.*

- L'indipendenza da  $k$ , segue facilmente dalla proposizione 38 cioè dal fatto che la stessa  $l_r^\phi(t, k)$  è indipendente da  $k$ .

- L'indipendenza da  $t$  segue invece dalle seguenti osservazioni:  
Definiamo :

$$S_r^\phi := \left[ \lambda^0 \int_0^\infty e^{rby} dF(y) + \lambda^1 \int_{\underline{w}}^{\bar{w}} e^{-r\delta(e^w-1)} dH(w) \right]$$

$$\xi_r^\phi := \lambda + rC(b)$$

$$g_r^\phi := S_r^\phi - \xi_r^\phi$$

allora la funzione  $l_r^\phi(t, k)$  può essere riscritta come:

$$\begin{aligned} l_r^\phi(t, k) &= \left(1 - e^{-\xi_r^\phi(T-t)}\right) \left[\frac{S_r^\phi}{\xi_r^\phi} - 1\right] \\ &= \frac{\left(1 - e^{-\xi_r^\phi(T-t)}\right)}{\xi_r^\phi} [S_r^\phi - \xi_r^\phi]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Dimostreremo che scelto  $\hat{r} > 0$  tale che

$$\xi_{\hat{r}}^\phi - S_{\hat{r}}^\phi = 0 \quad (5.8)$$

allora  $\hat{r} = R_t^\phi$  ed è indipendente da  $t$ .

Per far ciò, è necessario mostrare che per  $\hat{r} > 0$  si ha

$$l_{\hat{r}}^\phi(t, k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi_{\hat{r}}^\phi - S_{\hat{r}}^\phi = 0.$$

Si vede facilmente che, per  $\hat{r} > 0$

$$\xi_{\hat{r}}^\phi - S_{\hat{r}}^\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad l_{\hat{r}}^\phi(t, k) = 0.$$

Dimostriamo anche il viceversa, ovvero che se esiste  $\hat{r} > 0$  t.c.  $l_{\hat{r}}^\phi(t, k) = 0$ , allora  $\xi_{\hat{r}}^\phi - S_{\hat{r}}^\phi = 0$ .

Per far ciò, osserviamo che se per  $r > 0$  vale  $\xi_r^\phi - S_r^\phi \neq 0$  allora  $l_r^\phi(t, k) \neq 0$ .

Infatti dalla (5.7) segue

$$\left. \begin{aligned} \xi_r^\phi > 0 &\Rightarrow \frac{\left(1 - e^{-\xi_r^\phi(T-t)}\right)}{\xi_r^\phi} \neq 0 \\ \xi_r^\phi - S_r^\phi \neq 0 &\Rightarrow [S_r^\phi - \xi_r^\phi] \neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow l_r^\phi(t, k) \neq 0$$

Di conseguenza se esiste  $\hat{r} > 0$  tale che  $l_r^\phi(t, k) = 0$ , allora deve necessariamente valere  $\xi_{\hat{r}}^\phi - S_{\hat{r}}^\phi = 0$ .

Segue che l'unico zero positivo di  $l_r^\phi(t, k)$  è uguale ad  $\hat{r}$  t.c.  $g_{\hat{r}}^\phi = 0$  ed è indipendente dal tempo, in quanto  $g_{\hat{r}}^\phi$  è una funzione che non dipende da  $t$ .

□

Espressioni esplicite della funzione  $l_r^\pi(t, k)$ , sono semplici da determinare, a patto che le distribuzioni di  $Y_1$  e  $W_1$  siano tali che i corrispondenti integrali nella (5.6) siano facili da calcolare. In ogni caso, possono essere calcolati approssimativamente sostituendo gli integrali con le corrispondenti somme di Riemann-Stieltjes.

## 5.1 $Y_1 \sim exp(\mu)$ , $W_1$ discreta

A partire dall'esempio 1 vogliamo scegliere delle distribuzioni  $F(y)$  e  $H(w)$  e vedere come si può implementare l'algoritmo di Policy improvement.

Supponiamo di trovarci nelle stesse ipotesi dell'esempio 1 e di scegliere:

- $Y_n \sim Y_1 \sim exp(\mu)$ , ovvero l'ampiezza dei claim è distribuita come una esponenziale negativa di parametro  $\mu$ , ne segue che

$$E[Y_1] = 1/\mu$$

.

- $W_n \sim W_1$  tale che  $W \in [w_1, \dots, w_s]$ ; con probabilità :  $P(W_1 = w_j) = q_{w_j}$ ; , ovvero  $W_1$  è una variabile discreta.

Si osservi che, l'importo netto delle entrate può allora essere riscritto come

$$C(b) := c - (1 + \theta)(1 - b) \frac{E[Y_1]}{E[Z_1 \wedge T]} = c - \frac{(1 + \theta)(1 - b)\lambda}{\mu(1 - e^{-\lambda T})}, \quad (5.9)$$

In particolare, osserviamo che l'assunzione 7 (ii) è soddisfatta e valgono le

relazioni:

$$\bar{r} = \mu \quad (5.10)$$

$$r^* = \frac{\mu}{b_{min}} \quad (5.11)$$

ove  $b_{min}$  è come in ( 5.5 ). Le relazioni (5.10)-(5.11) si ottengono dall'assunzione 7 (ii), dalla definizione di  $r^*$  data nell'osservazione 8 (ii) e osservando che:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \sup \{ r > 0 \mid E[e^{rY_1}] < +\infty \} \\ &= \sup \left\{ r > 0 \mid \int_0^{+\infty} \mu e^{-(\mu-r)y} dy < +\infty \right\} \\ &= \sup \{ r > 0 \mid r < \mu \} \\ &= \mu \end{aligned}$$

**Proposizione 40.** *La funzione  $l_r^\pi(t, k)$  assume la seguente forma*

$$l_r^\pi(t, k) = \begin{cases} \left( e^{-(\lambda+rC(b))(T-t)} - 1 \right) + \frac{\lambda(1-e^{-(\lambda+rC(b))(T-t)})}{\lambda+rC(b)} \cdot \left( p_0 \frac{\mu}{(\mu-rb)} + p_1 \sum_{i=1}^s e^{-r\delta(e^{w_i}-1)} q_{w_i} \right) & \text{se } \mu - rb \geq 0 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5.12)$$

*Dimostrazione.*

Basta osservare che

$$\int_0^\infty \mu e^{(rb-\mu)y} dF(y) = \begin{cases} \frac{\mu}{(\mu-rb)} & \text{se } \mu - rb > 0 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e che, poiché le  $W_n$  sono variabile discrete

$$\int_{\underline{w}}^{\bar{w}} e^{-r\delta(e^{w_i}-1)} dH(w) = \sum_{i=1}^s e^{-r\delta(e^{w_i}-1)} q_{w_i}$$

e sostituire queste due espressioni nella (5.6).

□

In particolare si ha che, dalla proposizione 39,  $\hat{r}$  è indipendente da  $(t, k)$ , dunque la politica ottima da adottare sarà la stessa qualsiasi sia l'istante di tempo in cui si verifica il salto.





# Capitolo 6

## Implementazione degli algoritmi

Prima di analizzare i risultati numerici, faremo alcune osservazioni importanti sull' algoritmo di policy improvement e sul programma che simula l'andamento del capitale. Spiegare le idee che stanno alla base del codice è fondamentale per comprendere i risultati numerici e la qualità dei risultati ottenuti.

Nelle sezioni che seguono faremo riferimento al caso specifico dell' Esempio 1.

### 6.1 Algoritmo di Policy Improvement

In questa sezione, spiegheremo come è stato implementato l'algoritmo di Policy Improvement. Il listato di una possibile implementazione di tale algoritmo lo si trova in appendice D.

Per prima cosa, ricordiamo che dai risultati ottenuti nella sezione 5.1 poiché  $l_r^\pi(t)$  è indipendente da  $k$ , e poiché lo zero di  $l_r^\pi(t)$  è indipendente da  $(t, k)$ , il controllo miope ottimale,  $\phi^*$ , può essere scelto all' istante  $t = t_0$ , e sarà indipendente da  $t$  e  $k$ . Questo semplifica molto l'algoritmo, infatti, non sarà necessario ad ogni istante di salto determinare il controllo miope ottimo perché si avrà semplicemente  $\phi^*(T_n, K_{T_n}) = \phi^*$ ,  $\forall (T_n, K_{T_n}) \in [0, T] \times \{0, 1\}$ . Da ciò deriva che la politica miope che minimizza il confine superiore per la probabilità di rovina in al più  $N$  salti sarà quella che in ogni istante di salto, adotta tale controllo ottimo, cioè sarà una politica stazionaria

$$\pi^* = ( \underbrace{\phi^*, \phi^*, \dots, \phi^*}_{N_T \wedge (N_t + N)} ).$$

Osserviamo che nell' implementazione dell' algoritmo sono stati modificati, per esigenze di scrittura i nomi di alcuni parametri:

$\mu = my$	$\bar{\delta} = d\_up \quad \underline{\delta} = d\_low$
$\pi^j = pol(j, :)$	$R_t^{\pi^j} = R\_pi(j)$
$r^* = r\_star \quad c^* = c\_star$	$\underline{b} = b\_low$
$C(0) = c0$	$q_{w_j} = q(j)$

**Passo a) : si parte da una data politica ammissibile  $\pi^0 = (b^0, \delta^0) \in \mathcal{A}$ ;**

Dall' osservazione 33 segue che affinché l'algoritmo di Policy Improvement converga ad una politica che sia fortemente ammissibile è necessario che la politica  $\pi^0$  sia fortemente ammissibile.

Abbiamo già visto nella proposizione 18 che se vale (3.6), allora esiste sicuramente una politica fortemente ammissibile. In particolare vale la seguente proposizione.

**Proposizione 41.** *Definito il controllo:*

$$\pi^0 = \begin{cases} (b_{min}, 0) & \text{se } C(0) > 0 \quad || \quad c^* \geq -C(0) \frac{p_0(1-e^{-\lambda T})}{(1+\theta)-p_0(1-e^{-\lambda T})} \\ (b_{amm}, 0) & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (6.1)$$

ove, per  $\epsilon$  che è una quantità positiva quasi nulla, definiamo

$$b_{amm} := - \frac{C(0)E[Z_1 \wedge (T - t_0)] E[Z_1 \wedge T]}{E[Y_1] ((1 + \theta)E[Z_1 \wedge (T - t_0)] - p_{k,0}G(T - t_0)E[Z_1 \wedge T])} + \epsilon.$$

Nelle ipotesi dell'esempio 1 e supponendo valide le assunzioni 7,  $\pi^0$  è fortemente ammissibile in  $t_0$ .

*Dimostrazione.* Con  $t_0 \geq 0$  indichiamo l'istante in cui si determina la politica ottima.

Nella dimostrazione della proposizione 18 abbiamo visto che un controllo  $(b_t, 0) \in U$  è fortemente ammissibile al tempo  $t$  se soddisfa la relazione (3.5). Se  $C(0) > 0$  la (3.5) è soddisfatta per ogni  $b_t \in [b_{min}, 1]$  infatti, il membro di destra della (3.5) diventa:

$$\begin{aligned}
& -C(0)\mu \frac{(1 - e^{-\lambda(T-t_0)})(1 - e^{-\lambda T})}{\lambda [(1 + \theta)(1 - e^{-\lambda(T-t_0)}) - p_0(1 - e^{-\lambda(T-t_0)})(1 - e^{-\lambda T})]} \\
= & -C(0)\mu \frac{(1 - e^{-\lambda T})}{\lambda [(1 + \theta) - p_0(1 - e^{-\lambda T})]} \\
\leq & -C(0)\mu \frac{(1 - e^{-\lambda T})}{\lambda [(1 + \theta)]} \\
\leq & 0 < b_{min}
\end{aligned}$$

e quindi  $\pi^0 = (b_{min}, 0)$  è fortemente ammissibile in  $t_0$ .

Nel caso in cui  $C(0) < 0 < c^*$ ,  $b_{min}$  soddisfa la (3.5) se e soltanto se:

$$b_{min} \geq -\frac{C(0)(1 - e^{-\lambda T})\mu}{\lambda((1 + \theta) - p_0(1 - e^{-\lambda T}))}.$$

Dalla definizione di  $b_{min}$  nel caso dell' esempio 1 nella formula (5.5) con  $E[Y_1] = 1/\mu$  segue che  $b_{min}$  soddisfa (3.5) se

$$\begin{aligned}
1 + (c^* - c) \frac{(1 - e^{-\lambda T})\mu}{\lambda(1 + \theta)} & \geq -\frac{C(0)(1 - e^{-\lambda T})\mu}{\lambda((1 + \theta) - p_0(1 - e^{-\lambda T}))} \\
& \Leftrightarrow \\
c^* & \geq \left[ \left( c - \frac{\lambda(1 + \theta)}{\mu(1 - e^{-\lambda T})} \right) - \frac{C(0)(1 + \theta)}{[(1 + \theta) - p_0(1 - e^{-\lambda T})]} \right] \\
& \Leftrightarrow (*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c^* &\geq C(0) \left[ 1 - \frac{(1+\theta)}{((1+\theta) - p_0(1 - e^{-\lambda T}))} \right] \\
&\Leftrightarrow \\
c^* &\geq -C(0) \frac{p_0(1 - e^{-\lambda T})}{(1+\theta) - p_0(1 - e^{-\lambda T})} \tag{6.2}
\end{aligned}$$

ove, in (\*) abbiamo usato la definizione di  $C(0)$ ,  $C(0) = c - \frac{\lambda(1+\theta)}{\mu(1-e^{-\lambda T})}$ .

Segue che se

$$c^* \geq -C(0) \frac{p_0(1 - e^{-\lambda T})}{(1+\theta) - p_0(1 - e^{-\lambda T})}$$

allora  $\pi^0 = (b_{min}, 0)$  è fortemente ammissibile.

Infine, se  $C(0) < 0$  e  $c^* < -C(0) \frac{p_0(1-e^{-\lambda T})}{(1+\theta)-p_0(1-e^{-\lambda T})}$  allora poniamo  $\pi^0 = (b_{amm}, 0)$ .

Per definizione,

$$b_{amm} := - \frac{C(0)E[Z_1 \wedge (T-t)]E[Z_1 \wedge T]}{E[Y_1]((1+\theta)E[Z_1 \wedge (T-t)] - p_{k,0}G(T-t)E[Z_1 \wedge T])} + \epsilon$$

$b_{amm}$  soddisfa la (3.5) e dunque  $\pi^0 = (b_{amm}, 0)$  è ancora fortemente ammissibile.

□

**passo (b): si determina  $R^{\pi^0}$  corrispondente a  $\pi^0$ ;**

Più in generale per determinare la soluzione dell'equazione in  $r$ ,  $l_r^{\pi^i}(t, k) = 0$ , utilizziamo il metodo di bisezione.

Sia  $\epsilon > 0$  molto piccolo, in modo che l'intervallo  $[a_0, b_0] := [\epsilon, r^*]$  contenga lo zero cercato. Il metodo di bisezione è un metodo iterativo, che funziona nel seguente modo

- (1) si considera inizialmente l'intervallo  $I_0 = [a_0, b_0] := [\epsilon, r^*]$  se la funzione  $l_r^{\pi^i}(t)$  cambia segno in tale intervallo allora, per il teorema degli zeri, si ha che  $R^i \in [a_0, a_b]$ .
- (2) Si calcola il punto medio di tale intervallo  $c_0 := (a_0 + a_b)/2$ , e si pone  $I_1 = [a_1, b_1]$ . Ove, se  $l_r^{\pi^i}(t)$  cambia segno nell'intervallo  $[a_0, c_0]$ , definiamo  $b_1 := c_0, a_1 := a_0$ , se ciò non avviene, vuol dire che lo zero cercato si trova nell'intervallo  $[c_0, b_0]$  e quindi si definiscono  $a_1 := c_0, b_1 := b_0$ . Si procede poi ricorsivamente, dimezzando ogni volta la lunghezza dell'intervallo nel quale si è certi di trovare la radice. L'intervallo  $I_k = (a_k, b_k)$  avrà lunghezza  $\frac{b_0 - a_0}{2^k}$  e quindi l'errore che si commette ponendo  $R^{\pi^i} = c_k$ , decresce esponenzialmente con  $k$ .
- (3) Si controlla se l'ampiezza del nuovo intervallo  $I_1 = [a_1, b_1]$  è minore di una certa tolleranza prefissata, *toll*. Se  $b_1 - a_1 > toll$  si torna al punto (2), altrimenti si pone  $R^{\pi^i} = (b_1 + a_1)/2$ . Si osservi che minore è tale tolleranza, migliore sarà l'approssimazione dello zero cercato.

#### Osservazione 42.

Si noti che, poiché  $b_{min} \neq 0$ , ovvero  $r^* < +\infty$ , in  $[a_0, b_0]$ , se  $\epsilon$  è sufficientemente piccolo, la funzione cambia sicuramente segno e quindi l'algoritmo di bisezione converge sempre allo zero cercato.

In definitiva, la ricerca della radice col metodo di bisezione consiste nel calcolare i termini della successione ricorsiva:

$$a_k = \begin{cases} a_{k-1} & \text{se } \text{sign}l_{c_{k-1}}^{\pi}(t) \neq \text{sign}l_{a_{k-1}}^{\pi}(t) \\ c_{k-1} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (6.3)$$

$$b_k = \begin{cases} c_{k-1} & \text{se } \text{sign}(l_{c_{k-1}}^{\pi}(t)) \neq \text{sign}(l_{a_{k-1}}^{\pi}(t)) \\ b_{k-1} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (6.4)$$

$$c_k = \frac{b_k + a_k}{2} \quad (6.5)$$

**(c): si determina  $\pi^1 \in \mathcal{A}$  che minimizza  $l_{R^{\pi^0}}^\pi(t_0)$  rispetto a  $\pi \in \mathcal{A}$ ;**  
 Per quanto detto nell'osservazione 33 si può estendere la ricerca della politica che minimizza  $l_{R^{\pi^0}}^\pi(t_0)$  alle politiche ammissibili,  $\pi \in U$  in quanto politiche che sono ammissibili, ma non fortemente ammissibili sono tali che  $l_{R^{\pi^0}}^\pi(t_0) > l_{R^{\pi^0}}^{\pi^0}(t_0) = 0$ .

La funzione *fmincon* di *MatLab* permette di risolvere problemi di ottimizzazione non lineare vincolata. In appendice A viene spiegato come lavora tale funzione.

Nel caso del problema in esame, una volta definita la funzione obiettivo  $l(r, t, pol, S)$ , (ove  $S$  è una struttura che contiene tutti i parametri), viene determinata la politica che minimizza  $l(\cdot)$ , tramite il comando:

```

1 sss= @(param)l(R_pi(j), t,param,S);
3
5 options= optimset('TolFun',1e-16,'LargeScale',...
7 'off', 'Display', 'off');
9
7 [x,fval] = fmincon(sss,[bamm,0]', [], [], [], [],...
... [bmin,d_low]', [1,d_up]', [], options);
9
pol(j+1,:) = x';

```

I vincoli che dobbiamo imporre sono quelli di ammissibilità della politica, ovvero  $\pi \in U \Rightarrow b \in [b_{min}, 1]$  &  $\delta \in [\underline{\delta}, \bar{\delta}]$ .

### Criteri di arresto dell'algoritmo

- Se i parametri assegnati sono tali che l'assunzione 7 punto (iii) (che in questo contesto diventa  $c > p_0 \frac{\lambda}{\mu}$ ) non vale, allora l'algoritmo si arresta e viene stampato un messaggio di avviso :

```

2 Non vale l' assunzione c > p0*lambda\_p/my

```

- Se  $pol(j, :) == pol(j + 1, :)$  allora possiamo fermare l'algoritmo, perché abbiamo determinato la soluzione ottima cercata. È chiaro infatti, che se la politica che minimizza  $l(R\_pi(j), t, pol, S)$  è proprio  $pol(j, :)$ , quindi  $pol(j + 1, :) = pol(j, :)$ , allora  $l(R\_pi(j), t, pol, S) > l(R\_pi(j), t, pol(j, :), S) = 0 \quad \forall pol \in \mathcal{A}$  e quindi  $R\_pi(j) = \max_{\pi}(R^{\pi})$ . In tal caso, viene stampato un messaggio di avviso :

2 Ritrovata la politica precedente.

L'algoritmo si arresta ponendo  $pol\_ott = pol(j, :)$ .

In appendice C è possibile trovare il codice di implementazione delle funzioni  $C(b)$ ,  $b_{min}$  e  $l_r^{\pi}(t)$ .

## 6.2 Algoritmo di Simulazione

Per quanto riguarda l'algoritmo di simulazione è stato seguito il seguente schema, dove ricordiamo che  $N$  è il massimo numero di salti che teniamo in considerazione:

1. viene fissato il numero di simulazioni che si vogliono fare  $num\_simulazioni$
2. per ogni simulazione vengono costruite le variabili casuali del modello:
  - Si costruiscono i processi,  $Z_0$  (intertempi tra claim successivi) e  $Z_1$  (intertempi tra variazioni di prezzo successive) come esponenziali negative con numerosità rispettivamente  $N_0 := \lfloor p_0 N \rfloor$  e  $N_1 := N - \lfloor p_0 N \rfloor$  e parametri rispettivamente  $p_0 \lambda$  e  $p_1 \lambda$ . Si definisce il vettore  $K = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N_0}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{N_1})$ .
  - A partire da  $Z_0$  e  $Z_1$  si costruiscono i vettori degli istanti di accadimento,  $T_0$  e  $T_1$  ricordando che  $T_0(i) = T_0(i - 1) + Z_0(i)$  e  $T_1(i) = T_1(i - 1) + Z_1(i)$ .
  - Dai processi  $T_0$  e  $T_1$  si costruisce il vettore  $T = [T_0, T_1]$  e si riordinano le sue componenti in ordine crescente. Contemporaneamente memorizziamo gli indici nel nuovo ordine e riordiniamo allo stesso modo il vettore  $K$ , indicandolo con  $K_{T_n}$ . In questo modo se  $T(j) = T_0(m)$  per qualche  $m$  allora  $K_{T_n}(j) = 0$ , mentre se  $T(j) = T_1(m)$  per qualche  $m$  allora  $K_{T_n}(j) = 1$ .

In definitiva,  $K_{T_n}$  è il processo a valori in  $\{0, 1\}$  tale che,  
 $P(K_{T_n} = 0) = \frac{N_0}{N} = p_0$  e  $P(K_{T_n} = 1) = \frac{N_1}{N} = 1 - p_0$ .

- A partire dal vettore  $T$  si costruisce il processo,  $Z_{T_n}$  degli intertempi di accadimento (tra salti qualsiasi) sfruttando la relazione  $Z_{T_n}(i) = T(i) - T(i - 1)$ .
- A questo punto costruiamo i processi  $Y_{T_n}$  e  $W_{T_n}$  come segue, per  $j = 1, 2, \dots, \min(N, N_T)$

se  $K_{T_n}(j) = 0$ ,  $Y_{T_n}(j)$  variabile casuale con distribuzione esponenziale negativa di parametro  $1/my$  e  $W_{T_n}(j) = 0$ .

se  $K_{T_n}(j) = 1$ ,  $Y_{T_n}(j) = 0$  e  $W_{T_n}(j)$  variabile casuale discreta con supporto in  $w = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$  e distribuzione di probabilità  $q = \{q_1, q_2, \dots, q_s\}$ .

3. Si simula il capitale utilizzando la formula ricorsiva (2.2) e i processi  $Z_{T_n}$ ,  $Y_{T_n}$ ,  $W_{T_n}$ ,  $K_{T_n}$ .
4. Si osserva il rapporto tra il numero di fallimenti e il numero di simulazioni. Se il numero di simulazioni va ad infinito tale rapporto converge alla probabilità di rovina in al più  $N$  salti. Tramite le simulazioni riusciremo a capire se la politica ottima scelta utilizzando l'algoritmo di Policy Improvement è effettivamente tale che la probabilità di rovina in al più  $N$  salti sia piccola.



# Capitolo 7

## Risultati numerici

### 7.1 Considerazioni preliminari

In questo capitolo, attraverso l'utilizzo di alcune simulazioni numeriche, procederemo con l'esemplificazione di quanto finora detto sul confine superiore della probabilità di rovina, facendo riferimento all' esempio 1 con  $Y_1$  e  $W_1$  come nel paragrafo 5.1.

Al fine di implementare gli algoritmi per le simulazioni e verificarne il funzionamento, così come per l'elaborazione dei dati e dei grafici è stato usato il software *MATLAB* 7. In appendice si possono trovare i codici delle implementazioni.

Quello che cercheremo di capire attraverso le simulazioni è schematizzabile come segue:

1. E' sempre conveniente investire in un titolo finanziario? Se lo è, quanto è opportuno investire? Per rispondere a queste domande esploreremo contesti di mercato diversi, analizzando, a parità di tutti gli altri fattori, mercati con diverso andamento medio.
2. E' sempre ottimale decidere di trasferire parte del rischio all' ente rassicuratore? Quanto la compagnia può permettersi di riassicurare? da cosa dipende tale livello di copertura ottimale?

In ciò che segue supporremo costanti alcuni parametri, altri invece verranno modificati al fine di creare differenti scenari che porteranno alla scelta di diverse politiche ottime.

Tra i parametri costanti abbiamo:

Parametri costanti Esempio 1	
$\theta = 0.05$	$T = 10$
$p_0 = 0.3 \quad p_1 = 0.7$	$t_0 = 0$
$\underline{b} = 0.001$	$N = 80$
$\lambda = 5$	$\bar{\delta} = 6 \quad \underline{\delta} = 0$

**Osservazione 43.**

1. *Stiamo considerando  $Z$  come una variabile esponenziale negativa di parametro  $\lambda = 5$ , ciò significa che nell'unità di tempo si verificano in media 5 salti, o, in altri termini, il tempo medio che intercorre tra due salti successivi (indipendentemente dal tipo di salto) è di  $1/5$ . Più in dettaglio, il numero medio di richieste di claim nell'unità di tempo è di  $\lambda_0 = \lambda p_0 = 1.5$ , mentre il numero medio dei cambiamenti dei prezzi per unità di tempo è  $\lambda_1 = \lambda p_1 = 3.5$ .*
2. *consideriamo  $N = 80$ , ove  $N$  è il numero massimo di salti che teniamo in considerazione, ovvero vogliamo osservare se la compagnia fallisce in al più  $N$  salti.*
3.  *$\bar{\delta} = 6$ ,  $\underline{\delta} = 0$ , vuol dire che alla compagnia non è consentito vendere allo scoperto (investire quantità negative di denaro). E' però possibile l'indebitamento in quanto il vincolo  $\delta \leq \bar{\delta}$  non dipende dal capitale disponibile.*

Come già accennato suddivideremo l'analisi dei risultati distinguendo vari scenari:

**caso 1**  $0 < c^* < C(0)$ , vuol dire che il costo che la compagnia dovrebbe affrontare per poter cedere per intero il rischio alla compagnia riassicuratrice,  $c_r(0)$  è minore delle entrate lorde. Inoltre  $b = \underline{b}$  soddisfa il vincolo  $c^* < C(b)$ , quindi dalla definizione di  $b_{min}$  in (1.6) si ha che il minimo livello di riassicurazione ammissibile è, dalla (5.5),  $b_{min} = \underline{b}$ .

**caso 2**  $0 < C(0) < c^*$  in un tale contesto nonostante il costo per una riassicurazione totale sia inferiore alle entrate lorde, la politica che richiede di riassicurare tutto non è ammissibile in quanto non soddisfa il vincolo  $c^* < C(b)$ . Il minimo livello di riassicurazione ammissibile è, dalla (5.5),  $b_{min} = 1 + \frac{(c^*-c)(1-e^{-\lambda T})\mu}{\lambda(1+\theta)}$ .

**caso 3**  $C(0) < 0 < c^*$  le entrate lorde della compagnia sono minori del costo di riassicurazione totale, e in particolare la politica che richiede di cedere per intero il rischio non soddisfa il vincolo  $C(b) > c^*$ . Anche in questo caso, la minima politica di riassicurazione è data, sempre in base alla (5.5) da  $b_{min} = 1 + \frac{(c^*-c)(1-e^{-\lambda T})\mu}{\lambda(1+\theta)}$ .

## 7.2 $0 < c^* < C(0)$

Consideriamo i seguenti valori per i parametri:

Parametri Esempio 1	
$c = 60$	$1/\mu = 1/my = 10$
$x_0 = x0 = 2$	$c^* = c\_star = 6$

### 7.2.1 mercato favorevole

Il supporto  $w = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$  e la distribuzione  $q = \{q_1, q_2, \dots, q_s\}$  per la variabile  $W_{T_n}$  sono in questo contesto definiti come in tabella.

Parametri di mercato:			
$w_1 = -1.5$	$w_2 = -1.1$	$w_3 = 0.8$	$w_4 = 1.8$
$q_{w_1} = \frac{1}{8}$	$q_{w_2} = \frac{1}{8}$	$q_{w_3} = \frac{1}{2}$	$q_{w_4} = \frac{1}{4}$

Tabella 7.1: Dati relativi ad un mercato favorevole

**Osservazione 44.**

- (1) Si noti che in questo caso siamo nell' ipotesi di mercato favorevole, infatti  $E[W_1] = 0.5250 > 0$
- (2)  $0 < c^* < C(0) = 7.5$  , in particolare  $C(0) > 0$  significa che la compagnia può permettersi di riassicurare tutto. In tal caso dalla 1.9 si ha  $b_{min} = \underline{b} = 0.001$ .  
In più, il vincolo dato dall' imporre un' entrata netta minima di  $c^* = 6 < C(0)$  per unità di periodo, non limita dal basso il livello di copertura ammissibile, in quanto  $b_{min}$  soddisfa tale vincolo, infatti  $C(b_{min}) > C(0) > c^*$  .
- (3) Si osservi, che se la compagnia ha entrate lorde per unità di tempo  $c = 60$ , e se la media dell' ammontare dei claim è  $1/\mu = 10$ , allora un capitale iniziale  $x_0 = 2$  è molto basso. Inoltre, nonostante le entrate lorde siano elevate, riassicurare tutto costa  $c_r(0) = 52.5$ , e quindi le entrate nette per un livello di assicurazione elevato (vicino allo 0 ) sono basse,  $C(0) = c - c_r(0) = 7.5$ .
- (4) Dalla proposizione 41, segue che la politica iniziale è  $\pi^0 = (b_{min}, 0)$  ed è fortemente ammissibile.
- (5) La policy improvement ci fornisce il controllo ottimo che è dato da :

$$\pi^* = (b^*, \delta^*), \text{ con } b^* = 0.001 = \underline{b} \text{ , } \delta^* = 0.00696$$

da cui segue,

$$(5.1) \quad r^* = \mu/b_{min} = 100$$

$$(5.2) R_{\pi^*} \approx 99.8017 < r^*$$

$$(5.3) \text{ il confine superiore per la probabilità di rovina in un passo è } e^{-R_{\pi^*} x_0} \approx 2.0574 \cdot 10^{-87}$$

(6) Si osservi che la politica ottima di investimento richiede di investire nel mercato molto poco,  $\delta^* = 0.00696$ , la spiegazione economica è che per la compagnia è più conveniente investire il suo capitale per la copertura dal rischio, scegliendo un livello di riassicurazione,  $b^* = 0.001\%$ , piuttosto che spendere il suo capitale investendo nel mercato finanziario che, seppur in media favorevole, è una potenziale fonte di rischio.

L'output dato dall' algoritmo di policy improvement è :

```

Insieme delle politiche ammissibili :
2 (b, delta) in ( 0.00100 ,1] x [0.00000, 6.00000]

4 Politica iniziale fortemente ammissibile :
  pol_0 = (0.0010, 0.0),
6
8           iterazione 1

10 lo zero della funzione l(r,pol(0)) per la politica
  pol(0) = [ 0.00100, 0.00000] e' R(0) = 99.8013903
12
14 la politica che minimizza per R(0) = 99.8013903 e'
  pol(1) = [0.0010,0.00696]

16 il valore di l(R(0), pol(1)) e'
  [ l(99.8013903 , 0.00, 0.0010, 0.00696) = -0.0016882 ]
18

20           iterazione 2

22 lo zero della funzione l(r,pol(1)) per la politica
24 pol(1) = [ 0.00100, 0.00696] e' R(1) = 99.8017272

26 la politica che minimizza per R(1) = 99.8017272 e'
  pol(2) = [0.0010,0.00696]
28
  il valore di l(R(1), pol(2)) e'

```

30 `l(99.8017272 , 0.00, 0.0010, 0.00696) = -0.0000000`

32

34 `ritrovata politica dell' iterazione precedente:`

`pol(3) = pol(2)`

36

38 `confine superiore per la probabilità di rovina in un salto`

`2.057411588525810e-087`

Il grafico in figura 7.1, rappresenta le iterazioni dell' algoritmo di policy improvement, e quindi per ogni  $\pi^i$  relativa all'  $i^{\circ}$  iterazione dell' algoritmo viene disegnata, in funzione di  $r$ , la funzione  $l_r^{\pi^i}(t)$ .

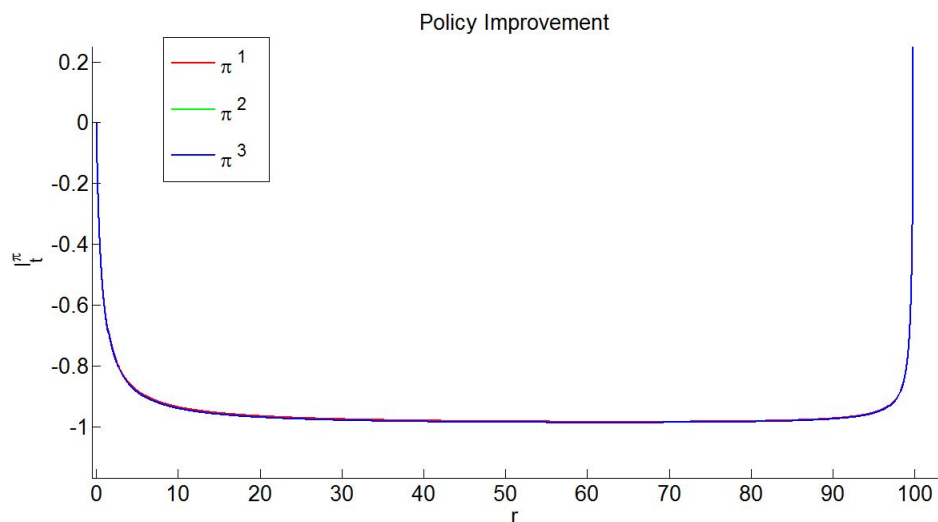


Figura 7.1: Policy improvement se  $0 < c^* < C(0)$

Si osservi che i tre grafici sembrano coincidere, in realtà differiscono tra loro molto poco, e tale differenza è trascurabile rispetto alla scala adottata. Tale differenza si può notare dall' output dell'algoritmo di policy improvement, infatti  $R_0 = 99.8013903 < R(1) = 99.8017272$ .

Nella figura 7.2, invece, vengono plottati gli andamenti del capitale di 100 simulazioni e si vede come adottando la politica ottima, il rapporto tra numero di fallimenti e numero di simulazioni è 0/100.

In particolare, abbiamo simulato il capitale 10000 volte e il numero di fallimenti è ancora 0.

**Osservazione 45.** *Si noti, che in tale esempio, la probabilità di fallire in un passo è praticamente nulla, questo perché il 99,9% del rischio derivante da una richiesta di risarcimento è stato accollato a terzi, il prezzo da pagare per cedere tale rischio è un prezzo che la compagnia può permettersi grazie all'elevato premio lordo in entrata  $c = 60$ , inoltre, essendo l'investimento nei mercati irrisorio, anche se si dovesse affrontare una perdita, la compagnia avrebbe a disposizione abbastanza capitale per non fallire.*

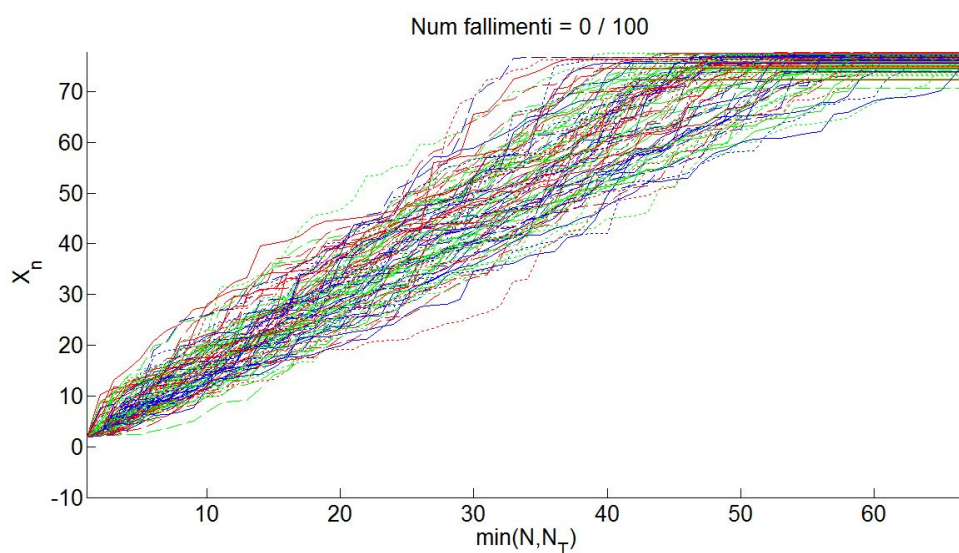


Figura 7.2: Simulazioni del capitale nel caso  $0 < c^* < C(0)$

Supponiamo adesso di adottare una politica diversa dalla politica ottima trovata. Essendo il mercato favorevole, la compagnia assicurativa potrebbe essere tentata ad investire molto di più per poter incrementare il suo capitale. Scegliamo, dunque, la politica  $\pi_{alt} = (\underline{b}, 3)$  e simuliamo l'andamento del capitale supponendo di adottare tale politica ad ogni istante di salto. Si osserva che su 100 simulazioni il numero di fallimenti è di 5 come mostrato in figura 7.3. Simulando il capitale 1000 volte si ottiene un numero di fallimenti circa uguale a 39, ovvero si fallisce in al più  $N = 80$  salti, circa il 4% delle volte.

**Osservazione 46.** *Si osservi che a differenza della politica ottima, il rapporto tra il numero di fallimenti e il numero di simulazioni, in questo caso, è molto elevato. Questo perché la politica considerata richiede di investire molto nel mercato finanziario e quindi un movimento del prezzo a ribasso porta a consistenti perdite di capitale, e può condurre la compagnia al fallimento. Questo ci mostra che, nonostante il mercato sia favorevole, la scelta di investire molto non solo non è ottima, ma è molto pericolosa.*

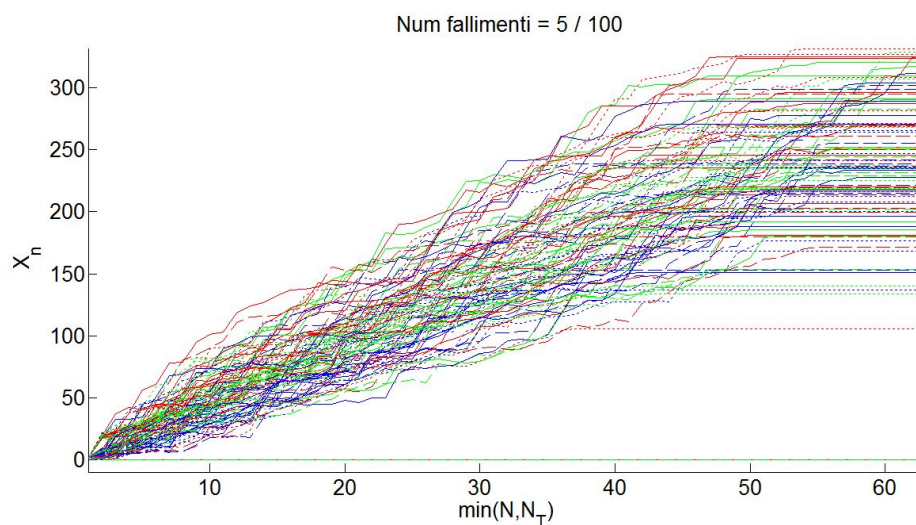


Figura 7.3: Simulazioni del capitale nel caso  $\pi_{alt} = (0.001, 3)$

## 7.2.2 mercato sfavorevole

Supporto di $W_1$			
$w_1 = -3.0$	$w_2 = -1.5$	$w_3 = 0.5$	$w_4 = 1$
$q_{w_1} = \frac{1}{4}$	$q_{w_2} = \frac{1}{2}$	$q_{w_3} = \frac{1}{8}$	$q_{w_4} = \frac{1}{8}$

Tabella 7.2: Dati relativi ad un mercato sfavorevole



**Osservazione 47.**

Quello che differenzia questo caso dal precedente è l'andamento del mercato, infatti,  $E[W_1] = -1.3125 < 0$ .

La policy improvement ci fornisce il controllo ottimo che è dato da :

$$b^* = 0.001 = b_{min} \quad , \quad \delta^* = 0$$

da cui segue,

$$(1) \quad r^* = \mu/b_{min} = 100$$

$$(2) \quad R_{\pi^*} \approx 99.8017 < r^*$$

$$(3) \quad \text{il confine superiore per la probabilità di rovina in un passo è } e^{-R_{\pi^*}x_0} \approx 2.0588 \cdot 10^{-87}$$

Si osservi che la politica ottima di investimento richiede di non investire nel mercato,  $\delta^* = 0$ , la spiegazione è che un mercato che in media muove a ribasso, è molto rischioso, e quindi anche investimenti molto bassi, fanno aumentare la probabilità di rovina.

Dall' output dell' algoritmo di policy improvement si vede che il confine per la probabilità di rovina in un passo è  $2.0588 \cdot 10^{-87}$ .

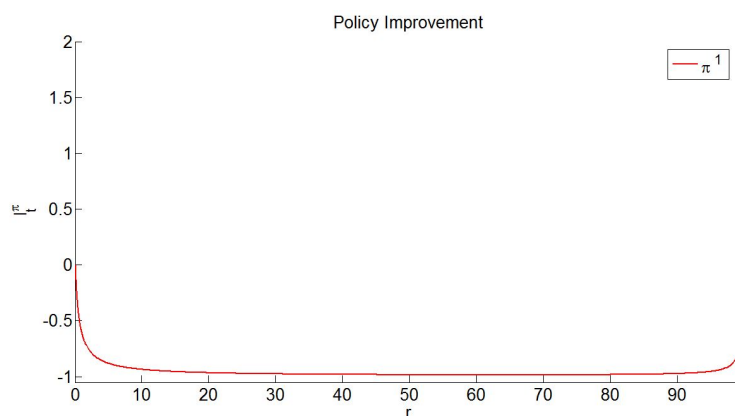


Figura 7.4: Policy improvement se  $0 < c^* < C(0)$

```

1  Politica iniziale fortemente ammissibile:
3  pol_0 = (0.0010, 0.0),

5  ritrovata politica dell' iterazione precedente
   pol(1) = pol(0)
7
   confine superiore per la probabilità di rovina in un salto
9
   2.058798487687069e-087

```

In questo contesto, la policy improvement non determina politiche migliori della politica iniziale  $\pi^0 = [0.001, 0]$ , e quindi il grafico, 7.4, che in genere mostra l'algoritmo di policy improvement è, in questo caso, semplicemente il grafico della funzione  $l_r^{\pi^0}(t)$ , per  $t = 0$ .

Nella figura 7.5, invece vengono plottati gli andamenti del capitale di 100 simulazioni, il rapporto tra numero di fallimenti e numero di simulazioni è 0/100.

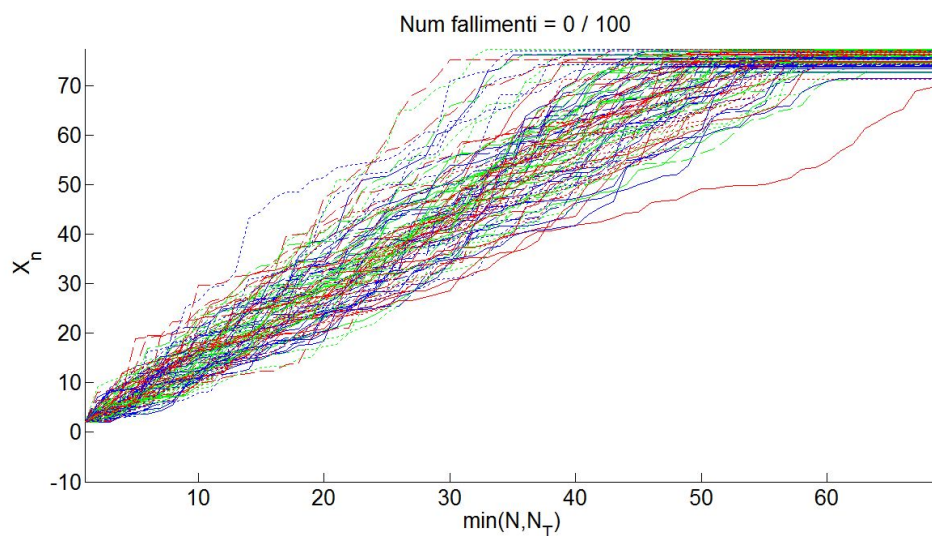


Figura 7.5: Simulazioni del capitale nel caso  $0 < c^* < C(0)$

Una politica diversa da quella ottima trovata, ma ragionevole da un punto di vista intuitivo, potrebbe essere la politica che non richiede investimenti,  $\delta = 0$  e che sceglie un livello di rassicurazione più piccolo. Infatti, poiché le entrate lorde per unità di tempo sono elevate  $c = 60$ , e poiché si sceglie di non investire nel mercato, la compagnia potrebbe decidere di riassicurarsi meno sperando di poter far fronte con le proprie risorse alla maggior parte delle richieste di risarcimento che arrivano. Scegliamo dunque la politica  $\pi_{alt} = (0.1, 0)$ . Si osservi che in questo caso stiamo riassicurando il 90% delle richieste di risarcimento, quindi la copertura dal rischio è ancora elevata. Nonostante ciò simulando l'andamento del capitale 1000 volte si ottiene un numero di fallimenti pari a 18, ovvero si fallisce all'incirca il 2% delle volte.

Nel grafico 7.6 mostriamo l'andamento del capitale per 100 simulazioni, il numero di fallimenti in questo caso è 2/100.

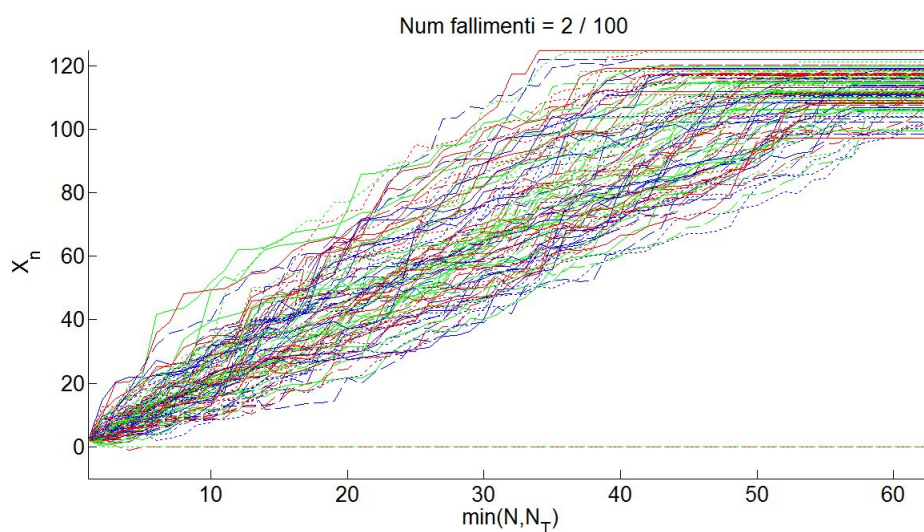


Figura 7.6: Simulazioni del capitale nel caso  $\pi_{alt} = (0.1, 0)$

### 7.3 $0 < C(0) < c^*$

Consideriamo i seguenti valori per i parametri, utilizzando le stesse notazioni dei capitoli precedenti:

Parametri Esempio 2	
di (ri)assicurazione e altri	
$c = 60$	$E[Y_1] = 1/\mu = 10$
$c^* = 15$	$x_0 = 2$

### 7.3.1 mercato favorevole

I dati relativi al processo  $W_{T_n}$  sono quelli della tabella 7.1, ovvero siamo di nuovo nelle condizioni in cui il mercato è favorevole. Si osservi che:

#### Osservazione 48.

- (1)  $0 < C(0) < c^*$ , e in particolare  $C(0) > 0$ , significa che la compagnia può permettersi di riassicurare tutto, ma il vincolo dato dall'imporre un'entrata netta minima di  $c^* = 15 > C(0)$  per unità di periodo, limita dal basso il livello di copertura ammissibile. Di conseguenza il più basso valore di  $b$  che la compagnia può scegliere si trova imponendo  $C(b) = c^*$  e si ottiene (come in formula (1.9), per il caso  $C(0) < c^*$ )  $b_{min} \approx 0.14286$ .

Dalla proposizione 41 si ha che il controllo  $(b_{min}, 0)$  è fortemente ammissibile quindi si sceglie  $\pi^0 = (0.14286, 0)$ .

- (2) La policy improvement ci fornisce il controllo ottimo che è dato da :

$$b^* = 0.14286 = b_{min} \quad , \quad \delta^* = 1.15834$$

da cui segue,

(2.1)  $r^* = \mu/b_{min} = 0.7$

(2.2)  $R_{\pi^*} \approx 0.61224 < r^*$

(2.3) il confine superiore per la probabilità di rovina in un passo è  $e^{-R_{\pi^*}x_0} \approx 0.294$

- (3) Si osservi che la politica ottima di investimento richiede di investire nel mercato una quantità non irrisoria,  $\delta^* = 1.15834$ , la spiegazione è che la compagnia avendo delle restrizioni sul livello di riassicurazione adottabile, cerca di incrementare il proprio capitale investendo nel mercato.

*Gli investimenti sono ovviamente conseguenza del fatto che in media il mercato muove a rialzo.*

L'output dato dall' algoritmo di policy improvement è :

```
2  Politica iniziale fortemente ammissibile:
   pol_0 = (0.1429, 0.0),
4
           iterazione 1
6
   lo zero della funzione  $l(r, pol(0))$  per la politica
8   $pol(0) = [0.14286, 0.00000]$  e'  $R(0) = 0.6000000$ 
10 la politica che minimizza per  $R(0) = 0.6000000$  e'
    $pol(1) = [0.1429, 1.1583]$ 
12
   il valore di  $l(R(0), pol(1))$  e'
14  $l(0.6000000, 0.00, 0.1429, 1.1583) = -0.0914924$ 
16
           iterazione 2
18
   lo zero della funzione  $l(r, pol(1))$  per la politica
20  $pol(1) = [0.14286, 1.15834]$  e'  $R(1) = 0.6122383$ 
22
   la politica che minimizza per  $R(1) = 0.6122383$  e'
24  $pol(2) = [0.1429, 1.1352]$ 
   il valore di  $l(R(1), pol(2))$  e'
26  $l(0.6122383, 0.00, 0.1429, 1.1352) = -0.0000179$ 
28
           iterazione 3
30
   lo zero della funzione  $l(r, pol(2))$  per la politica
32  $pol(2) = [0.14286, 1.13518]$  e'  $R(2) = 0.6122404$ 
34 la politica che minimizza per  $R(2) = 0.6122404$  e'
    $pol(3) = [0.1429, 1.1352]$ 
36 il valore di  $l(R(2), pol(3))$  e'
    $l(0.6122404, 0.00, 0.1429, 1.1352) = -0.0000000$ 
```

38

40

ritrovata politica dell' iterazione precedente

42 `pol(4) = pol(3)`

44 confine superiore per la probabilità di rovina in un salto  
0.29391027588196

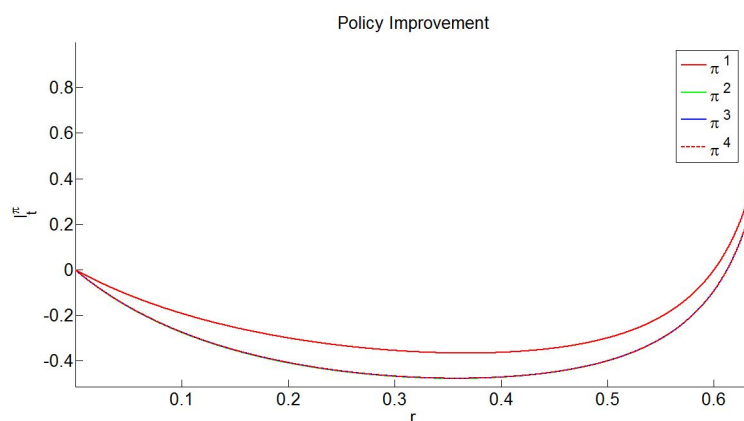


Figura 7.7: Policy improvement se  $0 < C(0) < c^*$

Il grafico che mostra l'algoritmo di policy improvement è quello in figura 7.7

**Osservazione 49.** *Si noti, che in tale esempio, il confine superiore per la probabilità di rovina in un passo è di circa il 29%, questo perché la compagnia è esposta per circa il 14% al rischio di risarcimento, e, visto l'ammontare di capitale investito nel mercato, al rischio dovuto a possibili cali del prezzo del titolo.*

Nella figura 7.8, vengono plottati gli andamenti del capitale di 100 simulazioni e si vede come adottando la politica ottima, il rapporto tra numero di fallimenti e numero di simulazioni è 4/100.

In particolare, abbiamo simulato il capitale 1000 volte e il numero di fallimenti sono 34.

Scegliamo una politica diversa da quella ottima, ma che può sembrare ragionevole. Supponiamo che la compagnia decida di investire di più nel mercato

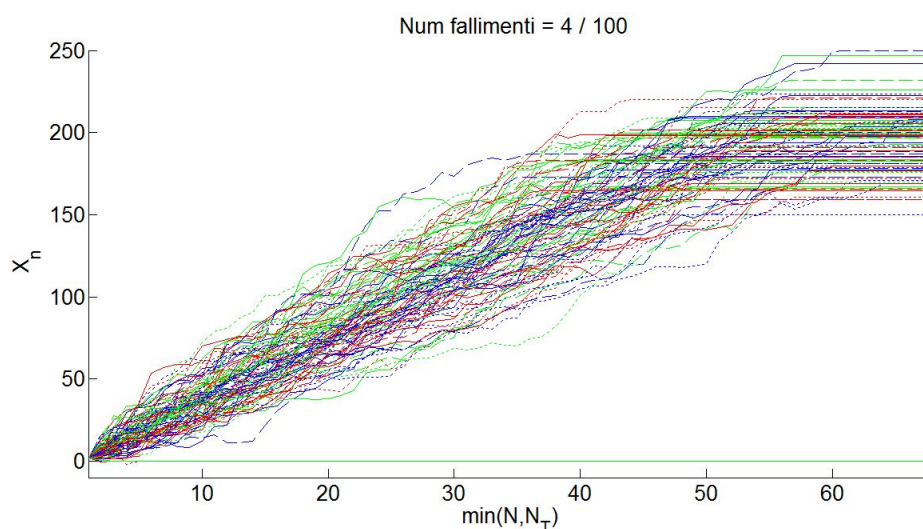


Figura 7.8: Simulazioni del capitale nel caso  $0 < c^* < C(0)$

e quindi di adottare una politica di investimento maggiore di  $4 = \delta > \delta^*$ , questo è ragionevole visto che il mercato è favorevole, e supponiamo che si decida di adottare il minimo livello di riassicurazione ammissibile,  $b = b_{min}$ .

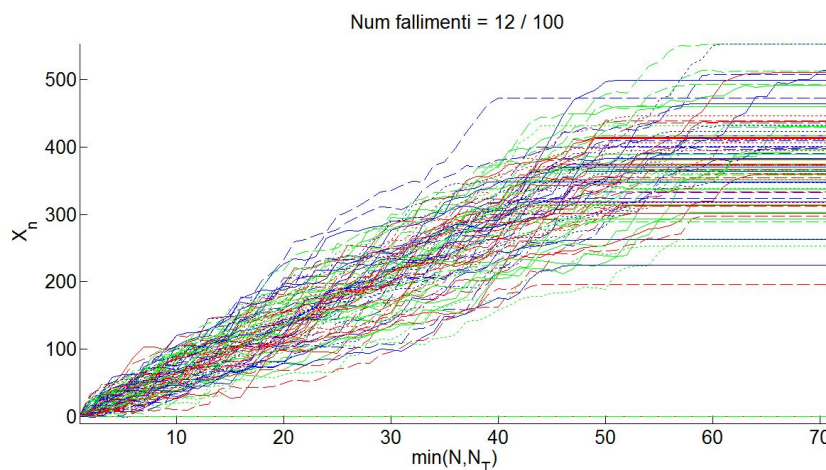


Figura 7.9: Simulazioni del capitale nel caso  $\pi_{alt} = (0.14286, 4)$

Simulando l'andamento del capitale, utilizzando tale politica, si sono verificati 105 fallimenti su 1000 simulazioni, si ha dunque circa il 10% di probabilità di fallire in  $N$  salti. Nella figura 7.9 si vede l'andamento del capitale per 100 simulazioni.

### 7.3.2 mercato sfavorevole

I dati di mercato sono quelli in tabella 7.2.

#### Osservazione 50.

- (1)  $0 < C(0) < c^*$ , anche in questo caso, come nel punto precedente,  $b_{min}$  sarà tale che  $C(b_{min}) = c^*$ .
- (2) Per le condizioni imposte da una tale scelta di parametri il capitale iniziale,  $x_0 = 2$ , è molto basso, inoltre, riassicurare tutto costa  $c_r(0) = 52.5$ , e quindi le entrate nette per un livello di assicurazione elevato (vicino allo 0) sono basse.
- (3)  $b_{min} \approx 0.14286$ ; dalla proposizione 41, si ha che il controllo  $(b_{min}, 0)$  è ammissibile.
- (4) La policy improvement ci fornisce il controllo ottimo che è dato da :

$$b^* = 0.14286 = b_{min} \quad , \quad \delta^* = 0$$

da cui segue,

- (4.1)  $r^* = \mu/b_{min} = 0.7$
- (4.2)  $R_{\pi^*} \approx 0.6 < r^*$
- (4.3) il confine superiore per la probabilità di rovina in un passo è  $e^{-R_{\pi^*}x_0} \approx 0.3012$
- (5) Si osservi che la politica ottima di investimento richiede di non investire nel mercato,  $\delta^* = 0$ , cosa che ci aspettavamo in quanto il mercato è sfavorevole.

L'output dato dall' algoritmo di policy improvement è :



```

2 Insieme delle politiche ammissibili :
  (b, delta) in ( 0.14286 ,1] x [0.00000, 6.00000]
4
  Politica iniziale fortemente ammissibile:
6 pol_0 = (0.1429, 0.0),

8 ritrovata politica dell' iterazione precedente
  pol(1) = pol(0)
10
  Confine superiore per la probabilità di rovina in un salto
12 0.30119421191234

```

Il grafico che mostra l'algoritmo di policy improvement è quello in figura 7.10

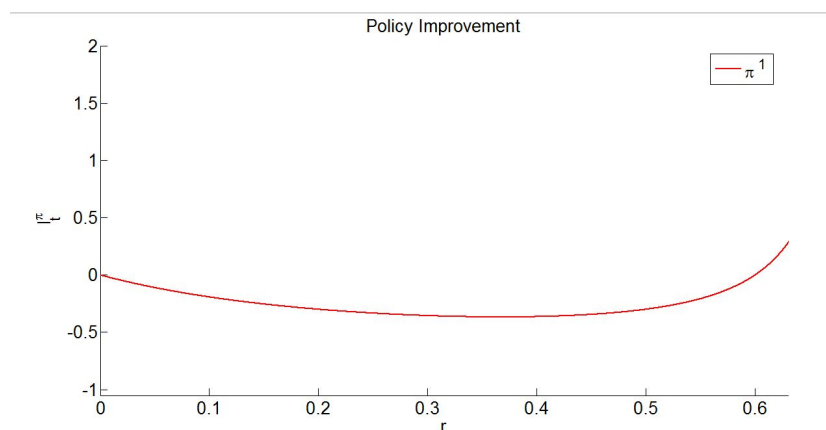


Figura 7.10: Policy improvement se  $0 < C(0) < c^*$

**Osservazione 51.** *Si noti, che in tale esempio, il confine superiore per la probabilità di rovina in un passo è di circa il 30%, questo perché la compagnia è esposta per circa il 14% al rischio di risarcimento.*

Nella figura 7.11, vengono plottati gli andamenti del capitale di 100 simulazioni e si vede come adottando la politica ottima, il rapporto tra numero di fallimenti e numero di simulazioni è 6/100. In particolare, abbiamo simulato il capitale 1000 volte e il numero di fallimenti sono 45.

Se scegliamo la politica alternativa  $pol\_alt = (0.3, 0)$ , ovvero scegliamo di riassicurare meno e quindi di accollarci più rischio derivante da richieste di risarcimento e di non investire nel mercato, il rapporto tra numero di fallimenti

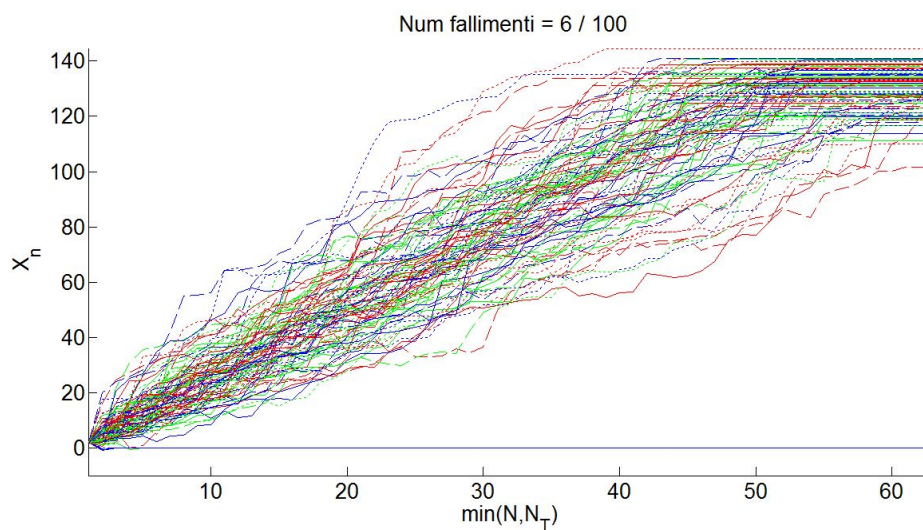


Figura 7.11: Simulazioni del capitale nel caso  $0 < c^* < C(0)$

e numero di simulazioni, aumenta, come si vede nella figura 7.12, infatti, in questo caso è 16/100.

## 7.4 $C(0) < 0 < c^*$

Consideriamo i seguenti valori per i parametri, utilizzando le stesse notazioni dei capitoli precedenti:

Parametri Esempio 3 di (ri)assicurazione e altri	
$c = 60$	$E[Y_1] = 1/\mu = 30$
$c^* = 30$	$x_0 = 240$

### 7.4.1 mercato favorevole

Faremo riferimento ai dati di mercato nella tabella 7.1.

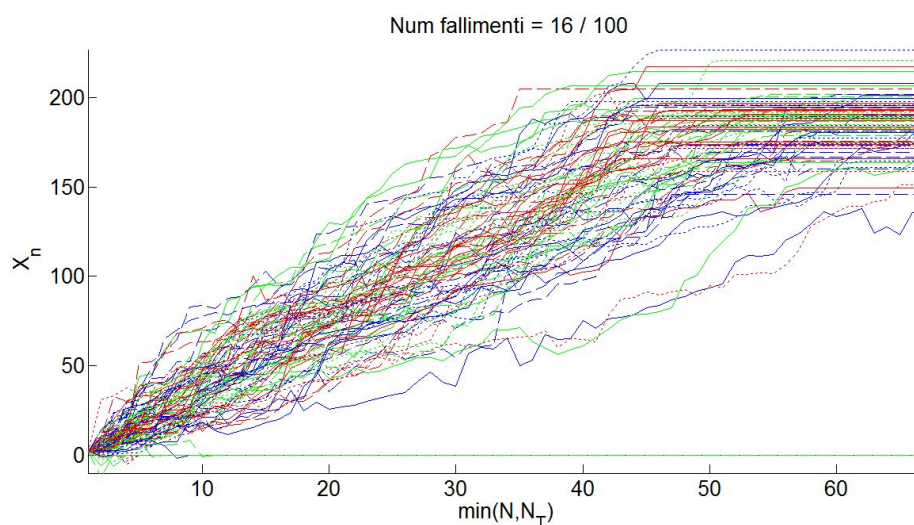


Figura 7.12: Simulazioni del capitale nel caso  $\pi_{alt} = (0.3, 0)$

### Osservazione 52.

- (1) Si noti che in questo caso siamo nell' ipotesi di mercato favorevole, infatti  $E[W_1] = 0.5250 > 0$
- (2)  $C(0) < 0$ , questo è intuitivo in quanto, visto che la media dell' ammontare dei claim è molto elevata, dalla formula (1.4) si vede che riassicurare tutto ha un costo molto alto, in particolare tale costo supera le entrate lorde della compagnia  $c < c_r$ . Quello che ci aspettiamo è che la politica di riassicurazione minima che la compagnia può permettersi,  $(b_{min})$ , sia molto elevata (vicina all' 1). In altri termini, il rischio che la compagnia può permettersi di cedere a terzi è molto contenuto. In più, il vincolo dato dall' imporre  $c^* = 30$ , ossia la compagnia vuole trattenere almeno la metà delle entrate lorde, limita ulteriormente dal basso il livello di copertura ammissibile.
- (3) Si osservi che se la compagnia ha entrate lorde per unità di tempo  $c = 60$ , e se la media dell' ammontare dei claim è  $1/\mu = 30$ , allora un capitale iniziale  $x_0 = 240$  non è da considerarsi troppo alto.
- (4)  $b_{min} \approx 0.81$ ; Inoltre poiché non soddisfa la (3.5) si ha che il controllo  $(b_{min}, 0)$  non è fortemente ammissibile e quindi scegliamo come politica iniziale  $\pi^0$  definita come nella proposizione 41, in questo caso vale

$$b_{amm} = 0.86666.$$

(5) La policy improvement ci fornisce il controllo ottimo che è dato da :

$$b^* = 0.93417 \neq b_{min} \quad , \quad \delta^* = 6 \quad (= \bar{\delta})$$

da cui segue,

$$(5.1) \quad r^* = \mu/b_{min} \approx 0.041$$

$$(5.2) \quad R_{\pi^*} \approx 0.0166 < r^*$$

$$(5.3) \quad \text{il confine superiore per la probabilità di rovina in un passo è } e^{-R_{\pi^*}x_0} \approx 0.0186 \approx 2\%$$

(6) Si osservi che la politica ottima di investimento richiede di investire nel mercato il massimo livello consentito,  $\delta^* = \bar{\delta}$ . Questo è comprensibile, in quanto potendo riassicurare molto poco  $b^* = 93\%$ , ovvero avendo una copertura dal rischio minore del 7% , ed essendo in tale scenario il mercato favorevole, la compagnia cerca di incrementare il proprio capitale investendo nel mercato finanziario, e di utilizzare tali ricavi per poter far fronte alle richieste di risarcimento.

Vedremo nel paragrafo successivo che una tale politica di investimento non sarebbe ottimale in un contesto in cui il mercato è sfavorevole, in quanto al rischio assicurativo si aggiungerebbe il rischio di perdere ulteriore capitale a causa di investimenti molto rischiosi.

L'output dato dall' algoritmo di policy improvement è :

```

2
Insieme delle politiche ammissibili :
4 (b, delta) in ( 0.80952 ,1] x [0.00000, 6.00000]

6 Politica iniziale fortemente ammissibile:
  pol_0 = (0.8677, 0.0),
8
10
      iterazione 1
12
lo zero della funzione l(r,pol(0)) per la politica
14 pol(0) = [ 0.86767, 0.00000] e' R(0) = 0.0001104

```

```
16 la politica che minimizza per  $R(0) = 0.0001104$  e'  
   pol(1) = [1.0000,6.0000]  
18  
   il valore di  $l(R(0), \text{pol}(1))$  e'  
20  $l(0.0001104, 0.00, 1.0000, 6.0000) = -0.0011108$   
  
22  
           iterazione 2  
24  
   lo zero della funzione  $l(r, \text{pol}(1))$  per la politica  
26 pol(1) = [ 1.00000, 6.00000] e'  $R(1) = 0.0164897$   
  
28 la politica che minimizza per  $R(1) = 0.0164897$  e'  
   pol(2) = [0.9401,6.0000]  
30  
   il valore di  $l(R(1), \text{pol}(2))$  e'  
32  $l(0.0164897, 0.00, 0.9401, 6.0000) = -0.0015198$   
  
34  
           iterazione 3  
36  
   lo zero della funzione  $l(r, \text{pol}(2))$  per la politica  
38 pol(2) = [ 0.94012, 6.00000] e'  $R(2) = 0.0166082$   
  
40 la politica che minimizza per  $R(2) = 0.0166082$  e'  
   pol(3) = [0.9342,6.0000]  
42  
   il valore di  $l(R(2), \text{pol}(3))$  e'  
44  $l(0.0166082, 0.00, 0.9342, 6.0000) = -0.0000146$   
  
46  
           iterazione 4  
48  
   lo zero della funzione  $l(r, \text{pol}(3))$  per la politica  
50 pol(3) = [ 0.93422, 6.00000] e'  $R(3) = 0.0166094$   
  
52 la politica che minimizza per  $R(3) = 0.0166094$  e'  
   pol(4) = [0.9342,6.0000]  
54  
   il valore di  $l(R(3), \text{pol}(4))$  e'  
56  $l(0.0166094, 0.00, 0.9342, 6.0000) = -0.0000000$ 
```

58

iterazione 5

60

lo zero della funzione  $l(r, \text{pol}(4))$  per la politica62  $\text{pol}(4) = [0.93417, 6.00000]$  e'  $R(4) = 0.0166094$ 64 la politica che minimizza per  $R(4) = 0.0166094$  e' $\text{pol}(5) = [0.9342, 6.0000]$ 

66

il valore di  $l(R(4), \text{pol}(5))$  e'68  $l(0.0166094, 0.00, 0.9342, 6.0000) = 0.0000000$ 

70 ritrovata politica dell' iterazione precedente

 $\text{pol}(6) = \text{pol}(5)$ 

72

confine superiore della probabilità di rovina in un salto

74  $0.01856919655957$ 

Il grafico in figura 7.13, rappresenta le iterazioni dell' algoritmo di policy improvement.

Simulando il capitale della compagnia 1000 volte si ottiene che il numero di

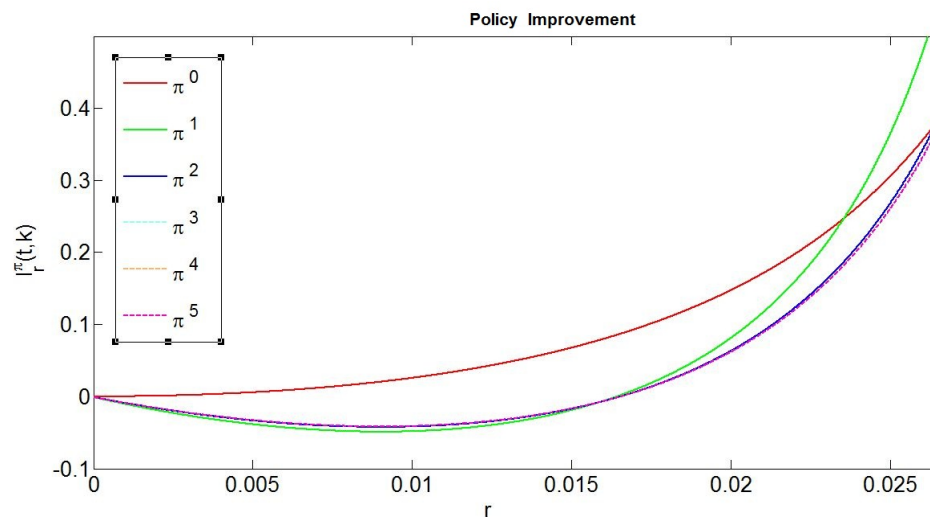


Figura 7.13: Iterazione dell'algoritmo di policy improvement

fallimenti è uguale a 13.

Nella figura 7.14 vengono plottati gli andamenti del capitale di 100 simulazioni e si vede come adottando la politica ottima, il rapporto tra numero di fallimenti e numero di simulazioni è  $2/100$ .

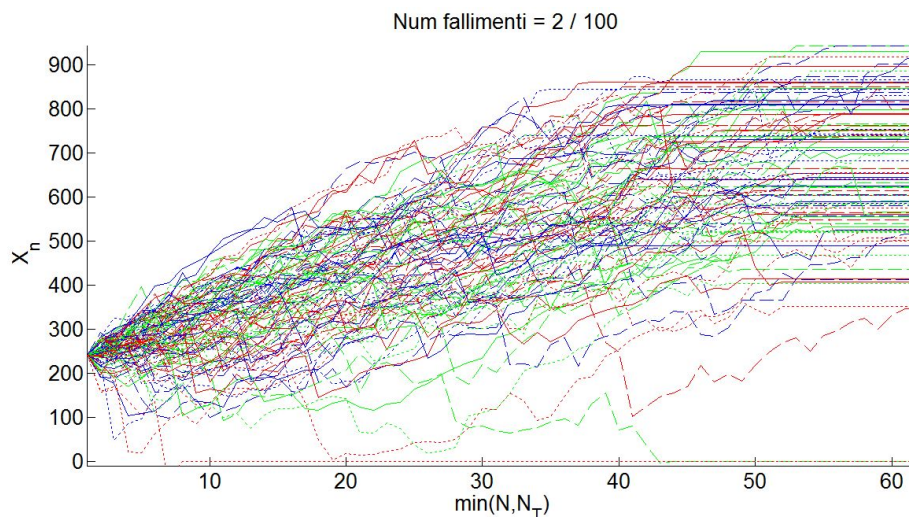


Figura 7.14: Andamento del capitale in 100 simulazioni

Supponendo di adottare una politica diversa da quella ottima fornita dall' algoritmo di policy improvement, per esempio una politica più moderata, in cui il livello di rassicurazione è il minimo consentito,  $b = b_{min}$  e invece il livello di investimento è  $\delta = 4 < \delta^*$ , il rapporto tra il numero di simulazioni e il numero di fallimenti è di 5/100, come mostrato in figura 7.15, mentre su una simulazione di 1000 traiettorie del capitale il numero di fallimenti è di 24.

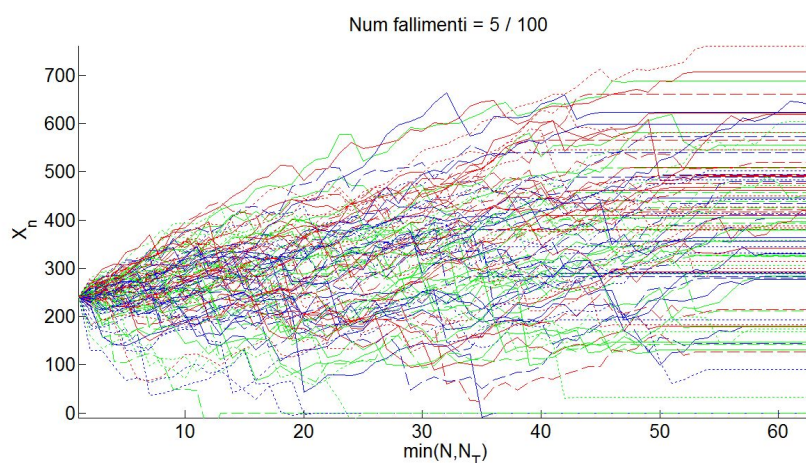


Figura 7.15: Simulazione di 100 traiettorie del capitale per  $\pi_{alt} = (b_{min}, 4)$

**Osservazione 53.**

*I risultati ottenuti in questo paragrafo, potrebbero indurci a pensare che in un tale contesto, visto l'elevato costo di riassicurazione, la strategia di investimento ottima possa essere  $\delta^* = \bar{\delta}$ , qualsiasi sia il valore di  $\bar{\delta}$ . In realtà, non è così. Supponendo, infatti, di permettere alla compagnia assicurativa investimenti molto elevati, per esempio  $\bar{\delta} = 100$ , la policy improvement restituisce la politica ottima  $b^* = b_{min}, \delta^* = 29.637$ . In altre parole, la compagnia assicurativa sceglie di investire nel mercato, quella quantità di denaro, chiamiamola  $\hat{\delta}$ , che le permette di riassicurare il più possibile,  $b^* = b_{min}$ . Se tale investimento non fosse ammissibile, ovvero se  $\hat{\delta} > \bar{\delta}$  allora l'investimento ottimo per la compagnia sarebbe il massimo consentito, ovvero  $\delta^* = \bar{\delta}$ , mentre il livello di riassicurazione ottimo  $b^*$ , verrebbe scelto di conseguenza.*

*Supponendo dunque di porre  $\bar{\delta} = 100$ , l'output dato dall' algoritmo di policy improvement è:*

```

1
  Insieme delle politiche ammissibili:
3 (b, delta) in ( 0.80952 ,1] x [0.00000, 100.00000]

5 Politica iniziale fortemente ammissibile:
  pol_0 = (0.8677, 0.0),
7

9
      iterazione 1
11 lo zero della funzione l(r,pol(0)) per la politica
    pol(0) = [ 0.86767, 0.00000] e' R(0) = 0.0001104
13
    la politica che minimizza per R(0) = 0.0001104 e'
15 pol(1) = [1.0000,100.0000]

17 il valore di l(R(0), pol(1)) e'
    l(0.0001104 , 0.00, 1.0000, 100.0000) = -0.0130995
19

21

23

25
      iterazione 2
    lo zero della funzione l(r,pol(1)) per la politica

```



27  $pol(1) = [ 1.00000, 100.00000 ]$  e'  $R(1) = 0.0161431$

29 *la politica che minimizza per  $R(1) = 0.0161431$  e'*  
 $pol(2) = [ 0.8701, 43.0525 ]$

31

*il valore di  $l(R(1), pol(2))$  e'*

33  $l(0.0161431, 0.00, 0.8701, 43.0525) = -0.1466417$

35

37

*iterazione 3*

39 *lo zero della funzione  $l(r, pol(2))$  per la politica*  
 $pol(2) = [ 0.87007, 43.05254 ]$  e'  $R(2) = 0.0222692$

41

*la politica che minimizza per  $R(2) = 0.0222692$  e'*

43  $pol(3) = [ 0.8095, 31.2091 ]$

45 *il valore di  $l(R(2), pol(3))$  e'*

$l(0.0222692, 0.00, 0.8095, 31.2091) = -0.0321536$

47

49

51

*iterazione 4*

*lo zero della funzione  $l(r, pol(3))$  per la politica*

53  $pol(3) = [ 0.80952, 31.20911 ]$  e'  $R(3) = 0.0234404$

55 *la politica che minimizza per  $R(3) = 0.0234404$  e'*

$pol(4) = [ 0.8095, 29.6498 ]$

57

*il valore di  $l(R(3), pol(4))$  e'*

59  $l(0.0234404, 0.00, 0.8095, 29.6498) = -0.0002931$

61

63

*iterazione 5*

65 *lo zero della funzione  $l(r, pol(4))$  per la politica*

$pol(4) = [ 0.80952, 29.64978 ]$  e'  $R(4) = 0.0234504$

67

*la politica che minimizza per  $R(4) = 0.0234504$  e'*

69  $pol(5) = [ 0.8095, 29.6371 ]$

71 *il valore di  $l(R(4), pol(5))$  e'*  
 $l(0.0234504, 0.00, 0.8095, 29.6371) = -0.0000000$

73

75

77 *iterazione 6*  
*lo zero della funzione  $l(r, pol(5))$  per la politica*  
 79  $pol(5) = [0.80952, 29.63709]$  e'  $R(5) = 0.0234504$

81 *la politica che minimizza per  $R(5) = 0.0234504$  e'*  
 $pol(6) = [0.8095, 29.6371]$

83

*il valore di  $l(R(5), pol(6))$  e'*  
 85  $l(0.0234504, 0.00, 0.8095, 29.6371) = 0.0000000$

87

89 *ritrovata politica dell' iterazione precedente  $pol(7) = pol(6)$*

## 7.4.2 mercato sfavorevole

Sempre utilizzando i valori in tabella 7.2, possiamo osservare che:

### Osservazione 54.

(1) Ancora,  $b_{min} \approx 0.81 < -\frac{C(0)E[Z_1 \wedge (T-t)]E[Z_1 \wedge T]}{E[Y_1]((1+\theta)E[Z_1 \wedge (T-t)] - p_{k,0}G(T-t)E[Z_1 \wedge T])}$  dunque il controllo  $(b_{min}, 0)$  non è ammissibile, ma la politica  $\pi^0 = ((0.8677, 0.0)$  definita nella proposizione 41, con  $b_{amm} = 0.86666$ . è fortemente ammissibile.

(2) La policy improvement ci fornisce il controllo ottimo che è dato da :

$$b^* = 1, \delta^* = 0 \quad (= \underline{\delta})$$

da cui segue,

$$(2.1) \quad r^* = \mu/b_{min} \approx 0.041$$

$$(2.2) \quad R_{\pi^*} \approx 0.0083 < r^*$$

(2.3) il confine superiore per la probabilità di rovina in un passo è  $e^{-R_{\pi^*}x_0} \approx 0.1353$

(3) Si osservi che la politica ottima di investimento, in questo caso, richiede di non investire nel mercato,  $\delta^* = \underline{\delta} = 0$ , come nei casi precedenti, questo è dovuto al fatto che in media il mercato muove a ribasso.

(4) Si noti ancora, che il livello ottimo di riassicurazione è  $b^* = 1$  ciò significa che non conviene riassicurare. Infatti, nonostante la riassicurazione riduca il rischio ad un livello adeguato per la compagnia, il costo di riassicurazione fa sì che il valore atteso del patrimonio netto si riduca in una misura così elevata da causare un aumento della probabilità di rovina della compagnia, anziché una diminuzione.

Output dell' algoritmo di policy improvement :

```

2  Insieme delle politiche ammissibili:
   (b, delta) in ( 0.80952 ,1] x [0.00000, 6.00000]
4
   Politica iniziale fortemente ammissibile:
6  pol_0 = (0.8677, 0.0),

8
           iterazione 1
   lo zero della funzione l(r,pol(0)) per la politica
10 pol(0) = [ 0.86767, 0.00000] e' R(0) = 0.0001104

12 la politica che minimizza per R(0) = 0.0001104 e'
   pol(1) = [1.0000,0.0000]
14
   il valore di l(R(0), pol(1)) e'
16 l(0.0001104 , 0.00, 1.0000, 0.0000) = -0.0003274

18
   ritrovata politica dell' iterazione precedente
20 pol(2) = pol(1)

22 Confine superiore per la probabilità di rovina in un salto
   0.13533528324363

```

Il grafico in figura 7.16, rappresenta le iterazioni dell' algoritmo di policy improvement. Nella figura 7.17, invece vengono plottati gli andamenti del

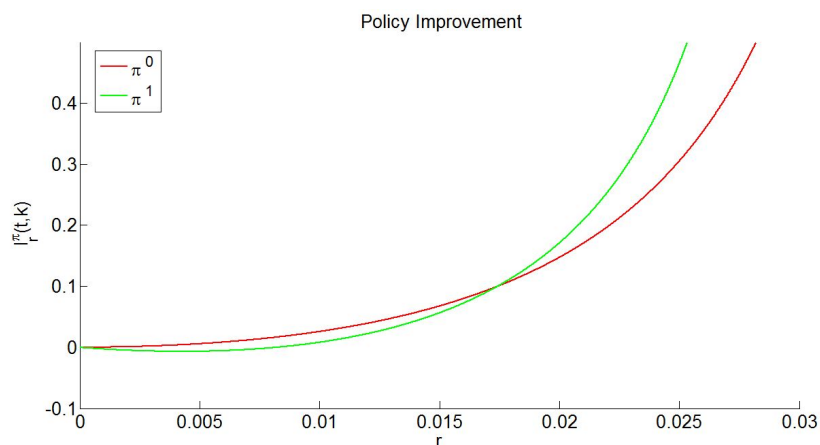


Figura 7.16: Iterazione dell'algoritmo di policy improvement

capitale di 100 simulazioni e si vede come adottando la politica ottima, il rapporto tra numero di fallimenti e numero di simulazioni è 5/100.

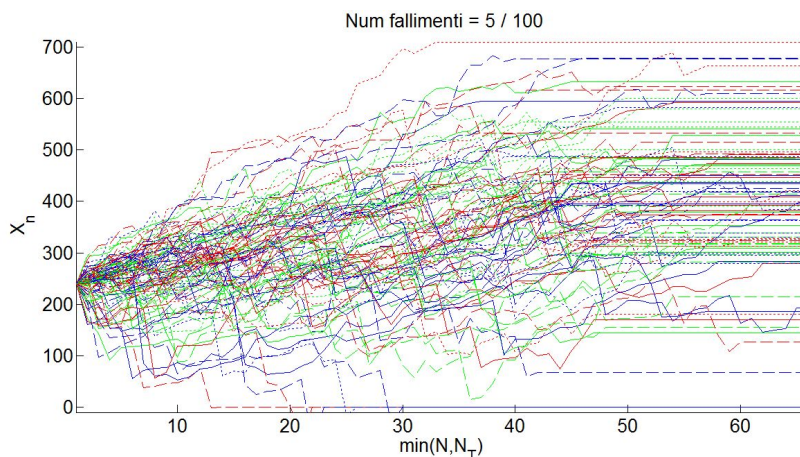


Figura 7.17: Andamento del capitale:100 simulazioni

Simulando il capitale della compagnia 1000 volte, si ottiene che il numero di fallimenti è circa uguale a 51.

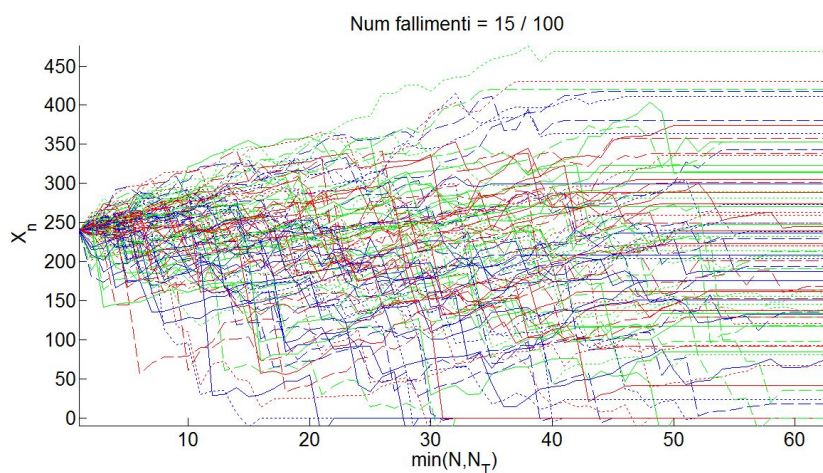


Figura 7.18: Andamento del capitale in 100 simulazioni per la politica  $(b_{min}, 0)$

Potrebbe sembrare un' alternativa migliore quella che impone alla compagnia di riassicurarsi il più possibile  $b = b_{min}$  e di non investire nel mercato. Utilizzando la politica alternativa  $\pi_{alt} = (b_{min}, 0)$  viene simulato 1000 l'andamento del capitale e il numero di fallimenti è 141, dunque si fallisce in più del 10% dei casi.

In figura 7.18 viene plottato l'andamento del capitale di 100 simulazioni, in cui il numero di fallimenti è 15.



# Capitolo 8

## Conclusioni

Abbiamo considerato il problema di minimizzare la probabilità di rovina di una compagnia assicurativa, partendo da un modello per il rischio assicurativo che permetta la scelta dinamica del livello di riassicurazione e di investimento nel mercato finanziario.

Il nostro è in generale un modello innovativo che descrive in modo unificato l'avvenimento degli eventi, che sono gli arrivi delle richieste di risarcimento, e le variazioni del prezzo del titolo. Esso è basato sull'utilizzo di un processo semi-Markoviano a tempo continuo. Pensiamo che un tale modello rappresenti la realtà più fedelmente di quanto facciano i modelli basati sui processi diffusivi. Inoltre tale approccio porta anche alcuni vantaggi nel momento in cui si devono stimare i parametri del modello, nel senso che permette di distinguere tra l'informazione ottenuta osservando gli istanti di accadimento dei singoli eventi, dall'informazione che si ottiene osservando il tempo che trascorre tra due eventi successivi.

Ricordiamo inoltre che il nostro confine superiore è stato costruito con il principale obiettivo di determinare una politica di riassicurazione e investimento che mantenga bassa la probabilità di rovina.

Le soluzioni ricavate numericamente ci permettono di arrivare alla conclusione che, in generale, per una compagnia assicurativa non è conveniente investire grandi importi di denaro nel titolo rischioso. In particolare, si è visto che qualunque sia il contesto in cui ci si trova, se il titolo rischioso muove mediamente a ribasso allora la migliore strategia è quella di non investire. Ovviamente, ad una migliore attitudine del mercato corrisponderà un maggiore livello di investimento.

Se il livello di riassicurazione scelto è molto basso (equivalentemente, il livello di copertura dal rischio è molto alto) allora i costi di riassicurazione saranno elevati e poiché il mercato azionario può subire improvvisi cambiamenti del prezzo a ribasso, una perdita nel mercato potrebbe condurre la compagnia

al fallimento.

In definitiva, alla compagnia assicurativa, conviene adottare il minimo livello di riassicurazione ammissibile, i.e.  $b^* = b_{min}$ , e politiche di investimento nulle, i.e.  $\delta^* = 0$ , in caso di mercato sfavorevole, e livelli di investimento ‘moderati’, se invece il mercato è favorevole.

Si noti in particolare, che nel caso della sezione 7.4 il livello ottimo di riassicurazione è diverso da quello minimo ammissibile  $b^* \neq b_{min}$ . Questo perché in tal caso i costi di riassicurazione per  $b = b_{min}$  sono molto elevati, e la compagnia è vincolata a non investire più di  $\bar{\delta}$  nel mercato. Di conseguenza quello che la compagnia può sperare di guadagnare investendo non è sufficiente ad adottare una politica di riassicurazione abbastanza piccola. In particolare si è visto nell’osservazione 53 che se la compagnia potesse investire di più in un mercato favorevole, potrebbe anche permettersi un livello di riassicurazione più basso.

Ricordiamo che le politiche ottime che abbiamo determinato sono politiche miopi, ovvero politiche che non tengono in considerazione le conseguenze future che il controllo scelto oggi può avere sull’evoluzione del processo. In ogni caso, come già accennato nell’introduzione, una tale politica ottimale a differenza di una politica i cui controlli sono ad anello chiuso con retroazione, è facile da determinare.

D’altra parte, le simulazioni fatte con il programma in appendice E suggeriscono che il rapporto tra il numero di fallimenti e il numero di simulazioni tende ad un numero abbastanza piccolo al tendere ad infinito del numero di simulazioni.

In altre parole, anche se la politica miope ottima determinata con l’algoritmo di policy improvement non è la migliore tra tutte le politiche ammissibili, è sicuramente una buona politica nel senso che mantiene sufficientemente bassa la probabilità di rovina.







# Appendici



# Appendice A

## La funzione *fmincon*

La funzione *fmincon* di MatLab permette di risolvere problemi di ottimizzazione non lineare vincolata. Una forma generale per *fmincon* è

<sup>1</sup>

```
[x,fval,output]=fmincon(@myfun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,options)
```

### Parametri in Ingresso:

**myfun** *myfun* è una funzione matlab in cui è definita la funzione da minimizzare (definita dall'utente). nel nostro caso  $sss(param) = l(r, t, param, S)$ , fissati  $r, t, S$ .

**x0** punto di partenza; vettore in  $R^n$ . Può essere una approssimazione di un minimo locale oppure, se non si ha alcuna informazione, un punto arbitrario.

**A,b** matrice e vettore dei vincoli di disuguaglianza, se non si hanno vincoli di tale tipo si inserisce [], []

**Aeq,beq** matrice e vettore dei vincoli di uguaglianza, se non si hanno vincoli di questo tipo si inserisce [], []

**lb** vettore dei confini inferiori di ammissibilità.

**ub** vettore dei confini superiori di ammissibilità.

**options** struttura dati le cui componenti specificano i parametri secondo cui *fmincon* opera. Per modificare i parametri di default si inserisce

nel codice la definizione della struttura e si apportano eventuali nuove modifiche (Per esempio si possono cambiare le tolleranze).

'*LargeScale*', '*off*' Non sono utilizzati algoritmi *Large Scale*, è un' opzione possibile se il numero di variabili rispetto cui minimizzare è medio-basso.

'*Display*', '*iter*' Visualizzazione dei risultati dell' algoritmo di minimizzazione ad ogni iterazione, se invece di '*iter*' si passa '*off*' non vengono visualizzati risultati.

'**TolFun**' Tolleranza sul valore dell' incremento della funzione, se  $f(x_0) - f(x_1) < TolFun$  l'algoritmo si arresta.

### Output:

$x$  : E' il vettore di  $R^n$  che minimizza la funzione obiettivo;

$fval$  : E' il valore che la funzione obiettivo assume sul suo punto di minimo  $x$ ;

$exitflag$  : valore che indica la condizione che si verifica alla fine dell' esecuzione di *fmincon*:

Valori possibili sono (da notare che  $exitflag > 0$  indica convergenza)

- 1: Convergenza alla soluzione  $x$  .
- 2: L'incremento di  $x$  è inferiore alla tolleranza assegnata.
- 3: L'incremento del valore della funzione è inferiore alla tolleranza assegnata.
- 4: Il valore della direzione di ricerca minore della tolleranza e la violazione dei vincoli è meno della tolleranza;
- 5: Il valore della derivata direzionale minore della tolleranza e la violazione dei vincoli è meno della tolleranza;

- 0: Raggiunto il numero massimo di iterazioni o superato il numero massimo di valutazioni di funzione;
- 1: *fmincon* è stato interrotto dalla funzione *myfun()* (eventuale errore nella chiamata di *myfun()* );
- 2: Nessun punto ammissibile.

*output* : struttura dati che descrive il comportamento di *fmincon*. Le più importanti componenti sono:

*output.iterations* : numero di iterazioni

*output.funcCount* : numero di valutazioni di funzione.

*output.algorithm* : l'algoritmo utilizzato

*output.firstorderopt* : condizioni di ottimalità





# Appendice B

## Generazione dati

Il file *genera\_dati.m* è uno script. Un file del genere è molto utile per memorizzare i valori dei parametri associati a ciascuno dei contesti (Esempio) che vogliamo analizzare. Utilizzando tale script, una volta finito di studiare il contesto 'Esempio 1' si può passare all' 'Esempio 2' cambiando solo il parametro "*Esempio*" senza dover ogni volta modificare tutti i parametri in tutti i programmi.

In particolare uno script opera sui dati esistenti nell' ambiente di lavoro, e può creare nuovi dati che rimangono nell' ambiente di lavoro e possono essere riutilizzati per altri calcoli.

```
1 % PARAMETRI COSTANTI
2     t_0 = 0; % istante di tempo in cui viene fissato il tasso C(b)
3     t=t_0; % istante in cui si suppone di trovarsi
4
5     % intervallo di investimento
6     d_low= 0;
7     d_up = 6;
8
9     %limite superiore per r
10    max_r = inf;
11
12    %matrice di transizione in un passo
13    p0=0.3; % probabilità di un claim  $N_t$   $N_{t+1}$  e  $N_{t+2}$ 
14    p1= 1-p0;
15
16    % orizzonte temporale
17    T=10;
18
19    % massimo numero di salti preso in considerazione
```

```
21 N=80;
23 % minima politica di riassicurazione nel caso in cui  $0 < c^* < C(0)$ 
25 b_low= 0.001;
switch Esempio
case 1,% C(0) <0 Mercato favorevole
    % capitale iniziale
    x0=240;
    %media di salti nell'unità di tempo
    lambda=5;
    %safety loading
    theta = 0.05;
    % tasso dei premi lordi in entrata
    c=60;
    % tasso in entrata minimo
    c_star = 30;
    % intensità dell' ammontare dei claim
    My = 30;
    my = 1/My;
    mercato = 1;
    pol_alt=[0.8677, 4];
case 2,% C(0) <0 Mercato sfavorevole
    % capitale iniziale
    x0=240;
    lambda=5;
    %safety loading
    theta = 0.05;
```

```
12      % tasso dei premi lordi in entrata
13      c=60;
14
15      % tasso in entrata minimo
16      c_star = 30;
17
18      % intensità dell' ammontare dei claim
19      My = 30;
20      my = 1/My;
21
22      mercato = -1;
23
24      pol_alt=[0.8677, 0]
```

```
1      case 3,% 0<c_star<C(0) fav
2
3      % capitale iniziale
4      x0=2;
5
6      lambda=5;
7
8      %safety loading
9      theta = 0.05;
10
11     % tasso dei premi lordi in entrata
12     c=60;
13
14     % tasso in entrata minimo
15     c_star =6;
16
17     % intensità dell' ammontare dei claim
18     My = 10;
19     my = 1/My;
20
21     mercato = 1;
22
23     pol_alt = [b_low,3];
```

```
1      case 4, % 0<c_star<C(0) fav
2
3
```

```
5      % capitale iniziale
6      x0=2;
7
8      lambda=5;
9
10     %safety loading
11     theta = 0.05;
12
13     % tasso dei premi lordi in entrata
14     c=60;
15
16     % tasso in entrata minimo
17     c_star =6;
18
19     % intensità dell' ammontare dei claim
20     My = 10;
21     my = 1/My;
22
23     mercato = -1;
24
25     pol_alt = [0.1,0];
```

```
1 case 5,% 0<C(0)<c_star fav
2     % capitale iniziale
3     x0=2;
4     lambda=5;
5
6     %safety loading
7     theta = 0.05;
8
9     % tasso dei premi lordi in entrata
10    c=60;
11
12    % tasso in entrata minimo
13    c_star = 15;
14
15    % intensità dell' ammontare dei claim
16    My = 10;
17    my = 1/My;
18
19    mercato = 1;
20
21    pol_alt = [0.14286,4]
```

```

1 case 6,% 0<C(0)<c_star sfav
3
5     % capitale iniziale
6     x0=2;
7
8     lambda=5;
9
10    %safety loading
11    theta = 0.05;
12
13    % tasso dei premi lordi in entrata
14    c=60;
15
16    % tasso in entrata minimo
17    c_star = 15;
18
19    % intensità dell' ammontare dei claim
20    My = 10;
21    my = 1/My;
22
23    mercato = -1;
24
25    pol_alt = [0.3,0]
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
850
851
852
853
854
855
856
857
858
859
860
861
862
863
864
865
866
867
868
869
870
871
872
873
874
875
876
877
878
879
880
881
882
883
884
885
886
887
888
889
890
891
892
893
894
895
896
897
898
899
900
901
902
903
904
905
906
907
908
909
910
911
912
913
914
915
916
917
918
919
920
921
922
923
924
925
926
927
928
929
930
931
932
933
934
935
936
937
938
939
940
941
942
943
944
945
946
947
948
949
950
951
952
953
954
955
956
957
958
959
960
961
962
963
964
965
966
967
968
969
970
971
972
973
974
975
976
977
978
979
980
981
982
983
984
985
986
987
988
989
990
991
992
993
994
995
996
997
998
999
1000
1001
1002
1003
1004
1005
1006
1007
1008
1009
1010
1011
1012
1013
1014
1015
1016
1017
1018
1019
1020
1021
1022
1023
1024
1025
1026
1027
1028
1029
1030
1031
1032
1033
1034
1035
1036
1037
1038
1039
1040
1041
1042
1043
1044
1045
1046
1047
1048
1049
1050
1051
1052
1053
1054
1055
1056
1057
1058
1059
1060
1061
1062
1063
1064
1065
1066
1067
1068
1069
1070
1071
1072
1073
1074
1075
1076
1077
1078
1079
1080
1081
1082
1083
1084
1085
1086
1087
1088
1089
1090
1091
1092
1093
1094
1095
1096
1097
1098
1099
1100
1101
1102
1103
1104
1105
1106
1107
1108
1109
1110
1111
1112
1113
1114
1115
1116
1117
1118
1119
1120
1121
1122
1123
1124
1125
1126
1127
1128
1129
1130
1131
1132
1133
1134
1135
1136
1137
1138
1139
1140
1141
1142
1143
1144
1145
1146
1147
1148
1149
1150
1151
1152
1153
1154
1155
1156
1157
1158
1159
1160
1161
1162
1163
1164
1165
1166
1167
1168
1169
1170
1171
1172
1173
1174
1175
1176
1177
1178
1179
1180
1181
1182
1183
1184
1185
1186
1187
1188
1189
1190
1191
1192
1193
1194
1195
1196
1197
1198
1199
1200
1201
1202
1203
1204
1205
1206
1207
1208
1209
1210
1211
1212
1213
1214
1215
1216
1217
1218
1219
1220
1221
1222
1223
1224
1225
1226
1227
1228
1229
1230
1231
1232
1233
1234
1235
1236
1237
1238
1239
1240
1241
1242
1243
1244
1245
1246
1247
1248
1249
1250
1251
1252
1253
1254
1255
1256
1257
1258
1259
1260
1261
1262
1263
1264
1265
1266
1267
1268
1269
1270
1271
1272
1273
1274
1275
1276
1277
1278
1279
1280
1281
1282
1283
1284
1285
1286
1287
1288
1289
1290
1291
1292
1293
1294
1295
1296
1297
1298
1299
1300
1301
1302
1303
1304
1305
1306
1307
1308
1309
1310
1311
1312
1313
1314
1315
1316
1317
1318
1319
1320
1321
1322
1323
1324
1325
1326
1327
1328
1329
1330
1331
1332
1333
1334
1335
1336
1337
1338
1339
1340
1341
1342
1343
1344
1345
1346
1347
1348
1349
1350
1351
1352
1353
1354
1355
1356
1357
1358
1359
1360
1361
1362
1363
1364
1365
1366
1367
1368
1369
1370
1371
1372
1373
1374
1375
1376
1377
1378
1379
1380
1381
1382
1383
1384
1385
1386
1387
1388
1389
1390
1391
1392
1393
1394
1395
1396
1397
1398
1399
1400
1401
1402
1403
1404
1405
1406
1407
1408
1409
1410
1411
1412
1413
1414
1415
1416
1417
1418
1419
1420
1421
1422
1423
1424
1425
1426
1427
1428
1429
1430
1431
1432
1433
1434
1435
1436
1437
1438
1439
1440
1441
1442
1443
1444
1445
1446
1447
1448
1449
1450
1451
1452
1453
1454
1455
1456
1457
1458
1459
1460
1461
1462
1463
1464
1465
1466
1467
1468
1469
1470
1471
1472
1473
1474
1475
1476
1477
1478
1479
1480
1481
1482
1483
1484
1485
1486
1487
1488
1489
1490
1491
1492
1493
1494
1495
1496
1497
1498
1499
1500
1501
1502
1503
1504
1505
1506
1507
1508
1509
1510
1511
1512
1513
1514
1515
1516
1517
1518
1519
1520
1521
1522
1523
1524
1525
1526
1527
1528
1529
1530
1531
1532
1533
1534
1535
1536
1537
1538
1539
1540
1541
1542
1543
1544
1545
1546
1547
1548
1549
1550
1551
1552
1553
1554
1555
1556
1557
1558
1559
1560
1561
1562
1563
1564
1565
1566
1567
1568
1569
1570
1571
1572
1573
1574
1575
1576
1577
1578
1579
1580
1581
1582
1583
1584
1585
1586
1587
1588
1589
1590
1591
1592
1593
1594
1595
1596
1597
1598
1599
1600
1601
1602
1603
1604
1605
1606
1607
1608
1609
1610
1611
1612
1613
1614
1615
1616
1617
1618
1619
1620
1621
1622
1623
1624
1625
1626
1627
1628
1629
1630
1631
1632
1633
1634
1635
1636
1637
1638
1639
1640
1641
1642
1643
1644
1645
1646
1647
1648
1649
1650
1651
1652
1653
1654
1655
1656
1657
1658
1659
1660
1661
1662
1663
1664
1665
1666
1667
1668
1669
1670
1671
1672
1673
1674
1675
1676
1677
1678
1679
1680
1681
1682
1683
1684
1685
1686
1687
1688
1689
1690
1691
1692
1693
1694
1695
1696
1697
1698
1699
1700
1701
1702
1703
1704
1705
1706
1707
1708
1709
1710
1711
1712
1713
1714
1715
1716
1717
1718
1719
1720
1721
1722
1723
1724
1725
1726
1727
1728
1729
1730
1731
1732
1733
1734
1735
1736
1737
1738
1739
1740
1741
1742
1743
1744
1745
1746
1747
1748
1749
1750
1751
1752
1753
1754
1755
1756
1757
1758
1759
1760
1761
1762
1763
1764
1765
1766
1767
1768
1769
1770
1771
1772
1773
1774
1775
1776
1777
1778
1779
1780
1781
1782
1783
1784
1785
1786
1787
1788
1789
1790
1791
1792
1793
1794
1795
1796
1797
1798
1799
1800
1801
1802
1803
1804
1805
1806
1807
1808
1809
1810
1811
1812
1813
1814
1815
1816
1817
1818
1819
1820
1821
1822
1823
1824
1825
1826
1827
1828
1829
1830
1831
1832
1833
1834
1835
1836
1837
1838
1839
1840
1841
1842
1843
1844
1845
1846
1847
1848
1849
1850
1851
1852
1853
1854
1855
1856
1857
1858
1859
1860
1861
1862
1863
1864
1865
1866
1867
1868
1869
1870
1871
1872
1873
1874
1875
1876
1877
1878
1879
1880
1881
1882
1883
1884
1885
1886
1887
1888
1889
1890
1891
1892
1893
1894
1895
1896
1897
1898
1899
1900
1901
1902
1903
1904
1905
1906
1907
1908
1909
1910
1911
1912
1913
1914
1915
1916
1917
1918
1919
1920
1921
1922
1923
1924
1925
1926
1927
1928
1929
1930
1931
1932
1933
1934
1935
1936
1937
1938
1939
1940
1941
1942
1943
1944
1945
1946
1947
1948
1949
1950
1951
1952
1953
1954
1955
1956
1957
1958
1959
1960
1961
1962
1963
1964
1965
1966
1967
1968
1969
1970
1971
1972
1973
1974
1975
1976
1977
1978
1979
1980
1981
1982
1983
1984
1985
1986
1987
1988
1989
1990
1991
1992
1993
1994
1995
1996
1997
1998
1999
2000
2001
2002
2003
2004
2005
2006
2007
2008
2009
2010
2011
2012
2013
2014
2015
2016
2017
2018
2019
2020
2021
2022
2023
2024
2025
2026
2027
2028
2029
2030
2031
2032
2033
2034
2035
2036
2037
2038
2039
2040
2041
2042
2043
2044
2045
2046
2047
2048
2049
2050
2051
2052
2053
2054
2055
2056
2057
2058
2059
2060
2061
2062
2063
2064
2065
2066
2067
2068
2069
2070
2071
2072
2073
2074
2075
2076
2077
2078
2079
2080
2081
2082
2083
2084
2085
2086
2087
2088
2089
2090
2091
2092
2093
2094
2095
2096
2097
2098
2099
2100
2101
2102
2103
2104
2105
2106
2107
2108
2109
2110
2111
2112
2113
2114
2115
2116
2117
2118
2119
2120
2121
2122
2123
2124
2125
2126
2127
2128
2129
2130
2131
2132
2133
2134
2135
2136
2137
2138
2139
2140
2141
2142
2143
2144
2145
2146
2147
2148
2149
2150
2151
2152
2153
2154
2155
2156
2157
2158
2159
2160
2161
2162
2163
2164
2165
2166
2167
2168
2169
2170
2171
2172
2173
2174
2175
2176
2177
2178
2179
2180
2181
2182
2183
2184
2185
2186
2187
2188
2189
2190
2191
2192
2193
2194
2195
2196
2197
2198
2199
2200
2201
2202
2203
2204
2205
2206
2207
2208
2209
2210
2211
2212
2213
2214
2215
2216
2217
2218
2219
2220
2221
2222
2223
2224
2225
2226
2227
2228
2229
2230
2231
2232
2233
2234
2235
2236
2237
2238
2239
2240
2241
2242
2243
2244
2245
2246
2247
2248
2249
2250
2251
2252
2253
2254
2255
2256
2257
2258
2259
2260
2261
2262
2263
2264
2265
2266
2267
2268
2269
2270
2271
2272
2273
2274
2275
2276
2277
2278
2279
2280
2281
2282
2283
2284
2285
2286
2287
2288
2289
2290
2291
2292
2293
2294
2295
2296
2297
2298
2299
2300
2301
2302
2303
2304
2305
2306
2307
2308
2309
2310
2311
2312
2313
2314
2315
2316
2317
2318
2319
2320
2321
2322
2323
2324
2325
2326
2327
2328
2329
2330
2331
2332
2333
2334
2335
2336
2337
2338
2339
2340
2341
2342
2343
2344
2345
2346
2347
2348
2349
2350
2351
2352
2353
2354
2355
2356
2357
2358
2359
2360
2361
2362
2363
2364
2365
2366
2367
2368
2369
2370
2371
2372
2373
2374
2375
2376
2377
2378
2379
2380
2381
2382
2383
2384
2385
2386
2387
2388
2389
2390
2391
2392
2393
2394
2395
2396
2397
2398
2399
2400
2401
2402
2403
2404
2405
2406
2407
2408
2409
2410
2411
2412
2413
2414
2415
2416
2417
2418
2419
2420
2421
2422
2423
2424
2425
2426
2427
2428
2429
2430
2431
2432
2433
2434
2435
2436
2437
2438
2439
2440
2441
2442
2443
2444
2445
2446
2447
2448
2449
2450
2451
2452
2453
2454
2455
2456
2457
2458
2459
2460
2461
2462
2463
2464
2465
2466
2467
2468
2469
2470
2471
2472
2473
2474
2475
2476
2477
2478
2479
2480
2481
2482
2483
2484
2485
2486
2487
2488
2489
2490
2491
2492
2493
2494
2495
2496
2497
2498
2499
2500
2501
2502
2503
2504
2505
2506
2507
2508
2509
2510
2511
2512
2513
2514
2515
2516
2517
2518
2519
2520
2521
2522
2523
2524
2525
2526
2527
2528
2529
2530
2531
2532
2533
2534
2535
2536
2537
2538
2539
2540
2541
2542
2543
2544
2545
2546
2547
2548
2549
2550
2551
2552
2553
2554
2555
2556
2557
2558
2559
2560
2561
2562
2563
2564
2565
2566
2567
2568
2569
2570
2571
2572
2573
2574
2575
2576
2577
2578
2579
2580
2581
2582
2583
2584
2585
2586
2587
2588
2589
2590
2591
2592
2593
2594
2595
2596
2597
2598
2599
2600
2601
2602
2603
2604
2605
2606
2607
2608
2609
2610
2611
2612
2613
2614
2615
2616
2617
2618
2619
2620
2621
2622
2623
2624
2625
2626
2627
2628
2629
2630
2631
2632
2633
2634
2635
2636
2637
2638
2639
2640
2641
2642
2643
2644
2645
2646
2647
2648
2649
2650
2651
2652
2653
2
```

```

18     q= [1/4,1/4,1/4,1/4]; % mercato equo
20     elseif mercato == -1
22         w=w_2;
24         q= [1/4,1/2,1/8,1/8]; % mercato sfavorevole
     end

```

```

2     lambda_0= p0*lambda; %num claim nell'unità di tempo
3     lambda_1 = p1*lambda;%num variazioni del prezzo nell'unità di tempo
4
5     % come osservazione 6 pnt 3
6
7     theta0 = (1+theta)*lambda*(1-exp(-lambda_0*(T-t_0)))/
8             /( lambda_0*(1-exp(-lambda*(T-t_0))))-1;
9
10    % se lavoro_theta0 = 1 in seguito useremo theta0
11    % altrimenti useremo theta
12    lavoro_theta0 = 0;
13
14    if lavoro_theta0== 1
15        theta_p=theta0;
16        lambda_p = lambda_0;
17    else
18        theta_p=theta;
19        lambda_p = lambda;
20    end
21
22    % medie degli intertempi di accadimento
23    mz=1/lambda;
24    mz0 = 1/lambda_0;
25    mz1= 1/lambda_1;
26
27    % DEFINIZIONE DI c0 =C(0), c_low=c_r(0)
28    c_low= [(1+theta_p)*lambda_p/(my*(1-exp(-lambda_p*(T-t_0))))] ;
29    c0= c-c_low;

```

```
2  % memorizziamo tutti i parametri in due strutture
3  S = struct('c0',c0,'t0',t_0,'T',T,'my',my,'max_r',max_r, 'theta', theta,...
4      'lambda',lambda,'p0',p0, 'c', c, 'c_star', c_star, 'w', w, 'q',q,...
5      'theta_p', theta_p, 'lambda_p', lambda_p, 'b_low', b_low);
6
7  S_p= struct('c0',c0,'d_low',d_low, 'd_up', d_up, 'x0', x0, 'theta',theta,...
8      'My',My,'N',N);
9  save strutture S S_p
```





# Appendice C

## Implementazione delle funzioni $C(\cdot)$ , $bmin$ , $l(\cdot)$

### C.1 $C(b)$

Nel file *cb.m* viene definita la funzione  $C(b)$  nella formula (5.3) essa è funzione del livello di riassicurazione  $b$ , e della struttura  $S$  che contiene i valori assegnati ai parametri.

```
1 function [C] = cb(b,S)
2 % lettura dei parametri di interesse
3 t_0= S.t0;
4 theta_p = S.theta_p;
5 lambda_p= S.lambda_p;
6 T = S.T;
7 c = S.c;
8 my= S.my;
9
10 % ----- C(b) -----
11 C = c - (1+theta_p)*(1-b)*lambda_p / (my*(1-exp(-lambda_p*(T-t_0))));
```

## C.2 $bmin(\cdot)$

Nel file *bminimo.m* viene definita la funzione *bmin*, ovvero data la struttura di parametri  $S$  viene definito il minimo livello di riassicurazione ammissibile, definito come in (5.5) con  $E[Y_1] = 1/my$ .

```
1  function [bmin]= bminimo(S)
3
4  % lettura dei parametri di interesse
5  t_0 = S.t0;
6  c_star= S.c_star;
7  c = S.c;
8  c0= S.c0;
9  lambda_p = S.lambda_p;
10 theta_p= S.theta_p;
11 my= S.my;
12 T=S.T;
13 b_low= S.b_low;
14
15 % ----- bmin(S) -----
16
17 if c0 < c_star
18     bmin= 1+((c_star-c)*(1-exp(-lambda_p*(T-t_0)))*my)/
19         /((1+theta_p)*lambda_p);
20 else
21     bmin =b_low;
22 end
```

### C.3 $l(\cdot)$

Nel file *l.m* viene infine definita la funzione  $l_r^t(b, \delta) = l(r, t, pol, S)$ , utilizzando la formula (5.12).

```

1
3  %fissati i parametri nella struttura S, l è funzione di r, di t,
3  % e della politica b,d.
5  function [l] = l(r,t,pol,S)
5
7  % lettura dei parametri di interesse
7  t_0 = S.t0;
7  T = S.T;
9  my= S.my;
9  w=S.w;
11 q=S.q;
11 lambda= S.lambda;
13 p0=S.p0;
13
15 b=pol(1);
15 delta=pol(2);
17 C = cb(b,S);
17 g=[];
19
21 for n= 1:length(w)
21     g(n) = exp( -r*delta*( exp(w(n)) -1 ) ) ;
23 end
23 ew = g*q';
23 p1=1-p0;
25 % ----- l(r,t,pol,S) -----
27 if my > r*b;
27 l=((lambda/(lambda+r*C))*(p0*my/(my-r*b)+p1*ew)-1)*
29     *(1-exp(-(lambda+r*C)*(T-t)));
31 else
31     l=+inf;
31 end

```



# Appendice D

## Implementazione algoritmo di Policy improvement

```
2 % Esempio : 1)  $C(0) < 0$  fav , 2)  $C(0) < 0$  , sfav , 3)  $0 < c\_star < C(0)$  fav
% 4)  $0 < c\_star < C(0)$  sfav 5)  $0 < C(0) < c\_star$  fav 6)  $0 < C(0) < c\_star$ 
sfav
4 Esempio = 1;
   generazione_dati
6 j=1;
   t=t;
8 load strutture
   S =S;
10 toll = 0.000000000001; % =  $10^{-12}$ 
   R_pi=[];
12 R_pi(1) = 0;
   pol_ott=[];
14 iter_max=100;

16 % determiniamo bmin
   bmin = bminimo(S); % bmin = min(b in (0,1] t.c.  $c \geq C(b) \geq c^*$  )
18 r_star= my/bmin; % nel nostro caso  $r\_bar = my$ 
   S_e = struct('bmin', bmin, 'r_star', r_star);
20
   fprintf('\n\nmy=%2.3f,\nlambda_0=%1.2f,\nlambda_1=%1.3f,
22 \n_max_r=%2.3f,\nx0=%d',my,lambd_0,lambd_1,max_r,x0)

24 fprintf('\n\n_c_star=%2.3f,\nb_min=%1.2f,\nT=%d,\nC(0)=%2.3f,
   \n_r^*=%2.4f',c_star,bmin,T,c0,r_star)
```

```

1 %***** Politica iniziale e politiche ammissibili *****
3 passo=(1-b_low)/100;
5 % condizioni per le quali bmin è ammissibile
7 if c0 > 0 || c_star >= -c0*p0*(1-exp(-lambda_p*(T-t_0)))/
      /(1+theta_p-p0*(1-exp(-lambda_p*(T-t_0))))
9
11     fprintf('\n(bmin,0)_e''_ammissibile_');
12     b0 = bmin;
13 elseif
14     c > p0*lambda_p/my % assunzione 1 (iii)
15
16     fprintf('\n\n(bmin,0)_non_è_ammissibile,ma_A_non_è_vuoto...
17     in_quanto_vale_1''_assunzione_c>_p0*lambda_p/my\n');
19
20     bamm=[abs(c0)*my*(1-exp(-lambda_p*(T-t_0)))]/
21     /(lambda_p*(1+theta_p-p0*(1-exp(-lambda_p*(T-t_0)))));
22
23     b0 = bamm + 0.001;
24
25 else
26
27     fprintf('\n\nNon_vale_1''_assunzione_c>_p0*lambda_p/my\n');
28
29     break
30
31 end
32
33 fprintf('\n_Insieme_delle_politiche_ammissibili:...
34     (b,delta)in(%2.5f,1|x[%2.5f,%2.5f]\n\n',bmin,d_low,d_up)
35
36 % POLITICA INIZIALE
37
38 pol(j,:) = [b0,0];
39
40 fprintf('\n_Politica_iniziale_fortemente_ammissibile:...
41     pol_0=(%2.4f,%2.1f)',pol(j,1), pol(j,2));

```

```

2  % _____,....Policy Improvement .....,_____
4  %Passo A) Si parte da una politica ammissibile iniziale e si determina lo zero
r0= 0.0001;
6  rb= r_star;

8  while rb - r0 > toll;
    rm = (r0+rb)/2;

10     % si controlla se rm è lozero cercato
12     if l(rm,t,pol(j,:),S) == 0
14         R_pi(j) = rm;
16         break
18     end

    % se hanno segno opposto
18     if sign( l(r0,t,pol(j,:),S)*l(rb,t,pol(j,:),S) ) == -1

20         if sign( l(r0,t,pol(j,:),S)*l(rm,t,pol(j,:),S) ) == 1
22             r0 = rm;
24         else
26             rb = rm;
28         end

    elseif sign( l(rb,t,pol(j,:),S)) ==-1
        fprintf('n_lo_zero_è_maggiore_di_r_star_\n');
        R_pi(j) = max_r;
        break ;

30     % il seguente caso non dovrebbe mai verificarsi perché mi muovo
32     % nell'insieme delle politiche ammissibili

34     elseif sign( l(r0,t,pol(j,:),S)) ==1

36         fprintf('_\n_l_è_positiva_in_r0=_%2.3e_\n', r0);
38         R_pi(j) = 0
40         break ;

    end;

```

```

42     R_pi(j) = (r0 + rb )/2;
44     end
46 non_trovata = isnan(R_pi(1));

```

```

2 % se lo zero è stato trovato e soddisfa queste due relazioni
4     if R_pi(1) < r_star && (1-non_trovata(1))
6
6 %***** POLICY IMPROVEMENT PASSI B) e C) *****
8
8 %PASSO B) determinare per lo zero attuale R_pi(j) la politica
10 %\pi_{h}^{i+1} che minimizza l_r^{\PI} (Tn(h), Ktn(h)) in r = R_pi(j)
12
12     pol_min=[];
12     iter =0;
14
14     while iter < iter_max
16         iter=iter+1;
18
18         % FA IL GRAFICO
18         k=0;
18         h =(r_star-0.0001)/10000;
20
20         for r=0.0001:h:min(r_star,max_r)
22             k = k+1;
24             P(j,k) = l(r,t,[pol(j,1),pol(j,2)],S);
24         end
26
26         %DETERMINIAMO LA POLITICA CHE MINIMIZZA
28
28         if R_pi(j) ~ = 0
30
30             sss= @(param)l(R_pi(j), t,param,S);
32
32             options=optimset('TolFun',1e-16,'LargeScale','off',...
34                 'Display','off');
36
36             [x,fval,exitflag,output]=fmincon(sss,[b0,0]',[],[],...

```



```

38         [],[],[bmin,d_low]',[1,d_up]',[],options);
40     pol(j+1,:) = x';
42
44     % Si controlla che la politica appena trovata non sia
45     % la stesa dell' iterazione precedente
46
47     if pol(j,:) == pol(j+1,:)
48         cx(j) = 1;
49     else
50         cx(j) = 0;
51     end
52
53     cxx = sum(cx);
54
55     if cxx > 0
56         fprintf('\n_ritrovata_politica_dell' _iterazione_precedente...
57         .....pol(%d)_=_pol(%d)_\n', j , j-1)
58         break;
59     end

```

```

2 % PASSO C) per la politica determinata al passo B) determinare lo zero
4
5     r0= 0.0000001;
6     rb= r_star;
7
8     while rb - r0 > toll; %
9         rm = (r0+rb)/2;
10
11         if l(rm,t,pol(j+1,:),S) == 0
12             R_pi(j+1) = rm;
13             break
14         end
15
16         if sign(l(r0,t,pol(j+1,:),S)*l(rb,t,pol(j+1,:),S)) == -1
17
18             if sign(l(r0,t,pol(j+1,:),S)*l(rm,t,pol(j+1,:),S)) == 1
19                 r0 = rm;
20             else

```

```

20         rb = rm;
21         end;
22
23         elseif sign( l(rb,t,pol(j+1,:),S)) == -1
24
25             fprintf('\n_lo_zero_e''_maggiore_di_r_star\n');
26             R_pi(j+1) = r_star;
27             break
28
29         end;
30
31         R_pi(j+1) = (r0 + rb )/2;
32
33     end;
34
35     non_trovata(j+1) = isnan(R_pi(j+1));
36
37     if R_pi(j+1) > r_star
38
39         fprintf('\n_lo_zero_e''_maggiore_di_r_star\n');
40         break;
41
42     end
43
44     if non_trovata(j+1)
45
46         fprintf('_zero_non_trovato\n');
47         break;
48     end
49
50     j=j+1;
51     if pol(j,1) ~ = pol(j-1,1) || pol(j,2) ~ = pol(j-1,2)
52
53         fprintf('\n\n_iterazione_%d\n',iter)
54
55         fprintf('_lo_zero_della_funzione_l(r,pol(%d))_per_la_...
56 .....politica_pol(%d)_=[_%.5f,%.5f]_e''_R(%d)_=_%.7f\n'...
57         , j-2, j-2, pol(j-1,1),pol(j-1,2), j-2, R_pi(j-1))
58
59         fprintf('la_politica_che_minimizza_per_R(%d)_=_%.7f_...
60 .....e''_pol(%d)_=[%.4f,%.4f]\n', j-2, R_pi(j-1),j-1, ...
61         pol(j,1), pol(j,2) )
62

```

```

        fprintf('_il_valore_di_l(R(%d),_pol(%d))_e''_...
64 .....l(%3.7f,_%1.2f,_%3.4f,_%3.4f)_=_%3.7f_...
        ..... \n', j-2, j-1 , R_pi(j-1),t, pol(j,1), pol(j,2), ...
66 ..... l(R_pi(j-1),t,pol(j,:),S));

        end
        a(j-1)= l(R_pi(j-1),t,pol(j,:),S);
68 .....
70 ..... Ri=R_pi(j);
        end; % chiude if R_pi(j) diverso da zero
72 end; % chiude il secondo while iter < iter_max
end

```

```

2 ..... pol_ott = pol(end,:);
        Rr=R_pi;
        bound=exp(-Rr(end)*x0)
4 ..... save politica_ottima pol_ott Rr S S_p S_e bmin Esempio

```

```

1 % GRAFICO DELLA POLICY-IMPROVEMENT
3 if j==1 a(j)= -1; end
        leg=[];
5 ..... for h=1:j
            str = ['\pi^{_}', num2str(h), '_'];
7 ..... leg = strvcats( leg, str );
        end
9 .....
        pas = min(r_star,max_r)/size(P,2);
11 ..... Rint = [0:pas:min(r_star,max_r)-pas];
        set(0,'DefaultAxesColorOrder',[1 0 0;0 1 0;0 0 1],...
13 ..... 'DefaultAxesLineStyleOrder','-|-|-');
15 ..... figure1 = figure(...
        'Color',[1 1 1],...
17 ..... 'PaperPosition',[0.6345 6.345 20.3 15.23],...
        'PaperSize',[20.98 29.68]);
19 .....
        %% Creazione assi
21 axes1 = axes('FontSize',20,'Parent',figure1);
        axis(axes1,[0 R_pi(end)+0.03 min(a)-0.05, 2 ]);
23 title(axes1,['Policy_Improvement' ]);
        xlabel(axes1,'_r_');

```

```
25 ylabel(axes1,' $\rho_t$ ');
    hold(axes1,'all');
27 figure(1); plot(...
    Rint,P , ...
29 'LineWidth',2,...
    'Parent',axes1,...
31 'DisplayName',' $\rho$ ') ; hold on
    legend1 = legend(...
33 axes1,{leg},...
    'FontSize',20,...
35 'Location','NorthEast');
```

# Appendice E

## Codice di simulazione del capitale

```
1  %lettura della politica ottima
2  load politica_ottima
3
4  num_fallimenti=0;
5  J= [];
6  %alternativa = 0,si simula il capitale utilizzando la politica ottima
7  %alternativa = 1,si simula il capitale utilizzando la politica alternativa
8  alternativa=0;
9
10 % si generano i parametri
11 generazione_dati;
12
13 %lettura delle strutture
14 load strutture
15
16 bmin= bminimo(S);
17
18 pol_alte = pol_alt;
19
20 % processo Wtn
21 w=S.w; % supporto di Wtn
22 q= S.q;
23 J= [];
24
25 num_simulazioni= 1000;
26
27 fprintf('\n\nmy=%2.3f,\n_lambda_0=%1.2f,\n_lambda_1=%1.3f,...
28         \n_max_r=%2.3f,\n_x0=%d',my,lambda*p0,lambda*p1,max_r,x0)
```

```

2  for f = 1:num_simulazioni
4  % definiamo i processo aleatori che guidano il processo degli stati X
6      Tn=zeros(1,N+1); % istanti in cui avvengono i salti
7      Ktn=zeros(1,N+1); % processo di markov a valroi in {0,1}
8      Ytn=zeros(1,N+1); % processo dell'ammontare dei claim
9      Wtn=zeros(1,N+1); % processo variazione del titolo
10
12  %tempi trascorsi tra claim successivi
13  Z0n=exprnd((mz0)*ones(1,round(p0*N)));
14
15  %tempi trascorsi tra variazioni di prezzo successive
16  Z1n=exprnd((mz1)*ones(1,round(p1*N)));
17
18  K = [zeros(size(Z0n)), ones(size(Z1n))];
19
20  % istanti di tempo in cui avvengono le richieste di risarcimento
21  Tn0(1)= t ;
22  for i = 1 :length(Z0n)-1
23      Tn0(i+1) = Tn0(i) + Z0n(i);
24  end
25
26  % istanti di tempo incui avvengono le variazione del titolo
27
28  Tn1(1) = t;
29  for p=1:length(Z1n)-1
30      Tn1(p+1) = Tn1(p) + Z1n(p);
31  end
32
33
34  %istanti di tempo dei salti,generici,si crea T =[ Tn0 e Tn1] ,
35  %poi si mettono in ordine crescente,e si memorizzano gli indici
36  %di tale ordine secondo tale indice si riordina anche K
37
38  Tn = [ Tn0(2:end) Tn1];
39  [Tn,IX]=sort(Tn);% riordino gli event times
40  % poiché Tn1(1)=Tn0(1)=t,dunque Tn(1)= Tn(2) = t
41  Tn = Tn(2:end);

```

```
42     K=K';
44     Ktn= K(IX(1,2:end));
46 %a partire da Tn si costruisce il processo Zn degli intertempi tra due salti
48     Zn(1)= Tn(1)-t;
50     for k = 1:length(Tn)-1
52         Zn(k+1) = Tn(k+1) -Tn(k);
54     end
56     t_sim = Tn;
58 % processi di claim e di variazioni titolo
60     for i=1:length(Ktn)
62         if Ktn(i)==0
64             Ytn(i)=exprnd(1/my);
66             Wtn(i)=0;
68         else
70             Wtn(i)=simdiscreta(1,q,w);
72             Ytn(i)=0;
74         end
76     end
78 % arrestiamo i processi quando i=min{N_T,N}
80     if Tn(i) > T || i == N
82         Zn=Zn(1:i);
84         Tn=Tn(1:i-1);
86
88         Ktn=Ktn(1:i-2);
90         Ytn=Ytn(1:i-2);
92         Wtn=Wtn(1:i-2);
94
96         break;
98     end
100 end
```

```

2
4      %per la politica presa in considerazione si calcolano le grandezze utili
6      c0= S_p.c0;
6      bmin = S_e.bmin; % bmin = min(b in (0,1] t.c. c >= C(b) >= c* )
6      b_low=bmin;
8      r_star= S_e.r_star; % nel nostro caso r_bar = my
10     if alternativa == 0
10         pol = pol_ott;
12     else
12         pol= pol_alte;
14     end
16     C =cb(pol(1),S) ;
18     fprintf(' \n_simulaz_num_%d,politica_ottima_...
.....[b,delta]=[%_1.3e,%1.3e]',f,pol(1),pol(2));

```

```

1      % PROCESSO DEL RISCHIO
3      cap(f,1)=x0;
5      for i = 2:size(Tn,2)
7          if cap(f,i-1) > 0
9      cap(f,i)= cap(f,i-1)+C*Zn(i-1)-pol(1)*Ytn(i-1)+pol(2)*(exp(Wtn(i-1))-1);
11         else
13         cap(f,i)=0;
13         end
15     end
17     if cap(f,i) >0
19         cap(f,i+1) = cap(f,i) + C* (T-Tn(end));
19         else
21         cap(f,i+1)=0;
21         end

```



```

23
24     for h=i+2:N
25         cap(f,h)=cap(f,i+1);
26     end
27
28     J=[J,length(Tn)-1];
29
30     if cap(f,end) == 0
31         num_fallimenti = num_fallimenti + 1;
32     end
33
34 end % chiude for t

```

---

```

1
2 % GRAFICO CHE CONTIENE TUTTE LE TRAIETTORIE
3 size(cap);
4 [num, index] = max(J);
5 pas = T/min(num,N);
6 Ts = [0:pas:T-pas];
7 set(0,'DefaultAxesColorOrder',[1 0 0;0 1 0;0 0 1],...
8     'DefaultAxesLineStyleOrder','-|-|:');
9
10 str=[];
11 leg =[];
12
13 for j=1:f
14     str = ['\sim^{\u' ,num2str(j),'\u''];
15     leg = strvcats( leg, str );
16 end
17
18 leg = cellstr(leg);
19 figure1 = figure(...
20     'Color',[1 1 1],...
21     'PaperPosition',[0.6345 6.345 20.3 15.23],...
22     'PaperSize',[20.98 29.68]);
23
24     %% Create axes
25
26 axes1 = axes('FontSize',20,'Parent',figure1);
27 axis(axes1,[1 min(num,N) -10 max(max(cap))]);
28 title(axes1,['Num_fallimenti='num2str(num_fallimenti),...
29     '\num2str(num_simulazioni)']);
30 xlabel(axes1,'\u_min(N,N_T)\u');

```

```
31     ylabel(axes1,'X_n');
32     hold(axes1,'all');
33
34     figure(1); plot(...
35         [1:min(num,N)],cap(:,1:min(num,N)) , ...
36         'LineWidth',0.5,...
37         'Parent',axes1,...
38         'DisplayName','_') ; hold on
39     num_fallimenti/num_simulazioni
40
41
42     num_fallimenti/num_simulazioni
43
44
45     if alternativa == 0
46         bound_inf= exp(-x0*Rr)*lambda*(T-t_0);
47         bound_inf(end)
48     end
49
```

# Bibliografia

- [1] Diasparra, M. A. e Romera, R., Bounds for the ruin probability of a discrete-time risk process. *J.Appl. Probab*, 2009, 46(1), 99 – 112.
- [2] Diasparra, M.A. e Romera, R., Inequalities for the ruin probability in a controlled discrete-time risk process. *European Journal of Operational Research*, 2010, 204(3), 496 – 504.
- [3] Edoli, E. e Runggaldier, W.J., On Optimal Investment in a Reinsurance Context with a Point Process Market Model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2010, 47, 315 – 326.
- [4] Hernández-Lerma, O. and Lasserre, J. B. (1996). *Discrete-Time Markov Control Processes* (Appl. Math. 30). Springer, New York.
- [5] Hernández-Lerma O. (1989) *Adaptive Markov Control Processes*. Springer-Verlag, New York.
- [6] Romera R. e Runggaldier W. J., Ruin probabilities in a finite-horizon risk model with investment and reinsurance. Preprint 2011.
- [7] Runggaldier W.J. , Concepts of Optimality in Stochastic Control, *in Reliability and decision making* (R.E.Barlow, C.A.Clarotti, F.Spizzichino, eds.), Chapman & Hall, London 1993, pp. 101 – 114.
- [8] Schäl, M., On Discrete-Time Dynamic Programming in Insurance: Exponential Utility and Minimizing the Ruin Probability. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2004, 3, 189 – 210.
- [9] Schäl, M., Control of ruin probabilities by discrete-time investments. *Math.Meth. Oper. Res.*, 2005, 62, 141 – 158.
- [10] Schmidli, H., On minimizing the ruin probability by investment and reinsurance. *Ann. Appl. Probab.*, 2002, 12, 890 – 907.

# Ringraziamenti