



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Note per una storia della condensazione di Bose-Einstein e delle
sue applicazioni

Relatore

Prof. Giulio Peruzzi

Laureando

Marco Arrighi

Anno Accademico 2019/2020

Indice

1	Introduzione alla BEC	1
1.1	"Un Secolo Di Rinnovamento"	1
1.2	I protagonisti della scoperta	2
2	Il lavoro di Bose	3
2.1	Premessa all'articolo	3
2.2	Il rapporto con Einstein	4
2.3	La legge di Planck	5
3	Il punto di vista di Einstein	7
3.1	Nascita della statistica di Bose-Einstein	7
3.2	Il primo articolo (1924)	8
3.3	Il secondo articolo (1925)	10
3.4	La BEC da un punto di vista matematico	11
4	La verifica sperimentale	13
4.1	Le motivazioni che portano alla ricerca	13
4.2	Modalità di creazione del condensato	14
4.3	La definitiva scoperta	17
5	Conclusioni	19

Sommario

La condensazione di Bose-Einstein è un effetto fisico che si verifica in gas di particelle bosoniche, con momento di spin intero, quando viene portato a temperature dell'ordine del μK . In tale condizione un gruppo di particelle ha energia cinetica nulla e perciò si presenta all'osservatore come fase condensata dello stesso gas. La scoperta teorica di questo fenomeno fu il risultato del lavoro di A. Einstein e S.N. Bose, nel biennio 1924-25, ma non era possibile verificare praticamente la correttezza delle loro previsioni a causa dell'inesistenza di opportuni apparati sperimentali. Verso l'ultimo ventennio del secolo scorso, dopo essere stata accantonata per diversi anni, la BEC venne ripresa in considerazione. Grazie alla recente tecnologia dei laser è stata allora possibile nel 1995 l'osservazione in laboratorio di una frazione di gas bosonico condensato. La tesi costituisce un percorso cronologico dei passaggi chiave che hanno portato questo effetto tipico della meccanica statistica a diventare da una "semplice" ipotesi teorica un evento reale riproducibile in laboratorio.

Capitolo 1

Introduzione alla BEC

1.1 "Un Secolo Di Rinnovamento"

In questo lavoro di tesi verrà discusso l'effetto fisico noto sotto il nome di "condensato di Bose-Einstein", abbreviato "BEC". L'intento dell'elaborato è di descrivere la nascita e lo sviluppo di questo campo di studio analizzandone il carattere prettamente fisico ma parallelamente evidenziandone le connotazioni storiche più interessanti. Lo studio di questo ramo della fisica ha inizio nel '900, un secolo fondamentale per la storia della fisica caratterizzato da un radicale rinnovamento che ha toccato diversi campi di interesse e varie branche di studio. La meccanica quantistica si è storicamente proposta come protagonista di questo processo, essendo la teoria che più di qualunque altra segna un punto di stacco dal passato in favore di un nuovo e originale panorama per le dottrine scientifiche. La meccanica quantistica ha visto i suoi albori nei primi decenni del XX secolo ma possiamo effettivamente parlare di una teoria ben definita e strutturata solo a partire dalla seconda metà degli anni '20. Fin da subito però apparve chiaro al mondo della fisica che questa nuova descrizione dell'universo microscopico potesse portare con sé importanti conseguenze anche in campi di studio fisico apparentemente lontani da quello delle interazioni fondamentali. A tal proposito la BEC risulta essere uno degli ambiti di applicazione più curiosi della meccanica quantistica, poiché in questo caso alcuni principi fondamentali che si verificano a livello della scala di grandezza atomica producono effetti di prim'ordine anche su scala macroscopica. Il XX secolo è stato tanto redditizio quantoconcertante per la comunità scientifica: più le teorie sembravano prendere forma e meglio adattarsi alla realtà osservabile, maggiore era il numero di nuove e sempre più profonde questioni scientifiche che interrogavano l'intelletto umano. Proprio la meccanica quantistica infatti sembra descrivere una realtà stravagante e soprattutto distante dal mondo macroscopico a cui ci affacciamo nella vita di tutti i giorni, o ancora più drasticamente lontana dalle dinamiche che muovono l'universo e le galassie che lo popolano. Una teoria

grazie alla quale si riesce, anche se solo parzialmente, a trovare un punto di incontro tra due mondi così distanti è la meccanica statistica, la quale si propone di descrivere con pochi parametri macroscopici i comportamenti di sistemi composti da un numero elevato di particelle “microscopiche”.

1.2 I protagonisti della scoperta

Applicando l'allora nuova visione quantistica alla meccanica statistica si riuscì a prevedere il fenomeno della condensazione. Tale effetto microscopico è possibile per sistemi fisici a temperature bassissime, prossime allo zero assoluto, in cui un vasto numero di particelle di spin intero (bosoni) si trova al minimo livello energetico possibile, detto Stato Fondamentale, e occupa un volume piccolissimo di spazio. La meccanica statistica quantistica prevede una linea generale di analisi per mezzo della termodinamica e degli “ensemble” statistici (definiti per la meccanica statistica classica), con cui si possono descrivere sistemi di qualsiasi tipo di particelle. A seconda della loro natura si distinguono tre diverse ramificazioni di questa branca della fisica che studiano sistemi di Fermioni, Bosoni o particelle distinguibili: si parla rispettivamente delle statistiche quantistiche di Fermi-Dirac, di Bose-Einstein e di quella classica di Maxwell-Boltzmann. Nel percorso di tesi si focalizzerà l'attenzione sulla seconda considerando la prima solo per meglio comprendere dove si innesca il processo matematico che predice l'esistenza della BEC, verrà completamente ignorata la terza statistica poiché questa era stata precedentemente studiata in seguito agli sviluppi nel campo della termodinamica (relativi alla seconda metà del XIX secolo) e non è direttamente connessa al presente lavoro. Il primo passo verso questa teoria viene fatto dal fisico indiano Satyendra Nath Bose, che nel '24 pubblicò un articolo in cui presentò un'innovativa descrizione di un sistema di particelle detto in suo onore “gas di bosoni”. In seguito due diversi articoli pubblicati da Albert Einstein (rispettivamente nello stesso anno della pubblicazione di Bose e nel successivo) migliorarono la statistica di questa tipologia di particelle e permisero all'autore di estrapolare dal lavoro del collega il risultato fondamentale di questa trattazione: la BEC; in realtà questa era già presente nell'articolo del fisico indiano pur restando ancora celata e non perfettamente riconosciuta nella sua analisi. Sarà poi necessario un salto temporale per arrivare alla verifica sperimentale che confermerà gli studi teorici di cui si è precedentemente discusso. Solo nell'ultimo ventennio del secolo infatti, grazie alla nascente tecnologia dei laser (che apparirono solo a partire dagli anni '60), è stato possibile effettuare una serie di studi su sistemi sufficientemente freddi (di pochi milionesimi di kelvin) in modo da verificare l'effetto della BEC.

Capitolo 2

Il lavoro di Bose

2.1 Premessa all'articolo

In generale non è riduttivo affermare che l'effetto della condensazione bosonica è conseguenza diretta della natura ondulatoria delle particelle. In effetti fin dall'inizio del XX secolo la fisica si è dovuta abituare all'idea che la luce possa essere considerata contemporaneamente come insieme di particelle (i fotoni) o come fenomeno ondulatorio (aspetto più classico già previsto dall'elettromagnetismo). Allo stesso modo anche le altre particelle presentano questa natura duplice: un gas formato da diversi atomi è anche considerabile come un pacchetto d'onde con una precisa lunghezza d'onda, detta di De Broglie. Tale grandezza indicata con il simbolo λ risulta essere proporzionale all'inverso della radice quadrata della temperatura: se alla temperatura ambiente la lunghezza d'onda è grande ne deriva l'impossibilità per due particelle di essere a piccola distanza tra loro, quindi queste vengono dette "distinguibili" e il gas è trattato classicamente. Al contrario per temperature basse la λ diventa confrontabile con la reciproca distanza tra due particelle, ne deriva un 'overlap' dei pacchetti d'onda e la forte necessità di una descrizione quantistica. Risulta allora opportuno considerare il principio di indistinguibilità: dato un sistema contenente N particelle fra loro identiche, è impossibile che una misura dia risultati diversi se si immagina di scambiare fra loro due di esse. Da tale principio, caposaldo della meccanica quantistica, deriva la richiesta di simmetria sotto condizione di permutazioni tra le particelle del sistema: se uno scambio tra particelle identiche produce un cambio di segno nella funzione d'onda si parla di un sistema di Fermioni, nel caso contrario in cui il segno è mantenuto uguale si tratta invece di Bosoni. Una differenza a prima vista insignificante sta alla base di gran parte della fisica moderna. Sotto una certa temperatura, detta "temperatura critica", è possibile che per un sistema di bosoni si crei un condensato: un'importante porzione delle particelle che compongono il sistema infatti non ha energia sufficiente per occupare livelli energetici superiori e quindi è "congelata" nel livello inferiore permesso, lo stato fondamentale. Tale

eventualità risulta invece impossibile nel caso dei fermioni grazie al principio di esclusione enunciato da Pauli, che afferma la necessità per due particelle di differire in almeno un numero quantico. L'insieme di queste idee innovative divenne particolarmente interessante quando fu applicato a una delle principali questioni teoriche che assillava i fisici di tutto il mondo all'inizio del secolo scorso: il problema del 'corpo nero'. Brevemente, un corpo nero è un oggetto cavo con una piccola fessura attraverso la quale vengono fatte entrare delle radiazioni, poi riflesse all'interno con probabilità infinitamente piccola di uscire dalla stessa. Tale corpo è perfettamente assorbente (ovvero ha un potere assorbente uguale a 1) e mantiene la sua temperatura T costante emettendo anch'esso radiazioni. La descrizione classica di tale fenomeno arriva però a un risultato assurdo (noto come "catastrofe ultravioletta"): studiando la radiazione emessa tramite il modello degli oscillatori armonici e applicando il teorema di equipartizione dell'energia (la sua versione classica) si ottiene una produzione infinita di energia; ad alte frequenze infatti il teorema prevede una crescita lineare della stessa e quindi una divergenza che non viene riscontrata nella pratica. Planck risolse il problema con un espediente che consiste nell'introdurre un peso statistico ("alla Boltzmann"), in modo da modificare la formula per le distribuzioni statistiche energetiche estendendo la legge di Wien anche al regime delle alte frequenze (nel quale la legge originale non funzionava). Il lavoro di numerosi fisici tra cui Planck, Bohr ed Einstein trova soluzione nell'adozione di pacchetti d'onda discreti, anche se non era ancora del tutto chiaro il funzionamento di quelli che pochi anni dopo lo stesso Einstein chiamerà fotoni, i corpuscoli che compongono la luce nonché il primo esempio di particelle bosoniche.

2.2 Il rapporto con Einstein

Solo negli anni '20 con il lavoro di Bose verrà finalmente presentata una descrizione completa della statistica dei quanti di luce, estendibile a ogni particella con spin intero: i bosoni. S. N. Bose fu un fisico indiano nato nel 1894 a Calcutta che poi trascorse la sua giovinezza nell'est dell'India. Fin da bambino venne riconosciuta la sua spiccata dote intellettuale, al punto che alcuni suoi insegnanti lo paragonarono a grandi menti precoci del passato come Cauchy e Laplace. Nonostante il grande interesse verso la politica e le arti letterarie, il giovane Bose intraprese un percorso di studi in matematica e fisica, che lo portò fin da subito a specializzarsi in termodinamica e nella più recente meccanica statistica. Benchè a tutti i professori con cui Bose ebbe l'opportunità di lavorare o confrontarsi fosse chiara la genialità del giovane fisico, ciò non fu sufficiente per far decollare la sua carriera accademica. Nel 1919, tra alti e bassi, Bose portò a termine la traduzione dell'articolo di Einstein sulla relatività generale, pochi mesi dopo che questa rivoluzionaria teoria fu verificata per la prima volta empiricamente. Grazie a questo lavoro e alla conoscenza con un docente di ingegneria fisica, riuscì l'anno seguente ad ottenere una cattedra presso l'università di Calcutta. Dopo un biennio privo di grandi risultati ebbe l'opportunità di lavorare per la nascente università di Dacca, tuttavia anche

in questo caso non ebbe fortuna perchè a causa di alcuni contrasti di natura politica il nuovo progetto universitario che coinvolgeva lo stesso Bose fu abbandonato.

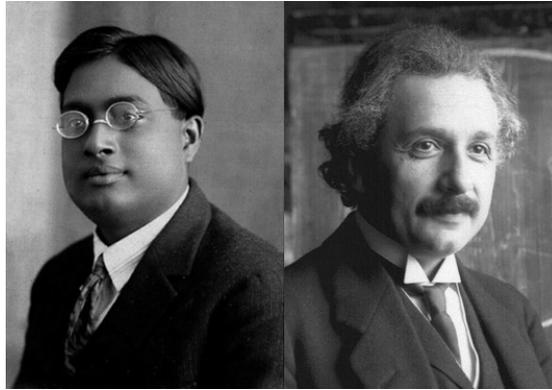


Figura 2.1. *Satyendra Nath Bose e Albert Einstein*

La svolta per la sua carriera scientifica arrivò solo quando iniziarono i rapporti epistolari con Einstein. Prima dell'articolo che verrà trattato nel seguente paragrafo, Bose scambiò diverse idee riguardanti la meccanica quantistica con il celebre collega europeo. Dopo che quest'ultimo premiò il lavoro di Bose facendo pubblicare un suo elaborato teorico, Einstein permise addirittura al giovane indiano di ottenere un soggiorno di studi a Parigi: qui egli lavorò all'articolo che pochi anni dopo diventerà cruciale per lo sviluppo della BEC. Il dialogo scientifico tra i due continuò diversi anni, lo stesso Einstein sottolineò più volte quanto i contributi portati da Bose sarebbero potuti diventare importanti per la fisica teorica del tempo. La reciproca ammirazione fu tale da far sì che i due fisici si incontrassero nel 1925 a Berlino. Nonostante la corrispondenza tra i due continuò per diversi anni questo fu il picco della carriera scientifica di Bose.

2.3 La legge di Planck

Il lavoro fondamentale che permise a Bose di entrare nelle grazie di Einstein fu "La legge di Planck e l'ipotesi dei quanti di luce". Nel presente paragrafo verrà brevemente riassunto tale articolo, tradotto da Einstein e pubblicato nel 1924 nella rivista tedesca "Zeitschrift für Physik". La legge di Planck fu proposta per la prima volta nel 1900 e, nonostante diverse interpretazioni, non venne mai spiegata senza adottare ipotesi restrittive. In particolare ciò che le precedenti derivazioni non riuscirono ad evitare fu l'adozione di un approccio classico da cui partire: Bose non era soddisfatto a causa di questa limitazione perciò propose una nuova e opportuna descrizione della distribuzione degli stati energetici, trattati da Planck in relazione al problema del corpo nero. L'unica ipotesi assunta da Bose nella sua personale trattazione dell'argomento riguarda la quantizzazione dello spazio delle fasi; partendo da tale assunto ritenne sufficiente combinare

l'ipotesi dei quanti di luce e la meccanica statistica per costruire una dimostrazione logica e soprattutto slegata dalla fisica classica. Al fine di ricavare una formula per la densità di stati, si deve determinare il numero di fotoni che sono contraddistinti da un range infinitesimo di frequenze $d\nu^s$ e poi calcolare la probabilità che questi assumano una distribuzione macroscopica precisa. Alcune pagine di conti di tipo probabilistico-statistico portano infatti a verificare il risultato di Planck, ottenendo:

$$E = \sum_s \left[\frac{8\pi h\nu^s c^3}{V} \frac{1}{e^{\frac{h\nu^s}{kT}} - 1} d\nu^s \right] \quad (2.1)$$

L'articolo si chiude con un commento di Einstein che rimarca l'importanza di questo contributo, il quale faciliterà la descrizione quantistica di un gas ideale.

Capitolo 3

Il punto di vista di Einstein

3.1 Nascita della statistica di Bose-Einstein

Albert Einstein è sicuramente uno dei fisici più conosciuti in tutto il mondo, noto a tutti sia per i suoi risultati sia per la sua peculiare personalità. Tuttavia sfugge spesso a molte persone la straordinaria mole di studio scientifico che ha contraddistinto il fisico originario di Ulm. Oltre ai noti lavori riguardanti la teoria della relatività (sia ristretta che generale), l'effetto fotoelettrico e il moto Browniano delle molecole, Einstein scrisse importanti pagine della storia di altri campi della fisica, tra cui la meccanica statistica. Tramite due articoli pubblicati nel biennio '24-'25, Einstein riesce nell'intento di ampliare l'orizzonte delle idee di S. N. Bose e arrivare a scoprire il vero e proprio fenomeno della condensazione. Dopo che nel 1924 tradusse e fece pubblicare su un'importante rivista scientifica tedesca il lavoro compiuto dal collega indiano nei precedenti 4 anni, Einstein fu talmente colpito dalla profondità di tali deduzioni al punto di lavorare ad un proprio articolo sull'argomento. Se il lavoro di Bose rappresenta una descrizione esaustiva per sistemi di fotoni (o più in generale per particelle di tipo bosonico), si può dire che in un primo momento l'operato di Einstein consiste nell'estendere la trattazione al caso più generico di atomi semplici con spin totale intero, riferendosi particolarmente a quelli di elio. La descrizione del "gas di Bose" costituì le basi su cui venne fondata la statistica (in un primo momento solamente classica e successivamente anche quantistica) delle particelle di tale natura, ma a questo risultato estremamente rilevante per la meccanica statistica ciò che era mancato era l'intuizione geniale che ebbe Einstein riguardo la condensazione. Tale effetto deriva da un'incongruenza matematica riguardante la divergenza di un integrale, risolvibile solo ammettendo la possibilità che una frazione di gas si trovi in un differente stato di aggregazione, per l'appunto un condensato. Tuttavia la comprensione della questione non fu immediata neanche per un genio brillante come Einstein, tanto che l'idea della BEC prese forma solo con il secondo articolo dello scienziato (di cui si parlerà nel paragrafo 3.3). Nel seguente paragrafo invece si analizzerà

nel dettaglio il primo articolo senza soffermarsi sui conti matematici necessari che sono presenti nello stesso, facendo riferimento alla traduzione inglese effettuata dal professor Amendola dell'università di Heidelberg, agli inizi del 2015.

3.2 Il primo articolo (1924)

Nell'incipit del saggio, riprendendo il lavoro di Bose, Einstein assume in prima istanza che lo spazio delle fasi in cui vivono gli oggetti elementari (le particelle del gas) che costituiscono un generico sistema fisico sia suddiviso in regioni infinitesime di area h^3 . La costante h , che prende il nome dal fisico tedesco M. Planck, fu scoperta e calcolata anni addietro in seguito agli studi sul corpo nero: tale costante nota anche come “quanto di azione” è di notevole importanza per tutta la fisica moderna in quanto definisce la scala energetica in cui vive l'intera meccanica quantistica. Lo spazio delle fasi è suddiviso in celle concentriche e di forma ellittica perciò lo stato delle particelle, al posto di essere rappresentato da un singolo punto (che indica posizione e velocità), è contraddistinto dalla rispettiva cella di appartenenza (che indica un preciso valore di energia, via via crescente all'allontanarsi dal centro dello spazio). L'ipotesi introdotta nella premessa dell'elaborato è storicamente rivoluzionaria per la fisica perché consiste in un cambio di paradigma che si realizza con l'avvento della meccanica quantistica: le coordinate di posizione spaziale e di quantità di moto delle particelle non vivono più in uno spazio continuo ma sono parte di uno discreto. Einstein continua la discussione spiegando che l'approccio termodinamico al sistema in esame, che parte dalle definizioni di entropia ed energia interna, è legato alla distribuzione degli atomi nello spazio delle fasi. In particolare, secondo l'autore, è rilevante il numero di diverse configurazioni che produce lo stesso stato termodinamico del sistema totale (detto sistema macroscopico): si devono quindi contare tutte le possibili distribuzioni delle particelle all'interno delle diverse celle elementari (ovvero i diversi stati microscopici del sistema). Da tale computo si ricava quindi una distribuzione di probabilità legata al sistema complessivo, grazie a cui è possibile definire lo stato macroscopico e trovare la sua entropia per mezzo del teorema di Boltzmann, ottenendo:

$$S = -k_b \log \left[\sum_s (p_s \log(p_s)) \right] \quad (3.1)$$

La scrittura p_s indica la probabilità associata a una singola cella (s -esima) di contenere un certo numero di particelle r , nella sommatoria non è stata esplicitata la dipendenza dal numero intero r : tenendo conto di tutte le possibili combinazioni con cui le n particelle possono collocarsi nelle celle, è quindi stato omissso che la sommatoria è intesa anche per r che va da 1 a n . Data la formula generica per l'entropia del gas, la condizione di equilibrio termodinamico per lo stato del sistema è data dalla condizione di punto di massimo per essa. Fissando come vincoli il numero di particelle e l'energia totale del sistema, basta porre a zero la derivata prima per ottenere che il massimo di entropia

corrisponde al valore di:

$$S_{max} = -k_b \sum_s [\log(1 - e^{-\alpha^s}) - An - \frac{B}{c} E] \quad (3.2)$$

Precedentemente erano state definite le varie costanti in gioco: A e B sono proporzionali ai vincoli n ed E , c invece ha la seguente espressione:

$$c = (2m)^{-1} h^2 \left(\frac{4}{3} \pi V\right)^{-\frac{2}{3}} \quad (3.3)$$

dove h è la costante di Planck, m la massa di una singola particella e V il volume occupato dal gas. L'indipendenza tra le prime due costanti si esprime con la relazione: $\alpha^s = A + Bs^{\frac{2}{3}}$. A questo punto considerando le leggi classiche della termodinamica e la definizione di entropia, Einstein ricava tutta la termodinamica del sistema calcolando temperatura, pressione e l'energia libera di Helmholtz. Nel quarto paragrafo del suo articolo, Einstein evidenzia come i risultati ottenuti tramite la precedente trattazione quantistica siano in accordo con i valori di aspettazione classica, sotto dovute approssimazioni. Il padre della relatività spiega che la teoria classica fornisce risultati compatibili con l'evidenza sperimentale solo sotto certi range di pressione e temperatura (per T non troppo basse e p non troppo alte), con errori tutto sommato trascurabili; questi però crescono e diventano significativi al drastico abbassarsi delle temperature o all'aumentare delle densità di particelle per volume, aspetto che preannuncia l'esistenza del fenomeno della condensazione. Nello stesso paragrafo è citato il terzo principio della termodinamica, anche detto teorema di Nernst: viene rimarcato il fatto che l'entropia ricavata precedentemente, nel limite di temperatura nulla, tende a zero proprio come enunciato dal teorema. Infine Einstein presenta un ultimo capitolo denominato "l'allontanamento dell'equazione di stato dei gas dalla teoria classica" in cui invece vengono evidenziati i risultati peculiari del suo studio, dovuti alla natura ondulatoria delle particelle e all'approccio quantistico al problema. Einstein introduce un nuovo parametro λ , che solo in seguito verrà denominata "fugacità", come indice della degenerazione del gas (tale variabile assume valori compresi tra 0 e 1). Questo parametro di lavoro è legato ai parametri termodinamici e risulta fondamentale in due diversi calcoli riguardanti il rapporto $\frac{E}{n}$ e l'espansione (proprio intorno a λ) del numero di particelle occupanti una singola cella s -esima (in formula n_s). Nel primo caso λ è interessante in quanto indice della differenza tra i valori di energia media per particella nel caso classico e quello quantistico, con quest'ultimo che risulta essere sempre minore rispetto al primo:

$$\frac{E}{n} = \frac{3}{2} k_b T [1 - 0,0318 h^3 \frac{n}{V} (2\pi m k_b T)^{-\frac{3}{2}}] \quad (3.4)$$

Per quanto riguarda invece l'espansione in potenze di λ del numero medio di particelle per celle energetiche, si evince chiaramente dalla formula l'effetto quantistico che modifica la distribuzione Maxwelliana.

$$n^s = const * e^{-\frac{E^s}{k_b T}} (1 + \lambda e^{-\frac{E^s}{k_b T}} + \dots) \quad (3.5)$$

Nella conclusione dell'articolo viene infine introdotto il paradosso di Gibbs, che lo stesso Einstein risolverà nel suo secondo elaborato. In un sistema di due gas differenti non interagenti, ciascuna delle componenti si comporta singolarmente senza che venga disturbata

dall'altra. Tuttavia un unico gas con un numero di particelle pari alla somma di quelle dei due gas distinti del primo esempio presenta, nella pratica, parametri termodinamici con valori differenti rispetto alla miscela totale, violando quindi le proprietà di additività (per E ed S) che sono necessarie in seguito all'ipotesi di non-interazione. Tale paradosso verrà successivamente risolto introducendo un fattore numerico correttivo pari al fattoriale del numero di particelle del sistema (per un gas a singola componente, mentre servirà un fattore binomiale nel caso di miscela di due gas). La prima opera di Einstein risulta essere un'analisi alquanto dettagliata dei gas di bosoni, ma non ancora del tutto completa: si conclude infatti con alcuni interrogativi che rimarranno in sospeso, lasciando nell'animo di Einstein un senso di insoddisfazione che verrà superato l'anno seguente.

3.3 Il secondo articolo (1925)

Poco dopo aver terminato il primo elaborato riguardante i gas ideali, Einstein inizia la stesura di un secondo lavoro sull'argomento. L'opera viene scritta per la maggior parte nello stesso anno della precedente ma verrà ultimata e pubblicata nella sua versione definitiva solo a Febbraio del 1925. Einstein sottolinea diverse volte all'interno della trattazione quanto sia fondamentale la continuità tra i due articoli, infatti il secondo non risulta essere un discorso completo sull'argomento ma è considerabile come un ampliamento del precedente. Per quanto riguarda il contenuto prettamente scientifico invece, Einstein delinea chiaramente fin dall'introduzione l'aspetto chiave di lettura: la possibilità di approcciarsi allo studio delle radiazioni in modo simile a quanto avviene per un gas quantistico rende valida l'analogia tra quest'ultimo e un gas molecolare. Infatti grazie al contributo di Bose era ormai evidente che come il gas "degenerato" devia rispetto al comportamento tipico della meccanica statistica, allo stesso modo la radiazione prende distacco dall'andamento qualitativo descritto dalla legge di Wien. Nel primo capitolo, Einstein introduce il fenomeno della BEC partendo dalla descrizione di un gas ideale. Scegliendo come parametri liberi volume e temperatura, segue dalla termodinamica descritta nel primo articolo che fissato un certo numero n di molecole alla suddetta temperatura T , il volume occupato dal gas non può essere posto arbitrariamente piccolo ma presenta un limite inferiore. Ma ciò significa anche che in un volume fissato V non è possibile trovare un numero di particelle superiore a

$$n = \frac{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} V}{h^3} \sum_1^{\infty} \tau^{-\frac{3}{2}} \quad (3.6)$$

Se tramite una compressione isoterma si aumenta la densità $\frac{n}{V}$ di una sostanza, conseguentemente viene incrementato anche il numero di molecole occupanti il livello energetico fondamentale (con energia cinetica nulla): mentre il resto delle particelle si ridistribuisce nel campione, queste costituiscono una porzione di materia condensata. Einstein predice a questo punto che debba esistere un processo analogo anche nel caso di un gas saturo ideale: le particelle che vengono confinate nel livello energetico minimo, non

avendo velocità, cambiano lo stato di aggregazione della relativa frazione del sistema costituendo a tutti gli effetti una frazione di gas "condensato". Nella restante parte della pubblicazione Einstein prende in esame ulteriori aspetti relativi al gas ideale: dimostra che la derivazione della formula di Planck ad opera di Bose risulta essere la più efficiente, oltre a costituire un ulteriore prova della somiglianza tra radiazione e gas; ne studia alcune proprietà di fluttuazione (come l'estensività dell'entropia o la viscosità a basse temperature); infine ricava la formula esplicita dell'equazione di stato per i gas saturi ideali. L'opera di Einstein tuttavia non fu apprezzata per diversi anni, infatti la maggior parte della comunità scientifica del tempo riteneva irriproducibili in laboratorio i risultati previsti; lo stesso autore infatti abbandonò poco tempo dopo questo campo di studio per concentrarsi su problemi teorici riguardanti la fisica delle "interazioni fondamentali"

3.4 La BEC da un punto di vista matematico

In questo breve paragrafo verrà trattato il passaggio matematico che mostra la necessità fisica di creazione del condensato. Verrà utilizzata una notazione tutt'oggi presente nella letteratura che è invece diversa da quella adottata da Einstein. Il fenomeno della BEC risulta evidente all'interno dell'insieme gran canonico, tipologia di analisi statistica che prevede lo studio di gas a volume e temperatura costante mentre permette all'energia e al numero di particelle di essere variabili. È quindi possibile definire, con una serie di conti, il numero medio di particelle del sistema:

$$N = \sum_p n_p \quad (3.7)$$

dove n_p rappresenta il "numero di occupazione" ed indica quante particelle occupano il livello energetico di momento p , ovvero quello contraddistinto dall'autovalore di energia $E_p = \frac{p^2}{2m}$. Tale grandezza appare diversa a seconda della natura del gas in gioco e nel caso dei bosoni si può scrivere:

$$n_p = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta E_p} - 1} \quad (3.8)$$

La variabile z è chiamata "fugacità" e corrisponde a quella che Einstein denominava "degenerazione" del gas (λ). A questo punto è possibile studiare il limite termodinamico del sistema, ovvero il comportamento che questo assume nel limite di temperatura nulla. Si noti che porre T tendente a 0 equivale anche a porre z tendente a 1; in formule il passaggio in questione equivale a sostituire:

$$\sum \rightarrow \frac{V}{h^3} \int \quad (3.9)$$

Sorge un problema perchè tale passaggio non è lecito nel caso dei bosoni, infatti la sommatoria ha il termine per $p = 0$ che la porta a divergere, mentre l'integrale corrispondente in d^3p assume un valore finito; ovviamente non è possibile che la divergenza scompaia.

È quindi necessario scrivere:

$$\sum_p n_p = \frac{V}{h^3} \int \frac{1}{z^{-1} e^{\beta E_p} - 1} d^3 p + \frac{z}{1-z} \quad (3.10)$$

In questo modo il termine divergente corrispondente al livello energetico fondamentale è stato isolato all'interno di $N_0 = \frac{z}{1-z}$, elemento che sta proprio ad indicare l'esistenza di una parte del gas in una fase condensata della materia.

Capitolo 4

La verifica sperimentale

4.1 Le motivazioni che portano alla ricerca

I primi fenomeni legati alla BEC, la superconduttività di alcuni metalli e la superfluidità dell'elio liquido, furono osservati nella prima metà del Novecento ma solo nell'ultimo ventennio del secolo scorso fu verificata definitivamente l'esistenza sperimentale dei condensati di materia. La ricerca della BEC iniziò solo negli anni '80 in moltissimi centri di ricerca situati nei diversi continenti, ma per quasi 20 anni non si ottennero risultati definitivi in quanto fu necessario un lento e graduale percorso di miglioramento delle tecniche utilizzate in laboratorio al fine di produrre la condensazione. Le prime osservazioni del fenomeno risalgono al 1995, con gli esperimenti condotti da Eric Cornell e Carl Edwin Wieman in Colorado presso il laboratorio di astrofisica JILA e da Wolfgang Ketterle presso il MIT di Cambridge. Questi tre fisici vennero successivamente premiati con il premio Nobel per la fisica nel 2001. Il problema pratico sperimentale che ha provocato un ritardo delle prove empiriche rispetto alle previsioni teoriche dei lontani anni Venti riguarda le difficoltà tecniche che si riscontrano a causa della necessità di abbassare la temperatura di un gas fino a piccolissime frazioni di un Kelvin senza che si verifichi liquefazione e solidificazione del gas. Per tale motivo non erano funzionali i metodi di raffreddamento convenzionali tramite l'utilizzo di refrigeratori, ma furono necessarie le più moderne tecnologie dei laser e il metodo dell'evaporazione forzata sotto il controllo di campi magnetici. Per essere più precisi è necessario alzare fino all'ordine dell'unità il parametro di stato in questione, dato dalla densità di stati nello spazio delle fasi, in formula $\rho = n\lambda_{dB}^3$. Tuttavia far variare di 20 ordini di grandezza tale parametro era ritenuto un percorso impraticabile persino da Einstein stesso. La BEC fu perciò messa da parte dalla comunità scientifica subito dopo la sua scoperta teorica e solo nel 1938 venne parzialmente ripresa in considerazione quando London e Tisza la proposero come possibile meccanismo di base del fenomeno della superfluidità negli atomi di He⁴. Come nel caso dei metalli superconduttivi (la cui prima scoperta risale al 1911, per poi essere compresi

a pieno solo tra gli anni 1940 e 1950) fu considerata per la prima volta nella storia l'idea che la BEC mostrasse alcuni meccanismi ed effetti quantistici su scala macroscopica; ciò fu infatti motivo di interesse al punto da scatenare decenni di dibattiti e di studi circa questi particolari fenomeni. Si può quindi dire che i bizzarri meccanismi fisici che danno vita a superconduttività e superfluidità, nonché al successivo fenomeno dei laser, spinsero i fisici di tutto il mondo verso la ricerca sperimentale di prove che avvalorassero la teoria ideata dalle menti di Bose ed Einstein: iniziò negli anni '80 una lunga serie di esperimenti che mirava alla creazione del condensato all'interno dei laboratori.

4.2 Modalità di creazione del condensato

Esistono due meccanismi chiave necessari per la realizzazione pratica di una frazione condensata di gas bosonico. Entrambi i metodi consistono in trasformazioni termodinamiche volte al raffreddamento del gas ma sono realizzabili in range diversi di temperature, perciò sono funzionali solo se utilizzati in successione. In questo paragrafo verranno analizzate le due operazioni effettuate nel 1995 che portarono alle prime osservazioni dirette dei condensati, oltre a evidenziare la loro rilevanza storica è corretto ricordare che sono tutt'oggi i metodi più efficaci e perciò maggiormente utilizzati, nonostante ne esistano altri ben più recenti. Operando su gas rarefatti in condizioni standard si passa, con il metodo delle radiazioni laser, dai circa 300 K iniziali all'ordine di grandezza del μK . Tale metodo sfrutta un principio molto semplice che fu scoperto da Einstein nel 1905, l'effetto fotoelettrico: la luce ha una duplice natura che la rende considerabile fisicamente sia come radiazione elettromagnetica sia come formata da un insieme di particelle non massive dette fotoni, che effettuano urti elastici quando vengono a contatto con la materia. Un singolo fotone che si scontra con un atomo del gas provoca una variazione di energia e di conseguenza anche della quantità di moto dello stesso: in questo modo è possibile diminuire la velocità dei bosoni di $\Delta v = \frac{h}{m\lambda}$. La quantità in questione, che dipende dalla massa dell'atomo e dalla lunghezza d'onda del quanto di luce, tuttavia risulta essere molto piccola rispetto alle velocità medie con cui si muovono gli atomi nei gas alla temperatura ambiente. E' infatti necessario che il sistema di fasci luminosi (i laser) sia contraddistinto da una geometria precisa, in modo da provocare una variazione consistente nella quantità di moto delle particelle, trasferendola ai campi elettromagnetici e raffreddando di conseguenza gli atomi fino a sotto-frazioni del Kelvin. Il metodo originale venne proposto da premi nobel T.W. Hänsch e A. Schawlow nel 1975, nei loro esperimenti si parla di "melassa ottica" perché si crea nel gas una forza di tipo viscoso con verso opposto alla velocità dei bosoni. L'atomo assorbe la frazione più numerosa di fotoni da un fascio incidente nella sua direzione di volo, in modo che l'effetto Doppler accentui l'abbassamento della temperatura fino a pochi μK . Si susseguirono diverse proposte per la fisica degli atomi-freddi ma l'ottimizzazione del meccanismo arrivò solo nei primi anni '90, grazie agli studi indipendenti portati avanti dai premi Nobel del 1997 Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudii e William D. Phillips. La tecnologia introdotta

da questi scienziati, tutt'oggi la più diffusa, è detta MOT (Trappola Magneto-Ottica): l'atomo in questo caso viene investito da tre diversi fasci di laser che si propagano nelle diverse direzioni dello spazio, assorbendo energia se la frequenza luminosa provoca la condizione di risonanza $h * \nu = \Delta E$. Si noti che la grandezza fisica ΔE corrisponde a precisi valori numerici in quanto indica la differenza energetica tra due livelli atomici (dato che gli orbitali sono contraddistinti da raggi ed energie quantizzate e non continue).

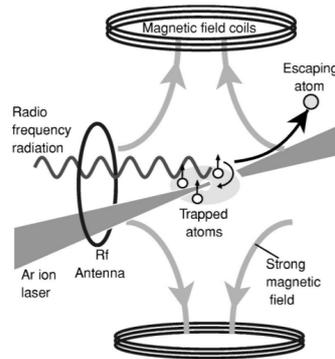


Figura 4.1. Schema del MOT utilizzato per intrappolare gli atomi.

La fase successiva all'utilizzo dei laser consiste nel meccanismo di “confinamento”: gli atomi vengono costretti a occupare una regione di spazio limitata in modo da diminuire la propria energia cinetica e per far sì che la temperatura venga mantenuta al di sotto del valore critico T_{cr} sotto cui si può creare frazione condensata della materia in esame. A tale scopo vengono aggiunte nella trappola di laser due spire percorse da corrente, in modo da creare un campo magnetico di quadrupolo che si annulla in corrispondenza del centro delle spire per poi crescere radialmente con andamento lineare. Nel processo di assorbimento dei fotoni il momento angolare dev'essere una quantità invariante e ciò induce negli atomi la tendenza a interagire con una maggiore probabilità con i fotoni che spingono gli stessi verso le zone in cui il campo si annulla, ovvero al centro del sistema di confinamento. Alcuni miliardi di atomi vengono quindi costretti a occupare un volume di pochi mm^3 , proprio nel centro del MOT. Sebbene il gas sia portato a temperature di pochi μK e la densità di stati sia di circa $\rho \sim 10^{-6}$, rimane necessario estremizzare tali valori con una seconda tecnica di raffreddamento “per evaporazione forzata”. Una percentuale rilevante delle particelle sottoposte all'influenza dei laser risulta occupare livelli energetici superiori allo stato fondamentale (stato di minima energia possibile), perciò è possibile eliminare dalla frazione confinata tali particelle. Si sfruttano le collisioni elastiche tra gli atomi intrappolati per causare la termalizzazione del gas: tale processo consiste nella drastica diminuzione dell'agitazione termica della fase pre-raffreddata. Affinché si realizzi tale risultato è necessario che gli atomi abbiano un tempo di vita sufficientemente lungo affinché si verifichi un alto numero di urti e si inneschi il processo; queste condizioni sono favorite se si opera, tramite delle opportune camere, in condizioni di vuoto spinto (ovvero con campi B disomogenei che presentino un

punto di minimo locale nel centro della regione interessata). Praticamente gli atomi pre-raffreddati tramite il MOT occupano un sottolivello energetico di degenerazione Zeeman e acquistano momento magnetico μ , sono perciò soggetti a forze di richiamo verso i punti di minimo del campo magnetico, ovvero proprio verso il centro di confinamento degli atomi. In realtà la configurazione del MOT di cui si era parlato nel paragrafo precedente non è ideale per il procedimento di evaporazione forzata, perché il fulcro del confinamento coincide con un punto in cui B arriva ad annullarsi. E' infatti necessario accumulare le particelle in un punto di minimo locale per il campo ma mantenendo $B \neq 0$. Al fine di ottimizzare gli effetti di raffreddamento delle fasi gassose, negli anni vennero elaborate diverse strategie per la realizzazione di apparati strumentali che creassero delle geometrie dei campi sempre più efficaci. Vennero infatti testate diverse tipologie di sorgenti e nell'esperimento chiave del 1995 il team di ricerca guidato da Wieman e Conrell optò per utilizzare, in aggiunta al campo di quadrupolo creato da un MOT "classico" (uno simile ai primi prototipi, con una particolare configurazione ideata nell'87 da Ioffe-Pritchard che prende il nome di "baseball-style trap"), un magnete rotante che mantenesse il campo B non nullo anche lungo l'asse congiungente i centri delle spire. Con queste modalità quindi vengono rimossi tutti gli atomi più caldi contraddistinti da energie maggiori: tali valori vengono selezionati con un opportuno settaggio delle intensità dei campi e delle relative frequenze. E' fondamentale a tal fine essere precisi con la regolazione dei parametri di controllo del MOT in modo da evitare collisioni di tipo non elastico, poiché potrebbero causare perdite eccessive di atomi (anche di quelli sufficientemente freddi) o diminuzione della densità nello spazio delle fasi. In questo modo sono state raggiunte temperature di nK e densità dell'ordine di 10^{-14}cm^{-3} , sufficienti per osservare direttamente la condensazione del gas.

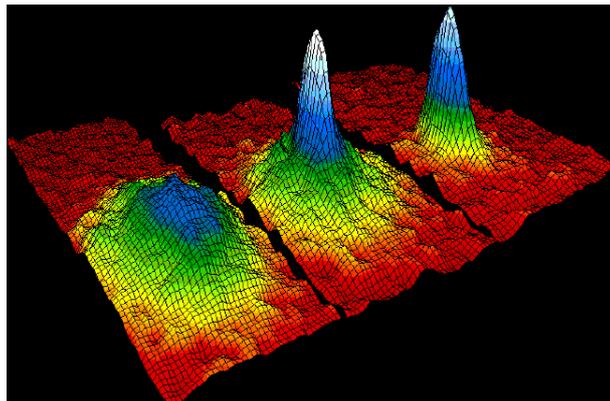


Figura 4.2. Grafico tridimensionale che mostra la creazione del condensato nei primi 7ms dall'inizio dell'espansione, con una temperatura di partenza di $2\mu\text{K}$ e $7 * 10^5$ atomi coinvolti

4.3 La definitiva scoperta

Prima di arrivare al successo sperimentale del 1995 seguirono anni di esperimenti e miglioramenti. Oltre all'affinamento degli apparati sperimentali e delle tecniche utilizzate, discusse nei paragrafi precedenti, fu infatti necessario anche testare diverse tipologie di molecole. Si susseguirono negli anni diverse tipologie di trappole per il processo di raffreddamento, man mano più funzionali per l'esito della ricerca: se nel caso di particelle cariche era sufficiente sfruttare la forza di Coulomb, per atomi neutri si utilizzarono trappole a pressione di radiazione, magnetiche oppure ottiche. In questi casi vengono sfruttati i fenomeni fisici del trasferimento di momento (tra atomo e campo di radiazione nel processo di assorbimento) o dell'interazione tra i momenti di dipolo e i campi, rispettivamente di tipo magnetico o di tipo elettrico per le trappole ottiche. Per quanto riguarda i campioni di particelle utilizzati, inizialmente si lavorò con molecole di idrogeno che vennero in seguito sostituite da gruppi alcalini, perché a basse temperature si verificavano prematuri cambiamenti di fase prima che si attuasse il meccanismo di creazione della BEC. Ma anche i metalli alcalini portarono problemi, nonostante avessero proprietà di collisione ben più favorevoli rispetto alle molecole di idrogeno. Difatti la temperatura a cui può verificarsi la creazione della BEC, detta "temperatura critica", è inversamente proporzionale alla massa e le molecole alcaline erano troppo pesanti per portare a risultati convincenti. Nel 1995 con gli esperimenti su un campione diluito di atomi di Rubidio si riuscirono finalmente ad ottenere i primi risultati, poi seguiti da diverse altre osservazioni negli anni successivi. Una volta che la trappola viene spenta e il gas è stato completamente raffreddato, si deve analizzare il processo di espansione del gas e viene registrato uno spettro di assorbimento tramite una camera CCD (Charged Couples Device).

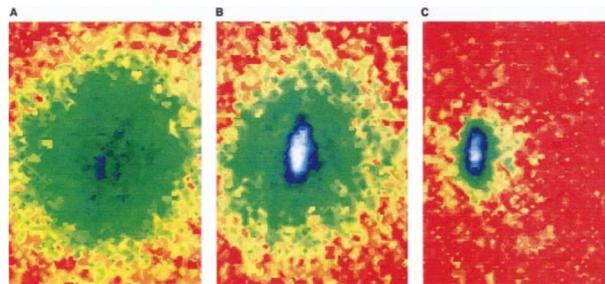


Figura 4.3. Spettro di assorbimento con scala cromatica che evidenzia la creazione di una frazione di condensato al di sotto della temperatura critica per un campione di Rubidio.

Nelle figure 4.2 e 4.3 vengono mostrati i risultati ottenuti da Cornell e Wieman nel primo esperimento con gli isotopi del Rubidio: i tre diversi grafici si riferiscono alla configurazione dello stesso gas a diverse temperature, maggiori o minori rispetto alla temperatura critica di condensazione T_c . Il grafico 4.3 [B] fu registrato per temperature

leggermente minori rispetto alla temperatura critica mentre il 4.3 [C] per temperature nettamente inferiori: in entrambi i casi si denota la formazione del condensato nel centro della camera, evidenziata dal picco di densità (denotato dal colore più freddo nell'immagine) e dalla forma di espansione completamente diversa. Si nota infatti dalle immagini precedenti che mentre l'espansione del gas in assenza di condensazione è isotropa e tende a una forma circolare, nel caso in cui è presente una frazione di BEC c'è anisotropia proprio a causa degli effetti quantistici. Nella "Nobel lecture" di Wieman e Cornell viene posta particolare attenzione ai processi di scattering dovuti agli urti di tipo elastico tra i diversi atomi del gas. Questi infatti possono causare importanti modifiche nello sviluppo del fenomeno della condensazione, a seconda che le interazioni siano di tipo attrattivo/repulsivo e in base alla loro intensità: era stato il problema più grande per i team di ricerca subito dopo il problema del raffreddamento. Per diverse sostanze infatti, durante il processo di condensazione, gli atomi subivano forza attrattive inattese a causa di interazioni particolarmente intense tra i diversi componenti del gas, ciò lo rendeva instabile portandolo a collassare e a non provocare il fenomeno della BEC. Fortunatamente dopo anni di lavoro e di migliorie tecniche si venne a capo di questo problema e la BEC venne osservata e definitivamente verificata anche dalla fisica sperimentale. Dagli anni successivi, fino ad arrivare ai giorni d'oggi, sono state scoperte diverse applicazioni di questo fenomeno, che interviene in diverse aree della fisica della materia nel regime delle basse energie.

Capitolo 5

Conclusioni

La condensazione di Bose-Einstein è stata e continua ad essere un argomento di studio molto importante per il mondo della fisica. La previsione teorica di questo effetto, tipico della fisica delle basse energie, avvenne nella prima parte del '900. Come per molte grandi scoperte scientifiche, anche in questo caso è risultato fondamentale l'intervento di due grandi menti del passato. Se la figura del fisico tedesco Albert Einstein è nota a tutti e non necessita di presentazioni, non si può dire lo stesso del collega indiano Satyendra Nath Bose. Egli passò la sua gioventù in India dove i suoi studi furono ostacolati da non poche difficoltà. Giunto in Europa nei primi anni '20 Bose colse l'occasione per portare i suoi contributi alla fisica teorica del tempo, collaborando con un già affermato Einstein. Questi due studiosi, oltre alla spiccata intelligenza, condivisero un'importante caratteristica personale: entrambi furono contraddistinti da una forte passione nei confronti della ricerca. I loro calcoli portarono a esiti sorprendenti ma ciò nonostante, per diversi anni, l'assenza di una controprova sperimentale della condensazione negò ai due fisici la dovuta riconoscenza per questi risultati. Con questo elaborato si spera di rendere omaggio, anche se in piccola parte, a questa mancanza. Negli ultimi vent'anni del secolo scorso, diversi centri di ricerca riportarono al mondo la notizia della scoperta sperimentale della condensazione di Bose-Einstein. Nel 2001 i tre fisici che furono a capo di questi esperimenti (tali Cornell, Wieman e Ketterle) vennero premiati con il Nobel per la fisica. L'effetto della BEC è tutt'oggi un importante oggetto di studio, la sua scoperta empirica ha infatti dato vita a un nuovo ramo della fisica della materia coinvolgendo migliaia di laboratori e fisici in tutto il mondo.

E' interessante notare come la BEC sia un fenomeno sempre più studiato e coinvolto nella ricerca scientifica moderna e contemporanea: nella seguente immagine è infatti riprodotta la crescita esponenziale riguardante il numero di articoli scientifici pubblicati annualmente che richiamano o sono in qualche modo collegati alla BEC.

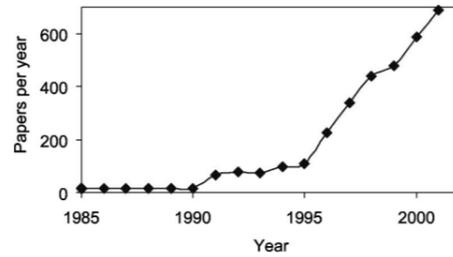


Figura 5.1. *Numero di articoli scientifici all'anno contenenti riferimenti alla BEC*

Bibliografia

- [1] Satyendra Nath Bose. “Planck’s Law and the Light-Quantum Hypothesis”. In: *Zeitschrift für Physik* 26 (1924), pp. 168–171.
- [2] Eric Allin Cornell e Carl Wieman. “Nobel Lecture: Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments”. In: *Reviews of Modern Physics* 74 (2002), pp. 875–893. URL: <https://journals.aps.org/rmp/pdf/10.1103/RevModPhys.74.875>.
- [3] Albert Einstein. “Quantum Theory of a Monoatomic Ideal Gas”. In: *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*. [traduzione inglese ad opera di L. Amendola] vol.2 (1924). URL: <https://www.thphys.uni-heidelberg.de/~amendola/otherstuff/einstein-paper-v2.pdf>.
- [4] Albert Einstein. “Quantum Theory of a Monoatomic Ideal Gas, Second Treatise”. In: *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* [traduzione inglese ad opera di Paul Terlunen] vol.12 (1925). URL: <https://wavewatching.net/lost-papers/quantum-theory-of-ideal-monoatomic-gases-final-draft/>.
- [5] Kerson Huang. *Meccanica statistica*. prima edizione italiana. 1997.
- [6] Wolfgang Ketterle. “Nobel lecture: When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser”. In: *Reviews of Modern Physics* 74 (2002), pp. 1131–1151. URL: <https://journals.aps.org/rmp/pdf/10.1103/RevModPhys.74.1131>.
- [7] Kameshwar Wali. *Satyendra Nath Bose, Life and times selected works*. 2009.
- [8] Kameshwar Wali. “The man behind Bose statistics”. In: *Physics today* (2006), pp. 46–52. URL: https://www.researchgate.net/publication/243391503_The_Man_Behind_Bose_Statistics.
- [9] Nouredine Zettil. *Quantum Mechanics, Concepts and Applications*. seconda edizione. 2009.

Ringraziamenti

Il primo grandissimo grazie va al professor Giulio Peruzzi che mi ha saggiamente guidato in questo percorso; Inoltre devo un grazie particolarmente sentito ai miei genitori e ad Angelica, per avermi sempre supportato e sopportato in ogni momento di difficoltà.